

# Zbierka generovaných úloh z matematiky

Jozef Fecenko

M A T E M A T I K A

HI 1

*Príklady*

1. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{x+6} + \ln(x^2 + 2x).$$

2. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \arcsin \frac{3x+1}{4x+2}.$$

3. Daná je funkcia dopytu

$$p = \frac{700}{q+5} - 79.$$

Nájdite inverznú funkciu k tejto funkcii a vypočítajte definičný obor a obor hodnôt týchto funkcií. Načrtnúte ich grafy. [5b]

4. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+6}{3x+5} \right)^{2x+5}.$$

5. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3^{x-2} - 2^{x-2}}{-4 \cdot 3^x + 4 \cdot 2^{x-2}}.$$

6. Daná je funkcia

$$f : y = \frac{x^3 - 10x^2 + 12x + 32}{-5x^2 + 20x + 160}.$$

a) Najdite asymptoty bez smernice a dokážte, že dané priamky sú asymptotami bez smernice. [2b]

b) Najdite asymptoty so smernicou. [3b]

7. Najdite asymptoty grafu funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{36x^2 - 2x - 6}.$$

8. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{12-x} - 4}{x+4}.$$

9. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{25x^2 + 3x - 2} - \sqrt{25x^2 + 2x - 2} \right).$$

10. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + 16}.$$

a) Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [3; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [3; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

11. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie

$$f : y = \frac{-x - 1}{3x + 4}$$

v bode  $A = [3; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . Rovnice napíšte vo všeobecnom tvare  $ax + by + c = 0$ . [5b]

12. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 - x + 5}.$$

a) Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-4; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-4; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

13. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 5x}{x^3}.$$

14. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x - 8x}{x^3}.$$

15. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

16. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x - 5x}{x^3}.$$

17. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2}.$$

18. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x) - 3x}{x^2}.$$

19. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}.$$

20. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4}.$$

21. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x - 4x}{\sin 5x - 5x}.$$

22. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - 2x}{\operatorname{tg} 5x - 5x}.$$

23. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$$

24. Daná je funkcia

$$f : y = -2x^3 - 3x^2 + 72x.$$

a) Nájdite intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdite lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

25. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^4 - 54x^2 + 2.$$

26. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = ((x + 2)(x - 4))^2.$$

27. Je daná funkcia

$$f : y = \ln(-2 - 3x - x^2).$$

a) Nájdite intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdite lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

28. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 768 + 11x - 0,01x^2$$

a funkcii celkových príjmov

$$R(x) = 23x - 0,04x^2.$$

a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [4b]

b) Vypočítajte výšku maximálneho zisku. [1b]

29. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 468 + 15x - 0,02x^2$$

a dopytovej funkcii

$$p(x) = 24 - 0,04x.$$

- a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [3b]  
 b) Vypočítajte pri tejto úrovni cenu za jednotku produkcie. [2b]

**30.** Daná je funkcia celkových nákladov

$$C(x) = 0,01x^3 + 8x + 10240.$$

Pri akej produkcii budú priemerné náklady minimálne? [5b]

**31.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^5 + 30x^4 + 80x^3 - x + 1.$$

**32.** Daná je funkcia

$$f : y = x^4 + 4x^3$$

- a) Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie  $f$ . [3b]  
 b) Nájdite inflexné body funkcie  $f$ . [2b]

**33.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = \ln \frac{x+2}{x+4}.$$

**34.** Daná je funkcia dopytu  $q = 12\sqrt{125 - 5p}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 5$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**35.** Daná je funkcia dopytu  $q = 6\sqrt{2420 - 2p^2}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 11$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**36.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 2x + 240$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte marginálne náklady pri úrovni produkcie  $x_0 = 82$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**37.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 2x + 120$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte elasticitu celkových nákladov pri úrovni produkcie  $x_0 = 56$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**38.** Daná je funkcia dopytu  $q = 12\sqrt{120 - 2p}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 15$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**39.** Daná je funkcia dopytu  $q = 8\sqrt{1323 - 3p^2}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 7$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**40.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x - y^2} + \ln(4 - x - y)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**41.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} + \ln(64 - x^2 - y^2)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**42.** Určte definičný obor funkcie  $f$  a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{36 - y^2}$$

**43.** Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{(49 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 25)}$$

44. Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \arcsin(-4x - y + 2)$$

45. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \ln(64 - x^2 - y^2)$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

46. Daná je funkcia  $f : z = \ln \frac{5x^2 - 5y^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

47. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

48. Daná je funkcia  $f : z = \ln \sqrt{5x^2y + 2xy + 3y^2}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

49. Daná je funkcia  $f : z = \operatorname{arctg} \frac{5x + 7y}{2x + 7y}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

50. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\ln \frac{2x + 7y}{4x + 3y}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

51. Daná je funkcia celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie výrobku  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie výrobku  $V_2$ . Pomocou prvých parciálnych derivácií vypočítajte ako sa približne zmení zisk:

a) ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení [2b]

b) ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení [1b]

c) ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu. [2b]

Ak viete, že súčasná produkcia je  $x_0 = 11$  a  $y_0 = 2$  a funkcia celkového zisku je:

$$P(x,y) = -10x^2 - 18y^2 - 12xy + 320x + 336y - 1460$$

52. Vypočítajte elasticitu funkcie celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie  $V_2$  pri úrovni produkcie  $x_0 = 3$  a  $y_0 = 6$

a) vzhľadom na vstup  $x$  [3b]

b) vzhľadom na vstup  $y$  [2b]

ak funkcia celkového zisku je  $P(x,y) = -5x^2 - 10y^2 - 10xy + 140x + 230y - 692$

Výsledky ekonomicky interpretujte.

53. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = 5700 - 13p_1 + 18p_2$$

$$q_2 = 5800 + 17p_1 - 13p_2$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 30, p_2 = 32$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

54. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = \sqrt{8700 - 29p_1^2 + 19p_2^2}$$

$$q_2 = \sqrt{15400 + 18p_1^2 - 11p_2^2}$$

kde  $p_1$ ,  $q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2$ ,  $q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 13$ ,  $p_2 = 10$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

55. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -13x^2 - 5y^2 - 14xy + 42x + 30y + 35$$

56. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -x^2 - 65y^2 + 6xy - 32x + 432y + 2$$

57. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 2x^3 - 2y^3 - 3x^2 + 2y^2$$

58. Nájdite viazané extrémny funkcie  $f(x,y) = 3x + 6y$  pri väzbe  $4x^2 - 24xy + 52y^2 = 267264$ . [5b]

59. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{5x^2 + 18xy + 2y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 2x + 3y$ . Vypočítajte aké maximálne množstvo jednotiek produkcie je možno vyprodukovať, ak sa do vstupov investovalo 110 eur? Aké budú vtedy vstupy  $x$ ,  $y$ ? [5b]

60. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{4x^2 + 15xy + 2y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 5x + 9y$ . Vypočítajte pri akých minimálnych nákladoch na vstupy sa vyprodukuje  $\sqrt{58093}$  jednotiek produkcie. Určte odpovedajúcu veľkosť jednotlivých vstupov  $x$ ,  $y$ . [5b]

61. Firma produkuje týždenne 8 hl kofoly a 10 hl viney pri funkcii celkového zisku  $P(x,y) = -2y^2 - 2x^2 + 60y + 48x$ , kde  $x$  je objem produkcie kofoly a  $y$  objem produkcie viney. Chce zvýšiť celkovú týždennú produkciu o 6 hl. Koľko hl kofoly a viney by mala firma produkovať, aby pri týchto obmedzených podmienkach dosiahla maximalny zisk? Aký bol zisk firmy pred zvýšením a po zvýšení produkcie? [5b]

62. Nájdite absolútne extrémny funkcie  $f : z = x^2 + y^2 - 10x - 24y$  na množine  $M = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 100\}$ . [5b]

63. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{3x + 2}{x + 2} dx.$$

64. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{1}{(x + 1)^6} dx$$

65. Vypočítajte [5b]

$$\int \sin^4 x \cos x dx.$$

66. Vypočítajte [5b]

$$\int \cos^8 x \sin x \, dx.$$

67. Vypočítajte [5b]

$$\int x(x+9)^5 \, dx.$$

68. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1} \, dx.$$

69. Vypočítajte [5b]

$$\int x\sqrt{x^2+3} \, dx.$$

70. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+7x+10}} \, dx.$$

71. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\ln^6 x}{x} \, dx.$$

72. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{x^2+1} \, dx.$$

73. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{3x-1}{(x-3)^2} \, dx.$$

74. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x-2}{(x+5)(x+3)} \, dx.$$

75. Vypočítajte [5b]

$$\int (4x+4) \sin 3x \, dx.$$

76. Vypočítajte [5b]

$$\int (10x+3) \cos 5x \, dx.$$

77. Vypočítajte [5b]

$$\int (10x + 4)e^{3x} dx.$$

78. Vypočítajte [5b]

$$\int (4x - 4) \ln x dx.$$

79. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $5x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(5x^2) dx.$$

80. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $5x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(5x^2) dx.$$

81. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $\ln(x) = t$ ) [5b]

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

82. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/4} x \sin(4x) dx.$$

83. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/3} x \cos(3x) dx.$$

84. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^1 x e^{4x} dx.$$

85. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f : y = -x^2 - 4x - 3$  a súradnou osou  $o_x$ . [5b]

86. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f$  a súradnou osou  $o_x$ , ak  $f : y = x^3 - 9x^2 + 20x$ . [5b]

87. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -x^2 - 3x + 4$  a  $g : y = -4x + 4$ . [5b]

88. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -x^2 - 2x + 1$  a  $g : y = -2x^2 - 6x + 1$ . [5b]



**89.** Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií

$$f : y = x^3 - x^2 + 2x + 4 \text{ a } g : y = 8x + 4. \quad [5b]$$

**90.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 27$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 55$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že zisk pri produkcii 827 jednotiek produkcie je 6517,71 . [5b]

**91.** Daná je funkcia marginálneho zisku  $MP(x) = -0,02x + 27$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 53$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že náklady pri produkcii 803 jednotiek produkcie sú 23541,91 p. j. [5b]

**92.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 27$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 55$  pri produkcii  $x$  výrobkov. Vypočítajte aký zisk by firma dosiahla pri produkcii 1108 výrobkov, ak viete, že zisk pri produkcii 830 výrobkov je 6552 p. j. [5b]

*Príklady*

1. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{x-1} + \ln(x^2 - 6x + 8).$$

2. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \arcsin \frac{3x-3}{-x-5}.$$

3. Daná je funkcia dopytu

$$p = \frac{800}{q+6} - 23.$$

Nájdite inverznú funkciu k tejto funkcii a vypočítajte definičný obor a obor hodnôt týchto funkcií. Načrtnite ich grafy. [5b]

4. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x+10}{7x+5} \right)^{6x+2}.$$

5. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot 3^{x-1} - 5 \cdot 2^{x-2}}{3 \cdot 3^{x-2} - 2^{x-2}}.$$

6. Daná je funkcia

$$f : y = \frac{-3x^3 - 5x^2 + x + 3}{-3x^2 + 3}.$$

a) Najdite asymptoty bez smernice a dokážte, že dané priamky sú asymptotami bez smernice. [2b]

b) Najdite asymptoty so smernicou. [3b]

7. Najdite asymptoty grafu funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{81x^2 + x - 7}.$$

8. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x+2}.$$

9. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{16x^2 - 4x + 3} - \sqrt{16x^2 + 3x - 4} \right).$$

10. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + 1600}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-9; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-9; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

11. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie

$$f : y = \frac{-2x + 3}{-x - 3}$$

v bode  $A = [3; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . Rovnice napíšte vo všeobecnom tvare  $ax + by + c = 0$ . [5b]

12. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + 5x + 30}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [1; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [1; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

13. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - 7x}{x^3}.$$

14. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x - 7x}{x^3}.$$

15. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x - 4x}{x^3}.$$

16. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 9x - 9x}{x^3}.$$

17. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 5x - 1}{x^2}.$$

18. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x) - 6x}{x^2}.$$

19. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - 25x^2}{x^4}.$$

20. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^4}.$$

21. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2x}{\sin x - x}.$$

22. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - 2x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$$

23. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - 4x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$$

24. Daná je funkcia

$$f : y = -2x^3 - 18x^2 - 48x.$$

a) Nájďte intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

25. Nájďte intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 2.$$

26. Nájďte intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = ((x - 1)(x + 4))^2.$$

27. Je daná funkcia

$$f : y = \ln(8 - 7x - x^2).$$

a) Nájďte intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

28. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 864 + 19x - 0,02x^2$$

a funkcii celkových príjmov

$$R(x) = 35,8x - 0,06x^2.$$

a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [4b]

b) Vypočítajte výšku maximálneho zisku. [1b]

29. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 1950 + 13x - 0,03x^2$$

a dopytovej funkcii

$$p(x) = 37,5 - 0,08x.$$

- a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [3b]  
 b) Vypočítajte pri tejto úrovni cenu za jednotku produkcie. [2b]

**30.** Daná je funkcia celkových nákladov

$$C(x) = 0,01x^3 + 7x + 2500000.$$

Pri akej produkcii budú priemerné náklady minimálne? [5b]

**31.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^5 - 15x^4 - 40x^3 - x + 1.$$

**32.** Daná je funkcia

$$f : y = x^4 + 4x^3 - 18x^2$$

- a) Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie  $f$ . [3b]  
 b) Nájdite inflexné body funkcie  $f$ . [2b]

**33.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = \ln \frac{x+2}{x+3}.$$

**34.** Daná je funkcia dopytu  $q = 12\sqrt{108 - p}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 12$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**35.** Daná je funkcia dopytu  $q = 7\sqrt{1344 - 3p^2}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 8$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**36.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 5x + 270$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte marginálne náklady pri úrovni produkcie  $x_0 = 78$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**37.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 9x + 240$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte elasticitu celkových nákladov pri úrovni produkcie  $x_0 = 234$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**38.** Daná je funkcia dopytu  $q = 9\sqrt{264 - 4p}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 6$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**39.** Daná je funkcia dopytu  $q = 7\sqrt{4732 - 4p^2}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 13$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**40.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x - y^2} + \ln(5 - x - y)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**41.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(49 - x^2 - y^2)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**42.** Určte definičný obor funkcie  $f$  a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$$

**43.** Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$$

44. Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \arcsin(-5x - 3y)$$

45. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} + \ln(64 - x^2 - y^2)$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

46. Daná je funkcia  $f : z = \ln \frac{6x^2 - 2y^2}{\sqrt{5x^2 + 2y^2}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

47. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

48. Daná je funkcia  $f : z = \ln \sqrt{6x^2y + 6xy + 4y^2}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

49. Daná je funkcia  $f : z = \operatorname{arctg} \frac{6x + 2y}{3x + 7y}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

50. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\ln \frac{5x + 3y}{7x + 6y}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

51. Daná je funkcia celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie výrobku  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie výrobku  $V_2$ . Pomocou prvých parciálnych derivácií vypočítajte ako sa približne zmení zisk:

a) ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení [2b]

b) ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení [1b]

c) ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu. [2b]

Ak viete, že súčasná produkcia je  $x_0 = 12$  a  $y_0 = 2$  a funkcia celkového zisku je:

$$P(x, y) = -32x^2 - y^2 - 8xy + 936x + 122y - 3428$$

52. Vypočítajte elasticitu funkcie celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie  $V_2$  pri úrovni produkcie  $x_0 = 7$  a  $y_0 = 4$

a) vzhľadom na vstup  $x$  [3b]

b) vzhľadom na vstup  $y$  [2b]

ak funkcia celkového zisku je  $P(x, y) = -9x^2 - y^2 + 162x + 14y - 389$

Výsledky ekonomicky interpretujte.

53. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = 4800 - 26p_1 + 28p_2$$

$$q_2 = 7600 + 22p_1 - 15p_2$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 32, p_2 = 36$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

54. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = \sqrt{10400 - 15p_1^2 + 25p_2^2}$$

$$q_2 = \sqrt{15900 + 26p_1^2 - 23p_2^2}$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 14, p_2 = 12$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

**55.** Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 2x^2 + 2y^2 + 12x + 8$$

**56.** Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -2x^2 - y^2 + 2xy - 8y - 5$$

**57.** Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 3x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2$$

**58.** Nájdite viazané extrémny funkcie  $f(x,y) = 4x + 3y$  pri väzbe  $5x^2 - 30xy + 65y^2 = 578000$ . [5b]

**59.** Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{3x^2 + 8xy + 3y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 4x + 4y$ . Vypočítajte aké maximálne množstvo jednotiek produkcie je možno vyprodukovať, ak sa do vstupov investovalo 64 eur? Aké budú vtedy vstupy  $x, y$ ? [5b]

**60.** Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{5x^2 + 13xy + 4y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 8x + 8y$ . Vypočítajte pri akých minimálnych nákladoch na vstupy sa vyprodukuje  $\sqrt{22784}$  jednotiek produkcie. Určte odpovedajúcu veľkosť jednotlivých vstupov  $x, y$ . [5b]

**61.** Firma produkuje týždenne 9 hl kofoly a 9 hl viney pri funkcii celkového zisku  $P(x,y) = -5y^2 + 6xy - 2x^2 + 56y - 28x$ , kde  $x$  je objem produkcie kofoly a  $y$  objem produkcie viney. Chce zvýšiť celkovú týždennú produkciu o 6 hl. Koľko hl kofoly a viney by mala firma produkovať, aby pri týchto obmedzených podmienkach dosiahla maximalny zisk? Aký bol zisk firmy pred zvýšením a po zvýšení produkcie? [5b]

**62.** Nájdite absolútne extrémny funkcie  $f : z = x^2 + y^2 - 40x + 96y$  na množine  $M = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 225\}$ . [5b]

**63.** Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{8x + 1}{x + 8} dx.$$

**64.** Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{1}{(7x + 7)^5} dx.$$

**65.** Vypočítajte [5b]

$$\int \sin^5 x \cos x dx.$$

66. Vypočítajte [5b]

$$\int \cos^5 x \sin x \, dx.$$

67. Vypočítajte [5b]

$$\int x(x+5)^{11} \, dx.$$

68. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{7x+8}{x^2+1} \, dx.$$

69. Vypočítajte [5b]

$$\int x\sqrt{x^2+11} \, dx.$$

70. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+8x+2}} \, dx.$$

71. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\ln^5 x}{x} \, dx.$$

72. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{x^2+1} \, dx.$$

73. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{6x+5}{(x+1)^2} \, dx.$$

74. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x+1)} \, dx.$$

75. Vypočítajte [5b]

$$\int (7x+4) \sin 2x \, dx.$$

76. Vypočítajte [5b]

$$\int (2x+4) \cos 7x \, dx.$$



77. Vypočítajte [5b]

$$\int (5x + 4)e^{7x} dx.$$

78. Vypočítajte [5b]

$$\int (8x - 2) \ln x dx.$$

79. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $5x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(5x^2) dx.$$

80. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $4x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(4x^2) dx.$$

81. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $\ln(x) = t$ ) [5b]

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

82. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/5} x \sin(5x) dx.$$

83. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/4} x \cos(4x) dx.$$

84. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^1 x e^{5x} dx.$$

85. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f : y = -x^2 - 7x + 8$  a súradnou osou  $o_x$ . [5b]

86. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f$  a súradnou osou  $o_x$ , ak  $f : y = x^3 + 7x^2 + 12x$ . [5b]

87. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = x^2 + x + 2$  a  $g : y = +8$ . [5b]

88. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = 2x^2 + 2x + 2$  a  $g : y = x^2 - x + 2$ . [5b]

**89.** Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií

$$f : y = x^3 - x^2 + x - 4 \text{ a } g : y = 3x - 4. \quad [5b]$$

**90.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 25$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 51$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že zisk pri produkcii 767 jednotiek produkcie je 5610,11 . [5b]

**91.** Daná je funkcia marginálneho zisku  $MP(x) = -0,02x + 26$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 51$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že náklady pri produkcii 768 jednotiek produkcie sú 21750,76 p. j. [5b]

**92.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 27$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 54$  pri produkcii  $x$  výrobkov. Vypočítajte aký zisk by firma dosiahla pri produkcii 1081 výrobkov, ak viete, že zisk pri produkcii 811 výrobkov je 6207,79 p. j. [5b]

*Príklady*

1. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{x-2} + \ln(x^2 - 10x + 24).$$

2. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \arcsin \frac{-5x+3}{x+4}.$$

3. Daná je funkcia dopytu

$$p = \frac{200}{q+2} - 72.$$

Nájdite inverznú funkciu k tejto funkcii a vypočítajte definičný obor a obor hodnôt týchto funkcií. Načrtnite ich grafy. [5b]

4. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+10}{4x+2} \right)^{6x+2}.$$

5. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 \cdot 3^{x-1} - 2^{x-1}}{-5 \cdot 3^{x-2} - 2^{x+1}}.$$

6. Daná je funkcia

$$f : y = \frac{-6x^3 + 54x^2 - 53x + 40}{5x^2 - 15x - 200}.$$

a) Najdite asymptoty bez smernice a dokážte, že dané priamky sú asymptotami bez smernice. [2b]

b) Najdite asymptoty so smernicou. [3b]

7. Najdite asymptoty grafu funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{64x^2 + 5x - 2}.$$

8. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{6-x} - 3}{x+3}.$$

9. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{9x^2 - 2x + 5} - \sqrt{9x^2 - 4x + 4} \right).$$

10. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + 3136}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [33; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [33; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

11. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie

$$f : y = \frac{4x - 1}{-x + 3}$$

v bode  $A = [2; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . Rovnice napíšte vo všeobecnom tvare  $ax + by + c = 0$ . [5b]

12. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + x + 5}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [4; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [4; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

13. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - 9x}{x^3}.$$

14. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x - 3x}{x^3}.$$

15. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - 3x}{x^3}.$$

16. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x - 8x}{x^3}.$$

17. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x^2}.$$

18. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2x}{x^2}.$$

19. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x - 16x^2}{x^4}.$$

20. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x + 16x^2 - 2}{x^4}.$$

21. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x - 4x}{\sin x - x}.$$

22. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x - 5x}{\operatorname{tg} 3x - 3x}.$$

23. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$$

24. Daná je funkcia

$$f : y = -2x^3 - 6x^2 + 18x.$$

a) Nájdite intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdite lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

25. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^4 - 28x^3 + 72x^2 - 3.$$

26. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = ((x - 3)(x + 5))^2.$$

27. Je daná funkcia

$$f : y = \ln(-14 - 9x - x^2).$$

a) Nájdite intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdite lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

28. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 945 + 15x - 0,02x^2$$

a funkcii celkových príjmov

$$R(x) = 32x - 0,07x^2.$$

a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [4b]

b) Vypočítajte výšku maximálneho zisku. [1b]

29. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 640 + 17x - 0,03x^2$$

a dopytovej funkcii

$$p(x) = 31,8 - 0,07x.$$

- a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [3b]  
 b) Vypočítajte pri tejto úrovni cenu za jednotku produkcie. [2b]

**30.** Daná je funkcia celkových nákladov

$$C(x) = 0,01x^3 + 12x + 20.$$

Pri akej produkcii budú priemerné náklady minimálne? [5b]

**31.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^5 - 10x^3 + 2x + 1.$$

**32.** Daná je funkcia

$$f : y = -x^4 + 14x^3 - 72x^2.$$

- a) Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie  $f$ . [3b]  
 b) Nájdite inflexné body funkcie  $f$ . [2b]

**33.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = \ln \frac{x+5}{x-2}.$$

**34.** Daná je funkcia dopytu  $q = 12\sqrt{306 - 3p}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 17$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**35.** Daná je funkcia dopytu  $q = 5\sqrt{2178 - 2p^2}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 11$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**36.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 4x + 150$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte marginálne náklady pri úrovni produkcie  $x_0 = 172$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**37.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 5x + 210$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte elasticitu celkových nákladov pri úrovni produkcie  $x_0 = 8$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**38.** Daná je funkcia dopytu  $q = 11\sqrt{72 - 2p}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 6$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**39.** Daná je funkcia dopytu  $q = 9\sqrt{3718 - 2p^2}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 13$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**40.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x - y^2} + \ln(6 - x - y)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**41.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(49 - x^2 - y^2)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**42.** Určte definičný obor funkcie  $f$  a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{\sqrt{64 - y^2}}$$

**43.** Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{(36 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$$

44. Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \arcsin(5x + 2y)$$

45. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} + \ln(36 - x^2 - y^2)$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

46. Daná je funkcia  $f : z = \ln \frac{5x^2 - 5y^2}{\sqrt{2x^2 + 5y^2}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

47. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

48. Daná je funkcia  $f : z = \ln \sqrt{4x^2y + 4xy + 3y^2}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

49. Daná je funkcia  $f : z = \operatorname{arctg} \frac{2x + 3y}{5x + 6y}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

50. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\ln \frac{5x + 4y}{4x + 7y}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

51. Daná je funkcia celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie výrobku  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie výrobku  $V_2$ . Pomocou prvých parciálnych derivácií vypočítajte ako sa približne zmení zisk:

a) ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení [2b]

b) ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení [1b]

c) ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu. [2b]

Ak viete, že súčasná produkcia je  $x_0 = 6$  a  $y_0 = 9$  a funkcia celkového zisku je:

$$P(x,y) = -25x^2 - 2y^2 + 2xy + 376x + 32y - 848$$

52. Vypočítajte elasticitu funkcie celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie  $V_2$  pri úrovni produkcie  $x_0 = 12$  a  $y_0 = 8$

a) vzhľadom na vstup  $x$  [3b]

b) vzhľadom na vstup  $y$  [2b]

ak funkcia celkového zisku je  $P(x,y) = -13x^2 - 10y^2 + 18xy + 166x - 32y - 493$

Výsledky ekonomicky interpretujte.

53. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = 6100 - 10p_1 + 11p_2$$

$$q_2 = 4800 + 26p_1 - 28p_2$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 34, p_2 = 33$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

54. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = \sqrt{17500 - 29p_1^2 + 29p_2^2}$$

$$q_2 = \sqrt{16100 + 24p_1^2 - 10p_2^2}$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 16, p_2 = 11$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

55. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -2x^2 - y^2 + 2xy + 6x - 8y + 7$$

56. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -7x^2 - 23y^2 - 8xy - 38x - 146y + 7$$

57. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -x^3 + 2y^3 + 2x^2 - 2y^2$$

58. Nájdite viazané extrémny funkcie  $f(x,y) = 7x + 6y$  pri väzbe  $4x^2 - 24xy + 72y^2 = 2695680$ . [5b]

59. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{x^2 + 5xy + y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 3x + 2y$ . Vypočítajte aké maximálne množstvo jednotiek produkcie je možno vyprodukovať, ak sa do vstupov investovalo 34 eur? Aké budú vtedy vstupy  $x, y$ ? [5b]

60. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{3x^2 + 18xy + 3y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 8x + 3y$ . Vypočítajte pri akých minimálnych nákladoch na vstupy sa vyprodukuje  $\sqrt{61344}$  jednotiek produkcie. Určte odpovedajúcu veľkosť jednotlivých vstupov  $x, y$ . [5b]

61. Firma produkuje týždenne 12 hl kofoly a 8 hl viney pri funkcii celkového zisku  $P(x,y) = -2y^2 + 6xy - 5x^2 - 66y + 118x$ , kde  $x$  je objem produkcie kofoly a  $y$  objem produkcie viney. Chce zvýšiť celkovú týždennú produkciu o 7 hl. Koľko hl kofoly a viney by mala firma produkovať, aby pri týchto obmedzených podmienkach dosiahla maximalny zisk? Aký bol zisk firmy pred zvýšením a po zvýšení produkcie? [5b]

62. Nájdite absolútne extrémny funkcie  $f : z = x^2 + y^2 + 126x + 32y$  na množine  $M = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 324\}$ . [5b]

63. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{7x + 4}{x + 9} dx.$$

64. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{1}{(7x + 1)^7} dx.$$

65. Vypočítajte [5b]

$$\int \sin^7 x \cos x dx.$$



66. Vypočítajte [5b]

$$\int \cos^5 x \sin x \, dx.$$

67. Vypočítajte [5b]

$$\int x(x+4)^6 \, dx.$$

68. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{4x+7}{x^2+1} \, dx.$$

69. Vypočítajte [5b]

$$\int x\sqrt{x^2+2} \, dx.$$

70. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}} \, dx.$$

71. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\ln^{11} x}{x} \, dx.$$

72. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{x^2+1} \, dx.$$

73. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{11x-2}{(x+2)^2} \, dx.$$

74. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{9x+1}{(x+4)(x+1)} \, dx.$$

75. Vypočítajte [5b]

$$\int (9x+5) \sin 6x \, dx.$$

76. Vypočítajte [5b]

$$\int (5x+1) \cos 5x \, dx.$$

77. Vypočítajte [5b]

$$\int (4x - 2)e^{2x} dx.$$

78. Vypočítajte [5b]

$$\int (10x + 4) \ln x dx.$$

79. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $2x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(2x^2) dx.$$

80. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $4x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(4x^2) dx.$$

81. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $\ln(x) = t$ ) [5b]

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

82. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/4} x \sin(4x) dx.$$

83. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx.$$

84. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^1 x e^{2x} dx.$$

85. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f : y = x^2 + 10x + 24$  a súradnou osou  $o_x$ . [5b]

86. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f$  a súradnou osou  $o_x$ , ak  $f : y = x^3 + 3x^2 - 4x$ . [5b]

87. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -2x^2 + 2x - 3$  a  $g : y = 10x + 3$ . [5b]

88. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -2x^2 - 3x - 4$  a  $g : y = -4x^2 - 7x + 12$ . [5b]

89. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií

$$f : y = x^3 + 5x^2 - 3x - 1 \text{ a } g : y = -9x - 1. \quad [5b]$$

90. Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 24$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 48$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že zisk pri produkcii 730 jednotiek produkcie je 4992

[5b]

91. Daná je funkcia marginálneho zisku  $MP(x) = -0,02x + 23$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 45$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že náklady pri produkcii 683 jednotiek produkcie sú 16973,11

p. j.

[5b]

92. Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 22$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 45$  pri produkcii  $x$  výrobkov. Vypočítajte aký zisk by firma dosiahla pri produkcii 908 výrobkov, ak viete, že zisk pri produkcii 681 výrobkov je 4413,39

p. j.

[5b]

*Príklady*

1. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{x+4} + \ln(x^2 - 8x + 17).$$

2. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \arcsin \frac{3x-2}{-4x+2}.$$

3. Daná je funkcia dopytu

$$p = \frac{900}{q+4} - 143.$$

Nájdite inverznú funkciu k tejto funkcii a vypočítajte definičný obor a obor hodnôt týchto funkcií. Načrtnite ich grafy. [5b]

4. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+7} \right)^{7x+10}.$$

5. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 2^x}{4 \cdot 3^{x+1} + 4 \cdot 2^{x+1}}.$$

6. Daná je funkcia

$$f : y = \frac{-6x^3 + 30x^2 - 19x - 20}{-6x^2 - 30x + 216}.$$

a) Najdite asymptoty bez smernice a dokážte, že dané priamky sú asymptotami bez smernice. [2b]

b) Najdite asymptoty so smernicou. [3b]

7. Najdite asymptoty grafu funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{25x^2 + 7x + 6}.$$

8. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1}.$$

9. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 3} \right).$$

10. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + 144}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-35; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-35; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

11. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie

$$f : y = \frac{x - 3}{x + 2}$$

v bode  $A = [3; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . Rovnice napíšte vo všeobecnom tvare  $ax + by + c = 0$ . [5b]

12. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 - 2x + 6}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-1; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-1; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

13. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - 9x}{x^3}.$$

14. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - 2x}{x^3}.$$

15. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x - 5x}{x^3}.$$

16. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 9x - 9x}{x^3}.$$

17. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 6x - 1}{x^2}.$$

18. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

19. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - 9x^2}{x^4}.$$

20. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 5x + 25x^2 - 2}{x^4}.$$

21. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{\sin 4x - 4x}.$$

22. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - 2x}{\operatorname{tg} 3x - 3x}.$$

23. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$$

24. Daná je funkcia

$$f : y = -2x^3 - 21x^2 - 72x.$$

a) Nájďte intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte lokálne extrémne funkcie  $f$ . [2b]

25. Nájďte intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^4 + 4x^3 - 72x^2 - 4.$$

26. Nájďte intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = ((x - 2)(x + 3))^2.$$

27. Je daná funkcia

$$f : y = \ln(-16 + 10x - x^2).$$

a) Nájďte intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte lokálne extrémne funkcie  $f$ . [2b]

28. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 1575 + 10x - 0,03x^2$$

a funkcii celkových príjmov

$$R(x) = 32x - 0,08x^2.$$

a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [4b]

b) Vypočítajte výšku maximálneho zisku. [1b]

29. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 174 + 15x - 0,02x^2$$

a dopytovej funkcii

$$p(x) = 24,3 - 0,05x.$$

- a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [3b]  
 b) Vypočítajte pri tejto úrovni cenu za jednotku produkcie. [2b]

**30.** Daná je funkcia celkových nákladov

$$C(x) = 0,01x^3 + 5x + 81920.$$

Pri akej produkcii budú priemerné náklady minimálne? [5b]

**31.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^5 + 35x^4 + 120x^3 + 2x + 1.$$

**32.** Daná je funkcia

$$f : y = -x^4 - 8x^3 + 30x^2.$$

- a) Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie  $f$ . [3b]  
 b) Nájdite inflexné body funkcie  $f$ . [2b]

**33.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = \ln \frac{x-4}{x+4}.$$

**34.** Daná je funkcia dopytu  $q = 10\sqrt{50-p}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 10$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**35.** Daná je funkcia dopytu  $q = 7\sqrt{3993-3p^2}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 11$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**36.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 9x + 180$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte marginálne náklady pri úrovni produkcie  $x_0 = 154$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**37.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 3x + 60$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte elasticitu celkových nákladov pri úrovni produkcie  $x_0 = 28$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**38.** Daná je funkcia dopytu  $q = 12\sqrt{200-5p}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 10$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**39.** Daná je funkcia dopytu  $q = 3\sqrt{648-2p^2}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 6$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**40.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x-y^2} + \ln(7-x-y)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**41.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x^2+y^2-25} + \ln(36-x^2-y^2)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**42.** Určte definičný obor funkcie  $f$  a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{y^2-9}$$

**43.** Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)}$$

44. Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \arcsin(-6x + 4y - 4)$$

45. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 25} + \ln(121 - x^2 - y^2)$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

46. Daná je funkcia  $f : z = \ln \frac{2x^2 - 4y^2}{\sqrt{6x^2 + 6y^2}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

47. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

48. Daná je funkcia  $f : z = \ln \sqrt{4x^2y + 6xy + 7y^2}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

49. Daná je funkcia  $f : z = \operatorname{arctg} \frac{4x + 7y}{3x + 7y}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

50. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\ln \frac{5x + 7y}{4x + 2y}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

51. Daná je funkcia celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie výrobku  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie výrobku  $V_2$ . Pomocou prvých parciálnych derivácií vypočítajte ako sa približne zmení zisk:

a) ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení [2b]

b) ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení [1b]

c) ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu. [2b]

Ak viete, že súčasná produkcia je  $x_0 = 6$  a  $y_0 = 6$  a funkcia celkového zisku je:

$$P(x, y) = -9x^2 - 18y^2 + 18xy - 18x + 180y - 369$$

52. Vypočítajte elasticitu funkcie celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie  $V_2$  pri úrovni produkcie  $x_0 = 6$  a  $y_0 = 11$

a) vzhľadom na vstup  $x$  [3b]

b) vzhľadom na vstup  $y$  [2b]

ak funkcia celkového zisku je  $P(x, y) = -25x^2 - 9y^2 + 18xy + 148x + 108y - 674$

Výsledky ekonomicky interpretujte.

53. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = 5700 - 15p_1 + 24p_2$$

$$q_2 = 6600 + 21p_1 - 15p_2$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 44, p_2 = 47$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

54. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = \sqrt{17100 - 18p_1^2 + 15p_2^2}$$



$$q_2 = \sqrt{8000 + 27p_1^2 - 11p_2^2}$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 12, p_2 = 16$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

55. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 2x^2 + 8y^2 + 10xy + 16x + 32y + 54$$

56. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 5x^2 + y^2 - xy - 65x + 16y + 6$$

57. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 2x^3 + y^3 + 2x^2 + 2y^2$$

58. Nájdite viazané extrémny funkcie  $f(x,y) = 7x + 5y$  pri väzbe  $4x^2 - 8xy + 8y^2 = 49408$ . [5b]

59. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{2x^2 + 11xy + 4y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 4x + 4y$ . Vypočítajte aké maximálne množstvo jednotiek produkcie je možno vyprodukovať, ak sa do vstupov investovalo 160 eur? Aké budú vtedy vstupy  $x, y$ ? [5b]

60. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{4x^2 + 17xy + 3y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 7x + 3y$ . Vypočítajte pri akých minimálnych nákladoch na vstupy sa vyprodukuje  $\sqrt{41934}$  jednotiek produkcie. Určte odpovedajúcu veľkosť jednotlivých vstupov  $x, y$ . [5b]

61. Firma produkuje týždenne 7 hl kofoly a 12 hl viney pri funkcii celkového zisku  $P(x,y) = -5y^2 - 2xy - 2x^2 + 202y + 80x$ , kde  $x$  je objem produkcie kofoly a  $y$  objem produkcie viney. Chce zvýšiť celkovú týždennú produkciu o 6 hl. Koľko hl kofoly a viney by mala firma produkovať, aby pri týchto obmedzených podmienkach dosiahla maximalny zisk? Aký bol zisk firmy pred zvýšením a po zvýšení produkcie? [5b]

62. Nájdite absolútne extrémny funkcie  $f : z = x^2 + y^2 - 90x - 56y$  na množine  $M = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 144\}$ . [5b]

63. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x + 5}{x + 5} dx.$$

64. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{1}{(6x + 4)^3} dx.$$

65. Vypočítajte [5b]

$$\int \sin^4 x \cos x dx.$$

66. Vypočítajte [5b]

$$\int \cos^4 x \sin x \, dx.$$

67. Vypočítajte [5b]

$$\int x(x+5)^{11} \, dx.$$

68. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{6x+1}{x^2+1} \, dx.$$

69. Vypočítajte [5b]

$$\int x\sqrt{x^2+5} \, dx.$$

70. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x+9}{\sqrt{x^2+9x+4}} \, dx.$$

71. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\ln^6 x}{x} \, dx.$$

72. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{x^2+1} \, dx.$$

73. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{3x+5}{(x+3)^2} \, dx.$$

74. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{9x-2}{(x-2)(x+2)} \, dx.$$

75. Vypočítajte [5b]

$$\int (11x+2) \sin 8x \, dx.$$

76. Vypočítajte [5b]

$$\int (5x+1) \cos 3x \, dx.$$

77. Vypočítajte [5b]

$$\int (9x + 4)e^{9x} dx.$$

78. Vypočítajte [5b]

$$\int (4x - 2) \ln x dx.$$

79. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $2x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(2x^2) dx.$$

80. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $7x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(7x^2) dx.$$

81. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $\ln(x) = t$ ) [5b]

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

82. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx.$$

83. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/4} x \cos(4x) dx.$$

84. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^1 x e^{2x} dx.$$

85. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f : y = -x^2 - 3x$  a súradnou osou  $o_x$ . [5b]

86. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f$  a súradnou osou  $o_x$ , ak  $f : y = x^3 - 16x$ . [5b]

87. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = x^2 + x + 1$  a  $g : y = -6x - 11$ . [5b]

88. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -2x^2 - x + 3$  a  $g : y = x^2 + 8x + 3$ . [5b]

**89.** Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií

$$f : y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \text{ a } g : y = -1. \quad [5b]$$

**90.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 29$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 58$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že zisk pri produkcii 869 jednotiek produkcie je 7137,39 . [5b]

**91.** Daná je funkcia marginálneho zisku  $MP(x) = -0,02x + 19$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 38$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že náklady pri produkcii 579 jednotiek produkcie sú 12160,59 p. j. [5b]

**92.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 27$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 55$  pri produkcii  $x$  výrobkov. Vypočítajte aký zisk by firma dosiahla pri produkcii 1111 výrobkov, ak viete, že zisk pri produkcii 833 výrobkov je 6586,11 p. j. [5b]

*Príklady*

1. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{x-2} + \ln(x^2 - 8x + 15).$$

2. Vypočítajte definičný obor funkcie [5b]

$$f : y = \arcsin \frac{-x-5}{4x-1}.$$

3. Daná je funkcia dopytu

$$p = \frac{700}{q+5} - 18.$$

Nájdite inverznú funkciu k tejto funkcii a vypočítajte definičný obor a obor hodnôt týchto funkcií. Načrtnite ich grafy. [5b]

4. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{8x+1}{8x+4} \right)^{7x+10}.$$

5. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 \cdot 3^{x-2} - 4 \cdot 2^x}{-4 \cdot 3^x + 2 \cdot 2^{x+1}}.$$

6. Daná je funkcia

$$f : y = \frac{4x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 3}.$$

a) Najdite asymptoty bez smernice a dokážte, že dané priamky sú asymptotami bez smernice. [2b]

b) Najdite asymptoty so smernicou. [3b]

7. Najdite asymptoty grafu funkcie [5b]

$$f : y = \sqrt{49x^2 + 4x + 5}.$$

8. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{30-x} - 5}{x-5}.$$

9. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{9x^2 + 2x + 2} - \sqrt{9x^2 + x - 3} \right).$$

10. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 + 36}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [8; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [8; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

11. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie

$$f : y = \frac{-2x + 1}{3x - 1}$$

v bode  $A = [2; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . Rovnice napíšte vo všeobecnom tvare  $ax + by + c = 0$ . [5b]

12. Je daná funkcia

$$f : y = \sqrt{x^2 - 3x + 15}.$$

a) Nájďte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-2; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájďte rovnicu normály ku grafu funkcie  $f$  v bode  $A = [-2; ?]$ , ktorý leží na grafe funkcie  $f$ . [2b]

13. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 5x}{x^3}.$$

14. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 8x - 8x}{x^3}.$$

15. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - 3x}{x^3}.$$

16. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2x}{x^3}.$$

17. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x^2}.$$

18. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

19. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - 25x^2}{x^4}.$$

20. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 5x + 25x^2 - 2}{x^4}.$$

21. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2x}{\sin x - x}.$$

22. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x - 2x}{\operatorname{tg} 2x - 2x}.$$

23. Vypočítajte [5b]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

24. Daná je funkcia

$$f : y = -2x^3 - 6x^2 + 18x.$$

a) Nájdiť intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdiť lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

25. Nájdiť intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^4 - 28x^3 + 72x^2 + 3.$$

26. Nájdiť intervaly monotónnosti funkcie [5b]

$$f : y = ((x + 1)(x + 4))^2.$$

27. Je daná funkcia

$$f : y = \ln(-35 + 12x - x^2).$$

a) Nájdiť intervaly monotónnosti funkcie  $f$ . [3b]

b) Nájdiť lokálne extrémny funkcie  $f$ . [2b]

28. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 462 + 18x - 0,03x^2$$

a funkcii celkových príjmov

$$R(x) = 26,7x - 0,06x^2.$$

a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [4b]

b) Vypočítajte výšku maximálneho zisku. [1b]

29. Firma realizuje výrobu pri funkcii celkových nákladov

$$C(x) = 1024 + 15x - 0,01x^2$$

a dopytovej funkcii

$$p(x) = 31 - 0,05x.$$

- a) Pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk? [3b]  
 b) Vypočítajte pri tejto úrovni cenu za jednotku produkcie. [2b]

**30.** Daná je funkcia celkových nákladov

$$C(x) = 0,01x^3 + 9x + 160000000.$$

Pri akej produkcii budú priemerné náklady minimálne? [5b]

**31.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = 3x^5 + 25x^4 + 40x^3 + 5x + 1.$$

**32.** Daná je funkcia

$$f : y = x^4 + 10x^3$$

- a) Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie  $f$ . [3b]  
 b) Nájdite inflexné body funkcie  $f$ . [2b]

**33.** Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie [5b]

$$f : y = \ln \frac{x+5}{x+4}.$$

**34.** Daná je funkcia dopytu  $q = 5\sqrt{160-4p}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 8$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**35.** Daná je funkcia dopytu  $q = 3\sqrt{2025-5p^2}$ . Nájdite marginálny dopyt pre cenovú úroveň  $p = 9$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**36.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 6x + 210$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte marginálne náklady pri úrovni produkcie  $x_0 = 39$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**37.** Daná je funkcia celkových nákladov  $C(x) = -0,01x^2 + 6x + 90$  pri produkcii  $x$  hl osviežujúceho nápoja. Vypočítajte elasticitu celkových nákladov pri úrovni produkcie  $x_0 = 280$  a výsledok ekonomicky interpretujte! [5b]

**38.** Daná je funkcia dopytu  $q = 5\sqrt{143-p}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 13$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**39.** Daná je funkcia dopytu  $q = 3\sqrt{6760-5p^2}$ . Vypočítajte elasticitu dopytu pre cenovú úroveň  $p = 13$  a výsledok ekonomicky interpretujte. [5b]

**40.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x-y^2} + \ln(3-x-y)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**41.** Určte definičný obor funkcie  $f : z = \sqrt{x^2+y^2-9} + \ln(36-x^2-y^2)$  a znázornite ho graficky. [5b]

**42.** Určte definičný obor funkcie  $f$  a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{y^2-16}}$$

**43.** Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \sqrt{(64-x^2-y^2)(x^2+y^2-16)}$$



44. Určte definičný obor funkcie a znázornite ho graficky: [5b]

$$f : z = \arcsin(-2x - 5y - 5)$$

45. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(9 - x^2 - y^2)$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

46. Daná je funkcia  $f : z = \ln \frac{2x^2 - 3y^2}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

47. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

48. Daná je funkcia  $f : z = \ln \sqrt{2x^2y + 7xy + 6y^2}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

49. Daná je funkcia  $f : z = \operatorname{arctg} \frac{2x + 4y}{6x + 3y}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . [5b]

50. Daná je funkcia  $f : z = \sqrt{\ln \frac{4x + 5y}{2x + 5y}}$ . Vypočítajte (bez ďalších úprav)  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . [5b]

51. Daná je funkcia celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie výrobku  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie výrobku  $V_2$ . Pomocou prvých parciálnych derivácií vypočítajte ako sa približne zmení zisk:

a) ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení [2b]

b) ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení [1b]

c) ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu. [2b]

Ak viete, že súčasná produkcia je  $x_0 = 4$  a  $y_0 = 3$  a funkcia celkového zisku je:

$$P(x,y) = -5x^2 - 17y^2 - 4xy + 84x + 228y - 468$$

52. Vypočítajte elasticitu funkcie celkového zisku pri produkcii  $x$  jednotiek produkcie  $V_1$  a  $y$  jednotiek produkcie  $V_2$  pri úrovni produkcie  $x_0 = 12$  a  $y_0 = 4$

a) vzhľadom na vstup  $x$  [3b]

b) vzhľadom na vstup  $y$  [2b]

ak funkcia celkového zisku je  $P(x,y) = -25x^2 - 13y^2 - 12xy + 784x + 350y - 3356$

Výsledky ekonomicky interpretujte.

53. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = 4900 - 13p_1 + 19p_2$$

$$q_2 = 7300 + 24p_1 - 18p_2$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 42, p_2 = 45$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

54. Vypočítajte dve elasticity dopytu (podľa vlastného výberu tak, aby jedna z nich bola krížová) po dvoch substitučných tovaroch  $T_1, T_2$ , ak

$$q_1 = \sqrt{9600 - 11p_1^2 + 23p_2^2}$$

$$q_2 = \sqrt{15600 + 14p_1^2 - 13p_2^2}$$

kde  $p_1, q_1$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_1$  a  $p_2, q_2$  je jednotková cena a veľkosť dopytu po tovare  $T_2$ , pričom cenová úroveň je  $p_1 = 11, p_2 = 17$ . Výsledky ekonomicky interpretujte. [5b]

55. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = x^2 + 10y^2 + 8xy - 10$$

56. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = 4x^2 + y^2 - xy + 11x + 8y - 4$$

57. Nájdite lokálne extrémny funkcie [5b]

$$f : z = -2x^3 - 3y^3 - 2x^2 - 2y^2$$

58. Nájdite viazané extrémny funkcie  $f(x,y) = 5x + 6y$  pri väzbe  $3x^2 - 18xy + 30y^2 = 50328$ . [5b]

59. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{5x^2 + 12xy + 5y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = x + y$ . Vypočítajte aké maximálne množstvo jednotiek produkcie je možno vyprodukovať, ak sa do vstupov investovalo 4 eur? Aké budú vtedy vstupy  $x, y$ ? [5b]

60. Daná je produkčná funkcia  $f : z = \sqrt{5x^2 + 20xy + 3y^2}$  a funkcia celkových nákladov na vstupy  $C_v(x,y) = 4x + 7y$ . Vypočítajte pri akých minimálnych nákladoch na vstupy sa vyprodukuje  $\sqrt{90780}$  jednotiek produkcie. Určte odpovedajúcu veľkosť jednotlivých vstupov  $x, y$ . [5b]

61. Firma produkuje týždenne 12 hl kofoly a 6 hl viney pri funkcii celkového zisku  $P(x,y) = -2y^2 + 6xy - 5x^2 - 74y + 130x$ , kde  $x$  je objem produkcie kofoly a  $y$  objem produkcie viney. Chce zvýšiť celkovú týždennú produkciu o 6 hl. Koľko hl kofoly a viney by mala firma produkovať, aby pri týchto obmedzených podmienkach dosiahla maximalny zisk? Aký bol zisk firmy pred zvýšením a po zvýšení produkcie? [5b]

62. Nájdite absolútne extrémny funkcie  $f : z = x^2 + y^2 + 22x + 120y$  na množine  $M = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 36\}$ . [5b]

63. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{7x + 7}{x + 10} dx.$$

64. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{1}{(4x + 6)^7} dx.$$

65. Vypočítajte [5b]

$$\int \sin^2 x \cos x dx.$$

66. Vypočítajte [5b]

$$\int \cos^8 x \sin x \, dx.$$

67. Vypočítajte [5b]

$$\int x(x+5)^{13} \, dx.$$

68. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1} \, dx.$$

69. Vypočítajte [5b]

$$\int x\sqrt{x^2+5} \, dx.$$

70. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{2x+10}{\sqrt{x^2+10x+8}} \, dx.$$

71. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} \, dx.$$

72. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^6 x}{x^2+1} \, dx.$$

73. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{3x-1}{(x+3)^2} \, dx.$$

74. Vypočítajte [5b]

$$\int \frac{9x+4}{(x-2)(x+5)} \, dx.$$

75. Vypočítajte [5b]

$$\int (2x+4) \sin 7x \, dx.$$

76. Vypočítajte [5b]

$$\int (4x+3) \cos 5x \, dx.$$

77. Vypočítajte [5b]

$$\int (9x - 4)e^{2x} dx.$$

78. Vypočítajte [5b]

$$\int (8x + 2) \ln x dx.$$

79. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $3x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(3x^2) dx.$$

80. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $2x^2 = t$ ) [5b]

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(2x^2) dx.$$

81. Substitučnou metódou vypočítajte určitý integrál (substitúcia  $\ln(x) = t$ ) [5b]

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

82. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/3} x \sin(3x) dx.$$

83. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx.$$

84. Metódou per - partes vypočítajte určitý integrál [5b]

$$\int_0^1 x e^{3x} dx.$$

85. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f : y = -x^2 - 9x - 14$  a súradnou osou  $o_x$ . [5b]

86. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafom funkcie  $f$  a súradnou osou  $o_x$ , ak  $f : y = x^3 + 5x^2 + 4x$ . [5b]

87. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -3x^2 - 3x - 5$  a  $g : y = -3x - 32$ . [5b]

88. Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií  $f : y = -2x^2 - x - 2$  a  $g : y = -4x^2 - 3x - 2$ . [5b]

**89.** Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného grafmi funkcií

$$f : y = x^3 + 3x^2 + 2x - 4 \text{ a } g : y = 6x - 4. \quad [5b]$$

**90.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 18$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 37$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že zisk pri produkcii 567 jednotiek produkcie je 3046,11 . [5b]

**91.** Daná je funkcia marginálneho zisku  $MP(x) = -0,02x + 26$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 52$ . Nájdite funkcie celkových nákladov, funkciu celkových príjmov a funkcie celkového zisku ak viete, že náklady pri produkcii 782 jednotiek produkcie sú 22665,76 p. j. [5b]

**92.** Daná je funkcia marginálnych nákladov  $MC(x) = -0,02x + 17$  a funkcia marginálnych príjmov  $MR(x) = -0,04x + 34$  pri produkcii  $x$  výrobkov. Vypočítajte aký zisk by firma dosiahla pri produkcii 680 výrobkov, ak viete, že zisk pri produkcii 510 výrobkov je 2457 p. j. [5b]

*Príklady*

1.  $D(f) = \langle -6; -2 \rangle \cup (0; \infty)$ .

2. Funkcia je definovaná na intervale(-och)  $(-\infty; -1); \langle -\frac{3}{7}; \infty$

3.  $q = \frac{700}{p+79} - 5$ .  $p \in (0; 61)$ ;  $q \in \langle 0; \frac{305}{79} \rangle$ .

4.  $e^{\frac{2}{3}}$

5.  $\frac{1}{36}$

6. Priamka  $x = -4$  je asymptotou bez smernice, pretože napr.  $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$

Priamka  $x = 8$  nie je asymptotou bez smernice, pretože  $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = -\frac{11}{15}$

Priamka  $y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}$  je asymptotou so smernicou.

7. Funkcia  $f$  asymptoty bez smernice nemá.

Priamka  $y = 6x - \frac{1}{6}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow \infty$ . Priamka  $y = -6x + \frac{1}{6}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow -\infty$ .

8.  $-\frac{1}{8}$ .

9.  $\frac{1}{10}$ .

10.  $A = [3; 5]$ ;  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ ,

a) Rovnica dotyčnice  $3x - 5y + 16 = 0$

b) Rovnica normály  $5x + 3y - 30 = 0$

11. Bod  $A = [3; -\frac{4}{13}]$ .  $y' = -\frac{1}{(3x+4)^2}$ ;  $k_t = -\frac{1}{169}$ .

Rovnica dotyčnice:  $x + 169y + 49 = 0$ . Rovnica normály:  $2197x - 13y - 6595 = 0 = 0$ .

12.  $A = [-4; 5]$ ;

a) Rovnica dotyčnice  $-9x - 10y + 14 = 0$

b) Rovnica normály  $10x - 9y + 85 = 0$

13. Výsledok  $-\frac{125}{6}$

14. Výsledok  $-\frac{512}{3}$

15. Výsledok  $\frac{1}{3}$

16. Výsledok  $\frac{125}{6}$

17. Výsledok 2

18. Výsledok  $-\frac{9}{2}$

19. Výsledok  $-\frac{1}{3}$

20. Výsledok  $\frac{1}{12}$

21. Výsledok  $-\frac{64}{125}$

22. Výsledok  $-\frac{8}{125}$

23. Výsledok  $-\frac{1}{16}$

24. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -4)$ ,  $\langle 3, \infty$  a rastúca na intervale  $\langle -4, 3 \rangle$ .

V  $x = -4$  nadobúda lok. min. a v bode  $x = 3$  lok. max.

25. Funkcia je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; -3)$ ;  $\langle 0; 3 \rangle$  a rastúca na intervaloch  $\langle -3; 0 \rangle$ ;  $\langle 3; \infty \rangle$ ;

26. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; -2)$ ,  $\langle 1; 4 \rangle$  a rastúca na intervaloch  $\langle -2; 1 \rangle$ ,  $\langle 4; \infty \rangle$ .

27. a) Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(-2; -1,5)$  a klesajúca na intervale  $\langle -1,5; -1 \rangle$ .

b) Funkcia  $f$  nadobúda lokálne maximum v bode  $x = -1,5$ .

28. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 200 výrobkov.

b) Výška maximálneho zisku je 432 p.j.

29. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 225 výrobkov.  
 b) Cena za jednotku produkcie je 15 p.j.
30. Priemerné náklady budú minimálne pri produkcii 80 .
31. Funkcia je konkávna na intervaloch  $(-\infty; -4)$ ;  $(-2; 0)$  a konvexná na intervaloch  $(-4; -2)$ ;  $(0; \infty)$
32. Funkcia  $f$  je konvexná na intervaloch  $(-\infty, -2)$ ,  $(0, \infty)$  a konkávna na intervale  $(-2, 0)$ .  
 Body  $x_1 = -2$   $x_2 = 0$  sú inflexné body
33.  $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$ .

$$y' = \frac{2}{(x+2)(x+4)}$$

$$y'' = \frac{-4x-12}{(x+2)^2(x+4)^2}$$

Funkcia  $f$  je konvexná na intervale  $(-\infty; -4)$  a konkávna na intervale  $(-2; \infty)$ .

34. Marginálny dopyt je:  $-3$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 5$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o 3 .
35. Marginálny dopyt je:  $-2,8284$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 11$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o 2,8284 .
36.  $MC(82) = 0,36$ . Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z úrovne 82 o jednotku produkcie, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o 0,36 p. j.
37.  $\eta(56) = 0,2456$ . Interpretácia: Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z danej úrovne produkcie 56 hl o 1%, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o 0,2456%.
38.  $\eta(15) = 0,1667$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 15 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o 0,1667%.
39.  $\eta(7) = 0,125$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 7 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o 0,125%.
40. Prienik vnútorných bodov paraboly, ktorá leží v polrovine  $x > 0$ , je osovo súmerná podľa súradnej osi  $o_x$ , má vrchol v bode  $[0, 0]$  a polroviny pod priamkou  $y = 4 - x$ .
- 41.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \geq 25 \wedge x^2 + y^2 < 64\}$$

Medzikružie s polomerom menšej kružnice 5 (ktorá do def. oboru patrí) a s polomerom väčšej kružnice 8 (ktorá do def. oboru nepatrí).

42.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x \in (-4, 4) \wedge y \in (-6, 6)\}$$

43.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 49 \wedge x^2 + y^2 \geq 25\}$$

Medzikružie, s polomerom menšej kružnice 5 a s polomerom väčšej kružnice 7 (obidve kružnice do def. oboru patria).

44. Definičným oborom je pás v rovine zovrený priamkami  
 $-4x - y + 1 = 0$ ,  $-4x - y + 3 = 0$ .

45.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}} - \frac{2x}{64 - x^2 - y^2}$$

46.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}{5x^2 - 5y^2} \frac{10x\sqrt{4x^2 + 4y^2} - (5x^2 - 5y^2) \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}}{4x^2 + 4y^2}$$

47.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{x(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))}{\sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}}$$

48.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{5x^2 + 2x + 6y}{5x^2y + 2xy + 3y^2}$$

49.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{5x+7y}{2x+7y}\right)^2} \frac{21y}{(2x+7y)^2}$$

50.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln \frac{2x+7y}{4x+3y}}} \frac{4x+3y}{2x+7y} \frac{-22y}{(4x+3y)^2}$$

51. a) Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 76 p.j.

b) Ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 132 p.j.

c) Ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek produkcie a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu, tak celkový zisk vzrastie približne o 28 p.j.

Zisk pri produkcii  $x_0, y_0$  je 1186 p.j.

52. a)  $\eta_x(P(x_0, y_0)) = 0,2868$

Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,2868 %.

b)  $\eta_y(P(x_0, y_0)) = 0,9178$

Ak produkcia  $V_2$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,9178 %.

53.  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,0663, \quad \eta_{p_1}(q_2) = 0,0865$

$\eta_{p_2}(q_1) = 0,0979, \quad \eta_{p_2}(q_2) = -0,0706$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] o 0,0663 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] o 0,0865 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] o 0,0979 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] o 0,0706 %.

54.  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,86, \quad \eta_{p_1}(q_2) = -0,1754$

$\eta_{p_2}(q_1) = -0,3334, \quad \eta_{p_2}(q_2) = 0,0634$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] približne o 0,86 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] približne o 0,1754 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] približne o 0,3334 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] približne o 0,0634 %.

55. Funkcia  $f$  má v bode  $L[0, 3]$  ostré lokálne maximum rovné 80 .

56. Funkcia  $f$  má v bode  $A[-7, 3]$  ostré lokálne maximum rovné 762 .



57. Funkcia  $f$  nemá v bode  $A[0; 0]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  má v bode  $B[0; \frac{2}{3}]$  ostré lokálne maximum rovné 0,2963

Funkcia  $f$  má v bode  $C[1; 0]$  ostré lokálne minimum rovné -1

Funkcia  $f$  nemá v bode  $D[1, \frac{2}{3}]$  lokálny extrém.

58.  $\lambda_1 = -1/256$ . Funkcia  $f$  má v bode  $A = [456; 120]$  viazané ostré lokálne maximum rovne. 2088 ;

$\lambda_2 = +1/256$ . Funkcia  $f$  má v bode  $B = [-456; -120]$  viazané ostré lokálne minimum rovné. -2088.

59. Maximálne sa vyprodukuje  $\sqrt{15620}$  jednotiek produkcie pri vstupoch  $x = 46, y = 6$ .

60. Minimálne náklady na vstupy, pri ktorých sa vyprodukuje  $\sqrt{58093}$  jednotiek produkcie sú 602 p.j., čo zodpovedá vstupom  $x = 115, y = 3$ .

61. Firma by mala produkovať 10,5 hl kofoly a 13,5 hl viney.

Celkový zisk pred zvýšením produkcie 656 .

Celkový zisk po zvýšení produkcie 729 .

62. Funkcia  $f$  nadobúda na množine M v bode  $B[\frac{50}{13}; \frac{120}{13}]$  absolútne minimum rovné -160 a v bode  $C[-\frac{50}{13}; -\frac{120}{13}]$  absolútne maximum rovné 360 .

63.  $3x - 4 \ln|x + 2| + C$ .

64.  $-\frac{1}{5(x+1)^5} + C$ .

65.  $\frac{\sin^5 x}{5} + C$

66.  $-\frac{\cos^9 x}{9} + C$

67.  $\frac{(x+9)^7}{7} - \frac{9(x+9)^6}{6} + C$ .

68.  $4 \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 1| + C$

69.  $\frac{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}{3} + C$

70.  $2\sqrt{x^2 + 7x + 10} + C$ .

71.  $\frac{1}{7} \ln^7 x + C$ .

72.  $\frac{\operatorname{arctg}^5 x}{5} + C$ .

73.  $3 \ln|x - 3| - \frac{8}{x - 3} + C$ .

74.  $6 \ln|x + 5| - 4 \ln|x + 3| + C$ .

75.  $\frac{4}{9} \sin 3x - \frac{(4x + 4) \cos 3x}{3} + C$ .

76.  $\frac{2}{5} \cos 5x + \frac{(10x + 3) \sin 5x}{5} + C$ .

77.  $\frac{10}{3} x e^{3x} + \frac{2}{9} e^{3x} + C$ .

78.  $(2x^2 - 4x) \ln x - x^2 + 4x + C$ .

79. 0

80.  $\frac{1}{5}$

81.  $\frac{1}{2}$

82.  $\frac{\pi}{16}$

83.  $-\frac{2}{9}$

84.  $\frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16}$   
 85.  $P = \frac{4}{3} = 1,3333$ ;  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -1$ .  
 86.  $P = \frac{131}{4} = 32,75$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 5$ .  
 87.  $P = \frac{1}{6} = 0,1667$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ .  
 88.  $P = \frac{32}{3} = 10,6667$ ,  $x_1 = -4$   $x_2 = 0$ .  
 89.  $P = \frac{253}{12} = 21,0833$ ,  $x_1 = -2$   $x_2 = 0$   $x_3 = 3$ .  
 90.  $C(x) = -0,01x^2 + 27x + 9799$ ,  $R(x) = -0,02x^2 + 55x$ ,  $P(x) = -0,01x^2 + 28x - 9799$ .  
 91.  $C(x) = -0,01x^2 + 26x + 9112$ ,  $R(x) = -0,02x^2 + 53x$ ,  $P(x) = -0,01x^2 + 27x - 9112$ .  
 92.  $P(1108) = 8948,36$  p.j., (FC = 9799 ).

### Výsledky riešenia príkladov z MATEMATIKY

HI 2

#### Príklady

1.  $D(f) = \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$ .
2. Funkcia je definovaná na intervale(-och)  $\langle -\frac{1}{2}; 4 \rangle$ ;
3.  $q = \frac{800}{p+23} - 6$ .  $p \in (0; \frac{331}{3})$ ;  $q \in (0; \frac{662}{23})$ .
4.  $e^{\frac{30}{7}}$
5.  $-2$
6. Priamka  $x = 1$  je asymptotou bez smernice, pretože napr.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$   
 Priamka  $x = -1$  nie je asymptotou bez smernice, pretože  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{3}$   
 Priamka  $y = x + \frac{5}{3}$  je asymptotou so smernicou.
7. Funkcia  $f$  asymptoty bez smernice nemá.  
 Priamka  $y = 9x + \frac{1}{18}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow \infty$ . Priamka  $y = -9x - \frac{1}{18}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow -\infty$ .
8.  $-\frac{1}{4}$ .
9.  $-\frac{7}{8}$ .
10.  $A = [-9; 41]$ ;  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1600}}$   
 a) Rovnica dotyčnice  $-9x - 41y + 1600 = 0$   
 b) Rovnica normály  $41x - 9y + 738 = 0$
11. Bod  $A = [3; \frac{1}{2}]$ .  $y' = \frac{9}{(-x-3)^2}$ ;  $k_t = \frac{9}{36}$ .  
 Rovnica dotyčnice:  $x - 4y - 1 = 0$ . Rovnica normály:  $8x + 2y - 25 = 0$ .
12.  $A = [1; 6]$ ;  
 a) Rovnica dotyčnice  $7x - 12y + 65 = 0$   
 b) Rovnica normály  $12x + 7y - 54 = 0$
13. Výsledok  $-\frac{343}{6}$
14. Výsledok  $-\frac{343}{3}$
15. Výsledok  $\frac{64}{3}$
16. Výsledok  $\frac{243}{2}$
17. Výsledok  $\frac{25}{2}$
18. Výsledok  $-18$
19. Výsledok  $-\frac{625}{3}$
20. Výsledok  $\frac{1}{12}$

21. Výsledok  $-8$   
 22. Výsledok  $-1$   
 23. Výsledok  $-4$   
 24. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -4)$ ,  $\langle -2, \infty$  a rastúca na intervale  $\langle -4, -2 \rangle$ .  
 V  $x = -4$  nadobúda lok. min. a v bode  $x = -2$  lok. max.  
 25. Funkcia je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; -2)$ ;  $\langle 0; 4 \rangle$  a rastúca na intervaloch  $\langle -2; 0 \rangle$ ;  
 $\langle 4; \infty \rangle$ ;  
 26. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; -4)$ ,  $\langle -1,5; 1 \rangle$  a rastúca na intervaloch  
 $\langle -4; -1,5 \rangle$ ,  $\langle 1; \infty \rangle$ .  
 27. a) Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(-8; -3,5)$  a klesajúca na intervale  $\langle -3,5; 1 \rangle$ .  
 b) Funkcia  $f$  nadobúda lokálne maximum v bode  $x = -3,5$ .  
 28. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 210 výrobkov.  
 b) Výška maximálneho zisku je 900 p.j.  
 29. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 245 výrobkov.  
 b) Cena za jednotku produkcie je 17,9 p.j.  
 30. Priemerné náklady budú minimálne pri produkcii 500 .  
 31. Funkcia je konkávna na intervaloch  $(-\infty; -1)$ ;  $\langle 0; 4 \rangle$  a konvexná na intervaloch  $\langle -1; 0 \rangle$ ;  
 $\langle 4; \infty \rangle$   
 32. Funkcia  $f$  je konvexná na intervaloch  $(-\infty, -3)$ ,  $\langle 1, \infty$  a konkávna na intervale  $\langle -3, 1 \rangle$ .  
 Body  $x_1 = -3$   $x_2 = 1$  sú inflexné body  
 33.  $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$ .

$$y' = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$y'' = \frac{-2x-5}{(x+2)^2(x+3)^2}$$

- Funkcia  $f$  je konvexná na intervale  $(-\infty; -3)$  a konkávna na intervale  $(-2; \infty)$ .  
 34. Marginálny dopyt je:  $-0,6124$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 12$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o 0,6124 .  
 35. Marginálny dopyt je:  $-4,9497$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 8$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o 4,9497 .  
 36.  $MC(78) = 3,44$ . Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z úrovne 78 o jednotku produkcie, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o 3,44 p. j.  
 37.  $\eta(234) = 0,5621$ . Interpretácia: Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z danej úrovne produkcie 234 hl o 1%, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o 0,5621%.  
 38.  $\eta(6) = 0,05$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 6 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o 0,05%.  
 39.  $\eta(13) = 0,1667$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 13 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o 0,1667%.  
 40. Prienik vnútorných bodov paraboly, ktorá leží v polrovine  $x > 0$ , je osovo súmerná podľa súradnej osi  $o_x$ , má vrchol v bode  $[0, 0]$  a polroviny pod priamkou  $y = 5 - x$ .

41.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \geq 4 \wedge x^2 + y^2 < 49\}$$

Medzikružie s polomerom menšej kružnice 2 (ktorá do def. oboru patrí) a s polomerom väčšej kružnice 7 (ktorá do def. oboru nepatrí).

42.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x \in \langle -7, 7 \rangle \wedge y \in \langle -3, 3 \rangle\}$$

43.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Medzikrižie, s polomerom menšej kružnice 1 a s polomerom väčšej kružnice 4 (obidve kružnice do def. oboru patria).

44. Definičným oborom je pás v rovine zovrený priamkami  
 $-5x - 3y - 1 = 0$ ,  $-5x - 3y + 1 = 0$ .

45.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}} - \frac{2y}{64 - x^2 - y^2}$$

46.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{5x^2 + 2y^2} - 4y\sqrt{5x^2 + 2y^2} - (6x^2 - 2y^2)\frac{2y}{\sqrt{5x^2 + 2y^2}}}{6x^2 - 2y^2} \cdot \frac{1}{5x^2 + 2y^2}$$

47.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{y(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))}{\sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}}$$

48.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{6x^2 + 6x + 8y}{6x^2y + 6xy + 4y^2}$$

49.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{6x+2y}{3x+7y}\right)^2} \frac{36y}{(3x+7y)^2}$$

50.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\ln \frac{5x+3y}{7x+6y}}} \frac{7x+6y}{5x+3y} \frac{-9x}{(7x+6y)^2}$$

51. a) Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 152 p.j.

b) Ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 22 p.j.

c) Ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek produkcie a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu, tak celkový zisk približne o 65 p.j.

Zisk pri produkcii  $x_0, y_0$  je 3244 p.j.

52. a)  $\eta_x(P(x_0, y_0)) = 0,7326$

Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,7326 %.

b)  $\eta_y(P(x_0, y_0)) = 0,0698$

Ak produkcia  $V_2$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,0698 %.

53.  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,1672$ ,  $\eta_{p_1}(q_2) = 0,0907$

$\eta_{p_2}(q_1) = 0,2026$ ,  $\eta_{p_2}(q_2) = -0,0696$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] o 0,1672 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] o 0,0907 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] o 0,2026 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zniži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] o 0,0696 %.

54.  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,2658$ ,  $\eta_{p_1}(q_2) = -0,2882$

$\eta_{p_2}(q_1) = -0,3255$ ,  $\eta_{p_2}(q_2) = 0,1873$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] približne o 0,2658 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] približne o 0,2882 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] približne o 0,3255 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] približne o 0,1873 %.

55. Funkcia  $f$  má v bode  $L[-3, 0]$  ostré lokálne minimum rovné -10 .

56. Funkcia  $f$  má v bode  $A[-4, -8]$  ostré lokálne maximum rovné 27 .

57. Funkcia  $f$  má v bode  $A[0; 0]$  ostré lokálne minimum rovné 0.

Funkcia  $f$  nemá v bode  $B[0; -\frac{4}{3}]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  nemá v bode  $C[-\frac{4}{9}; 0]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  má v bode  $D[-\frac{4}{9}, -\frac{4}{3}]$  ostré lokálne maximum rovné 1,3169

58.  $\lambda_1 = -1/400$ . Funkcia  $f$  má v bode  $A = [610; 150]$  viazané ostré lokálne maximum rovne. 2890 ;

$\lambda_2 = +1/400$ . Funkcia  $f$  má v bode  $B = [-610; -150]$  viazané ostré lokálne minimum rovne. -2890.

59. Maximálne sa vyprodukuje  $\sqrt{896}$  jednotiek produkcie pri vstupoch  $x = 8, y = 8$ .

60. Minimálne náklady na vstupy, pri ktorých sa vyprodukuje  $\sqrt{22784}$  jednotiek produkcie sú 512 p.j., čo zodpovedá vstupom  $x = 40, y = 24$  .

61. Firma by mala produkovať 11,5385 hl kofoly a 12,4615 hl viney.

Celkový zisk pred zvýšením produkcie 171 .

Celkový zisk po zvýšení produkcie 194,7692 .

62. Funkcia  $f$  nadobúda na množine M v bode  $B[\frac{75}{13}; -\frac{180}{13}]$  absolútne minimum rovné -1335 a v bode  $C[-\frac{300}{52}; \frac{720}{52}]$  absolútne maximum rovné 1785 .

63.  $8x - 63 \ln|x + 8| + C$ .

64.  $-\frac{1}{28(7x + 7)^4} + C$ .

65.  $\frac{\sin^6 x}{6} + C$

66.  $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$

67.  $\frac{(x + 5)^{13}}{13} - \frac{5(x + 5)^{12}}{12} + C$ .

68.  $8 \operatorname{arctg} x + \frac{7}{2} \ln|x^2 + 1| + C$

69.  $\frac{\sqrt{(x^2 + 11)^3}}{3} + C$

70.  $2\sqrt{x^2 + 8x + 2} + C$ .

71.  $\frac{1}{6} \ln^6 x + C$ .

72.  $\frac{\operatorname{arctg}^8 x}{8} + C$ .

73.  $6 \ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C$ .

74.  $\ln|x - 1| + 4 \ln|x + 1| + C$ .

75.  $\frac{7}{4} \sin 2x - \frac{(7x + 4) \cos 2x}{2} + C$ .

76.  $\frac{2}{49} \cos 7x + \frac{(2x+4) \sin 7x}{7} + C.$   
 77.  $\frac{5}{7} x e^{7x} + \frac{23}{49} e^{7x} + C.$   
 78.  $(4x^2 - 2x) \ln x - 2x^2 + 2x + C.$   
 79. 0  
 80. 0  
 81.  $\frac{1}{2}$   
 82.  $\frac{2}{25}$   
 83.  $-\frac{1}{8}$   
 84.  $\frac{e^5}{5} - \frac{e^5}{25} + \frac{1}{25}$   
 85.  $P = \frac{243}{2} = 121,5; \quad x_1 = -8, \quad x_2 = 1.$   
 86.  $P = \frac{71}{6} = 11,8333, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 0.$   
 87.  $P = \frac{125}{6} = 20,8333, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$   
 88.  $P = \frac{9}{2} = 4,5, \quad x_1 = -3 \quad x_2 = 0.$   
 89.  $P = \frac{37}{12} = 3,0833, \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2.$   
 90.  $C(x) = -0,01x^2 + 25x + 8449, \quad R(x) = -0,02x^2 + 51x, \quad P(x) = -0,01x^2 + 26x - 8449.$   
 91.  $C(x) = -0,01x^2 + 25x + 8449, \quad R(x) = -0,02x^2 + 51x, \quad P(x) = -0,01x^2 + 26x - 8449.$   
 92.  $P(1081) = 8389,39$  p.j., (FC = 9112).

### Výsledky riešenia príkladov z MATEMATIKY

HI 3

#### Príklady

1.  $D(f) = \langle 2; 4 \rangle \cup (6; \infty).$
2. Funkcia je definovaná na intervale(-och)  $\langle -\frac{1}{6}; \frac{7}{4} \rangle;$
3.  $q = \frac{200}{p+72} - 2. \quad p \in (0; 28); \quad q \in \langle 0; \frac{7}{9} \rangle.$
4.  $e^{12}$
5. 3
6. Priamka  $x = -5$  je asymptotou bez smernice, pretože napr.  $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$   
 Priamka  $x = 8$  nie je asymptotou bez smernice, pretože  $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = -\frac{341}{65}$   
 Priamka  $y = -\frac{6}{5}x + \frac{36}{5}$  je asymptotou so smernicou.
7. Funkcia  $f$  asymptoty bez smernice nemá.  
 Priamka  $y = 8x + \frac{5}{16}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow \infty$ . Priamka  $y = -8x - \frac{5}{16}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow -\infty$ .
8.  $-\frac{1}{6}.$
9.  $\frac{1}{3}.$
10.  $A = [33; 65]; \quad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+3136}},$   
 a) Rovnica dotyčnice  $33x - 65y + 3136 = 0$   
 b) Rovnica normály  $65x + 33y - 4290 = 0$

11. Bod  $A = [2; \frac{7}{1}]$ .  $y' = \frac{11}{(-x+3)^2}$ ;  $k_t = 11$ .

Rovnica dotyčnice:  $11x - y - 15 = 0$ . Rovnica normály:  $x + 11y - 79 = 0 = 0$ .

12.  $A = [4; 5]$ ;

a) Rovnica dotyčnice  $9x - 10y + 14 = 0$

b) Rovnica normály  $10x + 9y - 85 = 0$

13. Výsledok  $-\frac{243}{2}$

14. Výsledok  $-9$

15. Výsledok  $9$

16. Výsledok  $\frac{256}{3}$

17. Výsledok  $\frac{9}{2}$

18. Výsledok  $-2$

19. Výsledok  $-\frac{256}{3}$

20. Výsledok  $\frac{64}{3}$

21. Výsledok  $-64$

22. Výsledok  $-\frac{125}{27}$

23. Výsledok  $-\frac{27}{16}$

24. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -3)$ ,  $(1, \infty)$  a rastúca na intervale  $(-3, 1)$ .  
V  $x = -3$  nadobúda lok. min. a v bode  $x = 1$  lok. max.

25. Funkcia je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; 0)$ ;  $(3; 4)$  a rastúca na intervaloch  $(0; 3)$ ;  $(4; \infty)$ ;

26. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; -5)$ ,  $(-1; 3)$  a rastúca na intervaloch  $(-5; -1)$ ,  $(3; \infty)$ .

27. a) Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(-7; -4,5)$  a klesajúca na intervale  $(-4,5; -2)$ .

b) Funkcia  $f$  nadobúda lokálne maximum v bode  $x = -4,5$ .

28. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 170 výrobkov.

b) Výška maximálneho zisku je 500 p.j.

29. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 185 výrobkov.

b) Cena za jednotku produkcie je 18,85 p.j.

30. Priemerné náklady budú minimálne pri produkcii 10 .

31. Funkcia je konkávna na intervaloch  $(-\infty; -1)$ ;  $(0; 1)$  a konvexná na intervaloch  $(-1; 0)$ ;  $(1; \infty)$

32. Funkcia  $f$  je konkávna na intervaloch  $(-\infty, 3)$ ,  $(4, \infty)$  a konvexná na intervale  $(3, 4)$ .

Body  $x_1 = 3$   $x_2 = 4$  sú inflexné body

33.  $D(f) = (-\infty; -5) \cup (2; \infty)$ .

$$y' = \frac{-7}{(x+5)(x-2)}$$

$$y'' = \frac{14x+21}{(x+5)^2(x-2)^2}$$

Funkcia  $f$  je konkávna na intervale  $(-\infty; -5)$  a konvexná na intervale  $(2; \infty)$ .

34. Marginálny dopyt je:  $-1,1272$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 17$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o 1,1272 .

35. Marginálny dopyt je:  $-2,5$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 11$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o 2,5 .

36.  $MC(172) = 0,56$ . Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z úrovne 172 o jednotku produkcie, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o 0,56 p. j.

37.  $\eta(8) = 0,1553$ . Interpretácia: Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z danej úrovne produkcie 8 hl o 1%, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o 0,1553%.

38.  $\eta(6) = 0,1$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 6 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o 0,1%.

39.  $\eta(13) = 0,1$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 13 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o 0,1%.

40. Prienik vnútorných bodov paraboly, ktorá leží v polrovine  $x > 0$ , je osovo súmerná podľa súradnej osi  $o_x$ , má vrchol v bode  $[0, 0]$  a polroviny pod priamkou  $y = 6 - x$ .

41.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \geq 4 \wedge x^2 + y^2 < 49\}$$

Medzikružie s polomerom menšej kružnice 2 (ktorá do def. oboru patrí) a s polomerom väčšej kružnice 7 (ktorá do def. oboru nepatrí).

42.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x \in \langle -5, 5 \rangle \wedge y \in \langle -8, 8 \rangle\}$$

43.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 36 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Medzikružie, s polomerom menšej kružnice 1 a s polomerom väčšej kružnice 6 (obidve kružnice do def. oboru patria).

44. Definičným oborom je pás v rovine zovrený priamkami

$$5x + 2y - 1 = 0, 5x + 2y + 1 = 0.$$

45.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}} - \frac{2x}{36 - x^2 - y^2}$$

46.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2x^2 + 5y^2}}{5x^2 - 5y^2} \frac{10x\sqrt{2x^2 + 5y^2} - (5x^2 - 5y^2) \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 5y^2}}}{2x^2 + 5y^2}$$

47.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{x(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))}{\sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}}$$

48.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{4x^2 + 4x + 6y}{4x^2y + 4xy + 3y^2}$$

49.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3y}{5x+6y}\right)^2} \frac{3x}{(5x + 6y)^2}$$

50.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln \frac{5x+4y}{4x+7y}}} \frac{4x + 7y}{5x + 4y} \frac{19y}{(4x + 7y)^2}$$

51. a) Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 94 p.j.

b) Ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 8 p.j.

c) Ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek produkcie a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu, tak celkový zisk klesne približne o 43 p.j.

Zisk pri produkcii  $x_0, y_0$  je 742 p.j.

52. a)  $\eta_x(P(x_0, y_0)) = -0,0523$

Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 0,0523 %.

b)  $\eta_y(P(x_0, y_0)) = 0,4183$



Ak produkcia  $V_2$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,4183 %.

**53.**  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,0555$ ,  $\eta_{p_1}(q_2) = 0,1857$

$\eta_{p_2}(q_1) = 0,0593$ ,  $\eta_{p_2}(q_2) = -0,1941$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] o 0,0555 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] o 0,1857 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] o 0,0593 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] o 0,1941 %.

**54.**  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,5465$ ,  $\eta_{p_1}(q_2) = -0,2921$

$\eta_{p_2}(q_1) = -0,2583$ ,  $\eta_{p_2}(q_2) = 0,0575$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] približne o 0,5465 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] približne o 0,2921 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] približne o 0,2583 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] približne o 0,0575 %.

**55.** Funkcia  $f$  má v bode  $L[-1, -5]$  ostré lokálne maximum rovné 24 .

**56.** Funkcia  $f$  má v bode  $A[-1, -3]$  ostré lokálne maximum rovné 245 .

**57.** Funkcia  $f$  nemá v bode  $A[0; 0]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  má v bode  $B[0; \frac{2}{3}]$  ostré lokálne minimum rovné -0,2963

Funkcia  $f$  má v bode  $C[\frac{4}{3}; 0]$  ostré lokálne maximum rovné 1,1852

Funkcia  $f$  nemá v bode  $D[\frac{4}{3}, \frac{2}{3}]$  lokálny extrém.

**58.**  $\lambda_1 = -1/576$ . Funkcia  $f$  má v bode  $A = [1152; 216]$  viazané ostré lokálne maximum rovne. 9360 ;

$\lambda_2 = +1/576$ . Funkcia  $f$  má v bode  $B = [-1152; -216]$  viazané ostré lokálne minimum rovné. -9360.

**59.** Maximálne sa vyprodukuje  $\sqrt{357}$  jednotiek produkcie pri vstupoch  $x = 4$ ,  $y = 11$ .

**60.** Minimálne náklady na vstupy, pri ktorých sa vyprodukuje  $\sqrt{61344}$  jednotiek produkcie sú 426 p.j., čo zodpovedá vstupom  $x = 6$ ,  $y = 126$  .

**61.** Firma by mala produkovať 17,4615 hl kofoly a 9,5385 hl viney.

Celkový zisk pred zvýšením produkcie 616 .

Celkový zisk po zvýšení produkcie 723,7692 .

**62.** Funkcia  $f$  nadobúda na množine  $M$  v bode  $B[-\frac{1134}{65}; -\frac{288}{65}]$  absolútne minimum rovné -2016 a v bode  $C[\frac{1134}{65}; \frac{288}{65}]$  absolútne maximum rovné 2664 .

**63.**  $7x - 59 \ln|x + 9| + C$ .

**64.**  $-\frac{1}{42(7x + 1)^6} + C$ .

**65.**  $\frac{\sin^8 x}{8} + C$

**66.**  $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$

**67.**  $\frac{(x + 4)^8}{8} - \frac{4(x + 4)^7}{7} + C$ .

68.  $7 \operatorname{arctg} x + \frac{4}{2} \ln |x^2 + 1| + C$
69.  $\frac{\sqrt{(x^2 + 2)^3}}{3} + C$
70.  $2\sqrt{x^2 + 2x + 4} + C.$
71.  $\frac{1}{12} \ln^{12} x + C.$
72.  $\frac{\operatorname{arctg}^8 x}{8} + C.$
73.  $11 \ln |x + 2| + \frac{24}{x + 2} + C.$
74.  $\frac{35}{3} \ln |x + 4| - \frac{8}{3} \ln |x + 1| + C.$
75.  $\frac{1}{4} \sin 6x - \frac{(9x + 5) \cos 6x}{6} + C.$
76.  $\frac{1}{5} \cos 5x + \frac{(5x + 1) \sin 5x}{5} + C.$
77.  $2xe^{2x} - 2e^{2x} + C.$
78.  $(5x^2 + 4x) \ln x - \frac{10}{4}x^2 - 4x + C.$
79. 0
80. 0
81.  $\frac{1}{2}$
82.  $\frac{2}{\pi}$
83.  $\frac{16}{1}$
84.  $-\frac{1}{2}$
85.  $\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$
86.  $P = \frac{4}{3} = 1,3333; \quad x_1 = -6, \quad x_2 = -4.$
87.  $P = \frac{131}{4} = 32,75, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$
88.  $P = \frac{8}{3} = 2,6667, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -1.$
89.  $P = \frac{72}{37}, \quad x_1 = -4 \quad x_2 = 2.$
90.  $P = \frac{37}{12} = 3,0833, \quad x_1 = -3 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 0.$
91.  $C(x) = -0,01x^2 + 24x + 7199, \quad R(x) = -0,02x^2 + 48x, \quad P(x) = -0,01x^2 + 24x - 7199.$
92.  $C(x) = -0,01x^2 + 22x + 6612, \quad R(x) = -0,02x^2 + 45x, \quad P(x) = -0,01x^2 + 23x - 6612.$
93.  $P(908) = 6027,36 \text{ p.j.}, \quad (\text{FC} = 6612).$

### Výsledky riešenia príkladov z MATEMATIKY

HI 4

#### Príklady

1.  $D(f) = \langle -4; \infty \rangle.$
2. Funkcia je definovaná na intervale(-och)  $(-\infty; 0); \langle \frac{4}{7}; \infty \rangle$
3.  $q = \frac{900}{p + 143} - 4. \quad p \in (0; 82); \quad q \in \langle 0; \frac{328}{143} \rangle.$
4.  $e^{-28}$
5.  $\frac{3}{4}$
6. Priamka  $x = -9$  je asymptotou bez smernice, pretože napr.  $\lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) = \infty$   
 Priamka  $x = 4$  nie je asymptotou bez smernice, pretože  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{67}{78}$

Priamka  $y = x - 10$  je asymptotou so smernicou.

7. Funkcia  $f$  asymptoty bez smernice nemá.

Priamka  $y = 5x + \frac{7}{10}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow \infty$ . Priamka  $y = -5x - \frac{7}{10}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow -\infty$ .

8.  $-\frac{1}{2}$ .

9. 1.

10.  $A = [-35; 37]$ ;  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}}$ ,

a) Rovnica dotyčnice  $-35x - 37y + 144 = 0$

b) Rovnica normály  $37x - 35y + 2590 = 0$

11. Bod  $A = [3; 0]$ .  $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$ ;  $k_t = \frac{1}{5}$ .

Rovnica dotyčnice:  $x - 5y - 3 = 0$ . Rovnica normály:  $5x + y - 15 = 0 = 0$ .

12.  $A = [-1; 3]$ ;

a) Rovnica dotyčnice  $-2x - 3y + 7 = 0$

b) Rovnica normály  $3x - 2y + 9 = 0$

13. Výsledok  $-\frac{243}{2}$

14. Výsledok  $-\frac{8}{3}$

15. Výsledok  $\frac{125}{3}$

16. Výsledok  $\frac{243}{2}$

17. Výsledok 18

18. Výsledok  $-\frac{1}{2}$

19. Výsledok  $-27$

20. Výsledok  $\frac{625}{12}$

21. Výsledok  $-\frac{1}{64}$

22. Výsledok  $-\frac{8}{27}$

23. Výsledok  $-\frac{1}{16}$

24. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -4)$ ,  $(-3, \infty)$  a rastúca na intervale  $(-4, -3)$ .  
V  $x = -4$  nadobúda lok. min. a v bode  $x = -3$  lok. max.

25. Funkcia je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -4)$ ;  $(0, 3)$  a rastúca na intervaloch  $(-4, 0)$ ;  $(3, \infty)$ ;

26. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -3)$ ,  $(-0,5, 2)$  a rastúca na intervaloch  $(-3, -0,5)$ ,  $(2, \infty)$ .

27. a) Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(2, 5)$  a klesajúca na intervale  $(5, 8)$ .

b) Funkcia  $f$  nadobúda lokálne maximum v bode  $x = 5$ .

28. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 220 výrobkov.

b) Výška maximálneho zisku je 845 p.j.

29. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 155 výrobkov.

b) Cena za jednotku produkcie je 16,55 p.j.

30. Priemerné náklady budú minimálne pri produkcii 160 .

31. Funkcia je konkávna na intervaloch  $(-\infty, -4)$ ;  $(-3, 0)$  a konvexná na intervaloch  $(-4, -3)$ ;  $(0, \infty)$

32. Funkcia  $f$  je konkávna na intervaloch  $(-\infty, -5)$ ,  $(1, \infty)$  a konvexná na intervale  $(-5, 1)$ .  
Body  $x_1 = -5$   $x_2 = 1$  sú inflexné body

33.  $D(f) = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$ .

$$y' = \frac{8}{(x-4)(x+4)}$$

$$y'' = \frac{-16x}{(x-4)^2(x+4)^2}$$

Funkcia  $f$  je konvexná na intervale  $(-\infty; -4)$  a konkávna na intervale  $(4; \infty)$ .

34. Marginálny dopyt je:  $-0,7906$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 10$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o  $0,7906$ .

35. Marginálny dopyt je:  $-3,8341$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 11$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o  $3,8341$ .

36.  $MC(154) = 5,92$ . Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z úrovne 154 o jednotku produkcie, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o  $5,92$  p. j.

37.  $\eta(28) = 0,5018$ . Interpretácia: Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z danej úrovne produkcie 28 hl o 1%, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o  $0,5018\%$ .

38.  $\eta(10) = 0,1667$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 10 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o  $0,1667\%$ .

39.  $\eta(6) = 0,125$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 6 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o  $0,125\%$ .

40. Prienik vnútorných bodov paraboly, ktorá leží v polrovine  $x > 0$ , je osovo súmerna podľa súradnej osi  $o_x$ , má vrchol v bode  $[0, 0]$  a polroviny pod priamkou  $y = 7 - x$ .

41.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \geq 25 \wedge x^2 + y^2 < 36\}$$

Medzikružie s polomerom menšej kružnice 5 (ktorá do def. oboru patrí) a s polomerom väčšej kružnice 6 (ktorá do def. oboru nepatrí).

42.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x \in \langle -4, 4 \rangle \wedge y \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)\}$$

43.

$$D(f) = \{[x,y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x^2 + y^2 \geq 4\}$$

Medzikružie, s polomerom menšej kružnice 2 a s polomerom väčšej kružnice 4 (obidve kružnice do def. oboru patria).

44. Definičným oborom je pás v rovine zovrený priamkami  $-6x + 4y - 5 = 0$ ,  $-6x + 4y - 3 = 0$ .

45.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}} - \frac{2y}{121 - x^2 - y^2}$$

46.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{6x^2 + 6y^2} - 8y\sqrt{6x^2 + 6y^2} - (2x^2 - 4y^2) \frac{6y}{\sqrt{6x^2 + 6y^2}}}{2x^2 - 4y^2} \cdot \frac{6x^2 + 6y^2}{6x^2 + 6y^2}$$

47.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{y(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))}{\sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}}$$

48.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{8xy + 6y}{4x^2y + 6xy + 7y^2}$$

49.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4x+7y}{3x+7y}\right)^2} \frac{7y}{(3x+7y)^2}$$

50.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\ln \frac{5x+7y}{4x+2y}}} \frac{4x+2y}{5x+7y} \frac{18x}{(4x+2y)^2}$$

51. a) Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 18 p.j.

b) Ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 72 p.j.

c) Ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek produkcie a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu, tak celkový zisk vzrastie približne o 45 p.j.

Zisk pri produkcii  $x_0, y_0$  je 279 p.j.

**52.** a)  $\eta_x(P(x_0, y_0)) = 0,4592$

Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,4592 %.

b)  $\eta_y(P(x_0, y_0)) = 0,3295$

Ak produkcia  $V_2$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,3295 %.

**53.**  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,107, \quad \eta_{p_1}(q_2) = 0,1355$

$\eta_{p_2}(q_1) = 0,1829, \quad \eta_{p_2}(q_2) = -0,1034$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] o 0,107 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] o 0,1355 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] o 0,1829 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] o 0,1034 %.

**54.**  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,1413, \quad \eta_{p_1}(q_2) = -0,4286$

$\eta_{p_2}(q_1) = -0,2093, \quad \eta_{p_2}(q_2) = 0,3104$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] približne o 0,1413 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] približne o 0,4286 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] približne o 0,2093 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] približne o 0,3104 %.

**55.** Funkcia  $f$  nemá lokálne extrém.

**56.** Funkcia  $f$  má v bode  $A[6, -5]$  ostré lokálne minimum rovné -229 .

**57.** Funkcia  $f$  má v bode  $A[0; 0]$  ostré lokálne minimum rovné 0.

Funkcia  $f$  nemá v bode  $B\left[0; -\frac{4}{3}\right]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  nemá v bode  $C\left[-\frac{2}{3}; 0\right]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  má v bode  $D\left[-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right]$  ostré lokálne maximum rovné 1,4815

**58.**  $\lambda_1 = -1/64$ . Funkcia  $f$  má v bode  $A = [152; 96]$  viazané ostré lokálne maximum rovne. 1544 ;

$\lambda_2 = +1/64$ . Funkcia  $f$  má v bode  $B = [-152; -96]$  viazané ostré lokálne minimum rovné. -1544.

**59.** Maximálne sa vyprodukuje  $\sqrt{7120}$  jednotiek produkcie pri vstupoch  $x = 12, y = 28$ .

**60.** Minimálne náklady na vstupy, pri ktorých sa vyprodukuje  $\sqrt{41934}$  jednotiek produkcie sú 348 p.j., čo zodpovedá vstupom  $x = 9, y = 95$  .

**61.** Firma by mala produkovať 7,8 hl kofoly a 17,2 hl viney.

Celkový zisk pred zvýšením produkcie 1998 .

Celkový zisk po zvýšení produkcie 2229,2 .

**62.** Funkcia  $f$  nadobúda na množine  $M$  v bode  $B\left[\frac{540}{53}; \frac{336}{53}\right]$  absolútne minimum rovné -1128

a v bode  $C \left[ -\frac{540}{53}; -\frac{336}{53} \right]$  absolútne maximum rovné 1416 .

63.  $2x - 5 \ln |x + 5| + C.$

64.  $-\frac{1}{12(6x + 4)^2} + C.$

65.  $\frac{\sin^5 x}{5} + C$

66.  $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$

67.  $\frac{(x + 5)^{13}}{13} - \frac{5(x + 5)^{12}}{12} + C.$

68.  $\operatorname{arctg} x + \frac{6}{2} \ln |x^2 + 1| + C$

69.  $\frac{\sqrt{(x^2 + 5)^3}}{3} + C$

70.  $2\sqrt{x^2 + 9x + 4} + C.$

71.  $\frac{1}{7} \ln^7 x + C.$

72.  $\frac{\operatorname{arctg}^7 x}{7} + C.$

73.  $3 \ln |x + 3| + \frac{4}{x + 3} + C.$

74.  $4 \ln |x - 2| + 5 \ln |x + 2| + C.$

75.  $\frac{11}{64} \sin 8x - \frac{(11x + 2) \cos 8x}{8} + C.$

76.  $\frac{5}{9} \cos 3x + \frac{(5x + 1) \sin 3x}{3} + C.$

77.  $xe^{9x} + \frac{1}{3}e^{9x} + C.$

78.  $(2x^2 - 2x) \ln x - x^2 + 2x + C.$

79.  $0$

80.  $\frac{1}{7}$

81.  $\frac{1}{2}$

82.  $\frac{\pi}{4}$

83.  $-\frac{1}{8}$

84.  $\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

85.  $P = \frac{9}{2} = 4,5; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 0.$

86.  $P = 128, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 4.$

87.  $P = \frac{1}{6} = 0,1667, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -3.$

88.  $P = \frac{27}{2} = 13,5, \quad x_1 = -3 \quad x_2 = 0.$

89.  $P = \frac{1}{2} = 0,5, \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2.$

90.  $C(x) = -0,01x^2 + 29x + 10512, \quad R(x) = -0,02x^2 + 58x, \quad P(x) = -0,01x^2 + 29x - 10512.$

91.  $C(x) = -0,01x^2 + 19x + 4512, \quad R(x) = -0,02x^2 + 38x, \quad P(x) = -0,01x^2 + 19x - 4512.$

92.  $P(1111) = 8965,79 \text{ p.j.}, \quad (\text{FC} = 9799).$

*Príklady*

1.  $D(f) = \langle 2; 3 \rangle \cup (5; \infty)$ .

2. Funkcia je definovaná na intervale(-och)  $(-\infty; -\frac{4}{5})$ ;  $\langle 2; \infty \rangle$

3.  $q = \frac{700}{p+18} - 5$ .  $p \in (0; 122)$ ;  $q \in \langle 0; \frac{305}{9} \rangle$ .

4.  $e^{-\frac{21}{8}}$

5.  $\frac{5}{36}$

6. Priamka  $x = 1$  je asymptotou bez smernice, pretože napr.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$

Priamka  $x = -1$  nie je asymptotou bez smernice, pretože  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}$

Priamka  $y = \frac{4}{3}x + 2$  je asymptotou so smernicou.

7. Funkcia  $f$  asymptoty bez smernice nemá.

Priamka  $y = 7x + \frac{2}{7}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow \infty$ . Priamka  $y = -7x - \frac{2}{7}$  je asymptotou so smernicou pre  $x \rightarrow -\infty$ .

8.  $-\frac{1}{10}$ .

9.  $\frac{1}{6}$ .

10.  $A = [8; 10]$ ;  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}}$ ,

a) Rovnica dotyčnice  $4x - 5y + 18 = 0$

b) Rovnica normály  $5x + 4y - 80 = 0$

11. Bod  $A = [2; -\frac{3}{5}]$ .  $y' = -\frac{1}{(3x-1)^2}$ ;  $k_t = -\frac{1}{25}$ .

Rovnica dotyčnice:  $x + 25y + 13 = 0$ . Rovnica normály:  $125x - 5y - 253 = 0$ .

12.  $A = [-2; 5]$ ;

a) Rovnica dotyčnice  $-7x - 10y + 36 = 0$

b) Rovnica normály  $10x - 7y + 55 = 0$

13. Výsledok  $-\frac{125}{6}$

14. Výsledok  $-\frac{512}{3}$

15. Výsledok 9

16. Výsledok  $\frac{4}{3}$

17. Výsledok  $\frac{9}{2}$

18. Výsledok  $-\frac{1}{2}$

19. Výsledok  $-\frac{625}{3}$

20. Výsledok  $\frac{625}{12}$

21. Výsledok  $-8$

22. Výsledok  $-1$

23. Výsledok  $-\frac{1}{2}$

24. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty, -3)$ ,  $(1, \infty)$  a rastúca na intervale  $\langle -3, 1 \rangle$ .

V  $x = -3$  nadobúda lok. min. a v bode  $x = 1$  lok. max.

25. Funkcia je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; 0)$ ;  $\langle 3; 4 \rangle$  a rastúca na intervaloch  $\langle 0; 3 \rangle$ ;  $\langle 4; \infty \rangle$ ;

26. Funkcia  $f$  je klesajúca na intervaloch  $(-\infty; -4)$ ,  $\langle -2, 5; -1 \rangle$  a rastúca na intervaloch  $\langle -4; -2, 5 \rangle$ ,  $\langle -1; \infty \rangle$ .

27. a) Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(5; 6)$  a klesajúca na intervale  $\langle 6; 7 \rangle$ .

b) Funkcia  $f$  nadobúda lokálne maximum v bode  $x = 6$ .

28. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 145 výrobkov.

b) Výška maximálneho zisku je 168,75 p.j.

29. a) Firma dosiahne maximálny zisk pri produkcii 200 výrobkov.

b) Cena za jednotku produkcie je 21 p.j.

30. Priemerné náklady budú minimálne pri produkcii 2000 .

31. Funkcia je konkávna na intervaloch  $(-\infty; -4)$ ;  $\langle -1; 0 \rangle$  a konvexná na intervaloch  $\langle -4; -1 \rangle$ ;  $\langle 0; \infty \rangle$

**32.** Funkcia  $f$  je konvexná na intervaloch  $(-\infty, -5)$ ,  $(0, \infty)$  a konkávna na intervale  $(-5, 0)$ .  
Body  $x_1 = -5$   $x_2 = 0$  sú inflexné body

**33.**  $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-4; \infty)$ .

$$y' = \frac{-1}{(x+5)(x+4)}$$

$$y'' = \frac{2x+9}{(x+5)^2(x+4)^2}$$

Funkcia  $f$  je konkávna na intervale  $(-\infty; -5)$  a konvexná na intervale  $(-4; \infty)$ .

**34.** Marginálny dopyt je:  $-0,8839$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 8$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o  $0,8839$ .

**35.** Marginálny dopyt je:  $-3,3541$ . Ak sa (jednotková) cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne  $p = 9$  o 1 p.j., tak dopyt po tovare poklesne [vzrastie] približne o  $3,3541$ .

**36.**  $MC(39) = 5,22$ . Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z úrovne 39 o jednotku produkcie, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o  $5,22$  p. j.

**37.**  $\eta(280) = 0,1136$ . Interpretácia: Ak sa produkcia osviežujúceho nápoja zvýši [zníži] z danej úrovne produkcie 280 hl o 1%, tak celkové náklady vzrastú [poklesnú] približne o  $0,1136\%$ .

**38.**  $\eta(13) = 0,05$ . Interpretácia: : Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 13 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o  $0,05\%$ .

**39.**  $\eta(13) = 0,1429$ . Interpretácia: Ak sa cena tovaru zvýši [zníži] z danej cenovej úrovne 13 p.j. tak celkový dopyt poklesne [vzrastie] približne o  $0,1429\%$ .

**40.** Prienik vnútorných bodov paraboly, ktorá leží v polrovine  $x > 0$ , je osovo súmerná podľa súradnej osi  $o_x$ , má vrchol v bode  $[0, 0]$  a polroviny pod priamkou  $y = 3 - x$ .

**41.**

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2; x^2 + y^2 \geq 9 \wedge x^2 + y^2 < 36\}$$

Medzikružie s polomerom menšej kružnice 3 (ktorá do def. oboru patrí) a s polomerom väčšej kružnice 6 (ktorá do def. oboru nepatrí).

**42.**

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2; x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \wedge y \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)\}$$

**43.**

$$D(f) = \{[x, y] \in E_2; x^2 + y^2 \leq 64 \wedge x^2 + y^2 \geq 16\}$$

Medzikružie, s polomerom menšej kružnice 4 a s polomerom väčšej kružnice 8 (obidve kružnice do def. oboru patria).

**44.** Definičným oborom je pás v rovine zovrený priamkami

$$-2x - 5y - 6 = 0, \quad -2x - 5y - 4 = 0.$$

**45.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} - \frac{2x}{9 - x^2 - y^2}$$

**46.**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{4x^2 + 5y^2} - 6y\sqrt{4x^2 + 5y^2} - (2x^2 - 3y^2) \frac{5y}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}}}{4x^2 + 5y^2}$$

**47.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{y(\cos^2(xy) - \sin^2(xy))}{\sqrt{\sin(xy) \cos(xy)}}$$

**48.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{4xy + 7y}{2x^2y + 7xy + 6y^2}$$



49.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+4y}{6x+3y}\right)^2} \frac{-18y}{(6x+3y)^2}$$

50.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\ln \frac{4x+5y}{2x+5y}}} \frac{2x+5y}{4x+5y} \frac{-10x}{(2x+5y)^2}$$

51. a) Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o jednotku produkcie a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 32 p.j.

b) Ak produkcia  $V_2$  klesne o jednotku produkcie a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk klesne približne o 110 p.j.

c) Ak produkcia  $V_1$  klesne o 0,5 jednotiek produkcie a produkcia  $V_2$  vzrastie o tú istú hodnotu, tak celkový zisk vzrastie približne o 39 p.j.

Zisk pri produkcii  $x_0, y_0$  je 271 p.j.

52. a)  $\eta_x(P(x_0, y_0)) = 0,5319$

Ak produkcia  $V_1$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_2$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,5319 %.

b)  $\eta_y(P(x_0, y_0)) = 0,133$

Ak produkcia  $V_2$  vzrastie o 1% a produkcia  $V_1$  sa nezmení, tak celkový zisk vzrastie približne o 0,133 %.

53.  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,1048, \quad \eta_{p_1}(q_2) = 0,1344$

$\eta_{p_2}(q_1) = 0,1641, \quad \eta_{p_2}(q_2) = -0,108$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] o 0,1048 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] o 0,1344 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] o 0,1641 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] o 0,108 %.

54.  $\eta_{p_1}(q_1) = 0,0892, \quad \eta_{p_1}(q_2) = -0,1251$

$\eta_{p_2}(q_1) = -0,4456, \quad \eta_{p_2}(q_2) = 0,2775$

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  poklesne [vzrastie] približne o 0,0892 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_1$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_2$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  vzrastie [poklesne] približne o 0,1251 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_1$  vzrastie [poklesne] približne o 0,4456 %.

Ak sa cena za jednotku tovaru  $T_2$  zvýši [zníži] o 1% a cena za jednotku tovaru  $T_1$  zostane nezmenená, tak dopyt po tovare  $T_2$  poklesne [vzrastie] približne o 0,2775 %.

55. Funkcia  $f$  nemá lokálne extrém.

56. Funkcia  $f$  má v bode  $A[-2, -5]$  ostré lokálne minimum rovné -35 .

57. Funkcia  $f$  má v bode  $A[0; 0]$  ostré lokálne maximum rovné 0.

Funkcia  $f$  nemá v bode  $B\left[0; -\frac{4}{9}\right]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  nemá v bode  $C\left[-\frac{2}{3}; 0\right]$  lokálny extrém.

Funkcia  $f$  má v bode  $D\left[-\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right]$  ostré lokálne minimum rovné -0,428

58.  $\lambda_1 = -1/36$ . Funkcia  $f$  má v bode  $A = [408; 126]$  viazané ostré lokálne maximum rovne. 2796 ;

$\lambda_2 = +1/36$ . Funkcia  $f$  má v bode  $B = [-408; -126]$  viazané ostré lokálne minimum rovné  $-2796$ .

59. Maximálne sa vyprodukuje  $\sqrt{88}$  jednotiek produkcie pri vstupoch  $x = 2, y = 2$ .

60. Minimálne náklady na vstupy, pri ktorých sa vyprodukuje  $\sqrt{90780}$  jednotiek produkcie sú 534 p.j., čo zodpovedá vstupom  $x = 116, y = 10$ .

61. Firma by mala produkovať 17,0769 hl kofoly a 6,9231 hl viney.

Celkový zisk pred zvýšením produkcie 756.

Celkový zisk po zvýšení produkcie 863,0769.

62. Funkcia  $f$  nadobúda na množine  $M$  v bode  $B \left[-\frac{66}{61}; -\frac{360}{61}\right]$  absolútne minimum rovné  $-696$  a v bode  $C \left[\frac{66}{61}; \frac{360}{61}\right]$  absolútne maximum rovné 768.

63.  $7x - 63 \ln|x + 10| + C$ .

64.  $-\frac{1}{24(4x + 6)^6} + C$ .

65.  $\frac{\sin^3 x}{3} + C$

66.  $-\frac{\cos^9 x}{9} + C$

67.  $\frac{(x + 5)^{15}}{15} - \frac{5(x + 5)^{14}}{14} + C$ .

68.  $\operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 1| + C$

69.  $\frac{\sqrt{(x^2 + 5)^3}}{3} + C$

70.  $2\sqrt{x^2 + 10x + 8} + C$ .

71.  $\frac{1}{5} \ln^5 x + C$ .

72.  $\frac{\operatorname{arctg}^7 x}{7} + C$ .

73.  $3 \ln|x + 3| + \frac{10}{x + 3} + C$ .

74.  $\frac{22}{7} \ln|x - 2| + \frac{41}{7} \ln|x + 5| + C$ .

75.  $\frac{2}{49} \sin 7x - \frac{(2x + 4) \cos 7x}{7} + C$ .

76.  $\frac{4}{25} \cos 5x + \frac{(4x + 3) \sin 5x}{5} + C$ .

77.  $\frac{9}{2} x e^{2x} - \frac{17}{4} e^{2x} + C$ .

78.  $(4x^2 + 2x) \ln x - 2x^2 - 2x + C$ .

79. 0

80. 0

81.  $\frac{1}{2}$

82.  $\frac{2}{\pi}$

83.  $\frac{1}{9}$

84.  $-\frac{1}{2}$

85.  $\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$

86.  $P = \frac{125}{6} = 20,8333; \quad x_1 = -7, \quad x_2 = -2$ .

87.  $P = \frac{71}{6} = 11,8333, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0$ .

88.  $P = 108, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 3$ .

88.  $P = \frac{1}{3} = 0,3333$ ,  $x_1 = -1$   $x_2 = 0$ .

89.  $P = \frac{131}{4} = 32,75$ ,  $x_1 = -4$   $x_2 = 0$   $x_3 = 1$ .

90.  $C(x) = -0,01x^2 + 18x + 4512$ ,  $R(x) = -0,02x^2 + 37x$ ,  $P(x) = -0,01x^2 + 19x - 4512$ .

91.  $C(x) = -0,01x^2 + 26x + 8449$ ,  $R(x) = -0,02x^2 + 52x$ ,  $P(x) = -0,01x^2 + 26x - 8449$ .

92.  $P(680) = 3324$  p.j., (FC = 3612 ).

### **Kontaktné údaje**

Fecenko Jozef, doc. RNDr., CSc., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2 67295814, e-mail: jozef.fecenko@euba.sk