Katedra štatistiky,
Fakulta hospodárskej informatiky,
Ekonomická univerzita v Bratislave

Pravdepodobnostné modelovanie inverznými distribučnými funkciami: Estimácia kvantilových modelov

Ľubica SIPKOVÁ

január 2010

6. z cyklu prezentácií

Estimácia QM

Metódy priradenia numerickej hodnoty parametrom kvantilovej funkcie.

Voľba metód estimácie zavisí od:

- výberu tvaru kvantilového rozdelenia vo fáze identifikácie (jeho zložitosť a rozpracovanosť estimačných metód preň)
- vlastností empirického rozdelenia (vhodnosť, možnosť vypočtu charakteristík empirického rozdelenia)
- požiadaviek praxe na lepšiu zhodu v určitých častiach rozdelenia
- dostupného softvéru, výpočtovej techniky, odbornej literatury (tabuľky) a matematických a programovacích znalostí, časového faktoru...

Triedenie estimačných metód QM

- snaha zosúladiť vlastnosti modelu s vlasnosťami výberových údajov pri ich vhodnej kvantifikácii **výberovými charakteristikami** (momentové, kvantilové, lineárne momenty...)
- **minimalizácia** niektorej **miery rozdielov výberových hodnôt a distribučných hodnôt** (najmenšie švorce distr. rezíduí, minimalizácia absolútnych distr. rezíduí)
- **výpočtovo-intenzívne** minimalizačné metódy podľa testov „dobrej zhody“ (Kolmog.-Smirnovho, Anderson-Darlingovho...)
- **maximalizácia funkcie vierohodnosti**

Ktorým estimačným metódam sa budeme venovať?

- Metóda maximálnej vierohodnosti **(bude jej venovaná samostatná prezentácia - najpoužívanejšia)**
- Metóda momentov
- Metóda kvantilov
- Metóda minimalizácie štvorca distribučných rezíduí (aproximatívna metóda cez strednú hodnotu rovnomerného rozdelenia)
- Metóda minimalizácie absolútnych distribučných rezíduí

Metóda momentov

- klasický prístup – zosúladiť prvé štyri momenty empirického a teoretického rozdelenia

Kroky:

- vyjadrit momentové miery polohy, variability, šikmosti a špicatosti pre teoretické rozdelenie (nie vždy analytické riešenie)
- nájsť riešením najskôr parametre základného alebo normovaného tvaru (niekedy potrebná optimalizácia)
- vhodne umiestniť a rozložiť (roztiahnuť) pomocou odhadu výberového priemeru a výberovej štandardnej odchýlky

Príklad metódy kvantilov pre RS GLD

- vypočítať prvé štyri momenty empirického rozdelenia, označme $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4$
- nájsť ich zodpovedajúce vyjadrenie pre RS GLD ($\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}$), t.j. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
- dosadiť $\alpha_i = \hat{\alpha}_i$ pre $i = 1, 2, 3, 4$ a riešiť pre jednotlivé parametre $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4}$

Poznámka:

premenná: $Z = X - \lambda_1$ má **RS GLD** $(\boldsymbol{0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4})$**, t. j.** $\boldsymbol{\lambda_1}$ **je parameter polohy**

Momenty RS GLD

Pre k-ty moment $E(Z^k)$ platí

$$E\left(Z^k\right)=\frac{1}{\lambda_2^k}\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-1)^i\beta\left(\lambda_3(k-i)+1,\ \lambda_4 i+1\right)\right]$$

kde $\beta(a,b)$ je beta funkcia, definovaná vzťahom

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

k-ty moment pre RS GLD $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ existuje len vtedy, ak:

$\lambda_3 > -1/k$ a $\lambda_4 > -1/k$

prvé štyri momenty RS GLD rozdelenia

$$\alpha_1 = \mu = E(X) = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2}$$

$$\alpha_2 = \sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{B - A^2}{\lambda_2^2}$$

$$\alpha_3 = E\left[(X-\mu)^3 / \sigma^3\right] = \frac{C - 3AB + 2A^3}{\lambda_2^3 \sigma^3}$$

$$\alpha_4 = E\left[(X-\mu)^4 / \sigma^4\right] = \frac{D - 4AC + 6A^2B - 3A^4}{\lambda_2^4 \sigma^4}$$

Vyjadriť momenty Q-rozdelenia obyčajne nie je jednoduché a niekedy je nemožné

kde

$$A = \frac{1}{1+\lambda_3} - \frac{1}{1+\lambda_4}$$

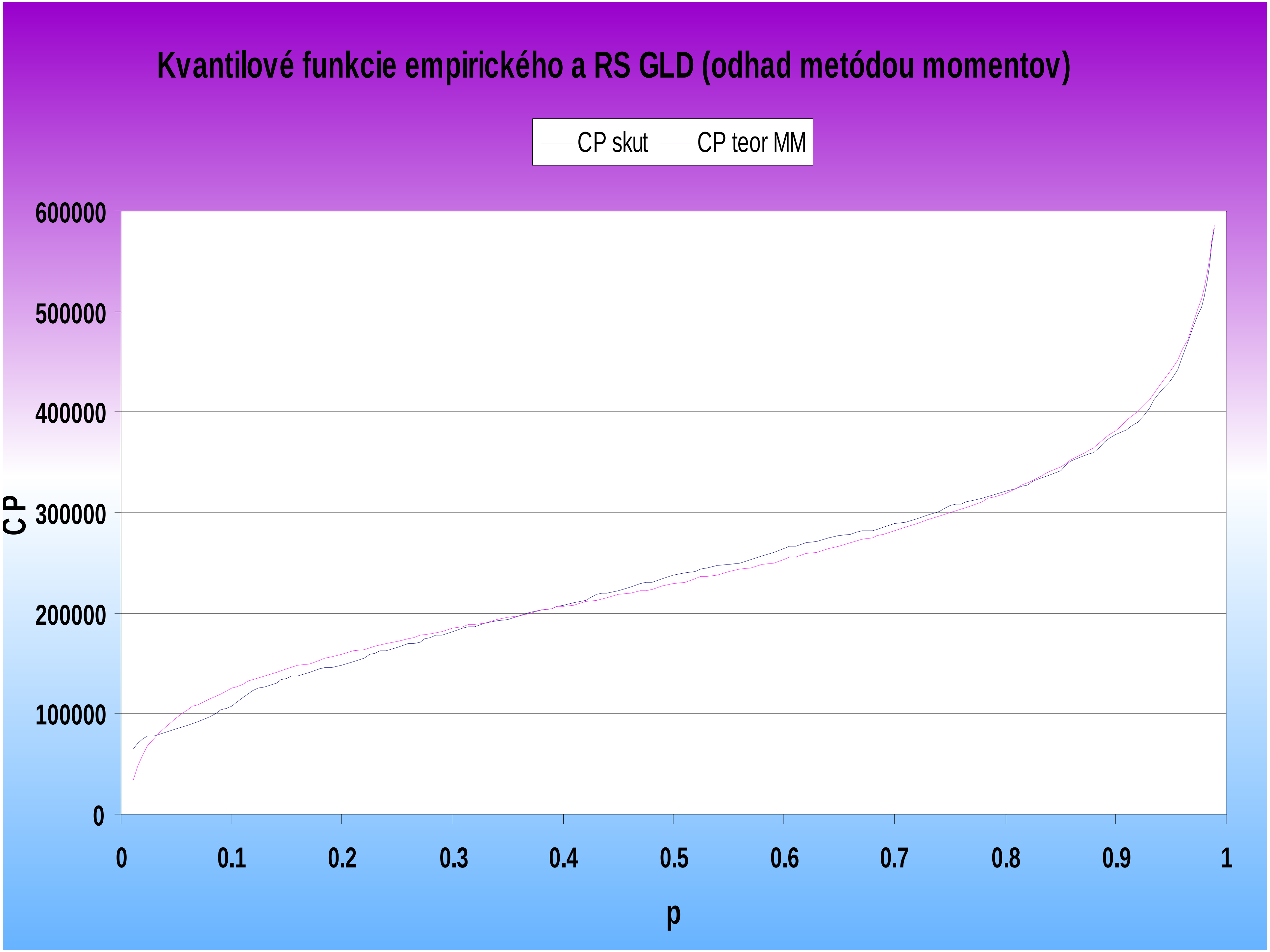
$$B = \frac{1}{1+2\lambda_3} + \frac{1}{1+2\lambda_4} - 2\beta(1+\lambda_3, 1+\lambda_4)$$

$$C = \frac{1}{1+3\lambda_3} + \frac{1}{1+3\lambda_4} - 3\beta(1+2\lambda_3, 1+\lambda_4) + 3\beta(1+\lambda_3, 1+2\lambda_4)$$

$$D = \frac{1}{1+4\lambda_3} + \frac{1}{1+4\lambda_4} - 4\beta(1+3\lambda_3, 1+\lambda_4) +$$
$$+ 6\beta(1+2\lambda_3, 1+2\lambda_4) - 4\beta(1+\lambda_3, 1+3\lambda_4)$$

Čo je a čo nie je vyriešené Karianom a Dudewiczom

- ponúkli tabelované hodnoty parametrov RS GLD pre určité hodnoty momentových charakteristík výberového súboru
- štvrtý centrálny moment len pre určité tvary (jednomodálne s konečným oborom funkčných hodnôt funkcie hustoty)
- existencia viacerých obmedzení a tabelované hodnoty len y časti jedného z regiónov hodnôt parametrov tvaru RS GLD
- metóda veľmi citlivá na koncové extrémne hodnoty


Kvantilové funkcie empirického a RS GLD (odhad metódou momentov)
CP skut
CP teor MM
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
CP
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
p

Metóda kvantilov

- Klasický prístup – zosúladiť kvantilové charakteristiky empirického a teoretického rozdelenia

Kroky v kvantilovom modelovaní:

- vyjadriť kvantilové miery polohy, variability, šikmosti a špicatosti pre teoretické rozdelenie – veľmi jednoduché z QF
- nájsť riešením najskôr parametre teoretického tvaru
- vhodne umiestniť pomocou odhadu výberového mediánu a rozložiť (roztiahnuť) pomocou miery pre variabilitu – odhadu interkvartilového rozpätia

Q-charakteristiky Kariana a Dudewicza pre RS GLD

- pre polohu – výberový medián $\hat{\rho}_1 = \tilde{x}_{0,5}$
- pre variabilitu – interkvantilové rozpätie $\hat{\rho}_2 = \tilde{x}_{1-u} - \tilde{x}_u$
- pre šikmosť – pomer váhy ľavého a pravého konca $\hat{\rho}_3 = \dfrac{\tilde{x}_{0,5} - \tilde{x}_u}{\tilde{x}_{1-u} - \tilde{x}_{0,5}}$
- pre špicatosť – faktor váhy konca $\hat{\rho}_4 = \dfrac{\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25}}{\hat{\rho}_2}$

Teoretickou analógiou týchto kvantilových mier pre RS GLD sú:

$$\rho_1 = F^{-1}(0,5) = \lambda_1 + \frac{0,5^{\lambda_3} - 0,5^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

$$\rho_2 = F^{-1}(1-u) - F^{-1}(u) = \frac{(1-u)^{\lambda_3} - u^{\lambda_4} + (1-u)^{\lambda_4} - u^{\lambda_3}}{\lambda_2}$$

$$\rho_3 = \frac{F^{-1}(0,5) - F^{-1}(u)}{F^{-1}(1-u) - F^{-1}(0,5)} = \frac{(1-u)^{\lambda_4} - u^{\lambda_3} + 0,5^{\lambda_3} - 0,5^{\lambda_4}}{(1-u)^{\lambda_3} - u^{\lambda_4} + 0,5^{\lambda_4} - 0,5^{\lambda_3}}$$

$$\rho_4 = \frac{F^{-1}(0,75) - F^{-1}(0,25)}{\rho_2} = \frac{0,75^{\lambda_3} - 0,25^{\lambda_4} + 0,75^{\lambda_4} - 0,25^{\lambda_3}}{(1-u)^{\lambda_3} - u^{\lambda_4} + (1-u)^{\lambda_4} - u^{\lambda_3}}$$

Pre a proti kvantilovej metóde est RS GLD

- pri riešení systému rovníc $\hat{\rho}_i = \rho_i \ , \quad i = 1, 2, 3, 4$

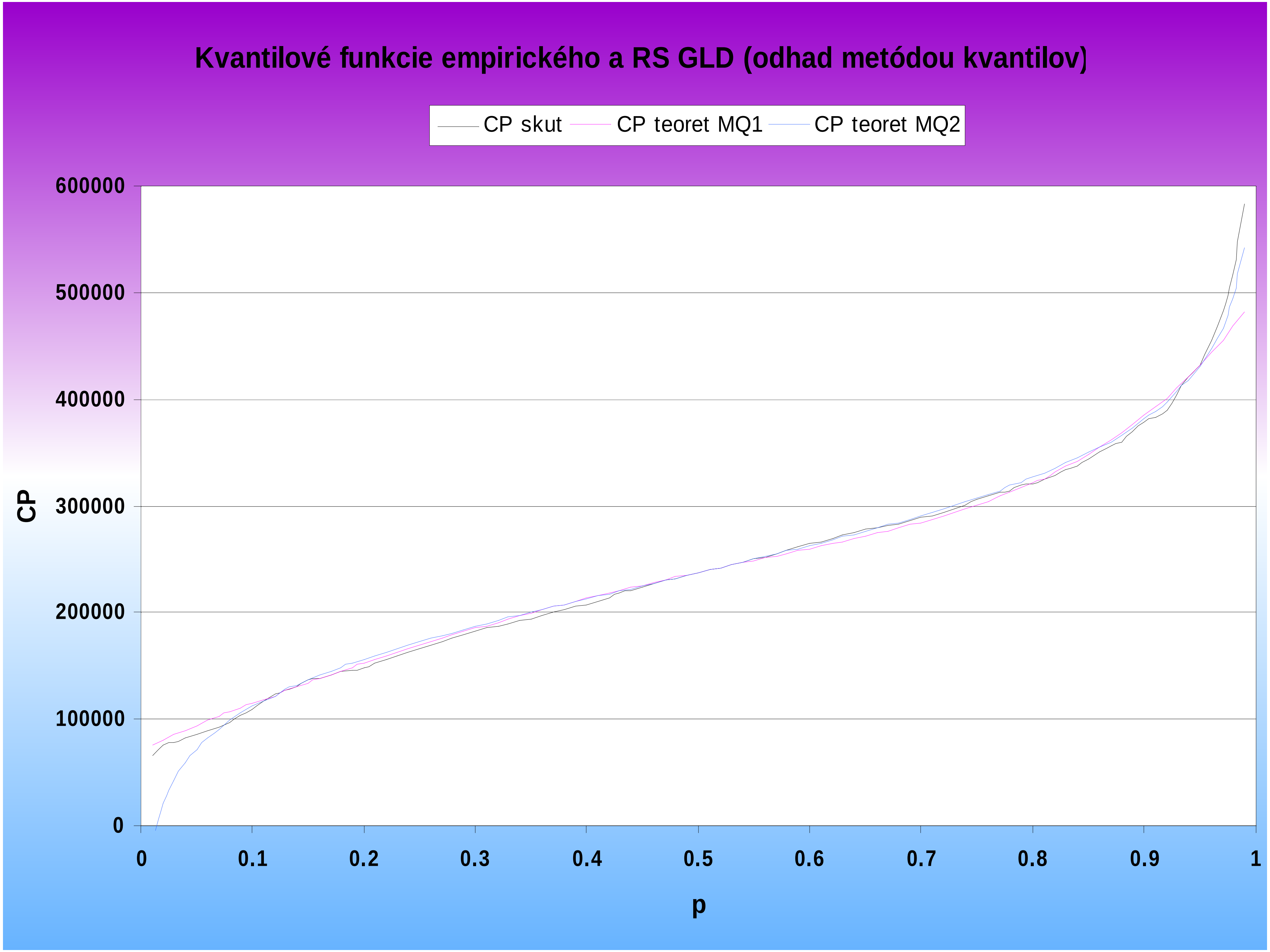
pre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a λ_4 platí rovnako ako pri momentovej metóde, že systém dvoch rovníc pre λ_3 a λ_4 nezávisí od hodnôt λ_1 a λ_2 a je nutné ho riešiť výpočtovými simplexovými metódami

- po získaní hodnôt λ_3 a λ_4 už nie je problémom vypočítať hodnoty λ_1 a λ_2 zo systému rovníc
- hodnoty parametrov tvaru RS GLD nepodmieňujú tak ako pri Pearsonovom alebo Johnsonovom systéme kriviek λ_3 – šikmosť a λ_4 – špicatosť, ale spoločne modelujú jeho tvar
- umiestnenie mediánu, hodnota miery polohy, závisí od hodnôt všetkých štyroch parametrov

Nie je teoreticky správne v metódach odhadu RS GLD dávať do súvislosti štyri miery (momentové alebo kvantilové) so štyrmi jeho parametrami

Účel momentovej a kvantilovej metódy

- v praxi pri niektorých tvaroch môžu priniesť uspokojivé výsledky
- prinášajú prvý pohľad na možné tvary kvantilových rozdelení, t. j. na možné kombinácie približných hodnôt parametrov tvaru
- využívajú sa na získanie východiskových parametrov, vstupujúcich do výpočtových simplexových procedúr pri aplikácii ďalších metód odhadu


Kvantilové funkcie empirického a RS GLD (odhad metódou kvantilov)
CP skut
CP teoret MQ1
CP teoret MQ2
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
CP
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
p

GLD L-moments | Hľadať | Rozšírené hľadanie | Nastavenia

Hľadať: ○ web ○ stránky písané po slovensky ○ stránky zo Slovenska

Web Výsledky **1** - **30** z **39 800** stránok v **angličti**

Mali ste na mysli: ***GR*** L-moments

Characterizing the generalized lambda distribution by **L-moments** - [Preložiť túto stránku]
The generalized lambda distribution (**GLD**) is a flexible four parameter distribution with many practical applications. **L-moments** of the **GLD** can be expressed **...**
adsabs.harvard.edu/abs/2007math......1405K - Podobné stránky
J Karvanen - 2007 - Citované 2-krát - Súvisiace články - Všetky verzie 6

[math/0701405] Characterizing the generalized lambda distribution ... - [Preložiť túto stránku
15 Jan 2007 **... L-moments** of the **GLD** can be expressed in closed form and are good **...** In this paper, we present the **L-moments** of the **GLD** up to an arbitrary **...**
arxiv.org/abs/math.ST/0701405 - Podobné stránky
J Karvanen - 2007 - Citované 2-krát - Súvisiace články - Všetky verzie 6

<a href="http://arxiv.org/abs/math.ST/0701405v1">arXiv:math.ST ... - [Preložiť túto str
15 Jan 2007 **... moments**, the **L-moments** of the **GLD** can be expressed in closed form, which **...** In this paper we analyze the **GLD** using **L-moments**. **...**
arxiv.org/pdf/math.ST/0701405 - Podobné stránky
J Karvanen - 2007 - Citované 2-krát - Súvisiace články - Všetky verzie 6

L-moments and TL-**moments** of the generalized lambda distribution - [Preložiť túto stránku
Application of the **GLD** using both **L-** and TL-**moment** parameter estimates from example data is demonstrated, and comparison of the **L-moment** fit of the **...**
portal.acm.org/citation.cfm?id=1238258 - Podobné stránky

Metóda minimalizácie absolútnych distribučných rezíduí

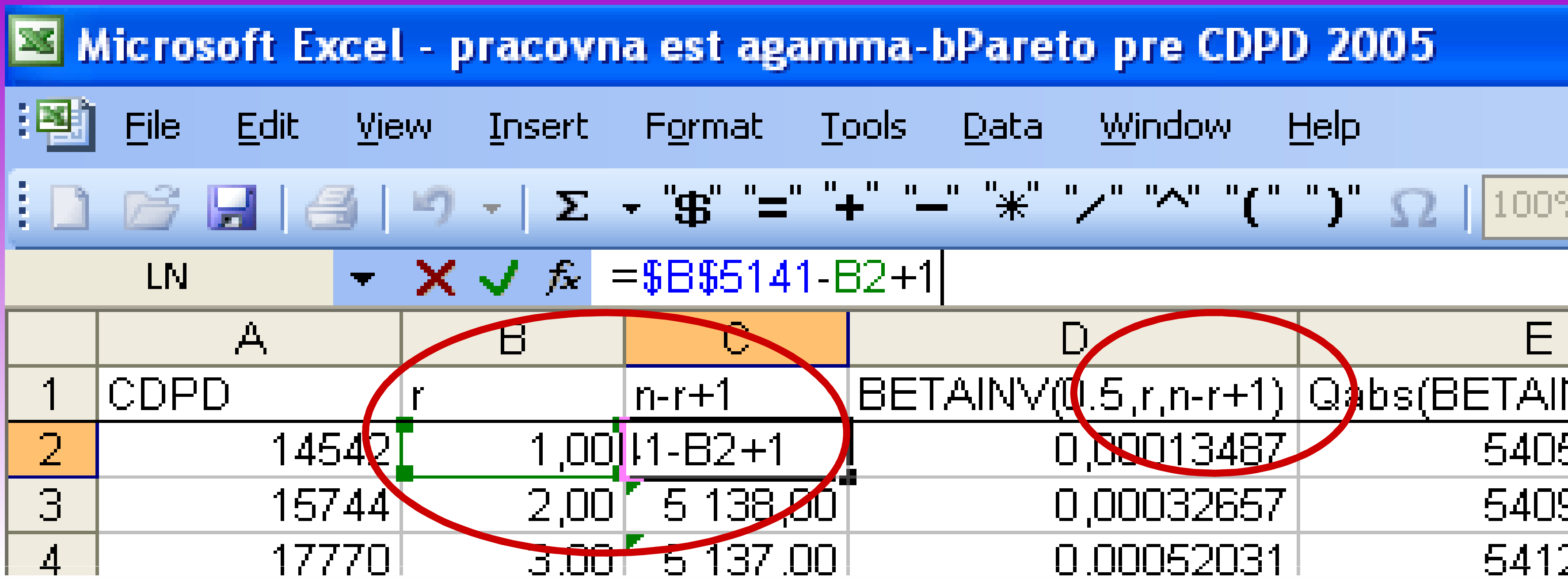
kritérium k minimalizácii v prípade RS GLD:

$$S(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} \left| x_r - Q\left(p_r^*, \boldsymbol{\lambda}\right) \right|$$

kritérium k minimalizácii všeobecne

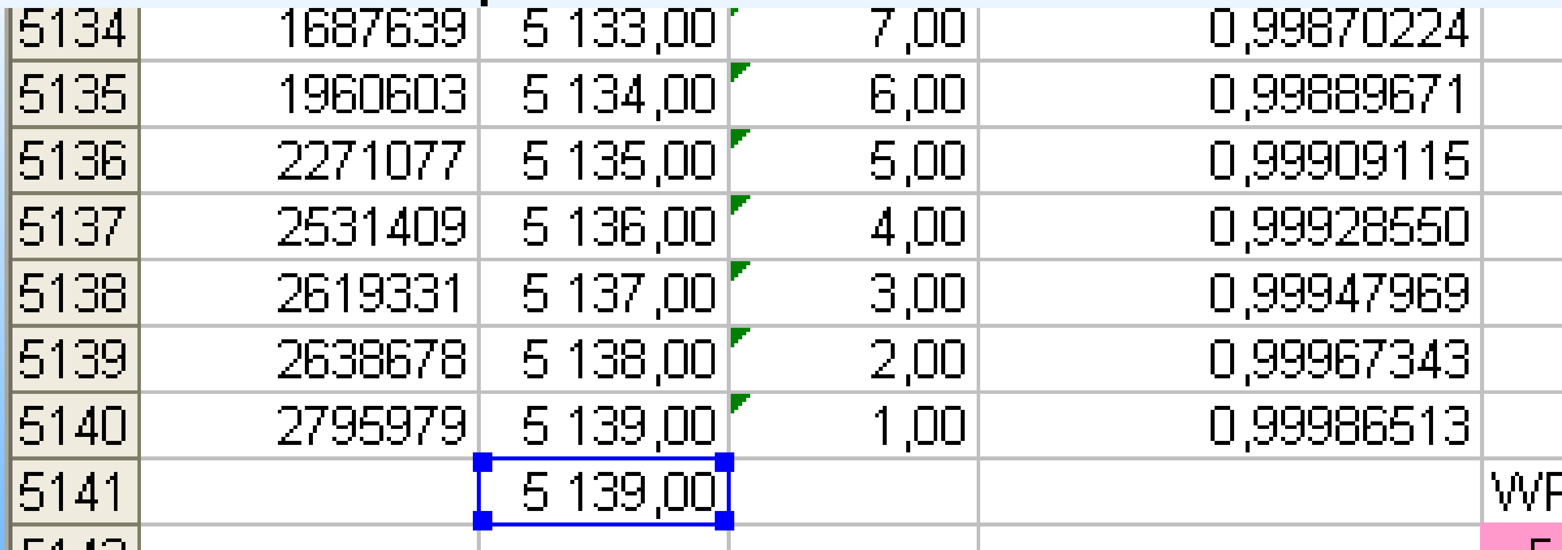
$$\sum \left| x_{(r)} - Q\left(p^*{}_r ; \Theta\right) \right|$$

kde **p_r* = BETAINV(0,5, *r*, *n*-*r*+1)**



	A	B	C	D	E
1	CDPD	r	n-r+1	BETAINV(0,5,r,n-r+1)	Qabs(BETAI
2	14542	1,00	41-B2+1	0,00013487	5405
3	15744	2,00	5 138,00	0,00032657	5409
4	17770	3,00	5 137,00	0,00052031	5412

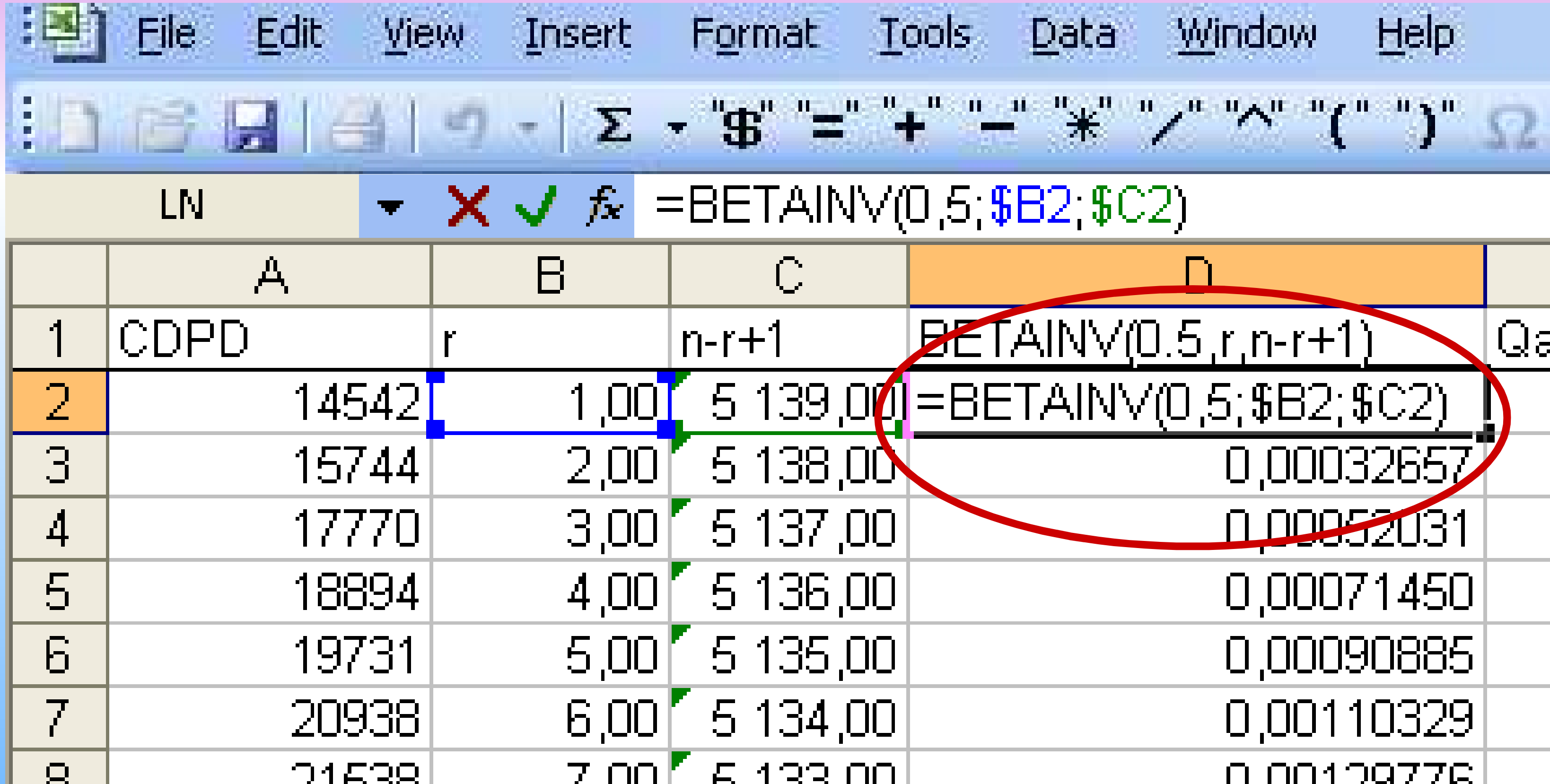
$p_r^* = \textbf{BETAINV}(0{,}5,\ r,\ n\text{-}r+1)$



5134	1687639	5 133,00	7,00	0,99870224	
5135	1960603	5 134,00	6,00	0,99889671	
5136	2271077	5 135,00	5,00	0,99909115	
5137	2531409	5 136,00	4,00	0,99928550	
5138	2619331	5 137,00	3,00	0,99947969	
5139	2638678	5 138,00	2,00	0,99967343	
5140	2795979	5 139,00	1,00	0,99986513	
5141		5 139,00			WP

Výpočet hodnôt pravdepodobnosti mediánového rankitu usporiadaných štatistík

$$p_r^* = \mathrm{BETAINV}(0{,}5,\ r,\ n\text{-}r+1)$$



	A	B	C	D	
1	CDPD	r	n-r+1	BETAINV(0.5,r,n-r+1)	Qa
2	14542	1,00	5 139,00	=BETAINV(0,5;$B2;$C2)	
3	15744	2,00	5 138,00	0,00032657	
4	17770	3,00	5 137,00	0,00052031	
5	18894	4,00	5 136,00	0,00071450	
6	19731	5,00	5 135,00	0,00090885	
7	20938	6,00	5 134,00	0,00110329	
8	21538	7,00	5 133,00	0,00129776	

Vyjadrenie hodnôt kvantilovej distribučnej funkcie pre výpočet distribučných rezíduí v Exceli

distribučné rezíduum $$e_r = x_{(r)} - Q\left(p_r;\Theta\right)$$

kde kvantilová funkcia je napr. v gama-Paretovom tvare:

$$Q(p) = \alpha + \left(\omega\,(1 - p)\,GAMAINV\left(p;\beta.\gamma\right) + \kappa\, p \Big/ (1 - p)^{\delta} \right),\quad 0 < p < 1,\ \delta > 0$$

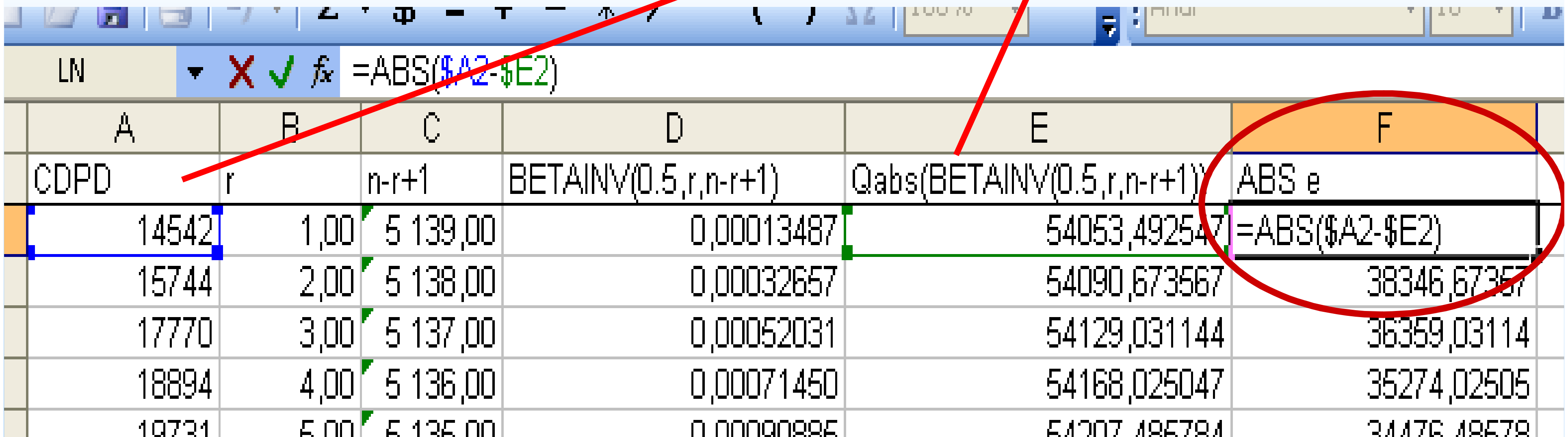
=$E$5142+(($E$5143*(1-$D2)*(GAMMAINV($D2;$E$5144;$E$5145))+($E$5146*$D2*(1/((1-$D2)^$E$5147))))

	C	D	E	F	G	H
	n-r+1	BETAINV(0.5,r,n-r+1)	Qabs(BETAINV(0.5,r,n-r+1))	ABS e		
1,00	5 139,00	0,00013487	1/((1-$D2)^$E$5147))))	39511,49255		
2,00	5 138,00	0,00032657	54090,673567	38346,67357		
3,00	5 137,00	0,00052031	54129,031144	36359,03114		
4,00	5 136,00	0,00071450	54168,025047	35274,02505		

Vyjadrenie absolútnej hodnoty distribučných rezíduí v Exceli

kritérium k minimalizácii

$$S(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} \left| x_r - Q\left(p_r^*, \boldsymbol{\lambda}\right) \right|$$



A	B	C	D	E	F
CDPD	r	n-r+1	BETAINV(0.5,r,n-r+1)	Qabs(BETAINV(0.5,r,n-r+1))	ABS e
14542	1,00	5 139,00	0,00013487	54053,49254	=ABS($A2-$E2)
15744	2,00	5 138,00	0,00032657	54090,673567	38346,67357
17770	3,00	5 137,00	0,00052031	54129,031144	36359,03114
18894	4,00	5 136,00	0,00071450	54168,025047	35274,02505
19731	5,00	5 135,00	0,00090886	54207,495784	34476,49578

Parametre G-P QF v Exceli

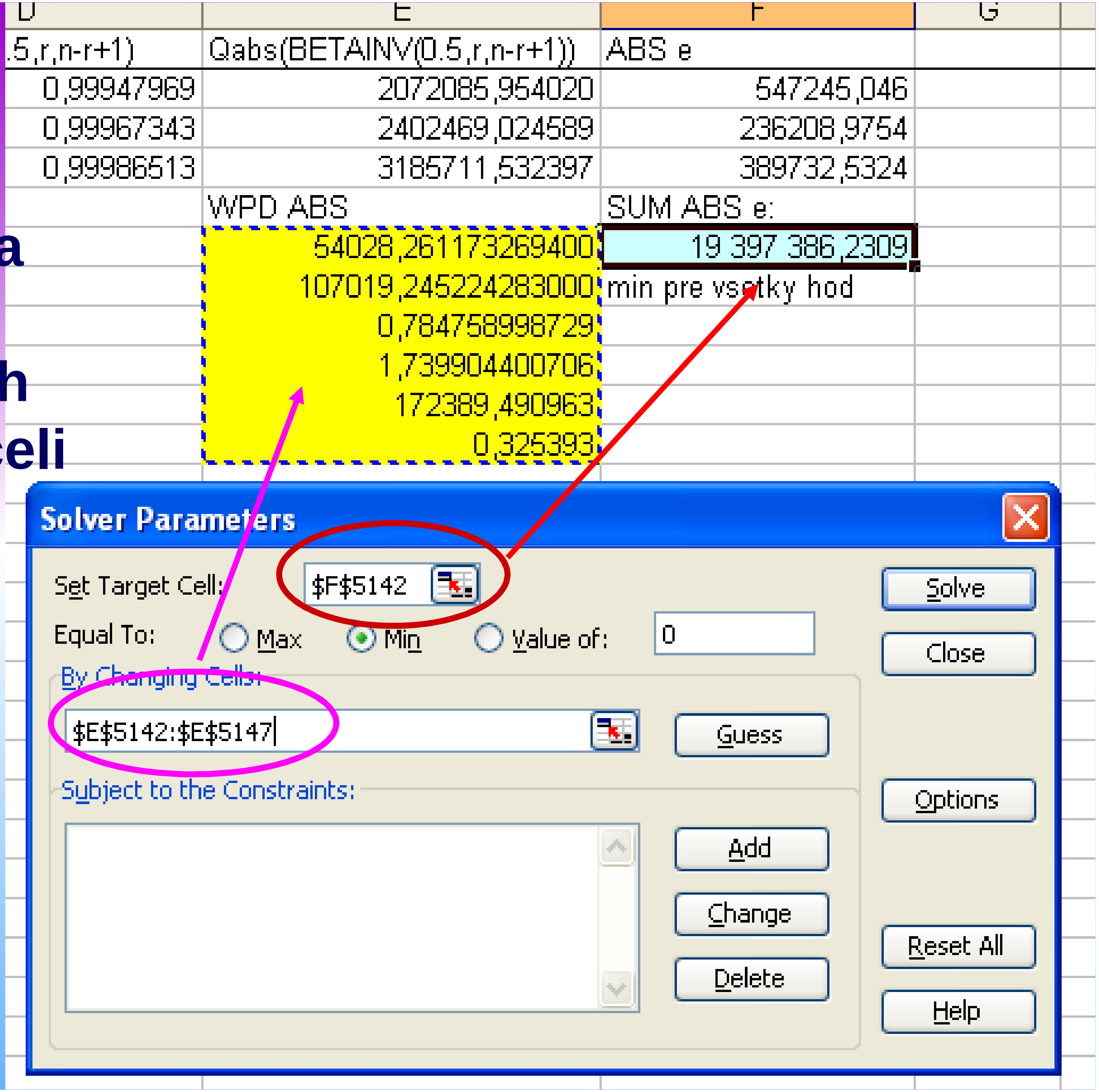
```
=$E$5142+(($E$5143*(1-$D5140)*(GAMMAINV($D5140;$E$5144;$E$5145)))+($E$5146*$D5140*(1/((1-$D5140)^$E$5147))))
```

B	C	D	E	F	G	H	I
	n-r+1	BETAINV(0.5,r,n-r+1)	Qabs(BETAINV(0.5,r,n-r+1))	ABS e			
134,00	6,00	0,99889671	1634076,947934	326526,0521			
135,00	5,00	0,99909115	1737011,193179	534065,8068			
136,00	4,00	0,99928550	1874131,206877	657277,7931			
137,00	3,00	0,99947969	2072085,954020	547245,046			
138,00	2,00	0,99967343	2402469,024589	236208,9754			
139,00	1,00	0,99986513	1-$D5140)^$E$5147)))	389732,5324			
139,00			WPD ABS	SUM ABS e:			
			54028,261173269400	19 397 386,2309			
			107019,245224283000	min pre vsetky hod			
			0,784758998729				
			1,739904400706				
			172389,490963				
			0,325393				

kritérium k minimalizácii

$$S(\lambda)=\sum_{r=1}^{n}\left|x_r - Q\left(p_r^{*},\lambda\right)\right|$$

Minimalizácia absolútnych distribučných rezíduí v Exceli



Öztürk a Dale aproximatívna metóda pre RS GLD

kritérium k minimalizácii

$$S(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} \left[CP_r - \lambda_1 - \lambda_2^{-1} g_r(\lambda_3, \lambda_4) \right]^2$$

kde

$$g_r = \left(\frac{r}{n+1} \right)^{\lambda_3} - \left(\frac{n-r+1}{n+1} \right)^{\lambda_4}$$

Metóda minimalizácie druhej mocniny distribučných rezíduí

kritérium k minimalizácii

$$\sum\left(x_{(r)} - Q\left(p_r;\Theta\right)\right)^2$$

kde p_r je *p*-hodnota odhadu rankitu $\boldsymbol{p_r = r/(n+1)}$

alebo tiež približne $\boldsymbol{p_r = (r - 0.5)/n}$

Odhad rankitu je cez rovnomerné rozdelenie použitím Q-transformácie:

U má rovnomerné rozdelenie v intervale (0, 1)

pre funkciu hustoty i- tej usporiadanej štatistiky $U_{(i:n)}$ platí:

$$f\left(u_{(i:n)}\right) = n\binom{n-1}{i-1}U_{(i:n)}^{i-1}\left(1-U_{(i:n)}\right)^{n-1}$$

a jej stredná hodnota $E\left(U_{(i:n)}\right) = i/(n+1)$

Výpočet hodnôt pravdepodobnosti aproximácie rankitu usporiadaných štatistík

aproximácia rankitu

$$p_r = r/(n+1)$$

alebo približne

$$p_r = (r - 0.5)/n$$

P1 fx r/(n+1)

	P	Q	R
	r/(n+1)	Qsq(r/(n+1))	SQ e (SQ of emp.-rankit teoret.Q)
8	0,999416	203475,578816	5836357416064,580000
9	0,999611	203166,112853	5931718152435,910000
0	0,999805	202827,262147	6724435935531,000000
1		WPD SQ	SUM SQ e
2		53876,471015681200	125 621 084 179 034,000000
3		94517,301607597000	SUM SQ e bez 5 hor
4		0,689668672671	97 438 018 476 392,700000
5		3,189465646509	
6		148533,621042	
7			
8			
9			

Výpočet hodnôt r-tej hodnoty QF pomocou aproximácie rankitu poriadkových štatistík v exceli

P1 | fx | r/(n+1)

	P	Q	R
	r/(n+1)	Qsq(r/(n+1))	SQ e (SQ of emp.-rankit teoret.Q)
8	0,999416	203475,578816	5836357416064,580000
9	0,999611	203166,112853	5931718152435,910000
0	0,999805	202827,262147	6724435935531,000000
1		WPD SQ	SUM SQ e
2		53876,471015681200	125 621 084 179 034,000000
3		94517,301607597000	SUM SQ e bez 5 hor
4		0,689668672671	97 438 018 476 392,700000
5		3,189465646509	
6		148533,621042	
7			
8			
9			

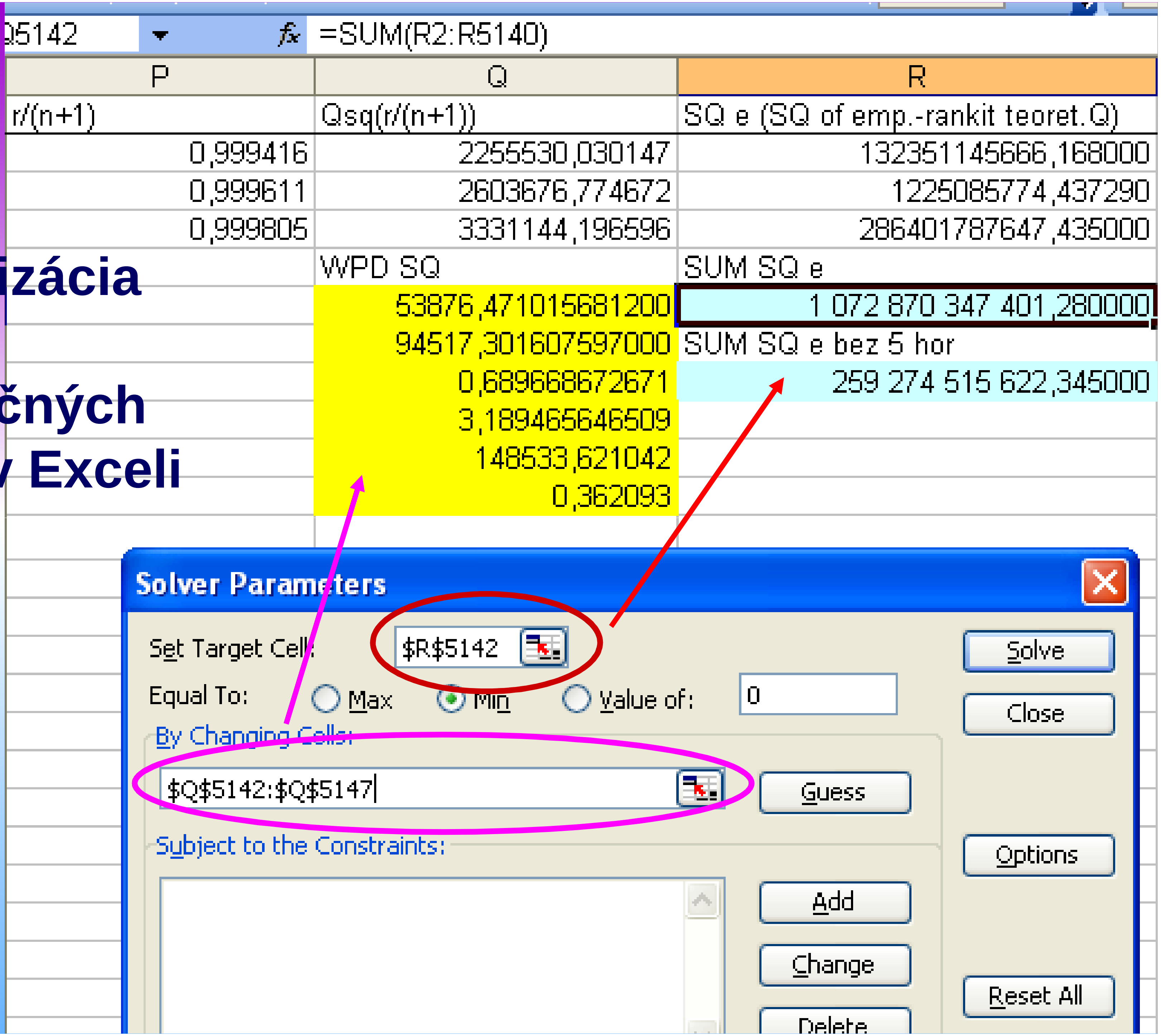
Výpočet súčtu hodnôt druhých mocnín pre testovacie kritérium

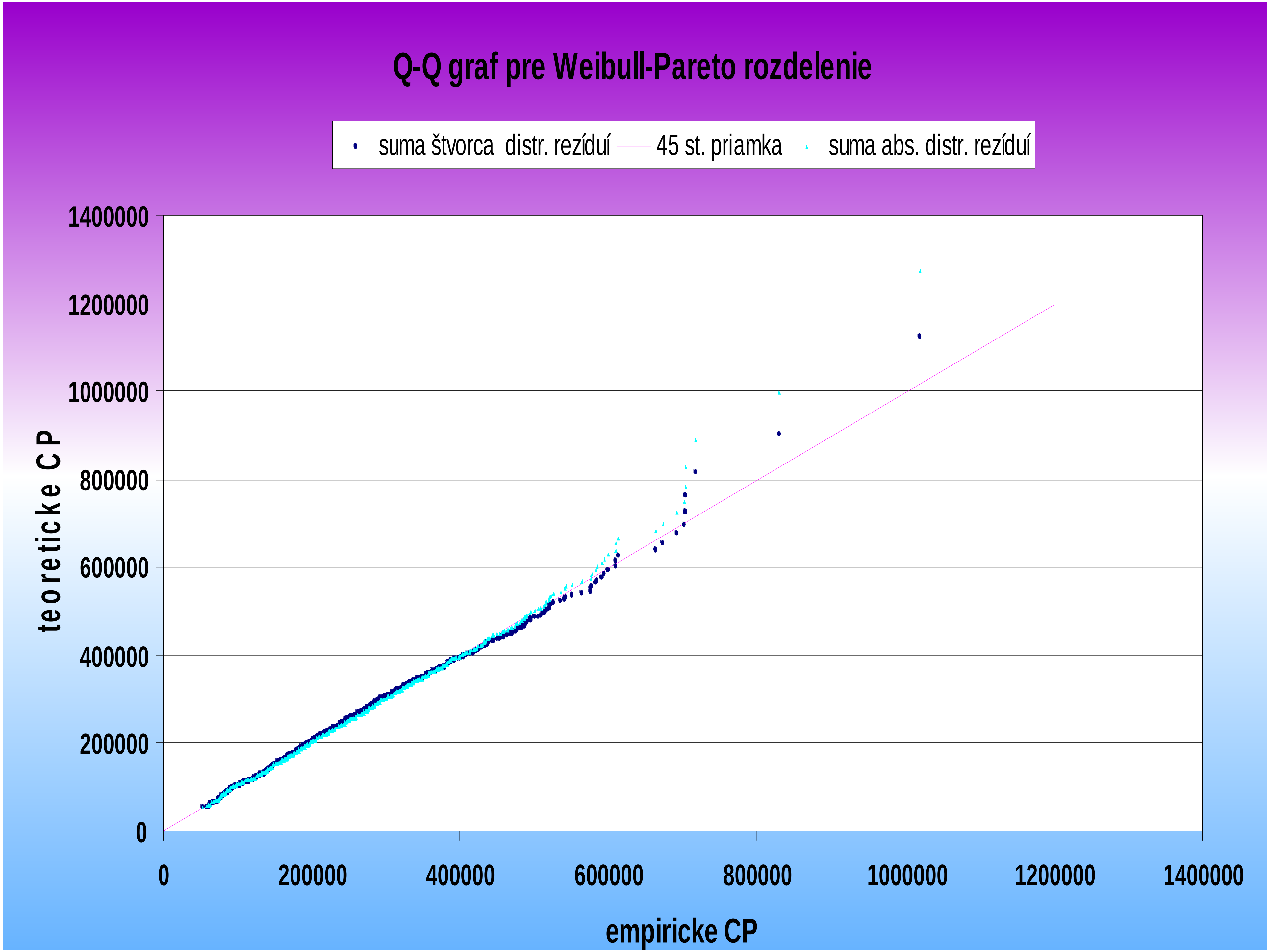
$$\sum\left(x_{(r)} - Q\left(p_r;\Theta\right)\right)^2$$

P1 | f_x | r/(n+1)

	P	Q	R
	r/(n+1)	Qsq(r/(n+1))	SQ e (SQ of emp.-rankit teoret.Q)
8	0,999416	203475,578816	5836357416064,580000
9	0,999611	203166,112853	5931718152435,910000
0	0,999805	202827,262147	6724435935531,000000
1		WPD SQ	SUM SQ e
2		53876,471015681200	125 621 084 179 034,000000
3		94517,301607597000	SUM SQ e bez 5 hor
4		0,689668672671	97 438 018 476 392,700000
5		3,189465646509	
6		148533,621042	
7			
8			
9			

Minimalizácia štvorca distribučných rezíduí v Exceli




Q-Q graf pre Weibull-Pareto rozdelenie
suma štvorca distr. rezíduí
45 st. priamka
suma abs. distr. rezíduí
1400000
1200000
1000000
800000
600000
400000
200000
0
teoreticke CP
0
200000
400000
600000
800000
1000000
1200000
1400000
empiricke CP

Vlastnosti bodových odhadov parametrov QF aplikáciou rôznych estimačných metód

- **„medzera“ v teórii o vlastnostiach** nimi získaných odhadov parametrov
- v známych analýzach vlastností odhadov ide o závery na základe simulácií a štatistického spracovania ich výsledkov, pričom **je diskutabilné dodržanie rovnakých podmienok** pri náhodných pozorovaniach pri rôznych metódach
- **nie je možné voliť preferenciu metód odhadov podľa vlastností získaných odhadov**, ako je to v klasickom prístupe k pravdepodobnostnému modelovaniu

Dvojaký prístup, rôzne možnosti posúdenia kvality estimátorov

- **v prípade klasických metód** odhadov parametrov funkcií hustoty sa uprednostňujú maximálne vierohodné odhady s analyticky odvodenými dôkazmi ich vynikajúcich vlastností
- **v kvantilovom prístupe** metódy založené na vyjadrení distribučných rezíduí sú vo všeobecnosti vhodnejšie ako metóda momentov a metóda kvantilov pri odhade kvantilových tvarov zložitejších rozdelení

Porovnanie vhodnosti dvoch rozdielnych spôsobov eliminácie nulového súčtu distribučných rezíduí

Metóda používajúca sumu **štvorcov** prináša tvary, ktoré tesnejšie modelujú **dlhý koniec** rozdelenia

- Metóda minimalizácie súčtu **absolútnych** distribučných rezíduí poskytla tvary tesnejšie na **hrubom konci** a v strednej časti rozdelenia
- **Je robustnejšou alternatívou a rastúca variabilita na dlhom konci rozdelenia má pri nej menší vplyv**

Na záver

- Výber metódy odhadu v konkrétnej aplikácii závisí aj od požiadaviek praxe, od účelu, na ktorý má model slúžiť, t. j. ktorú časť je potrebné najtesnejšie modelovať
- na dosiahnutie čo najlepšej zhody je vhodné použiť v konkrétnom prípade viaceré metódy, výsledky vzájomne porovnať, prípadne výsledky jednej metódy použiť ako vstupné hodnoty optimalizačných procedúr ďalších metód
- metódy, sú teoreticky, technicky a hlavne časovo náročné a ich výsledky možno vylepšovať opakovaním procedúr
- nemožno voliť najvhodnejší odhad kvantilovej funkcie podľa vlastností odhadov pri jednotlivých metódach, dôraz sa musí klásť na dôslednú analýzu kvality a vhodnosti získaných kvantilových tvarov

Pravdepodobnostné modelovanie inverznými distribučnými funkciami: Modifikačné pravidlá pre kvantilové funkcie

Spracovanie šiestej z cyklu prezentácií o kvantilovom modelovaní.

Podrobnejšie možno nájsť v monografii:

Sipková, Ľ; Sodomová, E.: Modelovanie kvantilovými funkciami, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2007; 175 s.

ISBN 978-80-225-2346-2

Ľubica SIPKOVÁ

január 2010