POLYNOMICKÉ ASYMPTOTY

Jozef Fecenko

Úvod

V základnom kurze matematiky na vysokej škole sa asymptota grafu funkcie f názotne definuje ako priamka, ktorá má tú vlastnosť, že ak sa s bodom pohybujeme po grafe funkcie f tak, že jeho vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy rastie nad všetky medze, tak vzdialenosť bodu na grafe funkcie od priamky sa blíži k nule (Fecenko, J., Pinda, Ľ., 2002), (Kaderová, A.- Mucha,V.- Ondrejková-Krčová, I.- Šoltésová, T., 2016). Ďalej sa uvádza, že vzhľadom na smernicu priamky (asymptoty) sa rozlišujú dva typy asymptot, a to: asymptoty bez smernice a asymptoty so smernicou.

1. Lineárne asymptoty

Vráťme sa na chvíľu ešte k základnému kurzu vysokoškolskej matematiky a venujme sa lineárnym asymptotám. Uvedieme dve definície a jedno tvrdenie (bez dôkazu) o lineárnych asymptotách. Tento text je prevzatý z učebnice (Fecenko, J., Pinda, Ľ., 2002).

Definícia 1.1. Nech funkcia f je definovaná aspoň v jednom okolí $\tilde{O}_{\delta+}(a),\ \tilde{O}_{\delta-}(a),\ a\in\mathbb{R}$. Priamku $x=a$ nazývame *asymptotou bez smernice* grafu funkcie f práve vtedy, ak nastane aspoň jeden z nasledujúcich prípadov:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty. \tag{1}$$

Definícia 1.2. Nech funkcia f je definovaná aspoň v jednom z okolí $\tilde{O}_{\delta+}(+\infty),\ \tilde{O}_{\delta-}(-\infty)$. Potom priamku p danú rovnicou

$$y=kx+q$$

nazývame *asymptotu so smernicou grafu funkcie f* práve vtedy, ak platí

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(kx+q)\big)=0 \ \text{ alebo } \ \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(kx+q)\big)=0. \tag{2}$$

V prvom prípade hovoríme o *asymptote grafu funkcie pre* $x\to+\infty$, v druhom prípade o *asymptote grafu funkcie pre* $x\to-\infty.$,

Veta 1.1. Priamka $y=kx+q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f pre $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ práve vtedy, ak existujú vlastné limity

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=q, \tag{3}$$

$$\left[\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx\big)=q\right]. \tag{4}$$

2. Polynomické asymptoty

Definícia 2.1. Nech funkcia f je definovaná aspoň v jednom z okolí $\tilde{O}_{\delta+}(+\infty),\ \tilde{O}_{\delta-}(-\infty)$. Potom polynóm

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0,$$

nazývame *polynomickou asymptotu stupňa n grafu funkcie f* práve vtedy, ak platí

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-P_n(x)\right)=0 \quad \text{alebo} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-P_n(x)\right)=0. \tag{5}$$

V prvom prípade hovoríme o *polynomickej asymptote grafu funkcie pre* $x\to+\infty$, v druhom prípade o *polynomickej asymptote grafu funkcie pre* $x\to-\infty$.

Kvadratické asymptoty

Teóriu s príkladmi o lineárnych asymptotach je možno nájsť napríklad v spomínanej učebnici (Fecenko, J., Pinda, Ľ., 2002), resp. (Kaderová, A.- Mucha,V.- Ondrejková-Krčová, I.- Šoltésová, T., 2016)

Začnime teda s jednoduchším prípadom, ako určiť kvadratické asymptoty grafu funkcie, ak existujú. Budeme sa zaoberať iba asymptotami pre $x\to+\infty$. Vzťahy pre $x\to-\infty$ sa odvodia analogicky.

Nech v zmysle definície 2.1 je funkcia f je definovaná v okolí $\tilde{O}_{\delta+}(+\infty)$ a nech existuje taká kvadratická funkcia $P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_2\neq 0$, pre ktorú platí

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(a_2x^2+a_1x+a_0)\right)=0. \tag{6}$$

Vzťah (6) upravme na tvar

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{f(x)}{x^2}-a_2-\frac{a_1}{x}-\frac{a_0}{x^2}\right)=0.$$

Zrejme musí byť

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}-a_2-\frac{a_1}{x}-\frac{a_0}{x^2}\right)=0.$$

Po úprave dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}-\lim_{x\to\infty}a_2-\lim_{x\to\infty}\frac{a_1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{a_0}{x^2}=0.$$

Odkiaľ

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=a_2} \tag{7}$$

Upravme teraz vzťah (6) na tvar

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{f(x)}{x}-a_2x-a_1-\frac{a_0}{x}\right)=0.$$

Odkiaľ podobnou úvahou ako vyššie, dostávame

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a_2x\right)=a_1.} \tag{8}$$

A konečne zo vzťahu (6) dostaneme pre vyjadrenie a_0 vzťah

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a_2x^2-a_1x\right)=a_0.} \tag{9}$$

Naopak, predpokladajme teraz, že existujú vlastné limity (7), (8), (9). Potom po dosadení do vzťahu (9) vypočítaných hodnôt a úpravou vzťahu (9) dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a_2x^2-a_1x-a_0\right)=0,$$

čo je v zmysle definície 2.1 kvadratická asymptota funkcie *f*.

Príklad 2.1. Nájdime polynomické asymptoty grafov funkcií

a) $f(x)=\dfrac{4x^3-3x^2+2x+1}{x+1}$,

b) $f(x)=\sqrt{x^4+1}+(x^2+1)\operatorname{arctg}(x)$.

pre $x\to+\infty$.

Riešenie. Presvedčte sa, že lineárne asymptoty grafu funkcie neexistujú v obidvoch prípadoch, pretože

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

Hľadajme kvadratické asymptoty v tvare $P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_2\neq 0$,

a) Počítajme

$$a_2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^3-3x^2+2x+1}{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+2x+1}{x^3+x^2}=4.$$

$$a_1=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a_2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{4x^3-3x^2+2x+1}{x+1}}{x}-4x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2+2x+1}{x^2+x}=-7.$$

$$a_0=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a_2x^2-a_1x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-3x^2+2x+1}{x+1}-4x^2+7x\right)=9.$$

Hľadaná kvadratická asymptota funkcie f pre $x\to+\infty$ je

$$P_2(x)=4x^2-7x+9,$$

alebo v tvare

$$y=4x^2-7x+9.$$

b) Táto úloha je po výpočtovej stránke zložitejšia, preto si pomôžeme pri výpočte limít open source systémom wxMaxima. Počítajme

$$a_2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}+(x^2+1)\operatorname{arctg}(x)}{x^2}=\frac{2+\pi}{2}.$$

Výpočet limity:

```
(%i1) f(x):=sqrt(1+x^4)+(x^2+x)*atan(x);
```

(%o1) $f(x):=(x^2+x)\,\mathrm{atan}(x)+\sqrt{x^4+1}$

```
(%i2) limit(f(x)/x^2,x,inf);
```

(%o2) $\dfrac{2+\pi}{2}$

$$a_1=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a_2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}+(x^2+1)\operatorname{arctg}(x)}{x}-\frac{(2+\pi)}{2}x\right)=\frac{\pi-2}{2}.$$

Výpočet limity:

```
(%i3) limit(f(x)/x-(2+%pi)/2*x,x,inf);
```

(%o3) $\dfrac{\pi-2}{2}$

$$a_0=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-a_2x^2-a_1x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+1}+(x^2+1)\operatorname{arctg}(x)-\frac{2+\pi}{2}x^2-\frac{\pi-2}{2}x\right)=-1$$

Výpočet limity:

```
(%i4) limit(f(x)-(2+%pi)/2*x^2-(%pi-2)/2*x,x,inf);
(%o4) -1
```

Hľadaná kvadratická asymptota funkcie f pre $x \to +\infty$ má tvar

$$y = \frac{2+\pi}{2}x^2 + \frac{\pi-2}{2}x - 1.$$

Veta 2.1. Polynomická funkcia

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0, \tag{10}$$

je polynomickou asymptotu stupňa n grafu funkcie f pre $x \to +\infty$ práve vtedy, ak existujú vlastné limity

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_n \\
&\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x^{n-1}} - a_n x \right) = a_{n-1} \\
&\vdots \\
&\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x^k} - a_n x^{n-k} - a_{n-1}x^{n-k-1} - \cdots - a_{k+1}x \right) = a_k \\
&\vdots \\
&\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x \right) = a_0
\end{aligned} \tag{11}$$

Dôkaz môžeme vykonať podobnými úvahami, ako sme uviedli pre kvadratickú asymptotu grafu funkcie.

3. Využitie open source programu wxMaxima pre určenie polynomických asymptot

Predpokladajme teraz, že funkcia f, ku grafu ktorej chceme nájsť polynomickú asymptotu je rozvinuteľná do Taylorovho radu v ľubovoľnom okolí bodu $x = c$, pre nejaké $c > K > 0$. Vypočítame limitu tohto rozvoja pre $c \to \infty$. Interpretujme túto úvahu na príklade 2.1 a). Zoberme napr. prvé 3 členy (prípadne viac) Taylorovho rozvoja funkcie f a vypočítajme limitu tohto rozvoja pre $c \to \infty$. Výpočty budeme realizovať v systéme wxMaxima.

```
(%i1) f(x):=(4*x^3-3*x^2+2*x+1)/(x+1);
```

(%o1) $f(x) := \dfrac{1+2x-3x^2+4x^3}{1+x}$

```
(%i2) taylor(f(x), x, c, 3);
```

(%o2)/T/ $\dfrac{1+2c-3c^2+4c^3}{c+1} + \dfrac{(1-6c+9c^2+8c^3)(x-c)}{c^2+2c+1} + \dfrac{(-4+12c+12c^2+4c^3)(x-c)^2}{c^3+3c^2+3c+1} + \dfrac{8(x-c)^3}{c^4+4c^3+6c^2+4c+1} + \ldots$

```
(%i3) limit(%,c,inf);
```

(%o3) $4x^2-7x+9$

V poslednom kroku výpočtu sme dostali hľadanú polynomickú asymptotu grafu funkcie f.. Avšak ani tento výpočet nie je príliš praktický (nevieme koľko členov rozvoja máme zobrať).

Ak by sme zobrali menej ako 3, limita by bola rovná $+\infty$. Maxima v tomto prípade poskytuje oveľa elegantnejší spôsob výpočtu polynomických asymptot grafu funkcie f a to rozvojom funkcie f do Taylorovho radu v bode $+\infty$, ak takýto rozvoj existuje. Opäť to budeme interpretovať na našich dvoch funkciách z príkladu 2.1.

(%i1) f(x):=(4*x^3-3*x^2+2*x+1)/(x+1);

(%o1) $f(x) := \frac{1+2x-3x^2+4x^3}{1+x}$

(%i2) taylor(f(x),x,inf,8);

(%o2)/T/ $4x^2-7x+9-\frac{8}{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{8}{x^3}+\frac{8}{x^4}-\frac{8}{x^5}+\frac{8}{x^6}-\frac{8}{x^7}+\frac{8}{x^8}+\ldots$

Hľadanou polynomickou asymptotou je tá časť rozvoja, ktorá tvorí polynóm. V našom prípade je to funkcia

$$y = 4x^2 - 7x + 9.$$

V prípade druhej funkcie dostaneme:

(%i3) f(x):=sqrt(1+x^4)+(x^2+x)*atan(x);

(%o3) $f(x) := (x^2+x)\operatorname{atan}(x)+\sqrt{x^4+1}$

(%i4) taylor(f(x),x,inf,8);

Is x positive, negative or zero? p;

(%o4)/T/ $\frac{(2+\pi)x^2}{2}+\frac{(\pi-2)x}{2}-1+\frac{1}{3x}+\frac{5}{6x^2}-\frac{1}{5x^3}-\frac{1}{5x^4}+\frac{1}{7x^5}+\frac{1}{56x^6}-\frac{1}{9x^7}-\frac{1}{9x^8}+\ldots$

Hľadanou polynomickou asymptotou grafu funkcie f je kvadratická funkcia

$$y = \frac{2+\pi}{2}x^2 + \frac{\pi-2}{2}x - 1.$$

Poznámka 3.1. Žiada sa poznamenať, že ak funkcia f, ku ktorej chceme určiť polynomickú asymptotu je racionálna funkcia (podiel dvoch polynómov)

$$f(x) = \frac{P_r(x)}{Q_s(x)},$$

kde r a s sú stupne polynómov, tak v prípade, že $r \geq s$, danú racionálnu funkciu vieme upraviť v tvare

$$\frac{P_r(x)}{Q_s(x)} = U(x) + \frac{Z_k(x)}{Q_s(x)},$$

kde $k < s$. $Z_k(x)$ je zvyšok po delení polynómu $P_r(x)$ polynómom $Q_s(x)$. Potom $U(x)$ je hľadaná polynomická funkcia. V našom prípade môžeme funkciu f z príkladu 2.1 vyjadriť v tvare

$$f(x) = \frac{4x^3-3x^2+2x+1}{x+1} = 4x^2-7x+9-\frac{8}{x+1}.$$

Odkiaľ bezprostredne vidíme tvar polynomickej asymptoty grafu funkcie f.

Záver

Naskytá sa otázka, aký môže byť prakticky význam asymptot? V praxi môže nastať situácia, keď v nejakom modeli, ktorý vyjadruje závislosť vysvetľovanej (závislej) premennej od vysvetľujúcej (nezávislej) premennej vzťahom $y = f(x)$, nadobúda vysvetľujúca premenná dostatočne veľké hodnoty a funkcia $f(x)$ má zložité vyjadrenie a ak existuje polynomická funkcia $P(x)$, ktorá je asymptotou funkcie f, vtedy je spravidla z praktických dôvodov jednoduchšie namiesto funkcie f uvažovať funkciu P. Hovoríme tiež, že sme funkciu f asymptoticky aproximovali funkciou P. Iný dôvod štúdia asymptot je vtedy, ak nás zaujíma dynamika nejakého procesu. Článok je tiež príspevkom k rozšírenému ponímaniu problematiky asymptot funkcií a ich asymptotickej aproximácií.

Literatúra

Fecenko, J., Pinda, Ľ. (2002). *Matematika 1.* Bratislava: Iura Edition.

Kaderová, A.- Mucha,V.- Ondrejková-Krčová, I.- Šoltésová, T. (2016). *Matematika pre 1. ročník [elektronický zdroj] - učebný text.* Bratislava : Ekonóm.

Kontakt

Fecenko Jozef, doc. RNDr. CSc., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemská cesta 1, 852 35 Bratislava, tel. +421 2/672 95 814, e-mail: jozef.fecenko@euba.sk