

VARIAČNÝ KOEFICIENT CEDENTA A ZAISTOVATEĽA PRE RÔZNE TYPY ZAISTENIA

Ján Gogola, Silvia Zelinová

Abstrakt

V tomto príspevku sa venujeme zaisteniu a jej vplyvu na variačný koeficient prvopoistoiteľa a zaistovateľa. Pozrieme sa na to z hľadiska rôznych typov zaistenia – proporcionálne vs. neproporcionálne. Na príklade exponenciálneho rozdelenia ilustrujeme rozdielny priebeh variačného koeficientu pre neproporcionálne zaistenie.

Kľúčové slová

Proporcionálne a neproporcionálne zaistenie, variačný koeficient, exponenciálne rozdelenie

1. ÚVOD

Z elementárneho kurzu neživotného poistenia vieme, že poistenie je prenosom variability rizika z poistenca na poisťovňu. Variabilita rizika je opísaná disperziou $D(X)$ náhodnej premennej X -výšky škody. Očakávané poistné plnenie poisťovne je vyjadrené strednou hodnotou $E(X)$ náhodnej premennej X . Z hľadiska poisťovne sa riziká prevzaté od poistenca na poisťovňu transformujú na tzv. poistno-technické riziko poisťovateľa, ktoré spočíva v nebezpečenstve, že dôjde k poistným plneniam presahujúcim hodnotu celkového prijatého poistného. Toto riziko sa meria veľkosťou variability medzi očakávaným plnením, z ktorého vychádza výpočet poistného a skutočným stavom, ktorý sa odráža vo vyplatenom poistnom plnení.

Variačný koeficient

$$cv(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}, \quad (1)$$

kde $\sigma(X)$ je smerodajná odchýlka a $E(X)$ stredná hodnota náhodnej premennej X .

Variačný koeficient je relatívnou mierou variability náhodnej premennej.

Jeho výhodou je, že nezávisí od jednotiek, ktorými sa meria realizácia náhodnej premennej X . Čím je hodnota variačného koeficientu vyššia (nižšia), tým väčší (menší) podiel predstavuje štandardná odchýlka na strednej hodnote, a teda tým je väčšia (menšia) variabilita náhodnej premennej X .

2. VARIAČNÝ KOEFICIENT PRI PROPORCIONÁLNOM ZAISTENÍ

Pri proporcionálnom zaistení sa poistná suma, poistné a poistné plnenie delí medzi prvopoistoiteľa - cedenta a zaistovateľa vo vopred stanovenom pomere.

Každé proporcionálne zaistenie možno jednoznačne definovať tak, že sa uvedie predpis, podľa ktorého sa určí, akú časť S_Z z celkovej poistnej sumy S preberá na seba zaistovateľ.

Podiely na poistnom plnení a poistnom sú proporcionálne a sú jednoznačne dané vzťahmi:

$$\frac{X_Z}{X} = \frac{P_Z}{P} = \frac{S_Z}{S}, \quad \frac{X_C}{X} = \frac{P_C}{P} = \frac{S_C}{S}, \quad (2)$$

kde X je celkové poistné plnenie, P je celkové prijaté poistné,

X_Z, P_Z je (v poradí) poistné plnenie a poistné pripadajúce na zaistovateľa a

X_C, P_C je (v poradí) poistné plnenie a poistné pripadajúce na cedenta.

Označme:

$$\delta = \frac{S_Z}{S}, \quad (3)$$

podiel na krytí rizika zaistovateľom, potom vďaka vzťahom (2) dostaneme vyjadrenie pre X_C a X_Z :

$$X_C = (1 - \delta) \cdot X, \quad X_Z = \delta \cdot X. \quad (4)$$

Potom pre stredné hodnoty a rozptyl náhodných premenných X_C a X_Z platia nasledujúce vzťahy:

$$E(X_C) = (1 - \delta) \cdot E(X), \quad E(X_Z) = \delta \cdot E(X), \quad (5)$$

$$D(X_C) = (1 - \delta)^2 \cdot D(X), \quad D(X_Z) = \delta^2 \cdot D(X). \quad (6)$$

Pre variačný koeficient cedenta a zaistovateľa potom platí:

$$\begin{aligned} cv(X_C) &= \frac{\sigma(X_C)}{E(X_C)} = \frac{\sqrt{D(X_C)}}{E(X_C)} = \frac{\sqrt{(1-\delta)^2 \cdot D(X)}}{(1-\delta) \cdot E(X)} = \frac{(1-\delta) \cdot \sqrt{D(X)}}{(1-\delta) \cdot E(X)} = \frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)} = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = cv(X), \\ cv(X_Z) &= \frac{\sigma(X_Z)}{E(X_Z)} = \frac{\sqrt{D(X_Z)}}{E(X_Z)} = \frac{\sqrt{\delta^2 \cdot D(X)}}{\delta \cdot E(X)} = \frac{\delta \cdot \sqrt{D(X)}}{\delta \cdot E(X)} = \frac{\sqrt{D(X)}}{E(X)} = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = cv(X), \text{ tj} \\ &cv(X_C) = cv(X) = cv(X_Z). \end{aligned} \quad (6)$$

Vidíme teda, že relatívna variabilita rizika pre cedenta a zaistovateľa sa nemení. Variačný koeficient sa nemení ani pri združení takto zaistených nezávislých rizík s identickým zákonom rozdelenia výšky škody.

3. VARIAČNÝ KOEFICIENT PRI NEPROPORCIONÁLNOM ZAISTENÍ

V prípade neproporcionálneho zaistenia je podstatná skutočná výška škody. Zaistné sa určuje nezávisle od poistného. Neproporcionálne zaistenie je založené na dohode medzi cedentom a zaistovateľom, podľa ktorej zaistovateľ vyplatí cedentovi škody, presahujúce vopred zjednanú sumu. Táto suma sa nazýva *priorita*. XL zaistenie je najpoužívanější typ neproporcionálneho zaistenia s pevne dohodnutou prioritou $a > 0$.

V prípade, že vznikne poistná udalosť s výškou plnenia X , tak poistné plnenie cedenta X_C a zaistovateľa X_Z je dané vzťahmi (neuvažujeme hornú hranicu poistného plnenia zaistovateľa):

$$X_C = \begin{cases} X, & X \leq a \\ a, & X > a \end{cases}, \quad X_Z = \begin{cases} 0, & X \leq a \\ X - a, & X > a \end{cases}. \quad (7)$$

Na určenie variačného koeficientu náhodných premenných X_C a X_Z opäť budeme potrebovať určiť ich strednú hodnotu a rozptyl.

Platí:

$$E(X_C) = \int_0^a x \cdot f_X(x) dx + a \cdot (1 - F_X(a)) = \int_0^a (1 - F_X(x)) dx, \quad (8)$$

$$E(X_Z) = \int_a^\infty x \cdot f_X(x) dx - a \cdot (1 - F_X(a)) = \int_a^\infty (1 - F_X(x)) dx, \quad (9)$$

$$E(X_C^2) = 2 \cdot \int_0^a x \cdot (1 - F_X(x)) dx, \Rightarrow D(X_C) = E(X_C^2) - E^2(X_C) \quad (10)$$

$$E(X_Z^2) = 2 \cdot \left\{ \int_a^\infty x \cdot (1 - F_X(x)) dx - a \cdot \int_a^\infty (1 - F_X(x)) dx \right\},$$

$$\Rightarrow D(X_Z) = E(X_Z^2) - E^2(X_Z) \quad (11)$$

Pre variačný koeficient, obvykle (v nepatologickom prípade) platí nasledujúca nerovnosť:

$$cv(X_C) < cv(X) < cv(X_Z). \quad (12)$$

Ilustrujme to na príklade exponenciálneho rozdelenia.

Nech náhodná premenná X má **exponenciálne rozdelenie** s parametrom $\lambda > 0$.

Pre $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ platí:

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0, \quad (13)$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0, \quad (14)$$

a pre jej základné charakteristiky platí:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow cv(X) = 1. \quad (15)$$

Vypočítajme potrebné veličiny $E(X_C)$, $E(X_Z)$, $E(X_C^2)$ a $E(X_Z^2)$.

$$E(X_C) = \int_0^a (1 - F_X(x)) dx = \int_0^a e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^a = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda}, \quad (16)$$

$$E(X_C^2) = 2 \cdot \int_0^a x \cdot (1 - F_X(x)) dx = 2 \cdot \int_0^a x \cdot e^{-\lambda x} dx = 2 \cdot \left[-x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^a =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \cdot (1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a}), \quad (17)$$

$$E(X_Z) = \int_a^\infty (1 - F_X(x)) dx = \int_a^\infty e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_a^\infty = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}, \quad (18)$$

$$E(X_Z^2) = 2 \cdot \left\{ \int_a^\infty x \cdot (1 - F_X(x)) dx - a \cdot \int_a^\infty (1 - F_X(x)) dx \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{ \int_a^\infty x \cdot e^{-\lambda x} dx - a \cdot \int_a^\infty e^{-\lambda x} dx \right\} = 2 \cdot \left\{ \left[-x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_a^\infty - a \cdot \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_a^\infty \right\}$$

$$E(X_Z^2) = 2 \cdot \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda^2}. \quad (19)$$

Pre variačný koeficient teda platí:

$$cv(X_C) = \frac{\sigma(X_C)}{E(X_C)} = \frac{\sqrt{D(X_C)}}{E(X_C)} = \sqrt{\frac{D(X_C)}{E^2(X_C)}} = \sqrt{\frac{E(X_C^2) - E^2(X_C)}{E^2(X_C)}} = \sqrt{\frac{E(X_C^2)}{E^2(X_C)} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2}{\lambda^2} \cdot [1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a}]}{\frac{(1 - e^{-\lambda a})^2}{\lambda^2}} - 1} = \sqrt{\frac{2 \cdot [1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a}]}{(1 - e^{-\lambda a})^2} - 1}$$

Ukážme že $\frac{2 \cdot [1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a}]}{(1 - e^{-\lambda a})^2} - 1$ je menšie než 1.

$$\frac{2 \cdot [1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a}]}{(1 - e^{-\lambda a})^2} - 1 < 1$$

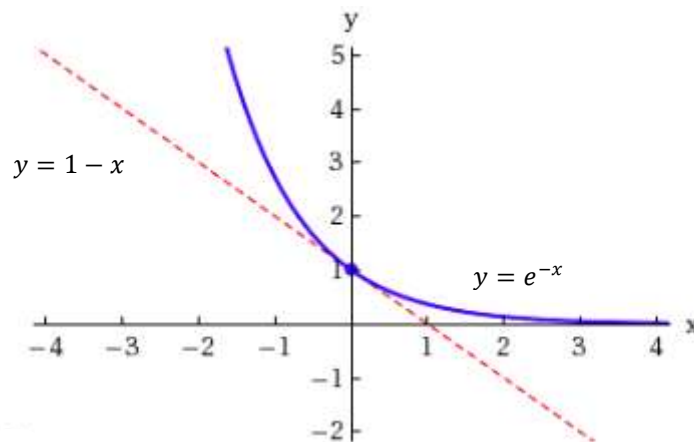
$$\frac{2 \cdot [1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a}]}{(1 - e^{-\lambda a})^2} < 2$$

$$1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a} < (1 - e^{-\lambda a})^2$$

$$1 - e^{-\lambda a} - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda a} < 1 - 2 \cdot e^{-\lambda a} + e^{-2\lambda a}$$

$$1 - \lambda \cdot a < e^{-\lambda a},$$

čo je dôsledok nerovnosti $e^{-x} > 1 - x$, pre $\forall x \neq 0$ (viď obrázok Obr. 1.).



Obr. 1. Graf funkcie $y = e^{-x}$ s dotýčnicou v bode $x_0 = 0$.

Pre variačný koeficient zaist'ovateľa platí:

$$cv(X_Z) = \frac{\sigma(X_Z)}{E(X_Z)} = \sqrt{\frac{E(X_Z^2)}{E^2(X_Z)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda^2}}{\frac{e^{-2\lambda a}}{\lambda^2}}} - 1 = \sqrt{2 \cdot e^{\lambda a} - 1} > 1.$$

Nerovnosť (12) platí aj pri združení zaistených nezávislých rizík s identickým zákonom rozdelenia výšky škody.

4. ZÁVER

Vidíme teda, že u cedenta dochádza k redukcii variačného koeficientu. Vlastný vrub ponechaný cedentovi je stabilnejší ako pôvodné nezaistené portfólio. Pri neproporcionálnom zaistení teda, na rozdiel od proporcionálneho, sa relatívna variabilita cedenta zníži oproti nezaistenému riziku a relatívna variabilita zaist'ovateľa bude vyššia ako pri nezaistenom riziku. Táto skutočnosť sa musí prejavovať pri oceňovaní prebraného rizika zaist'ovateľom, t. j. pri určení zaistnej sadzby.

LITERATÚRA

- [1] CIPRA, T., Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví. Praha: Grada Publishing, 2004. ISBN 80-247-0838-8.
- [2] FECENKO, J., KRÁTKA, Z., Aktuárske modelovanie v neživotnom poistení. Bratislava: Letra Edu, 2021, ISBN 978-8089962-89-1.
- [3] PACÁKOVÁ, V., *Štatistika pre poisťnú prax*. Bratislava: STATIS, 1999, ISBN 80-85659-14-X.

KONTAKTNÉ ÚDAJE

Gogola, Ján, RNDr., PhD., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: jan.gogola@euba.sk

Zelinová, Silvia, Ing., PhD., Katedra matematiky a aktuárstva, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava, e-mail: silvia.zelinova@euba.sk