

ÚLOHY

8.1.1. Napíšte n -tý člen radu, ak sú všetky členy radu vytvorené podľa toho istého pravidla.
Určte prvý, druhý a tretí čiastočný súčet daného radu.

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$

d) $\frac{10}{1001} + \frac{20}{2001} + \frac{30}{3001} + \frac{40}{4001} + \dots$

b) $\frac{2}{99} + \frac{4}{299} + \frac{6}{399} + \frac{8}{499} + \dots$

e) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \dots$

c) $\frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \frac{4}{3.7} + \frac{5}{4.9} + \dots$

8.1.2. Pomocou limity postupnosti čiastočných súčtov vyšetrite konvergenciu alebo divergenciu radu.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 4(-0,1)^{n-1}$

Nekonečné rady s kladnými členmi

8.3.2. Pomocou d'Alembertovho limitného kritéria vyšetrite konvergenciu radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)! \cdot 3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^{n+2}}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{5^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$

l)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^{n+1}}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$

8.3.3. Pomocou Cauchyho limitného kritéria rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{n}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{\pi \cdot n + 2}{2n+1}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{n}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^{2n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n} \right)^{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{(\ln n)^n}}$

k)

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

8.3.4. Pomocou integrálneho kritéria rozhodnite o konvergencii radov.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^2}$

d)

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)[\ln(n+2)]^3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$

k)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 + 1}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

V úlohách 8.3.5-8.3.7 vyšetrite konvergenciu radov.

8.3.5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1} n!}$

e)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3n+4}{6n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

h)

8.3.6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^n$

e)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$

h)

- 8.3.7.**
- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2} \right)^{n^2}$
- b)
- c)
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1}$
- f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$
- h)

Alternujúce rady

8.4.1. Pomocou Leibnizovho kritéria rozhodnite o konvergencii radov.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+3}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n-1}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{2n}$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{5\sqrt{n}}$
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{n^2+1}$
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n}$
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$
- j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$
- k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-1}{2n}$
- l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$

8.4.2. Rozhodnite o konvergencii daných radov. V prípade konvergencie radu zistite, či rad je absolútne, alebo len relatívne konvergentný.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{n+2}$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{(2n-1)^n}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^n$
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$
- f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$
- g)
- h)
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5}{3n+1}$
- j)

Výsledky

8. Nekonečné rady

8.1. Definícia radu, konvergencia a divergencia

8.1.1. a) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; b) $a_n = \frac{2n}{100n-1}$; c) $a_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$; d) $a_n = \frac{10n}{1000n+1}$;

e) $a_n = \frac{1}{n2^n}$; f) $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n5^n}$; **8.1.2.** a) $s_n = \frac{20}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$; s = $\frac{20}{3}$; konverguje;

b) $s_n = -2 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$; s = ∞ ; diverguje; c) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2; 0; 2; 0; \dots\}$; s neexistuje; diverguje

d) $s_n = -\frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$; s = $-\frac{8}{3}$; konverguje; e) $s_n = \frac{40}{11} \left[1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n \right]$; s = $\frac{40}{11}$; konverguje;

e) $s_n = 3 \left(1 - \frac{1}{n-1} \right)$; s = 3; konverguje; f) $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n-1}$; s = $\frac{1}{2}$; konverguje;

f) $s_n = \frac{1}{5} \left[1 - \frac{1}{n+5} \right]$; s = $\frac{1}{5}$; konverguje; g) $s_n = 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \right]$; s = $\frac{5}{3}$; konverguje; h) $s_n = \frac{1}{6} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right) \right]$; s = $\frac{23}{90}$; konverguje.

8.2. Nutná podmienka konvergencie radu

8.2.1. a) diverguje; b) nedá sa rozhodnúť; c) diverguje; d) nedá sa rozhodnúť; e) diverguje; f) diverguje.

8.3. Kritéria konvergencie radov s nezápornými členmi

8.3.1. a) konverguje; b) konverguje; c) konverguje; d) diverguje; e) diverguje; f) diverguje
g) konverguje; h) konverguje; i) diverguje; j) konverguje.

8.3.2. a) konverguje; b) konverguje; c) diverguje; d) konverguje; e) konverguje; f) diverguje;
g) diverguje; h) konverguje; i) diverguje; j) konverguje; k) konverguje; l) konverguje;

m) konverguje; n) konverguje; **8.3.3.** a) konverguje; b) diverguje; c) konverguje;
d) konverguje; e) diverguje; f) diverguje; g) diverguje; h) konverguje; i) diverguje;
j) konverguje; k) konverguje; l) konverguje; **8.3.4.** a) diverguje; b) konverguje; c) konverguje;
d) konverguje; e) diverguje; f) konverguje; g) diverguje; h) diverguje; i) konverguje;
j) konverguje; k) konverguje; l) diverguje; **8.3.5.** a) konverguje; b) konverguje; c) konverguje
d) diverguje; e) konverguje; f) diverguje; g) konverguje; h) konverguje; **8.3.6.** a) diverguje;
b) konverguje; c) diverguje; d) diverguje; e) diverguje; f) konverguje; g) konverguje;
h) konverguje; **8.3.7.** a) diverguje; b) konverguje; c) konverguje; d) diverguje; e) konverguje;
f) diverguje; g) konverguje; h) diverguje.

8.4. Alternujúce rady

8.4.1. a) konverguje; b) diverguje; c) diverguje; d) diverguje; e) diverguje; f) konverguje;
g) diverguje; h) konverguje; i) konverguje; j) konverguje; k) diverguje; l) konverguje;

8.4.2.a) relatívne konverguje; b) relatívne konverguje; c) absolútne konverguje; d) absolútne
konverguje; e) absolútne konverguje; f) diverguje; g) relatívne konverguje; h) relatívne
konverguje; i) relatívne konverguje; j) absolútne konverguje