

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII A OPERAČNÍM VÝZKUMU

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

ZBORNÍK

13. – 15. december 2011

13. – 15. prosinec 2011

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., EU Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
doc. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., VŠE Praha
doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

Ing. Martin Lukáčik, PhD.
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.
Ing. Jan Fábry, PhD.
doc. dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD.
Ing. Marian Reiff, PhD.

Kontakt:

reiff@euba.sk, jablon@vse.cz

Editor: Ing. Marian Reiff, PhD., prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.

Web editor: Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2011

ISBN: 978-80-225-3317-1

Obsah

Sára Bisová:	Dynamická analýza české ekonomiky pomocí VAR modelů	6
Adam Borovička:	Modelování volatility akciového indexu PX	16
Ivan Brezina ml., Jana Patakyová:	Riešenie úlohy obchodného cestujúceho pomocou mravčieho algoritmu	28
Katarína Čemická, Zuzana Čičková:	Teória hier a aukcie na Slovensku a ich porovnania s ostatnými vo svete	34
Michal Černý:	On Ellipsoidal Approximations of Zonotopes and an Associated Open Problem	39
Ondřej Čížek:	Cílování inflace v ČR	56
Miroslava Dolinajcová, Darina Frandoferová, Soňa Brlejšová:	Analýza a modelovanie dopytu po práci vysokoškolsky vzdelaného obyvateľstva	64
Tomáš Domonkos, Ivan Lichner:	Modelovanie dopadov klimatickej zmeny na slovenskú ekonomiku	71
Petr Fiala:	Modely lineárního programování v síťovém revenue managementu	79
Darina Frandoferová, Miroslava Dolinajcová:	Metódy stanovenia cien	85
Pavel Gežík:	Veľkosť návratu produktov za účelom recyklácie	92
Michal Grell, Jaroslav Kultán:	Analytické prístupy merania podnikovej výkonnosti	98
Nora Grisáková, Veronika Miřková:	Elasticita dopytu vybraných tovarov	105
Anna Hollá, Jana Patakyová, Andrej Miřovič:	Stochastická kvázi gradientná metóda aplikovaná na riešenie stochastických lokačných modelov	112
Karel Charvát:	Open source nástroje pro celočíselné lineární programování	118
Michaela Chocholatá:	Vzťah volatility burzových výnosov a cenového rozpätia	127
Viktor Chrobok:	Optimalizace v programu Maple 13	136
Vladislav Chýna:	Řešení speciálních sudoku v Lingu	143
Josef Jablonský:	Hodnocení výsledků atletického desetiboje z pohledu vícekritériálního rozhodování	150

Brian König, Marek Oštrom:	Teoretické aspekty modelov SVAR	159
Marika Křepelová:	Modelování podmíněné korelační matice	163
Martina Kuncová:	Postavení ČR a SR mezi zeměmi EU z pohledu využívání internetových služeb s využitím vícekritériálního hodnocení variant	168
Ivan Lichner, Tomáš Miklošovič:	Dynamické modely všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy	175
Ivan Lichner, Silvia Pastoreková:	Dynamické input-output modely	182
Martin Lukáčik, Karol Szomolányi:	Modelovanie trendov a cyklov v krajinách V4	187
Adriana Lukáčiková:	Využitie modelu Logit pri modelovaní možnosti poistiť sa	193
Vladimír Mlynarovič:	Výnonnosť portfólia a príspevky aktív	197
Petr Mynařík:	Analýza investičních nástrojů	203
Dalibor Nečas:	Aplikace metodologie Boxe a Jenkinsové na předpovědi prodejů rychloobrátkového spotřebního zboží	211
Silvia Pastoreková, Ivan Lichner:	Použitie ECM modelu na krátkodobú prognózu HDP Slovenskej republiky	224
Jana Patakyová, Ivan Brezina ml., Anna Hollá:	Job shop rozvrhovací problém s blokovacími operáciami	229
Juraj Pekár, Ivan Brezina:	Modely umiestnenia recyklačných centier na báze viackritériálneho programovania	235
Jan Pelikán:	Optimalizace kontejnerové přepravy	241
Ján Pittner:	Porovnanie vybraných heuristických metód riešenia multidimenzionálneho problému batohu	245
Peter Princ:	Využitie simulačných modelov v podnikových procesoch	253
Miroslav Rada:	RRR-algoritmus pro zonotopy	259
Marian Reiff:	Lokačné modely verejného sektora	266
Marián Šedivý:	Riešenie problému okružných jász pomocou algoritmu včelej kolóny	270
Zuzana Škerlíková, Jana Patakyová:	Riešenie okružných úloh pomocou metaheuristik	280
Václav Školuda:	Analýza podielu dlhu na HDP	287

Tereza Suchánková, Radka Bezděková, Erik Borš:	Optimalizace rozdělování knihovního rozpočtu	294
Jiří Šumbera:	Modelování výroby vodní elektrárny v závislosti na průtoku a spádu	302
Kvetoslava Surmanová, Andrea Furková:	Analýza dopadu krízy na priemysel SR	313
Martina Zouharová:	Nové modelové přístupy v OR: multiagentní simulace	319

DYNAMICKÁ ANALÝZA ČESKÉ EKONOMIKY POMOCÍ VAR MODELŮ

DYNAMIC ANALYSIS OF CZECH ECONOMY USING VAR MODELS

Sára Bisová

Abstrakt

Práce pojednává o makroekonomické analýze české ekonomiky za použití ekonometrické koncepce vícerozměrných časových řad – modelů VAR (modelů vektorové autoregrese). V souvislosti s modely VAR je zkoumána také Grangerova kauzalita, analýza funkcí odezvy, kointegrace a stručně jednorovnicový model korekce chyby. Postup uvedené koncepce je demonstrován na reálných datech vybraných makroekonomických ukazatelů české ekonomiky – konkrétně aplikací čtyřrovniceho VAR modelu. Je uveden možný postup při volbě vhodného modelu a dále jsou provedeny samotné odhady, analýza výsledků a následná predikce – predikce ex post a její porovnání se skutečně naměřenými daty a posléze predikce ex ante. Je diskutována aplikovatelnost zvolené koncepce ekonometrického modelování v makroekonomické analýze České republiky, zejména v oblasti v prognózování.

Klíčová slova: *inlace, VAR model, Grangerova kauzalita, analýza funkcí odezvy, kointegrace.*

Abstract

This paper focuses on analysing and modelling chosen macroeconomic indicators and their dynamics using VAR models (vector autoregression models). Mentioned econometric concept of modelling time series is introduced. In connection with the VAR models, Granger causality, impulse response functions, cointegration and error correction models (ECM) are described. The empirical part includes application of selected model on real time series of chosen macroeconomic indicators - using a four-variable VAR model estimated on Czech data. The estimation outputs are interpreted and forecasts are implemented – the ex post forecast to compare with the real data and the ex ante forecast after. The quality of chosen econometric model for modelling macroeconomic time series and relationships between these variables in Czech economy is discussed – especially in the field of predictions.

Keywords: *inflation, VAR model, Granger causality, impulse response functions, cointegration.*

1 ÚVOD

Cílem práce je makroekonomická analýza české ekonomiky na základě aplikace modelů vektorové autoregrese (modelů VAR). Modely VAR mají poměrně široké uplatnění v kvantifikaci a analýze vztahů na makroekonomické úrovni, při sestavování hospodářských politik a v analýze a anticipaci jejich dopadů na vývoj ekonomiky. Význam VAR modelů je ovšem neméně stěžejní v oblasti prognózování a simulací. Demonstrace použitelnosti zmíněné metodologie je provedena aplikací zvoleného VAR modelu na empirická data české ekonomiky. V následujících kapitolách je zmíněna problematika VAR modelů, analýza funkcí odezvy, je testována kauzalita v Grangerově pojetí (GK) a zabýváme se také zachycením dlouhodobých vztahů mezi zvolenými proměnnými, tj. kointegrací.

2 MODELY VEKTOROVÉ AUTOREGRESE

Aplikaci VAR modelů v makroekonomické analýze se významně věnoval americký ekonom a ekonometr Sims, který byl za své studie zabývající se touto tematikou oceněn v roce 2011 Nobelovou cenou za ekonomii. Právě Sims stál za hlavním vzestupem zájmu o VAR modely v oblasti makroekonomické analýzy vydáním svého článku *Macroeconomics and Reality* v roce 1980.

Modely VAR, na rozdíl od modelů dynamických simultánně závislých rovnic, nevyžadují při specifikaci rozlišovat endogenní a exogenní resp. predeterminované proměnné, tj. všechny proměnné obsažené v modelech VAR jsou endogenní (exogenní proměnné se vyskytují pouze ve formě trendových či umělých nula-jednotkových proměnných)¹. Při ekonometrické specifikaci se tak nemusíme opírat o ekonomickou teorii, pouze předpokládáme, že jsou zahrnuté proměnné ve vzájemném vztahu - každá endogenní proměnná vysvětlena zpožděnými hodnotami svými a zbylých proměnných modelu. Tento fakt značně zjednodušuje postup při odhadu. Modely VAR jsou vhodnou koncepcí v makroekonomické analýze zejména z důvodu existence zpoždění mezi akcí na straně jedné veličiny a reakcí na straně jiných ukazatelů (například mezi použitím měnově politických nástrojů a jejich dopadem na inflaci v rámci transmisního mechanismu monetární politiky existuje zpoždění 12 až 18 měsíců).

Poměrně často jsou modely VAR aplikovány v souvislosti s analýzou funkcí odezvy. Ta nám poskytne informaci o znaménku vztahu mezi proměnnými, případně o tom, jak dlouho přetrvává efekt vyvolaný určitými jednorázovými změnami v systému. Funkce odezvy měří efekt neočekávaného jednotkového exogenního šoku na běžnou i budoucí hodnoty libovolné vysvětlované proměnné ve zvolené rovnici VAR modelu. V m -rozměrném VAR modelu tak můžeme sledovat od okamžiku impulsu celkem m^2 odezev (pro každou endogenní proměnnou v každé rovnici vícerozměrného systému). V případě stacionarity časových řad efekt všech těchto jednotkových exogenních šoků časem odezní (pak je systém stabilní). Odvození a interpretaci funkcí odezvy je možné nalézt např. v Hušek (2007), Arlt, Arltová (2009). Analýza funkcí odezvy se užívá zejména při analýze a anticipaci dopadů hospodářské politiky.

Nemalý význam má testování kauzality. Základní myšlenka kauzality v Grangerově pojetí (GK) spočívá v tom, že působí-li určitá časová řada na jinou časovou řadu, pak by také měla pomoci zlepšit její předpověď. „*Jednou z možností aplikace VAR modelů je jejich využití*

¹ Zatímco VAR modely poskytují informaci o vlivu neočekávaných (nesystematických) šoků v libovolné proměnné na celý modelovaný systém, modely dynamických simultánních rovnic umožňují kvantifikovat systematické zákonitosti mezi proměnnými.

k testování směru kauzální závislosti. V ekonometrii je chápána kauzalita jako schopnost určité proměnné predikovat jinou proměnnou.“ (Hušek (2009), str. 264).

Ve vícerozměrných modelech ekonomických časových řad je nutné rozlišovat mezi krátkodobými a dlouhodobými vztahy. Zatímco krátkodobé vztahy existují mezi stacionárními časovými řadami (tj. časovými řadami s krátkou pamětí) a časem odezní, dlouhodobé vztahy se týkají nestacionárních časových řad, tedy většiny makroekonomických veličin, a mají dlouhodobý charakter - informace z minulosti se kumulují. Dlouhodobými vztahy mezi proměnnými se zabývá kointegrace - vztah dlouhodobé rovnováhy více proměnných. Pokud bychom stacionarizovali kointegrované proměnné přechodem na jejich první či vyšší diference, ztratili bychom informaci o kointegračním vztahu, čímž ve VAR modelu vzniká specifikační chyba. V takovém případě je adekvátní přejít na tzv. model korekce chyby (MKCH) – dynamický model, který umožňuje rozlišit mezi krátkodobými a dlouhodobými vztahy mezi proměnnými a tyto vztahy kvantifikovat.

Modely VAR jsou poměrně snadno aplikovatelnou koncepcí při konstrukci predikcí – jsou založeny na odhadu vztahů mezi veličinami ve formě vzájemných korelací na základě historických empirických dat. Takový popis vztahů lze snadno extrapolovat do budoucnosti.

3 EMPIRICKÁ ANALÝZA NA ZÁKLADĚ VAR MODELŮ

V následujících odstavcích budeme provádět praktickou aplikaci VAR modelů na reálná data české ekonomiky. Opírat se přitom budeme o **model RMPY**, který je v aplikované makroekonomii poměrně často užívaným VAR modelem. Tento model, jak již sám název napovídá, zahrnuje proměnné: R (úroková míra), M (nabídka peněz), P (cenová hladina), Y (hrubý domácí produkt).

Na základě analýzy RMPY modelu se můžeme vyjádřit k mnoha ekonomickým teoriím:

- Tak například notoricky známá kvantitativní teorie peněz - dodnes se mezi zastánci různých směrů ekonomického myšlení vedou spory v otázkách kauzality - zejména zda peněžní zásoba M ovlivňuje cenovou hladinu P a reálný produkt Y či zda se jim naopak přizpůsobuje (např. Revenda (2010))?
- Je reálná ekonomika ovlivněna inflací?
- Ovlivňuje růst v peněží zásobě hospodářský cyklus? Keynesiánská teorie tvrdí, že ano, na rozdíl od monetaristů.
- Existuje přímá úměra mezi R a P předpokládaná v tzv. Fisherově rovnici (např. Dornbusch (1994))? atd.

Analýza byla prováděna na kvartálních datech za období I/1999 – II/2011. Data klíčových veličin byla získána z internetových stránek Českého statistického úřadu (ČSÚ) a České národní banky (ČNB). Úroková míra 1R PRIBOR v procentech a cenová hladina v podobě indexu spotřebitelských cen (ISC) ve formě měsíčních bazických indexů (rok 2005=100) byly převedeny z měsíčních časových řad na čtvrtletní vážené chronologické průměry. Nabídka peněz v podobě peněžního agregátu M2 v mil. Kč a reálný HDP v mil. Kč jsou publikovány ve formě čtvrtletních časových řad. Zařazení nominální úrokové míry je podstatné pro testování Fisherova efektu zmíněného v předchozím odstavci. Nominální peněžní zásobu uvažuje v modelu např. Sims (1980). Někteří autoři zařazují reálnou peněžní zásobu, lze ovšem určitými restrikcemi poměrně snadno přejít od modelu s nominální peněžní zásobou k modelu s reálnou peněžní zásobou (Arlt, Arltová (2009)).

Statisticky významná sezónnost nebyla prokázána pouze u časové řady 1R PRIBOR. Zbylé ukazatele – ISC, HDP a M2 - byly sezónně očištěny metodou X12 ARIMA. Všechny proměnné byly zlogaritmovány, ADF-testy existence jednotkových kořenů (byl použit model

s konstantou) však poukázaly na jejich nestacionaritu. Zlogaritmované řady byly proto dále převedeny na první diference. Takto transformovaná data již prošla ADF testy stacionarity.

K eliminaci odlehlých pozorování v časových řadách byly do modelu zahrnuty umělé nula-jednotkové proměnné D1 a D2 s jednotkou na pozicích prvního čtvrtletí roku 2008 a prvního čtvrtletí roku 2009.

3.1 Volba vhodného modelu VAR a jeho odhad

Byl odhadnut čtyřrovnícový neomezený VAR model. Optimální délka zpoždění byla zvolena dle hodnot informačních kritérií zobecněných pro vícerozměrné systémy - v našem případě naznačují zahrnout pouze jedno zpoždění (tabulka 3.1).

Tabulka 3.1 - Informační kritéria pro modely VAR(1) - VAR(3) a data I/1999 - II/2011

Model	T	p	Log-likelihood	SC	HQ	AIC
VAR(1)	48	24	541,27306	-20,617	-21,199	-21,553
VAR(2)	47	40	539,90388	-19,698	-20,680	-21,273
VAR(3)	46	56	542,15095	-18,991	-20,303	-21,137

Odhad modelu lze získat přímou aplikací MNČ² na jednotlivé rovnice modelu - získané odhady jsou konzistentní a asymptoticky vydatné (Hušek, 2007). Odhad modelu VAR(1) pro období I/1999 – II/2011 je uveden v tabulce 3.2 (v závorkách jsou uvedeny hodnoty *t*-pravděpodobnosti³). Sdružené i jednorozměrné diagnostické testy a celkové *F*-testy indikují, že zvolený model VAR(1) jako celek je vhodný. Breusch-Godfreyův test (AR 1-4 test) ukazuje, že rezidua nevykazují autokorelaci a test normality (Jarque-Bera test) neprokázal reziduální nenormalitu. Reziduální podmíněná heteroskedasticita (ARCH test) ani reziduální heteroskedasticita (hetero test) také nebyly prokázány. *F*-testy na 5% hladině významnosti poukazují na vhodnost zařazení všech zvažovaných proměnných.

Tabulka 3.2 - Odhad VAR(1) modelu, data I/1999-II/2011

	DL M2 SA	DL HDP _r SA	DL PRIBOR1R	DL ISC SA
DL_M2_SA(-1)	0,367 (0,010)	0,099 (0,405)	3,246 (0,005)	0,201 (0,000)
DL_HDP_r_SA(-1)	0,322 (0,038)	0,542 (0,000)	-3,071 (0,015)	0,040 (0,395)
DL_PRIBOR1R(-1)	-0,008 (0,589)	-0,020 (0,149)	0,377 (0,004)	0,003 (0,556)
DL_ISC_SA(-1)	0,747 (0,024)	0,320 (0,254)	-1,445 (0,575)	0,342 (0,001)
D1	-0,038 (0,009)	0,003 (0,796)	-0,063 (0,572)	0,013 (0,003)
D2	0,015 (0,270)	-0,020 (0,103)	-0,512 (0,000)	-0,004 (0,377)

Měnový agregát je na 5% hladině významnosti ovlivněn všemi proměnnými modelu, kromě úrokové míry a proměnné D2. Zatímco je tedy proměnná M2 ovlivněna reálným produktem, reálný HDP je značně perzistentní, na 5% hladině významnosti je zkorelován pouze se svou hodnotou v prvním zpoždění. V rovnici pro úrokovou míru můžeme vysledovat na 5%

² Za splnění určitých předpokladů lze k odhadu VAR modelu použít také metodu maximální věrohodnosti.

³ Na základě hodnot *t*-probability usuzujeme o statistické významnosti parametrů. Parametr považujeme za statisticky významný na 5% hladině významnosti, je-li hodnota *t*-probability menší než 0,05.

hladině významnosti statisticky podstatný vliv všech proměnných mimo ISC a D1. Konečně cenová hladina je ovlivněna měnovým agregátem M2, svou hodnotou v prvním zpoždění a nula-jednotkovou proměnnou D1, vše na 5% hladině významnosti. Statisticky významná by měla být většina odhadovaných parametrů. Statistická významnost parametrů je podstatná zejména pro analýzu funkcí odezvy (v oblasti predikce již méně).

3.2 Testování Grangerovy kauzality

Pro odhadnutý VAR(1) model byla dále zkoumána Grangerova kauzalita (GK). Na 5% hladině významnosti byla prokázána oboustranná GK proměnných DL_M2_SA a DL_ISC_SA. Na 5% hladině významnosti byla prokázána GK proměnné DL_HDPPr_SA na proměnnou DL_M2_SA a také na DL_PRIBOR1R. Na 5% hladině významnosti byl dále prokázán vliv proměnné DL_M2_SA na proměnnou DL_PRIBOR1R ve smyslu GK.

V našem modelu tedy kauzálně ovlivňuje v Grangerově pojetí cenovou hladinu pouze měnový agregát, kauzalita je ovšem simultánní. Při testování GK nebyl prokázán vliv cenové hladiny ani peněžní zásoby na reálný produkt. Nebyla potvrzena GK úrokové míry na žádnou z ostatních proměnných modelu, bylo by zřejmě vhodné zaměnit roční PRIBOR za krátkodobější úrokovou míru. Příčinou mnoha nevýznamných testů GK může být také fakt, že se některé ze zahrnutých proměnných (zejména ISC a 1R PRIBOR) poslední dobou příliš nemění.

Oproti převážné většině autorů zabývajících se touto problematikou (např. Sims (1972)⁴) přichází na základě odhadů a testů obsažených v předchozích podkapitolách v úvahu existence kauzálního vztahu $Y \rightarrow M$.

3.3 Analýza funkcí odezvy

Ve výstupech analýzy funkcí odezvy (obrázek 3.1) se nachází vybrané grafy reakcí jednotlivých časových řad na jednotkové exogenní impulsy. Šok rozkmitává rovnice modelu, které se po určité době navrací do původní rovnováhy, případně se ustálí na rovnováze nové. V rámci našeho modelu dochází k ustálení v některých případech až kolem 20. období, exogenní šok tedy přetrvává v systému poměrně dlouho⁵.

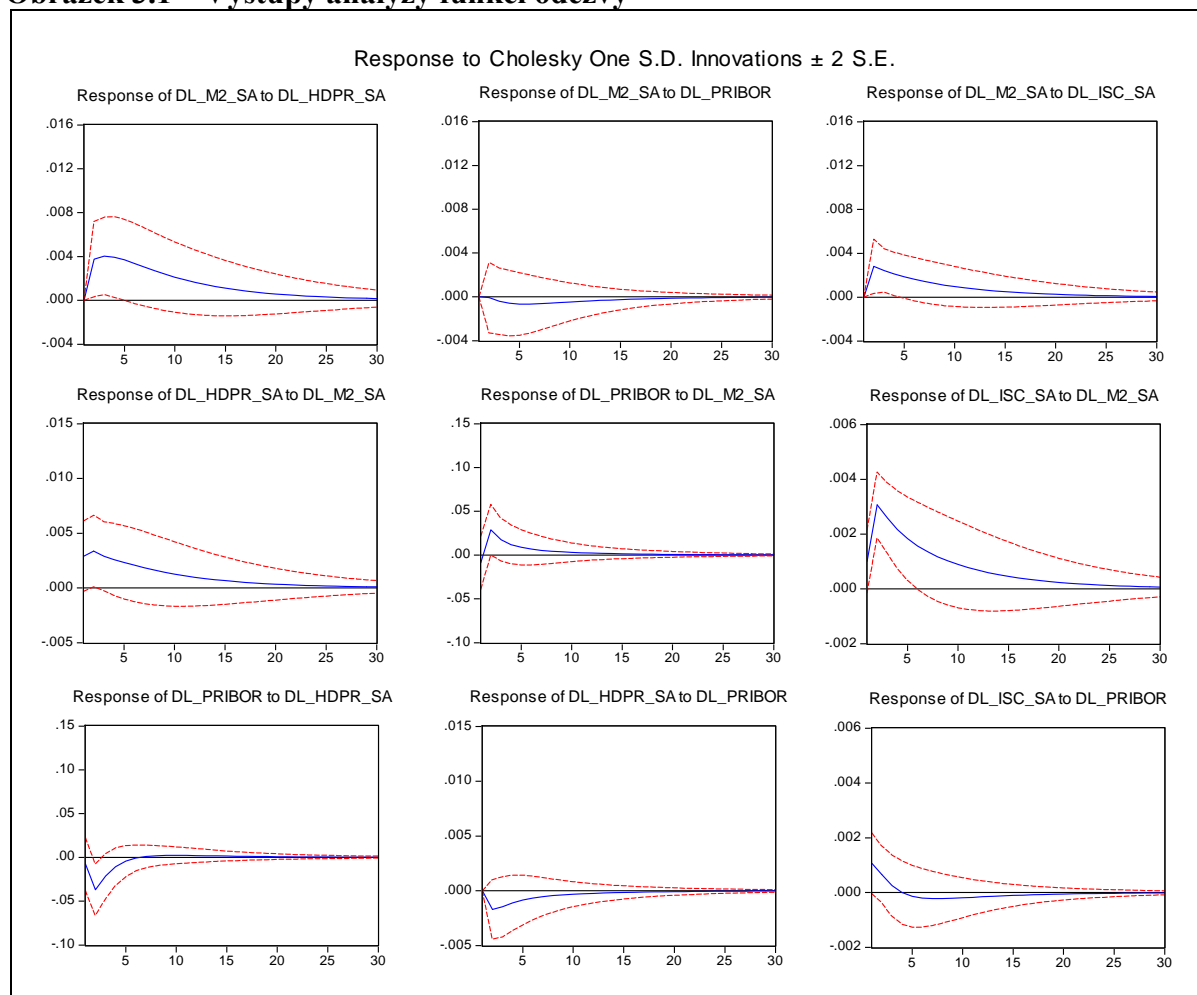
Jednotkový exogenní šok v proměnné M2 vyvolává nárůst HDP, který trvá přibližně 5 let. Tempo růstu přitom prvního půl roku roste, následně pozvolna klesá. Poté efekty expansivního stimulu monetární politiky postupně odeznívají a HDP se navrací na rovnovážnou úroveň. To je v souladu s Keynesiánskou představou, že monetární politika může ovlivnit reálný produkt. Analýza impuls-reakce naznačuje, že peníze nejsou v krátkém období neutrální, reakce reálného produktu na exogenní šok v měnovém agregátu je poměrně silná a dlouho odeznívá. Obdobnou reakci vyvolává jednotkový exogenní šok v M2 také u cenové hladiny a úrokové míry (zde dochází k návratu k rovnováze rychleji - kolem 12. období). Pozitivní jednotkový exogenní šok v reálném HDP vyvolá nárůst tempa růstu měnového agregátu, ve 3. období dochází ke kulminaci a tempo růstu se pomalu snižuje, až se měnový agregát dostane zpět do rovnováhy, celý proces trvá přibližně 25 období. Jednotkový exogenní šok v cenové hladině pak vyvolá nárůst měnového agregátu, který dosahuje vrcholu ve 2. období a poté tempo růstu pomalu klesá (je ovšem stále kladné), až se po 20 obdobích navrací zpět do rovnováhy.

⁴ Ve své studii z roku 1972 - Money, Income and Causality – autor kauzalitu v tomto směru zamítá, na rozdíl od kauzálního vztahu $M \rightarrow Y$, připouští ovšem existenci zpětné vazby produktu na peníze.

⁵ Podotkněme, že při zařazení konstanty či lineární trendové proměnné do VAR(1) modelu dochází v analýze funkcí odezvy k návratu k rovnováze rychleji – mezi 5. až 10. obdobími v případě zařazení konstanty. Vzhledem k transformaci časových řad na první diference logaritmů však do modelu konstanta záměrně nebyla zařazena.

V neposlední řadě se zaměříme na efekty jednotkového exogenního šoku v úrokové míře na ostatní endogenní proměnné. Měnový agregát reaguje mírným poklesem s následným návratem zpět na rovnovážnou úroveň, reakce je velmi slabá. Cenová hladina reaguje kladným tempem růstu, efekt se ovšem poměrně rychle vytrácí, ve 4. čtvrtletí je dokonce mírně záporný. Reálné HDP klesá, tempo růstu se v prvních dvou obdobích snižuje, poté pomalu roste, ale stále je záporné, až efekt přibližně po třech letech vyprchává.

Obrázek 3.1 – Výstupy analýzy funkcí odezvy



3.4 Kointegrace a MKCH

Nyní se přesuneme ke zkoumání kointegrace časových řad. Pro analýzu kointegrace byly použity logaritmované časové řady (přechodem na diference ztrácíme dlouhodobý vztah mezi proměnnými, jak již bylo zmíněno). Časová řada indexu spotřebitelských cen byla transformována - proměnná MI vyjadřuje čtvrtletní míru inflace a byla získána jako koeficienty růstu sezónně očištěné časové řady indexu spotřebitelských cen. Koeficienty růstu byly zlogaritmovány a následně vynásobeny stem (proměnná L_MI100).

Johansenův test kointegrace poukázal na existenci maximálně dvou kointegračních vektorů. Při jejich odhadu však bylo nutné identifikovat kointegrační matici zahrnutím dodatečných restrikcí. Byly provedeny restriktce vycházející z dlouhodobé poptávky po penězích a Fisherova efektu (Arlt, Arltová (2009), str. 265). V prvním kointegračním vektoru byl zafixován měnový agregát M2 na hodnotu 1 a úroková míra na hodnotu 0. Ve druhém kointegračním vektoru pak byl zafixován produkt a měnový agregát M2 na hodnotu

0 a úroková míra na hodnotu 1. Po zavedení restrikcí byly získány následující odhady kointegračních vektorů.

$$C_{1t} = L_M2_SA_t - 1,087L_HDP_r_SA_t - 0,008L_MI100_t, \quad (3.1)$$

$$C_{2t} = L_PRIBORIR_t - 1,548L_MI100_t. \quad (3.2)$$

Dle vztahu (3.1) je měnový agregát M2 v přímé závislosti s hrubým domácím produktem a s mírou inflace. Ve vztahu (3.2) je pak úroková míra v přímé závislosti s mírou inflace. Tyto vztahy souhlasí s ekonomickou teorií.

Dále byla zkoumána statická regrese mezi úrokovou mírou a cenovou hladinou.

$$L_PRIBORIR_t = \alpha \cdot L_ISC_SA_t + \zeta_t. \quad (3.3)$$

Obě časové řady v regresi (3.3) jsou typu I(1). Diagnostické testy nevyšly pro takto sestavenou regresi pozitivně. Přítomnost autokorelace a podmíněné heteroskedasticity by ovšem při testu kointegrace neměly činit problém (Arlt, Altová, (2009)). Pro testování kointegrace byl užít ADF test, který potvrzuje stacionaritu reziduí regrese (3.3), časové řady tedy jsou kointegrované.

Vzhledem k již zmíněné autokorelaci v modelu (3.3) je nutné původní model dynamizovat a autokorelaci tak odstranit. Zvolený model dynamické regrese (ADL) má tvar

$$L_PRIBORIR_t = \delta \cdot DI_t + \alpha \cdot L_PRIBORIR_{t-1} + \beta_0 \cdot L_ISC_SA_t + \beta_1 \cdot L_ISC_SA_{t-1} + \zeta_t. \quad (3.4)$$

Jednorovnicový model korekce chyby (MKCH) má tvar

$$\Delta L_PRIBORIR_t = \delta \cdot \Delta DI_t + \beta_0 \cdot \Delta L_ISC_SA_t - (1 - \alpha)[L_PRIBORIR_{t-1} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha} L_ISC_SA_{t-1}] + \zeta_t, \quad (3.5)$$

kde musí platit $\alpha \in (0;1)$.

Odhadnutý MKCH je popsán rovnicí (3.6).

$$\Delta L_PRIBORIR_t = -0,295 \cdot \Delta DI_t + 16,406 \cdot \Delta L_ISC_SA_t - 0,12[L_PRIBORIR_{t-1} - 0,33L_ISC_SA_{t-1}] \quad (3.6)$$

Diagnostické testy jsou po dynamizaci modelu již všechny v pořádku, autokorelace byla odstraněna. Parametr α je roven hodnotě 0,88, což vyhovuje předpokladům. Parametr je blízký hodnotě 1, což naznačuje z hlediska dlouhodobého vývoje výkyv. Parametr β_0 , který zachycuje krátkodobou informaci, je roven hodnotě 16,406. Dlouhodobá informace je obsažena ve členu $[(\beta_0 + \beta_1)/(1 - \alpha)]$, který je roven hodnotě 0,033. Hodnota dlouhodobého multiplikátoru indikuje přímou závislost mezi úrokovou mírou a mírou inflace. Rychlost přizpůsobení k rovnováze v čase, tedy člen $(\alpha - 1)$, je rovna hodnotě -0,12.

3.5 Predikce

Na závěr provedeme na základě odhadnutého VAR(1) modelu z dat I/1999 – IV/2010 predikci ex post na období I/2011 a II/2011 a srovnáme tyto predikované hodnoty s hodnotami skutečně naměřenými za tato období. Na predikci ex post dále navážeme predikcí ex ante, opět na dvě období, kdy již vycházíme z odhadu VAR(1) modelu za období

I/1999 – II/2011. Predikce ex post pro jednotlivé proměnné jsou obsaženy v tabulkách 3.3 a 3.4, predikce ex ante pak v tabulkách 3.5 a 3.6 níže. Jsou zde uvedeny hodnoty bodových předpovědí transformované na úroňové hodnoty proměnných.

Tabulka 3.3 – Predikce ex post pro HDP a ISC na období I-II/2011

	HDP_r	HDP_r_PRE	Odchylka v %	ISC	ISC_PRE	Odchylka v %
IV/2010	942 344	-	-	115,68	-	-
I/2011	931 746	952 642	2,24%	116,07	116,03	-0,03%
II/2011	935 391	961 232	2,76%	116,51	116,43	-0,07%

Tabulka 3.4 – Predikce ex post pro M2 a 1RPRIBOR na období I-II/2011

	M2	M2_PRE	Odchylka v %	1RPRIB	PRIB_PRE	Odchylka v %
IV/2010	2 844 952	-	-	1,80	-	-
I/2011	2 797 754	2 822 350	0,88%	1,82	1,73	-5,13%
II/2011	2 834 102	2 850 766	0,59%	1,80	1,69	-6,09%

Tabulka 3.5 – Predikce ex ante pro proměnné HDP a ISC na období III-IV/2011

	HDP_r	HDP_r_PRE	ISC	ISC_PRE
I/2011	931 746	-	116,07	-
II/2011	935 391	-	116,51	-
III/2011	-	939 937	-	116,99
IV/2011	-	944 086	-	117,39

Tabulka 3.6 – Predikce ex ante pro M2 a 1RPRIBOR na období III-IV/2011

	M2	M2_PRE	1RPRIB	PRIB_PRE
I/2011	2 797 754	-	1,82	-
II/2011	2 834 102	-	1,80	-
III/2011	-	2 867 013	-	1,84
IV/2011	-	2 889 223	-	1,87

Odchylky bodových předpovědí ex post od skutečnosti nejsou příliš velké, nejméně přesná vyšla předpověď pro úrokovou míru 1R PRIBOR. Je nutné podotknout, že hodnoty směrodatných chyb odhadů vyšly poměrně vysoké, což je příčinou širokých intervalových předpovědí.

Predikce ex ante poukazuje na kontinuální růst úrovně všech ukazatelů. Dal by se předpokládat pokles úrokové míry 1R PRIBOR. Dle predikce ex post je tento předpoklad splněn, predikce ex ante však předpovídá nárůst⁶.

4 ZÁVĚR

Určitou nevýhodu aplikace VAR modelů na makroekonomické agregáty představuje nutnost stacionarity použitých časových řad, které jsou v realitě zpravidla nestacionární (nejčastěji typu I(1)). Stacionarizací ztrácíme značnou část informace, která je pro kvalitní předpověď jejich vývoje podstatná (pojem kointegrace byl vysvětlen v předchozích kapitolách). To je

⁶ Tento rozpor může být do jisté míry zapříčiněn již zmíněným zahrnutím dlouhodobé úrokové míry, případně také nepatrným pozitivním výkyvem míry 1R PRIBOR v období I/2011, které do predikce ex post nebylo oproti predikci ex ante zahrnuto.

jeden z důvodů, proč zpravidla získáme na základě VAR modelů kvalitní predikci pouze pro krátký horizont předpovědi. Výrazného odtřzení od původních hodnot, kromě zmíněné stacionarizace diferencováním, je samozřejmě dosaženo také očišťováním od sezónnosti a logaritmováním.

Značnou limitací VAR modelů, kterou zmiňuje ve své práci např. Sims (1980), je rapidní nárůst odhadovaných parametrů při zahrnutí velkého počtu endogenních proměnných (případně různých trendových či umělých binárních proměnných) a při rostoucí délce maximálního zpoždění – množství odhadovaných parametrů tak snadno přesáhne počet stupňů volnosti (toto omezení je zásadní především u makroekonomických modelů velkých rozsahů)⁷. Zmíněný problém je ještě výraznější právě v případě makroekonomické analýzy české ekonomiky na základě kvartálních dat, kdy máme k dispozici zpravidla poměrně nízký počet pozorování. Pro česká čtvrtletní makroekonomická data je tak zpravidla nutné volit VAR modely o nízké délce maximálního zpoždění, což nám neumožňuje dostatečně modelem zachytit dynamiku ekonomiky. Bylo by zřejmě vhodné využít k analýze měsíčních dat, kdy by se eliminoval problém nízkého počtu pozorování.

Přesvědčivé výsledky bodových predikcí ex post jsou do značné míry způsobeny nepříliš proměnlivým vývojem některých zahrnutých proměnných (inlace se v rámci režimu cílování inflace příliš nevychyluje od inflačního cíle a úroková míra 1R PRIBOR se již delší dobu také příliš nemění). Ve všech případech předpovědi vyšly směřodátne chyby odhadů poměrně vysoké, což je příčinou širokých, a tudíž ne příliš přesných, intervalových předpovědí.

Obecně lze říci, že při ekonometrickém modelování zakládajícím se na čtvrtletních datech české ekonomiky může vyvstat (kromě již zmíněného nízkého počtu pozorování) řada nepříjemností souvisejících s faktem, že jsou časové řady mnoha ukazatelů poměrně nesourodé. Tato nesourodost je způsobena především různými transformacemi české ekonomiky, kterými v minulosti prošla, jako je například přestup na tržní ekonomiku, vstup do EU nebo již zmíněný přechod na režim cílování inflace ad., ale také různými administrativními změnami.

Přes všechny výše zmíněné nedostatky se koncepce VAR modelů jeví jako poměrně vhodná a použitelná v oblasti makroekonomické analýzy české ekonomiky. Na základě vybraných kritérií byl však v rámci 3. kapitoly zvolen za nejvhodnější model VAR(1), tedy pouze jedno zpoždění, což naznačuje, že dynamika nehraje ve vztazích mezi zahrnutými proměnnými tak významnou roli, jak bylo předpokládáno.

Vzhledem k tomu, že je Česká republika již delší dobu členem EU a je s mnohými dalšími členskými zeměmi silně svázána (exportem a importem zboží, služeb a kapitálu ad.), nabízí se model RMPY rozšířit o časovou řadu měnového kurzu CZK/EUR. V průběhu analýzy prováděné v předchozí kapitole dále bylo shledáno, že 1R PRIBOR není nejvhodnější úrokovou mírou v rámci modelu RMPY, bylo by vhodnější zakomponovat krátkodobější úrokovou míru - například 3M PRIBOR.

⁷ Užití metody nejmenších čtverců a diagnostická kontrola modelu vyžadují kladný počet stupňů volnosti.

Použitá literatura

1. ARLT, J.: *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*. Praha: Grada, 1999. ISBN 80-7169-539-4.
2. ARLT, J. – ARLTOVÁ, M.: *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing, 2009. ISBN 978-80-86946-85-6.
3. ARLT, J. – RADKOVSKÝ, Š.: Význam modelování a předpovídání volatility časových řad pro tvorbu měnové politiky centrální banky. Výzkumná publikace ČNB, 1999, č. 13, 46 str.
4. BISOVÁ, S.: Diplomová práce: *Modely vývoje inflace a její volatility v ČR*. Vysoká škola ekonomická v Praze, 2011; dostupné z www: [<https://www.vse.cz/vskp/eid/25126>].
5. CIPRA, T.: *Finanční ekonometrie*. Praha: EKOPRESS, s.r.o., 2008. ISBN 978-80-86929-43-9.
6. DORNBUSCH, R. – FISCHER, S.: *Makroekonomie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1994. ISBN 80-04-25556-6.
7. HUŠEK, R.: *Ekonometrická analýza*. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1300-3.
8. HUŠEK, R.: *Aplikovaná ekonometrie: teorie a praxe*. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1623-3.
9. REVENDA, Z.: *Peníze a zlato*. Praha: Management Press, 2010. ISBN 978-80-7261-214-7.
10. SIMS, Ch.: Money, Income and Causality. *American Economic Review*, 1972, Vol. 62, No. 4, s. 540-552.
11. SIMS, Ch.: Macroeconomics and Reality. *Econometrica*, 1980, Vol. 48, No. 1, s. 1-48.

Kontaktní údaje

Ing. Sára Bisová

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 403

email: sara.bisova@gmail.com

MODELOVÁNÍ VOLATILITY AKCIOVÉHO INDEXU PX

MODELLING VOLATILITY OF PX INDEX

Adam Borovička

Abstrakt

Objektem příspěvku je typická vlastnost finančních časových řad, volatilita. Ekonomické časové řady se velmi často vyznačují průběhem střídajících se období relativního „klidu“ a období s významnou variabilitou. K modelování volatility nám slouží speciální ekonometrické modely - modely volatility - charakterizující tzv. podmíněnou heteroskedasticitu. Cíl článku je spatřován ve výběru vhodného modelu volatility akciového indexu PX. Cesta vede přes testy stacionarity časových řad závěrečných cen sledovaného indexu, testy podmíněné heteroskedasticity a autokorelace. Také identifikujeme pravděpodobnostní rozdělení sledované veličiny. Nedílnou součástí při analýze finančních časových řad je přítomnost různých asymetrických efektů, které determinují podmíněnou heteroskedasticitu lineárního či nelineárního typu.

Klíčová slova: volatilita, podmíněná heteroskedasticita, EGARCH, GJR-GARCH, funkce NIC

Abstract

The article deals with a typical phenomenon of financial time series – volatility. These time series usually embody intermittent periods of relative „calm“ and quite high variability. A volatility modelling of time series is made with the help of special econometric volatility models which characterize the so-called conditional heteroskedasticity. The goal of this paper is to choose a suitable volatility model for Prague PX Index. The path to the aim is via stationarity analysis of tracked time series of closing prices of the mentioned index, conditional heteroskedasticity and autocorrelation tests and an identification of probability distribution of the studied quantity. A profiling of asymmetric effects is also very important because they determine the conditional heteroskedasticity of linear or nonlinear type.

Keywords: volatility, conditional heteroskedasticity, EGARCH, GJR-GARCH, function NIC

1 ÚVOD

Volatilita – slovo, které slyšíme dnes a denně. Valí se na nás z televizních obrazovek, hlasových přijímačů, tištěných médií, vkrádá se nám do rozhovoru s kamarády v restauraci, na obchodních jednáních s klienty či partnery. Proč je toto cizí slovo v dnešní době tak „v kurzu“? Odpověď zní - ekonomická krize! To ona nás naučila vnímání pojmu, za kterým se zprostředkovaně skrývá nestabilita, častá vychýlenost od průměrných hodnot, nestálost. Volatilita označuje míru kolísání hodnoty aktiva, popř. jeho výnosové míry. Volatilitu též můžeme chápat jako míru rizika spojenou s investicí do určitého aktiva¹.

Při modelování a analýze mnoha ekonomických, zejména pak finančních časových řad, hraje zcela nezanedbatelnou roli výše popsáný jev, volatilita. Takové časové řady typicky vykazují střídavá období relativního „klidu“ a poměrně vysoké variability a volatility (Hušek, 2007). V této situaci vstupují do popředí právě **modely volatility**. Zkoumané modely se tedy nebudou zabývat úrovní časových řad, nýbrž jejich variabilitou. Hovoříme o skupině modelů, které

¹ <http://cs.wikipedia.org/wiki/Volatilita> (cit. 15. 11. 2011)

charakterizují tzv. podmíněnou heteroskedasticitu (Arlt a kol., 2007). Zaměření modelů umožňuje zachytit měnící se podmínky nejistoty v tržním prostředí. Jejich praktická aplikace je široká, velmi dobře mohou posloužit při optimalizaci portfolia či intervalových předpovědí v časových řadách (Arlt a kol., 2007).

2 AKCIOVÝ INDEX PX

Oficiálním indexem Burzy cenných papírů Praha je **index PX**. Stal se nástupcem indexů PX50 a PX-D a převzal historické hodnoty nejstaršího indexu pražské burzy PX50. V indexu jsou uvedeny „nejsilnější“ společnosti obchodované na pražské burze v systému SPAD. Je počítán z cen vážený tržní kapitalizací. Nezohledňuje dividendové výnosy akciových titulů (Veselá, 2005). Báze indexu je tvořena v dnešní době čtrnácti akciovými tituly, každý zaujímá jinou relativní váhu (podíl) na indexu. Jelikož se báze často mění, nebudeme uvádět kompletní přehled podílů jednotlivých titulů. Vystačíme si s vyjádřením, že přibližně čtyři pětiny indexu tvoří společnosti ČEZ, Erste Bank, Komerční banka a Telefónica O2².

3 MODELY VOLATILITY³

Modely volatility vycházejí z reálného předpokladu, že podmíněné rozptyly jsou v čase proměnlivé. Matematicky si sledovaný model vyjádříme podle následujícího vztahu

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

kde $|\phi_1| < 1$ a $\{\varepsilon_t\}$ je podmíněně heteroskedastický proces s podmíněnou střední hodnotou $E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = 0$ a podmíněným rozptylem $D(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}) = h_t$, kde Ω_{t-1} je relevantní minulé informace až do času $t-1$. Tyto požadavky splňuje model procesu $\{\varepsilon_t\}$ ve tvaru

$$\varepsilon_t = e_t h_t^{1/2}, \quad (2)$$

kde veličiny procesu $\{e_t\}$ jsou nezávislé s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Jestliže je rozdělení náhodné veličiny ε_t za podmínky informace, která je k dispozici v čase $t-1$, normované normální, tedy $e_t \sim N_{t-1}(0, 1)$, pak je rozdělení náhodné veličiny X_t za podmínky informace, která je k dispozici v čase $t-1$, normální s podmíněným rozptylem měnícím se v závislosti na čase, tj. $X_t \sim N_{t-1}(0, h_t)$. Na základě Jensenovy nerovnosti (více viz Arlt a kol., 2007) tvrdíme, že špičatost nepodmíněného rozdělení ε_t je větší nebo rovna špičatosti normovaného normálního rozdělení.

Různá formulace vývoje podmíněného rozptylu h_t v čase dává vzniknout několika modelům volatility, lineárního či nelineárního charakteru.

3.1 Lineární modely volatility

Nejdříve se podíváme na modely, které byly poprvé popsány v první polovině 80. let minulého století Robertem F. Englem. Pro lineární modely volatility je charakteristické, že podmíněný rozptyl je lineární funkcí veličin $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$.

² <http://www.bcpp.cz/Statistika/Burzovni-Indexy/default.aspx/default.aspx?bi=1> (cit. 13. 11. 2011)

³ Celá tato kapitola vychází z knihy (Arlt a kol., 2007). Pokud bude použit jiný zdroj, bude v kapitole citován.

3.1.1 Model ARCH(q)

Obecný model ARCH vykazuje podmíněný rozptyl ve formě

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2. \quad (3)$$

Podmínky $\omega > 0$ a $\alpha_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$ zaručují kladný podmíněný rozptyl. Nepodmíněný rozptyl procesu $\{\varepsilon_t\}$ má tvar

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}, \quad (4)$$

což znamená, že je konstantní v čase a proces $\{\varepsilon_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický.

Model ARCH umožňuje zachytit shluky volatilit v časové řadě, stejně tak vyšší špičatost pravděpodobnostního rozdělení, než je špičatost rozdělení normálního (Arlt a kol., 2007 či Hušek, 2007).

3.1.2 Model GARCH(p,q)

Mnohdy se setkáváme při modelování časových řad pomocí modelů ARCH(q) s velmi vysokým parametrem q , což má za následek odhadování velkého množství parametrů. V roce 1986 Tim P. Bollerslev navrhl řešení rozšířením stávajícího modelu o zpožděný rozptyl.

Podmíněný rozptyl obecného modelu GARCH(p,q) pak vyjadřujeme vztahem

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (5)$$

Kladný podmíněný rozptyl zaručují podmínky $\omega > 0$, $\alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, q$ a $\beta_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, p$.

Nepodmíněný rozptyl vykazuje konstantní vývoj v čase, proces $\{\varepsilon_t\}$ je nepodmíněně homoskedastický. Opět lze dokázat větší špičatost rozdělení náhodné veličiny ε_t , než vykazuje normální rozdělení.

3.2 Nelineární modely volatilit

Při analýze finančních časových řad můžeme přijít do styku s různými asymetrickými efekty. Za nejdůležitější asi považujeme tzv. *pákový efekt*, který reflektuje nestejný projev kladných a záporných šoků do podmíněného rozptylu. Lineární modely nejsou s to zohledňovat tento či jiný projev asymetričnosti, protože podmíněný rozptyl v nich závisí pouze na čtverci šoků, tudíž kladné i záporné šoky mají totožný efekt.

Jelikož většina nelineárních modelů volatilit usiluje o zachycení různých efektů kladných a záporných šoků, mohou být modely velmi podobné, proto byla v 90. letech minulého století vymyšlena metoda, která jednotlivé modely porovnává. Metoda je založena na konstrukci funkce *NIC*, která určuje, jak se nová informace promítá do volatilit. Jinými slovy ukazuje vztah mezi šokem ε_t a podmíněným rozptylem h_{t+1} za předpokladu konstantních všech minulých a přítomných informací. Konkrétně například v modelu GARCH(1,1) má funkce *NIC* tvar

$$NIC(\varepsilon_t | h_t = h_c) = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_c. \quad (6)$$

NIC je kvadratická funkce se středem v bodě $\varepsilon_t = 0$. V praxi se volí h_t rovno nepodmíněnému rozptylemu procesu $\{\varepsilon_t\}$, tedy σ_ε^2 .

3.2.1 Model EGARCH(p,q)

Model EGARCH byl vůbec prvním, který dokázal zachytit asymetrický šok. Nejdříve se podíváme na model EGARCH(1,1), kde podmíněný rozptyl, vlastně jeho přirozený logaritmus, vykazuje tvar

$$\ln(h_t) = \omega + g(e_{t-1}) + \beta_1 \ln(h_{t-1}), \quad (7)$$

kde $g(e_{t-1}) = \alpha_1 e_{t-1} + \gamma_1 [e_{t-1} | -E(|e_{t-1}|)]$

Jelikož model popisuje vztah mezi logaritmem podmíněného rozptylu a minulými šoky, neklademe žádná omezení na parametry α_1 , β_1 , γ_1 , která by zajišťovala nezápornost podmíněného rozptylu. Z vlastností procesu $\{e_t\}$ vyplývá, že proces $\{g(e_t)\}$ má nulovou střední hodnotu a není autokorelovaný.

Pro analýzu asymetrie ve vztahu podmíněného rozptylu a šoků vyjádříme funkci $g(e_t)$ ve tvaru

$$g(e_t) = (\alpha_1 + \gamma_1)e_t I(e_t > 0) + (\alpha_1 - \gamma_1)e_t I(e_t < 0) - \gamma_1 E(|e_{t-1}|), \quad (8)$$

kde $I(A)$ je funkce, která nabývá hodnot 1, jestliže jev A nastane a hodnoty 0, pokud jev A nenastane. Součet parametrů $(\alpha_1 + \gamma_1)$ ukazuje vliv kladných šoků na logaritmus podmíněného rozptylu, vliv záporných šoků pak zobrazuje rozdíl parametrů $(\alpha_1 - \gamma_1)$.

Funkce NIC modelu EGARCH (1,1) má formu

$$NIC(\varepsilon_t | h_t = \sigma_\varepsilon^2) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\alpha_1 + \gamma_1}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_t\right) & \text{pro } \varepsilon_t > 0, \\ A \exp\left(\frac{\alpha_1 - \gamma_1}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_t\right) & \text{pro } \varepsilon_t < 0, \end{cases} \quad (9)$$

kde $A = \sigma_\varepsilon^{2\beta_1} \exp(\omega - \gamma_1 \sqrt{2/\pi})$.

3.2.2 Model GJR-GARCH(p,q)

Forma obecného modelu GJR-GARCH(p,q) čistě závisí na podobě modelu GARCH(p,q). Tedy, model GARCH(1,1) lze upravit do tvaru

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 [1 - I(\varepsilon_{t-1} > 0)] + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} > 0) + \beta_1 h_{t-1}, \quad (10)$$

který budeme označovat právě jako model GJR-GARCH(1,1). Podmíněný rozptyl vykazuje nezáporných hodnot, pokud $\omega > 0$, $(\alpha_1 + \gamma_1)/2 \geq 0$ a $\beta_1 > 0$. Model je stacionární v kovariancích, pokud platí $(\alpha_1 + \gamma_1)/2 + \beta_1 < 1$.

Funkci NIC modelu GJR-GARCH(1,1) pak píšeme ve tvaru

$$NIC(\varepsilon_t | h_t = \sigma_\varepsilon^2) = A + \begin{cases} \alpha_1 \varepsilon_t^2 & \text{pro } \varepsilon_t < 0, \\ \gamma_1 \varepsilon_t^2 & \text{pro } \varepsilon_t > 0, \end{cases} \quad (11)$$

kde $A = \omega + \beta_1 \sigma_\varepsilon^2$.

Pro model stacionární v kovariancích je podmíněný rozptyl $\sigma_\varepsilon^2 = \omega / [1 - (\alpha_1 + \gamma_1)/2 - \beta_1]$.

3.3 Konstrukce modelu volatility

Při výstavbě modelu musíme analyzovat stacionaritu sledovaných časových řad, provádíme testy podmíněné heteroskedasticity a normality, dále testujeme i hypotézu podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu. Po odhadnutí parametrů zvoleného modelu podmíněné heteroskedasticity ověřujeme jeho vhodnost diagnostickými testy (testy autokorelace, heteroskedasticity či normality). Pro odhad parametrů modelu volatility využíváme *metodu maximální věrohodnosti*, popřípadě *quasi metodu maximální věrohodnosti* (Arlt a kol., 2007 či Hušek, 2007). Pro další potřeby se model dále může modifikovat. Konečná verze modelu slouží pro popisné či predikční účely.

Stacionaritu časových řad budeme diagnostikovat pomocí *grafických nástrojů*, *výběrové autokorelační funkce (ACF)*, *výběrové parciální autokorelační funkce (PACF)* a *testů Dickeye a Fullera*. Pro analýzu podmíněné heteroskedasticity lineárního typu využijeme *ARCH test*, při zkoumání podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu pak *SB*, *PSB* a *NSB testy*. Identifikaci autokorelace budeme provádět pomocí *Portmanteau testu*. *Jarqueův-Berův test normality* pak poslouží pro sledování charakteru rozdělení sledované veličiny (více viz Arlt a kol., 2007 nebo Hušek, 2007).

3.4 Testy podmíněné heteroskedasticity

Ze všech zmíněných testů, které musíme při modelování volatility uskutečnit, vybírám jen testy na podmíněnou heteroskedasticitu lineárního a nelineárního typu, jakožto zcela zásadního jevu vyskytujícího se při zkoumání volatility.

3.4.1 Testy podmíněné heteroskedasticity lineárního typu

Jev heteroskedasticity zkoumáme a zjišťujeme stejně jako u autokorelace z důvodů negativních dopadů na výsledný model. Odhady regresních koeficientů ztrácejí některé optimální vlastnosti, zejména vydatnost, statistické testy mohou podávat falešné informace.

Konkrétně k identifikaci podmíněné heteroskedasticity lineárního typu využijeme *ARCH test*, který lze také interpretovat jako test autokorelace čtverce nesystematické složky.

Podmíněný rozptyl h_t modelu ARCH(q) je konstantní, jestliže jsou parametry odpovídající veličinám $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$ rovny nule. Jako nulová hypotéza bude figurovat hypotéza podmíněné homoskedasticity, totiž $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$. Alternativní hypotézou je, že alespoň jeden parametr je různý od nuly, tj. $H_1 : non H_0$. Test bychom pak mohli zapsat v následujících krocích:

- 1) Odhadnou se parametry lineárního či nelineárního úrovněvého modelu a získají se rezidua $\hat{\varepsilon}_t$ a reziduální součet čtverců ESS_0 .
- 2) Konstruuje se regresní model $\hat{\varepsilon}_t^2 = \hat{\omega} + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$, na jehož základě se získá reziduální součet čtverců ESS_1 a index determinace R^2 .
- 3) Testové kritérium *LM* ve tvaru TR^2 má za předpokladu platnosti nulové hypotézy asymptotické rozdělení $\chi^2(q)$.
- 4) *F*-verze tohoto testového kritéria pro malé výběry má podobu
$$F_{LM} = \frac{(ESS_0 - ESS_1)/q}{ESS_1/(T - q - 1)}$$
, její rozdělení lze za předpokladu platnosti nulové hypotézy aproximovat rozdělením $F(q, T - q - 1)$.

3.4.2 Testy podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu

Při zjišťování přítomnosti podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu můžeme využít dva způsoby. V rámci prvního nejprve zvolíme lineární model volatility a odhadneme jeho parametry. Poté zkoumáme, jestli je model vhodný či by bylo lepší vzhledem k datovým asymetriím použít spíše model nelineární. Druhý přístup je analogií ověřování podmíněné heteroskedasticity lineárního typu. Přímou se totiž testuje hypotéza podmíněné homoskedasticity proti hypotéze podmíněné heteroskedasticity nelineárního charakteru.

K testování podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu využijeme *SB*, *NSB* a *PSB testy*. *SB test* se používá pro objasnění, zda kladné a záporné výnosy bez ohledu na jejich výši mají jiný vliv na podmíněnou heteroskedasticitu. *NSB* a *PSB testy* pak ověřujeme, jestli vliv záporných či kladných výnosů na podmíněný rozptyl závisí také na jejich výši (Arlt a kol., 2007 nebo Hušek, 2007).

Nejdříve si musíme zavést některé proměnné. D_{t-1}^- bude umělá proměnná, která nabude hodnoty 1, jestliže $\hat{\varepsilon}_{t-1}$ je záporné nebo hodnoty 0 v jiném případě. Další pomocnou proměnnou bude $D_{t-1}^+ = 1 - D_{t-1}^-$. U *SB testu* vycházíme z modelu

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 \hat{w}_{t-1} + u_t, \quad (12)$$

kde $\hat{\varepsilon}_t^2$ je čtverec rezidua lineárního nebo nelineárního úrovnového modelu a $\hat{w}_{t-1} = D_{t-1}^-$. Testovanou hypotézou je $H_0 : \phi_1 = 0$ a alternativní hypotézou se stává $H_1 : \phi_1 \neq 0$. Testovým kritériem je statistika t .

Pokud v modelu (12) $\hat{w}_{t-1} = D_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1}$, pak se test nazývá *NSB test*. Jestliže platí v modelu (12), že $\hat{w}_{t-1} = D_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1}$, potom se jedná o *PSB test*. Rozdělení statistiky t je ve všech třech zmíněných testech asymptoticky normované normální.

Uvedené testy můžeme nakonec sloučit. Pak budeme postupovat podle následujícího schématu:

- 1) Odhadnou se parametry lineárního či nelineárního úrovnového modelu a získají se rezidua $\hat{\varepsilon}_t$ a reziduální součet čtverců ESS_0 .
- 2) Konstruuje se regresní model $\hat{\varepsilon}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 D_{t-1}^- + \phi_2 D_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + \phi_3 D_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$, na jehož základě se získá reziduální součet čtverců EES_1 a index determinace R^2 . Testovanou hypotézou je $H_0 : \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$, která poukazuje na nepřítomnost asymetrie uvažovaného typu v časové řadě. Alternativní hypotéza pak vykazuje podobu $H_1 : non H_0$.
- 3) Testové kritérium *LM* ve tvaru TR^2 má za předpokladu platnosti nulové hypotézy asymptoticky rozdělení $\chi^2(3)$.
- 4) *F*-verze tohoto kritéria pro malé výběry vykazuje tvar $F_{LM} = \frac{(ESS_0 - EES_1)/3}{EES_1/(T-4)}$, kde

ESS_0 je reziduální součet čtverců $\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$, její rozdělení lze za předpokladu platnosti nulové hypotézy aproximovat rozdělením $F(3, T-4)$.

4 MODELOVÁNÍ VOLATILITY AKCIOVÉHO INDEXU PX

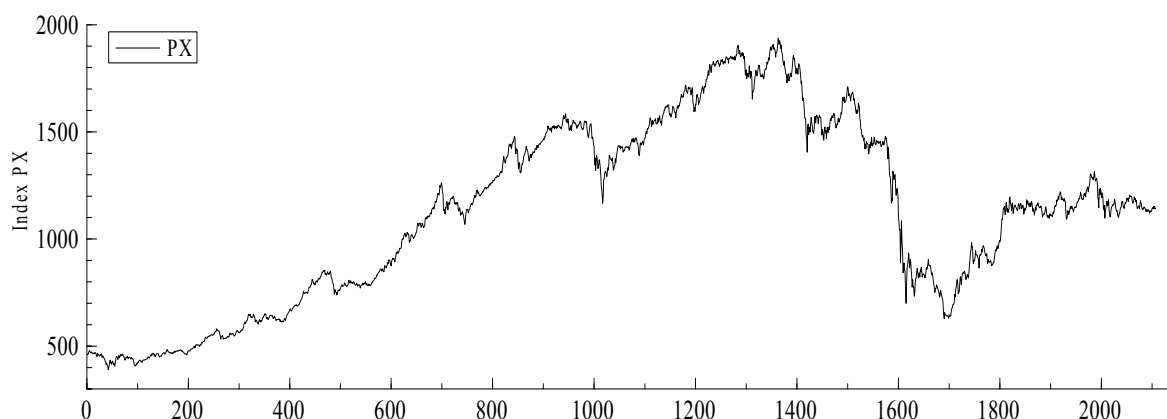
Po podpůrné teoreticky zaměřené části přecházíme na praktickou aplikaci. Nejprve představíme napozorovaná data týkající se vývoje hodnot akciového indexu PX⁴. Pro co možná časově nejkomplexnější pohled na volatilitu je finanční časová řada přibližně 8,5 roku dlouhá, konkrétně od 1. 5. 2002 do 15. 10. 2010. Jedná se o řadu vysokofrekvenční, používáme denní údaje referující o závěrečné ceně akciového indexu. Záměrně zvolená délka časové řady zahrnuje vliv ekonomické konjunktury, následný drtivý hospodářský pokles s lehkým oživením v závěru období. Zvolení délky časového období ovlivňuje výsledné modely. Veškeré provedené testy, výpočty byly zpracovány v programu PcGive⁵.

4.1 Stacionarita časové řady závěrečných cen indexu PX

Většina ekonomických časových řad (např. HDP, mzdy, investice) jsou nestacionární. Sledované veličiny mají totiž tendenci vracet se k určité hodnotě či opisovat trend. V těchto případech se nestacionární časové řady původních pozorování transformují na stacionární zpravidla pomocí prvních či vyšších diferencí, popř. logaritmováním či jinou eliminací trendu.

Při pohledu na níže zobrazený graf jednoznačně registrujeme ve vývoji akciového indexu na pražské burze trendy, které signalizují **nestacionaritu** časové řady.

Obrázek 1: Vývoj akciového indexu PX



Pramen: Výstup z programu PcGive.

Výběrová autokorelační funkce (ACF) a výběrová parciální autokorelační funkce (PACF) také potvrzují nestacionaritu sledované vysokofrekvenční finanční časové řady, stejně tak provedený rozšířený test Dickeye a Fullera, který neprokazuje na hladině významnosti 5 % hypotézu, že analyzovaná časová řada je stacionární.

Při analýze finančních časových řad se vychází z předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení, hodnoty akciových indexů totiž nemohou být záporné. Pro dosažení stacionarity dat transformujeme řady logaritmováním. Bohužel i takto upravené časové řady jsou většinou nestacionární, tudíž využíváme ještě diferencování. Diferenci logaritmů je možné interpretovat jako **logaritmus výnosů** (Arlt a kol., 2007).

⁴ <http://www.patria.cz/akcie/vyzkum/databanka.html> (cit. 20. 10. 2010)

⁵ Softwarový produkt PcGive poskytuje veškeré zázemí pro ekonometrické modelování s velmi sofistikovaným a přívětivým uživatelským prostředím. Viz portál www.pcgive.com (cit. 16. 11. 2011).

Pro stacionarizaci časové řady závěrečných cen akciového indexu PX tedy využijeme diferenci logaritmů, kterou vypočítáme následujícím vztahem

$$\ln r_t^{PX} = \ln(PX_t) - \ln(PX_{t-1}) = \frac{\ln(PX_t)}{\ln(PX_{t-1})}, \quad (13)$$

kde PX_t , resp. PX_{t-1} jsou závěrečné ceny indexu PX v čase t , resp. $t-1$.

4.2 Testy autokorelace, podmíněné heteroskedasticity a normality

Než se pustíme do samotných odhadů konkrétních modelů volatility, musíme příslušná transformovaná data prověřit z hlediska autokorelace, podmíněné heteroskedasticity a normality rozdělení.

Portmanteau test potvrzuje skutečnost, že se vyskytuje v časové řadě **autokorelace**. V případě potřeby by tedy bylo vhodné přidat do budoucího modelu volatility zpožděné hodnoty logaritmů výnosů. *Jarqueův-Berův test normality* poukazuje na **nenormální rozdělení**. Toto sdělení nakonec potvrzuje i šikmost, která nabývá hodnoty -0,4. *Test ARCH* identifikuje **podmíněnou heteroskedasticitu** ve sledované časové řadě (více viz Borovička, 2011).

Jelikož sledujeme denní finanční časové řady, máme důvodné podezření, že bychom se mohli setkat s asymetrickými efekty. Podíváme se tudíž na možnou existenci již zmíněného tzv. *pákového efektu*.

Tabulka 1: Společný SB, PSB, NSB test logaritmů výnosů indexu PX

	Coefficient	T-prob
Constant	0,000015	0,700
DLPXD _t ⁻	-0,000037	0,515
DLPXD _t ⁻ _1DLPX_1	-0,030943	0,000
DLPXD _t ⁺ _1DLPX_1	0,019179	0,000
F(3,2102) = 76,93 [0,000]**		

Pramen: Výstup z programu PcGive.

Nejprve provedeme *SB test*, který na hladině významnosti 5 % prokazuje, že kladné a záporné výnosy bez ohledu na jejich výši mají rozdílný vliv na podmíněnou heteroskedasticitu. *Společný SB, PSB, NSB test* potvrzuje asymetrii. Jak naznačuje *Tabulka 1*, podle dílčích *t-testů* nebyl prokázán odlišný vliv kladných a záporných výnosů. Na druhé straně je z testu patrné, že podmíněná heteroskedasticita závisí na výši kladných a záporných výnosů. Jelikož odhad parametru u proměnné charakterizující vliv výše záporného výnosu je záporný a v absolutní hodnotě vyšší než odhad parametru u proměnné charakterizující vliv výše kladných výnosů, úroveň záporných výnosů se do podmíněné heteroskedasticity promítá o něco výrazněji než úroveň výnosů kladných.

4.3 Stanovení vhodného modelu volatility pro akciový index PX

Z hlediska výskytu asymetrických efektů zvolíme vhodný model, který bude co nejpřesněji opisovat zkoumanou variabilitu časových řad. Zaměříme se na modely EGARCH(p,q) a GJR-GARCH(p,q).

4.3.1 EGARCH(p,q)

Nejdříve se podíváme na závěry plynoucí z použití modelů EGARCH, které zobrazuje následující tabulka. Jedná se o modely EGARCH(1,1) s (ne)zahrnutím zpožděné hodnoty logaritmu výnosů o jedno období (den) a alternativním předpokladem (ne)normality rozdělení.

Tabulka 2: Modely volatility EGARCH pro akciový index PX

Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>EGARCH(1,1)</i> s normálním rozdělením	6232,31477
<i>EGARCH(1,1)</i> s nenormálním rozdělením	6258,45293
<i>EGARCH(1,1)</i> s normálním rozdělením a 1 zpožděním	6233,02605
<i>EGARCH(1,1)</i> s nenormálním rozdělením a 1 zpožděním	6258,48169

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Při aplikaci výše zmíněných modelů vycházejí všechny *t-testy* parametrů statisticky významné na hladině významnosti 0,05. Parametr α_1 u veličiny e_{t-1} vychází záporný, což potvrzuje přítomnost asymetrického efektu, který se projevuje v silnějším vlivu záporných hodnot do podmíněné heteroskedasticity než hodnot kladných. Tuto skutečnost potvrzuje i funkce NIC (více viz Borovička, 2011).

Jelikož mnohdy dochází k porušení předpokladu $e_t \sim N_{t-1}(0, 1)$, použití modelu s nenormálním rozdělením, obvykle Studentovým, nepřekvapuje. Diagnostické testy všech použitých modelů vykazují absenci podmíněné heteroskedasticity, *Jarqueův-Berův test* však prokazuje nenormální rozdělení. Co je ale nejpodstatnější, *Portmanteau test* diagnostikuje stále přítomnou autokorelaci. Pojdme tedy do modelů zahrnout více zpožděných hodnot. Z průběhu *autokorelační funkce ACF* a *PACF* usuzujeme, že by bylo záhodno použít zpoždění o délce pět, osm či deset období.

Tabulka 3: Další variace modelů volatility EGARCH pro akciový index PX

Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>EGARCH(1,1)</i> s 5 zpožděními	6214,15035
<i>EGARCH(1,1)</i> s 8 zpožděními	6216,686
<i>EGARCH(1,1)</i> s 10 zpožděními	6213,40659

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Modely EGARCH(1,1) zahrnující vysvětlované proměnné ve zpožděních až 5 či až 8 období sice vykazují vyšší hodnotu logaritmu věrohodnostní funkce než model s délkou zpoždění 10, ale také stále zahrnují autokorelaci náhodné složky. Teprve při zahrnutí zpožděné proměnné o deset období zpět autokorelace mizí.

Pro úplnost doplňuji modely, jejichž parametry nejsou jednotkové. Z této oblasti model s největším logaritmem věrohodnostní funkce se statisticky významnými parametry je EGARCH(3,3) opět s délkou zpoždění 10, s hodnotou zlogaritmované věrohodnostní funkce 6225,5236.

Největší hodnota zlogaritmované věrohodnostní funkce vychází ve skupině modelů EGARCH(1,1), avšak jsou zatíženy autokorelací. Proto ze skupiny všech pozorovaných EGARCH modelů se jeví jako nejlepší model pro modelování volatility vývoje logaritmu výnosů akciového indexu PX model **EGARCH(3,3)** s délkou zpoždění **10**.

4.3.2 GJR-GARCH(p,q)

Tabulka 4: Modely volatility GJR-GARCH pro akciový index PX

Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s normálním rozdělením	6236,18472
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s nenormálním rozdělením	6270,12211
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s normálním rozdělením a 1 zpožděním	6237,46667
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s nenormálním rozdělením a 1 zpožděním	6269,95685

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Pro modely GJR-GARCH platí obdobné závěry jako pro modely EGARCH. Opět se prokazuje asymetrický vliv kladných a záporných šoků na podmíněnou heteroskedasticitu. Diagnostické testy modelů opět signalizují nenormální rozdělení nesystematické složky a také její autokorelaci.

Tabulka 5: Další variace modelů volatility GJR-GARCH s normálním rozdělením pro akciový index PX

Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s 5 zpožděními	6229,20268
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s 8 zpožděními	6222,46497
<i>GJR-GARCH(1,1)</i> s 10 zpožděními	6218,37988

Pramen: Výstup z programu PCGive.

GJR-GARCH(1,1) model vykazuje velmi těsně při hladině významnosti 0,05 neautokorelovanost náhodné složky už při zahrnutí vysvětlované proměnné zpožděné o 8 období. Při předpokladu nenormálního rozdělení dostáváme nejlepší hodnotu zlogaritmované věrohodnostní funkce ve výši 6247,23296 u modelu nevykazující autokorelaci náhodné složky GJR-GARCH(1,1) s délkou zpoždění 10. U modelů s nejednotkovými parametry p a q dochází ke statisticky nevýznamným některým parametrům.

Z modelů GJR-GARCH bychom jako nejvhodnější k modelování vývoje logaritmu výnosů akciového indexu PX vybrali model **GJR-GARCH(1,1)** zahrnující zpožděné hodnoty vysvětlované proměnné o 10 období, který z modelů nevykazuje autokorelaci a operující s nenormálním rozdělením indikuje největší hodnotu zlogaritmované věrohodnostní funkce.

Z množiny probraných modelů EGARCH a GJR-GARCH jsme nakonec vybrali po jednom z každé skupiny. Jaký model tedy nakonec zvolit pro zachycení volatility logaritmu výnos časové řady závěrečných cen akciového indexu PX? Pomocnou ruku nám podají dvě následující souhrnné tabulky preferovaných modelů.

Tabulka 6: Věrohodnostní funkce a diagnostické testy modelu EGARCH(3,3) s 10 zpožděními pro akciový index PX

Log-věrohodnostní funkce = 6225,5236
Portmanteau(37): $\chi^2(27) = 39,529 [0,0567]$
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 179,40 [0,0000]**$
Normality test: $\chi^2(2) = 99,711 [0,0000]**$
ARCH 1-2 test: $F(4,2071) = 0,30224 [0,8766]$

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Tabulka 7: Věrohodnostní funkce a diagnostické testy modelu GJR-GARCH(1,1) s nenormálním rozdělením a 10 zpožděními pro akciový index PX

Log-věrohodnostní funkce = 6247,23296
Portmanteau(37): $\chi^2(27) = 35,753 [0,1208]$
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 228,41 [0,0000]**$
Normality test: $\chi^2(2) = 120,20 [0,0000]**$
ARCH 1-2 test: $F(2,2078) = 0,89945 [0,4070]$

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Model EGARCH(3,3) s délkou zpoždění 10 vykazuje průkaznější homoskedasticitu, naopak model GJR-GARCH(1,1) se stejnou délkou zpoždění vysvětlované veličiny disponuje o něco větší významností testu na absenci autokorelace. Podle logaritmu věrohodnostní funkce lépe vystihuje modelovanou situaci model GJR-GARCH(1,1). Rozhodujeme se tedy pro model **GJR-GARCH(1,1)** s nenormálním rozdělením náhodné složky a zahrnutím **deseti** zpoždění.

5 ZÁVĚR

Po rozsáhlé analýze nakonec volíme jako nejlepší model popisující volatilitu akciového indexu PX **GJR-GARCH(1,1)** se zpožděnými hodnotami vysvětlované proměnné až do délky deset období a s nenormálním rozdělením náhodné složky.

Nakonec připomeňme, že byla prokázána přítomnost asymetrického efektu, konkrétně pak větší vliv záporných výnosů do podmíněné heteroskedasticity než hodnot kladných. Zjištění nenormality nesystematické složky nebylo překvapením. Zahrnutí předpokladu rozdělení Studentova se ukázalo ve většině případů jako vhodné. Jelikož se náhodná složka u časových řad zdála být poněkud zešíklá, zakomponování určitého asymetrického rozdělení by mohlo napomoci k větší důvěryhodnosti modelu volatility. Během analýzy jsme museli též řešit pro-

blematiku autokorelace. Pro rozšíření obzorů v dané problematice bychom mohli zkoumat další typy nelineárních modelů, např. IEGARCH či STGARCH.

Výsledné modely můžeme velmi dobře využívat pro finanční analýzy či při konstrukci předpovědí.

Použitá literatura

1. ARLT J.; ARLTOVÁ M.: *Ekonomické časové řady – vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. 1. vydání. Praha: Grada Publishing, 2007. 285 s. ISBN 978-80-247-1319-9.
2. BOROVIČKA, A.: Srovnání volatility akciových indexů PX a FTSE 100. *Acta Oeconomica Pragensia*, roč. 19, č. 2, s. 66–88, 2011.
3. Burza cenných papírů Praha, dostupné z: <http://www.bcpp.cz/>, [cit. 13. 11. 2011].
4. HUŠEK, R.: *Ekonometrická analýza*. 1. vydání. Praha: Oeconomica, 2007. 367 s. ISBN 978-80-245-1300-3.
5. Patria online, dostupné z: <http://www.patria.cz/>, [cit. 20. 10. 2010].
6. PcGive, dostupné z: <http://www.pcgive.com/>, [cit. 16. 11. 2011].
7. VESELÁ, J.: *Burzy a burzovní obchody – výchozí texty ke studiu*. 1. vydání. Praha: Oeconomica, 2005. 189 s. ISBN 80-245-0939-3.
8. Wikipedie, dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/>, [cit. 15. 11. 2011].

Kontaktní údaje

Ing. Adam Borovička

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra ekonometrie
nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67

Tel.: +420 224 09 5445

E-mail: adam.borovicka@vse.cz

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/16/2011 „Modely operačního a finančního managementu“.

RIEŠENIE ÚLOHY OBCHODNÉHO CESTUJÚCEHO POMOCOU MRAVČIEHO ALGORITMU

THE SOLVING OF TRAVELING SALEMAN PROBLEM WITH ANT COLONY OPTIMIZATION

Ivan Brezina ml., Jana Patakyová

Abstrakt

V príspevku predstavujeme úlohu obchodného cestujúceho a spomíname niektoré prístupy k jej riešeniu. Bližšie sa venujeme mravčíemu algoritmu ako metaheuristike vhodnej na riešenie úlohy obchodného cestujúceho. Zisťujeme vplyv výberu parametrov mravčieho algoritmu na výsledky získané jeho aplikáciou a porovnávame ich s optimálnym riešením úlohy obchodného cestujúceho menších rozmerov.

Príučové slová: úloha obchodného cestujúceho, mravčí algoritmus

Abstract

In this paper, we study a traveling salesman problem and show some solutions of this problem. We discuss more the Ant Colony Optimization (ACO) as a metaheuristic, which is good way for solving the Traveling Salesman Problem (TSP). We observe the impact of parameters in Ant Colony Optimization for solutions reached with implementing this algorithm. We compare the solutions with the optimal solution of traveling salesman problem too.

Keywords: traveling salesman problem, ant colony optimization

Úvod

V súčasnej mikroekonomickej sfére sa stále väčšia pozornosť sústreďuje na znižovanie nákladov, čím sa zvyšuje konkurencieschopnosť firmy v podmienkach otvoreného trhového hospodárstva a umožňuje sa zvyšovanie zisku podnikateľského subjektu. Ako jedna z oblastí, ktoré ponúkajú značnú možnosť úspory nákladov je oblasť logistiky.

Svoju pozornosť teda upriamime na riešenie úlohy obchodného cestujúceho (*Traveling Salesman Problem*), ako problému, s ktorým sa stretávame takmer v každodennej hospodárskej praxi. Riešenie tohto problému nám ponúka niekoľko algoritmov, ktorým sa budeme venovať.

1. Úloha obchodného cestujúceho

Úloha obchodného cestujúceho spočíva v nájdení najkratšej okružnej cesty v grafe G so známym počtom vrcholov grafu n , pričom je známa i vzdialenosť medzi jednotlivými vrcholmi c_{ij} pre $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$. Problém spočíva v nájdení najkratšej okružnej cesty, pričom každý vrchol grafu má byť do tejto cesty zahrnutý práve raz a začiatkový bod okružnej cesty je totožný s jej koncovým bodom. Takýto problém je špecifickým prípadom

prirad'ovacieho problému, t. j. premenné v ňom sú bivalentné, pričom hodnota 0 je priradená ceste z uzla i do uzla j , ktorá v danom kroku do okruhu zaradená nie je a 1 ceste, ktorá je zaradená do okruhu. Pokiaľ je cesta realizovaná, hodnota $x_{ij} = 1$, v opačnom prípade je hodnota $x_{ij} = 0$. Úloha obchodného cestujúceho je teda matematicky formulovaná ako [1]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad i, j, t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ijt} - \sum_{k=1}^n jk_{jk(t+1)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ijn} - \sum_{k=1}^n x_{jkn} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

$$x_{ijt} \in \{0, 1\} \quad (1.6)$$

Podmienky (1.1) až (1.3) zabezpečujú práve jednu návštevu vrcholu grafu, pričom je vykonaných práve n ciest. Podmienky (1.4) a (1.5) zabezpečujú nadväznosť jednotlivých krokov na seba. Podmienky (1.1) až (1.5) zabezpečujú taktiež vykonanie celého okruhu a zabráňujú vzniku cyklov v rámci celej okružnej cesty. Podmienka (1.7) zabezpečuje bivalentnosť premenných.

Úlohy obchodného cestujúceho patria medzi NP- ťažké úlohy. Rátajú sa za najintenzívnejšie prehladávané a spracovávané problémy operačného výskumu. To sa odráža na veľkom počte exaktných a heuristických metód, ktoré boli vyvinuté na ich riešenie. Pri úlohách väčšieho rozsahu, ktoré sú v praxi stále bežnejšie je časovo efektívnejšie používať heuristické metódy riešenia. Tieto metódy sú stavané na riešenie konkrétneho špeciálneho typu úlohy.

Výhodné pri riešení úlohy obchodného cestujúceho sú i metaheuristické metódy, ktoré akceptujú aj zhoršenie riešenia, vďaka čomu sú schopné prekonať aj lokálne extrémny a hľadať extrémny globálne, čím zaručujú nájdenie čo najlepšieho riešenia. Ich výhodou je tiež, že abstrahujú od riešenia konkrétneho typu problému a sústreďujú sa na definovanie

všeobecného algoritmu, ktorý umožňuje riešiť ľubovoľnú úlohu spĺňajúcu konkrétne predpoklady.

Medzi najznámejšie metaheuristiky patria [2]:

- *Metóda lokálneho prehľadávania*
- *Pažravá metóda*
- *Genetický algoritmus*
- *Simulované žihanie*
- *Tabu prehľadávanie*
- *Mravčí algoritmus*

2. Mravčí algoritmus

V príspevku sa budeme venovať mravčiemu algoritmu (*Ant colony optimization*), ktorý sa radí medzi mladšie metaheuristické metódy, keďže jeho myšlienka bola prvýkrát zverejnená začiatkom 90-tych rokov. Základ myšlienky mravčieho algoritmu vznikol pri pozorovaní skutočného správania sa niektorých druhov mravcov v prírode.

Mravce v prírode spolu komunikujú pomocou ukladania feromónu, teda chemickej látky, ktorú ďalšie mravce z kolónie cítia a riadia sa ňou pri hľadaní potravy. Dôležitou vlastnosťou feromónov je najmä ich chladnutie, či inak povedané odparovanie sa. Vďaka tomu je možné regulovať lukratívnosť cieľa, či úplne zmeniť cestu k jeho umiestneniu. Keďže pri odparovaní feromónov hrá hlavnú úlohu čas, teda čím je cesta menej používaná, tým je feromón slabší, nakoľko má dlhšiu dobu na vychladnutie. Na kratších trasách je naopak pre mravce lákavejší, nakoľko nestíha počas absolvovania cesty tak rýchlo vychladnúť.

Ďalšou dôležitou vlastnosťou je pohyb mravcov. Ten je v prírode deterministický, následkom čoho sú mravce schopné nájsť aj na prvý pohľad nevýhodné cesty, ktoré sú však v konečnom dôsledku výhodnejšie pre nájdenie potravy. Pri pohybe mravcov je dôležité i to, že niekoľko jednotlivcov sa neustále odkloní od preferovanej cesty a tým zabezpečuje schopnosť mravcov neustále hľadať lepšie cesty.

Tieto dve vlastnosti sa využili pri tvorbe mravčieho algoritmu. Jeho matematickej formulácii predchádzali pokusy s mravcami a dvojitou cestou (od mraveniska k zdroju potravy), ktoré dokázali schopnosť mravcov nájsť kratšiu cestu. Pre použitie metódy bolo tiež nutné vytvoriť umelé (virtuálne) mravce, ktoré budú prehľadávať hrany grafu a na nich ukladať feromóny, ktoré budú môcť ďalšie mravce sledovať. Predpoklady správania sa virtuálnych mravcov boli popísané v *New Optimization Techniques in Engineering* [3]. Umelé mravce majú v sebe zadefinovaný i bod, z ktorého musia vychádzať a do ktorého sa musia vrátiť.

Pokiaľ sú všetky tieto predpoklady splnené, potom môžeme pristúpiť ku konkrétnej formulácii mravčieho algoritmu. Všeobecný zápis mravčieho algoritmu môže byť teda nasledovný :

1. Mravce prehľadáujú neorientovaný graf $G_c = (A, L)$, pričom cieľom tohto prehľadávania je nájsť optimálne riešenie $s^* \in S^*$. A a L je úplná skupina dvojíc z množiny C , čiže všetky hrany, ktoré graf obsahuje. C je množinou uzlov grafu a S^* je neprázdna množina optimálnych riešení. Hrany sú ohodnotené (d_{ij}) , pričom ich ohodnotenie zodpovedá vzdialenosti medzi miestami i a j .

2. Každý mravec má k dispozícii vlastnú pamäť M^k , ktorú využíva k ukladaniu informácií o prejdenej ceste (napr. o navštívených vrchoch). Takisto táto pamäť môže slúžiť k zabezpečeniu splnenia obmedzujúcich podmienok z množiny Ω (množina ohraničení) alebo k ohodnoteniu nájdenej cesty.
3. Pre proces je stanovený začiatkový stav x_s^k a jedna alebo viacero podmienok ukončenia e^k . Mravec sa v stave x_r závislom od x_{r-1} , i v prípade nesplnenia žiadnej z ukončovacích podmienok presúva do uzlu j v okolí tohto stavu, čím prechádza do nového stavu x_r, j . Stav problému predstavuje akákoľvek (vo všeobecnosti čiastková) cesta v grafe G_c . Množina všetkých stavov je teda množinou všetkých možných ciest v tomto grafe. V prípade splnenia niektorej z ukončovacích podmienok e^k mravec skončí s procesom. Prechod k stavom predstavujúcim neprípustné riešenie je väčšinou zakázaný s využitím vhodne implementovanej internej pamäte mravca M^k . Jediné obmedzenie pre mravce je, že výsledné riešenie (cyklus) musí obsahovať každé miesto práve raz, s výnimkou začiatkového, kde algoritmus aj končí. Mravec sa teda pri svojej ceste rozhoduje, ktorý vrchol zaradi do svojej cesty, pričom si vyberá z prípustného okolia uzla v ktorom sa nachádza N_i^k , teda uzly v okolí bodu i , ktoré mravec k ešte nenavštívil.
4. Pri výbere každého ďalšieho pohybu sa mravec rozhoduje na základe určených pravdepodobností vychádzajúcich z množstva feromónov na jednotlivých hranách grafu τ_{ij} , príslušnej heuristickej informácie, obsahu svojej lokálnej pamäte a prípustnosti takéhoto kroku.
5. Pri pridávaní nového komponentu grafu G_c k svojmu stavu môže mravec aktualizovať hodnotu príslušnej feromónovej informácie (buď pridruženej k zodpovedajúcej hrane alebo cieľovému uzlu). Okrem feromónovej informácie mravec vyhodnocuje aj deterministickú informáciu závisiacu od dĺžky hrany, čo vyjadríme ako $\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$. Platí teda, čím je hrana dlhšia, tým je menej atraktívna pre mravca.
6. Taktiež môže mravec aktualizovať hodnoty feromónov až po skonštruovaní riešenia spätným prejdením nájdenej cesty a upravením asociovaných feromónových hodnôt.

Táto definícia pohybu mravcov zabezpečuje ich paralelnú, no zároveň nezávislú prácu, čo umožňuje dynamický vývoj feromónovej stopy [4]. Mravec ako jednotlivec v tomto algoritme predstavuje primitívnu jednotku snažiacu sa nájsť prípustné riešenie. Mravce ako celok však na základe kolektívnej práce sú schopné spoľahlivo nájsť dobré riešenie a to vďaka svojej schopnosti učiť sa, ktorá ovplyvňuje správanie sa jednotlivcov v systéme.

3. Efektívnosť použitia mravčieho algoritmu

Skúmali sme efektívnosť použitia mravčieho algoritmu oproti optimalizačným metódam a závislosť parametrov algoritmu na jeho výsledky. Úlohu obchodného cestujúceho sme najskôr riešili v programe GAMS, pričom sme použili prednastavený modul TSP2, do ktorého sme vložili maticu vzdialeností 32 vybraných slovenských miest so začiatkom v Bratislave. Zo získaného výstupu sme zistili najkratšiu vzdialenosť okružnej cesty medzi mestami, ktorá bola vypočítaná na 1453 km. Počet iterácií potrebných na výpočet tejto úlohy bol 17498.

Pre fungovanie mravčieho algoritmu sme v programe MatLab 7.1 použili 6 funkcií [5], ktoré vytvárajú sieť na základe matice vzdialeností (zdrojové kódy boli upravené na tento vstup)

a tiež vytvárajú virtuálne mravce a riadia pohyb a rozmiestnenie mravcov na grafe. Pri výpočtoch sme menili 2 vstupné parametre, počet mravcov prehládavajúci graf a počet iterácii. Pokusy sme niekoľkokrát opakovali. Počty mravcov sme postupne zvyšovali, pričom dosahovali hodnoty: 100, 1000, 5000 a 10000 mravcov a počet iterácii pri týchto výpočtoch bol 1000. Rovnako sme pri počte mravcov 200 menili množstvo iterácii, ktorých počet nadobúdala tiež hodnoty 100, 1000, 5000 a 10000.

Výsledky z tohto skúmania sme zhrnuli v *tabuľke 1*. Parameter *iter* je počet iterácii, *m* počet mravcov prehládavajúcich graf, *k* dĺžka nájdenej okružnej cesty a *l* je poradové číslo mravca, ktorý prvý prešiel nájdenú najkratšiu okružnú trasu.

Tabuľka 1: Zhrnutie výsledkov

ACO				
Parameter	<i>Iter</i>	<i>m</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
	100	200	1734	6
	1000	200	1635	5
	5000	200	1622	4
	10000	200	1566	5
	1000	100	1713	10
	1000	1000	1612	34
	1000	5000	1532	21
	1000	10000	1465	242
GAMS	17498		1453	

Záver

Ako v *tabuľke 1* vidieť, zmena parametra *iter*, ako aj zmena parametra *m*, majú relatívne významný vplyv na výsledok získaný riešením úlohy obchodného cestujúceho pomocou mravčieho algoritmu.

Na základe dĺžky najkratšieho nájdeného okruhu môžeme povedať, že väčší vplyv na nájdené riešenie má zmena parametru *m*, počtu mravcov, kedy sa výsledky pri jeho narastaní podstatne zlepšujú.

Pri porovnaní dĺžky optimálnej nájdenej trasy získanej výpočtom v programe GAMS s dĺžkami trás získanými aplikáciou mravčieho algoritmu na úlohu obchodného cestujúceho môžeme konštatovať, že mravčí algoritmus úspešne vypočítal zadanú úlohu a poskytol nám relatívne dobré riešenie. Pri nízkom počte iterácii a nízkom počte mravcov bola síce odchýlka výsledkov získaných mravčím algoritmom značná, no postupne sa s rastúcimi parametrami zmenšovala. Významnejším sa pritom ukázal počet mravcov, než počet použitých iterácii. Tento fakt môžeme pripísať tomu, že počet mravcov má väčší vplyv na kvalitu ferónovej stopy uloženej na hranách grafu. Keďže pohyb mravcov po grafe je riadený práve kvalitou feromónovej informácie, výsledok získaný pri lepšom usmernení mravcov bude bližšie dĺžke optimálnej nájdenej trasy.

Porovnaním dĺžky najkratšej cesty nájdenej mravčím algoritmom s dĺžkou trasy nájdenou optimalizačným algoritmom zistíme, že ich rozdiel je iba 12 km. Algoritmus ACO teda našiel okružnú cestu, ktorá je iba o 0,83% dlhšia, než optimálna trasa.

Nespornou výhodou použitia mravčieho algoritmu je, že poskytuje relatívne dobré výsledky pri nižšom počte iterácii, než optimalizačná metóda. Táto jeho prednosť je dôležitá najmä pri úlohách väčších rozmerov, kde je potrebný dlhý čas na získanie výsledku.

Zdroje

[1] Brezina, I. 2003. *Kvantitatívne metódy v logistike*. Bratislava: Ekonóm, 2003. 294 s. ISBN 80-225-1735-6

[2] Domschke, W. 1997. *Logistik: Rundreisen und Touren 4.A*. Mnichov: R. Oldenbourg Verlag, 1997. 290 s. ISBN 3-486-24273-3

[3] Godfrey C. Onwubolu- B. V. Babu. 2004. *New Optimization Techniques in Engineering*. Berlin- Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 712 s. ISBN 3-540-20167-x

[4] Chu, A. 2009. *Metaheuristická metóda mravčej kolónie pri riešení kombinatorických optimalizačných úloh*. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze, 2009. 107 s.

[5] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/15049>

Kontaktné údaje

Ing. Ivan Brezina, ml.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 2 67 295 826

email: brezina.ivan@yahoo.com

Ing. Jana Patakyová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 2 67 295 826

email: jana.pataky@gmail.com

TEÓRIA HIER A AUKCIE NA SLOVENSKU A ICH POROVNANIA S OSTATNÝMI VO SVETE

GAME THEORY AND AUCTIONS IN SLOVAKIA AND THEIR COMPARISON WITH OTHERS IN THE WORLD

Katarína Čemická, Zuzana Čičková

Abstrakt

Dražba (aukcia) je jeden z najstarších a stále najvzrušujúcejších spôsobov predaja predmetov. Problém ako dražiť je zaujímavý rozhodovací proces zahŕňajúci viacero osôb, na ktorý sa možno pozerat' z hľadiska teórie hier. V tomto príspevku uvidíme niekoľko jednoduchých foriem dražby spolu s prístupmi teórie hier. Okrem toho existujú vo svete rôzne druhy aukcií, z ktorých každá má svoje výhody aj nevýhody. Je viacero spôsobov ako sa môžu konať dražby, pričom najvýznamnejšie sú tri: anglická, holandská a aukcia obáľkovou metódou. Keďže počet účastníkov je zvyčajne viac ako dvaja, z hľadiska teórie hier ide o hru n hráčov s neohraničeným počtom možných stavov, aj keď existujú určité obmedzenia (napr. pri holandskej aukcii). Na Slovensku sa používa predovšetkým anglická aukcia, známa tiež pod názvom SPSB aukcia.

Kľúčové slová: slovo, slovo, slovo

Abstract

Auction is one of the oldest, but still most exciting way of sale items. The problem of how to bid in such a competition is an interesting decision-making process involving several people that can be converted in terms of game theory. This article deals with several simple forms of auctions together with the approaches of game theory. Besides this, there are various kinds of auctions in the world; each has its advantages and disadvantages. There are several ways how to make an auction, but the three most important methods are: english, dutch auction and the envelope method. The number of participants is usually more than two, so in terms of game theory we can talk about the game with n players with unlimited number of possible states, however, even this has its limitations (eg, dutch auction). The most popular auction in Slovakia is english auction, that is sequential auctioned with the bid up.

Keywords: auction, game theory

1 TYPY AUKCIÍ

Dražba je stále jedným z najstarších a najvzrušujúcejších spôsobov predaja predmetov. Je veľmi málo ľudí, ktorých by neočarila možnosť dostať niečo za zníženú cenu, alebo ktorí by neboli uchvátení rýchlym monológom licitátora. V podstate rovnaká metóda sa používa pri prideľovaní vládnych miliardových kontraktov pre firmy v tendroch. Problém ako dražiť v takejto súťaži je zaujímavý rozhodovací proces zahŕňajúci viacero osôb, ktorý môžeme pozerať z hľadiska teórie hier. V tomto príspevku sa pozrieme na niekoľko jednoduchých situácií dražby z pohľadu teórie hier. Je viacero spôsobov, ako sa môžu konať dražby, pričom ďalej rozoberieme tri najvýznamnejšie. Ďalej budeme predpokladať, že existuje n účastníkov dražby s ponukami b_1, b_2, \dots, b_n , ktoré možno usporiadať tak, že: $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Anglická aukcia predstavuje tzv. sekvenčné draženie (prihadzovanie), čo je pravdepodobne najznámejšie a najviac používané aukčné pravidlo. Používa sa aj na Slovensku, ako príklad možno uviesť draženie a umeleckých predmetov v Soge v Bratislave. Pri anglickej aukcii licitátor popíše predmet určený na predaj a potom vyzve na draženie (prihadzovanie), pričom zvyčajne navrhne počiatočnú ponuku. Draží sa spôsobom, že každá nová ponuka musí byť vyššia než predchádzajúca a proces pokračuje až kým nikto neponúkne viac ako je aktuálna ponuka. Takúto situáciu možno považovať za otvorenú hru, podobne ako šach, nakoľko každý „hráč“ je informovaný o každom „ťahu“, teda navrhutej sume. Modifikáciou anglickej aukcie je *japonská aukcia*, ktorá je to typom postupnej druho-cenovej, v ktorej dražiteľ regulárne zvyšuje momentálnu cenu. Nevýhodou oproti anglickej aukcii je že každý účastník musí prihodiť ponuku na každej úrovni, ak chce pokračovať v dražbe. Dražba končí, keď už má len jedného účastníka. Táto forma je tiež známa ako tzv. *gombiková aukcia*.

Pri *holandskej aukcii*, ktorá má pôvod v predávaní kvetov v Holandsku, licitátor nastaví vyvolávaciu cenu vysoko nad očakávanú predajnú cenu. Licitátor, alebo nejaký mechanizmus, potom systematicky znižuje cenu až kým niekto neurobí ponuku (bid). Tento prvý záujemca - dražiteľ (bidder) sa stáva víťazom a dostane predmet za cenu, s ktorou súhlasil. Na Slovensku sa tento spôsob dražby nepoužíva.

Aukcia obáľkovou metódou je typická pre licitovanie ponúk pri kontraktach. Každý potenciálny dražiteľ zadá ponuku (bid) tak, že ju ostatní uchádzači nepoznajú. V stanovený čas licitátor prezrie všetky zadané ponuky a udelí ju najvyššej. Pri tejto metóde môže byť výhodou, ak sú známe odhady ponúk konkurentov. Tento spôsob dražby na Slovensku tiež existuje, ponuky sa nemusia nutne dať do obáľky a odovzdať, ani poslať poštou, ale napr. poslať internetovou poštou, teda mailom a inými spôsobmi.

2 HOLANDSKÁ AUKCIA: DISKRÉTNE PONUKY A ZNÁME HODNOTENIE

Ďalej rozoberieme najjednoduchší prípad holandskej dražby v prípade diskretných ponúk dražiteľov. Budeme predpokladať, kde máme dvoch dražiteľov I a II, ktorí ocenili daný predmet ako na v_1 a v_2 , a budeme predpokladať, že $v_1 \geq v_2$. Predpokladáme tiež, že obaja poznajú vzájomné ohodnotenie predmetu. Nech ponuky (prihadzovanie) sú celými číslami. Ak dražiteľ I prihodiť na b_1 a dražiteľ II prihodiť na b_2 , ich výnosy sú:

$$e_1(b_1, b_2) = \begin{cases} v_1 - b_1, & \text{ak } b_1 > b_2 \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{ak } b_1 = b_2 \\ 0, & \text{ak } b_1 < b_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$e_2(b_1, b_2) = \begin{cases} 0, & \text{ak } b_1 > b_2 \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_1), & \text{ak } b_1 = b_2 \\ v_2 - b_2, & \text{ak } b_1 < b_2 \end{cases} \quad (2)$$

Uvedená situácia reprezentuje hru dvoch hráčov s nenulovým súčtom. Ďalej predpokladáme, že z praktického dôvodu prihadzovanie nemôže presiahnuť hornú hranicu B . Toto obmedzenie znamená, že každý hráč má $B + 1$ čistých stratégií a $B + 1$ možných ponúk (prihodení), takže von Neumann – Nashova veta¹ zaručuje minimálne jeden rovnovážny pár. Rovnovážny pár je nekooperatívny koncept hry a ak uvažujeme o dražbe v týchto intenciách, chceme poznať všetky rovnovážne páry. Ak $v_1 > v_2$, potom jedným zjavným spôsobom, ktorým sa aukcia môže vybrať je, že hráč II prihodí v_2 a hráč I prihodí $v_2 + 1$, aby daný predmet dostal. Toto je takmer vždy rovnovážny pár. Otázka ale znie, sú tu nejaké ďalšie?

Pred zodpovedaním tejto otázky najskor uvažujme o tom, čo sa stane, ak budeme hru považovať za kooperatívnu. Toto sa stáva v praxi, keď sa vytvorí krúžok nákupcov, ktorý sa vopred dohodnú na stratégii prihadzovania, respektíve skôr na stratégii neprihadzovania. Ak každý hráč prihodí (ponúkne) až po jeho hranicu jeho ohodnotenia predmetu, má zaručenú 0 bez ohľadu na to, čo urobia jeho protivníci. A toto je to najlepšie čo môže urobiť, lebo ak hráč II ponúkne až do v_1 (alebo hráč I ponúkne do v_2), za žiadnych okolností nedostane viac než 0. Teda, maximálne hodnoty sú $v_1 = v_2 = 0$. Ak obidvaja hráči prihodia 0, výnos bude $(\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2)$ zatiaľ čo, keby jeden prihodil 1 a druhý hráč 0, to by viedlo k $(v_1 - 1, 0)$ a $(0, v_2 - 1)$. Evidentne, takéto kooperatívne správanie je vo všeobecnosti nereálne, preto uvažujme nekooperatívny prípad a zistíme, či sa tam nachádza rovnovážny pár okrem už opísaného. Nech $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_B)$ a $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_B)$ je typická zmiešaná stratégia, kde zložky vektora sú vlastne pravdepodobnosti, s ktorými hráči volia príslušné stratégie, potom:

$$e_1(x, y) = \sum_{i=0}^B x_i (v_1 - i) y_i + \frac{1}{2}(v_1 - i) y_i \quad (3)$$

$$e_2(x, y) = \sum_{i=0}^B y_i (v_2 - i) x_i + \frac{1}{2}(v_2 - i) x_i \quad (4)$$

3 ANGLICKÁ DRAŽBA: ZNÁME HODNOTENIA

Analýza anglickej dražby sa javí byť oveľa jednoduchšou než holandská. V anglickej dražbe s dvoma hráčmi, ak hráč I bude prihadzovať do b_1 a hráč II prihadzuje až do b_2 , potom výnosy budú:

$$e_1(b_1, b_2) = \begin{cases} v_1 - b_2, & \text{ak } b_1 > b_2 \\ \frac{1}{2}(v_1 - b_2), & \text{ak } b_1 = b_2 \\ 0, & \text{ak } b_1 < b_2 \end{cases} \quad (5)$$

$$e_2(b_1, b_2) = \begin{cases} 0, & \text{ak } b_1 > b_2 \\ \frac{1}{2}(v_2 - b_2), & \text{ak } b_1 = b_2 \\ v_2 - b_1, & \text{ak } b_1 < b_2 \end{cases} \quad (6)$$

¹ CHOBOT, M., TURNOVEC, F., ULAŠÍN, V. 1996, Teória hier a rozhodovania. Alfa. Bratislava. 1996

Ak uvažujeme s kooperatívnou hrou, tak minmaxové (rovnovážne) hodnoty sú opäť 0, keďže ak hráč II hrá v_1 , všetko čo hráč I môže dostať je nula, zatiaľ čo ak hráč I hrá v_1 alebo menej, má istú nulu. Evidentne je najlepšie, ak protihráč neprihodiť nič a tak sú výnosy $(v_1, 0)$ a $(0, v_2)$. Výnosy sa objavujú, keď I a II majú spoločne náhodnú stratégiu, ktorá určuje s pravdepodobnosťou p , že I musí prihodiť 0 a s pravdepodobnosťou $(1 - p)$, že hráč II prihodiť 0. Teraz treba skontrolovať, či je v tomto prípade minmaxové vyjednávacie riešenie $(\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{2}v_2)$. Všimnime si, že v skutočnosti nie je rozdiel v kooperatívnej verzii anglického a holandského modelu dražby. Pri pohľade na nekooperatívnu hru sa môžeme pokúsiť nájsť rovnovážne páry opäť v diskretnej verzii, kde sú ponuky v celých číslach pri stanovenej hornej hranici B na povolené ponuky. Ak $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_B)$ a $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_B)$ sú stratégie hráčov, potom:

$$e_1(x, y) = \sum_{i=0}^B (v_1 - i)y_i x_i \quad (7)$$

$$e_2(x, y) = \sum_{i=0}^B (v_2 - i)x_i y_i \quad (8)$$

4 DRAŽBA DVOCH A VIAC PREDMETOV

Doteraz sa vždy predpokladalo, že v dražbe je na predaj len jeden predmet, ale v sálových aukciách je stratégia dražiteľa ovplyvnená predmetmi, ktoré sa ešte len budú dražiť. Podobne, v prípade obálkovej dražby pre práva na prieskum ropných polí, cena, ktorú ropná spoločnosť zaplatí za určitú oblasť, môže byť ovplyvnená tým, aké ďalšie územia sú alebo budú dostupné v tomto či ďalších kolách dražby. Aby sme preskúmali tento efekt, vezmeme do úvahy jednoduchý model iba s dvomi dražiteľmi, ktorí majú dostupných len c_1 a c_2 p. j.. Ďalej predpokladajme, že v dražbe sú dva predmety a obaja dražitelia určujú ich hodnotu rovnako, prvý predmet a_1 a druhý predmet a_2 . Budeme predpokladať, že $c_1 \geq c_2$, $a_1 \geq c_1$, $i = 1, 2$, prihadzovanie môže narastať kontinuálne a uplatňuje sa pravidlo anglickej dražby. Keď sa vydraží prvý objekt, potom nasleduje dražba druhého objektu, ktorý pôjde komukoľvek, komu zostalo viac peňazí za cenu rovnú sume zostatku druhého hráča plus nepatrnú sumu ε (ak im zostala rovnaká suma, hodia si mincou). Teda jediným rozhodnutím pre oboch hráčov je, koľko navrhnúť (prihodiť) na prvý predmet.

Predpokladajme, že počas aukcie prvého predmetu, hráč II ponúkol sumu b , čo je nepatrne viac než posledná ponuka hráča I. Má hráč I pokračovať v licitovaní? Budeme ignorovať triviálny prípad, kedy $c_1 \geq 2c_2$, čiže hráč môže vydražiť oba predmety. Potom, keď sa hráč I rozhodne ponúknuť nepatrne viac ako hráč II a je to výherná ponuka, on vyhrá prvý predmet so ziskom $(a_1 - b)$. Zdá sa, že ak $c_1 - b > c_2$, mohol by tiež vyhrať druhý predmet, ale rovnovážna stratégia hráča II ho musí donútiť zvýšiť až na viac než $c_1 - c_2$, tak aby hráč II mohol dostať aspoň jeden z predmetov. Ak hráč I nebude licitovať, hráč II dostane predmet za cenu b a zostane mu $c_2 - b$, a hráč I tak bude mať zisk z druhého predmetu $a_2 - (c_2 - b)$. Teda, hráč I ponúkne b za predpokladu, že $b \leq c_1$ a $(a_1 - b) > a_2 - (c_2 - b)$, teda:

$$b \leq \min \left(c_1, \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + c_2) \right) \quad (9)$$

Obdobná analýza pre hráča II vedie ku kritériu, že tento hráč bude pokračovať v licitovaní až do:

$$b \leq \min \left(c_2, \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + c_1) \right) \quad (10)$$

Vzťahy (9) a (10) udávajú limity licitovania (zvyšovania) pre dvoch hráčov a rovnovážny pár sa objaví, keď jeden z hráčov dosiahne tento limit.

Použitá literatúra

1. CHOBOT, M., TURNOVEC, F., ULAŠÍN, V. 1996, Teória hier a rozhodovania. Alfa. Bratislava. 1996.
2. MAŇAS, M. Teorie her a konflikty zájmů, VŠE Praha. 2002.
3. KLEMPERER, P. Auction theory: A guide to the literature. In: Journal of Economic Surveys, 13(3), pg. 227–286. 1999.

Kontaktné údaje

prom. mat. Katarína Čemická, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 834

email: cemicka@euba.sk

Ing. Zuzana Čičková, PhD..

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: cickova@euba.sk

On Ellipsoidal Approximations of Zonotopes and an Associated Open Problem

MICHAL ČERNÝ¹

Abstract. The Löwner-John ellipse of a full-dimensional bounded convex set is a circumscribed ellipse with the property that if we shrink it by a factor n (where n is dimension), we obtain an inscribed ellipse. Goffin's algorithm constructs, in polynomial time, a tight approximation of the Löwner-John ellipse of a polyhedron given by facet description. In this text we adapt the algorithm for zonotopes given by generator descriptions. We show that the adapted version works in time polynomial in the size of the generator description (which may be superpolynomially shorter than the facet description). We also point out an interesting open problem whether it is possible to perform a test on inclusion of a large ball in a zonotope and discuss its importance for construction of tight ellipsoidal approximations.

AMS Classification. 90C57, 52B12, 52B55, 68U05.

Keywords. Löwner-John ellipse; zonotope; Goffin's algorithm; ellipsoid method

1 Introduction

1.1 Basic definitions and notation

If not said otherwise, vectors are understood as columns. The relation \leq between vectors is understood componentwise. The symbol $\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k)$ denotes the diagonal matrix with diagonal entries ξ_1, \dots, ξ_k . The symbol $\mathbf{1}$ stands for all-one vector and the symbol $I = \text{diag}(\mathbf{1})$ stands for the unit matrix. The symbol e_i denotes the i -th column of I . The symbol $\|x\|$ denotes the L_2 -norm of a vector x .

The symbol $\text{vol}(\cdot)$ denotes volume and the symbol $\text{dim}(\cdot)$ denotes dimension. We also use other symbols, such as *convexhull* or *linearhull*, in their obvious meanings.

For a natural number k , let $\text{size}(k)$ denote the length of its binary representation; clearly it holds $\text{size}(k) \approx \log_2 k$. For a rational number $r = \pm \frac{p}{q}$, where p and q are natural numbers (with p possibly zero), we define $\text{size}(r) = 1 + \text{size}(p) + \text{size}(q)$. For a rational matrix A , the symbol $\text{size}(A)$ denotes the sum of *sizes* of all entries of A . (The *size* of a rational vector is a special case of *size* of a rational matrix.) If a_1, \dots, a_ℓ is a list of objects, then $\text{size}(a_1, \dots, a_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \text{size}(a_i)$.

We will need the observation that “if only few bits are available, then we can write down neither too big nor too small numbers”: for a rational number $r > 0$ with $\text{size}(r) \leq L$ we have

$$2^{-L} \leq r \leq 2^L. \tag{1}$$

¹Department of Econometrics, University of Economics, Prague; Náměstí Winstona Churchilla 4, CZ13067 Prague 3, Czech Republic. cernym@vse.cz.

Recall that every positive definite matrix E has a unique positive definite root $E^{1/2}$. A positive definite matrix $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a point $s \in \mathbb{R}^n$ define an n -dimensional *ellipse*

$$\mathcal{E}(E, s) := \{x : (x - s)^T E^{-1} (x - s) \leq 1\} = \{E^{1/2}(x - s) : \|x\| \leq 1\}.$$

In particular, the image of $\mathcal{E}(E, 0)$ under the mapping $\xi \mapsto E^{-1/2}\xi$ is the unit ball $\mathcal{E}(I, 0)$.

Instead of $\text{vol}(\mathcal{E}(E, s))$ we write $\text{vol}(E)$ only (as the volume does not depend on s). Recall that in every dimension $\text{vol}(E)$ is proportional to $\sqrt{\det E}$. More precisely, for every dimension n there is a constant τ_n such that

$$\text{vol}(E) = \tau_n \cdot \sqrt{\det E}. \tag{2}$$

Given a polyhedron $\mathcal{P} = \{a : Ax \leq b\}$, the tuple (A, b) is called *facet description* of the polyhedron \mathcal{P} . If A and b are rational, then we define the *size of the facet description* as $\text{size}(A, b)$.

1.2 The Löwner-John Theorem

The following theorem is a fundamental result in convex geometry.

Theorem and Definition 1. *For each full-dimensional bounded convex set $C \subseteq \mathbb{R}^n$ there is an ellipse $\mathcal{E}(E, s)$ such that*

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{n^2} \cdot E, s\right) \subseteq C \subseteq \mathcal{E}(E, s).$$

*That ellipse is called **Löwner-John ellipse** for C .* □

Observe that the factor n^{-2} is tight: the extremal example is the n -dimensional simplex.

Theorem 1 shows that convex sets can be tightly approximated with ellipses. In our context, it is interesting in particular if the approximated set C is a polyhedron. Then we can roughly say that a combinatorially complex convex object — a polyhedron — is tightly approximated with a reasonably simple convex object such as an ellipse. This is also the reason why the procedure or replacement of the approximated polyhedron by its approximating ellipse is referred to as “rounding” of the polyhedron.

The rounding procedure has important applications: for example, if the object C itself is too complex to optimize over it, then we can optimize approximately over the simple rounded object. Moreover, as the Theorem 1 says, we can round both “downwards” and “upwards” and hence (with reasonable objective functions) get both lower and upper bounds on the optimal value.

In general, the Löwner-John ellipse cannot be found algorithmically: for example, it may happen that the matrix E is not rational. Whenever we think of algorithmic methods, we want to find a tight rational approximation. The following definition formalizes the notion of an approximate Löwner-John ellipse;

it roughly says that an approximate Löwner-John ellipse is a Löwner-John ellipse up to “a small blowup”.

Definition 2. Let $\varepsilon > 0$. The ellipse $\mathcal{E}(E, s)$ is called ε -**approximate Löwner-John ellipse** for a convex set C if

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{n^2} \cdot E, s\right) \subseteq C \subseteq \mathcal{E}((1 + \varepsilon) \cdot E, s)$$

holds. □

Theorem 1 is nonconstructive: it does not offer an algorithm for finding the Löwner-John ellipse (or an approximate Löwner-John ellipse) given (a description of) the set C . The Goffin’s algorithm [6] is such a method for the case when C is a full-dimensional bounded polyhedron given by a facet description. The Goffin’s algorithm is of great theoretical importance as it finds the approximate Löwner-John ellipse in polynomial time (i.e., in time polynomial in the size of the facet description of the polyhedron). Therefore, the Goffin’s algorithm is sometimes called as an effective version of the Löwner-John Theorem for polyhedra.

1.3 Zonotopes

Let $A \subseteq \mathbb{R}^n$ be a set and $x \in \mathbb{R}^n$. We define

$$A \oplus x := \text{convexhull}\{A \cup (A + x)\},$$

where $A + x = \{a + x : a \in A\}$. The operation \oplus is also called (a special case of) the *Minkowski sum*. Instead of $(\dots((A \oplus x_1) \oplus x_2) \oplus \dots) \oplus x_n$ we will write $A \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ only.

Definition 3. A **zonotope** $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(s; g_1, \dots, g_m)$ is the set

$$\{s\} \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_m.$$

The vectors g_1, \dots, g_m are called **generators** and the vector s is called **shift**. The $(m + 1)$ -tuple (s, g_1, \dots, g_m) is called **generator description** of \mathcal{Z} .

If the vectors s, g_1, \dots, g_m are rational, we define the **size** of (the generator description of) the zonotope \mathcal{Z} as

$$\text{size}(\mathcal{Z}) := \text{size}(s) + \sum_{i=1}^m \text{size}(g_i). \quad \square$$

The sequence of zonotopes $\{s\}, \{s\} \oplus g_1, \{s\} \oplus g_1 \oplus g_2, \dots$ is called *evolution* of a zonotope. The evolution gives a good geometric insight how a zonotope originates. It follows that a zonotope is indeed a bounded polyhedron.

Observe that $\dim(\mathcal{Z})$, the dimension of the zonotope \mathcal{Z} , equals to the dimension of the linear space spanned by g_1, \dots, g_m . We say that the zonotope is *full-dimensional* (in \mathbb{R}^n) if its dimension is n . Thus:

$$\mathcal{Z} \text{ is full-dimensional iff the generators } g_1, \dots, g_m \text{ span } \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Zonotopes, given by generator descriptions, are objects of its own interest in polyhedral geometry [1, 8, 12]. They have also important applications in combinatorial optimization [5] and in statistics [4, 9].

1.4 The main theorem and organization of the paper

The Goffin’s method will be sketched in Section 2. The main aim of this text is to adopt the method for zonotopes. As we have seen, a zonotope \mathcal{Z} is a special kind of a polyhedron. Hence, the basic Goffin’s method may be applied to \mathcal{Z} *provided that the facet description of \mathcal{Z} is available*. If we want to apply the Goffin’s method to a zonotope given by a generator description, we would first need to construct the facet description from the generator description. The problem is that the construction may generally take superpolynomial time. The reason is quite interesting: by [3, 11] (see also [12]) it holds that the sizes of the facet description and the generator description are not polynomially related — there are zonotopes with a superpolynomial number of facets compared to the number of generators. Said otherwise, *generator description may be extremely short* compared to the facet description. Of course, we want to preserve polynomiality (i.e., polynomiality *in the size of the short generator description*); so this obstacle has to be overcome (and not only this one). We will take the advantage of the fact that a polyhedron with a short description can be expected to be, in some sense, “regular” (though the polyhedron may be complex from the combinatorial point of view, e.g. with respect to dimension, the number of facets and vertices). The regularity properties are studied in Section 3. Finally, the adaptation of the Goffin’s method for zonotopes given by generator descriptions is presented in Section 4.

Our aim is to prove:

Theorem 4. *For each $\varepsilon > 0$ there is a polynomial-time algorithm that computes the ε -approximate Löwner-John ellipse for a given full-dimensional zonotope represented by a rational generator description.* \square

2 The Goffin’s algorithm

In this section we sketch the main idea of the Goffin’s algorithm. All the propositions stated here without proofs can be found in [7, 10]. Let the following data be available:

- (i) the facet description (A, b) of a bounded full-dimensional polyhedron $\mathcal{P} = \{x : Ax \leq b\}$;
- (ii) an ellipse $\mathcal{E}(E_0, s_0)$ such that $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}(E_0, s_0)$;
- (iii) a number μ satisfying $0 < \mu < \text{vol}(\mathcal{P})$.

The item (iii) is not important for description of the algorithm but it is important for the analysis of its convergence; see (9).

The Goffin's algorithm is a form of Khachiyan's Ellipsoid Method with shallow cuts. It constructs a finite sequence of ellipses $\mathcal{E}(E_0, s_0), \mathcal{E}(E_1, s_1), \dots$ of exponentially shrinking volume satisfying

$$\text{if } \mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}(E_i, s_i), \text{ then } \mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}(E_{i+1}, s_{i+1}). \quad (4)$$

The property (4) together with (ii) implies that every ellipse $\mathcal{E}(E_i, s_i)$ circumscribes \mathcal{P} .

Let us describe the work in one iteration. The ellipse $\mathcal{E}(E_i, s_i) \supseteq \mathcal{P}$ is available; we either terminate or construct $\mathcal{E}(E_{i+1}, s_{i+1})$.

By shift we can assume that $s_i = 0$. We apply the transformation $\Phi : \xi \mapsto E_i^{-1/2}\xi$; under this transformation, the ellipse $\mathcal{E}(E_i, s_i = 0)$ is mapped to the unit ball $B = \mathcal{E}(I, 0)$ and the polyhedron $\mathcal{P} = \{x : Ax \leq b\}$ is mapped to the polyhedron $\mathcal{P}' = \{x : A'x \leq b\}$ with $A' = AE^{1/2}$. The situation is depicted in Figure 1.

Now we shrink the unit ball B slightly more than by a factor n , say by a factor $n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$ is a small number: we set $B' := \mathcal{E}(\frac{1}{n^2(1+\varepsilon)}I, 0)$. Now we test whether

$$B' \subseteq \mathcal{P}'. \quad (5)$$

If the answer is positive, then we terminate — we have found an approximate Löwner-John ellipse. (Indeed, $B' \subseteq \mathcal{P}' \subseteq B$ implies $\mathcal{E}(\frac{1}{n^2(1+\varepsilon)}E_i, 0) = \Phi^{-1}(B') \subseteq \mathcal{P} \subseteq \Phi^{-1}(B) = \mathcal{E}(E_i, 0)$ and we are done: setting $E^* := \frac{1}{1+\varepsilon}E_i$ we have $\mathcal{E}(\frac{1}{n^2}E^*, 0) \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}((1+\varepsilon)E^*, 0)$.)

How the test (5) can be performed? We know the facet description (A', b) ; say that $a_1^T x \leq b_1, \dots, a_k^T x \leq b_k$ are the inequalities of the system $A'x \leq b$. Assume further that they are normalized in a way that $\|a_1\| = \dots = \|a_k\| = 1$. Now the situation is easy. We test whether the following condition holds:

$$b_i \geq \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}} \quad \text{for all } i = 1, \dots, k. \quad (6)$$

- If (6) holds, then the test (5) is successful. (*Proof.* Let $x \in B'$. Then $\|x\| \leq \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}}$. Using the Cauchy-Schwarz inequality $\alpha^T \beta \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$, for every $i = 1, \dots, k$ we can write $a_i^T x \leq \|a_i\| \cdot \|x\| \leq 1 \cdot \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}} \leq b_i$, which implies that $x \in \mathcal{P}'$.)
- If (6) does not hold, there is an index i_0 such that $b_{i_0} < \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}}$. Then we have found a violated inequality (say, a facet) $a_{i_0}^T x \leq b_{i_0}$ of \mathcal{P}' which proves that the test (5) fails. (Indeed, the point $x := \frac{a_{i_0}}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}}$ satisfies $x \in B'$, but $a_{i_0}^T x = \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}} a_{i_0}^T a_{i_0} = \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}} > b_{i_0}$; the i_0 -th inequality is violated by some point in B' .)

If the test (5) fails we use the vector a_{i_0} for a cut, called a_{i_0} -cut: we construct the smallest-volume ellipse $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(E', s')$ containing the set $C := B \cap \{x : a_{i_0}^T x \leq \frac{1}{n \cdot \sqrt{1 + \varepsilon}}\}$. By the above discussion, it is guaranteed that $\mathcal{P}' \subseteq C \subseteq \mathcal{E}'$. We set $\mathcal{E}(E_{i+1}, s_{i+1}) = \Phi^{-1}(\mathcal{E}')$ and the iteration is finished.

The ellipse \mathcal{E}' can be computed directly: it is of the form

$$s' = -\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}}{n+1} a_{i_0}, \quad E' = \frac{(1+\varepsilon)n^2 - 1}{(1+\varepsilon)(n^2 - 1)} \cdot \left(I - \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{1+\varepsilon} - 1}{n \cdot \sqrt{1+\varepsilon} - 1} a a^T \right). \quad (7)$$

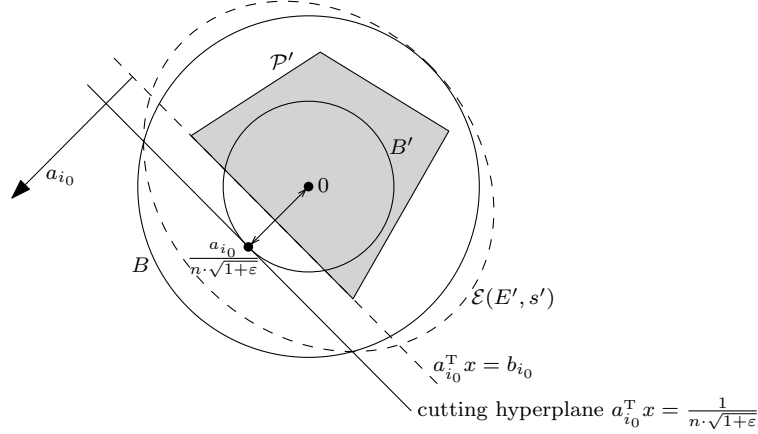


Figure 1: The balls B and B' , the polyhedron \mathcal{P}' , a violated inequality $a_{i_0}^T x \leq b_{i_0}$ and the ellipse $\mathcal{E}(E', s')$ resulting from the a_{i_0} -cut.

It remains to show how to choose the initial ellipse $\mathcal{E}(E_0, s_0)$, how to choose the lower bound μ on volume, to show that the algorithm terminates and that it terminates in time polynomial in L , where $L := \text{size}(A, b)$. We sketch these issues only briefly.

Choice of the initial ellipse. In the theory of linear programming, there is an important theorem: *there exists a polynomial p_1 such that for every polyhedron \mathcal{Q} with facet description of size L_0 , every vertex of \mathcal{Q} has size at most $p_1(L_0)$* . By (1), a number of size at most $p_1(L_0)$ can be at most $2^{p_1(L_0)}$ in absolute value. As the polyhedron \mathcal{P} is bounded, it is the convex hull of its vertices, each of which has size at most $p_1(L)$. It follows that \mathcal{P} is contained in the ball $\mathcal{E}(E_0 := n \cdot 2^{2p_1(L)} \cdot I, 0)$.

We can write $\text{vol}(E_0) \leq (2\sqrt{n} \cdot 2^{p_1(L)})^n \leq 2^{n(1+n+p_1(L))}$ (we have used $\sqrt{n} \leq 2^n$ in the second inequality).

Choice of the lower bound μ on the volume of \mathcal{P} . For the lower bound, a theorem of a similar nature holds: *there exists a polynomial p_2 such that for every full-dimensional polyhedron \mathcal{Q} with facet description of size L_0 it holds $\text{vol}(\mathcal{Q}) \geq 2^{-p_2(L_0)}$* . Hence we can choose $\mu := 2^{-p_2(L)}$.

Convergence. By inspection of the ellipse (7) it can be shown that

$$\text{for every } \varepsilon > 0 \text{ there is a constant } \kappa_\varepsilon \in (0, 1) \text{ such that } \frac{\text{vol}(E_{i+1})}{\text{vol}(E_i)} \leq \kappa_\varepsilon. \quad (8)$$

This shows that, indeed, the ellipsoids are shrinking exponentially fast. (Moreover, this theorem does not hold for $\varepsilon = 0$, which can be easily seen from the

equation (7) with $\varepsilon = 0$. This is one of the crucial points why some tolerance ε , though arbitrarily small, is necessary.)

We claim that the algorithm terminates after no more than

$$N := -\frac{1}{\log_2 \kappa_\varepsilon} \cdot [n \cdot (1 + n + p_1(L)) + p_2(L) + 1]$$

iterations. (This is, for every fixed $\varepsilon > 0$, a number polynomially bounded in L as $n \leq L$.) Suppose otherwise: then we have

$$\begin{aligned} \text{vol}(E_N) &\leq \text{vol}(E_0) \cdot \kappa_\varepsilon^N \leq 2^{n \cdot (1+n+p_1(L))} \cdot \kappa_\varepsilon^N = 2^{n \cdot (1+n+p_1(L)) + N \log_2 \kappa_\varepsilon} \\ &= 2^{n \cdot (1+n+p_1(L)) - \frac{1}{\log_2 \kappa_\varepsilon} \cdot [n \cdot (1+n+p_1(L)) + p_2(L) + 1] \cdot \log_2 \kappa_\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{-p_2(L)} = \frac{1}{2} \mu < \mu. \end{aligned} \tag{9}$$

But the polyhedron \mathcal{P} of volume $\geq \mu$ is contained in $\mathcal{E}(E_N, s_N)$ and hence $\text{vol}(E_N) \geq \mu$ — contradiction.

Implementation issues. Throughout the presentation of the algorithm, we have freely performed operations which cannot be computed with a Turing machine exactly: in particular, it is the computation of a square root of a positive definite matrix (which is necessary for computation of A' and for evaluation of Φ^{-1}) and the replacement of a vector a by its normalized form $\frac{a}{\|a\|}$. It is a tedious (but achievable) task to show that all necessary matrices, vectors and numbers can be approximated with sufficient precision such that polynomial computation time is preserved and the errors of approximations remain “hidden” within a certain tolerance ε . (This is another crucial point why some tolerance ε must be introduced.)

3 Properties of zonotopes

Whenever we say that a zonotope \mathcal{Z} is *given*, we understand that a rational generator description of \mathcal{Z} is given. When we speak about a polynomial-time algorithm, we mean an algorithm working in time polynomial in the size of the given generator description of \mathcal{Z} .

In this section we sketch some important properties of zonotopes, which will be useful later, give several definitions and prove several lemmas.

Let a full-dimensional zonotope $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(s; g_1, \dots, g_m)$ be given. The boundary of \mathcal{Z} is denoted $\bar{\mathcal{Z}}$.

The zonotope \mathcal{Z} is a centrally symmetric set; its center is $\mathcal{Z}^c := s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g_i$. (This statement follows from the fact that the operation \oplus preserves central symmetry.)

From now on we shall assume that

$$\mathcal{Z}^c = 0 \tag{10}$$

and

$$\text{if } g \text{ is a generator, then also } -g \text{ is a generator.} \tag{11}$$

These are purely technical, “normalization” requirements.

Comment of (10). Changing the shift s , a zonotope can easily be centered at 0 (which is of no loss of generality for construction of the Löwner-John ellipse).

Comment of (11). If g_1, \dots, g_m is the set of generators, we can replace them with the set of $2m$ generators $\frac{1}{2}g_1, \dots, \frac{1}{2}g_m, -\frac{1}{2}g_1, \dots, -\frac{1}{2}g_m$. Clearly, both generator sets generate (up to a shift) the same zonotope.

Lemma 5. *There is a matrix G such that $\mathcal{Z} = \{G\alpha : -1 \leq \alpha \leq 1\}$.*

Proof. It is easily seen that for a convex set A it holds

$$A \oplus x = \{a + \alpha x : a \in A, \alpha \in [0, 1]\}. \quad (12)$$

Using (11) we can assume that the generators g_1, \dots, g_m are arranged in the list

$$g_1, \dots, g_{m/2}, g_{(m/2)+1} = -g_1, g_{(m/2)+2} = -g_2, \dots, g_m = -g_{m/2}. \quad (13)$$

Let

$$G := (g_1, \dots, g_{m/2}). \quad (14)$$

Now we can write

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{0\} \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_m \\ &\stackrel{(12)}{=} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i : \alpha_1 \in [0, 1], \dots, \alpha_m \in [0, 1] \right\} \\ &\stackrel{(13)}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{m/2} \alpha_i g_i - \sum_{i=(m/2)+1}^m \alpha_i g_{i-m/2} : \alpha_1 \in [0, 1], \dots, \alpha_m \in [0, 1] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{m/2} \alpha_i g_i : \alpha_1 \in [-1, 1], \dots, \alpha_{m/2} \in [-1, 1] \right\} \\ &= \{G\alpha : \alpha \in [-1, 1]^{m/2}\} \quad \square \end{aligned} \quad (15)$$

Lemma 5 shows that a zonotope can be understood as an image of a high-dimensional cube in a low-dimensional space under a linear mapping.

Lemma 6. *Let (13) be the set of generators of \mathcal{Z} . For every $x \in \mathcal{Z}$ there is a choice of signs $s_1, \dots, s_{m/2} \in \{-1, 1\}$ such that whenever t is a vector fulfilling $t_i \in \{0, s_i\}$ for all $i = 1, \dots, m/2$, then $x + \sum_{i=1}^{m/2} t_i g_i \in \mathcal{Z}$. In particular, for every $x \in \mathcal{Z}$ and every generator g , it holds $x + g \in \mathcal{Z}$ or $x - g \in \mathcal{Z}$.*

Proof. Let G be the matrix (14). Then we have $x = Gy$ for some y satisfying $-1 \leq y \leq 1$. Clearly there is a ± 1 -vector s such that $-1 \leq y + s \leq 1$, and hence also $-1 \leq y + t \leq 1$. Therefore $x + \sum_{i=1}^{m/2} t_i g_i \in \mathcal{Z}$. \square

Zonotopes have also the following interesting structural property: if \mathcal{Z} is a zonotope generated by a set Γ of generators and F is a face of \mathcal{Z} , then F is a zonotope generated by some set of generators $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Let F be a k -dimensional face of \mathcal{Z} and let A be its affine hull. A set of linearly independent generators g'_1, \dots, g'_k which form a basis of A is called *basis* of the facet F . We write

$$\text{bas}(F) = \{g'_1, \dots, g'_k\}.$$

In particular, if F is a vertex then $\text{bas}(F) = \emptyset$.

Given a point $x \in \mathcal{Z}$, we define the *degree* of x as

$$\text{deg}(x) := \min\{\dim(F) : F \text{ is a face of } \mathcal{Z} \text{ containing } x\}.$$

The face F , for which the minimum is attained, is denoted as

$$\mathcal{F}(x).$$

In particular, a point x in the interior of a facet has degree $n - 1$, and $\mathcal{F}(x)$ is that facet.

In the proof of the following theorem we use that fact that linear programming is a polynomial-time solvable problem.

Theorem 7. *Let \mathcal{Z} be given and let x be a symbol for a rational vector.*

- (a) *The relation $x \in \mathcal{Z}$ is polynomial-time decidable.*
- (b) *The relation $x \in \overline{\mathcal{Z}}$ is polynomial-time decidable.*
- (c) *The number $\text{deg}(x)$ is polynomial-time computable.*
- (d) *The set $\text{bas}(\mathcal{F}(x))$ is polynomial-time computable.*

Proof. Let G be the matrix from Lemma 5.

(a) By Lemma 5 we have $x \in \mathcal{Z}$ iff the linear system

$$x = G\alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

is feasible. This is a linear programming problem.

(b) By (10) we know that \mathcal{Z} is centered at 0. Now we have that $x \in \overline{\mathcal{Z}}$ iff

$$\max\{\delta : \delta x = G\alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1\} = 1,$$

which is a linear programming problem.

(c) Given a generator g , set

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max\{\delta : x + \delta g = G\alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1\}, \\ \delta_2 &= \max\{\delta : x - \delta g = G\alpha, \quad -1 \leq \alpha \leq 1\}, \\ \delta &= \min\{\delta_1, \delta_2\}. \end{aligned}$$

If $\delta > 0$ we say that the generator g can move x in both directions.

Let H be the set of generators which can move x in both directions. Using linear programming, H can be computed in polynomial time. The dimension of $\text{linearhull}(H)$ is equal to $\text{deg}(x)$.

(d) Let H be as above. Any basis (i.e., maximal linearly independent subset) of H is a basis of $\mathcal{F}(x)$. \square

Finally, the following observation will be useful.

Lemma 8. *Let $x \in \mathcal{Z}$ and $\text{deg}(x) < n - 1$. Then there is a number γ and a generator g , which can be found in polynomial time, such that $x^* := x + \gamma g$ and x are in the same facet of \mathcal{Z} and $\text{deg}(x) < \text{deg}(x^*) \leq n - 1$.*

Proof. By assumption the point x is in some k -dimensional face F , where $n - 1 > k := \text{deg}(x)$. There is a facet $F' \supseteq F$. As F' has higher dimension than F , there is a generator g of F' which is linearly independent of $\text{bas}(F)$. Denote $\gamma^* = \max\{\gamma' : x + \gamma'g = G\alpha, -1 \leq \alpha \leq 1\}$, where G is the matrix from Lemma 5. We can assume that $\gamma^* > 0$ (otherwise we set $g := -g$ using (11)). Then g and $\gamma = \frac{1}{2}\gamma^*$ fulfill the requirements of the Lemma. We have shown existence.

It remains to show a method to find some g and γ . Let $\gamma > 0$ be a small number. To find g it suffices to find a generator g such that

- (i) $g \notin \text{linearhull}(\text{bas}(\mathcal{F}(x)))$ and
- (ii) $x + \gamma g \in \overline{\mathcal{Z}}$.

By Theorem 7, both conditions can be efficiently tested. With γ sufficiently small it is guaranteed by (ii) that x and $x^* := x + \gamma g$ are in the same facet. Moreover, by (11), even the choice $\gamma = 1$ works. As $x^* \in \overline{\mathcal{Z}}$, we have $\text{deg}(x^*) \leq n - 1$. \square

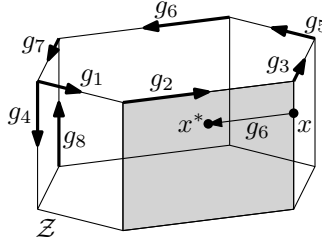


Figure 2: Illustration of Lemma 8. A zonotope $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^3$ with generators $\Gamma := \{g_1, \dots, g_8\}$. The point x can be moved in both directions by g_4 and g_8 . By (i), only generators $\Gamma \setminus \{g_4, g_8\}$ are admissible. By (ii), only generators g_3 and g_6 are admissible. The picture shows an example where $x^* = x + g_6$ (which is a point in the interior of the shaded facet).

The usage of Lemma 8 is illustrated in Figure 2. Iterating Lemma 8 for at most $n - 1$ times we get the following corollary.

Corollary 9. *Let $x \in \mathcal{Z}$ be a point of degree $\leq n - 1$. Then, a point x^* in the interior of a facet containing both x and x^* can be found in polynomial time. \square*

4 Adaptation of the Goffin's method for zonotopes

First we reformulate the important ingredients of the Goffin's method sketched in Section 2 for the case of zonotopes given by generator descriptions. Then, in Section 4.6, we finally summarize the algorithm.

Given a zonotope \mathcal{Z} , we use the symbol L for the size its generator description.

4.1 The initial ellipse

Let us construct an initial ellipse $\mathcal{E}(E_0, 0) \supseteq \mathcal{Z}$. By Lemma 5 the zonotope \mathcal{Z} is the image of the $(m/2)$ -dimensional cube $[-1, 1]^{m/2}$ under the mapping $\Gamma : \xi \mapsto G\xi$. Consider the ball $K := \mathcal{E}(\frac{m}{2} \cdot I, 0)$ in $\mathbb{R}^{m/2}$; it is the smallest ball circumscribing the cube $[-1, 1]^{m/2}$. Then, $\Gamma(K)$ is an ellipse in \mathbb{R}^n circumscribing $\Gamma([-1, 1]^{m/2}) = \mathcal{Z}$. We set

$$\mathcal{E}(E_0, 0) := \Gamma(K) = \mathcal{E}(\frac{m}{2} \cdot GG^T, 0).$$

The last expression shows that the matrix E_0 can be computed in time polynomial in L .

In the proof of convergence of the algorithm we will also need an estimate on $\text{vol}(E_0)$. We have

$$\text{vol}(E_0) \leq 2^n \cdot \sqrt{\det E_0} \leq 2^n \cdot \det E_0$$

assuming, without loss of generality, that $\det E_0 \geq 1$. The number $\det E_0$ can be computed with a polynomial time algorithm; it follows that $\text{size}(\det E_0) \leq p_0(L)$ for some polynomial p_0 , and hence $\det E_0 \leq 2^{p_0(L)}$ by (1). Setting $p_1(L) := n + p_0(L)$ we have

$$\text{vol}(E_0) \leq 2^n \cdot \det E_0 \leq 2^{n+p_0(L)} = 2^{p_1(L)}.$$

We have shown the following lemma.

Lemma 10. *There exists a polynomial p_1 such that $\text{vol}(E_0) \leq 2^{p_1(L)}$. \square*

Remark. This is not the only possible choice of the initial ellipse. As the computation time depends on the volume of the initial ellipse, it might be also reasonable to try other choices.

We know that $\mathcal{Z} = \{G\alpha : \alpha \in [-1, 1]^{m/2}\}$, where $G = (g_1, \dots, g_{m/2})$. Let G_{ij} be the (i, j) -th entry of the matrix G . We can write

$$\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}(n \cdot \text{diag}(\beta_1^2, \dots, \beta_n^2), 0) \supseteq B \supseteq \mathcal{Z},$$

where $\beta_i = \sum_{j=1}^{m/2} |G_{ij}|$ and B is the “rectangle” $[-\beta_1, \beta_1] \times \cdots \times [-\beta_n, \beta_n]$. Hence \mathcal{E}_0 can be used as the initial ellipse as well.

4.2 The lower bound on volume

As the zonotope \mathcal{Z} is full-dimensional, we can choose j_1, \dots, j_n such that the generators g_{j_1}, \dots, g_{j_n} are linearly independent. Setting $G := (g_{j_1}, \dots, g_{j_n})$ we have $\text{vol}(\mathcal{Z}) \geq |\det G| > 0$. As the positive number $|\det G|$ can be computed by a polynomial time algorithm, we have $\text{size}(|\det G|) \leq p_2(L)$ with some polynomial p_2 . Hence

$$\text{vol}(\mathcal{Z}) \geq |\det G| \geq 2^{-p_2(L)}$$

using (1).

Lemma 11. *There exists a polynomial p_2 such that $\text{vol}(\mathcal{Z}) \geq 2^{-p_2(L)}$. \square*

4.3 Parallel cuts

We take the advantage of the fact that a zonotope is a centrally symmetric body centered at zero. Central symmetry implies that whenever we know that $\mathcal{Z} \subseteq \{x : c^T x \leq \gamma\}$, then also $\mathcal{Z} \subseteq \{x : c^T x \geq -\gamma\}$. It follows that instead of (7) we can use the following type of cuts, called *parallel cuts*. The lemma comes from [2] (and can be easily proved by geometry); see also [7], where it has been used for a more general class of centrally symmetric polyhedra.

Lemma and Definition 12. *Let c be a vector satisfying $\|c\| = 1$, let $B = \mathcal{E}(I, 0)$ be an n -dimensional unit ball and let $\gamma \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$. The smallest-volume n -dimensional ellipse containing the set $B \cap \{x : -\gamma \leq c^T x \leq \gamma\}$ is the ellipse $\mathcal{E}(E, 0)$ with*

$$E = \frac{n(1-\gamma^2)}{n-1} \left(I - \frac{1-n\gamma^2}{1-\gamma^2} \cdot cc^T \right). \quad (16)$$

We say that E **results from B with a cut** (c, γ) . \square

We will also need an analogy of the proposition (8).

Lemma 13. *Let $\varepsilon > 0$. Then there exists a constant $\kappa_\varepsilon \in (0, 1)$, depending only on ε , such that the following holds: whenever a vector c satisfying $\|c\| = 1$ is given and the ellipse $\mathcal{E}(E, 0)$ results from the unit ball B with a cut $(c, \gamma := \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}})$, then $\text{vol}(E) \leq \kappa_\varepsilon \cdot \text{vol}(B)$.*

Proof. By rotation, which does not change volume, we can assume $c = e_1$.

Then the formula (16) is in the simple form

$$E = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}\right) \left(I - \frac{1 - \frac{1}{1+\varepsilon}}{1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}} e_1 e_1^T\right) \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\varepsilon} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

We have used equalities $\frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}\right) \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{1+\varepsilon}}{1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}}\right) = \frac{1}{1+\varepsilon}$ and $\frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1}$, which are verified easily using elementary algebra.

By (2) we have $\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(B)} = \sqrt{\frac{\det E}{\det I}} = \sqrt{\det E}$. It remains to show that $\sqrt{\det E}$ can be bounded by a constant $\kappa_\varepsilon < 1$. As the matrix E is diagonal, we have

$$\sqrt{\det E} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \\ = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \\ \stackrel{(*)}{\leq} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - 1 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1}\right) \\ = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - 1\right) =: \kappa_\varepsilon.$$

In the inequality $(*)$ we have used $1 + \xi \leq e^\xi$ with $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} - 1$ and with $\xi = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{n-1}$.

It remains to show that $\kappa_\varepsilon < 1$. By elementary algebraic manipulations we observe that $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1$ iff $2\sqrt{1+\varepsilon} + \varepsilon < 2 + 2\varepsilon$ iff $2\sqrt{1+\varepsilon} < 2 + \varepsilon$ iff $4(1+\varepsilon) < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$ iff $\varepsilon^2 > 0$. \square

4.4 Testing whether \mathcal{Z} contains a large ball

The next crucial step is the test (5). In section 2 we could perform the test easily using the fact that the facet description of the polyhedron under consideration was available. However, now we cannot lean on that description.

At the moment we cannot design a polynomial-time algorithm for testing whether a given zonotope \mathcal{Z} , centered at zero, satisfies $K_\gamma \subseteq \mathcal{Z}$, where $K_\gamma = \mathcal{E}(\gamma^2 \cdot I, 0)$ is a ball with radius γ .

Research problem. Let T be the problem “given a rational generator description of a full-dimensional zonotope \mathcal{Z} centered at zero, does $K_1 \subseteq \mathcal{Z}$ hold?”. We conjecture that the problem T is *co-NP*-complete. The complement of T

seems to be in **NP**: the fact $K_1 \not\subseteq \mathcal{Z}$ can be witnessed by a point x satisfying $\|x\|^2 \leq 1$ and $x \notin \mathcal{Z}$. The former fact is verified in polynomial time easily; the latter fact can be verified in polynomial time by Theorem 7(a).

If the conjecture is right, it seems to be a serious obstacle. We overcome it for a certain price: we construct a smaller inscribed ellipse (see (18)). This “loss” will be discussed in detail in Section 5.

With Theorem 7(a) we can use essentially the same simple trick as in [7]: instead of testing $\mathcal{K}_\gamma \subseteq \mathcal{Z}$ we test whether

$$\gamma e_i \in \mathcal{Z} \quad \text{for all } i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

If the test is successful (for all $i = 1, \dots, n$), by central symmetry we know that all the points $\pm \gamma e_1, \dots, \pm \gamma e_n$ are in \mathcal{Z} ; then also

$$\mathcal{Z} \supseteq \text{convexhull}\{\pm \gamma e_i : i = 1, \dots, n\} \supseteq \mathcal{E}\left(\frac{\gamma^2}{n}, 0\right). \quad (18)$$

(Observe that $\text{convexhull}\{\pm \gamma e_i : i = 1, \dots, n\}$ is the dual of an n -dimensional cube.) We will perform the test with $\gamma = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}$. Then:

- (a) if the test (17) is successful, we have $\mathcal{E}\left(\frac{1}{n^2(1+\varepsilon)}I, 0\right) \subseteq \mathcal{Z}$;
- (b) if the test (17) is unsuccessful, we know an index i_0 such that $\frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \cdot e_{i_0} \notin \mathcal{Z}$.

4.5 The separation algorithm

If the test (17) is unsuccessful, by statement (b) of the previous section we know a point $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}} \cdot e_{i_0}$ on the boundary of the ball $B' := \mathcal{E}\left(\frac{1}{n(1+\varepsilon)}, 0\right)$ satisfying $x_0 \notin \mathcal{Z}$. Then we would like to perform a parallel a -cut of the unit ball $B = \mathcal{E}(I, 0)$ with some suitable a . In Section 2 we selected a as the normal vector of the found violated inequality — but this is not possible here because the facet description of \mathcal{Z} is not available.

We will construct a single inequality $a^T x \leq b$ such that $\mathcal{Z} \subseteq \{x : a^T x \leq b\}$ and $x_0 \notin \{x : a^T x \leq b\}$. Moreover, we will construct a and b such that $\{x : a^T x = b\} \cap \mathcal{Z}$ is a facet of \mathcal{Z} .

The inequality $a^T x \leq b$ is called a *separator* (of x_0 from \mathcal{Z}). We can use the separator a for the (parallel) a -cut.

In general, an algorithm for construction of a is called *separation algorithm*, or, in the terminology of [7], a *separation oracle*.

Let G be the matrix from Lemma 5. Recall that we assume that the zonotope \mathcal{Z} is centered at zero.

Step 1. We set $\beta^* := \max\{\beta \in \mathbb{R} : \beta x_0 = G\alpha, -1 \leq \alpha \leq 1\}$ (using linear programming). It follows that $x^* := \beta^* x_0 \in \bar{\mathcal{Z}}$; hence, $\deg(x^*) \leq n - 1$. Now our aim is to find (some) facet of \mathcal{Z} containing x^* .

Step 2. If $\deg(x^*) < n - 1$, we replace x^* by a point of degree $n - 1$ using Corollary 9.

Step 3. We compute $\{h_1, \dots, h_{n-1}\} = \text{bas}(\mathcal{F}(x^*))$. Clearly, the affine hull of the facet $\mathcal{F}(x^*)$ is the separator of x_0 from \mathcal{Z} .

Step 4. We find a vector orthogonal to h_1, \dots, h_{n-1} : set $H := (h_1, \dots, h_{n-1})$ and define $a := (I - (H^T H)^{-1} H^T)x_0$. The vector a is the output of the algorithm.

By the theory of Section 3, all tests and operations can be performed in polynomial time.

4.6 The algorithm

All the necessary ingredients have been prepared. Let $\varepsilon > 0$ be fixed. Let a generator description of a full-dimensional zonotope \mathcal{Z} be given. (Observe that by (3), an incorrect input — a zonotope which is not full-dimensional — can be easily detected.)

At the beginning, we choose the initial ellipse $\mathcal{E}(E_0, 0) \supseteq \mathcal{Z}$ as described in Section 4.1.

Let us describe the work in one iteration. We have $\mathcal{E}(E_i, 0) \supseteq \mathcal{Z}$ from the previous iteration; we will construct E_{i+1} . We apply the mapping $\Phi : \xi \mapsto E_i^{-1/2} \xi$ under which the ellipse $\mathcal{E}(E_i, 0)$ is projected to the unit ball $\mathcal{E}(I, 0)$ and the zonotope \mathcal{Z} generated by g_1, \dots, g_m is projected to a zonotope \mathcal{Z}' generated by $\Phi(g_1), \dots, \Phi(g_m)$.

We set

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}$$

and we perform the test (17) with γ and \mathcal{Z}' . If the test passes, we can finish — by (18) we know that

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{n^2(1+\varepsilon)}I, 0\right) \subseteq \mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{E}(I, 0),$$

and hence

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{n^2(1+\varepsilon)}E_i, 0\right) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E}(E_i, 0).$$

It follows that $\mathcal{E}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}E_i, 0\right)$ is the ε -approximate Löwner-John ellipse for \mathcal{Z} .

If the test (17) with γ and \mathcal{Z}' fails, we determine the vector a using the separation algorithm of Section 4.5 and perform a cut (a, γ) using Lemma 12. We get a matrix E from that Lemma. We set $E_{i+1} := \Phi^{-1}(E)$ and the iteration is done. We know that $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E}(E_{i+1}, 0)$.

The mapping Φ does not change ratios of volumes of ellipses; hence we have

$$\frac{\text{vol}(E_{i+1})}{\text{vol}(E_i)} = \frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(I)} \leq \kappa_\varepsilon < 1, \quad (19)$$

where κ_ε is the constant of Lemma 13.

Recall that L be the size of the generator description of \mathcal{Z} . We claim that the algorithm terminates after no more than

$$N := -\frac{1}{\log_2 \kappa_\varepsilon} (1 + p_1(L) + p_2(L))$$

iterations, where p_1 is the polynomial of Lemma 10 and p_2 is the polynomial of Lemma 11. Assume that we have reached N -th iteration. Then, using (19),

$$\begin{aligned} \text{vol}(E_N) &\leq \text{vol}(E_0) \cdot \kappa_\varepsilon^N \leq 2^{p_1(L)} \cdot \kappa_\varepsilon^N = 2^{p_1(L) + N \log_2 \kappa_\varepsilon} \\ &= 2^{p_1(L) - \frac{1}{\log_2 \kappa_\varepsilon} \cdot (p_1(L) + p_2(L) + 1) \log_2 \kappa_\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-p_2(L)} < 2^{-p_2(L)}. \end{aligned}$$

But the zonotope \mathcal{Z} of volume $\geq 2^{-p_2(L)}$ (using Lemma 11) is contained in $\mathcal{E}(E_N, 0)$ and hence $\text{vol}(E_N) \geq 2^{-p_2(L)}$ — contradiction.

5 Conclusion

The basic question is whether the statement of Theorem 4 can be improved. In Section 4.4 we have lost a factor of n (or, in terms of lengths of semi-axes, a factor \sqrt{n}) not being able to test whether a given zonotope contains a large ball. If that test could be implemented, then we could strengthen the theorem and find an ellipse satisfying $\mathcal{E}(\frac{1}{n}E_i, 0) \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E}((1 + \varepsilon)E_i, 0)$. This does not contradict Theorem 1: Theorem 1 talks about a general convex set C , where the factor n^{-2} is necessary, but there exists a result — known as Jordan's Theorem — that for a centrally symmetric set (not only a zonotope) that factor can be improved to n^{-1} . The conjecture of Section 4.4 is important to understand whether we could reach a better factor than n^{-2} with a Goffin-like method or not. Also the test (17) could be possibly improved to get a larger inscribed ball than the ball in (18).

We formulated Theorem 4 for any *fixed* $\varepsilon > 0$. Clearly, the degree of the polynomial bounding the running time of the algorithm depends on ε . It is worth considering whether some adaptive strategy of changing ε inside the work of the algorithm could bring some (say, at least practical) improvement. Of course, the problem is that $\kappa_\varepsilon \rightarrow 1$ with $\varepsilon \rightarrow 0$.

Also deeper parallel cuts can improve the performance of the algorithm (at least practically). And finally, a good choice of the initial ellipse is also an important factor.

Acknowledgment. The author's work was supported by the Internal Grant Agency of University of Economics, Prague.

References

- [1] Avis, D., Fukuda, K.: Reverse search for enumeration. *Discrete Applied Mathematics* 65, 21–46 (1996)

- [2] Bland, R. G., Goldfarb, D., Todd, M. J.: The Ellipsoid Method: A Survey. *Operations Research* 29, 1039–1091 (1981)
- [3] Buck, R. C.: Partion of space. *Amer. Math. Monthly* 50, 541–544 (1943)
- [4] Černý, M., Antoch, J., Hladík, M.: On the possibilistic approach to linear regression models involving uncertain, indeterminate or interval data. Technical Report, Department of Econometrics, University of Economics, Prague. <http://nb.vse.cz/~cernym/plr.pdf> (2011). Accessed 31 August 2011
- [5] Ferrez, J.-A., Fukuda, K., Liebling, T.: Solving the fixed rank convex quadratic maximization in binary variables by a parallel zonotope construction algorithm. *European Journal of Operational Research* 166, 35–50 (2005)
- [6] Goffin, J.-L.: Variable metric relaxation methods. Part II: The ellipsoid method. *Mathematical Programming* 30, 147–162 (1984)
- [7] Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A.: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer, Heidelberg (1993)
- [8] Guibas, L. J., Nguyen, A., Zhang, L.: Zonotopes as Bounding Volumes. *Proceeding SODA '03 Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM Pennsylvania (2003)
- [9] Schön, S., Kutterer, H.: Using Zonotopes for Overestimation-Free Interval Least-Squares — Some Geodetic Applications. *Reliable Computing* 11, 137–155 (2005)
- [10] Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, New York (2000)
- [11] Zaslavsky, T.: Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Mem. Amer. Math. Soc.* 154 (1975)
- [12] Ziegler, G.: *Lectures on Polytopes*. Springer, Heidelberg (2004)

CÍLOVÁNÍ INFLACE V ČR

INFLATION TARGETING IN THE CZECH REPUBLIC

Ondřej Čížek

Abstrakt

Cílem tohoto článku je zkoumání politiky cílování inflace a její vliv na dezinflační proces, a to z empirického hlediska. Za tímto účelem jsou aplikovány metody panelových dat s cílem popsat vývoj inflace v tranzitivních ekonomikách. Použitý model vychází z Phillipsovy křivky, která udává vztah mezi nezaměstnaností (resp. produktem) a inflací. Inflace vystupuje v roli vysvětlované proměnné a míra nezaměstnanosti v roli vysvětlující. Regrese na panelových datech v případě tranzitivních ekonomik dopadla z hlediska úspěšnosti politiky cílování inflace nadmíru uspokojivě, ovšem je třeba si uvědomit, že výsledky regrese jsou zkresleny skutečností, že politiku cílování inflace začaly uplatňovat především země potýkající se s vysokou inflací. Máme-li proto hodnotit politiku cílování inflace v tranzitivních ekonomikách, je možné říci, že tato politika byla úspěšná ve smyslu snížení inflace u ekonomik trpících vysokou mírou inflace. Ovšem vždy je třeba mít na paměti, že tento výsledek není a nemůže být potvrzením příčinné vazby, nýbrž pouze potvrzením korelace mezi těmito veličinami.

***Klíčová slova:** cílování inflace, panelová data, Phillipsova křivka*

Abstract

The goal of this paper is to analyze the impact of inflation targeting on disinflation process from the empirical point of view. The panel data methods are applied to describe the development of the inflation in transition economies. The model is based on the Phillips curve, which relates unemployment (output) with inflation. Inflation is dependent variable while unemployment is independent variable. Panel data regression shows that inflation targeting in transition economies was successful in lowering their high inflation. Nonetheless, we have to be aware of the fact that this result cannot be interpreted in the sense of causality, but only in the sense of correlation.

***Keywords:** inflation targeting, panel data, Phillips curve*

1 ÚVOD

Cílem je hodnocení efektivnosti politiky cílování v tranzitivních ekonomikách, a to s využitím metod pro panelová data. Do datového souboru byly vybrány země Česká Republika, Estonsko, Maďarsko, Lotyšsko, Litva, Polsko, Slovensko a Slovinsko. Datový soubor tedy obsahuje 8 jednotek, přičemž pro každou jednotku je k dispozici 10 pozorování za roky 1998 až 2007. Jedná se tedy o vybalancovaná panelová data. Vzhledem k tomu, že výběr jednotek do datového souboru nelze považovat na náhodný, aplikujeme model s fixními efekty. Podrobnější informace o použitých datech jsou uvedeny v dodatku.

Struktura práce je následující. Ve 2. kapitole je formulován výchozí model založený na Phillipsově křivce. Ve 3. kapitole je popsána metoda odhadu parametrů tohoto modelu. Ve 4. kapitole budou interpretovány výsledky. V 5. kapitole je závěr.

2 FORMULACE MODELU

Použitý model vychází z Phillipsovy křivky, která udává vztah mezi nezaměstnaností (resp. produktem) a inflací. Inlace vystupuje v roli vysvětlované proměnné a míra nezaměstnanosti v roli vysvětlující. Tato základní podoba Phillipsovy křivky je zde modifikována a doplněna o další vysvětlující proměnné, kterými jsou¹

čas,
pomocná binární proměnná sloužící pro hodnocení efektivnosti cílování inflace,
pomocné binární proměnné sloužící pro zachycení individuálních efektů.

Ekonometrický model je tedy formulován ve tvaru:

$$\pi_{it} = \alpha_i + \beta \cdot t + \gamma \cdot CI_{it} + \delta \cdot U_{it} + \eta_{it}, \quad (0.1)$$

kde π_{it} značí inflaci v zemi i a v čase t ,

α_i je individuální efekt země i ,

t je čas,

CI_{it} je umělá proměnná nabývající hodnoty 1 v případě, že je v zemi i a v čase t uplatňována politika cílování inflace a hodnoty 0 v opačném případě,

U_{it} je míra nezaměstnanosti v zemi i a v čase t ,

η_{it} je náhodná chyba v zemi i a v čase t .

Všechny tranzitivní ekonomiky střední a východní Evropy po přechodu na tržní ekonomiku se zpočátku potýkali s vysokou mírou inflace, jež byla způsobena deformací cen v centrálně plánovaných ekonomikách. Cílem všech těchto zemí tedy bylo a je tuto vysokou míru inflace

¹ V empirické literatuře se lze setkat s různými modifikacemi tohoto vztahu např. přidáním dalších vysvětlujících proměnných jako je rozpočet vlády, množství peněz v ekonomice, či index ekonomické liberalizace. Je nepochybné, že inflace je všemi těmito veličinami nějakým způsobem ovlivňována, ovšem v tomto textu do modelu tyto proměnné zahrnuté nebudou, neboť takto vysoký počet vysvětlujících proměnných by vyvolal problém multikolinearity.

postupně snižovat, a to s ohledem na plnění konvergenčních kritérií před přijetím eura. Očekávané znaménko pro parametr β je tedy záporné.

V souladu s ekonomickou teorií analyzující vztah inflace a nezaměstnanosti lze očekávat, že znaménko parametru δ bude záporné. Nejvíce nás ovšem bude zajímat znaménko parametru γ , neboť to bude měřit úspěšnost politiky cílování inflace. Záporné znaménko tohoto parametru bude signalizovat úspěšnost této měnové strategie, a naopak. Jak již bylo předesláno v úvodu, panelová data mají tu výhodu, že nám umožní zachytit dynamiku vývoje. Jinými slovy, oproti průřezovým datům, která mohou říci pouze to, zda země cílující inflaci mají nebo nemají v jistém časovém okamžiku nižší inflaci oproti zemím ostatním, tak v případě panelových dat máme navíc informaci o tom, zda k poklesu inflace došlo až po zavedení cílování inflace, anebo zda nízká inflace byla v dané zemi již před přechodem na tuto měnovou strategii.

Proměnná čas vystihuje snahu všech tranzitivních ekonomik splnit konvergenční kritéria, proměnná nezaměstnanost modeluje transmisní kanál mezi ekonomickou aktivitou a inflací, který mohou centrální banky využívat a α_i v sobě zahrnují všechny ostatní vlivy, které nebylo možné tímto modelem popsat. Pomocná proměnná CI pak modeluje vliv zavedení měnové strategie cílování inflace. Ekonomicky tento efekt odpovídá především vlivu centrální banky na očekávání ekonomických subjektů, neboť v tom spočívá hlavní odlišnost politiky cílování inflace od jiných měnových strategií. Má-li veřejnost důvěru ve schopnost centrální banky dostat svých cílů, budou ekonomičtí subjekty očekávat cílovou hodnotu inflace a tato očekávání se následně promítnou do budoucího vývoje skutečné inflace.

3 ODHAD PARAMETRŮ

Parametry tohoto modelu s fixními efekty odhadneme pomocí MPP, což je použití MNČ na regresi:

$$\pi = D\bar{\alpha} + X\bar{\beta} + \eta, \quad (0.2)$$

kde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & CI_{1,1} & U_{1,1} \\ \vdots & & \\ 10 & CI_{1,10} & U_{1,10} \\ \hline 1 & CI_{2,1} & U_{2,1} \\ \vdots & & \\ 10 & CI_{2,10} & U_{2,10} \\ \hline \vdots & & \\ 1 & CI_{8,1} & U_{8,1} \\ \vdots & & \\ 10 & CI_{8,10} & U_{8,10} \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}.$$

Ovšem v dnešní době prakticky každý ekonometrický software již obsahuje procedury pro odhad parametrů modelu s panelovými daty, takže není nutné si pomocné proměnné v matici D pracně vytvářet. Například v programu PcGive se postupuje takto. V nabídce Package se vybere položka Panel Data Models a poté se z nabídky Model vybere Static Panel Methods, což aktivuje okno, ve kterém se již tento model s fixními efekty naformuluje. V dalších krocích se z nabídky metod pro odhad parametrů vybere metoda označená zkratkou LSDV (Least Square Dummy Variable), což je metoda pomocných proměnných v české literatuře označovaná zkratkou MPP.

4 DATA

Zdrojem dat pro inflaci a nezaměstnanost je Eurostat. Inflace je měřena jako relativní změna² (v procentech) harmonizovaného cenového indexu (rok 2005 je volen jako bazický rok, tj. cenový index v tomto roce je roven 100). Stejně jako u inflace používá Eurostat také u nezaměstnanosti tzv. harmonizovanou míru nezaměstnanosti vyjadřující podle definice Mezinárodní organizace práce (ILO) podíl nezaměstnaných osob v procentech z celkové pracovní síly, která je zde dána celkovým součtem všech zaměstnaných a nezaměstnaných osob ve věku 25 - 74 let. Nezaměstnané osoby zde zahrnují osoby ve věku 25 - 74 let, které: a) jsou bez práce, b) jsou připraveny k nástupu do práce během následujících dvou týdnů a c) aktivně hledaly práci po dobu posledních čtyř týdnů nebo si již našly zaměstnání, které začnou vykonávat během následujících tří měsíců.

Které země a odkdy používají režim cílování inflace bylo vyhledáno na internetu. Tranzitivní ekonomiky cílující inflaci jsou Česká Republika (od roku 1997), Maďarsko (od roku 2001), Polsko (od roku 1998) a Slovenská Republika (od roku 2005).

Hlavním důvodem pro zahrnutí dat až od roku 1998 je skutečnost, že většina tranzitivních ekonomik čelila v první polovině devadesátých let vysoké inflaci způsobené přechodem z centrálně plánované ekonomiky na ekonomiku tržní a tedy vývoj těchto ekonomik v první polovině 90. let byl určován jinými vlivy než v posledních cca 10 letech. Druhým důvodem je, že údaje o harmonizované míře nezaměstnanosti jsou u některých zemí k dispozici až od tohoto roku.

Použitá data o inflaci a nezaměstnanosti v tranzitivních ekonomikách jsou pro úplnost shrnuta v následujících tabulkách:

Tabulka 1: Inflace

inflace	Česká Republika	Estonsko	Maďarsko	Lotyšsko	Litva	Polsko	Slovensko	Slovinsko
1998	9,7	8,8	14,2	4,3	5,4	11,8	6,7	7,9
1999	1,8	3,1	10	2,1	1,5	7,2	10,4	6,1
2000	3,9	3,9	10	2,6	1,1	10,1	12,2	8,9
2001	4,5	5,6	9,1	2,5	1,6	5,3	7,2	8,6
2002	1,4	3,6	5,2	2	0,3	1,9	3,5	7,5
2003	-0,1	1,4	4,7	2,9	-1,1	0,7	8,4	5,7

² Inflace je tedy měřena jako $\pi_t = \frac{CenIndex_t - CenIndex_{t-1}}{CenIndex_{t-1}} \cdot 100$

2004	2,6	3	6,8	6,2	1,2	3,6	7,5	3,7
2005	1,6	4,1	3,5	6,9	2,7	2,2	2,8	2,5
2006	2,1	4,4	4	6,6	3,8	1,3	4,3	2,5
2007	3	6,7	7,9	10,1	5,8	2,6	1,9	3,8

Tabulka 2: Nezaměstnanost

nezaměstnanost	Česká Republika	Estonsko	Maďarsko	Lotyšsko	Litva	Polsko	Slovensko	Slovinsko
1998	6,4	9,2	8,4	14,3	13,2	10,2	12,6	7,4
1999	8,6	11,3	6,9	14	13,7	13,4	16,4	7,3
2000	8,7	12,8	6,4	13,7	16,4	16,2	18,8	6,7
2001	8	12,4	5,7	12,9	16,5	18,3	19,3	6,2
2002	7,3	10,3	5,8	12,2	13,5	20	18,7	6,3
2003	7,8	10	5,9	10,5	12,5	19,7	17,6	6,7
2004	8,3	9,7	6,1	10,4	11,4	19	18,2	6,3
2005	7,9	7,9	7,2	8,9	8,3	17,8	16,3	6,5
2006	7,2	5,9	7,5	6,8	5,6	13,9	13,4	6
2007	5,3	4,7	7,4	6	4,3	9,6	11,1	4,9

5 INTERPRETACE VÝSLEDKŮ

Použitím programu PcGive byly získány tyto výsledky³:

DPD(1) Modelling pi by LSDV

	Coefficient	Std.Error	t-value	t-prob
t	-0.496213	0.1325	-3.75	0.000
Cl	-4.07800	0.8082	-5.05	0.000
U	-0.583041	0.1428	-4.08	0.000
I0	14.259 1	1.318	10.8	0.000
I1	12.6814	1.671	7.59	0.000
I2	17.0476	1.190	14.3	0.000
I3	13.7451	1.874	7.33	0.000
I4	11.6875	1.950	5.99	0.000
I5	20.6950	2.467	8.39	0.000
I6	19.9112	2.542	7.83	0.000
I7	12.1981	1.297	9.40	0.000
sigma	2.138193	sigma^2	4.571871	
R^2	0.6135782			
RSS	315.45906972	TSS	816.3595	
no. of observations	80	no. of parameters	11	

Dříve než přistoupíme k interpretaci, tak ještě otestujeme, zda bylo použití modelu s fixními efekty opodstatněné, tj. zda data nasvědčují přítomnosti individuálních efektů. Ekonometrický software nabízí řadu testových statistik, které již není třeba počítat. Ovšem použijeme-li výše

³ Zkratka DPD značí, že bylo k odhadu parametrů použito procedur určených pro modely s panelovými daty.

zmíněnou F-statistiku, spočte se její hodnota následovně. Použitím MNČ na regresi $\pi_{it} = \alpha + \beta \cdot t + \gamma \cdot CI_{it} + \delta \cdot U_{it} + \eta_{it}$ se získá $R_{MNČ}^2 = 0.178067$ a tedy:

$$F = \frac{\frac{R_{MMP}^2 - R_{MNČ}^2}{n-1}}{\frac{1 - R_{MMP}^2}{nT - n - k}} = \frac{0.613678 - 0.178067}{\frac{8-1}{1-0.613578}} = 11.1.$$

Protože 95% kvantil Fisherova rozdělení $F(7, 77)$ je roven 2.1, zamítáme nulovou hypotézu o neexistenci individuálních efektů.

Statistická interpretace odhadnuté regrese je v tomto případě přímočará. Z t-testů vidíme, že všechny proměnné modelu jsou statisticky významné dokonce na 1% hladině významnosti.

Podobně přímočará je i ekonomická interpretace - odhadnuté parametry u proměnných čas (t) a nezaměstnanost (U) mají očekávaná znaménka. Podstatné však je, že parametr u proměnné CI má znaménko záporné, což vede k závěru nezamítnout hypotézu o efektivnosti měnové strategie cílování inflace. Na druhé straně je hodnota odhadnutého koeficientu u proměnné CI v absolutní hodnotě příliš vysoká, než abychom tomuto výsledku mohli bezmezně věřit. Odhadnutý model říká, že zavedení cílování inflace v daných zemích snížilo roční inflaci o více než 4%, což je výsledek, kterému by nemohl věřit ani ten největší zastánce této měnové strategie.

Podívejme se proto podrobněji, proč bylo těchto „vynikajících“ výsledků dosaženo. Výše formulovaný model vycházel z myšlenky podchytit dynamiku vývoje inflace, což by pomocí analýzy průřezových dat nebylo možné. Pomocí průřezových dat můžeme totiž nanejvýš konstatovat, že v zemích cílující inflaci je v daném období nižší inflace než v zemích ostatních. Formulovaný model byl tedy navrhnout za účelem zjištění, zda k poklesu inflace došlo až po zavedení cílování inflace, anebo zda nízká inflace byla v těchto zemích již před zavedením tohoto institucionálního prostředku. Je nasnadě, že první případ podporuje hypotézu o efektivnosti cílování inflace, zatímco druhý nikoli, neboť nízká inflace v těchto zemích zjištěná z průřezových dat by s politikou cílování inflace neměla v tomto případě žádnou souvislost.

Předchozí argumentace je však chybná. Je totiž dost pravděpodobné, že země, které se rozhodli cílovat inflaci tak učinily proto, že měly větší problémy s vysokou inflací, než země, které tento režim nezavedly. Ovšem u zemí s již poměrně nízkou mírou inflace nelze očekávat tak výraznou redukci inflace jako u zemích s inflací vysokou, a to bez ohledu na to, jakou měnovou strategii dané země uplatňují. Maďarsko a Slovensko (Maďarsko cílující inflaci od roku 2001 a Slovensko od roku 2005) měly od roku 1998 až do roku 2005 jednu z nejvyšších inflací ze sledovaných zemí. Totéž platí pro Polsko (cílující inflaci od roku 1998) v období 1998 až 2001. Česká Republika v roce 1998, tj. v období zavádění cílování inflace, byla hned po Maďarsku a Polsku třetí zemí s nejvyšší inflací.⁴

Podívejme se proto na odhadnuté individuální efekty zemí cílující inflaci:

⁴ Dalším důvodem pro úpravu modelu by mohla být určitá nesourodost dat. V prvních letech sledovaného časového úseku měla inflace v tranzitivních ekonomikách výrazně klesající tendenci, což lze připsat doznívajícím cenovým efektům, jež byly vyvolány přechodem z centrálně plánované ekonomiky na ekonomiku tržní. Ve druhé polovině sledovaného časového úseku tento klesající trend již nepozorujeme. Je tedy možné, že nepřiměřeně vysoký (v absolutní hodnotě) odhadnutý koeficient u proměnné CI byl způsoben opominutím této skutečnosti. Tato hypotéza se však nepotvrdila.

Česká Republika (od roku 1997)	14.2,
Maďarsko (od roku 2001)	17.0,
Polsko (od roku 1998)	20.7,
Slovensko (od roku 2005)	19.9,

a na individuální efekty zemí, které inflaci necílují:

Estonsko	12.7,
Lotyšsko	13.0,
Litva	11.7,
Slovinsko	12.2.

Ihned vidíme hlavní odlišnost – individuální efekty u zemí cílující inflaci jsou mnohem vyšší než u zemí, které inflaci necílují. Otázkou však je, jak tuto skutečnost správně interpretovat. Kdyby odhadnuté individuální efekty skutečně odpovídaly realitě, tak by to znamenalo, že Česká Republika, Maďarsko, Polsko a Slovensko jsou země, které kdyby neuplatňovaly politiku cílování inflace a měly srovnatelnou úroveň nezaměstnanosti se zeměmi Estonsko, Lotyšsko, Litva a Slovinsko, tak potom by dosahovaly mnohem vyšších hodnot inflace. Tato interpretace je zčásti v souladu s argumentem, který byl míněn výše, totiž že pro politiku cílování inflace se rozhodly země, které měly s inflací větší problémy, než země ostatní. Ovšem soulad je zde pouze částečný, neboť tento argument byl použit jako vysvětlení příliš vysokého (v absolutní hodnotě) koeficientu při proměnné CI , přičemž argumentováno bylo tak, že u tranzitivních zemí potýkající se s vysokou mírou inflace lze v souvislosti s plánovaným přijetím eura očekávat mnohem vyšší redukci inflace, a to bez ohledu na režim měnové politiky. Argument byl tedy ten, že Česká Republika, Maďarsko, Polsko a Slovensko by svoji vysokou inflaci snížily i kdyby režim cílování inflace zaveden nebyl, což tedy znamená, že v odhadnuté regresi byl koeficient u proměnné CI neoprávněně nadhodnocen. Z odhadnutých individuálních efektů vidíme, že provedená regrese sice správně odhalila skutečnost, že se země Česká Republika, Maďarsko, Polsko a Slovensko potýkají s vysokou mírou inflace, ovšem regrese samotná už neodhalila skutečnost, že tyto země v souvislosti s plánovaným přijetím eura svoji inflaci sníží bez ohledu na režim měnové politiky. Odhadnuté individuální efekty u zemí cílující inflaci jsou proto nadhodnocené. Důsledkem této skutečnosti pak je, že odhadnutý koeficient u proměnné CI je v absolutní hodnotě také nadhodnocen.

6 ZÁVĚR

Regrese na panelových datech v případě tranzitivních ekonomik bylo zkruslena skutečností, že politiku cílování inflace začaly uplatňovat především země potýkající se s vysokou inflací. Rozhodně tedy nelze tvrdit, že zavedení tohoto měnového systému povede vždy ke snížení inflace o více jak 4%, jak tvrdí výsledek regresní analýzy. Máme-li proto hodnotit politiku cílování inflace v tranzitivních ekonomikách, můžeme říci, že tato politika byla úspěšná ve smyslu snížení inflace u ekonomik trpících vysokou mírou inflace. Ovšem vždy je třeba mít na paměti, že tento výsledek není a nemůže být potvrzením příčinné vazby, nýbrž pouze potvrzením korelace mezi těmito veličinami.

Použitá literatura

1. HUŠEK, R.: *Aplikovaná ekonometrie*. VŠE, Praha 2001.
2. JOHNSTON, J., DINARDO, J.: *Econometric Methods*, McGraw-Hill, New York 1997.

Kontaktní údaje

Ing. Ondřej Čížek

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: cizeko@vse.cz

ANALÝZA A MODELOVANIE DOPYTU PO PRÁCI VYSOKOŠKOLSKY VZDELANÉHO OBYVATEĽSTVA

THE ANALYSIS AND MODELING OF LABOUR DEMAND OF CITIZENS WITH UNIVERSITY DEGREE

Miroslava Dolinajcová, Darina Frandoferová, Soňa Brlejšová

Abstrakt

Cieľom tohto príspevku je analýza a ekonometrické modelovanie dopytu po práci v Slovenskej republike vzhľadom na dosiahnuté vzdelanie. V prvej časti popíšeme súčasný stav dopytu po práci ako vývoj počtu pracujúcich za vybrané časové obdobie.

V druhej časti budeme modelovať dopyt po práci vysokoškolsky vzdelaného obyvateľstva ako počet pracujúcich s týmto dosiahnutým vzdelaním v závislosti od vysvetľujúcich premenných, napríklad hrubý domáci produkt, priemerná reálna mzda, produktivita práce a iné. Z metodologického hľadiska budeme dlhodobé a krátkodobé vzťahy dopytu po práci modelovať pomocou modelu založenom na člene korigujúcom chybu - Error Correction Model.

***Kľúčové slová:** zamestnanosť, dopyt po práci, Error Correction Model*

Abstract

The aim of this paper is an analysis and econometric modeling of labour demand in the Slovak Republic with regard to educational attainment. The first part will describe the current state of labor demand as the development of the number of workers for the selected time period.

In the second part we try to form the labour demand of citizens with university degree, which we model as the number of workers depending on the explanatory variables, such as the gross domestic product, average real wages, labour productivity and other. From a methodological point of view we model the long and short term demand for labour relations with a model based on the member for correcting the error - Error Correction Model.

***Keywords:** employment, labour demand, Error Correction Model*

ÚVOD

V súčasnosti jednou z viac diskutovaných tém na Slovensku je trh práce, najmä z dôvodu, že táto problematika sa dotýka každého obyvateľa. Cieľom predloženého článku je analyzovať a modelovať vývoj dopytu po práci - zamestnanosť. Zamestnanosť budeme analyzovať a modelovať na základe dosiahnutého vzdelania, zamerali sme sa na pracujúcich s dosiahnutým vysokoškolským vzdelaním. Pretože v súčasnosti je dôležitý práve tento faktor. Rozvoj náročnejších technológií a pracovných postupov si bude vyžadovať čoraz vyššiu vzdelanostnú úroveň pracovníkov. Pri písaní tohto príspevku nám bolo inšpiráciou oznámenie Európa

2020¹ Európskej komisie, kde jednou zo základných priorít je inteligentný rast – vytvorenie hospodárstva založeného na znalostiach a inovácii. Inteligentný rast zahŕňa posilnenie znalostí a inovácie, ktoré sú hybnou silou nášho budúceho rastu. Vyžaduje si to zlepšenie kvality nášho vzdelávania, posilnenie výskumu s cieľom zlepšiť výsledky, podporovanie šírenia inovácií a znalostí. Cieľom je zlepšiť výsledky a zvýšiť medzinárodnú atraktivitu vyšších vzdelávacích inštitúcií v Európe a celkovú kvalitu všetkých úrovní vzdelávania a odbornej prípravy v EÚ, ktoré by spájali vysokú kvalitu a princíp rovnosti prostredníctvom zvýšenia mobility študentov a účastníkov vzdelávania a prispieť k zlepšeniu situácie v oblasti zamestnávania mladých ľudí. V tomto dokumente môžeme nájsť aj cieľ, ktorý si dáva za úlohu v oblasti vzdelania znížiť mieru predčasného ukončenia školskej dochádzky zo súčasných 15 % na 10 % a zároveň zvýšiť podiel obyvateľov vo veku 30–34 rokov, ktorí majú ukončené vysokoškolské vzdelanie z 31 % na minimálne 40 % v roku 2020.

1 SÚČASNÝ STAV VÝVOJA NA TRHU PRÁCE - DOPYT PO PRÁCI PODĽA STUPŇA DOSIAHNUTÉHO VZDELANIA

Pri analýze vývoja zamestnanosti podľa stupňa dosiahnutého vzdelania je potrebné si všetkých pracujúcich rozdeliť do jednotlivých stupňov. Presné definície stupňa kvalifikácie nie sú zaužívané, najčastejšie sa využívajú stupne kvalifikácie podľa ISCO². V podmienkach Slovenskej republiky sú tieto stupne upravené Zákonom z 22. mája 2008 o výchove a vzdelávaní (školský zákon) a o zmene a doplnení niektorých zákonov č. 245/2008 Z.z. §16. My sme si pre naše potreby rozdelili pracujúcich do troch kategórií podľa vzdelania spôsobom uvedeným v tabuľke č. 1.

Tabuľka č. 1 Zaradenie dosiahnutého vzdelania do jednotlivých stupňov vzdelania

Rozdelenie do vzdelanostných stupňov podľa dosiahnutého vzdelania		
		Dosiahnuté vzdelanie
Stupne vzdelania	Základné vzdelanie	- bez vzdelania
		- ukončená základná škola
		- ukončená učňovka
		- ukončená stredná škola bez maturity
	Stredné vzdelanie	- učňovka s maturitou
		- úplné stredné všeobecné vzdelanie
		- úplné stredné odborné vzdelanie
	Vysoké vzdelanie	- vyššie odborné vzdelanie
		- vysokoškolské vzdelanie I. - III. Stupňa

Zdroj: Vlastné spracovanie

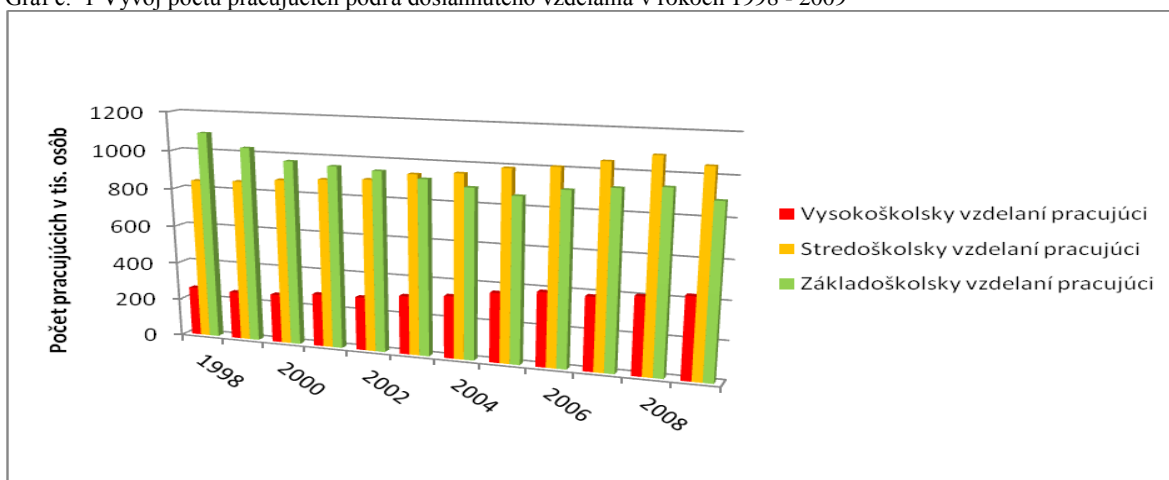
¹ Stratégia na zabezpečenie inteligentného, udržateľného a inkluzívneho rastu

² International Standard Classification of Occupations dostupné na:
< <http://www.ilo.org/public/english/bureau/stat/isco/press1.htm>>

Na grafe č. 1 môžeme vidieť, že pri zamestnaných so základným vzdelaním dochádza k postupnému poklesu. Medzi rokom 1998, kedy ich počet dosahoval hodnotu 1094,3 a rokom 2009 kedy bola táto hodnota 889,8. Rozdiel predstavoval 204,5 tisíc pracujúcich. Pokles by sme mohli spojiť popri rozvoji dopytu s poklesom ponuky práce, na trhu práce. Je však potrebné uviesť, že kategória bez vzdelania, ktorá je zahrnutá do stupňa základného vzdelania je takmer nulová.

Zamestnanosť obyvateľov so stredným vzdelaním sa vyznačuje veľmi miernym postupným nárastom v sledovanom období. V roku 1998 počet zamestnaných s dosiahnutým stredným vzdelaním dosahoval 844,1 tisíc obyvateľov a v roku 2009 to bolo 1048,5 tisíc. Za týmto nárastom, môžeme vidieť aj nárast ponuky práce so stredným vzdelaním a aj presun občanov so základným vzdelaním do kategórie so stredným.

Graf č. 1 Vývoj počtu pracujúcich podľa dosiahnutého vzdelania v rokoch 1998 - 2009



Zdroj: ŠÚSR, VZPS

Výrazný nárast v počte zamestnaných je v kategórii vysokého vzdelania. V roku 1998 dosahoval počet týchto zamestnaných 260,2 čo je o 167,3 tisíc pracujúcich menej ako v roku 2009 kedy dosahoval hodnotu 427,5 tisíc pracujúcich. Tento nárast je spôsobený najmä zvýšením dostupnosti vzdelania. Táto dostupnosť sa v posledných rokoch výrazne zvyšovala najmä pre vysokoškolské, ale aj pre úplne stredoškolské vzdelanie.

Výraznejší je nárast pri vysokoškolskom vzdelaní, ktoré ešte pred niekoľkými rokmi bolo dostupné len pre 10 až 15 percent populačných ročníkov maturantov a v súčasnosti je dostupné pre takmer každého druhého maturanta.

2 DISKUSIA - MODELOVANIE ZAMESTNANOSTI NA ZÁKLADE PRACUJÚCICH S VYSOKOŠKOLSKÝM VZDELANÍM NA ÚZEMÍ SR

Pri modelovaní sme vychádzali z teoretických poznatkov ekonomickej teórie a poznání jednotlivých ekonometrických modelov, ktoré sú využívané v Slovenskej republike. Konkrétne sme vychádzali z rovníc modelu vytvoreného pre potreby Cevavstat³. Pri konštrukcii rovníc tohto modelu zamestnanosti sa vychádzalo z inverznej produkčnej funkcie, v ktorej ako vysvetľovaná premenná na ľavej strane vystupuje počet zamestnaných

³ Centrum pre výskum a vývoj progresívnych matematicko-štatistických metód a informačno-komunikačných technológií pre spracovanie, analýzu a prezentáciu štatistických údajov

a na pravej strane ako vysvetľujúce premenné hrubý domáci produkt (HDP00), kapitál a technický pokrok (TP). Do rovnice bola zahrnutá aj priemerná reálna mzda (WREAL) vyjadrená ako podiel nominálnej mesačnej mzdy (WNOM) a indexu cien priemyselných výrobcov (PPI).

Našu základnú rovnicu na modelovanie dopytu po práci, ktorú budeme postupne upravovať podľa výsledkov, sme doplnili ešte na ľavej strane o produktivitu práce (PP) ako vysvetľujúcu premennú a kapitál sme nahradili tvorbou hrubého fixného kapitálu (THFK). Podľa poznatkov z ekonomickej teórie sme si stanovili nasledujúce predpoklady o jednotlivých znamienkach vysvetľujúcich premenných nasledovne:

- o hrubom domácom produkte predpokladáme, že s jeho zvyšovaním sa bude zvyšovať aj zamestnanosť, preto by mal mať kladné znamienko,
- priemerná reálna mzda, ktorú si vyjadríme ako podiel priemernej nominálnej mzdy a cenového indexu priemyselných výrobcov, by podľa ekonomickej teórie pri svojom raste mala spôsobovať pokles dopytu po práci, to znamená, že by mala mať záporné znamienko,
- tvorba hrubého fixného kapitálu by mala mať záporné znamienko, nakoľko je ale tvorba hrubého fixného kapitálu jednou zo zložiek hrubého domáceho produktu, nejde o jednoduchú závislosť, samostatne tento ukazovateľ spôsobuje znižovanie zamestnanosti ale sprostredkovane cez HDP ju naopak zvyšuje,
- produktivita práce, ktorú sme si vyjadrili ako podiel hrubého domáceho produktu v stálych cenách a celkového počtu pracujúcich by mala pôsobiť na zamestnanosť priaznivo, pretože pri jej kladnej zmene sa zvyšujú prostriedky zamestnávateľa, ktorý môže vytvoriť nové pracovné miesto, ktoré mu prinesie dodatočný zisk,
- technický pokrok by mal spôsobovať pokles celkového dopytu po práci, preto predpokladáme, že bude v rovnici vyjadrený so záporným znamienkom.

Základná rovnica, z ktorej budeme vychádzať pri modelovaní má teda nasledujúci tvar:

$$\log(L_VZPS) = \beta_0 + \beta_1 * \log(HDP00) + \beta_2 * \log(WREAL) + \beta_3 * \log(THFK) + \beta_4 * \log(PP) + \beta_5 * tp + ut \quad (1)$$

Dopyt po práci sme modelovali pomocou metodiky Error Correction Model. Ak dve premenné X_t a y_t sú kointegrované tak ich vzťah možno vyjadriť pomocou modelu korekcie chýb, pre ktorý sa používa označenie ECM. Tento mechanizmus má podobu Grangerovej vety o reprezentácii.

Model ECM má nasledujúci tvar:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_t + \lambda (y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (2)$$

Keďže $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1} = u_{t-1}$, potom:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_t + u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

Z uvedených vzťahov, môžeme vidieť, že premenná pri parametri λ je oneskorená hodnota chyby kointegrujúcej regresie. Model s korekčným členom má ako závislé premennú prvú diferenciu premennej y_t , nezávislou premennou je prvá diferencia premennej X_t a oneskorená hodnota chyby rovnováhy u_{t-1} . Predpokladáme, že $\lambda < 0$. Model hovorí, že zmena premennej y_t závisí od zmeny premennej X_t a od minulej chyby rovnováhy u_{t-1} . V prípade, že je táto

chyba nenulová, premenné X_t a y_t nie sú v rovnováhe. ECM model zahŕňa krátkodobé, ale aj dlhodobé vlastnosti, vzhľadom na to, že obsahuje zmeny nielen premenných, t.j. ΔX_t a Δy_t , ale aj ich úrovně X_{t-1} a y_{t-1} .

Vlastnosťou ECM je, že pri odhade jeho parametrov nevzniká problém už vyššie spomenutej falošnej regresie. Premenné X_t a y_t sú I(1), teda ΔX_t a Δy_t sú stacionárne. Vzhľadom na to, že X_t a y_t sú kointegrované, aj u_{t-1} je stacionárna premenná. Na odhad parametrov modelu ECM, môžeme potom použiť metódu najmenších štvorcov a na hodnotenie odhadov bežný t-test a F-test.

Premenná u_t nie je priamo pozorovateľnou premennou, to znamená, že pri odhade parametrov modelu (3) postupujeme nasledovne:

- 1) Pomocou metódy najmenších štvorcov odhadneme parametre β_0, β_1 kointegrujúcej rovnice a vypočítame reziduály $e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t$.
- 2) Do modelu $\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_t + u_{t-1} + \varepsilon_t$ namiesto u_{t-1} dosadíme reziduály e_{t-1} a odhadneme parametre α_0, α_1 a λ .

Model (2), (3), je najjednoduchšou formou ECM. Model môžeme zovšeobecniť tak, že v ňom budú vystupovať oneskorené premenné ΔX_{t-j} a Δy_{t-j} .

Následne model nadobudne tvar:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \lambda e_{t-1} + \gamma \Delta y_{t-1} + \dots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + \delta_0 \Delta X_t + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \delta_q \Delta X_{t-q} + \varepsilon_t \quad (4)$$

Na základe t-tesu alebo F-testu môžeme rozhodnúť koľko premenných v tvare oneskorených diferencií ΔX_{t-j} a Δy_{t-j} bude v modeli vystupovať, a či do modelu zahrnieme aj deterministický trend. Regresné rovnice, ktorých konštrukcia a špecifikácia je založená na princípe ECM, umožňuje vyjadriť vplyv určitého typu teoretického časového oneskorenia, o ktorom sa predpokladá, že determinuje vývoj modelovaného vzťahu, jednak odlišiť dlhodobý trend vo vývoji tohto vzťahu od krátkodobých odchýlok od daného trendu.

Na odhad rovníc a testovanie časových radov na ich integráciu a kointegráciu sme používali štatisticko-ekonomický softvér Eviews 6. Vychádzali sme zo štvrtročných časových radov za obdobie od prvého štvrtroku 1998 do štvrtého štvrtroku 2009. Tieto časové rady boli použité v sezónne neočistenom tvare. Rovnice sme odhadovali pomocou metódy OLS⁴ a snažili sme sa ich odhadnúť čo najlepšie. Niektoré rovnice sme preto prešpecifikovali tak, že sme vynechali štatisticky nevýznamné premenné alebo premenné, ktoré nespĺňali predpoklady o znamienkach.

Rovnicu pre počet pracujúcich s vysokým vzdelaním sme odhadli na základe vysvetľujúcich premenných, medzi ktoré sme zahrnuli HDP00, WREAL, THFK, TP. Zaviedli sme aj premennú, ktorá vyjadruje samotný podiel vysokoškolsky vzdelaného obyvateľstva na celkovom počte pracujúcich. O tejto premennej sme predpokladali, že bude mať kladné znamienko, pretože pri raste celkového počtu pracujúcich sa bude zvyšovať aj počet vysokoškolsky vzdelaných pracujúcich. Do rovnice odhadu sme zaviedli aj sezónne filtre SD2, SD3 a umelú premennú UP.

⁴ OLS - metóda najmenších štvorcov

Odhad rovnice č. 1 dlhodobého vzťahu bol nasledujúci:

$$\begin{aligned} \log(vs) &= 4.009881 + 0.436856 * \log(hdp00) + 1.040997 * \log(VS/L_VZPS) \\ &- 0.106104 * \log(wreal) - 0.002320 * tp + 0.028776 * up1 - 0.017695 \\ &* sd2 - 0.026165 * sd3 \end{aligned}$$

Z rovnice sme mohli vynechať vysvetľujúcu premennú THFK, aj keď spĺňala predpoklad záporného znamienka nebola štatisticky významná. Dopyt po vysokoškolsky vzdelaných pracovníkoch závisí od hodnoty HDP00. Pri raste HDP00 o jedno percento sa tento vplyv odrazí v raste dopytu po vysokoškolsky vzdelaných o 0,43 %. Z analýzy vyplýva, že rast podielu pracujúcich s vysokoškolským vzdelaním na celkovej ponuke práce o jedno percento, sa odrazí na raste dopytu po takto vzdelaných obyvateľoch o 1,04 %. Toto vysoké percento v modeli dopytu po práci pracujúcich s vysokým stupňom vzdelania by sme mohli považovať za znak „vysoko nenasýteného trhu“, kde sa dá úspešne umiestniť akákoľvek ponuka ako to vo svojej práci prezentuje Ing. Marek Radvanský⁵. Rast WREAL o jedno percento spôsobí v dlhodobom hľadisku pokles dopytu po vysokoškolsky vzdelaných pracovníkoch o 0,106%. Z analýzy môžeme vidieť, že rast technického pokroku v tejto rovnici vyvolá len veľmi malé zníženie počtu vysokoškolsky vzdelaných pracovníkov a to len o 0,002%. Z dlhodobého vzťahu sme si rovnako ako v predchádzajúcich rovniciach vytvorili rezíduá, ktoré sme otestovali na stacionaritu a následne aj ostatné časové rady. Po potvrdení stacionarity a teda kointegrovanosti časových radov sme mohli odhadnúť krátkodobý vzťah, ktorý má nasledujúci tvar rovnica č. 2:

$$\begin{aligned} d\log(vs) &= 0.004887 - 0.404060 * (\log(vs(-1)) - (4.009881 + 0.436856 \\ &* \log(hdp00(-1)) + 1.040997 * \log(vs/l_vzps(-1)) - 0.106104 \\ &* \log(wreal) - 0.002320 * tp(-1) + 0.028776 * up(-1) - 0.017695 \\ &* sd2(-1) - 0.026165 * sd3(-1))) + 0.029992 * d\log(hdp00) \\ &+ 0.559447 * d\log(vs/l_vzps) - 0.017709 * sd1 + 0.009381 * up1 \end{aligned}$$

Z krátkodobého vzťahu vidíme, že dopyt po vysokoškolsky vzdelaných pracujúcich je taktiež závislý od hrubého domáceho produktu. V prípade zvýšenia HDP00 o 1% je táto závislosť omnoho slabšia, dopyt vzrastie iba cca o 0,03%. Rast podielu vysokoškolsky vzdelaných pracujúcich na celkom počte pracujúcich je v krátkodobom vzťahu rovnako slabší, predstavuje iba 0,55% čo je o 0,49% menej ako pri dlhodobom vzťahu. Z tejto rovnice však bolo potrebné vynechať premenné priemerná reálna mzda a technický pokrok, ktoré v modeli ECM nespĺňali predpoklad záporného znamienka.

ZÁVER

Základná hypotéza, ktorú sme v tom to príspevku chceli preskúmať bolo, či naplnenie cieľa stratégie Európa 2020 je pre našu spoločnosť dosiahnuteľné. Z výsledkov modelovania dopytu po práci vysokoškolsky vzdelaného obyvateľstva je badateľný pretrvávajúci rast dopytu po tejto pracovnej sile. Je potreba zvyšovania počtu vysokoškolsky vzdelaných pracovníkov, pretože dopyt po týchto pracovníkoch sa javí ako nenasýtený. Bolo by však vhodné zvážiť, či tento dopyt je rovnako nenasýtený pre všetky zamerania vysokoškolského vzdelania. Za zváženie by však bolo vhodné aj či je tento cieľ žiaduci ak berieme do úvahy, že štúdium jedného študenta predstavuje značnú záťaž na verejne financie.

⁵ Makroekonomická prognóza vývoja Slovenskej ekonomiky so zameraním na vývoj dopytu po práci, dostupné na : <<http://www.expak.at/expak/img/uploads/expak1231.pdf>>

Použitá literatúra

1. EUROPEAN COMMISSION: A strategy for smart, sustainable and inclusive growth. In Communication from The Commission Europe 2020. Brussels: 2010 [elektronická verzia] Dostupné na:
<http://ec.europa.eu/commission_20102014/president/news/documents/pdf/20100303_1_en.pdf>
2. GARAJ, V. – ŠUJAN, I. 1980. Ekonometria. Bratislava : ALFA, 1980. 288 s. MDT 330.115(075.8)
3. HATRÁK, M. 2007. Ekonometria. Bratislava : IURA EDITION, spol. s r. o., 2007. 502 s. ISBN 987-80-8078-150-7.
4. HATRÁK, M. 1998. Error Correction Models and Cointegration Analysis in Applied Econometrics. In Central European journal for Operations Research and Economics. ISSN1210-0269, roč. 6, 1998, č. 3-4, s. 183-191.

Kontaktné údaje

Ing. Miroslava Dolinajcová
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 826
email: mdolinajcova@gmail.com

Kontaktné údaje

Ing. Darina Frandoferová
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 826
email: darina.frandoferova@gmail.com

Kontaktné údaje

Ing. Soňa Brlejšová
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 826
email: sona.brlejova@gmail.com

MODELOVANIE DOPADOV KLIMATICKEJ ZMENY NA SLOVENSKÚ EKONOMIKU¹

MODELING THE IMPACTS OF CLIMATE CHNAGE ON SLOVAK ECONOMY

Tomáš Domonkos, Ivan Lichner

Abstrakt

Klimatické zmeny predstavujú často diskutovanú tému súčasnosti. Názory odborníkov na túto problematiku sa často rozchádzajú. Jedná skupina tvrdí, že zmena klímy nie je taká vážna a v nasledujúcich dvoch storočiach, na ktoré sú analýzy realizované sa očakáva iba slabé a relatívne dobre kontrolovateľné vplyvy. Druhá skupina najčastejšie prezentuje scenáre hraničiace s ekonomickou a ekologickou katastrofou. Tieto analýzy sú vo väčšine prípadoch vykonávané na globálnej úrovni a málokedy vyhodnocujú vplyv klimatických zmien na národnej úrovni pre nejakú konkrétnu krajinu. Preto je hlavnou motiváciou predloženého článku na základe zovšeobecnej metodiky preskúmať vplyv zmeny klímy v podmienkach SR. Metodický základ vychádza z princípov modelu AD-DICE, ktorý je modifikáciou modelu DICE, pričom rozšírenie modelu spočíva v zahrnutí adaptácie ako rozhodovacej premennej.

Kľúčové slová: *klimatická zmena, DICE, dopady klimatickej zmeny, adaptácia*

Abstract

Climate change (CC) represents one of currently often discussed issues. Expert's opinions regarding the CC are often contradictory. One group of experts claims relatively small and easy to control impacts of CC over next two centuries, which is the scope of most of the analysis. On the other hand experts expect impacts with amplitude of ecological and economic catastrophe. Most of those analysis are focused on the impacts of CC on global scale in contrast to that impacts of CC are assessed on national level relatively seldom. Motivation of this paper is to on generalized methodology analyze the CC impacts on Slovakia. Applied methodology is based on AD-DICE model, which represents the modification of DICE model by including the adaptation as decision variable.

Keywords: *climate change, DICE, impacts of climate change, adaptation*

1 ÚVOD

V súčasnosti sa v odborných ako aj laických kruhoch venuje zvýšená pozornosť klimatickej zmene (KZ) a jej možným dopadom na svetovú ekonomiku. Vo všeobecnosti možno povedať, že problém klimatických zmien už nie je v súčasnosti vnímaný len ako možná budúca hrozba, skôr je považovaný za jeden z najväčších environmentálnych, sociálnych a ekonomických problémov. Avšak je nutné poznamenať, že napriek aktuálnosti uvedenej problematiky na svetovej ako aj Európskej úrovni sa jej v prostredí Slovenska až na niekoľko výnimiek nevenuje dostatočná pozornosť.

¹ Táto publikácia je súčasťou projektu VEGA - 2/0082/09 - Možnosti modelovania štrukturálnych zmien ekonomiky SR so zreteľom na integráciu do EMU.

Klíma sa v dôsledku emisií skleníkových plynov vyvolaných ľudskými aktivitami (ako napr. spaľovanie fosílnych palív alebo odlesňovanie) spolu s príspevom ďalších faktorov rapídne otepľuje. Nárast priemernej ročnej teploty vzduchu na území Slovenskej republiky za obdobie 1951-2009 je približne 1,4 °C, čo v porovnaní s priemerným nárastom ročnej globálnej teploty predstavuje relatívne dynamickejší vývoj.

S dopadmi KZ ako aj s faktormi spôsobujúcimi KZ sa spájajú dva dôležité pojmy definujúce možné vývoje správania sa ľudskej spoločnosti v súvislosti s nimi:

- *Adaptácia* predstavuje zmierňovanie dopadov klimatických zmien prostredníctvom prispôbenia sa správania jednotlivých agentov trhu, t. j. ochranu pred negatívnymi vplyvmi KZ a využívanie pozitívnych vplyvov vo svoj prospech.
- *Mitigácia* predstavuje zmierňovanie alebo elimináciu vplyvov spôsobujúcich klimatické zmeny.

Slovenská republika sa ratifikovaním Kjótskeho protokolu 31.05.2002 zaviazala splniť kvantitatívne redukčné záväzky emisie oxidu uhličitého a ďalších piatich skleníkových plynov v priebehu rokov 2008 až 2012. Tento záväzok predstavuje pokles emisií týchto plynov o 8% v porovnaní s hodnotami roku 1990, pričom Slovensko vzhľadom na relatívne vysokú úroveň v bázičkom roku spôsobenú odlišnou štruktúrou ekonomiky splní tento záväzok relatívne jednoducho bez potreby implementácie dodatočných opatrení, čo v súčasnosti predstavuje komparatívnu výhodu SR v medzinárodnom meradle avšak naďalej pretrvávajú potreba vytvorenia rámca pre definovanie budúcich politík. Súčasne Slovenská republika momentálne postráda národnú stratégiu adaptácie sa na klimatickú zmenu. Podľa Európskej agentúry životného prostredia (EEA²) na Slovensku v súčasnosti prebieha projekt ADA, „Dôsledky klimatickej zmeny a možné adaptačné opatrenia v jednotlivých sektoroch na Slovensku“, ktorého výstupy by mali slúžiť na prípravu komplexnej adaptačnej stratégie SR. Uvedené nedostatočné zameranie sa vedeckých výstupov na problematiku KZ do budúcnosti prinesie potrebu zvýšeného výskumného úsilia o vytvorenie potrebných projekcií vývoja v snahe o prispôbenie sa a boj s dopadmi KZ.

Cieľom toho článku je modelovať možné dopady klimatickej zmeny na hospodárstvo Slovenskej republiky prostredníctvom aplikácie modifikovania metodiky prezentovanej autorom de Bruin, *et al.* (2007), ktorý modifikoval model DICE navrhnutý Nordhausom v roku 1994 tak, aby adaptácia predstavovala samostatnú rozhodovaciu premennú.

2 SÚČASNÝ STAV RIEŠENIA PROBLEMATIKY

Na vyhodnocovanie politík v oblasti vplyvov zmien klímy na hospodárske prostredie sa veľmi často používajú tzv. integrované modely hodnotenia (IAM – Integrated Assessment Models) (Weyant *et al.*, 1996). Tieto modely predstavujú (teoretický) rámec, ktorý je založený na interdisciplinárnom prístupe riešenia. Tento typ modelov sa obvykle používa na kvantifikáciu dopadov zmeny klímy na životné prostredie. Jeden z najčastejšie používaných modelov je tzv. AD-DICE (de Bruin *et al.* 2007), ktorý využíva základ pôvodného IAM a spojuje sociálno-ekonomické rozmery s ostatnými aspektmi klimatickej zmeny za účelom posúdenia možností politík reagujúcich na zmenu klímy. AD-DICE je modifikáciou pôvodného DICE modelu, vyvinutého Nordhausom (1994), zahŕňajúci ako rozhodovaciu premennú adaptačné opatrenia. V rámci modelu DICE sa maximalizuje užitočnosť (blahobyť) všetkých agentov a predpokladá sa, že účastníci trhu sa budú správať optimálne (de Bruin, *et al.* 2007). Pôvodný model DICE predpokladá, že adaptácia je na optimálnej úrovni a je zahrnutá do funkcie škôd tzv. damage function. V AD-DICE však adaptácia predstavuje samostatnú

² European Environment Agency

rozhodovacia premenná, ktorá umožňuje analyzovať vzťah medzi adaptáciou a mitigáciou a ich efekt na celkové hospodárstvo.

Aj ďalší model skúmajúci klimatické zmeny - tzv. RICE (Regional Integrated Model of Climate and the Economy) - bol modifikovaný tak, aby zahŕňal adaptáciu ako rozhodovacia premenná. Pôvodný model RICE rozdeľuje svet na niekoľko regiónov a umožňuje analyzovať rôzne národné stratégie pre zmenu klímy (Nordhaus, 1996). Model RICE predstavuje z pohľadu metodológie všeobecný rovnovážny dynamický model. AD-RICE oproti pôvodnému RICE modelu zahŕňa adaptáciu ako rozhodovacia premenná. Model obsahuje nákladovú funkciu, ktorá umožňuje skúmať vplyv adaptácie v rôznych teritoriálnych oblastiach. Predpokladá sa synergický efekt adaptácie a mitigácie.

Regionálne aspekty klimatických zmien, sú zachytené aj v modeli FUND2.9², ktorý je založený na pôvodnom modeli FUND definovanom pre 16 regiónov na obdobie rokov 1950 - 2300. Tento model uvažuje s nasledujúcimi problémami vyplývajúcimi z klimatických zmien: zvýšenie hladiny vody vo svetových oceánoch, poľnohospodárstvo, zmena intenzity vetra, riečne povodne, stres vyplývajúci z otepľovania resp. z ochladzovania, malária a strata biodiverzity. Škody sú vyjadrené v peňažnej hodnote. Model FUND2.9 poukazuje na problém že príliš veľa mitigácie môže mať v konečnom dôsledku opačný efekt a škody môžu byť vyššie a preto je potrebná kombinácia ako mitigačných, tak aj adaptačných opatrení (de Bruin, *et al.* 2007).

Jeden z najkomplexnejších prístupov na skúmanie vplyvu zmien klímy na hospodársko-sociálne prostredie je model IMAGE3. Tento model vychádza z princípov integrovaných modelov hodnotenia všeobecnej rovnováhy. Zahŕňa 17 rôznych regiónov a tri vzájomne previazaných podsystémy, ktorými sú: Energetika a priemysel (EIS Energy-Industry System), suchozemské prostredia (TES - The Terrestrial Environment System) a atmosférický a oceánsky systém (AOS - The Atmospheric Ocean System). Model poskytuje informácie o vplyve klimatických zmien z dlhodobého pohľadu a dlhodobé projekcie (Alcamo, *et al.* 1998).

3 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ

Model AD-DICE predstavuje modifikáciu pôvodného modelu DICE od Nordhaus (1994). Model DICE vychádza z princípov modelov rastu, ale súčasne obsahuje aj geofyzikálne funkcie. Očakávané optimálne realizovanie adaptácie je zahrnuté do tzv. funkcie škôd (damage function). De Bruin, *et al.* (2007) modifikovali Nordhausov DICE model na model, ktorý nazvali Adaptácia v DICE (Adaptation in DICE) tak, že adaptácia je vyjadrená ako rozhodovacia premenná. Kalibrácia modelu vychádza z v literatúre všeobecne uvádzaných očakávaných prínosov z realizácie adaptácie, pričom ak je adaptácia optimálna, tak výsledky AD-DICE sú identické ako v prípade modelu DICE. Pôvodná funkcia škôd je v modeli DICE definovaná nasledovne:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \alpha_1 TE_t + \alpha_2 TE_t^2$$

kde D_t predstavuje čisté škody spôsobené zmenou teploty, Y_t je celková produkcia a TE_t predstavuje zmenu teploty v čase oproti základnému roku (v našom modeli je ako referenčný uvažovaný rok 2005). V modeli sa taktiež predpokladá, že celková škoda je súčtom reziduálnych škôd a nákladov na ochranu pred dopadmi KZ, čo možno formalizovane zapísať ako:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{RD_t(GD_t, Y_t)}{Y_t} + \frac{PC_t(P_t)}{Y_t}$$

kde RD_t sú reziduálne škody, PC_t sú náklady na ochranu pred negatívnymi dôsledkami KZ a P_t predstavuje úroveň ochrany. Ako reziduálne škody, tak aj náklady na ochranu sú závislé na úrovni ochrany avšak sú navzájom nezávislé. Toto zabezpečuje, že sú rozhodnutia o mitigácii a adaptácii separované. Funkcia hrubých škôd GD_t je v AD-DICE potom definovaná takto:

$$\frac{GD_t}{Y_t} = \alpha_1 TE_t + \alpha_2 TE_t^{\alpha_3}; \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 1$$

tento tvar funkcie je relatívne často používaný v integrovaných modeloch.

Koeficient je najčastejšie z intervalu $(0,1)$. Funkcia reziduálnych nákladov je nasledovná:

$$RD_t = GD_t(1 - P_t); 0 \leq P_t \leq 1$$

hlavná výhoda aplikovaného tvaru funkcie je v relatívne intuitívnej interpretácii P_t . Ak je P_t blízke nule, znamená to, že sa nerealizujú adaptačné opatrenia – žiadna časť hrubých škôd nie je zmiernená ochrannými opatreniami na adaptáciu. Ak je P_t blízke jednej, potom sú všetky škody spôsobené klimatickými zmenami eliminované ochrannými adaptačnými opatreniami. Úroveň ochrany udáva časť, ktorou sú hrubé škody redukované.

$$P_t = \frac{GD_t - RD_t}{GD_t}$$

Náklady na adaptáciu sú vyjadrené ako funkcia intenzity adaptácie. De Bruin, *et al.* (2007) predpokladajú, že táto funkcia je rastúca, pričom sa najprv realizujú lacnejšie, ale efektívne opatrenia a neskôr drahšie a relatívne menej efektívne opatrenia, potom:

$$\frac{\partial PC_t}{\partial P_t} > 0; \frac{\partial^2 PC_t}{\partial^2 P_t} > 0$$

Tomuto kritériu vyhovuje viacej funkcií, de Bruin, *et al.* (2007) odporúčajú aplikáciu nasledovných dvoch alternatívnych tvarov:

$$\gamma_1 > 0$$

$$\frac{PC_t}{Y_t} = \gamma_1 P_t^{\gamma_2}, \text{ kde } \gamma_2 > 1$$

resp.,

$$\gamma_1 > 0$$

$$\frac{PC_t}{Y_t} = \gamma_1 \left(\frac{1}{1 - P_t} \right)^{\gamma_2}, \text{ kde } \gamma_2 > 1$$

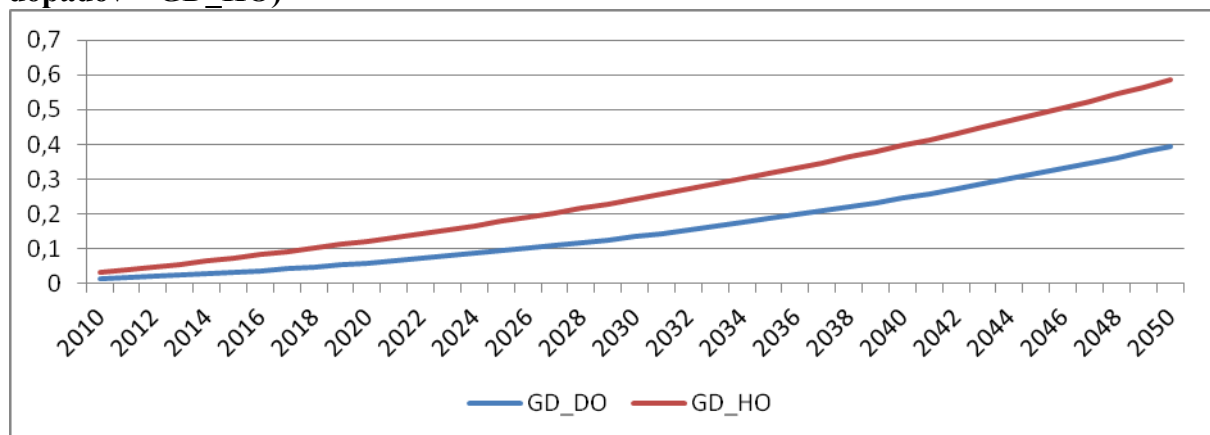
Ďalej predpokladáme použitie prvého tvaru funkcie nákladov na adaptáciu. Modifikácia modelu spočíva v tom, že sa neodhadujú náklady na základe intenzity ochoty adaptovať sa, ale pomocou odhadnutých nákladov potrebných na adaptáciu v SR a inverznej funkcie nákladov na adaptáciu sa vyráta ochota adaptovať sa, ktorá potom ďalej vstupuje do modelu. Inak povedané, na základe nákladov na adaptáciu odhadnutých odborníkmi za hlavné sektory SR, je možné odhadnúť aký bude mať vplyv zmena klímy na celkovú výkonnosť národného hospodárstva SR.

4 DISKUSIA (MODELOVÉ VÝSLEDKY)

Aplikovaný model bol založený na niekoľkých základných predpokladoch, ktoré následne vstupovali do vyššie teoreticky popísaného modelu ako exogénne premenné. Jedným zo vstupných predpokladov modelu bola prognóza vývoja rastu HDP v období rokov 2010 – 2050, ktorá bola výsledkom ekonometrického modelu SAV. Pričom priemerná hodnota rastu HDP v referenčnom období dosiahla úroveň 3,20%, s klesajúcou tendenciou po roku 2020. Najprv bola aplikovaná kalibrácia na základe pôvodného modelu de Bruin, *et al.* (2007), ktorá vychádza z predpokladu, že ak sa nerealizujú adaptačné opatrenia, tak výsledky modelu sú takmer identické s výsledkami modelu DICE od Norshausa (2000). Nakoľko však pôvodná kalibrácia bola vykonaná pre „celý svet“ bolo potrebné pristúpiť k jej modifikácii, nakoľko Slovensko je malá ekonomika s relatívne zastaranou infraštruktúrou a preto sa očakáva, že zmena klímy vyvolá intenzívnejšie škody ako sa predpokladá globálne.

Prostredníctvom ekonometrického modelu SAV bol najprv naprognózovaný budúci vývoj potenciálneho HDP, ktorý nezohľadňoval vplyvy klimatickej zmeny a tento bol následne využitý ako bázičný vstupný údaj do modelu, ako aj pre komparáciu v ďalších analýzach. Modelové výsledky naznačujú, že v prípade nerealizácie akýchkoľvek adaptačných a/alebo mitigačných opatrení by v priebehu najbližších desaťročí došlo k značnému spomaleniu hospodárskej dynamiky Slovenskej ekonomiky.

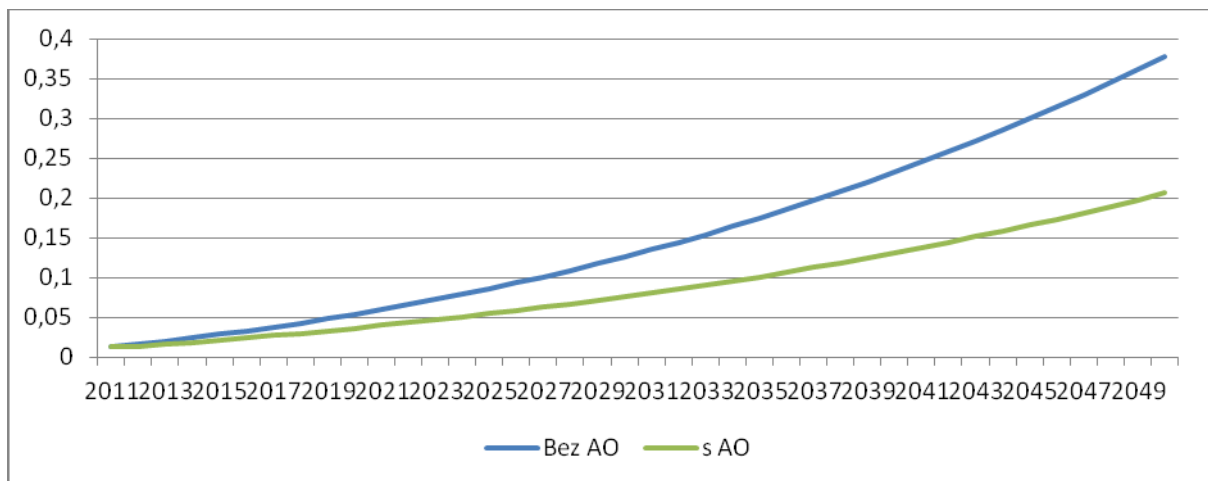
Obr. 1 Celkové škody spôsobené klimatickými zmenami (zvýšením teploty) ako percento HDP, (dolný odhad klimatických dopadov – GD_DO, horný odhad klimatických dopadov – GD_HO)



Pri pôvodnej kalibrácii modelu s „celosvetovými“ hodnotami parametrov výsledky ukázali, že v roku 2050 by bez realizácie opatrení došlo k poklesu rastu HDP o približne 0,38 %. Naproti tomu keď bola aplikovaná modifikovaná kalibrácia parametrov, tak aby vernejšie reflektovala špecifiká Slovenského hospodárstva boli dopady klimatickej zmeny v priebehu celého prognózovaného obdobia vyššie ako tomu bol v prípade pôvodnej kalibrácie a v horizonte prognózy dosiahli úroveň takmer 0,56 % prepadu ročného rastu HDP.

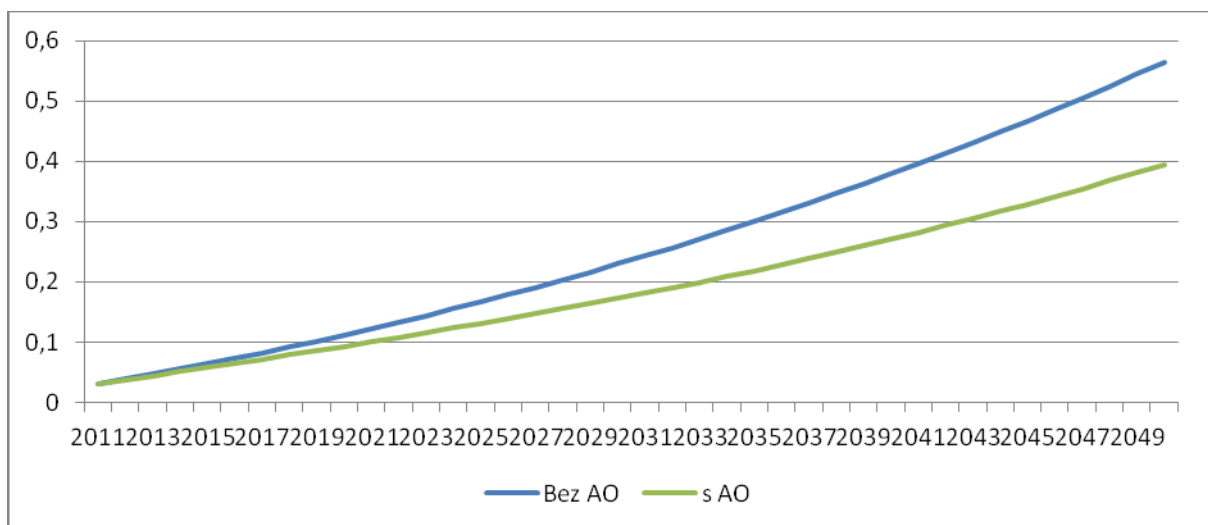
Modelové výsledky ukazujú, že s postupom času sa vplyv klimatickej zmeny začne negatívne prejavovať na výkonnosti hospodárstva Slovenka a v snahe o minimalizáciu týchto dopadov bude potrebné sa zaoberať možnosťami ich tlmenia. Celosvetovo zaužívanou praxou je tvorba národných adaptačných stratégií boja s dopadmi klimatickej zmeny.

Obr. 2 Škody spôsobené klimatickými zmenami (zvýšením teploty) ako percento HDP, (adaptačne opatrenia - ďalej AO, dolný odhad – DO, horný odhad – HO) – dolný odhad dopadov klimatických zmien



Po zavedení predpokladu o realizácii adaptačných opatrení došlo k zmierneniu dopadov klimatickej zmeny na hospodársku dynamiku. Z vyššie nachádzajúceho grafu je možné si všimnúť, že realizáciou adaptačných opatrení sa dopady klimatickej zmeny zmierňujú avšak nedochádza k ich úplnej eliminácii. V roku 2050 by v prípade pôvodnej kalibrácie modelu a použitia adaptačných opatrení realizovaných, by došlo k eliminácii až 45,4% poklesu HDP a jeho rast by bol nižší len o 0,21%.

Obr. 3 Škody spôsobené klimatickými zmenami (zvýšením teploty) ako percento HDP, (AO, DO, HO) – horný odhad



V prípade modelovania efektívnosti adaptačných oparení s modifikovanou kalibráciou výsledky naznačili, že by sa ich účinnosť bola relatívne nižšia, čo môže byť dôsledkom nižšej rozvinutosti slovenskej infraštruktúry a produktivity práce. Modelové výsledky pri realizácii adaptačných opatrení v horizonte prognózy priniesli zníženie dopadov klimatickej zmeny o 30,04%, čo predstavuje pokles rastu HDP 0,39% oproti pôvodným 0,56%.

5 ZÁVER

Cieľom práce bolo ukázať akým spôsobom klimatická zmena ovplyvní hospodársky vývoj na Slovensku. Pre splnenie uvedeného cieľa bol modifikovaný „celosvetový“ model AD-DICE, tak aby vernejšie prognózoval možné dopady KZ. Modelové výsledky pôvodného ako aj

modifikovaného modelu naznačujú, že v budúcnosti je možné očakávať pomerne významné dopady KZ a že hospodárska politika sa bude okrem ďalších výziev zaoberať aj bojom s negatívnymi vplyvmi KZ. Zároveň však je možné konštatovať, že realizáciu adaptačných opatrení sa vplyvy KZ dajú aspoň čiastočne eliminovať. V predloženej práci sme skúmali dva varianty intenzity dopadov klimatických zmien bez adaptačných opatrení a následne sme prepočítali zmiernenie dopadov po zavedení adaptačných opatrení. Prvá alternatíva bola na základe kalibrácie de Bruin *et al.* (2007), na základe ktorej môžeme v roku 2050 očakávať škody spôsobené na úrovni asi 0,4 % HDP. Pre druhú variantu, ktorá vychádza z hypotézy, že nakoľko je infraštruktúra na Slovensko relatívne zastaralá, zmena klímy bude spôsobovať vyššie škody skoro na úrovni 0,6 % HDP v roku 2050. Efekt adaptačných opatrení sa prejavil pre oba prípady približne na rovnakej úrovni v absolútnom vyjadrení. Nakoľko hraničný sklon k užitočnosti z adaptačných opatrení je klesajúci (najprv sa realizujú lacné ale efektívne opatrenia, neskôr drahšie ale menej efektívne) otvorené ostáva otázka koľko vynaložiť na adaptačné opatrenia, aby vynaložené prostriedky neprevyšovali náklady. Čo sa týka investícií do adaptačných a mitigačných opatrení, môžeme vysloviť záver že samotná mitigácia nie je postačujúca a najlepší efekt sa dosiahne ak sa nastaví optimálna kombinácia intenzity adaptačných a mitigačných opatrení.

Použitá literatúra

1. ALCAMO, J., LEEMANS, R., a KREILEMAN, E., 1998. Global change scenarios of the 21st century: Results from the IMAGE 2.1 model. In: Pergamon and Elsevier Science, London.
2. DOWLATABADI, H., 1995. Integrated assessment models of climate change. In: Energy Policy, 23: 289-296.
3. DE BRUIN, K.C., DELLINK, R.B., TOL, R.S.J. 2007. AD-DICE: an implementation of adaptation in the DICE model. In: Working Paper FNU-126
4. IPCC, 2001. IPCC Third Assessment Report - Climate Change 2001. Retrieved from <http://www.ipcc.ch/pub/online.htm> on May 1, 2011.
5. NORDHAUS, W.D. 1994. Managing the Global Commons: The Economics of the Greenhouse Effect. In: MIT Press, Cambridge, MA.
6. NORDHAUS, W.D., BOYER, J. 2000. Warming the World: Economic Models of Global Warming. MIT Press, Cambridge, MA.
7. Stanovisko Európskeho hospodárskeho a sociálneho výboru na tému Biela kniha „Adaptácia na zmenu klímy: Európsky rámec opatrení“ [KOM(2009) 147 v konečnom znení]
8. TOL, R. 2004. The double trade-off between Adaptation and mitigation for sea level rise: an Application of FUND. In: Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change, 2004. s.741-753.
9. WEYANT, J., DAVIDSON, O., DOWLATABADI, H., EDMONDS, J., GRUBB, M., PARSON, E., RICHEL, R., ROTMANS, J., SHUKLA, P., TOL, R., CLINE, W., a FANKHAUSER, S., 1996. Integrated assessment of climate change: an overview and comparison of approaches and results. In: Bruce, J., Lee, H., and Haites, E., (eds). Climate change 1995: Economic and Social Dimensions of Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge.

Kontaktné údaje

Ing. Tomáš Domonkos, PhD.

Ekonomický ústav, Slovenská akadémia vied

Šancová 56
811 05 Bratislava
Tel: (421 2) 52 498 307
e-mail: tomas.domonkos@savba.sk

Ing. Ivan Lichner
Ekonomický ústav, Slovenská akadémia vied
Šancová 56
811 05 Bratislava
Tel: (421 2) 52 498 307
e-mail: ivan.lichner@savba.sk

MODELY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ V SÍŤOVÉM REVENUE MANAGEMENTU

LINEAR PROGRAMMING MODELS IN NETWORK REVENUE MANAGEMENT

Petr Fiala

Abstrakt

Obecný problém revenue managementu se zabývá tím, jak by měly společnosti navrhnout mechanismus prodeje, aby maximalizovaly očekávané příjmy. Modely síťového revenue managementu se snaží maximalizovat příjmy, jestliže zákazníci kupují produkty z více zdrojů. Takové problémy nemohou být řešeny přesně pro většinu sítí reálné velikosti. Řešení jsou založena na aproximacích různého typu. V příspěvku jsou analyzovány postupy založené na modelech lineárního programování. Model DLP (Deterministic Linear Programming) je založen na předpokladu, že poptávka je deterministická a statická. Modelování chování zákazníků získává rostoucí pozornost v oblasti revenue managementu. Byl zkoumán modelovací přístup CDLP (Choice-based Deterministic Linear Programming) pro chování strategického zákazníka s diskretní volbou založený na deterministickém lineárním programování.

Klíčová slova: *revenue management, síťové problémy, lineární programování, modely diskretní volby*

Abstract

The general revenue management problem is about how companies should design their selling mechanisms in order to maximize expected revenue. Network revenue management models attempt to maximize revenue when customers buy products of multiple resources. The problems cannot be solved exactly for most networks of realistic size. Solutions are based on approximations of various types. Approaches based on linear programming models are analyzed in the paper. The DLP (Deterministic Linear Programming) model is based on an assumption that demand is deterministic and static. Customer behavior modeling has been gaining increasing attention in the revenue management. A modeling approach CDLP (Choice-based Deterministic Linear Programming) for strategic customer behavior with discrete choice based on deterministic linear programming was investigated.

Key words: *revenue management, network problems, linear programming, discrete choice models*

1 ÚVOD

Obecný problém revenue managementu (RM) se zabývá tím, jak by měly společnosti navrhnout mechanismus prodeje, aby maximalizovaly očekávané příjmy. RM je umění a věda predikce zákaznické poptávky v reálném čase a optimalizace ceny a dostupnosti

produktů vzhledem k poptávce. RM se týká tří základních kategorií rozhodování v oblasti managementu poptávky:

- cena,
- množství,
- strukturální rozhodnutí.

RM zaznamenal v posledních letech obrovský úspěch, zejména v oblasti aerolinií, hotelů a půjčoven aut. V současnosti stále větší počet sektorů využívá podobných konceptů. To, co je nové kolem RM, nejsou rozhodování v oblasti managementu poptávky sama o sobě, ale spíše způsob, jak jsou tato rozhodování uskutečněna. Skutečná inovace RM spočívá v metodách rozhodování.

Modely síťového revenue managementu se snaží maximalizovat příjmy, jestliže zákazníci kupují produkty z více zdrojů. Vazby mezi zdroji jsou v tomto případě vytvářeny poptávkou zákazníků. Vzájemné vazby mezi zdroji, označované jako síťové efekty, vytvářejí složitost řešení tohoto problému. Takové problémy nemohou být řešeny přesně pro většinu sítí reálné velikosti. Řešení jsou založena na aproximacích různého typu. V příspěvku jsou analyzovány postupy založené na modelech lineárního programování.

Model DLP (Deterministic Linear Programming) je založen na předpokladu, že poptávka je deterministická a statická. Modelování chování zákazníků získává rostoucí pozornost v oblasti revenue managementu. Byl zkoumán modelovací přístup CDLP (Choice-based Deterministic Linear Programming) pro chování strategického zákazníka s diskretním volbou založený na deterministickém lineárním programování.

2 PROBLÉM SÍŤOVÉHO REVENUE MANAGEMENTU

Revenue management s více zdroji je označován jako síťový revenue management. Modely síťového revenue managementu se snaží maximalizovat příjem v situacích, kdy zákazníci kupují produkty vytvářené z více zdrojů. Vazby mezi zdroji jsou v tomto případě vytvářeny poptávkou zákazníků. Vzájemné vazby mezi zdroji, označované jako síťové efekty, vytvářejí složitost řešení tohoto problému. Taková třída problémů vzniká v aerolinkách, hotelech, železniční dopravě atd. V případě aerolinek, spočívá problém v řízení kapacit soustavy navazujících letů v síti, tzv. síť typu hub-and-spoke. V případě hotelů spočívá problém v řízení kapacit pokojů v následných dnech, jestliže zákazníci mají různě dlouhé pobyty.

Problém síťového revenue managementu může být formulován jako problém stochastického dynamického programování, jehož optimální řešení je výpočetně nezvládnutelné. Klasickou technikou pro zvládnutí tohoto problému bylo použití deterministického lineárního programování pro síťový kapacitní problém. Metoda deterministického lineárního programování (DLP) je značně populární v praxi v řadě průmyslových aplikací. Tato metoda je však založena na chybných předpokladech, že poptávka je deterministická a statická. Počáteční úspěch metody DLP vyvolal však významný výzkum možných reformulací a rozšíření. Významným omezením aplikovatelnosti této metody je rovněž předpoklad nezávislosti poptávky. Výzkum se zaměřil na zahrnutí zákaznickova výběru do těchto modelů, což zvýšilo jejich složitost. Tento vývoj ovlivňuje současné úsilí o navržení výkonných praktických heuristik, které mohou řešit problémy praktických rozsahů.

Základní model problému síťového revenue managementu může být formulován následovně (viz Talluri, van Ryzin, 2004b): Síť má m zdrojů, které mohou být použity pro vytvoření n produktů. Definujme incidenční matici $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, kde

$a_{ij} = 1$, jestliže zdroj i je použit pro produkt j ,

$a_{ij} = 0$, jinak.

Sloupec j matice A , označený a_j , je incidenčním vektorem pro produkt j . Značení $i \in a_j$ znamená, že zdroj i je použit pro produkt j .

Stav sítě je popsán vektorem $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, zachycujícím kapacity zdrojů. Jestliže je prodán produkt j , potom se stav sítě změní na $x - a_j$.

Čas je diskrétní, existuje T period a index t označuje průběžný čas, $t = 1, 2, \dots, T$. Předpokládá se, že v každé periodě t může přijít nejvýše jeden požadavek na produkt.

Poptávka v časové periodě t je modelována jako realizace náhodného vektoru $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$. Jestliže $r_j(t) = r_j > 0$, znamená to, že vznikla poptávka po produktu j a odpovídající příjem je r_j . Jestliže $r_j(t) = 0$, znamená to, že nevznikla žádná poptávka po produktu j . Realizace $r(t) = 0$ (všechny složky vektoru jsou rovny nule) znamená, že není poptávka po žádném produktu v čase t . Předpoklad, že může přijít nejvýše jeden požadavek v každé časové periodě, znamená, že nejvýše jedna složka vektoru $r(t)$ může být kladná. O posloupnosti $r(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, se předpokládá, že je nezávislá se známými společnými rozděleními v každé časové periodě t . Jestliže jsou příjmy spojené s produktem j pevné, označíme je r_j a vektor příjmů $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Pro daný průběžný čas t , průběžné zbývající kapacity x a průběžný požadavek $r(t)$ existuje rozhodnutí akceptovat nebo neakceptovat průběžný požadavek. Definujme rozhodovací vektor $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, kde

$u_j(t) = 1$, jestliže je požadavek na produkt j v čase t akceptován,

$u_j(t) = 0$, jinak.

Složky rozhodovacího vektoru $u(t)$ jsou funkcemi složek vektoru zbývajících kapacit x a složek vektoru příjmů r , $u(t) = u(t, x, r)$. Rozhodovací vektor $u(t)$ je vymezen množinou

$$U(x) = \{u \in \{0, 1\}^n, Au \leq x\}.$$

Maximum očekávaného příjmu, při dané zbývající kapacitě x v časové periodě t , je označeno $V_t(x)$. Potom $V_t(x)$ musí splňovat Bellmanovu rovnici

$$V_t(x) = E \left[\max_{u \in U(x)} \{r(t)^T u(t, x, r) + V_{t+1}(x - Au)\} \right] \quad (1)$$

s okrajovou podmínkou

$$V_{T+1}(x) = 0, \forall x.$$

Rozhodnutí u^* je optimální právě tehdy, když splňuje podmínky:

$u_j(t, x, r_j) = 1$, jestliže $r_j \geq V_{t+1}(x) - V_{t+1}(x - a_j)$, $a_j \leq x$,

$u_j(t, x, r_j) = 0$, jinak.

To odráží intuitivní názor, že příjem r_j za produkt j je akceptován jedině tehdy, když převyšuje náklady alternativních příležitostí snížení kapacit zdrojů, požadovaných pro splnění tohoto požadavku.

3 MODEL DLP

Jeden z přístupů je použití zjednodušeného síťového modelu například ve tvaru statického problému matematického programování. Uvedeme model deterministického lineárního programování (DLP_ Deterministic Linear Programming).

Model DLP používá aproximaci

$$V_t^{LP}(\mathbf{x}) = \max \mathbf{r}^T \mathbf{y}$$

při omezeních (2)

$$A\mathbf{y} \leq \mathbf{x},$$

$$0 \leq \mathbf{y} \leq E[\mathbf{D}],$$

kde $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ je vektor poptávky během časových period $t, t+1, \dots, T$, po produktu $j, j = 1, 2, \dots, n$, a $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ je vektor příjmů spojených s n produkty. Rozhodovací vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ reprezentuje alokaci kapacit pro každý z n produktů. Aproximace pracuje s poptávkou jako by byla deterministická a rovnala se její střední hodnotě $E[\mathbf{D}]$.

Optimální hodnoty duálních proměnných π^{LP} , spojených s omezeními $A\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, jsou použity jako nabídkové ceny. Metoda DLP byla mezi prvními metodami, použitými pro analýzu síťového problému RM (viz Talluri a van Ryzin, 2004b). Hlavní výhodou metody DLP je její velká výpočetní efektivnost. Vzhledem ke své jednoduchosti a rychlosti je populární v praxi. Slabou stránkou aproximace pomocí DLP metody je skutečnost, že pracuje pouze se střední hodnotou poptávky a nebere v úvahu další informace o rozdělení poptávky. Výkonnost postupu DLP závisí na typu sítě, na způsobu příchodu požadavků a na frekvenci re-optimizace.

4 MODEL DISKRÉTNÍ VOLBY CHOVÁNÍ ZÁKAZNÍKŮ

Potenciální zákazníci nepřicházejí s předem jasnou myšlenkou, který produkt si koupí. Oni znají jen určité vlastnosti, které by produkt měl mít, a srovnávají nejdříve několik variant, které mají požadované vlastnosti. Teprve potom se rozhodují, zda produkt koupit či nekoupit. Například zákazník má zájem o let z místa A do místa B, ale nejdříve porovnává několik možností s podobnými časy odletů, lišícími se leteckými společnostmi, které lety poskytují. Touto otázkou zákaznické volby se jako první zabývali Talluri a van Ryzin [8], kteří zkoumali problém revenue managementu s modelem diskrétní volby chování zákazníků.

Předpokládejme, že máme n produktů, každý s očekávaným příjmem $r_j, j = 1, 2, \dots, n$. V každém okamžiku nabízí firma podmnožinu těchto produktů. Vzhledem k podmnožině nabízených produktů si zákazník vybírá nějakou možnost (včetně možnosti nekoupit nic) podle nějakého modelu diskrétní volby. Gallego et al., 2004, van Ryzin a Liu, 2008, rozšířili tuto analýzu na síťové modely. Každý produkt se skládá z několika zdrojů. Dynamický program nalezení optimálních nabídkových podmnožin je výpočetně neuvěřitelně složitý. Autoři používají deterministickou aproximaci s interpretací pravděpodobnosti koupě jako deterministického prodeje pevného množství produktu (menšího než jednotka). Při této interpretaci může být daný problém revenue managementu formulován jako lineární program. Dá se ukázat, že řešení je asymptoticky optimální s rostoucí poptávkou a kapacitou. Je možno navrhnout implementační heuristiku, která transformuje statické řešení LP problému na dynamickou řídicí strategii.

5 MODEL CDLP

Model CDLP (Choice-based Deterministic Linear Programming) navrhli Gallego et al., 2004. Na základě této práce van Ryzin a Liu, 2008, prezentovali rozšíření standardního modelu DLP zahrnující chování s diskretní volbou.

Pravděpodobnost, že zákazník vybere produkt j z množiny nabízených produktů S (podmíněná příchodem zákazníka), je označena $P_j(S)$. Čas je brán diskretní a rozdělený do T časových period, které jsou dostatečně malé tak, že přijde jeden zákazník s pravděpodobností λ a žádný s pravděpodobností $1-\lambda$. Síť má m zdrojů, které jsou používány na vytváření n produktů. Je použita incidenční matice $A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, zavedená v problémech síťového revenue managementu. Předpokládá se, že poptávka je známa a rovna očekávané hodnotě. Problém se redukuje na alokační problém s rozhodováním kolik časových period $t(S)$ je nabízena určitá podmnožina produktů S . Očekávaný celkový příjem z nabízené podmnožiny S je označen jako

$$R(S) = \sum_{j \in S} P_j(S) r_j$$

a očekávaná celková spotřeba zdroje i z nabízené podmnožiny S je označena jako

$$Q_i(S) = \sum_{j \in S} P_j(S) a_{ij}, \quad \forall i,$$

Potom celý model CDLP (3) je formulován jako

$$V^{CDLP} = \max \sum_{S \subseteq N} \lambda R(S) t(S) \tag{3}$$

$$\sum_{S \subseteq N} \lambda A P(S) t(S) \leq x,$$

$$\sum_{S \subseteq N} t(S) \leq T$$

$$t(S) \geq 0, \quad \forall S \subseteq N$$

Cílem je maximalizovat celkový příjem při omezeních, že spotřeba je menší nebo rovna kapacitě a celkový čas nabízení množin produktu je menší nebo roven celkovému časovému horizontu. Rozhodovací proměnné $t(S)$ jsou celkové časy, kdy jsou nabízeny podmnožiny produktů S .

Jsou dvě základní možnosti využití řešení CDLP. První možností je přímé využití časových proměnných $t^*(S)$ (Gallego et al., 2004). Pro určité modely diskretní volby je možno efektivně využít generování sloupců k nalezení optimálního řešení modelu CDLP. Výstupem je vektor s tolika složkami, kolik je možných nabízených podmnožin, a každá složka udává počet časových period z časového horizontu, po který by měla být odpovídající množina nabízena. Pojem efektivních množin zavedený v práci (Talluri and van Ryzin, 2004a) pro jednoduchý případ je transformován pro síťový případ a autoři ukazují, že efektivní řešení CDLP obsahuje pouze efektivní množiny. Druhou možností je využití duálních proměnných v dekompoziční heuristice (van Ryzin a Liu, 2008]). Duální proměnné kapacitních omezení je možno využít pro navrhování nabídkových cen.

6 ZÁVĚR

Modely síťového revenue managementu se snaží maximalizovat příjem v situacích, kdy zákazníci kupují produkty z více zdrojů. Základní model síťového revenue managementu je formulován jako úloha stochastického dynamického programování, jejíž přesné řešení je výpočetně nezvládnutelné. Pro řešení se používají aproximační metody založené na různých principech. V příspěvku jsou uvedeny postupy založené na lineárním programování. Aproximační postup DLP (Deterministic Linear Programming), která je populární v praxi, je založena na předpokladu, že poptávka je deterministická a statická. Běžné modelovací přístupy předpokládají, že jsou zákazníci pasivní a nezapojují se do rozhodovacího procesu. Toto zjednodušení je často pro mnoho praktických problémů nerealistické. Jako reakce na tento nedostatek je v poslední době snaha zahrnout do těchto modelů zákaznickou volbu, což zvyšuje jejich složitost. Model CDLP (Choice-based Deterministic Linear Programming) je paralelou standardního modelu DLP se zahrnutím modelu diskrétní volby chování zákazníka. Tato oblast je slibná pro další vědecký výzkum.

Poděkování

Výzkumný projekt byl podporován grantem č. P402/10/0197 „Revenue management – modely a analýzy“, uděleným Grantovou agenturou České republiky a grantem č. IGA F4/16 /2011, poskytnutým FIS, VŠE Praha

Použitá literatura

1. Fiala, P.: Approximations for solving network revenue management problems. In: *Mathematical Methods in Economics 2010*. České Budějovice : University of South Bohemia, 2010, s. 132–137.
2. Gallego, G., Iyengar, G., Phillips, R. and Dubey, A.: Managing flexible products on a network. Tech. Rep. TR-2004-01, Department of Industrial Engineering and Operations Research, Columbia University, 2004.
3. Talluri, K. and van Ryzin G. J.: Revenue management under a general discrete choice model of consumer behavior. *Management Science* 50, (2004a), 15–33.
4. Talluri, K. T., and van Ryzin, G. J.: *The Theory and Practice of Revenue Management*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004b.
5. van Ryzin, G. J. and Liu, Q: On the choice-based linear programming model for network revenue management. *Manufacturing & Service Operations Management* 10 (2008), 288–311.

Kontaktní údaje

Prof. RNDR. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420 2) 24 095 447

email: pfiala@vse.cz

METÓDY STANOVENIA CIEN

PRICING PRACTICES

Darina Frandoferová, Miroslava Dolinajcová

Abstrakt

Cieľom príspevku je kvantifikovať celý rad všeobecných metód stanovenia cien a ukázať ich hodnotu v obchodných rozhodnutiach. Ak sú plne pochopené dôvody pre každú z týchto metód tvorby cien, môžu byť považované za praktické prostriedky na dosiahnutie optimálnej ceny, prostredníctvom širokej škály dopytu a nákladových podmienok.

Kľúčové slová: *cenová prirážka, marginálne náklady, optimálna prirážka, maximalizácia zisku*

Abstract

The aim of this article is to quantify the wide range of general pricing practices and illustrates their value in business decisions. When the underlying reasons are fully understood for each of these pricing methods, they may be considered as a practical means to achieve an optimal price by a wide range of demand and cost conditions.

Keywords: *markup pricing, marginal cost, optimal markup, profit maximization*

ÚVOD

Najčastejšie používanou metódou stanovenia cien je cenová prirážka, ktorá predstavuje ziskovú maržu pre jednotlivé výrobky alebo skupinu výrobkov vyjadrenú ako percento z ceny. Na zvýšenie zisku sa používajú rôzne cenové mechanizmy ako zľavy a kupóny. Zaujímavé je, že všetky tieto cenové postupy možno účinne použiť s odkazom na marginálne analýzy. Kým maximalizácia zisku v podmienkach dokonalej konkurencie vyžaduje rovnosť marginálnych výnosov a marginálnych nákladov, $MR = MC$, nie je nutné stanoviť aj optimálne ceny. Len s využitím informácií o marginálnych nákladoch na výrobok a cenovej elasticite dopytu po výrobku je výpočet maximalizácie zisku ceny z daného výrobku rýchly a jednoduchý. Mnoho firiem odvodzuje optimálnu cenovú politiku využitím techniky nazývanej cenová prirážka, pričom ceny sú nastavené na pokrytie všetkých priamych nákladov plus percento prirážky za účelom dosiahnutia zisku. Flexibilná cenová prirážka, ktorá odráža rozdiely v marginálnych nákladoch a v dopytovej elasticite predstavuje účinný spôsob na zabezpečenie toho, že $MR = MC$, teda že marginálne výnosy sa rovnajú marginálnym nákladom pre každý druh predaných výrobkov.

1 CENOVÁ PRIRÁŽKA

Prieskumy podnikateľskej praxe ukazujú, že cenová prirážka ako časť ceny je najčastejšie používaná metóda stanovenia ceny. V tradičnom prístupe firmy odhadujú priemerné

variabilné náklady na výrobu, ktoré sa so zmenou objemu produkcie menia. S uvedením príslušného výrobku na trh sú spojené poplatky za režijné náklady (administratíva a náklady súvisiace bezprostredne s výrobou), ku ktorým sa potom pridá percentuálna prirážka, alebo zisková marža. Poplatok za režijné náklady je obvykle určený prepočítaním týchto výdavkov medzi všetkými produktmi na základe ich priemerných variabilných nákladov.

Nákladová prirážka predstavuje ziskovú maržu pre jednotlivé výrobky alebo skupinu výrobkov, vyjadrená ako percento z jednotkových nákladov. Nákladová prirážka je daná výrazom:

$$\text{Nákladová prirážka} = \frac{\text{Cena} - \text{Náklady}}{\text{Náklady}} \quad (1.1)$$

V čitateli tohto výrazu sa nachádza tzv. ziskové rozpätie alebo marža, ktorá sa meria ako rozdiel medzi cenou a nákladmi.

Cenová prirážka alebo v literatúre často spomínaná ako zisková marža sa niekedy počíta ako percentuálny podiel z ceny namiesto nákladov. Cenová prirážka pre jednotlivé výrobky alebo skupinu výrobkov je skôr vyjadrená ako percento z ceny a nie ako jednotkové náklady vo vzťahu nákladovej prirážky. Tento alternatívny spôsob vyjadrovania ziskovej marže možno ilustrovať cenovou prirážkou vzťahom:

$$\text{Cenová prirážka} = \frac{\text{Cena} - \text{Náklady}}{\text{Cena}} \quad (1.2)$$

Zisková marža sa nachádza v čitateli vzťahu cenovej prirážky ako aj vo vzťahu nákladovej prirážky. Avšak, jednotkové náklady v menovateli vzťahu 1.1 boli vo vzťahu 1.2. nahradené cenou. Vzťahy nákladovej prirážky a cenovej prirážky sú jednoduché alternatívne prostriedky pre vyjadrenie relatívnej veľkosti ziskových marží. Ak chceme prejsť z jedného vzťahu na druhý, stačí použiť nasledovné transformácie:

$$\text{Nákladová prirážka} = \frac{\text{Cenová prirážka}}{1 - \text{Cenová prirážka}} \quad (1.3)$$

$$\text{Cenová prirážka} = \frac{\text{Nákladová prirážka}}{1 + \text{Nákladová prirážka}} \quad (1.4)$$

1.1 Príklad cenovej verzus nákladovej prirážky

Predpokladajme, že celkové režijné náklady firmy sú plánované na 1,3 milióna EUR ročne a variabilné náklady pre plánovanú celkovú výrobu 1 milión EUR. Z toho potom vyplýva, že réžia pridelená na jednotlivé výrobky je vo výške 130 percent z variabilných nákladov. Ak sú priemerné variabilné náklady na výrobok odhadované na 1 EURO, firma pridá poplatok vo výške 130 percent z variabilných nákladov, alebo 1,30 EUR za réžiu, získaním plne alokovaných nákladov vo výške 2,30 EUR. Ak chceme túto hodnotu, podnik môže pridať 30-percentnú prirážku pre dosiahnutie zisku.

Vo vyššie uvedenom príklade je 30-percentná nákladová prirážka vypočítaná ako:

$$\begin{aligned} \text{Nákladová prirážka} &= \frac{\text{Cena} - \text{Náklady}}{\text{Náklady}} \\ &= \frac{2.99\text{€} - 2.30\text{€}}{2.30\text{€}} \\ &= 0.30 \text{ alebo } 30\% \end{aligned}$$

Riešenie rovnice 1.3 pre cenu, stanovuje výraz, ktorý určuje cenu ako náklady plus tvorba cien.

Pokračovaním uvedeného príkladu sa predajná cena produktu zistí ako:

$$\begin{aligned} \text{Cena} &= \text{Náklady}(1 + \text{nákladová prirážka}) \\ &= 2.30(1.30) \\ &= 2.99 \text{€} \end{aligned}$$

Cenovú prirážku, ako alternatívny spôsob vyjadrenia ziskovej marže určíme na základe vzťahu 1.2, teda:

$$\text{Cenová prirážka} = \frac{2.99\text{€} - 2.30\text{€}}{2.30\text{€}} = 0.23$$

Ak sa vrátíme k výrazom 1.3 a 1.4, ktoré predstavujú jednoduché alternatívne prostriedky pre vyjadrenie relatívnej veľkosti ziskových marží, zistíme, že 30-percentná nákladová prirážka je ekvivalentná s 23-percentnou cenovou prirážkou:

$$\text{Nákladová prirážka} = \frac{\text{Cenová prirážka}}{1 - \text{Cenová prirážka}}$$

$$\text{Cenová prirážka} = \frac{\text{Nákladová prirážka}}{1 + \text{Nákladová prirážka}}$$

Položka s nákladmi 2,30 EUR má 69%-tnú prirážku (čo je $2.99\text{€} - 2.30\text{€} = 0.69$) a cena 2,99 EUR má 30-percentnú nákladovú prirážku a 23-percentnú cenovú prirážku. To dokazuje, aká dôležitá je konzistentnosť pri voľbe nákladov alebo základných cien, keď porovnávame prirážky medzi výrobkami alebo predajcami. Cenová prirážka je niekedy posudzovaná ako naivná cenová metóda založená iba na úsporách nákladov a k tomu ešte ako zlá cena. Tí, ktorí využívajú túto metódu, môžu ignorovať podmienky dopytu a plne zdôrazňujú pridelené účtovné náklady, skôr ako marginálne náklady a dospejú k optimálnemu cenovému rozhodnutiu.

Každopádne je kategorické odmietnutie takejto populárnej a úspešnej cenovej praktiky zjavne nesprávne. Hoci nevhodné používanie cenovej prirážky pri výpočte ceny povedie k nedostatočnému manažérskemu rozhodnutiu, úspešné firmy obvykle používajú metódy spôsobom, ktorý je úplne v súlade s maximalizáciou zisku. V skutočnosti môže byť cenová prirážka vnímaná ako efektívny nástroj pre určenie optimálnej ceny. Je dôležité uvedomiť si, že cena a obmedzenia cenovej prirážky zabránia prípadným pasciam v ich aplikácií.

2 OPTIMÁLNA CENOVÁ A NÁKLADOVÁ PRIRÁŽKA

Pripomeňme si, že existuje priamy vzťah medzi marginálnym príjmom, cenovou elasticitou dopytu a maximalizáciou zisku ceny za výrobok. Tento vzťah možno vyjadriť ako:

$$MR = P \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_p} \right) \quad (1.5)$$

Ak chceme maximalizovať zisk, musí firma pôsobiť na úroveň, na ktorej sa marginálny príjem rovná marginálnym nákladom. Vzhľadom k tomu, marginálny príjem sa vždy rovná pravej strane rovnice 1.5. Vo výrobe na úrovni maximalizácie zisku to znamená, že:

$$P \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_p} \right) = MC \quad (1.6)$$

alebo úpravou

$$P = MC \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_p}} \right) \quad (1.7)$$

Rovnica 1.7 definuje vzťah pre maximalizáciu zisku ceny pre akýkoľvek výrobok z hľadiska jeho cenovej elasticity dopytu.

Pre odvodenie optimálnej prirážky na náklady vychádzame zo vzťahu:

$$Cena = Náklady(1 + nákladová prirážka),$$

kde je cena určená marginálnymi nákladmi a vynásobená výrazom $(1 + \text{prirážka na náklady})$. Rovnica 1.7 znamená, že hraničné náklady sú vhodným východiskom pre:

$$MC(1 + \text{nákladová prirážka}) = MC \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_p}} \right)$$

Vydelením každej strany tohto výrazu MC a odčítaním výnosov 1, dostaneme výraz:

$$\text{Nákladová prirážka} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_p}} \right) - 1$$

Po zjednodušení možno optimálnu nákladovú prirážku, alebo maximalizáciu zisku nákladovej prirážky zapísať v tvare:

$$\boxed{\text{Optimálna nákladová prirážka} = OMC^* = \frac{-1}{\varepsilon_p + 1}} \quad (1.8)$$

Rovnako ako je jednoduchý inverzný vzťah medzi cenovou citlivosťou produktu a optimálnou prirážkou na náklady, tak aj medzi cenovou citlivosťou a optimálnou prirážkou na cenu je jednoduchý inverzný vzťah. Maximalizáciu zisku prirážky na cenu ľahko určíme pomocou vzťahov odvodených skôr. Predelením každej strany rovnice 1.6 výrazom P získame vzťah:

$$\frac{MC}{P} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_p}\right)$$

Odpočítaním 1 z každej strany rovnice získame:

$$\frac{MC - P}{P} = \frac{1}{\varepsilon_p}$$

Potom, vynásobením každej strany -1 dostaneme:

$$\frac{P - MC}{P} = \frac{-1}{\varepsilon_p} \quad (1.9)$$

Všimnime si, že na ľavej strane rovnice 1.9 je výraz pre cenovú prirážku. Takže vzťah optimálnej cenovej prirážky je:

$$\boxed{\text{Optimálna cenová prirážka} = OMP^* = \frac{-1}{\varepsilon_p}} \quad (1.10)$$

Vzhľadom na rozšírenie cenových prirážok v každodennej obchodnej praxi je starostlivo analyzovaná široká škála prirážok a nepísaných pravidiel o rozdeľovaní nákladov, skôr, ako sú posúdené ako optimálne. Rozšírené používanie metódy cenovej prirážky medzi veľmi úspešnými podnikmi naznačuje, že metóda je obvyčajne použitá spôsobmi, ktoré sú úplne v súlade s maximalizáciou zisku.

2.1 Príklad optimálnej prirážky

Použitie vzťahu pre optimálnu prirážku môžeme ďalej ilustrovať na jednoduchom príklade malého obchodu *Betty*, nachádzajúceho sa v predmestskom nákupnom centre. Pri stanovení počiatkovej ceny za novú jarnú blúzku, Betty pridáva 100 %-tnú prirážku na náklady. Náklady boli odhadnuté na 12 EUR z kúpnej ceny každej blúzky, plus 50-percent pridelených fixných nákladov. Odozva zákazníkov bola tak veľká, že *Betty* zdvihla ceny o 3 EURA za

blúzku a tým následne znížila predaj o 80 až 70 blúzok za týždeň. Otázka je, či bola pôvodná cena v Betty butiku optimálna. Ak nie, pokúsime sa nájsť optimálnu cenu.

Ak chceme zistiť, či pôvodná cena blúzky v Bettynom butiku maximalizovala zisk, musíme vypočítať pôvodnú cenovú úroveň, cenovú elasticitu dopytu a prirážku na príslušné marginálne náklady. Potom platí vzťah optimálnej cenovej prirážky. Z predchádzajúcich údajov je zrejmé, že Bettyne náklady na blúzku sú kalkulované na 12-18 EUR obstarávacej ceny, plus 50-percent tvoria pevné režijné náklady. Bettynu pôvodnú cenu so 100 percentnou prirážkou na náklady môžeme vypočítať zo vzťahu nákladovej prirážky:

$$\text{nákladová prirážka} = \frac{\text{Cena} - \text{náklady}}{\text{náklady}}$$

$$1 = \frac{\text{Cena} - 18\text{€}}{18\text{€}}$$

$$\text{Cena} = 36\text{€}$$

Teda cenová elasticita dopytu po blúzke je:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times P/Q$$

$$= -1.5$$

Pred použitím vzťahu optimálnej prirážky na náklady je dôležité si uvedomiť, že príslušné marginálne náklady za blúzku sú iba 12 EUR z kúpnej ceny. Pridelené fixné režijné náklady vo výške 6 EUR sú relevantné pre účely stanovenia cien, pretože fixné režijné náklady sú ovplyvnené predajom blúzky. Aktuálna prirážka na príslušné marginálne náklady v Bettynom butiku na blúzku je 200 percent, pretože:

$$\text{Nákladová prirážka} = \frac{36\text{€} - 12\text{€}}{12\text{€}}$$

$$= 2 \text{ (alebo 200 \%)}$$

Toto je skutočne maximalizácia zisku prirážky na náklady, ktorú možno overiť zo vzťahu 1.8, optimálnej nákladovej prirážky:

$$\text{Optimálna nákladová prirážka} = \frac{-1}{-1.5 + 1}$$

$$= 2 \text{ (alebo 200 \%)}$$

Podobne Bettyna cenová prirážka je:

$$\begin{aligned} \text{Cenová prirážka} &= \frac{36\text{€} - 12\text{€}}{36\text{€}} \\ &= 0.67 \text{ (alebo 67 \%)} \end{aligned}$$

Podobne optimálnu prirážku z hľadiska vzťahu 1.10, optimálnej prirážky na cenu určíme ako:

$$\begin{aligned} \text{Optimálna cenová prirážka} &= \frac{-1}{-1.5} \\ &= 0.67 \text{ (alebo 67 \%)} \end{aligned}$$

Preto je pôvodná cena blúzky 36 EUR optimálnou cenou a následný nárast ceny o 3 EURA by mal byť zrušený.

Tento príklad poskytuje jednoduchú ukážku v oblasti cenovej politiky. Prostredníctvom úvah o nevhodných fixných režijných nákladoch a prirážke, ktoré by sa mohli zdať na prvý pohľad neprímerané, Bettyna cenová politika je úplne v súlade s správaním maximalizácie zisku. Ako sa často stáva, konečným výsledkom Bettynho správania je efektívna cenová politika. Vzhľadom na rozšírenie cenových prirážok v každodennej obchodnej praxi, širokej škále prirážok a nepísaným pravidlami o rozdeľovaní nákladov, je dôležité, že tieto cenové praktiky sú starostlivo analyzované skôr, než sú posúdené ako optimálne. Rozšírené používanie metódy cenovej prirážky medzi veľmi úspešnými podnikmi naznačuje, že metóda je obvyčajne použitá spôsobmi, ktoré sú úplne v súlade s maximalizáciou zisku.

Použitá literatúra

- [1] HYRSHEY, M. 1992. *Fundamentals of Managerial Economics*, Dryden Press, 662 p. ISBN 13- 978-0030747236.
- [2] DOBBS, I. 2000. *Managerial Economics: Firms, markets and business decisions*, OUP Oxford Press, 493 p. ISBN 13- 978-0198775706.

Kontaktné údaje

Ing. Darina Frandoferová
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 826
 email: darina.frandoferova@gmail.com

Ing. Miroslava Dolinajcová
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 826
 email: mdolinajcova@gmail.com

VEĽKOSŤ NÁVRATU PRODUKTOV ZA ÚČELOM RECYKLÁCIE

FORWARD AND REVERSE DISTRIBUTION OF PRODUCTS

Pavel Gežík

Abstrakt

Cieľom tohto príspevku je objasniť nové tendencie spojené s obstarávaním nového materiálu. Recyklácia, ako jeden z nových trendov, je spojená vyčerpaním prírodných zdrojov a s rastúcimi cenami výrobných surovín. Opätovné použitie materiálu, ktorý už bol raz použitý vo výrobnom procese sa zdá jediný možnosť ako získať suroviny bez vyčerpania obmedzených prírodných zdrojov.

Recyklácia je závislá na návrate produktov, ktoré skončili svoju dobu použiteľnosti, z prostredia finálnej spotreby späť k výrobcovi. Tento príspevok pojednáva hlavne o výpočte návratu, presnejšie o určovaní množstva vrátených produktov v procesoch zberu a následné návratu použitých produktov späť k výrobcovi za účelom ich opätovného použitia, resp. recyklácie..

KLúčové slová: *Recyklácia, Návrat, Produkty po skončení doby použiteľnosti, Výpočet.*

Abstract

The aim of this article is to refer to new tendencies related with purchase of new materials. Recycling is a new trend which is associated with depletion of natural resources and increase in prices of raw materials. Reusing the materials which have already been used in a production process seems to be the only possibility of gaining resources without expending the limited natural resources. Recycling also provides an opportunity to save costs related with purchase of new materials.

Recycling is depend on return of end-of-life products from the point of final consumption back to the manufacturer. This article deals primarily with the calculation of return or more precisely with determination of amount of returned products in the processes of collection and return of end-of-life products back to the manufacturer for the purpose of their reuse and recycling.

Keywords: *Recycling, Return, End-of-Life Products, Calculation.*

ÚVOD

V súvislosti s návratom produktu späť k výrobcovi je dôležité spomenúť reverznú logistiku, teda logistiku, ktorá sa zaoberá pohybom produktu opačne ako klasická logistika, teda od spotrebiteľa k výrobcovi. Tá sa dostáva do popredia najmä kvôli svojim ekologickým aspektom a spoločenskému tlaku na recykláciu. Produkty, ktoré by inak predstavovali odpad je možné zbierať za účelom recyklácie a získané suroviny opätovné použiť vo výrobe. Toto opätovné použitie môže mať nie len žiaduci dobrý vplyv na životné prostredie ale zároveň môže výrobcovi ušetriť na nákladoch spojených s obstarávaním nových surovín.

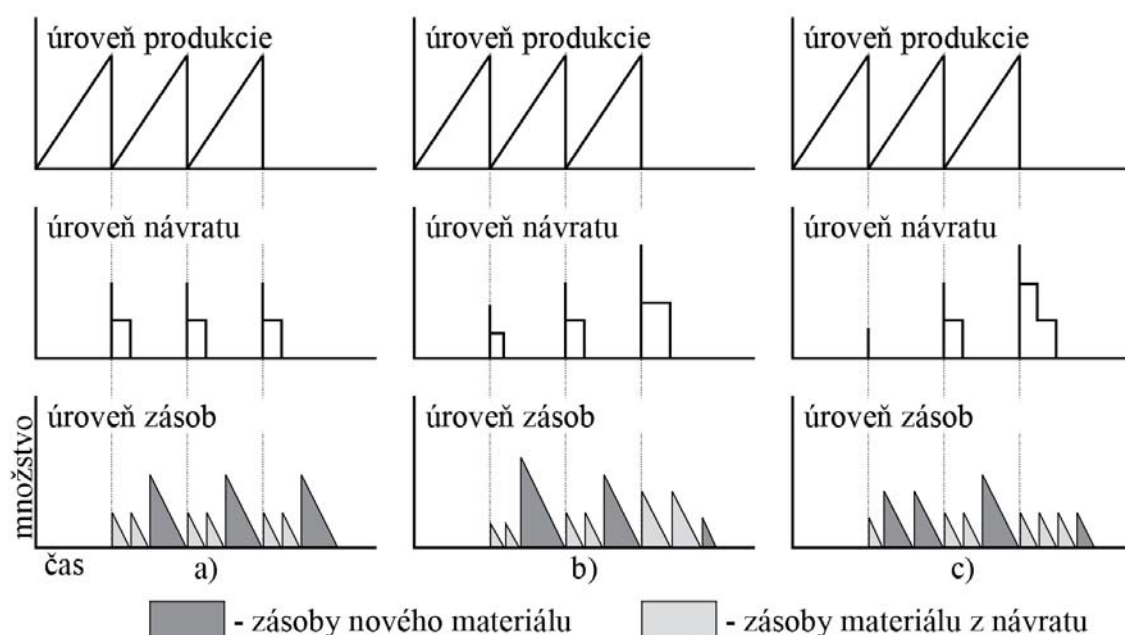
Spolu so vznikom pojmu reverzná logistika sa začali rozvíjať i otázky predĺženia životného cyklu o jeho ďalšie fázy, ako i aspekty ďalšieho/opätovného použitia už raz použitého materiálu (Kostecki, 1998). Vyvinuli sa nové programy v oblasti reverznej logistiky (Stock, 1998) a pribudlo množstvo príkladov, ako využiť poznatky o reverznej logistike – komplexne dotazníky pre rôzne využitia v priemyselných odvetviach (Rogers and Tibben-Lembke, 1999, Guide, 2000). Najširší prehľad možných použití reverznej logistiky vznikol v roku 2004, keď bolo publikovaných prostredníctvom obsahovej analýzy viac ako 60 prípadových štúdií (de Brito, Dekker, Flapper, 2004). Všetky tieto práce mali spoločný jeden prvok. A to návrat produktu späť k výrobcovi.

Z toho dôvodu je potrebné venovať sa možnostiam ako je možné vypočítať veľkosť návratu produktu k výrobcovi. Nasledujúci príspevok ponúka tri príklady, ako je možné tento návrat vypočítať na základe pravdepodobnosti.

1 RAST NÁVRATU V ZÁVISLOSTI OD ČASU

Získavanie vrátených produktov je samozrejme podmienené tým, že tieto produkty boli predtým predané konečnému spotrebiteľovi a ten ich vrátil po splnení účelu, na ktorý si tieto produkty spotrebiteľ kúpil. Preto i základná myšlienka predpokladá prvotný nákup materiálu na úvodnú výrobu produktu, ktorý je následne z výroby určený na distribúciu a potom predaný konečnému spotrebiteľovi. Ten spomínaný produkt vráti späť výrobcovi, ktorý z tohto produktu získa materiál potrebný na ďalšiu výrobu produktu.

Návrat produktu zo začiatku je ale nízky, keďže nie všetky produkty sa hneď po výrobe spotrebujú a následne vrátia. Vychádza sa preto z predpokladu, že nie všetky produkty predané v danom období budú i vrátené v tom období a tak sa návrat produktov "presunie" i do ďalších období a postupne začne rásť. Tento rast je spôsobený tým, že na začiatku sa vráti menšie množstvo produktov a tak podnik musí zabezpečovať nákup nového materiálu. Tieto produkty sa tak začnú kumulovať u spotrebiteľa a ten ich začne postupne vracieť. Tento rast návratu, resp. zásob materiálu z návratu znázorňuje obrázok 1 (Schulz and Ferretti, 2008).



Obr. 1 Priebeh rastúceho návratu v čase

V obrázku v časti a) je znázornený pravidelný návrat len z jedného predchádzajúceho obdobia. Oproti tomu, časti b) a c) už ale uvažujú s rastúcim návratom. Vychádza sa z predpokladu, že v priebehu niekoľkých období sa do spotreby dostane toľko produktov, že s odstupom času návratu, resp. materiál získaný z vrátených produktov, bude vyšší ako nový materiál. Rozdiel medzi časťami obrázku b) a c) spočíva v zmene buď výšky návratu, alebo intenzity návratu, avšak v konečnom dôsledku hovoria o rastúcom návrate v závislosti od času.

2 VÝPOČET RASTÚCEHO NÁVRATU

Ak je návrat len z jedného predchádzajúceho obdobia, tak ako to napr. znázorňuje časť a) v obrázku, je jeho výpočet pomerne jednoduchý. Výpočet množstva vrátených produktov v období t sa určuje na základe pravdepodobnosti $PR(R)_t$, ktorá hovorí o tom, aké množstvo predaných produktov sa vráti z predaja v predchádzajúcom období $t-1$ v období t . Potom je možné vyjadriť návrat produktu (R_t) vzťahom $R_t = PR(R)_t D_{(t-1)}$, pre $t = 1, 2, \dots, T$, kde $D_{(t-1)}$ vyjadruje predaj produktov v období $t-1$. Pri rastúcom návrate sa nejedná len o predaj v predchádzajúcom období $t-1$ ($D_{(t-1)}$) ale o predaj v niekoľkých obdobiach pre obdobím t .

Variant 1

Možnosti, ktorými je možné počítať takýto rastúci návrat, je niekoľko. Asi najjednoduchší je prvý variant, kde sa vychádza z celého množstva, ktoré bolo predané v tom danom období, ku ktorému sa viaže pravdepodobnosť návratu. Z pôvodnej $PR(R)_t$ sa stane $PR(Rx)_t$, kde x predstavuje počet období t , ktoré sa produkt nachádza u spotrebiteľa, napr. $PR(R3)_t$ hovorí o tom, s akou pravdepodobnosťou sa produkt vráti v tretom období od jeho predaja.

Pre x platí, že je z intervalu 1 až X , $x \in \langle 1; X \rangle$, kde horná hodnota X je „hranica“, po ktorej sa predpokladá, že produkt sa už nevráti späť k výrobcovi a skončí ako odpad. Rozdelenie pravdepodobností návratu má klesajúci charakter, keďže sa predpokladá, že väčšina návratu sa realizuje hneď v nasledujúcom období po predaji a potom už možnosť, že sa produkt vráti radikálne klesá.

V tomto variante je súčet pravdepodobností menší ako jedna, a uvažuje sa s tým, že isté percento produktov sa nikdy k výrobcovi nevráti a skončí ako odpad. Toto percento je určené rozdielom medzi súčtom pravdepodobností a čísla 1, keďže pravdepodobnosti sa počítajú z celého predaného množstva. Takéto určenie návratu možno zapísať nasledovne:

$$R_t = PR(R1)_t D_{(t-1)} + PR(R2)_t D_{(t-2)} + \dots + PR(RX)_t D_{(t-X)}, \text{ pre } t = 1, 2, \dots, T \text{ a } X - \text{počet období návratu.}$$

Tento jednoduchý variant znázorňuje nasledujúca štúdia, ktorá na fiktívnych číslach vysvetľuje princíp určenia objemu návratu a pre lepšie pochopenie ilustruje výpočet návratu na náhodných číslach.

Variant 2

Druhým variantom je spôsob, keď pravdepodobnosť $PR(R)_t$ ostáva nezmenene, ale mení sa výpočet návratu v tom, že sa nepočíta, ako pri predchádzajúcom variante, z celého množstva predaných produktov z jednotlivých období, ale len z toho, čo ostalo u spotrebiteľa v danom období. Tento spôsob je zložitejší, ale reálnejší, keďže neuvažuj už s produktmi, ktoré sa vrátili v predchádzajúcom období a poskytuje tak presnejšie údaje.

Znamená to, že pravdepodobnosť sa viaže len na zvyšok produktov, ktoré u spotrebiteľa ostali z X prechádzajúcich období plus všetky produkty, ktoré sa predali v bezprostredne predchádzajúcom období. I tento variant uvažuje s „hranicou“ X , po ktorej sa predpokladá, že produkt sa už nevráti späť k výrobcovi a skončí ako odpad. Pravdepodobnosť $PR(R)_t$ musí byť vždy nižšia¹ ako jedna, to zabezpečí, že po X obdobiach stále ostane u spotrebiteľa isté množstvo ako odpad. Takéto určenie návratu je možné zapísať nasledovne:

$$R_t = PR(R)_t D_{(t-1)} + PR(R)_t (1 - PR(R)_t) D_{(t-2)} + \\ + PR(R)_t (1 - PR(R)_t)^2 D_{(t-3)} + \dots + PR(R)_t (1 - PR(R)_t)^{X-1} D_{(t-X)}, \text{ pre } t = 1, 2, \dots, T \text{ a } X - \text{počet} \\ \text{období návratu.}$$

Variant 3

Tretím variantom je kombinácia predchádzajúcich dvoch variantov. To znamená, že tak, ako druhý variant, nepočíta návrat z celého množstva predaných produktov z jednotlivých období, ale len z toho, čo ostalo u spotrebiteľa v danom období. I tento variant uvažuje s „hranicou“ X , po ktorej sa predpokladá, že produkt sa už nevráti späť k výrobcovi a skončí ako odpad.

Zároveň ale využíva rozdelenie pravdepodobnosti návratu, ktoré má klesajúci charakter. Tento charakter je mierne klesajúci a nie taký radikálny, ako pre prvý variant, keďže sa predpokladá, že návrat postupne klesá s počtom období, ktoré je produkt u spotrebiteľa. Neuvažuje však s predpokladom, že súčet pravdepodobností je menší ako jedna. Jednotlivé pravdepodobnosti musia byť menšie ako jedna, ale neuvažuje sa s tým, že isté percento produktov sa nikdy k výrobcovi nevráti a skončí ako odpad.

Tento odpad je takisto, ako v predchádzajúcom variante, určený hranicou X . Takéto určenie návratu je možné zapísať nasledovne:

$$R_t = PR(R1)_t D_{(t-1)} + PR(R2)_t (1 - PR(R1)_t) D_{(t-2)} + PR(R3)_t \\ (1 - PR(R2)_t) (1 - PR(R1)_t) D_{(t-3)} + \dots + PR(RX)_t (1 - PR(R(X-1))_t) \\ (1 - PR(R(X-2))_t) \dots (1 - PR(R(X-(X-1))_t)) D_{(t-X)} \\ \text{pre } i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T; u = 1, 2, \dots, U; X - \text{počet období návratu.}$$

3 PRÍKLADY RASTÚCEHO NÁVRATU

Príklad 1:

Príklad 1 je podľa prvého variantu a prezentuje výpočet návratu na náhodných číslach, ktoré oscilujú okolo 1000. Uvažuje sa, že horná hodnota X je päť, teda po piatom období sa produkt nevráti späť k výrobcovi a skončí ako odpad. Pravdepodobnosti v príklade sú $PROB(R1) = 0,5$; $PR(R2) = 0,2$; $PR(R3) = 0,05$; $PR(R4) = 0,025$; $PR(R5) = 0,025$. V štúdiu sa uvažuje s tým, že 20 %² produktov sa nikdy k výrobcovi nevráti a skončí ako odpad a štúdia je prezentovaná pre jedno zberné miesto a jeden druh produktu. Návrat sa vypočítava nasledovne:

$$R_t = PR(R1)D_{t-1} + PR(R2)D_{t-2} + PR(R3)D_{t-3} + PR(R4)D_{t-4} + PR(R5)D_{t-5}, \\ \text{pre } t = 1, 2, \dots, T \text{ a } X = 5$$

¹ Vo všeobecnosti je pre tento variant vhodnejšie používať nízke hodnoty pravdepodobnosti návratu, keďže tento variant je vhodný pri produktoch s nízkou, ale podobnou návratnosťou počas všetkých období návratu.

² 20% : $1 - 0,5 - 0,2 - 0,05 - 0,025 - 0,025 = 0,2$

1. obd.	2. obd.	3. obd.	4. obd.	5. obd.	6. obd.	7. obd.	8. obd.	9. obd.	10. obd.
	1000	500	200	50	25	25	0	0	0
		980	490	196	49	24,5	24,5	0	0
0			1020	510	204	51	25,5	25,5	0
	500			1010	505	202	50,5	25,25	25,25
		690			970	485	194	48,5	24,25
			756			1000	500	200	50
				783			1030	515	206
					787,5			1010	505
						794,5			990
							794,5		
								814,25	
xxx - predané množstvo v danom období									
xxx - návrat v danom období									810,5

Príklad 2:

Príklad 2 vychádza z rovnakých predpokladov ako predchádzajúci, ilustruje výpočet návratu na náhodných číslach, ktoré oscilujú okolo 1000 a uvažuje sa, že horná hodnota X je päť, teda po piatom období sa produkt sa nevráti späť k výrobcovi a skončí ako odpad. Štúdia je prezentovaná pre jedno zberné miesto a jeden druh produktu. Pravdepodobnosť $PR(R) = 0,3$ a návrat sa vypočítava nasledovne:

$$R_t = PR(R)D_{t-1} + PR(R)(1 - PR(R))D_{t-2} + PR(R)(1 - PR(R))^2 D_{t-3} + PR(R)(1 - PR(R))^3 D_{t-4} + PR(R)(1 - PR(R))^4 D_{t-5}, \text{ pre } t = 1, 2, \dots, T \text{ a } X = 5$$

1. obd.	2. obd.	3. obd.	4. obd.	5. obd.	6. obd.	7. obd.	8. obd.	9. obd.	10. obd.
	1000	300	210	237	75,9	53,13	0	0	0
		980	294	205,8	232,26	74,382	52,0674	0	0
0			1020	306	214,2	241,74	77,418	54,1926	0
	300			1010	303	212,1	239,37	76,659	53,6613
		504			970	291	203,7	229,89	73,623
			748,8			1000	300	210	237
				748,8			1030	309	216,3
					825,36			1010	303
						872,35			990
							872,56		
								879,74	
xxx - predané množstvo v danom období									
xxx - návrat v danom období									883,58

Príklad 3:

Príklad vychádza z rovnakých predpokladov, ako predchádzajúce dve, ilustruje výpočet návratu na náhodných číslach, ktoré oscilujú okolo 1000 a uvažuje s tým, že horná hodnota X je päť, teda po piatom období sa produkt opäť nevráti späť k výrobcovi a skončí ako odpad. Štúdia je prezentovaná pre jedno zberné miesto a jeden druh produktu. Pravdepodobnosti v príklade sú $PR(R1) = 0,5$; $PR(R2) = 0,4$; $PR(R3) = 0,3$; $PR(R4) = 0,2$; $PR(R5) = 0,1$. Návrat sa vypočítava nasledovne:

$$R_t = PR(R1)D_{t-1} + PR(R2)(1 - PR(R1))D_{t-2} + PR(R3)(1 - PR(R2))(1 - PR(R1))D_{t-3} + PR(R4)(1 - PR(R3))(1 - PR(R2))(1 - PR(R1))D_{t-4} + PR(R5)(1 - PR(R4))(1 - PR(R3))(1 - PR(R2))(1 - PR(R1))D_{t-5}$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$; $u = 1, 2, \dots, U$; $x \in \langle 1; 5 \rangle$.

1. obd.	2. obd.	3. obd.	4. obd.	5. obd.	6. obd.	7. obd.	8. obd.	9. obd.	10. obd.
	1000	500	200	90	42	16,8	0	0	0
		980	490	196	88,2	41,16	16,464	0	0
0			1020	510	204	91,8	42,84	17,136	0
	500			1010	505	202	90,9	42,42	16,968
			690		970	485	194	87,3	40,74
				796		1000	500	200	90
					839,2		1030	515	206
						836,76		1010	505
							844,2		990
								861,86	
									858,71

xxx - predané množstvo v danom období

xxx - návrat v danom období

ZÁVER

Spôsobov na výpočet návratu, resp. na výpočet množstva materiálu, ktoré je možné získať recykláciou produktov, ktoré skončili svoju dobu použiteľnosti je mnoho. Uvedené príklady môžu byť predpokladmi pre komplikovanejšie výpočty, ktoré si budú vyžadovať konkrétne produkty. Preto je podstatné poznať charakter produktu, ktorý sa bude vracat' ako i prostredie, z ktorého sa bude vracat'. Až na základe týchto poznatkov je možné zostaviť výpočet tohto návratu, resp. im prispôbiť uvedené príklady, ktoré môžu výborne poslúžiť pre simulačné modely zaoberajúce sa návratom produktu.

Použitá literatúra

BREZINA Ivan, ČIČKOVÁ Zuzana, GEŽÍK Pavel, PEKÁR Juraj: Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009.

BREZINA, Ivan - GEŽÍK, Pavel - ČIČKOVÁ, Zuzana. Manažment reverznej logistiky. In Ekonomika a manažment : vedecký časopis Fakulty podnikového manažmentu Ekonomickej univerzity v Bratislave 2009. roč. 6, č. 1, s. 45-60.

DEKKER, R. – FLEISCHMANN, M. – INDERFURTH, K. - WASSENHOVE, L. N. v. (Eds.): *Reverse Logistics*. Berlin : Springer-Verlag, 2004.

FLEISCHMANN, M. a kol: Quantitative models for reverse logistics: A review, *European Journal of Operational Research* 103 (1997), s. 1-17.

SCHULZ, T. - FERRETTI, I.: *On the alignment of lot sizing decisions in a remanufacturing system in the presence of random yield*. Faculty of Economics and Management Magdenburg Working Paper No. 34, 2008

Kontaktné údaje

Ing. Pavel Gežík

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 908 333360, email: pavelgezik@gmail.com

ANALYTICKÉ PRÍSTUPY MERANIA PODNIKOVEJ VÝKONNOSTI

THE ANALYTICAL APPROACH OF MEASUREMENT OF BUSINESS PERFORMANCE

Michal Grell, Jaroslav Kultán

Abstrakt

V príspevku sú uvedené vybrané problémy súvisiace s interdisciplinárnym charakterom aplikácie systému Balanced Scorecard (BSC) na meranie podnikovej výkonnosti. Hlavnou myšlienkou je analýza merateľnosti ukazovateľov v perspektíve učenia sa a rastu metodiky BSC. Taktiež sú v ňom uvedené niektoré možnosti realizácie v prostredí energetického podniku.

Príčné slová: *Balanced Scorecard, výkonnosť energetického podniku, merateľnosť, fuzzy model*

Abstract

In the contribution are listed selected problems associated with the interdisciplinary nature of the Balanced Scorecard (BSC) system application for business performance measurement. The main idea is the analysis of the indicators measurement in perspective of the learning and growth BSC methodology. In the contribution, there are also mentioned some implementation options in the energy business environment.

Keywords: Balanced Scorecard, the performance of the energy business, measurability, fuzzy model

ÚVOD

Syntetický a analytický prístup k meraniu podnikovej výkonnosti predstavujú vzájomne prepojené pohľady. V takejto súvislosti je v príspevku uvedený hlavne analytický prístup, ktorý predstavuje systém BSC. Príspevok je zameraný na interdisciplinárny charakter metodiky BSC, ktorý vytvára predpoklady na uplatňovanie nových prístupov na jej realizáciu. Nové prístupy významne súvisia s merateľnosťou ukazovateľov v jednotlivých perspektívach BSC, predovšetkým v perspektíve učenia sa a rastu. Analyzujeme niektoré možnosti aplikácie v energetických podnikoch.

1 SYNTETICKÝ A ANALYTICKÝ PRÍSTUP MERANIA VÝKONNOSTI. MERATEĽNOSŤ UKAZOVATEĽOV V JEDNOTLIVÝCH PERSPEKTÍVACH SYSTÉMU BSC

Existuje niekoľko pohľadov na triedenie meradiel/ukazovateľov výkonnosti. Podľa úrovne podrobnosti rozlíšime syntetický (obvykle založený na výsledku hospodárenia a odhade/predikcie budúceho zisku) a analytický (zameraný na určitú čiastkovú stránku výkonnosti skúmaného objektu) prístup merania výkonnosti. Syntetické/vrcholové ukazovatele bez podpory analytických meradiel majú obmedzenia najmä v týchto oblastiach [2]:

- v informačnej funkcii systému,

- interpretácii informácií o výkonnosti,
- v predikčnom potenciáli,
- v riadení vnútorných štruktúr podniku.

Syntetické a analytické meradlá uplatňujeme vo vzájomnej súvislosti, pričom väčšina prístupov na meranie výkonnosti vychádza z predpokladu, že syntetická úroveň je primárna. V praxi sa možno stretnúť najmä s dvomi analytickými prístupmi na meranie výkonnosti [2]:

- pyramídový rozklad ukazovateľov rentability,
- systém BSC.

Zaoberáme sa podrobnejšie niektorými aspektmi implementácie systému BSC v praxi z hľadiska jeho možného spájania s inými koncepciami napr. koncepciami EVA, znalostného manažmentu a iných. Sme toho názoru, že takémuto cieľu veľmi dobre zodpovedá *modelový prístup* [1] zavádzania BSC, ktorý je zameraný na technické riešenia a integráciu do existujúcich systémových štruktúr so silnou väzbou na softvérové riešenie. Implementácia BSC prebieha v piatich fázach [1]: syntéza modelu (strategická syntéza, syntéza metriky), technická implementácia, organizačná implementácia, technická integrácia, bežná prevádzka. Vo vzťahu k merateľnosti ukazovateľov v jednotlivých perspektívach systému BSC je rozhodujúca prvá fáza, v ktorej sa uskutočňuje syntéza metriky umožňujúca kvantifikáciu stratégie podniku do kľúčových ukazovateľov výkonnosti (KPI – Key Performance Indicators). Pri jednotlivých meradlách je potrebné definovať ich základné atribúty, a to názov, meraciu jednotku, vlastnosti meradla, časové rozmiestnenie, zodpovednosť za dosahované hodnoty meradla, cieľové a kritické hodnoty meradla.

2 INTERDISCIPLINÁRNOSŤ AKO VÝCHODISKO NOVÝCH PRÍSTUPOV K REALIZÁCIÍ BSC

Interdisciplinárny charakter systému BSC chápeme z dvoch hľadísk:

- z hľadiska *prostredia*, v ktorom metodiku BSC aplikujeme (napr. v prostredí podniku, verejnej správy a pod.),
- z hľadiska použitých *prístupov* na realizáciu vzájomného vzťahu jednotlivých perspektív BSC (napr. pridaním ďalších perspektív, využitím podpory informačných technológií a pod.).

Podrobnejšie sa zaoberáme druhým hľadiskom. Východisko v našom príspevku predstavuje Perspektíva učenia sa a rastu, ktorá v podstate vytvára infraštruktúru na dosiahnutie cieľov v ostatných perspektívach. Kľúčovými zdrojmi rozvoja infraštruktúry sú *zamestnanci, znalosti, inovácie, inovačné schopnosti a kreativita, technológie, informácie a informačné systémy*, ktoré majú výrazný vplyv na adaptabilitu a trhovú hodnotu podniku. Množina vzájomných vzťahov Perspektívy učenia sa a rastu v reálnej praxi podnikateľského objektu sa môže realizovať v podmienkach *neurčitosti a rizika*. Zohľadnenie neurčitosti možno uskutočniť pomocou *fuzzy množín* a riziko možno spravidla vyjadriť pomocou *pravdepodobnosti*. Zaoberáme sa riešením problému neurčitosti na báze *fuzzy logiky*, ktorá umožňuje akceptovať neurčitosť/nepresnosť/vágnosť a jednoduchým spôsobom pracovať s významom slov prirodzeného jazyka. Z toho pohľadu potom zostavíme *fuzzy model* trhovej hodnoty podniku (THP) s jazykovými premennými.

Fuzzy množina je z matematického pohľadu funkcia

$$A: U \rightarrow \langle 0, 1 \rangle \quad (1)$$

kde U je univerzum, napr. množina ľudí, výšok, veku, rastlín, ale veľmi často aj istá množina čísel,

A – tvorená prvkami $x \in U$, ktoré majú priradené číslo $a \in \langle 0, 1 \rangle$ ako stupeň príslušnosti prvku x do fuzzy množiny A , ktorý sa zapisuje ako funkčná hodnota $A(x)$.

Algoritmus priradenia stupňa príslušnosti odvodíme z možných spôsobov vytvárania fuzzy čísel, ktoré slúžia na vyjadrenie neurčitých množstiev. Poznamenávame, že pojem fuzzy množiny je všeobecnejší, avšak na potreby riešenia naznačeného problému sa obmedzíme na fuzzy množiny, ktoré sú definované na univerze tvoreného číslami. Fuzzy čísla sú špeciálne fuzzy množiny v množine reálnych čísel, majú špeciálny tvar a intuitívne reprezentujú nepresnú hodnotu, ktorú možno slovne charakterizovať. Najpoužívanejším typom fuzzy čísel sú tzv. *trojuholníkové fuzzy čísla* (ich funkcia príslušnosti má trojuholníkový tvar) [6]. Fuzzy množiny sú vhodným matematickým nástrojom na interpretáciu významu slov a niektorých jednoduchých výrazov prirodzeného jazyka. Zameriavame sa na tie časti modelu sémantiky, ktoré majú rozhodujúcu úlohu vo fuzzy regulácii a ďalších aplikáciách. Špeciálny pojem je tzv. *jazyková premenná*, ktorej hodnoty môžu byť jazykové výrazy, napr. slová *malý*, *stredne veľký* a pod.

Jazykovú premennú definujeme nasledovným vzťahom

$$\langle x, T(x), U, G, M \rangle \quad (2)$$

kde x je názov jazykovej premennej (napr. THP),

$T(x)$ – množina hodnôt jazykovej premennej, napr. *malá*, *stredná*, *stredne veľká* a pod.,

U - univerzum (napr. odporúčaný interval hodnôt relevantných premenných – ukazovateľov), význam každého výrazu z $T(x)$ je modelovaný fuzzy množinou v univerze U ,

G - syntaktické pravidlo na generovanie nových pojmov, napr. z pojmov *malá*, *stredná* vygenerujeme *stredne malá*; jazykové výrazy sú generované špeciálnou gramatikou G ; ak je množina hodnôt jazykovej premennej $T(x)$ explicitne daná, potom nie je treba uvádzať syntaktické pravidlo G ,

M - sémantické pravidlo, ktoré ku každému jazykovému výrazu $T(x)$ priraduje funkciu príslušnosti; ak považujeme význam každého $T(x)$ explicitne daný a vychádzame z toho, že tieto jazykové výrazy sú modelované fuzzy číslami, môžeme symbol M v označení jazykovej premennej vynechať.

Potom príslušná fuzzy množina, ktorá pracuje s jazykovou premennou je usporiadaná trojica

$$A_{T(x)} = (U, M, A(x)) \quad (3)$$

kde U je univerzum,

M – obor hodnôt s významom stupňa príslušnosti,

$A(x)$ – funkcia, ktorá zobrazuje U na množinu M .

Všeobecne platí, že používané fuzzy množiny $A_{T(x)}$ zodpovedajú významu jazykových výrazov *malý*, *stredný*, *veľký* (základná evaluačná trichotómia – evaluačné jazykové výrazy) [6]. Ich funkcie príslušnosti $A(x)$ sú dané predpisom v tab. 1.

Hodnota premennej x z univerza U	Hodnota funkcie príslušnosti A(x)
$(-\infty, a_1>$	0
$<a_2, +\infty)$	0
(a_1, b_1)	$\frac{1}{2}((x - a_1)/(b_1 - a_1))^2$
$<b_1, c_1)$	$1 - \frac{1}{2}((c_1 - x)/(c_1 - b_1))^2$
(c_2, b_2)	$1 - \frac{1}{2}((x - c_2)/(b_2 - c_2))^2$
$<b_2, a_2)$	$\frac{1}{2}((a_2 - x)/(a_2 - b_2))^2$
$<c_1, c_2>$	1

Platí vzťah $a_1 < b_1 < c_1 < c_2 < b_2 < a_2$ - parametre spravidla zodpovedajú významu jazykových výrazov *malý, stredný, veľký*.

Tab. 1 Algoritmus výpočtu hodnôt funkcie príslušnosti

Interpretácia parametrov je nasledovná:

- a_1, a_2 označujú hranice, za ktorými určite nie je pravda, že hodnotu premennej možno označiť daným jazykovým výrazom,
- b_1, b_2 sú prechodové body, v ktorých je stupeň príslušnosti/pravdivosti práve 0,5,
- c_1, c_2 ohraničujú interval, pre ktorý platí, že hodnotu v tomto intervale možno s určitosťou označiť daným jazykovým výrazom.

V prezentovanej aplikácii použijeme jednoduchšiu fuzzy množinu s *trojuholníkovou* funkciou príslušnosti, ktorá je daná predpisom v tab. 2.

Hodnota premennej x z univerza U	Hodnota funkcie príslušnosti A(x)
$(-\infty, a>$	0
$<c, +\infty)$	0
$<a, b>$	$(x - a)/(b - a)$
$<b, c>$	$(c - x)/(c - b)$
$$	1

Platí vzťah: $a < b < c$

Tab. 2 Algoritmus výpočtu hodnôt (fuzzy čísel) trojuholníkovej funkcie príslušnosti

3 MOŽNOSTI APLIKÁCIE NOVÝCH PRÍSTUPOV MERANIA VÝKONNOSTI V ENERGETICKÝCH PODNIKOKCH

Sústredíme sa na praktickú aplikáciu vyjadrenia znalostí, ktoré sa formulujú na základe informácií, o správaní podnikateľského objektu pomocou sústavy jazykových IF – THEN pravidiel. Na ich reprezentáciu používame aparát fuzzy množinovej matematiky. Takúto štruktúru nazývame *jazykový fuzzy model* (báza znalostí). Algoritmy, ktoré operujú nad touto bázou znalostí a realizujú simulačné výpočty, využívajú aparát viachodnotovej jazykovej fuzzy logiky (inferenčný mechanizmus).

Zostavíme jazykový model THP, pričom úroveň THP budeme odvodzovať na základe týchto aktivít (jazykových vstupných premenných modelu): *úroveň produktivity zamestnanca, možnosti informačného systému, úroveň pracovných výkonov*.

Jazykové premenné majú hodnoty jazykové, ich názvy a identifikátory sú nasledovné:

- THP Trhová hodnota podniku
nízka (NIZ), dobrá (DOB), výborná (VYB)
- UPZ Úroveň produktivity zamestnanca
nízka (NIZ), stredná (STR), vysoká (VYS)
- MIS Možnosti informačného systému
nízke (NIZ), stredné (STR), vysoké (VYS)
- UPV Úroveň pracovných výkonov
uspokojivá (USP), dobrá (DOB), výborná (VYB)

Jazykové hodnoty premenných fuzzy modelu sú reprezentované fuzzy množinami. Každý stav jazykových premenných THP, UPZ, MIS a UPV je vyjadrený jazykovo (napr. NIZ, STR, VYB a pod.), ale aj fuzzy číslom $A(x)$ definovaným na danom univerze. Na základe definovania intervalov hodnôt týchto premenných vypočítame stupne príslušnosti $A(x)$ podľa tab. 2. Jazykový model tvorí bázu znalostí fuzzy systému, nad ktorou operujú algoritmy fuzzy logiky (inferenčný/riadiaci mechanizmus), ktoré vykonávajú procedúru výpočtu/vyvedenia tvaru výstupnej fuzzy množiny THP. Tieto pravidlá sú formulované pre vstupné a výstupnú premennú modelu. Dôležitým problémom je stanovenie odporúčaných intervalov hodnôt ukazovateľov (premenných), na ktorých definujeme príslušné fuzzy čísla a pomocou nich vyhodnotíme jednotlivé hodnoty zvolených jazykových premenných. Toto je oblasť tzv. fuzzifikácie. V ďalšom kroku je potrebné vykonať defuzzifikáciu priradením *ostrých* hodnôt množine $T(x)$ výstupnej jazykovej premennej. Existuje niekoľko prístupov fuzzifikácie a defuzzifikácie [6] a sú spojené s konkrétnymi softvérovými produktmi na editáciu fuzzy modelov a vykonanie simulačných výpočtov, ako napr. Fuzzy Tool Box a Simulink programového produktu MATLAB.

V podmienkach energetického podniku možno návrh fuzzy inferenčného systému realizovať napr. vhodným dotazníkovým prieskumom, ktorého koncept je založený na niekoľkých druhoch otázok. Otázky, ktoré sa dajú vhodne použiť a následne fuzzifikovať, možno potom formulovať tak, aby sa dalo odpovedať v určitom intervale a pomocou vhodného algoritmu vyjadriť jeho mieru príslušnosti k fuzzy množine. Určitým problémom môže byť, že na základe odpovedí sa vytvára obraz zo subjektívneho hľadiska respondentov.

Jednou zo skupín problémov, ktoré je možné riešiť v energetickom podniku je nákup podporných služieb [4]. Jedná sa o činnosť, ktorá môže podniku priniesť veľké zisky alebo straty. Využitie navrhovanej metódy môže pomôcť zvýšiť ekonomické výsledky energetického podniku. Pred návrhom jednotlivých dotazníkov a formulárov je potrebné analyzovať jednotlivé druhy podporných služieb a ich určenie.

Na nákup podporných služieb (PpS), resp. regulačnej elektriny (RE) v potrebnej výške používa Prevádzkovateľ prenosovej sústavy v SR (PPS) mechanizmy výberových konaní [5] na otvorenom a nediskriminačnom princípe a to pre: dlhodobé a strednodobé bilaterálne zmluvy; denné dokupovanie podporných služieb. V prípade, ak v opakovanom výberovom konaní nie je ponúknutý dostatok PpS, resp. RE, PPS má právo na priame dohodnutie podmienok ich poskytovania s individuálnym poskytovateľom PpS. PPS nakupuje najmä nasledujúce druhy PpS, resp. RE v zodpovedajúcich parametroch:

- a) podporné služby systémového charakteru;
 - primárna regulácia činného výkonu,
 - sekundárna regulácia činného výkonu,
 - terciárna regulácia činného výkonu;

- b) podporné služby lokálneho charakteru,
 - diaľková regulácia napätia,
 - štart z tmy.
- c) havarijná výpomoc zo synchronne pracujúcich sústav.

Objem PpS, resp. RE dopytovaných prostredníctvom výberových konaní na ročné dodávky alebo prostredníctvom priamych nákupov je stanovený zo strany PPS tak, aby bolo zabezpečené pokrytie potrieb pri dosiahnutí čo najnižších nákladov.

ZÁVER

Zamerali sme sa na možnosti interpretácie spracovania nepresnosti/neistoty v Perspektíve učenia sa a rastu, pričom na daný účel bol zvolený sémantický prístup, využívajúci matematický aparát fuzzy množín. Vychádzame pritom zo základných prístupov fuzzy logiky, ktorá poskytuje jazyk, ktorého syntax a sémantika umožňujú použitie kvalitatívne formulovaných skúseností a znalostí o riešenom probléme. V ďalšom postupe prác sa zameriame predovšetkým na riešenie týchto problémov:

- budovanie bázy znalostí a vytváranie inferenčných pravidiel,
- softvérové riešenie jazykového modelu s možnosťou využitia VBA Excel.

Priestor na uplatnenie nových prístupov k realizácii systému BSC otvárajú aj rozličné prejavy hospodárskej krízy, ktoré významným spôsobom potvrdzujú, že výkonnosť podniku nemožno odvodzovať len od rastových ukazovateľov. Treba akceptovať odolnosť podniku voči krízovým tlakom:

- vysoký stupeň samofinancovania (nie veľa cudzích zdrojov),
- nízke fixné náklady (podnik, ktorý nie je technologicky vyspelý – investičná výbava prináša vysoké náklady),
- garantovanie odbytu (monopolní dodávatelia).

V tejto súvislosti môže byť perspektívne spojenie systému BSC so znalostným manažmentom takým spôsobom, že štyri klasické perspektívy sa nahradia v podobe rôznych druhov kapitálu (ktorý má, najmä intelektuálny kapitál, zásadne väčšiu vypovedaciu schopnosť o možnostiach podniku/organizácie dosahovať budúce príjmy ako ktorýkoľvek konvenčný doteraz používaný ukazovateľ) takto:

- ľudský kapitál (náhrada Perspektívy učenia sa a rastu),
- štruktúrny kapitál (náhrada Procesnej perspektívy),
- sociálny kapitál (náhrada Zákazníckej perspektívy),
- intelektuálny kapitál (náhrada Finančnej perspektívy).

Použitá literatúra

1. GAVUROVÁ, B. 2010. Meranie výkonnosti v organizáciách s dôrazom na aplikáciu systému Balanced Scorecard. Košice: Technická univerzita v Košiciach, 2010. 188 s. ISBN 978-80-553-0437-3.
2. WAGNER, J. 2009. Měření výkonnosti. Jak měřit, vyhodnocovat a využívat informace o podnikové výkonnosti. Praha: Grada Publishing, 2009. 248 s. ISBN 978-80-247-2924-4.
3. ZALAI, K. a kol.: Finančno-ekonomická analýza podniku. Bratislava: Vydavateľstvo SPRINT, 2008. s. 385. ISBN 80-8908-599-6.
4. JANÍČEK F., KRONDIK E., KULTAN J., ŠEDIVÝ J., VECHTER J. 2009 Model trhu s elektrinou. Ekonomické aspekty výroby, prenosu a distribúcie elektriny v Slovenskej republike., Renesans, s.r.o., 2009, ISBN 978-80-89402-03-9.

5. KULTAN, J. 2009 Model trhu s elektrinou. Ekonomické aspekty výroby, prenosu a distribúcie elektriny v Slovenskej Republike, STU v Bratislave, 2009, ISBN 978-80-89402-10-6.
6. NOVÁK, V. 2000. Základy fuzzy modelování. Praha: Nakladatelství BEN, 2000. ISBN 80-7300-009-1.

Príspevok je výstupom grantovej úlohy VEGA č. 1/0261/10 *Interdisciplinárny prístup k zvyšovaniu výkonnosti podniku v procese implementácie Balanced Scorecard*.

Kontaktné údaje

Ing. Michal Grell, PhD., Dr. Ing. Jaroslav Kultan, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra aplikovanej informatiky, Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 856, email: grell@euba.sk, jkultan@gmail.com

ELASTICITA DOPYTU VYBRANÝCH TOVAROV

THE PRICE ELASTICITY OF DEMAND FOR SELECTED GOODS

Nora Grisáková¹, Veronika Mit'ková²

Abstrakt

V predkladanom príspevku budeme skúmať vývoj elasticity vybraných tovarov v rokoch 1997 - 2010. Hodnota elasticity je pre mikroekonomickú teóriu veľmi dôležitá, nakoľko od hodnoty elasticity vieme odvodiť, či sa pri zmene ceny zmenia aj tržby firiem. Z časového hľadiska teória hovorí, že čím je väčšie časové obdobie, tým je dopyt po tovaroch elastickejší, nakoľko sa spotrebitelia vedú lepšie prispôbiť zmenám v cene tovaru. V úvode predkladaného príspevku ozrejníme pojem vlastnej cenovej elasticity a jej hodnôt pre jednoduchý model spotrebiteľského správania sa, v ktorom uvažujeme s maximalizáciou užitočnosti pri nákupe spotrebného koša pozostávajúceho z dvoch tovarov.

KLúčové slová: elasticita dopytu, vývoj spotreby potravín, vývoj cien

Abstract

In presented paper we discuss development of price elasticity of demand in years 1997 – 2010. Value of elasticity is very important for microeconomics theory. From the value of elasticity we can derive the trend in companies' revenue. From the time, the microeconomic theory says, that demand is more price elastic in the long run time period. In long run it is easy to find some substitutes goods. In the beginning of this paper we clarify what is elasticity of demand and its value for basic consumption decision model.

Keywords: demand price elasticity, good consumption, price trend

ÚVOD

Elasticita je dôležitý pojem ekonomickej teórie. Slovo elasticita je gréckeho pôvodu a vyjadruje poddajnosť, citlivosť, pružnosť. Elasticita kvantifikuje citlivosť jednej premennej na zmenu inej premennej, je to %-na zmena jednej premennej vyvolaná percentuálnou zmenou inej premennej.

Pri skúmaní vlastnej cenovej elasticity tovaru (ďalej len elasticity) nás zaujíma ako sa zmení dopyt (%) ak sa zmení cena po danom tovare (%). Na základe uvedeného je v prvom kroku dôležité zistiť znamienko elasticity a následne jej výšku v absolútnej hodnote (Besanko, D. – Braeutigam R. 2011).

¹ Tento príspevok je súčasťou riešenia úlohy VEGA MŠ a SAV č. 1/0410/10 „Teoretické aspekty regulácie sieťových odvetví v podmienkach globalizácie vývoja ekonomiky“, zodpovedný riešiteľ prof. Eleonora Fendeková, v rozsahu 50 %.

² Tento príspevok je súčasťou riešenia úlohy VEGA MŠ a SAV č. 1/0138/09 „Konkurencieschopnosť a efektívnosť podnikov pôsobiach na oligopolných trhoch“, zodpovedný riešiteľ doc. Ing. Milan Horniaček, CSc., v rozsahu 50 %.

a) **štandardné tovary** – tovary, ktorých spotreba rastie pri poklese ich ceny a naopak klesá pri náraste ceny $\varepsilon_i(p_i) = \frac{\Delta x(\%)}{\Delta p(\%)} < 0$. Dopytová krivka po takýchto tovaroch má štandardný klesajúci tvar.

b) **Giffenove tovary** – tovary, ktorých spotreba klesá pri poklese ich ceny

$\varepsilon_i(p_i) = \frac{\Delta x(\%)}{\Delta p(\%)} > 0$. Giffenove tovary sú tovary, ktoré tvoria značnú časť spotreby jednotlivcov a kupujú sa nie preto, že sú žiadané, ale preto, že sú pre veľkú časť spotrebiteľov dôchodkovo dosažiteľné (tzv. inferiorné statky). Pri týchto tovaroch dochádza často pri zvýšení ceny k zvýšeniu dopytu. Spotrebiteľ je donútený ich kupovať a znížiť dokonca spotrebu drahších výrobkov (presunie na ne tento dopyt). Tento jav sa nazýva *Giffenov paradox*. Nakoniec pokles ceny nemusí viesť k zvýšeniu dopytu, pretože spotrebiteľia predpokladajú, že pokles cien bude pokračovať. Naopak rast cien pri podstatných ekonomických zmenách môže vyvolať zvýšený dopyt. Na základe uvedeného, statok je Giffenovým statkom, ak je to statok veľmi inferiorný a zároveň nemá substitúty a zároveň tvorí percentuálne vysokú časť príjmu spotrebiteľa. Giffenov paradox je veľmi zriedkavý. (Stiglitz, Joseph E.: 2006)

Pri skúmaní veľkosti elasticity v absolútnej hodnote hovoríme o elastickom, neelastickom, prípadne jednotkovo elastickom dopyte.

- **elastický dopyt** – spotrebiteľia prostredníctvom zmeny v nakupovanom množstve tovaru veľmi citlivo reagujú na zmenu ceny (ak sa zmení cena o jedno percento, zmení sa dopyt opačným smerom o viac ako jedno percento) $|e_i(p_i)| > 1$
- **neelastický dopyt** – spotrebiteľia prostredníctvom zmeny v nakupovanom množstve tovaru nereagujú citlivo na zmenu ceny (ak sa zmení cena o jedno percento, dopyt po danom tovare sa zmení o menej ako jedno percento) $|e_i(p_i)| < 1$
- **jednotkovo elastický dopyt** – spotrebiteľia reagujú na zmenu v cene rovnakou zmenou v nakupovanom množstve tovaru (ak sa cena zmení o jedno percento, zmení sa nakupované množstvo tak isto o jedno percento) $|e_i(p_i)| = 1$ (Fendek, M. – Fendeková, E.: 2008)

Keďže elasticita dopytu hovorí o zmene v nakupovanom množstve, ak sa zmení cena tovaru, potom na základe znalostí o svojom dopyte firmy vedia odhadnúť zmenu vo svojich tržbách, ak sa zmení cena tovaru.

Zvýšenie cien tovaru má za následok pokles nakupovaného množstva. To, či sa tržby firmy zvýšia, alebo znížia následkom zvýšenia ceny o jedno percento závisí od elasticity dopytu.

Ak množstvo nakupovaných tovarov klesne o viac ako jedno percento, potom tržby firmy klesajú a znamená to, že dopyt po jej výrobkoch je elastickým dopytom (spotrebiteľia reagujú veľmi citlivo na zmenu ceny). Ak množstvo nakupovaných tovarov v tom istom prípade poklesne o viac ako jedno percento, potom tržby firmy rastú a dopyt po jej výrobkoch je neelastickým dopytom (spotrebiteľia pomaly reagujú na zmenenú cenu).

Elasticita dopytu sa mení v závislosti od toho, koľko tovarov spotrebiteľia nakúpili a v závislosti od toho, koľko substitútov existuje k danému tovaru. Firmy dosahujú maximálne tržby pre ten objem predaných výrobkov, kedy je elasticita dopytu rovná jednej.

Ak spotrebiteľia spotrebovávajú malé množstvá sledovaného tovaru, je predpoklad, že ich dopyt bude cenovo elastický. Naopak, čím väčšie množstvá tovarov spotrebovávajú, tým je ich dopyt menej citlivý na zmenu v cene.

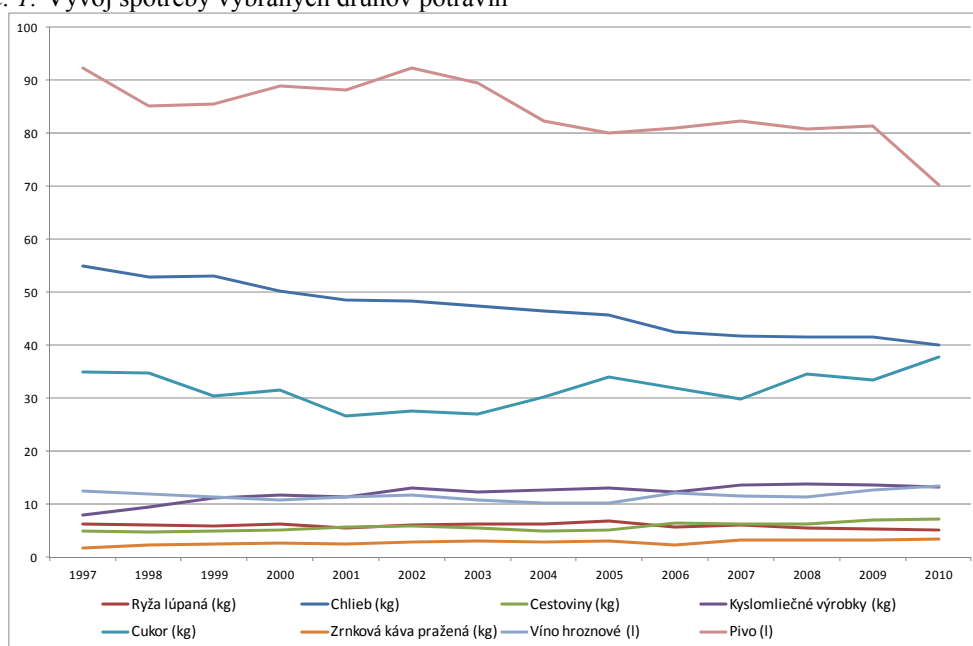
Ak k sledovanému tovaru existujú substitučné tovary, dopyt po tomto tovare bude cenovo elastickejší ako dopyt po tovare, ktorý nemá substitúty. To, či k tovaru existujú alebo neexistujú substitučné tovary závisí od relatívnych cien tovarov a od dĺžky časového obdobia, ktoré skúmame. Ak sú ceny na trhu vysoké, motivuje to výrobcov, aby daný tovar ponúkali,

ak skúmame krátky časový interval, výrobcovia sa nevedia prispôbiť dostatočne flexibilne dopytu, ale pri dlhšom čase sú už schopní ponúknuť k danému tovaru substitút.

1 VÝVOJ SPOTREBY VYBRANÝCH TOVAROV

V predkladanom článku skúmame vývoj spotreby a cien vybraných druhov potravín v rokoch 1997 – 2010. Spotreba tovarov je sledovaná ročne vo vybraných jednotkách na jedného obyvateľa. Sledované jednotky sú kilogramy (ryža lúpaná, cestoviny, cukor, chlieb, kyslomliečne výrobky, zrnková káva pražená) a litre (víno hroznové a pivo). Vývoj spotreby uvádza obrázok č. 1.

Obrázok č. 1: Vývoj spotreby vybraných druhov potravín



Zdroj: Spracované na základe www.statistics.sk

Z obrázku č. 1 môžeme vidieť, že spotreba vybraných potravín sa počas sledovaného obdobia menila len veľmi málo. Najvyššia bola spotreba piva, ktorá dosiahla v roku 1997 a 2002 úroveň 92,3 litra na osobu. Najnižšia spotreba piva bola v roku 2010 na úrovni 70,2 litra na osobu. Najnižšiu spotrebu počas celého sledovaného obdobia mala ryža lúpaná.

Najviac extrémnych hodnôt v spotrebe vybraných potravín bolo v poslednom sledovanom roku. V roku 2010 je minimálna spotreba ryže (5,2 kg), chleba (40 kg) a piva (70,2 l) a naopak maximálne hodnoty počas sledovaného obdobia nadobúdajú cestoviny (7,2 kg), cukor (37,7 kg), káva (3,4 kg) a víno (13,4 l).

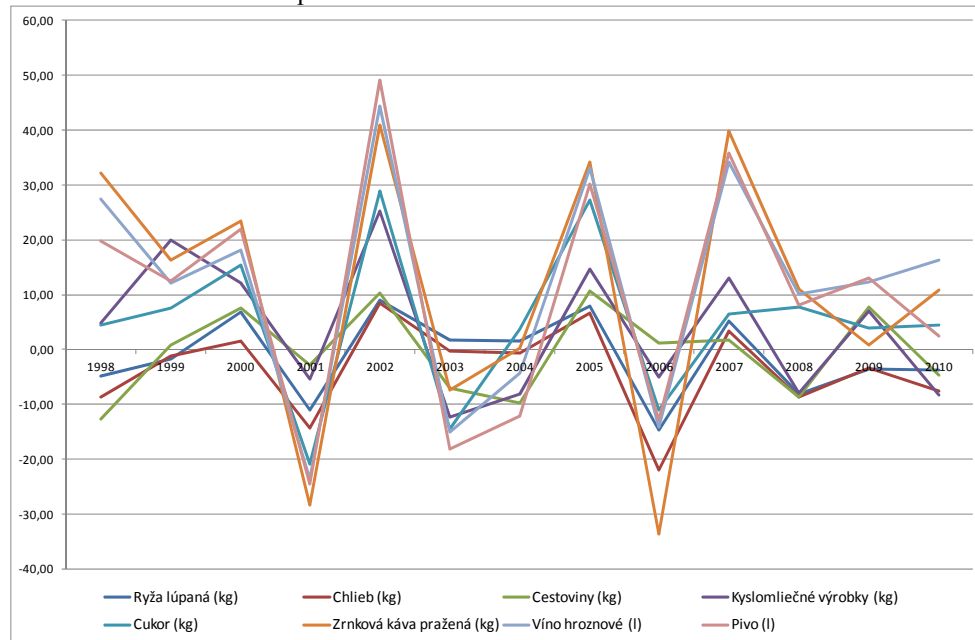
Tabuľka č. 1: Percentuálna zmena v spotrebe

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ryža lúpaná (kg)	-4,76	-1,67	6,78	-11,11	8,93	1,64	1,61	7,94	-14,71	5,17	-8,20	-3,57	-3,70
Chlieb (kg)	-4,00	0,38	-5,28	-3,19	-0,41	-1,86	-2,32	-1,29	-7,21	-1,88	-0,48	0,24	-3,85
Cestoviny (kg)	-4,00	2,08	6,12	11,54	1,72	-6,78	-9,09	4,00	23,08	-1,56	0,00	11,11	2,86
Kyslomliečne výrobky (kg)	17,50	19,15	4,46	-2,56	14,91	-5,34	1,61	3,97	-6,11	11,38	0,73	-0,72	-3,65
Cukor (kg)	-0,29	-12,36	3,28	-15,56	3,76	-2,17	11,85	12,58	-6,18	-6,58	15,77	-3,19	12,87
Zrnková káva pražená (kg)	27,78	8,70	8,00	-7,41	12,00	7,14	-3,33	6,90	-22,58	33,33	3,12	-3,03	6,25
Víno hroznové (l)	-4,80	-4,20	-5,26	4,63	3,54	-7,69	-4,63	-0,97	19,61	-5,74	-0,87	11,40	5,51
Pivo (l)	-7,69	0,47	3,86	-0,79	4,65	-3,03	-7,93	-2,91	1,25	1,73	-1,94	0,74	-13,76

Zdroj: Vlastné spracovanie

Tabuľka č. 1 uvádza percentuálnu zmenu v spotrebe vybraných potravín počas sledovaného obdobia. Môžeme vidieť, že zmeny v spotrebe boli v niektorých obdobiach protichodné. Uvedené údaje sú znázornené aj graficky na obrázku č. 2.

Obrázok č. 2: Percentuálna zmena v spotrebe



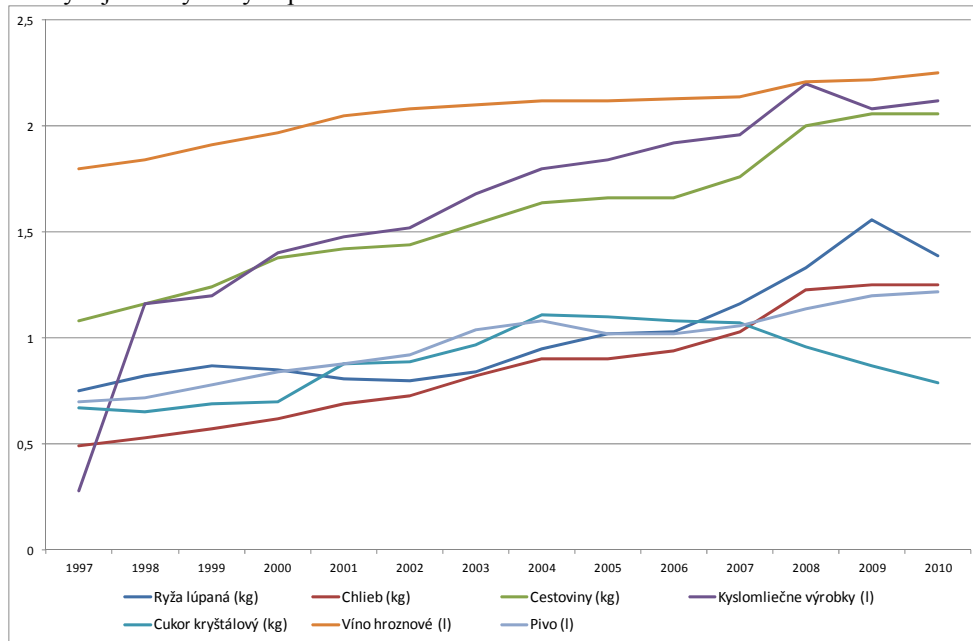
Zdroj: Vlastné spracovanie

Na predchádzajúcom obrázku môžeme vidieť, že najväčšie percentuálne zmeny v spotrebe boli pri pive, víne (alkoholických nápojoch) a káve, naopak najmenšie zmeny v spotrebe boli pri chlebe a cestovinách.

2 VÝVOJ CIEN VYBRANÝCH TOVAROV

Pre vybrané potraviny, pri ktorých sme sledovali zmeny v spotrebovanom množstve sme sledovali aj zmeny v cenách. Pre potreby porovnania, museli byť ceny niektorých potravín prepočítané na rovnaké merné jednotky ako v prípade sledovania spotrebovaného množstva. Taktiež boli všetky ceny prepočítané na eurá za jednu mernú jednotku. Obrázok č. 3 znázorňuje vývoj cien pre vybrané potraviny.

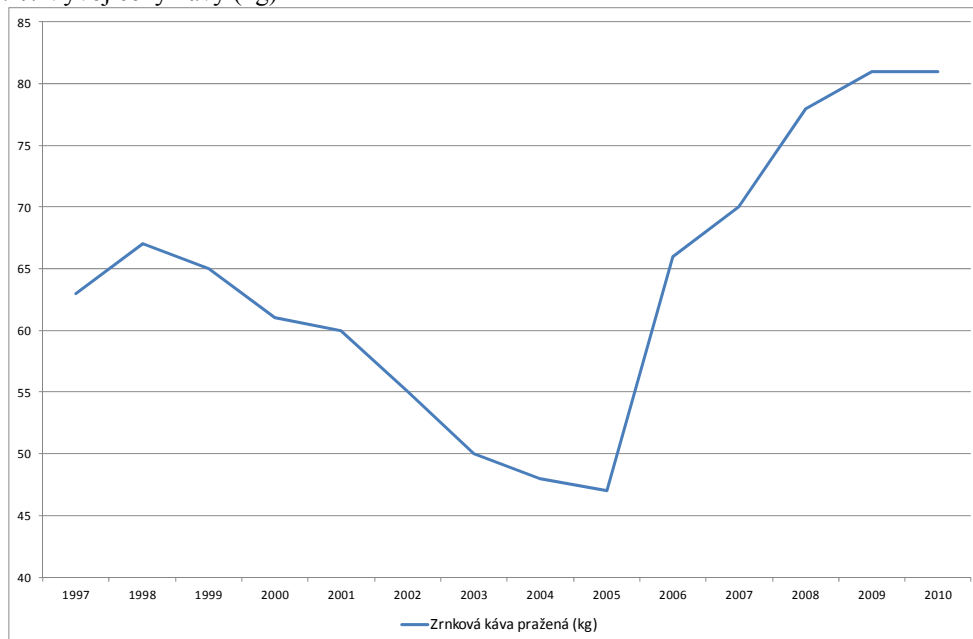
Obrázok č. 3: Vývoj cien vybraných potravín



Zdroj: Spracované na základe www.statistics.sk

Keďže ceny kávy sú oproti ostatným potravinám vysoké, uvádzame vývoj ceny kávy na osobitnom grafe – obrázok č. 4.

Obrázok č. 4: Vývoj ceny kávy (kg)



Zdroj: spracované na základe www.statistics.sk

Ceny všetkých vybraných potravín v sledovanom období rástli. V posledných sledovaných rokoch klesla výrazne cena ryže a cukru, ktorého cena postupne klesala už od roku 2005. Percentuálnu zmenu v cenách vybraných potravín uvádza tabuľka č. 2.

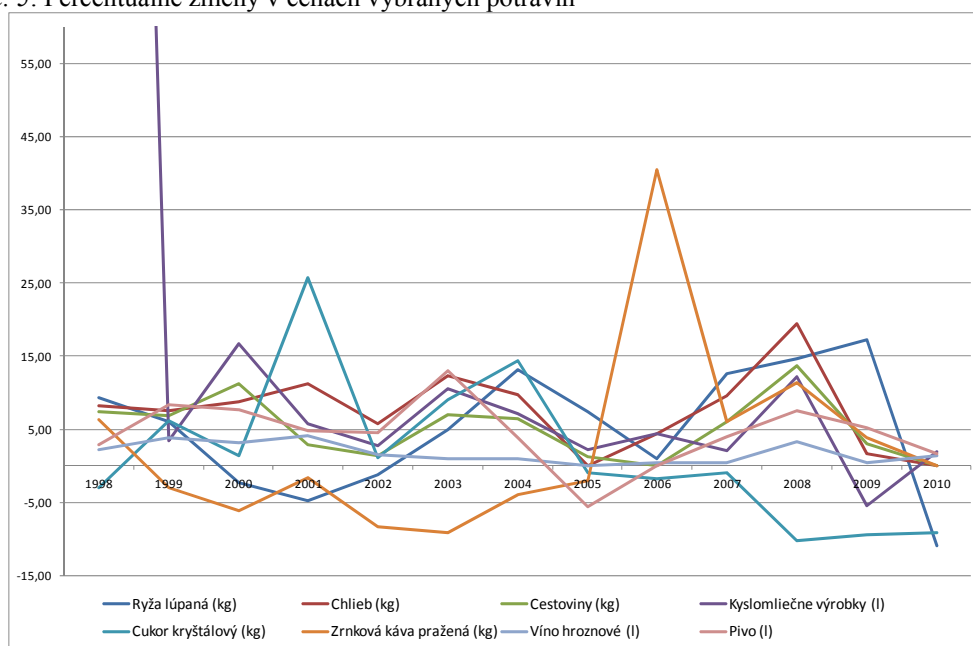
Tabuľka č. 2: Percentuálna zmena v cenách vybraných potravín

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ryža lúpaná (kg)	9,33	6,10	-2,30	-4,71	-1,23	5,00	13,10	7,37	0,98	12,62	14,66	17,29	-10,90
Chlieb (kg)	8,16	7,55	8,77	11,29	5,80	12,33	9,76	0,00	4,44	9,57	19,42	1,63	0,00
Cestoviny (kg)	7,41	6,90	11,29	2,90	1,41	6,94	6,49	1,22	0,00	6,02	13,64	3,00	0,00
Kyslomliečne výrobky (l)	314,29	3,45	16,67	5,71	2,70	10,53	7,14	2,22	4,35	2,08	12,24	-5,45	1,92
Cukor kryštálový (kg)	-2,99	6,15	1,45	25,71	1,14	8,99	14,43	-0,90	-1,82	-0,93	-10,28	-9,38	-9,20
Zrnková káva pražená (kg)	6,35	-2,99	-6,15	-1,64	-8,33	-9,09	-4,00	-2,08	40,43	6,06	11,43	3,85	0,00
Víno hroznové (l)	2,22	3,80	3,14	4,06	1,46	0,96	0,95	0,00	0,47	0,47	3,27	0,45	1,35
Pivo (l)	2,86	8,33	7,69	4,76	4,55	13,04	3,85	-5,56	0,00	3,92	7,55	5,26	1,67

Zdroj: Vlastné spracovanie

Najvyšší cenový nárast bol v roku 1998 pri kyslomliečnych výrobkoch. Cena týchto potravín vzrástla o viac ako 300 % a od uvedeného roku už iba rástla. Výnimkou bol rok 2009, kedy cena kyslomliečnych výrobkov klesla o 5,45%. Cena ryže dosiahla v dvoch rokoch za sebou extrémne hodnoty. V roku 2009 sa cena ryže zvýšila o 17,29 % a následne v roku 2010 sa znížila o 10,90 %. V roku 2010 ostali nezmenené ceny chleba, cestovín a kávy.

Obrázok č. 5: Percentuálne zmeny v cenách vybraných potravín



Zdroj: Vlastné spracovanie

3 HODNOTA ELASTICITY VYBRANÝCH TOVAROV

Elasticita predstavuje citlivosť jednej premennej na zmenu inej premennej. My skúmame citlivosť zmeny v spotrebe vybraných potravín na zmenu v ich cene. Preskúmali sme vývoj spotreby aj vývoj cien vybraných potravín. Hodnoty elasticity pre vybrané potraviny uvádza tabuľka č. 3.

Tabuľka č.3: Hodnoty elasticity vybraných potravín

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ryža lúpaná (kg)	-0,51	-0,27	-2,95	2,36	-7,23	0,33	0,12	1,08	-15,00	0,41	-0,56	-0,21	0,34
Chlieb (kg)	-0,49	0,05	-0,60	-0,28	-0,07	-0,15	-0,24		-1,62	-0,20	-0,02	0,15	
Cestoviny (kg)	-0,54	0,30	0,54	3,98	1,22	-0,98	-1,40	3,28	0,00	-0,26	0,00	3,70	
Kyslomliečne výrobky (l)	0,06	5,55	0,27	-0,45	5,52	-0,51	0,23	1,79	-1,40	5,46	0,06	0,13	-1,90
Cukor kryštálový (kg)	0,10	-2,01	2,26	-0,60	3,31	-0,24	0,82	-13,97	3,40	7,11	-1,53	0,34	-1,40
Zrnková káva pražená (kg)	4,38	-2,91	-1,30	4,52	-1,44	-0,79	0,83	-3,31	-0,56	5,50	0,27	-0,79	
Víno hroznové (l)	-2,16	-1,10	-1,68	1,14	2,42	-8,00	-4,86		41,57	-12,22	-0,27	25,20	4,08
Pivo (l)	-2,69	0,06	0,50	-0,17	1,02	-0,23	-2,06	0,52	0,00	0,44	-0,26	0,14	-8,26

Zdroj: Vlastné výpočty

Z tabuľky č. 3 je vidieť, že elasticita jednotlivých potravín sa v čase mení. Hodnoty elasticity označené červeným predstavujú roky, v ktorých by sme potraviny podľa hodnoty elasticity

zaradili medzi Giffenove tovary. T.j. ich spotreba rástla napriek tomu, že sa ich cena zvyšovala (prípadne klesala, ak sa cena znižovala). Môžeme si všimnúť, že uvedené potraviny nie sú Giffenovými tovarmi počas celého sledovaného obdobia. Napríklad chlieb by sme zaradili medzi uvedené tovary iba v roku 1999 a 2009. V ostatných rokoch je chlieb tovarom normálnym a vo väčšine prípadov cenovo neelastickým tovarom. Výnimkou je iba rok 2006 kedy bol chlieb elastickým tovarom.

Na základe údajov o elasticite dopytu môžeme pivo zaradiť medzi normálne a vo väčšine prípadov cenovo elastické tovary. Najvyššia (záporná) cenová elasticita piva bola v poslednom sledovanom roku – 2010.

ZÁVER

Elasticita dopytu je veľmi užitočným nástrojom pre sledovanie zmien v spotrebe tovarov. Na základe jej hodnoty môžu firmy odhadnúť zmeny vo svojich tržbách, pri zmene ceny tovarov na trhu.

V príspevku sme ukázali, že hodnota elasticity počas určitého časového obdobia nie je konštantná, ale sa mení. Vo všeobecnosti platí, že čím dlhšie časové obdobie sledujeme, tým je dopyt po tovaroch elastickejší, t.j. spotrebiteľia aj ostatní výrobcovia sa môžu ľahšie prispôbiť zmenám v cenách tovarov.

Literatúra

- [1] Besanko, D. – Braeutigam R.: (2011) Microeconomics. USA. Vyd. Wiley+, fourth edition 2011. ISBN 978-0-470-64606-9
- [2] Domonkos, T.: (2010) Ski resort organisation optimization with discrete event simulation, In Strategic management : international journal of strategic management and decision support systems in strategic management. - Subotica : University of Novi Sad, Faculty of Economics Subotica, 2010. - ISSN 1821-3448. - Vol. 15, No. 4, (2010) s. 36-42.
- [3] Fendek, M. – Fendeková, E.: (2008) Mikroekonomická analýza. Bratislava. Vyd. IURA Edition, 2008
- [4] Goga, M.: (2000) Kvantitatívny manažment. Bratislava. Vyd. IURA Edition, 2000
- [5] Hsiao, J. Po-Hsun – Jaw, Ch. – Huan, Tzung-Cheng.: (2009) Information diffusion and new product consumption: A Bass model application to tourism facility management. In: Journal of Bussiness Research 2009, Vol. 62, pp. 690 – 697
- [6] Stiglitz, Joseph E.: (2006) Economics. Londín. Vyd. W.W.Norton, fourth edidion 2006. ISBN 978-0393168174
- [7] www.statistis.sk

Kontaktné údaje

Ing. Nora Grisáková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta podnikového manažmentu

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: nora.grisakova@eba.sk

Ing. Veronika Mit'ková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

e-mail: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

STOCHASTICKÁ KVÁZI GRADIENTNÁ METÓDA APLIKOVANÁ NA RIEŠENIE STOCHASTICKÝCH LOKAČNÝCH MODELOV

QUASI-GRADIENT STOCHASTIC METHOD OF SOLVING APPLIED STOCHASTIC LOCATION MODELS

Anna Hollá, Janka Patakyová, Andrej Mišovič

Abstrakt

V príspevku popisujeme význam problematiky stochastických lokačných modelov a venujeme sa stochastickej kvázi gradientnej metóde aplikovanej na riešenie stochastických lokačných modelov. V tomto príspevku sú možnosti spomínanej metódy diskutované do špeciálneho jednoduchého problému. Uvedená metóda sa dokáže priblížiť k riešeniu problému stochastického programovania za pomerne všeobecných podmienok.

Kľúčové slová: stochastický lokačný model, stochastická kvázi gradientná metóda

Abstract

In this paper we describe the importance of stochastic location models and we are dedicated to the stochastic quasi-gradient method applied to solve stochastic location models. In this paper the possibilities of the methods discussed above into a single special problem. This method can be closer to solving the problem of stochastic programming under fairly general conditions.

Keywords: stochastic location model, stochastic quasi-gradient method

ÚVOD

Vieme, že súčasná realita si vyžaduje dynamické reakcie a optimalizáciu v doprave a logistike. V rámci toho je vzájomné prepojenie stochastiky a lokačných modelov aktuálnou problematikou súčasnosti. Cieľom príspevku bude venovať pozornosť jednému z hlavných logistických subsystémov, ktorého snahou je zabezpečiť správne umiestnenie, v správnom čase a pri čo najnižších nákladoch. Na základe spomínaného subsystému je možné dosahovať celkový cieľ logistického systému a jeho návrhu a optimalizácii treba venovať zvýšenú pozornosť. Vieme, že napríklad vhodné umiestnenie skladu je základným strategickým rozhodnutím ovplyvňujúcim výšku dopravných nákladov a úroveň zákaznickeho servisu. A taktiež vieme, že toto rozhodnutie zahŕňa celý rad dôležitých prvkov.

Naším cieľom bude teoreticky popísať snahu Ermolieva a Leonardiho (1980), ktorí sa už v svojej dobe venovali stochastike, náhodnosti a neistote. Teoreticky preštudujeme ich stochastickú kvázi gradientnú metódu aplikovanú na riešenie stochastických lokačných modelov.

1 LOKAČNÉ MODELY A STOCHASTIKA

Logistické technológie vychádzajú zo vzájomného pôsobenia jednotlivých subsystémov logistického reťazca. Ich optimalizácia a vzájomné spolupôsobenie ponúka možnosť dosiahnuť stanovené očakávané výsledky. Logistické technológie sú sledom rozhodovacích postupov a procedúr, ktoré v danom ekonomickom prostredí rešpektujú logistickú interakciu medzi komponentmi logistického systému a využitie optimalizačných metód, ktoré vedú k optimalizácii logistických nákladov.

Teória lokačných modelov tvorí časť logistických technológií. Možno ju riešiť využitím klasických metód matematického programovania, lineárneho a dynamického programovania.

Našou témou je však súčasný stav modelov so zameraním sa na modely so stochastickým aspektom. Stochastický aspekt predpokladá zmeny systému v čase podmienené vplyvom nekontrolovateľných náhodných faktorov. Poznáme štyri základné prístupy k k stochastickým problémom lokačných modelov.

Prvý zobrazuje neistotu cez deterministických zástupcov. Napríklad Bean a kol. (1992) formuloval ekvivalentný deterministický problém tým, že „nahradil stochastický dopyt jeho deterministickým trendom a diskontovaním všetkých nákladov na novú úrokovú sadzbu, ktorá je menšia ako pôvodná, v približnom pomere neistoty k dopytu.“

Druhý prístup umožňuje vývoj ohraničených modelov (Chapman a White, 1974). Napríklad Daskin (1982, 1983) formuloval pravdepodobnostné rozšírenie maximalizačného lokačného problému, v ktorom sa predpokladá, že zariadenia budú obsadené s pravdepodobnosťou ρ . Pokiaľ budú obsadené, nemôžu uspokojiť požiadavky. Cieľom týchto modelov je maximalizovať počet požiadaviek, na ktoré sa vzťahuje možnosť obslúženia. ReVelle a Hogan (1989a) formulovali podobný model, v ktorom maximalizujú počet požiadaviek, ktoré sú obslúžené najneskôr b - krát, kde b predstavuje rozsah potrebný na zabezpečenie možnosti, že požiadavka bude obslúžená s pravdepodobnosťou β . ReVelle a Hogan (1989b) formulovali verziu, ktorá minimalizuje počet zariadení potrebných na zabezpečenie, aby všetky požiadavky boli obslúžené s pravdepodobnosťou β .

Tretí prístup explicitne počíta so systémom čakania interakcií, ktoré sa vyskytujú v priestorovo rozdelenom systéme čakania so zariadeniami na viacerých miestach siete. Larson (1974) formuloval „hypercube queuing“ model s 2^N pozíciami, aby zohľadnili všetky možné kombinácie zariadení, kde N zariadení je k dispozícii alebo nie. Výsledný model má buď 2^N lineárnych rovníc alebo N nelineárnych rovníc v aproximujúcom modeli (Larson, 1975) a preto je veľmi ťažké vpísať do optimalizačného algoritmu. Avšak Batta, Dolan a Krishnamurthy (1989) použili model, kde ukázali, že implicitný predpoklad delenia nezávislosti, ktoré obsahuje Daskinov problém, je často porušovaný.

Štvrtý prístup používa plánovanie scenárov (Van der Heijden. 1994: Vanston a kol., 1977). Scenáre predstavujú možné hodnoty pre parametre, ktoré sa môžu líšiť v priebehu plánovacieho horizontu. Jedna z prvých aplikácií plánovania scenárov klasických lokačných problémov bol Sheppard (1974), ktorý minimalizoval očakávané náklady na všetky scenáre. Ghost a McLafferty (1982) používali scenáre k lokácii maloobchodných predajní [1].

2 STOCHASTICKÁ KVÁZI GRADIENTNÁ METÓDA APLIKOVANÁ NA RIEŠENIE UMIESTNENIA SKLADOV

Určite si vieme dobre uvedomiť, kedy vzniká hranica medzi deterministickým a stochastickým chápaním. Deterministické, často modely matematického programovania, sú riešené na základe “najlepších” odhadov stochastických hodnôt, alebo sú riešené na základe “najhorších” možných prípadov.

V nasledujúcej časti sa budeme venovať štúdiu, ktorú v roku 1981 publikovali Ermoliev a Leonardi. Podľa nich je väčšia realita zachytená pokiaľ sú náhodné vlastnosti popísané. Medzi typy náhodnosti možno považovať neistotu v správaní zákazníka pri jeho osobitnom záujme. Keď rozdelenie zákazníkov do zariadení nie je vopred dané normatívne a sloboda voľby je dovolená, potom počet zákazníkov priradený každému zariadeniu môže byť predmetom náhodných výkyvov. Problém, z toho dôvodu, je nájsť ktoré lokácie a veľkosti zariadení, ktoré v istom zmysle minimalizujú náklady takýchto výkyvov.

Tento problém patrí do nasledujúceho všeobecnejšieho typu problémov stochastického programovania:

$$\min F(X) = Ef(X, \Omega) \quad (1)$$

$$G_i(X) = E\{g_i(X, \Omega)\} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

kde E popisuje matematické očakávania, X je vektor rozhodovacích premenných, Ω je vektor náhodných parametrov a $f(X, \Omega)$, $g_i(X, \Omega)$, $i = 1, \dots, m$ sú známe funkcie.

V tomto príspevku sú výpočtové možnosti takzvanej stochastickej kvázi gradientnej metódy diskutované a aplikované do špeciálneho jednoduchého tvaru problému (1) – (2). Postup je založený na iteratívnych posunoch v smere určenom odhadom zovšeobecneného gradientu účelovej funkcie. Metóda sa dokázala priblížiť k riešeniu problému stochastického programovania za pomerne všeobecných podmienok.

2.1 Problém formulácie

Jednoduchý model optimálnej alokácie zdrojov možno popísať nasledovne (Ermoliev a Leonardi, 1980). Nájdenie vektora $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktorý bude minimalizovať funkciu

$$F(X) = \sum_{j=1}^n E\{f_j(x_j, \omega_j)\} \quad (3)$$

$$F(X) = \sum_{j=1}^n E\{\max[\alpha_j(x_j - \omega_j), \beta_j(\omega_j - x_j)]\} \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

s výhradou určitých obmedzení $0 \leq x_j \leq s_j$. Ω je náhodný vektor a α_j a β_j sú dané nezáporné parametre. Ak distribučná funkcia náhodného rozdelenia pre ω_j je $H_j(\omega_j)$, problém je potom nájsť minimum z

$$F(X) = \sum_{j=1}^n \left[\alpha_j \int_0^{x_j} (x_j - \omega_j) dH_j(\omega_j) + \beta_j \int_{x_j}^{\infty} (\omega_j - x_j) dH_j(\omega_j) \right] \quad (5)$$

keď $0 \leq x_j \leq s_j$, $j = 1, \dots, n$. V osobitnom prípade, kde $F(X)$ je spojitá, minimalizácia $F(X)$ pomocou analytického nástroja by viedlo k posúdeniu parciálnej derivácie

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F(X) = \alpha_j \int_0^{x_j} dH_j(\omega_j) - \beta_j \int_{x_j}^{\infty} dH_j(\omega_j) \quad (6)$$

Riešenie by potom vyžadovalo stanovenie $X = (x_1, \dots, x_n)$, také, že

$$H_j(x_j) = \frac{\beta_j}{\alpha_j} [1 - H_j(x_j)] \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

Všeobecne nemožno túto rovnicu riešiť pomocou analytických prostriedkov. Avšak, obvykle, riešenie môže byť ľahko približné. Predovšetkým, ak $\alpha_j = \beta_j$, potom problém pochádza z nájdenia mediánu pre distribučné funkcie.

Praktický problém, ktorý vedie k minimalizácii rovnice funkcie typu (4) je v operačnom výskume bežný. Napríklad to môže byť chápané ako problém alokácie zariadení alebo ako problém riadenia skladovania zásob, keď sa niektoré kapacity stretávajú s náhodným dopytom a aj prírastky aj úbytky spôsobujú penále – postihové náklady. Za určitých predpokladov môže byť účelová funkcia vo forme rovnice (4).

2.2 Stochastická minimalizácia

Sústredíme sa na testovanie použiteľnosti stochastickej kvázi gradientnej metódy. Algoritmus môže byť prezentovaný nasledovne (Ermoliev, 1976 a 1978):

- (1) Zvoľte počiatočnú aproximáciu X^0 .
- (2) Pre $s = 0, 1, \dots$ počítajte následne

$$X^{s+1} = \Pi[X^s - \rho^s H^s] \quad (8)$$

kde H^S je estimátor zovšeobecneného gradientu $\hat{F}_X(X^S)$ funkcie $F(X)$ v X^S takže

$$E\{H^S | X^0, \dots, X^S\} = \hat{F}_X(X^S) \quad (9)$$

a Π je navrhovanie uskutočniteľných nastavení: ρ^S sú niektoré kroky multiplikátorov.

V skutočnosti, po zvolení počiatkových hodnôt, postupnosť Ω^S náhodných odchýlok je generovaná. Každé náhodné hodnoty potom slúžia na súčasný odhad pre generovaný gradient testovacieho problému. V našom testovacom probléme odhady H^S sú definované jednoducho cez (Ermoliev a Nurminski, 1980)

$$h_j^S = \begin{cases} \alpha_j & \text{if } x_j^S > \omega_j^S \\ \beta_j & \text{if } x_j^S \leq \omega_j^S \end{cases} \quad (10)$$

Realizácia rekurzcie by nemala predstavovať žiadne problémy a ani toľko času potrebného na počítanie. Avšak, ako s gradientnými metódami v deterministických nelineárnych optimalizačných úlohách, spôsob výberu krokov multiplikátorov je rozhodujúci pre rýchlosť konvergencie. V zásade môžeme konvergencie získať ak ρ^S ($S = 0, 1, \dots$) sú vybrané tak, aby (Ermoliev, 1976)

$$(1) \quad \sum_{S=0}^{\infty} \rho^S = \infty \quad (11a)$$

$$(2) \quad \rho^S \rightarrow 0 \text{ ak } S \rightarrow \infty \quad (11b)$$

$$(3) \quad \sum_{S=0}^{\infty} (\rho^S)^2 < \infty \quad (11c)$$

Pre praktickú konštrukciu kroku veľkosti riadenia rovníc (11a, b, c) majú malý význam [2].

ZÁVER

V uvedenom príspevku sme popísali význam problematiky stochastických lokačných modelov a stochastickej kvázi gradientnej metódy. V úvode príspevku sme uviedli jednoduchý prehľad danej problematiky a následne sme stochastickú kvázi gradientnú metódu aplikovali do špeciálneho jednoduchého problému. Teoretickým popisom dokážeme, že uvedená metóda sa dokáže priblížiť k riešeniu problému stochastického programovania za pomerne všeobecných podmienok.

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] Drezner Zvi, Hamacher Horst, W.: Facility Location: Applications and Theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2004
- [2] Y.M. Ermoliev, G. Leonardi: The stochastic quasi-gradient method applied to a facility location problem

Kontaktné údaje

Ing. Anna Hollá

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 2 67 295 826

email: annaholla@gmail.com

Ing. Jana Patakyová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 2 67 295 826

email: jana.pataky@gmail.com

OPEN SOURCE NÁSTROJE PRO CELOČÍSELNÉ LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

OPEN SOURCE TOOLS FOR INTEGER LINEAR PROGRAMMING

Karel Charvát

Abstrakt

Cílem tohoto článku je nastínit význam open source nástrojů pro celočíselné lineární programování a ve stručnosti představit některé produkty z této kategorie. Těmito produkty jsou doplněk OpenSolver pro MS Excel, modelovací knihovna PuLP a optimalizační řešitel CBC. Článek seznamuje čtenáře s výhodami těchto produktů a upozorňuje na možná úskalí spojená s jejich užíváním.

Klíčová slova: celočíselné lineární programování, OpenSolver, PuLP, CBC

Abstract

This paper aims to outline the importance of open source tools for integer linear programming and briefly introduce some product from this category. The products are OpenSolver for MS Excel, modeling library PuLP and optimization solver CBC. The paper acquaints readers with advantages of these products and highlights the possible difficulties connected with its use.

Keywords: integer linear programming, OpenSolver, PuLP, CBC

1 Úvod

Lineární programování, jehož počátky sahají do druhé poloviny 40. let minulého století, patří i v dnešní době mezi nejpoužívanější nástroje operačního výzkumu. Pomocí lineárních modelů je možno popsat a řešit mnoho typů rozhodovacích problémů, které se v reálném světě vyskytují. Rozšíříme-li navíc lineární programování o možnost využití podmínek celočíselnosti pro některé, nebo všechny proměnné, které model obsahuje, získáváme mocný způsob řešení rozhodovacích úloh, který nazýváme celočíselné lineární programování. Celočíselné lineární programování umožňuje popsat i celou řadu logických vazeb a stává se tak přístupem s velice širokou oblastí využitelnosti.

Široké spektrum využitelnosti celočíselného lineárního programování je jedním z hlavních důvodů pro neustálé zdokonalování algoritmů řešících úlohy tohoto typu a pro vývoj optimalizačních řešitelů, ve kterých jsou tyto algoritmy využívány.

Celočíselné lineární programování je součástí matematického programování, s jehož teoretickou i aplikační stránkou se seznamují studenti mnoha matematických, ekonomických a technických oborů na českých i zahraničních vysokých školách. I když podle zaměření jednotlivých oborů bývá na teoretickou a aplikační stránku kladen různý důraz, absolventi

těchto oborů tedy mají možnost získat během studia dovednosti potřebné pro využití matematického programování v praxi.

Praktické využití těchto dovedností ovšem většinou vyžaduje užití vhodného softwaru. Obvykle se jedná o systém na podporu modelování, které umožňuje vytvářet matematický model problémů a optimalizační řešitel, který zajistí nalezení řešení dané úlohy.

Na trhu je dnes k dispozici celá řada produktů spadajících do výše uvedených kategorií. Je možno volit z velkého počtu systémů pro podporu modelování i optimalizačních řešitelů nabízených samostatně, nebo ve formě balíčků zahrnujících modelovací prostředí a optimalizační řešitele od různých firem. Existují také modelovacích systémů, které zahrnují optimalizační řešitel jako neoddělitelnou část a neumožňují zahrnutí optimalizačního řešitele z nabídky jiné firmy.

Pořízení profesionálních optimalizačních systémů a modelovacích nástrojů ovšem většinou bývá velice nákladné. Ceny licencí umožňující využívání takového softwaru na jednom počítači se běžně pohybují v rozmezí 5000 až 10000 dolarů a v případě různých typů licencí pro serverové využívání mohou dosahovat i do výše několika desítek tisíc dolarů. Taková investice pochopitelně může být nepřijatelná pro firmu v případě, kdy analytici zvažují využití matematického programování pro interní účely a matematické modelování není běžnou součástí služeb, které daná firma poskytuje jiným subjektům.

V určitých případech tedy nastává situace, kdy firma řeší rozhodovací problém, pro jehož řešení je celočíselné lineární programování vhodnou metodou a disponuje zaměstnanci, kteří tento přístup ve větší či menší míře ovládají. Překážkou v jeho využití ovšem může být nedostupnost vhodného prostředí pro tvorbu modelu a optimalizačního řešitele, se kterými jsou tito zaměstnanci seznámeni.

Na optimalizační řešitel bývá obvykle kladen požadavek, aby byl v přijatelném čase schopen nalézt optimální řešení úlohy, řešení s hodnotou účelové funkce v rámci oblasti zvolené tolerance od hodnoty účelové funkce optimálního řešení, nebo alespoň takové řešení, které je natolik dobré, aby se úsilí a náklady vynaložené na optimalizační modelování zhodnotily.

Modelovací prostředí i optimalizační řešitele, se kterými se studenti seznamují během výuky na VŠE patří do kategorie komerčních a dle informací na webových stránkách jiných vysokých škol v České republice, které v rámci určitých předmětů rovněž vyučují matematické programování, je v tomto ohledu situace stejná i na nich. Jedná se například o ČZU a ČVUT.

Pro většinu absolventů takových předmětů je v případě potřeby řešení optimalizačních úloh nejdostupnějším nástrojem doplněk Řešitel, který je standardně dodáván jako součást aplikace MS Excel v rámci kancelářského balíku MS Office. Tento balík je sice komerčním produktem, ale díky jeho vysokému tržnímu podílu k němu má v zaměstnání přístup většina absolventů vysokých škol na analytických pozicích. Nevýhodou doplňku Řešitel je ovšem jeho malá výkonnost a limit 200 celočíselných proměnných. Vzhledem k malé výkonnosti tohoto doplňku však často bývají prakticky neřešitelné i úlohy s menším počtem

celočíselných proměnných. Někdy se tedy setkáváme s dotazy ze studentů nebo absolventů, jaký modelovací a optimalizační software použít pro řešení určitého problému z praxe, pokud se jedná o úlohu, který svým rozsahem přesahuje limity doplňku Řešitel.

Možností, jaký software v takovém případě zvolit, je několik. V následujících kapitolách se stručně seznámíme se dvěma z nich. V prvním případě se jedná o doplněk OpenSolver pro MS Excel a ve druhém o modelovací knihovnu PuLP pro jazyk Python. Oba tyto nástroje využívají optimalizační řešitel CBC vyvíjený iniciativou COIN-OR. [2]

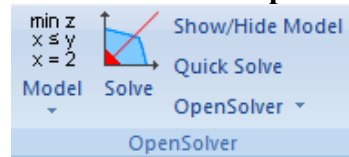
2 Doplněk OpenSolver

Pokusme se vžít do role uživatele neznalého limitů pro počty celočíselných proměnných, který vynaloží nemalé úsilí na tvorbu optimalizačního modelu pomocí doplňku Řešitel aplikace MS Excel a následně se setká s chybovou hláškou upozorňující na překročení maximálního povoleného počtu měněných buněk.

Nejsnadnějším východiskem z tohoto problému je OpenSolver. [1] Jedná se doplněk pro MS Excel určený pro formulaci a řešení úloh lineárního a celočíselného lineárního programování, který je zdarma dostupný na webu <http://opensolver.org/>. Tento doplněk je v současnosti šířen pod licencí GNU GPL 3.

Instalaci provedeme standardním způsobem pro instalaci doplňků aplikace MS Excel. Po instalaci doplňku přibude na pásu karet aplikace Excel nová položka na kartě Data.

Obrázek 1: Položka OpenSolver



Pokud se uživatel ocitne v situaci popsané v úvodním odstavci kapitoly, na první pohled ocení skutečnost, že model původně vytvořený pomocí doplňku Řešitel lze bez nutnosti úprav pomocí dvou kliknutí přímo načíst i řešit prostřednictvím doplňku OpenSolver. Původní model zůstává při tomto načtení zachován.

Pomocí doplňku OpenSolver je samozřejmě také možné nejen načíst původní model doplňku Řešitel, ale také vytvořit zcela nový model. Způsoby tvorby modelu pomocí hlavních dialogových oken obou doplňků jsou téměř totožné. Adaptace uživatel ovládajícího doplněk Řešitel na nový doplněk tedy zabere maximálně několik minut. Model vytvářený pomocí doplňku Řešitel je zároveň přenášen do doplňku OpenSolver a přenos modelů probíhá i opačným směrem. Oba nástroje je tedy možné při tvorbě jednoho modelu libovolně kombinovat. Hlavní výhodou doplňku OpenSolver oproti řešiteli aplikace Excel je ovšem možnost řešit úlohy mnohem větších rozměrů. Maximální počet proměnných ani omezení není stanoven.

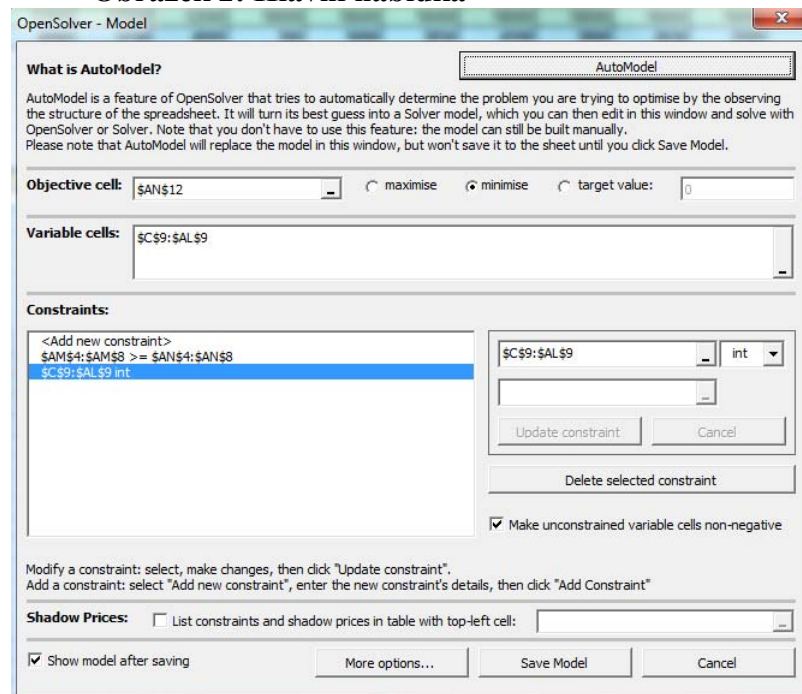
Pro samotnou optimalizaci totiž doplněk OpenSolver využívá relativně výkonný optimalizační řešitel CBC, který bude popsán později. Interakce mezi doplňkem OpenSolver a

programem CBC probíhá především prostřednictvím souboru ve formátu lp, který OpenSolver na základě vytvořeného modelu vygeneruje, a příkazu, pomocí kterého předá programu CBC potřebné parametry a povel k vyřešení úlohy. Po nalezení optimálního řešení jsou výsledné hodnoty proměnných načteny z výsledkového souboru a uloženy do měněných buněk. Celý tento proces spustíme pomocí tlačítka Solve a dále již probíhá bez nutnosti zásahů ze strany uživatele.

Doplňek OpenSolver rovněž nabízí několik možností, které nejsou pro práci klíčové, ale zvyšují celkovou uživatelskou přívětivost. Jednou z nich je například tlačítko, pomocí kterého lze graficky zvýraznit jednotlivé složky modelu.

Na doplňku OpenSolver oceňuji především intuitivní ovládání, možnost řešit i úlohy velkých rozměrů, a kompatibilitu s doplňkem Řešitel aplikace MS Excel.

Obrázek 2: Hlavní nabídka



Nevýhody využití doplňku OpenSolver vnímám především při formulaci složitějších omezujících podmínek. Tato nevýhoda je však dle mého názoru spojena především s faktem, že tabulkový kalkulátor je pro vytváření modelů se složitou strukturou celkově méně vhodným a méně přehledným nástrojem než modelovací jazyk.

Další nevýhoda se projevuje při řešení úloh s rozsáhlými vstupními daty. Pokud se počty proměnných a omezujících podmínek pohybují v řádech desítek tisíců, fáze ve které OpenSolver vytváří soubor ve formátu lp může trvat i několik desítek minut, což je v některých případech delší doba než doba, kterou optimalizační řešitel CBC potřebuje k nalezení optimálního řešení. Pokud ovšem uživatel nepředpokládá řešení úlohy pro různá vstupní data několikrát denně, delší čas zpracování rozsáhlých vstupních dat pro něj pravděpodobně nebude představovat výraznou komplikaci.

Poslední nevýhoda je spojena především z obecnými problémy doplňků pro MS Excel. Pro autory takových doplňků, obzvláště pokud vývojáři nemají k dispozici rozsáhlé týmy testerů, bývají velmi komplikované odhalování a oprava chyb, které se projevují například pouze při určitém nastavení aplikace Excel či editoru VBA, v určitém národním prostředí atd. Občas se potíže tohoto charakteru objevují i v doplňku OpenSolver. Autoři však nahlášené chyby velice ochotně odstraňují. Pro uživatele se středně pokročilými znalostmi VBA navíc obvykle není problém odhalit a odstranit takovou chybu vlastními silami a nečekat na vydání nové verze.

Doplňek OpenSolver tedy celkově vnímám jako velice zdařilý nástroj, kteří ocení především uživatelé aplikace MS Excel v případě tvorby modelů s ne příliš složitou strukturou.

Samozřejmě je třeba brát v úvahu, že MS Excel není jediný tabulkový kalkulátor existující i uživatelé, kteří k aplikaci MS Excel přístup nemají. V případě, že firma není balíkem MS Office vybavena, většinou využívá některé z open source alternativ jako například OpenOffice nebo LibreOffice, které bohužel doplňkem OpenSolverem podporovány nejsou. Tyto balíky obsahují tabulkový kalkulátor nazvaný Calc, který rovněž obsahuje nástroj nazvaný Řešitel. Řešitel těchto aplikací jsem zatím podrobněji netestoval a ani jsem dosud nenalezl výsledky podobných prováděných jinými uživateli. Řešení jisté úlohy o dělení materiálu, které Řešiteli aplikace MS Excel na mém notebooku zabere přibližně čtvrt minuty, zvládl řešitel aplikace LibreOffice ve zlomku sekundy. I tento nástroj tedy považuji za perspektivní pro podrobnější otestování.

3 Modelovací knihovna PuLP

PuLP je modelovací knihovna pro jazyk Python určená pro práci s lineárními a celočíselně lineárními modely, která je rovněž vyvíjena v rámci iniciativy COIN-OR [2] a šířena pod licencí MIT. Tato knihovna rozšiřuje Python o modelovací jazyk a rozhraní pro interakci s optimalizačními řešiteli. Podporovanými řešiteli jsou CBC, GLPK, CPLEX a GUROBI. [3] První dva u řešitelé jsou šířeny jako open source, zbývající patří mezi komerční produkty.

Využití PuLP představuje poněkud komplexnější přístup k optimalizačnímu modelování a v některých případech je výhodnější než využití doplňku OpenSolver. Klade ovšem větší nároky na znalosti uživatele a zahájení práce s tímto nástrojem může vyžadovat výrazně větší časovou investici než zahájení práce s doplňkem OpenSolver.

Pro činnost PuLP je vyžadován jazyk Python verze 2.5 nebo vyšší. Ačkoliv samotný jazyk Python je nutným minimem, které pro instalaci a užívání knihovny PuLP postačuje, pro rozumnou míru uživatelského komfortu je vhodné využít i nějaké z dostupných vývojových prostředí pro jazyk Python, například Eclipse s pluginem PyDev.

Knihovna PuLP i dokumentace jsou k dispozici na webu <http://pypi.python.org/pypi/PuLP>. Výchozím optimalizačním řešitelem, který je s PuLP dodáván, je CBC, který je využíván rovněž doplňkem OpenSolver. Ostatní podporované řešitele, mají-li být užívány, je třeba instalovat samostatně.

Jako drobnou ukázkou modelu vytvořeného pomocí PuLP použijeme formulaci úlohy obchodního cestujícího, jejíž matematický model můžeme nalézt např. v [9]

```
from pulp import *
from xls_read_write.xlsRange import readXlsData

distances = readXlsData("tsp2.xls","distances")
places = range(len(readXlsData("tsp2.xls","places")))

x=LpVariable.dicts(name='x',indexs=(places,places),cat="Binary")
delta=LpVariable.dicts(name='delta',indexs=(places),cat="Continuous")
model=LpProblem("TSP",LpMinimize)

model+= lpSum([distances[i][j]*x[i][j] for i in places for j in places])
for i in places:
    model+=lpSum([x[i][j] for j in places])==1,"from place " + str(i)
for j in places:
    model+=lpSum([x[i][j] for i in places])==1,"to place " + str(j)
for i in places:
    for j in places:
        if j>0:
            model+=delta[i]-delta[j]+len(places)*x[i][j]<=len(places)-1,""
model.solve(COIN_CMD(msg=1))
print "Status ", LpStatus[model.status]
val_x=[[None for j in places] for i in places]
for i in places:
    for j in places:
        val_x[i][j]=value(x[i][j])
        if value(x[i][j]) > 0:
            print "From",i, " to ", j

print "Path length:", value(model.objective)
```

Úvodní část kódu slouží pro načtení externích modulů. Následuje načtení vstupních dat, deklarace proměnných, zápis úlohy, příkaz k vyřešení a výpis výsledků. Funkce readXlsData() slouží k načtení vstupních dat z pojmenované oblasti v souboru xls. Její zdrojový kód z důvodu úspory místa nebude v této práci uveden.

Matematické modelování s použitím knihovny PuLP tedy vyžaduje alespoň základní znalosti jazyku Python. Má-li ovšem uživatel zkušenosti s kterýmkoliv jiným programovacím jazykem, osvojení nutných základů díky jednoduché a dobře čitelné syntaxi jazyku Python zabere relativně krátkou dobu.

Knihovna PuLP je zaměřena výhradně na formulaci modelů a interakci s řešiteli. Pro ostatní úkony spojené s modelováním jako například získávání vstupních dat a zpracování výsledků je možno využít standardní prostředky jazyku Python, nejrozličnější rozšiřující balíčky, případně vytvořit vlastní moduly či balíčky.

Díky jednoduché syntaxi jazyku Python a možnostem spolupráce s CBC považují knihovnu PuLP za vhodnou pro každého, kdo potřebuje zdarma dostupné nástroje pro řešení úloh celočíselného lineárního programování, a tabulkový kalkulátor s modelovacími doplňky pro něj není dostačující například z důvodu složité struktury sestavovaných modelů, nebo z důvodů nutnosti spolupráce s aplikacemi, pro které je komunikace s aplikací MS Excel příliš komplikovaná nebo nemožná.

4 Optimalizační řešitel CBC

[4] CBC je optimalizační řešitel určený pro řešení lineárních i celočíselně lineárních úloh, který je vyvíjen členy iniciativy COIN-OR. Je k dispozici ve formě knihovny i spustitelné aplikace. Jako u ostatních open source projektů jsou samozřejmě k dispozici i zdrojové kódy, které jsou v případě CBC vytvářeny v jazyce C++.

CBC je vyvíjen pro činnost na různých platformách. Dle slov autorů je primární platformou Linux, na kterém probíhá většina odladování a testování. S určitým zpožděním jsou však nové verze kompilovány i pro Windows a CBC je mnohdy jinými vývojáři využíván i v rámci nástrojů, které jsou určeny výhradně pro operační systém Windows.

V současnosti je šířen pod licencí Eclipse Public Licence 1.0. CBC při hledání optimálního řešení využívá pro některé dílčí úkony jako svou součást i jiné nástroje vyvíjené v rámci iniciativy COIN-OR, například řešitel Clp pro řešení lineární relaxace celočíselných úloh.

Maximální počet omezujících podmínek, spojitých ani celočíselných proměnných není pro úlohy řešené pomocí CBC nijak uměle omezen. Maximální rozměry úlohy, které je CBC schopen vyřešit, jsou tedy určeny vlastnostmi úlohy, nastavením volitelných parametrů ovlivňujících postup při optimalizaci, hardwarem a časem, který je pro hledání řešení k dispozici. CBC pro hledání celočíselných řešení používá metodu větví a řezů. Uživatel má možnost proces hledání optimálního řešení ovlivnit pomocí mnoha parametrů. Takto lze stanovit například pravidla pro úpravu úlohy (preprocessing), pravidla pro používání různých typů řezů, pravidla pro volbu proměnných, dle kterých probíhá větvení, i pravidla pro užívání různých heuristik. CBC si však obvykle vede dobře i při svém výchozím nastavení, ve kterém o způsobu využití výše uvedených technik ve velké míře rozhoduje sám. V některých případech je možné v horizontu minut či desítek minut nalézt optimální řešení úloh, které obsahují i tisíce obecně celočíselných nebo několik desítek tisíc binárních proměnných. I když se CBC nevryvná nejvýkonnějším komerčním řešitelům, z hlediska výkonnosti patří mezi špičku na poli open source řešitelů zdarma dostupných i pro komerční účely.

Na [6] můžete nalézt výsledky benchmarku optimalizačních řešitelů, ve kterém byla výkonnost CBC porovnávána mimo jiné i s nevýkonnějšími komerčně vyvíjenými produkty.

Dle těchto testů si nejlépe vedl GUROBI. CBC sice ve většině případů oproti GUROBI potřeboval k nalezení optimálního řešení několikanásobně delší a některé z úloh, které GUROBI do několika minut vyřešil, CBC ve stanoveném časovém limitu 3600 sekund vyřešit neokázal. Vezmeme-li ovšem v úvahu fakt, že cena licence pro užívání řešitele GUROBI [7] na jednom PC v současnosti přesahuje 8000 dolarů a CBC je nabízen zdarma, považují výsledky, kterých CBC v testech dosáhl, za velmi dobré.

Jako hlavní slabinu CBC vnímám především dokumentaci, která je neúplná, poměrně nepřehledná a neodpovídá aktuální verzi. Tyto nedostatky mohou uživatelům komplikovat práci především v situaci, kdy z jakéhokoliv důvodu potřebují činnost CBC ovlivňovat pomocí parametrů.

5 Závěr

V tomto článku jsme se stručně seznámili se zdarma dostupnými nástroji vhodnými pro uživatele, kteří příležitostně potřebují řešit úlohy celočíselného lineárního programování.

Nástroj OpenSolver jsem testoval převážně na typových úlohách, se kterými se studenti seznamují při výuce. U těchto úloh však byl oproti běžným školním úlohám výrazně zvětšen rozsah vstupních dat.

Pro testování modelovací knihovny PuLP a řešitele CBC jsme kromě typových úloh využil i různé varianty a různé sady vstupních dat z praxe vycházející úlohy týkající se plánování zemědělské produkce. [8]

I přes některé nedostatky zmiňované v předcházejících kapitolách považuji své zkušenosti s těmito nástroji za převážně pozitivní. Skutečnost, že použitelné nástroje tohoto typu vznikají, považuji za jeden z faktorů, který může napomoci širšímu uplatnění metod operačního výzkumu v praxi.

Ačkoliv je tento článek zaměřen na open source produkty, není jeho účelem odrazovat od případného využití těch komerčních, které mají proti produktům popisovaným v tomto článku celou řadu výhod. Mezi takové patří například vyšší výkonnost, mnohdy přívětivější uživatelské rozhraní, profesionální dokumentace a technická podpora. Všechny výše uvedené výhody komerčních produktů napomáhají k úspoře času vynaložené na optimalizační modelování. Úspora nákladů spojená s touto úsporou času může v mnohých případech převážit nad úsporou pořizovacích nákladů v případě využití open source produktů.

Při porovnávání open source produktů s komerčními nástroji a očekávání budoucího stavu je nutné vzít v úvahu, že komerční produkty mají oproti COIN-OR založené v roce 2000, která představuje nejvýznamnější open source iniciativu v oblasti nástrojů pro matematické programování, více než desetiletý časový nadskok ve vývoji, což se v současné kvalitě jednotlivých nástrojů pochopitelně projevuje. Aktivita COIN-OR však postupně vzrůstá, a nové verze některých nástrojů jsou vydávány i několikrát ročně. Je tedy možné, že produkty COIN-OR v budoucnu začnou představovat vážné ohrožení především pro firmy, jejichž komerční produkty nepatří mezi špičku.

Použitá literatura

1. MASON, A., IAIN, D.: *OpenSolver home page* [Online]. [cit. 2011-11-25]. Dostupné z: <http://opensolver.org/>
2. *COIN-OR* [Online]. [cit. 2011-11-25]. Dostupné z: <http://www.coin-or.org/>
3. STUART, M., KEAN, A., MASON, A., O'SULLIVAN, M., PHILPIS, A.: *PuLP v 1.4.9 documentation* [Online]. [cit. 2011-11-25]. Dostupné z: <http://packages.python.org/PuLP/>
4. *CBC home page* [Online]. [cit. 2011-11-25] Dostupné z: <https://projects.coin-or.org/Cbc>
5. FORREST, J.: *CBC User Guide* [Online]. [cit. 2011-11-25]. Dostupné z: <http://www.coin-or.org/Cbc/index.html>

6. MITTELMANN, H.: *Benchmarks for Optimization Software*. [Online]. [cit. 2011-11-25]. Dostupné z: <http://plato.asu.edu/bench.html>
7. *Gurobi home page*. [Online] [cit. 2011-11-24]. Dostupné z <http://www.gurobi.com/>
8. CHARVÁT, K., GNIP, P.: *COIN – Module for Tactical planning of agriculture production*. Praha 11.07.2011 – 14.07.2011. In: *EFITA/WCCA*. Praha : Czech Centre for Science and Society, 2011, s. 166–174. ISBN 978-80-904830-0-2.
9. JABLONSKÝ, J., *Programy pro matematické modelování..VŠE*, Praha, 2007.

Kontaktní údaje

Ing. Karel Charvát

Vysoká škola ekonomická v Praze, Katedra ekonometrie

Nám. W.Churchilla 4, 13067 Praha 3

Tel: (+420) 732 941 415

email: charvat.k@seznam.cz

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/18/2011 "Efektivita a optimalita v ekonomickém rozhodování: modelový přístup"

VZŤAH VOLATILITY BURZOVÝCH VÝNOSOV A CENOVÉHO ROZPÄTIA¹

RELATIONSHIP BETWEEN VOLATILITY OF THE STOCK RETURNS AND HIGH – LOW PRICE SPREADS

Michaela Chocholatá

Abstrakt

Predmetom príspevku je modelovanie volatility denných hodnôt burzových výnosov pre vybranú skupinu indexov krajín východnej Európy, a to maďarský BUX, poľský WIG20 a rumunský BET s využitím modelu EGARCH, ktorý umožňuje zachytenie asymetrických efektov vo volatilitate a preskúmanie vplyvu zaradenia cenového rozpätia, resp. semirozpätí na úroveň a volatilitu burzových výnosov pre túto trojicu burzových indexov.

***Kľúčové slová:** burzový výnos, cenové rozpätia, cenové semirozpätia, volatilita*

Abstract

This paper deals with modelling of the volatility of daily values of stock returns for selected East European countries – Hungarian BUX, Polish WIG20 and Romanian BET. The conditional volatility model EGARCH was used in order to capture the asymmetric effects in volatility. Furthermore it was investigated the effect of inclusion of the price spread and upper/lower semi-ranges, respectively, onto the conditional mean and volatility of the three above mentioned stock returns.

***Keywords:** stock returns, high – low price spreads, semi – ranges, volatility*

1 ÚVOD

Časové rady burzových indexov predstavujú obľúbený predmet analýzy vo finančnej ekonometrii. Obvykle však predmetom analýz nebývajú samotné časové rady indexov, ale časové rady burzových výnosov, pričom analýzy sa obvykle realizujú na zlogaritmovaných časových radoch. Typickou črtou časových radov burzových výnosov je v čase sa meniaci volatilita, resp. tzv. zhukovanie volatility, čo z hľadiska konštrukcie ekonometrického modelu predstavovalo značnú výzvu. Hoci tejto problematike bolo už od počiatku 20. storočia venovaných viacero výskumných štúdií (pozri napr. [8]), prvým formálnym modelom umožňujúcim zachytenie v čase sa meniacej variability bol až Englem [3] v roku 1982 prezentovaný model autoregresnej podmienenej heteroskedasticity ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity). V priebehu posledného štvrtstoročia boli vyvinuté rôzne modifikácie tohto modelu (pozri napr. [1], [4], [18]), pričom najznámejším je Bollerslevov [2] zovšeobecnený model GARCH (Generalized ARCH), či nelineárne modifikácie umožňujúce zachytenie asymetrických efektov vo volatilitate, ako napr. Zakoianov [20] model TGARCH (Threshold GARCH), exponenciálny model EGARCH (Exponential GARCH) prezentovaný

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0595/11 „Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód“.

Nelsonom [13], či jeho integrované verzie: model IEGARCH (Integrated EGARCH) alebo frakcionálny model FIEGARCH (Fractionally IEGARCH) – pozri napr. [1].

Z hľadiska skúmania vývoja finančných časových radov výnosov zohráva tiež významnú úlohu preskúmanie vplyvu efektov jednotlivých dní týždňa, jednotlivých mesiacov, efektu konca roka či vplyvu fázy hospodárskeho cyklu na úroveň volatility [7], [16], [17]. Viacerí autori sa zaoberali tiež testovaním zaradenia obchodovaného množstva do modelu volatility s cieľom preskúmať jeho vplyv na zotrvačnosť volatility [5], [9], [12], [19]. Predmetom záujmu je taktiež vplyv zahrnutia cenového rozpätia (t.j. rozdielu medzi minimálnou a maximálnou cenou), resp. tzv. semirozpätí do rovnice úrovne i do rovnice volatility [6], [10], [14]².

Cieľom príspevku je analýza volatility denných hodnôt burzových výnosov pre vybranú skupinu indexov krajín východnej Európy, a to maďarský BUX, poľský WIG20 a rumunský BET s využitím modelu EGARCH a preskúmanie vplyvu zaradenia cenového rozpätia, resp. semirozpätí na úroveň a volatilitu výnosov pre túto trojicu burzových indexov.

2 DÁTA A POUŽITÁ METODOLÓGIA

Predmetom analýzy sú denné hodnoty burzových indexov BUX, WIG20 a BET, a to maximálna, minimálna a uzatváracia cena. Dáta boli získané z internetovej stránky [21] za obdobie 1.11.2006 – 6.10.2011, čo predstavovalo pre jednotlivé indexy nasledovný počet pozorovaní: BUX - 1236, WIG20 - 1238 a BET- 1235. Celá analýza bola zrealizovaná v prostredí ekonometrického softvéru EViews 5.1.

Burzové výnosy r_t na báze uzatváracích hodnôt boli vypočítané podľa vzťahu (1), kde $Close_t$ predstavuje uzatváraciu cenu v čase t , t.j.

$$r_t = \ln(Close_t / Close_{t-1}) \quad (1)$$

Rovnicu úrovne, t.j. rovnicu podmienenej strednej hodnoty, možno vo všeobecnosti písať vo forme ARMA(m,n) modelu v tvare

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^m \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^n \theta_k \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t \quad (2)$$

kde ω_0 predstavuje konštantu, ϕ_j ($j=1,2,\dots,m$) a θ_k ($k=1,2,\dots,n$) sú parametre zodpovedajúceho ARMA(m, n) modelu a ε_t má charakter náhodnej zložky, o ktorej predpokladáme, že má podmienene normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a rozptylom h_t založenom na informačnej množine Ω_{t-1} obsahujúcej všetky relevantné informácie až do obdobia $t-1$, t.j.

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (3)$$

² V literatúre sa možno stretnúť s pojmi horné, resp. dolné semirozpätie, ktoré sú definované ako rozdiel medzi maximálnou a uzatváracou cenou v predchádzajúcom obchodnom dni, resp. medzi uzatváracou a minimálnou cenou v predchádzajúcom obchodnom dni.

S cieľom zachytiť aj možné asymetrické efekty pri modelovaní volatility, bol pri jej modelovaní využitý model EGARCH(p, q) s logaritmom podmieneného rozptylu v tvare

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \quad (4)$$

kde h_t označuje podmienený rozptyl, ε_t náhodnú zložku, p predstavuje rád GARCH člena, q rád ARCH člena a α_i , β_i a γ_i sú neznáme hodnoty parametrov. Vzhľadom na tvar rovnice podmieneného rozptylu je zrejmé, že nezápornosť h_t je zabezpečená pri akýchkoľvek hodnotách parametrov α_i , β_i a γ_i . O asymetrii vo volatilitate možno hovoriť, ak $\gamma_i \neq 0$. Prítomnosť tzv. pákového efektu potvrdzuje hodnota $\gamma_i < 0$.

Za účelom preskúmania vplyvu cenového rozpätia, resp. cenových semirozpätí na úroveň a volatilitu časových radov burzových výnosov bolo potrebné modifikovať rovnicu úrovne (2) i rovnicu podmieneného rozptylu (4). Cenové rozpätie S_t je definované ako rozdiel medzi logaritmom maximálnej a logaritmom minimálnej ceny v predchádzajúcom obchodnom dni

$$S_t = \ln(\text{Max}_{t-1}) - \ln(\text{Min}_{t-1}) \quad (5)$$

a cenové semirozpätia – horné SH_t a dolné SD_t ako rozdiel medzi logaritmom maximálnej a logaritmom uzatváracej ceny v predchádzajúcom obchodnom dni, resp. medzi logaritmom uzatváracej a logaritmom minimálnej ceny v predchádzajúcom obchodnom dni

$$SH_t = \ln(\text{Max}_{t-1}) - \ln(\text{Close}_{t-1}) \quad (6a)$$

$$SD_t = \ln(\text{Close}_{t-1}) - \ln(\text{Min}_{t-1}). \quad (6b)$$

Rovnice (2) a (4) po zahrnutí cenového rozpätia (5) majú nasledujúci tvar

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^m \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^n \theta_k \varepsilon_{t-k} + \eta S_t + \varepsilon_t \quad (7)$$

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} + \delta S_t. \quad (8)$$

Po zahrnutí horného semirozpätia (6a) a dolného semirozpätia (6b) možno rovnice podmienenej strednej hodnoty (2) a podmieneného rozptylu písať v tvare

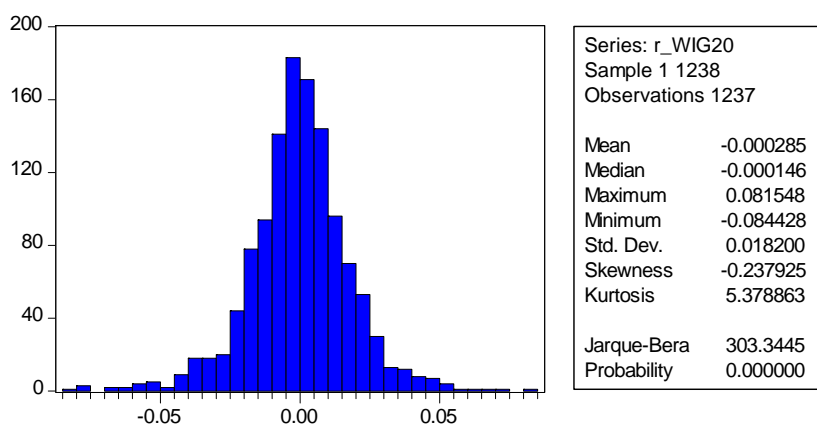
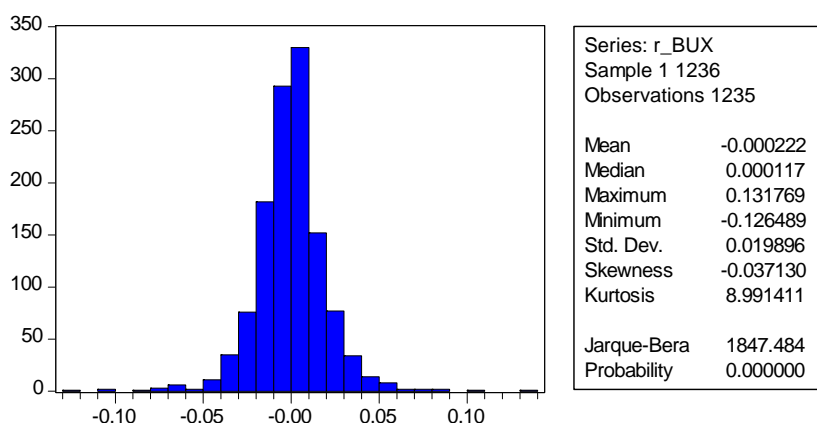
$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^m \phi_j r_{t-j} + \sum_{k=1}^n \theta_k \varepsilon_{t-k} + \eta_H SH_t + \eta_D SD_t + \varepsilon_t \quad (9)$$

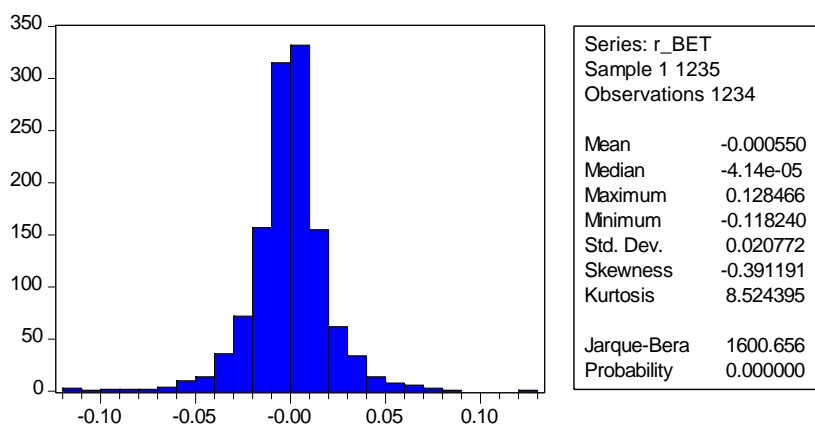
$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(h_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} + \delta_H SH_t + \delta_D SD_t. \quad (10)$$

3 EMPIRICKÉ VÝSLEDKY

Základné deskriptívne štatistiky analyzovaných časových radov logaritmickej burzových výnosov vrátane histogramu sú súčasťou grafov 1 – 3. Priemerné denné logaritmickej burzové výnosy sa vo všetkých troch prípadoch pohybovali okolo nulovej hodnoty, štandardné odchýlky okolo 2%. Na posúdenie normality rozdelenia možno využiť hodnoty Jarqueho-Berovej testovacej štatistiky, ktorá porovnáva šikmost' a špicatosť analyzovaného časového radu so šikmost'ou a špicatosťou normálneho rozdelenia. Hodnoty koeficientov šikmosti boli nenulové a záporné, čo indikuje negatívne zošikmenie logaritmickej burzových výnosov všetkých analyzovaných časových radov. Koeficienty špicatosti boli vo všetkých prípadoch kladné čísla prevyšujúce hodnotu 3, čo indikuje vyššiu špicatosť v porovnaní s normálnym rozdelením. Na základe hodnôt Jarqueho-Berovej štatistiky možno teda vo všetkých prípadoch predpoklad o normalite rozdelenia zamietnuť.

Grafy 1 – 3 Deskriptívne štatistiky časových radov výnosov vypočítaných podľa vzťahu (1)





Pre jednotlivé časové rady logaritmickej burzových výnosov boli na základe testovania rezíduí, resp. ich druhých mocnín ďalej zvolené vhodné modely úrovne a modely podmienenej heteroskedasticity EGARCH(p,q) v tvare uvedenom v tabuľke 1. Na základe rozšíreného Dickeyho – Fullerovho testu (ADF testu) jednotkového koreňa možno konštatovať, že všetky analyzované časové rady logaritmickej burzových výnosov sú stacionárne (pozri hodnoty ADF štatistiky pre model s trendom i s konštantou v tabuľke 1).

Tabuľka 1 Tvary modelov úrovne a modelov EGARCH, výsledky ADF testu

	Model úrovne	Model EGARCH	ADF štatistika
BUX	bez AR a MA členov	EGARCH(1,1)	-26,580***
WIG20	bez AR a MA členov	EGARCH(2,1)	-26,419***
BET	s členom AR(1)	EGARCH(1,1)	-32,065***

Poznámka: Symboly ***, **, * označujú v celom príspevku zamietnutie hypotézy H_0 na hladine významnosti 1 %, 5 % a 10 %.

V prvom kroku boli odhadnuté parametre modelov úrovne (2) a modelov podmienenej heteroskedasticity (4), pričom výsledky sú uvedené v tabuľke 2. Logaritmickej burzové výnosy sa vzhľadom na hodnoty parametra β_1 blížiac sa k jednej vo všetkých troch prípadoch vyznačujú vysokou zotrvačnosťou volatility. Na oprávnenosť využitia modelov EGARCH umožňujúcich zachytenie asymetrických efektov poukazujú štatisticky významné hodnoty parametra γ_1 . Negatívna hodnota parametra γ_1 indikuje, že negatívne šoky vedú k väčšiemu zvýšeniu volatility v porovnaní s pozitívnymi šokmi rovnakej veľkosti.

Tabuľka 2 Odhady parametrov modelov úrovne (2) a modelov podmienenej heteroskedasticity (4)

	ω_0	ϕ_0	α_0	α_1	α_2	γ_1	β_1
BUX	-2.10^{-4}	-	-0,326**	0,193***	-	-0,069***	0,978***
WIG20	-3.10^{-4}	-	-0.230***	-0.128**	0.255***	-0.099***	0.984***
BET	-6.10^{-5}	0.077***	-0.791***	0.461***	-	-0.042**	0.946***

Adekvátnosť zvoleného typu modelu v jednotlivých prípadoch potvrdzujú na hladine významnosti 1% aj výsledky testov štandardizovaných rezíduí uvedené v tabuľke 3, a to nekorelovanosť rezíduí, resp. ich druhých mocnín pre 12 a 200 oneskorení (Ljungova – Boxova štatistika $Q(12)$ a $Q(200)$, resp. $Q^2(12)$ a $Q^2(200)$) a neexistencia zvyškovej podmienenej heteroskedasticity pre jedno oneskorenie (hodnoty testu Lagrangeových multiplikátorov $LM(1)$).

Tabuľka 3 Výsledky testov štandardizovaných rezíduí modelov z tabuľky 2

	LM(1)	Q(12)	Q(200)	$Q^2(12)$	$Q^2(200)$
BUX	2,210	17,515	155,960	7,058	193,77
WIG20	0,566	10,101	223,94	15,909	161,18
BET	0,025	11,849	188,63	10,527	236,21**

Odhady parametrov modelov úrovne a modelov podmienenej heteroskedasticity EGARCH po zahrnutí cenového rozpätia, t.j. modelov (7) a (8) sú v ľavej časti tabuľky 4. V prípade logaritmického burzového výnosu BUX bolo cenové rozpätie štatisticky významné na hladine významnosti 1% v rovnici podmieneného rozptylu, pričom možno v tomto prípade tvrdiť, že premenná cenové rozpätie i premenné modelu EGARCH prispievajú k vysvetľovaniu volatility analyzovaného časového radu a nie sú vzájomnými substitútmi. Cenové rozpätie v rovnici úrovne i v rovnici podmieneného rozptylu bolo štatisticky významné na hladine významnosti 5%, resp. 1% v prípade logaritmického burzového výnosu BET, štatisticky nevýznamným sa však stal parameter γ_1 . Možno sa teda domnievať, že cenové rozpätie vysvetľuje asymetrický efekt, keďže bolo potvrdené, že cenové rozpätie prispieva k vysvetľovaniu volatility analyzovaného časového radu a existencia asymetrického efektu zavedením cenového rozpätia prestala byť z hľadiska vysvetľovania volatility štatisticky významná. Odlišné výsledky boli získané pre logaritmický burzový výnos WIG20, pre ktorý sa štatistická významnosť cenového rozpätia neprejavila ani v rovnici úrovne ani v rovnici podmieneného rozptylu.

Tabuľka 4 Odhady parametrov modelov úrovne (7), resp. (9) a modelov podmienenej heteroskedasticity (8), resp. (10)

<i>Modely s rozpätím, t.j. (7), (8)</i>			<i>Modely so semirozpätiami, t.j. (9) a (10)</i>				
	BUX	WIG20	BET		BUX	WIG20	BET
ω_0	-8.10^{-4}	6.10^{-4}	0,001	ω_0	-8.10^{-4}	8.10^{-4}	0,001
ϕ_0	-	-	0,117***	ϕ_0	-	-	0,064
η	0,042	-0,63	-0,103**	η_H	0,050	-0,099**	-0,181**
-	-	-	-	η_D	0,034	-0,051	-0,030
α_0	-0,775***	-0,383***	-1,995***	α_0	-0,769***	-0,374***	-1,995***
α_1	0,143***	-0,147***	0,336***	α_1	0,144***	-0,171***	0,343***
α_2	-	0,252***	-	α_2	-	0,261***	-

γ_1	-0,069***	-0,093***	-0,034	γ_1	-0,066**	-0,074***	0,005
β_1	0,930***	0,968***	0,818***	β_1	0,930***	0,968***	0,818***
δ	4,021***	1,844	11,162***	δ_H	4,210**	4,281**	13,742***
-	-	-	-	δ_D	3,744*	-0,195	7,932**

Z výsledkov testov štandardizovaných rezíduí po zahrnutí cenového rozpätia do rovnice úrovne i rovnice podmieneného rozptylu uvedených v tabuľke 5 je zrejma neexistencia zvyškovej podmienenej heteroskedasticity a taktiež nekorelovanosť štandardizovaných rezíduí i štvorcov štandardizovaných rezíduí na hladine významnosti 1% pre všetky tri analyzované časové rady logaritmických burzových výnosov.

Tabuľka 5 Výsledky testov štandardizovaných rezíduí pre modely s rozpätím

	LM(1)	Q(12)	Q(200)	Q ² (12)	Q ² (200)
BUX	2,141	16,980	155,17	8,1311	206,86
WIG20	0,846	10,704	228,53*	15,618	166,51
BET	0,088	7,121	183,75	9,328	215,49

Pravá časť tabuľky 4 obsahuje odhady parametrov modelov úrovne a modelov podmienenej heteroskedasticity EGARCH po zahrnutí cenových semirozpätí, t.j. modelov (9) a (10). Štatistická významnosť horného semirozpätia bola v modeli úrovne (9) potvrdená na hladine významnosti 5% pre burzové výnosy WIG20 a BET, pričom zodpovedajúci parameter η_H nadobudol v oboch prípadoch negatívnu hodnotu, čo znamená, že s nárastom premennej horné semirozpätie sa znižuje podmienená stredná hodnota logaritmických burzových výnosov. Vzhľadom na štatistickú nevýznamnosť dolného semirozpätia v modeli (9) možno v prípade týchto dvoch logaritmických burzových výnosov tvrdiť, že horné semirozpätie na rozdiel od dolného semirozpätia prispieva k vysvetleniu podmienenej strednej hodnoty analyzovaných časových radov. Oprávnenosť zahrnutia semirozpätí do modelov podmienenej heteroskedasticity bola pre horné i dolné semirozpätie potvrdená pre logaritmické burzové výnosy BUX a BET a pre horné semirozpätie pre logaritmický burzový výnos WIG20. Zotrvačnosť volatility po zavedení semirozpätí do modelu (10) poklesla vo všetkých analyzovaných prípadoch. V prípade časového radu logaritmických burzových výnosov BET bolo opäť potvrdené, že zaradenie cenových semirozpätí prispieva k vysvetľovaniu volatility analyzovaného časového radu a existencia asymetrického efektu zavedením cenového rozpätia prestala byť z hľadiska vysvetľovania volatility štatisticky významná. Adekvátnosť voľby použitých modelov potvrdzujú výsledky testov štandardizovaných rezíduí uvedené v tabuľke 6.

Tabuľka 6 Výsledky testov štandardizovaných rezíduí pre modely so semirozpätiami

	LM(1)	Q(12)	Q(200)	Q ² (12)	Q ² (200)
BUX	2,081	17,657	156,16	7,852	206,96
WIG20	0,680	10,092	225,53	16,078	161,78
BET	0,085	7,150	184,03	9,604	217,67

4 ZÁVER

V príspevku sme analyzovali volatilitu časových radov logaritmických burzových výnosov BUX, WIG20 a BET s využitím nelineárneho modelu EGARCH umožňujúceho zachytenie asymetrických efektov. Preskúmali sme tiež efekty zavedenia cenového rozpätia, resp. cenových semirozpätí do modelov úrovne i modelov podmienenej heteroskedasticity. O adekvátnosti zvoleného modelu podmienenej heteroskedasticity typu EGARCH svedčia výsledky testov štandardizovaných reziduí a štvorcových štandardizovaných reziduí, ktoré boli na hladine významnosti 1% nekorelované a taktiež nebola potvrdená existencia zvyškovej podmienenej heteroskedasticity. Pokiaľ ide o zahrnutie cenového rozpätia (cenových semirozpätí) do modelu úrovne, resp. do modelu podmienenej heteroskedasticity, boli pre jednotlivé logaritmické burzové výnosy dosiahnuté rôzne výsledky neumožňujúce prijať jednoznačný záver.

Kým zavedenie cenového rozpätia (cenových semirozpätí) do príslušných modelov malo v prípade rumunského BET za následok stratu štatistickej významnosti parametra indikujúceho existenciu asymetrického efektu, takýto vplyv sa vo zvyšných dvoch prípadoch nepotvrdil. V prípade maďarského BUX sa potvrdila len oprávnenosť zahrnutia cenového rozpätia (cenových semirozpätí) do modelu podmienenej heteroskedasticity. Pre poľský WIG20 nebolo potvrdené zahrnutie cenového rozpätia ani do modelu úrovne ani do modelu podmienenej heteroskedasticity, zahrnutie horného semirozpätia do modelu úrovne i do modelu podmienenej heteroskedasticity sa však ukázalo ako štatisticky významné.

Použitá literatúra

- [1] ARLT, J.- ARLTOVÁ, M.: *Finanční časové řady*. Praha, GRADA 2003.
- [2] BOLLERSLEV, T.: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. Journal of Econometrics 31, 1986, č.3.
- [3] ENGLE, R.F.: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. Econometrica 50, 1982, č.4.
- [4] FRANCES, P. H. – DIJK, D. van: *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [5] GURSOY, G. – YUKSEL, A. – YUKSEL, A.: *Trading volume and stock market volatility: evidence from emerging stock markets*. Investment Management and Financial Innovations, Vol. 5, Issue 4, 2008, s. 200 – 210.
- [6] CHEN, A-S.: *Volatility of Exchange Rate Futures and High-Low Price Spreads*. Journal of Economics and Finance. Vol. 21, No. 1, Spring 1997, s. 33-42.
- [7] CHOCHOLATÁ, M.: *Existencia efektu dní týždňa pri analýze burzových výnosov a výmenných kurzov s využitím modelov TGARCH*. In: Logos Polytechnikos (odborný recenzovaný časopis Vysoké školy polytechnickej Jihlava), ročník II, 2011, č. 3, ISSN 1804-3682, s. 52-63.
- [8] IVANIČOVÁ, Z. a kol.: *Modelovanie vybraných problémov slovenskej ekonomiky pred vstupom do Európskej menovej únie (aktuálne metodologické prístupy)*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009, 380 s.
- [9] LAMOUREUX, Ch. G.- LASTRAPES, W.D.: *Heteroskedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects*. Journal of Finance XLV, 1990, č. 1.
- [10] LIN, J.-Ch. – ROZEFF, M.S.: *Variance, Return, and High-Low Price Spreads*. Journal of Financial Research XVII, 1994, č.3.
- [11] LUKÁČIK, M. - LUKÁČIKOVÁ, A.: *Heteroskedasticita v ekonometrických modeloch*. In Ekonomika a informatika, roč. 5, č. 1, 2007, Bratislava: FHI EU, 2007, s. 96-106.

- [12] MIYAKOSHI T.: *News and Asian Emerging Markets*. Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies. Vol. 9, No. 3, 2006, s. 359-384.
- [13] NELSON, D.: Conditional *heteroskedasticity in asset returns: A new approach*. Econometrica 59, 1991, s. 347-370.
- [14] PARKINSON, M.: *The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return*. Journal of Business 53, 1980, č.1.
- [15] PEKÁR, J. – ČIČKOVÁ, Z. - BREZINA, I.: *Expected equity returns in Slovakia using the Black-Litterman model*. In Strategic management : international journal of strategic management and decision support systems in strategic management. - Subotica : University of Novi Sad, Faculty of Economics, 2010, Vol. 16, No. 2, s. 69-73.
- [16] ROSENBERG, M.: The Monthly Effect in Stock Returns and Conditional Heteroscedasticity. The American Economist 48, 2004, č.2.
- [17] RUBLÍKOVÁ, E.: ARCH and GARCH Models for Daily Exchange Rate of SKK/USD. Ekonomické rozhľady XXXIII, 2004, č.3.
- [18] RUBLÍKOVÁ, E. – PRÍHODOVÁ, I.: *Analýza vybraných časových radov - ARIMA modely*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008.
- [19] SHARMA, J.L. – MOUGOUE, M. – KAMATH, R.: *Heteroscedasticity in stock market indicator return data: volume versus GARCH effects*. Applied Financial Economics, Vol. 6, 1996, s. 337-342.
- [20] ZAKOIAN, J.M.: *Threshold Heteroskedastic Models*. Journal of Economic Dynamics and Control, 18, 1994, s. 931-955.
- [21] stooq.pl
- [22] EViews 5 User's Guide

Kontaktné údaje

Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: chocholatam@yahoo.com

OPTIMALIZACE V PROGRAMU MAPLE 13

OPTIMIZATION IN MAPLE 13

Viktor Chrobok

Abstrakt

Práce se zabývá možnostmi řešení optimalizačních úloh pomocí programu Maple. Nejprve jsou popsány metody řešení úloh matematického programování, které Maple umožňuje používat. Pro lineární, celočíselné a kvadratické úlohy nabízí program pouze jednu metodu řešení, pro nelineární úlohy je k dispozici 6 metod řešení a pro regresní optimalizační úlohy je možné použít 3 metody. V druhé části práce je uveden postup řešení optimalizačních úloh pomocí testovaného software. Jsou zde uvedeny možnosti zadávání úloh, poté způsoby, jak graficky zobrazit řešení úloh. Na závěr je uvedeno srovnání optimalizačního modulu a pomocí příkazového řádku.

Klíčová slova: Maple, optimalizace

Abstract

The paper is focused on optimization possibilities in software Maple. Firstly there is given a description of methods for solving mathematical programming problems, which are supported by Maple. There is just one method for solving linear, integer and quadratic problems; 6 methods are available for non-linear programming and 3 methods are supported for least squares optimization problems. Secondly there is a description of the optimizing process in the tested software. There is shown how to enter and how to plot mathematical problems. There is also a comparison of solving by optimization module and by command line.

Keywords: Maple, optimization

1 ÚVOD

Cílem této práce je popsat možnosti řešení úloh matematického programování v software Maple. Pro tvorbu práce byl použit software Maple verze 13 z roku 2009. Pro výpočet optimalizačních úloh je nutné mít balíček „optimization“. Práce čerpá zejména z manuálu k programu, ve kterém jsou popsány metody, které program používá a také příklady použití software pro optimalizační úlohy.

V práci jsou nejprve popsány optimalizační metody, které software používá. Poté je na několika příkladech ukázán postup, jakým lze řešit optimalizační úlohy v testovaném programu.

Maple je univerzální matematický software, pomocí kterého lze řešit velmi širokou škálu matematických úloh. Jedná se o komerční program, který je na trhu již od roku 1988 a nyní je v oběhu již 15. verze. Program se poměrně jednoduše ovládá, a přesto je ve výpočtech poměrně rychlý a přesný. Maple má uživatelské rozhraní pro použití s programovacími jazyky C, C#, Java, Visual Basic a MATLAB, zároveň je možný import a export dat z a do MS Excel.

2 OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY A METODY JEJICH ŘEŠENÍ V MAPLE

Program rozlišuje úlohy lineárního programování, celočíselného programování, kvadratického programování, nelineární optimalizační úlohy a regresní úlohy založené na principu nejmenších čtverců. Pro každou optimalizační úlohu je předdefinován optimalizační algoritmus, který je možné pro vybrané typy úloh manuálně změnit při specifikaci příkazu k optimalizaci. Optimalizační algoritmy jsou založeny na Lipschitz Global Optimizer, což je skupina řešitelů používaná i v dalších komerčně vyvíjených programech, jako třeba MPL, AIMMS, Matlab a Mathematica¹.

Lineární, celočíselné a kvadratické úlohy

Pro řešení těchto úloh se používá příkaz *LPSolve*, resp. *QPSolve*. Pokud se jedná o spojité úlohy, tak je použita metoda aktivní množiny², pokud se v úlohách vyskytují podmínky celočíselnosti, tak je použita metoda větví a mezí. Pro tyto úlohy není možné vybrat jiný algoritmus řešení (Maple nepodporuje metody vnitřního bodu, Gomoryho metodu, ani Wolfeho metodu). Program pracuje pro urychlení výpočtu zvláště s omezeními, které lze formulovat ve formě horních, nebo dolních mezí a s omezeními ve tvaru rovnic.

Nelineární úlohy

Pro řešení nelineárních úloh se používá příkaz *NPSolve*, pro tyto úlohy je možné vybrat metodu řešení.

Metodu kvadratické interpolace (*method=quadratic*) lze použít pro úlohy s jednou proměnnou na omezené množině. Pro použití této metody je nutné, aby účelová funkce měla spojitou první derivaci, naopak není nutné zadávat počáteční bod (v případě jeho zadání je ignorován).

Globální metoda větví a mezí (*method=branchandbound*) se používá také pro problémy s jednou proměnnou, která je omezená shora i zdola. Metoda nevyžaduje spojitou první derivaci, a jak je vidět z jejího názvu, tak provádí globální optimalizaci, čili eliminuje možnost ukončení výpočtu v lokálním extrému.

Modifikovaná Newtonova metoda (*method=modifiednewton*) je vhodná pro problémy s více proměnnými. Jelikož metoda používá gradient účelové funkce, tak je nutné, aby tato funkce byla hladká řádu $C(1)$. Pro použití této metody je nutné explicitně zadat derivaci účelové funkce.

Nelineární simplexová metoda (Nelder-Mead; *method=nonlinearsimplex*) se používá pro problémy více proměnných s libovolným druhem omezení. Výhodou metody je, že nepracuje s derivacemi, čili účelová funkce nemusí být hladká a metoda je robustní. Nevýhoda je vyšší výpočetní a tudíž i časová náročnost.

Metoda preconditioned conjugate gradient (*method=PCG*) je metoda založená na metodě Newtonově, která je vhodná pro nelineární problémy s $C(1)$ hladkou účelovou funkcí. Opět je nezbytné explicitně zadání první derivace.

Sekvenční kvadratické programování (*method=SQP*) je metoda vhodná pro všechny typy úloh, která automaticky dopočítává derivace, čili není nutné zadávat jejich hodnotu. Pokud derivace nejsou k dispozici, tak metoda využívá jejich numericky vypočtené hodnoty.

Pokud uživatel nezvolí metodu nelineární optimalizace, tak je pro úlohy s jednou omezenou proměnnou automaticky použita metoda kvadratické interpolace, pro úlohy s více proměnnými a známým gradientem metoda PCG a pro ostatní úlohy metoda SQP.

¹ Převzato z <http://homepages.laas.fr/henrion/Papers/mapleglobopt.pdf>

² Více o této metodě např. zde <http://www.numerical.rl.ac.uk/nimg/oupartc/lectures/parts/part4.2.pdf>

Regresní optimalizační úlohy

Pro úlohy hledání nejmenších čtverců se používá příkaz *LSSolve*. Pro úlohy lineárního charakteru se používá metoda aktivní množiny. Pro úlohy nelineárního charakteru je možné použít kombinaci Gauss-Newtonovy a modifikované Newtonovy metody, nebo sekvenční kvadratické programování.

3 POSTUP PŘI ŘEŠENÍ OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH

Postup řešení a zadávání modelu do softwaru ukážeme na úloze lineárního programování. Poté uvedeme postup řešení jiných úloh. Všechny úlohy je možné zadávat v algebraické, nebo v maticové podobě. Optimalizační příkaz pro úlohu lineárního programování má následující podobu:

$$LPSolve(obj, constr, bd, opts)$$

Za parametr *obj* se doplní lineární účelová funkce; za parametr *constr* se mohou doplnit omezení ve tvaru rovnic, nebo nerovnic; místo parametru *bd* je možné doplnit horní, nebo dolní meze a parametr *opts* se nahrazuje požadavky jako např. podmínky celočíselnosti, nezápornosti³, počáteční bod, maximální počet iterací, přesnost výpočtu atd.⁴ Pro spuštění optimalizačního algoritmu je nutné zadat alespoň jednu podmínku, mez, nebo uvažovat nezápornost proměnných. Pokud neexistuje přípustné řešení, tak program hlásí automaticky chybu, pokud je neomezená účelová funkce, tak program zobrazí varování a poslední vypočtené řešení.

Příklad 1

Výše uvedené demonstrujeme na následujícím příkladu⁵:

$$\begin{aligned} \min & -2x - y \\ & y \leq 4x + \frac{1}{2} \\ & y \leq -5x + 2 \\ & 0 \leq x \\ & 0 \leq y \end{aligned}$$

V Maplu je třeba v pracovním modu (File – New – Worksheet Mode) napsat následující příkaz

> *with(Optimization)* :, který zajistí načtení balíčku s optimalizačními nástroji. Vlastní úlohu můžeme zadat dvěma způsoby:

1. Přímo:

$$LPSolve\left(-2x - y, \left\{y \leq 4x + \frac{1}{2}, y \leq -5x + 2, 0 \leq x, 0 \leq y\right\}\right)$$

2. Nepřímo:

$$obj := -2x - y$$

$$cnsts := \left[y \leq 4x + \frac{1}{2}, y \leq -5x + 2, 0 \leq x, 0 \leq y\right]$$

$$LPSolve(obj, cnsts)$$

V obou případech dostaneme řešení ve tvaru:

$$[-1.50000000000000, [x = 0.16666666666666658, y = 1.16666666666666674]]$$

³ Defaultně nejsou podmínky nezápornosti uvažovány.

⁴ Kompletní výpis těchto parametrů lze najít v nápovědě k programu.

⁵ Převzato z manuálu k programu Maple 13 „The Optimization Package“, „Linear Programming Example 1“

Pro ilustraci dalších funkcí Maplu je vhodné načíst balíček pro tvorbu grafů příkazem:

> `with(plots) :`

Nyní můžeme definovat přípustnou množinu pomocí příkazu `inequal` takto:

```
p1 :=inequal (cnsts, x = -0.5 ..2, y = -0.5 ..2, optionsexcluded
= (colour = white), optionsfeasible = (colour = yellow)) :
```

Vykreslit izokvanty účelové funkce příkazem `contourplot`:

```
p2 :=contourplot (obj, x = -0.5 ..2, y = -0.5 ..2) :
```

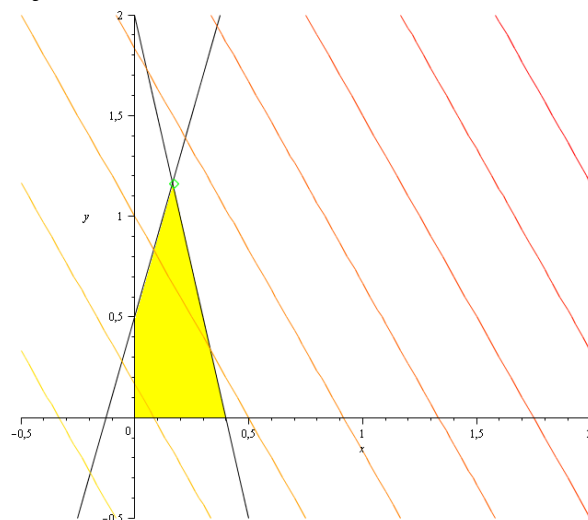
Zobrazit bod optimálního řešení pomocí příkazu `pointplot`:

```
p3 := pointplot ({[0.1666, 1.166]}, symbolsize = 13, colour = green) :
```

A konečně vykreslit všechno definované příkazem `display`:

```
display (p1, p2, p3)
```

Výsledkem pak je následující obrázek:



Obr. 1: Optimální řešení úlohy LP

Příklad 2

Na druhém příkladu ukažme řešení následující kvadratické úlohy⁶:

$$\begin{aligned} \min & 4(x^2) - y + x + 5 \\ & -11 \leq x + y - 7x \\ & \frac{11x}{2} + y \leq 0 \\ & -4 \leq x \end{aligned}$$

Zadání do Maplu po načtení optimalizačního a grafového balíčku probíhá následovně:

$$\text{QPSolve} \left(4x^2 - y + x + 5, \left\{ -11 \leq x + y - 7x, \frac{11x}{2} + y \leq 0, -10 \leq x \right\} \right)$$

Výstupem je optimální řešení $(-0,81; 4,47)$ o hodnotě ÚF 2,36. Pro tvorbu grafu můžeme použít následující příkazy:

$$\text{obj} := 4x^2 - y + x + 5$$

$$\text{cnsts} := \left[-11 \leq x + y - 7x, \frac{11x}{2} + y \leq 0, -4 \leq x \right]$$

⁶ Úlohu lze opět najít v manuálu Maplu.

```

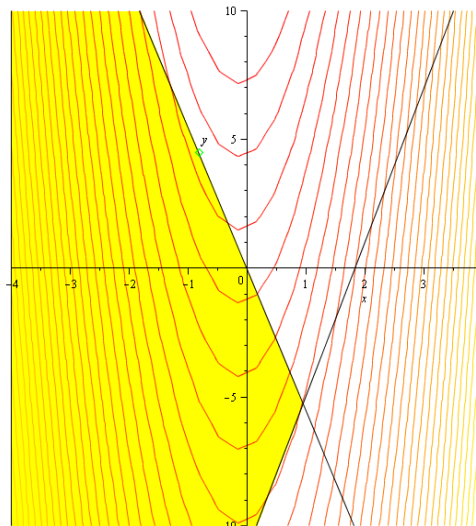
p1 := contourplot (obj, x = -4..4, y = -10..10, contours = 30) :
p2 := inequal (cnsts, x = -4..4, y = -10..10, optionsexcluded
= (colour = white), optionsfeasible = (colour = yellow)) :

p3 := pointplot ({[-0.8125, 4.486]}, symbolsize = 13, colour
= green) :

display (p1, p2, p3)

```

Výsledkem je následující obrázek:



Obr. 2: Optimální řešení úlohy QP

Pro Nelineární optimalizaci se používá obdobný postup, pouze se změní příkaz na *NPSolve* a v parametrech *opt* je možné určit metodu výpočtu.

Zadání úlohy v maticové formě

Optimalizační úlohy je také možné zadávat maticově, funkce *LPSolve* pak má parametry $LPSolve(c, [A, b, Aeq, Beq], [bl, bu])$, kde c představuje vektor cenových koeficientů, dále platí $Ax \leq b$ a $Aeq\ x = beq$ a vektory bl , resp. bu jsou vektory dolních, resp. horních mezí. Řešení ukážeme na následujícím příkladu. U zadávání vektorů a matic je nutné přidat specifikaci *datatype=float*.

Příklad 3

Řešme úlohu

$$\begin{aligned}
& \min -x - y \\
& -3x + y \leq 0.5 \\
& 5x + y \leq 2 \\
& 0 \leq x \\
& 0 \leq y
\end{aligned}$$

Převedení do maticového zápisu a vyřešení v Maple vypadá následovně:

```

> with(Optimization) :
> c := Vector([-1, -1], datatype = float) :
> A := Matrix([[ -3, 1], [5, 1]], datatype = float) :
> b := Vector([0.5, 2], datatype = float) :
> LPSolve(c, [A, b], [0.0, ∞])

```

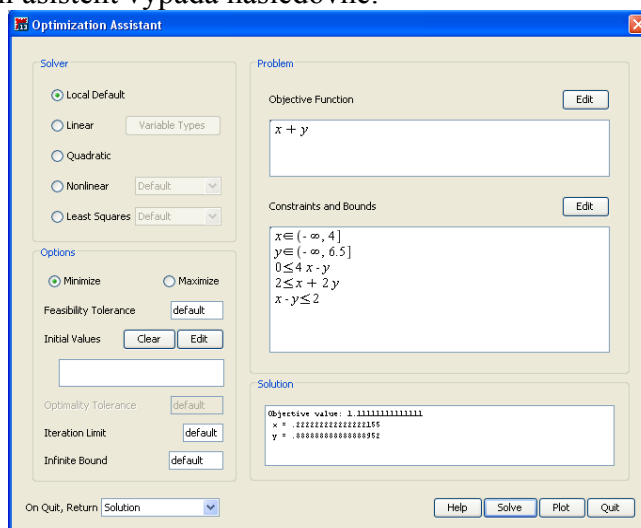
Řešením pak je

$$\begin{bmatrix} -1.2500000000000000 & 0.1875000000000000 \\ 1.0625000000000000 & 1.0625000000000000 \end{bmatrix}$$

Data pro maticový zápis je také možné načíst ze souborů v MPS formátu.⁷

Řešení pomocí asistenta „Optimization“

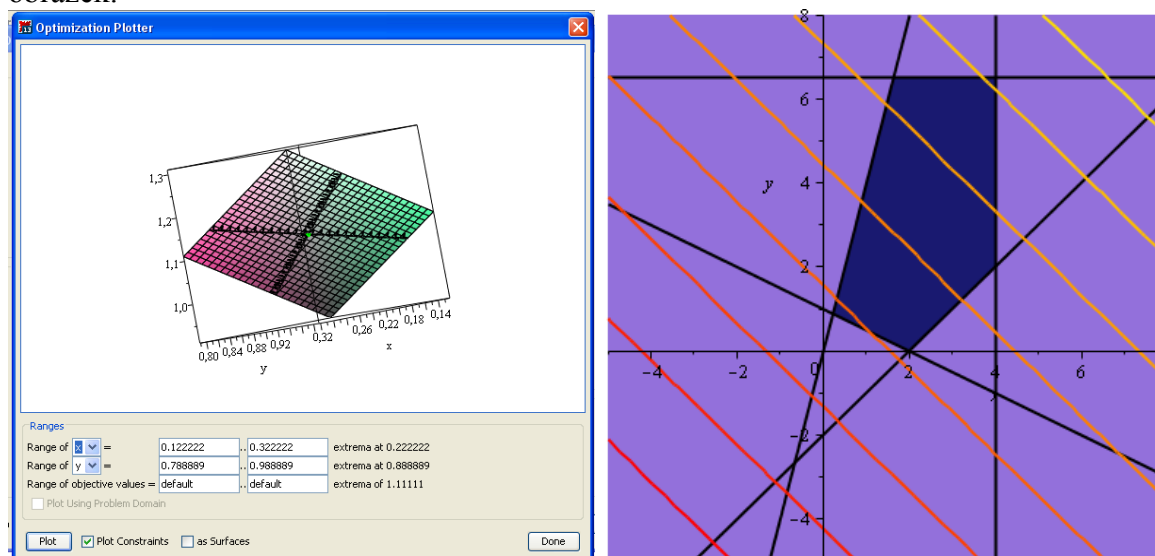
Optimalizační úlohy lze v Maple řešit také pomocí asistenta optimalizace. Modul lze spustit buď z menu (Tools – Assistants – Optimization...), nebo pomocí příkazu *interactive(obj, constr)*. Optimalizační asistent vypadá následovně:



Obr. 3: Optimalizační asistent Maple

V prostředí asistenta je možné řešit všechny druhy optimalizačních úloh (s výjimkou kombinace celočíselné a nelineární úlohy) a vybírat metody jejich řešení. Je možné zadat limit počtu iterací, „hranici nekonečna“ a definovat omezení v uživatelsky příjemnějším prostředí, než je příkazový řádek.

Graf vytvořený asistentem je možné otáčet dle potřeby, ale jeho 3D forma je poměrně nepřehledná a vhodnější je vytvořit 2D graf dle vlastních potřeb. Rozdíl mezi předdefinovaným grafem a uživatelsky specifikovaným grafem demonstruje následující obrázek:



Obr. 4: Generický graf (vlevo) vs. personalizovaný graf

⁷ Více v nápovědě Maple pod heslem Optimization[ImportMPS].

4 ZÁVĚR

Optimalizační modul Maplu je na úrovni ostatních profesionálních programů. Pomocí testovaného software lze řešit lineární, kvadratické, nelineární i celočíselné optimalizační úlohy. Uživatelské rozhraní nabízí možnost intuitivního manuálního vkládání úloh, i profesionálního načítání dat v MPS formátu. V programu lze snadno tvořit srozumitelné grafy a díky propracované nápovědě a několika ilustrativním příkladům se s programem také snadno manipuluje. Jediným nedostatkem je absence možnosti automatického generování citlivostní a limitní zprávy.

Použitá literatura

1. Manuál a tutoriál k programu Maple 13
2. <http://homepages.laas.fr/henrion/Papers/mapleglobopt.pdf>
3. <http://www.numerical.rl.ac.uk/nimg/oupartc/lectures/parts/part4.2.pdf>
4. JABLONSKÝ, J.: *Programy pro matematické modelování*. Praha, VŠE 2007.
5. PÁNKOVÁ, V.: *Nelineární optimalizace pro ekonomy*. Praha, VŠE 2003.
6. PELIKÁN, J.: *Diskrétní modely*. Praha, VŠE 1999.

Kontaktní údaje

Ing. Mgr. Viktor Chrobok

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 403

email: viktor.chrobok@vse.cz

ŘEŠENÍ SPECIÁLNÍCH SUDOKU V LINGU

SOLVING OF SPECIAL SUDOKO IN SW LINGO

Vladislav Chýna

Abstrakt

Sudoku je velmi populární logický hlavolam, který se již dlouhou dobu objevuje téměř ve všech novinách a časopisech. Zatímco klasické sudoku spočívá v doplnění předem zadaných čísel na čtverci rozměru 9x9 tak, aby v každém řádku, v každém sloupci a v každém malém čtverci o rozměru 3x3 byla každá z číslic 1-9 obsažena právě 1-krát, existuje i mnoho jiných variant. V následujícím textu si ukážeme, jak na tyto speciální sudoku upravit dříve prezentovaný program v SW Lingo.

KLíčové slová: *Lingo, Součtové Sudoku, Diagonální Sudoku, 16x16 Sudoku, Větší-menší Sudoku*

Abstract

Sudoku is a very popular logic puzzle which can be found in nearly ever newspaper and magazine for a long time. Whereas the problem of classical sudoku lies in filling a 9×9 square, which already contains some given numbers, so that in each row, in each column, and in each 3×3 subsquare is located each number 1-9 exactly once, there are a lot of different versions as well. In this article we will show how to adjust a previously presented program in SW Lingo for this special sudoku.

Keywords: *Lingo, Killer Sudoku, Diagonal Sudoku, 16x16 Sudoku, Greater Than Sudoku*

1 KLASICKÉ SUDOKU JAKO OPTIMALIZAČNÍ PROBLÉM

1.1 Princip sudoka

Sudoku je bezesporu jedna z nejoblíbenějších logických her na světě, kterou hrají denně statisíce lidí po celém světě. Účelem klasického sudoku je logicky doplnit do tabulky o 81 polích chybějící čísla číslicemi 1-9 tak, aby splňovala několik pravidel.

- v každém řádku může být každá číslice pouze jednou
- v každém sloupci může být každá číslice pouze jednou
- v každém zvýrazněném čtverci o 9 políčkách může být každá číslice pouze jednou

V [1] jsme si ukázali, jak lze tuto úlohu formulovat pomocí celočíselného programování a vyřešit např. SW Lingo (a to včetně triku pro načtení již zadaných čísel z excelu a vypsání řešení tamtéž):

1.2 Matematický model pro klasické sudoku

$\forall i \forall j \quad Y_{ij} = \sum_{k=1}^9 kX_{ijk}, \sum_{k=1}^9 X_{ijk} = 1$, kde $X_{i,j,k} \in \text{bin}$ a $Y_{i,j}$ jsou vlastní čísla v tabulce Sudoku na průsečíku řádku i a sloupce j .

- Každý řádek obsahuje konkrétní číslíci právě 1x: $\forall i \forall k \sum_{j=1}^9 X_{ijk} = 1$

- Každý sloupec obsahuje konkrétní číslíci právě 1x: $\forall j \forall k \sum_{i=1}^9 X_{ijk} = 1$

- Každý tučně vyznačený čtverec 3x3 obsahuje konkrétní číslíci právě 1x:
 $\forall k \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 X_{i+1-l, j+m-1, k} = 1; i = 1,4,7; j = 1,4,7$

1.3 Zdrojový kód Lingo pro klasické sudoku

Model:

Sets:

```
Cislice/1..9/;
Sachovnice(Cislice,Cislice):Y,Zadani,Vyplneno;
Krychle(Sachovnice,Cislice):X;
```

Endsets

Data:

```
@ole('Sudoku.xls','Reseni')=Y;
Zadani,Vyplneno=@ole('Sudoku.xls');
```

Enddata

```
Rozmer=@size(Cislice);
```

!zadání pevných hodnot - kde je nula, může být Y libovolné, jinak musí být rovno zadanému číslu;

```
@for(Sachovnice:Y<=Zadani+Rozmer*(1-Vyplneno));
@for(Sachovnice:Y>=Zadani-Rozmer*(1-Vyplneno));
```

!čísla 1-9;

```
@for(Krychle:@bin(X));
```

!nedefinování vlastních číslíci 1..9 pomocí 0-1 proměnných;

```
@for(Sachovnice(i,j):
    Y(i,j)=@sum(Cislice(k):k*X(i,j,k))
);
```

!zajištění v řádku právě 1 číslo, ve sloupci právě 1 číslo, v prostoru právě 1 číslo;

```
@for(Sachovnice(i,j):
    @sum(Cislice(k):X(i,j,k))=1
);
```

```
@for(Sachovnice(i,k):
    @sum(Cislice(j):X(i,j,k))=1
);
```

```
@for(Sachovnice(j,k):
    @sum(Cislice(i):X(i,j,k))=1
);
```

!všechny malé čtverce;

```
@for(Cislice(i)|i#EQ#1 #OR# i#EQ#4 #OR# i#EQ#7:
    @for(Cislice(j)|j#EQ#1 #OR# j#EQ#4 #OR# j#EQ#7:
        @for(Cislice(k):
            @Sum(Sachovnice(l,m)|l#LE#3 #AND# m#LE#3:X(i+1-l,j+m-1,k))=1
        )
    )
);
```


2 SPECIÁLNÍ TYPY SUDOKA

I když je vytvořený model dostatečně uživatelsky příjemný (zadání vstupních čísel v excelu, výstup řešení do excelu) a i dostatečně rychlý (řešení se vypočte během několika setin vteřiny), pro vyřešení klasického sudoku není problémem získat na internetu během chvilky množství jiných řešitelů (ať již pracují přímo v MS Excel a jsou naprogramovány pomocí VBA, nebo řeší úlohy, které je možné zadat do formuláře umístěného na www stránkách, či se jedná o exe aplikace).

V novinách a časopisech se však v poslední době objevují i sudoka, které kromě klasických podmínek (jedinečné číslo v každém řádku, sloupci a malém čtverci) obsahují podmínky dodatečné¹. Samozřejmě, že i pro takovéto úlohy je možné najít na internetu odpovídající řešitel (vždyť na internetu lze nalézt snad téměř vše). Řešitelů ale již není zdaleka tolik a navíc pochopit, jak s nimi správně pracovat (tj. jak příslušné sudoku zadat) je často mnohem složitější než postup, který i ukážeme dále. Je to pochopitelné, protože různých typů sudok je opravdu celá řada a „standardizovat“ řešitel pro všechny typy je proto zdlouhavá práce. Naproti tomu upravit „klasický“ matematický model a zdrojový kód Linga je věcí okamžiku. Rovněž dodatečné podmínky jsou v tomto zdrojovém kódu velmi lehce čitelné a zadatelné. Ukažme si to na několika nejběžnějších „neklasických“ sudoku.

2.1 Diagonální sudoku (diagonal sudoku)

Diagonální sudoku přidává ke klasickým podmínkám navíc omezení, že rovněž na hlavních diagonálách se každá z číslic 1-9 vyskytuje právě 1x. Úprava matematického modelu je proto velmi jednoduchá.

- Diagonála zleva doprava obsahuje konkrétní číslici právě 1x: $\forall k \sum_{i=1}^9 X_{iik} = 1$
- Diagonála zprava doleva obsahuje konkrétní číslici právě 1x: $\forall k \sum_{i=1}^9 X_{i,10-i,k} = 1$

Do Linga podmínky přepíšeme následovně:

```
!diagonála zleva doprava - (1,1) - (9,9);
@for(Cisllice(k):
    @Sum(Sachovnice(i,i):X(i,i,k))=1
);
!diagonála zprava doleva - (1,9) - (9,1);
@for(Cisllice(k):
    @Sum(Sachovnice(i,i):X(i,10-i,k))=1
);
```

¹ Možná, že se to týká pouze autora, či je to způsobeno „nezvykem“ řešení těchto podmínek, ale vyřešit neklasická sudoka se zdá mnohem obtížnější, než vyřešit sudoka klasická. A to i přes to, že dodatečně přidané podmínky by měly řešení spíše usnadnit (více podmínek \Rightarrow méně možností pro umístění čísla na konkrétní pozici).

Zadání

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7				3	9			
2								3	
3					4			2	
4		3		1				4	
5									
6		8				2		7	
7		4		3					
8		5							
9				2	5				3

Řešení

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	7	2	4	8	3	9	5	6	1
2	1	9	8	6	2	5	7	3	4
3	3	6	5	7	1	4	8	2	9
4	5	3	9	1	8	7	2	4	6
5	2	7	6	5	4	3	9	1	8
6	4	8	1	9	6	2	3	7	5
7	8	4	2	3	9	1	6	5	7
8	9	5	3	4	7	6	1	8	2
9	6	1	7	2	5	8	4	9	3

2.2 Stínové sudoku (shadow sudoku)

Někteří autoři přidávají kromě sloupců, řádků a devíti čtverců 3x3 ještě další oblasti, kde se rovněž musí každá číslice 1-9 vyskytovat právě 1x.. Ukažme si jeden případ, kde je tato podmínka požadována u dvou vystínovaných čtverců a dvou „nesouvhlých trojúhelníků“. Do našeho zdrojového kódu tyto podmínky zabudujeme velmi lehce (protože se jedná pouze o 4 oblasti, je asi nejjednodušší zapsat podmínky bez využití sum):

```
!Horní trojúhelník;
@for(Cisllice(k) :
    X(1,1,k)+X(3,1,k)+X(2,2,k)+X(1,3,k)+X(5,1,k)+X(4,2,k)+X(3,3,k)+X(2,4,
    k)+X(1,5,k)=1
);
!Dolní trojúhelník;
@for(Cisllice(k) :
    X(9,9,k)+X(9,7,k)+X(8,8,k)+X(7,9,k)+X(9,5,k)+X(8,6,k)+X(7,7,k)+X(6,8,
    k)+X(5,9,k)=1
);
!Levý čtverec;
@for(Cisllice(k) :
    X(6,2,k)+X(6,3,k)+X(6,4,k)+X(7,2,k)+X(7,3,k)+X(7,4,k)+X(8,2,k)+X(8,3,
    k)+X(8,4,k)=1
);
!Pravý čtverec;
@for(Cisllice(k) :
    X(2,6,k)+X(2,7,k)+X(2,8,k)+X(3,6,k)+X(3,7,k)+X(3,8,k)+X(4,6,k)+X(4,7,
    k)+X(4,8,k)=1
);
```

Zadání

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1			4		7			2
2									
3			7		8		1		
4	6								5
5			8		5		4		
6	5								9
7			6		7		9		
8									
9	7			6		8			4

Řešení

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	3	5	4	6	7	8	9	2
2	4	8	2	3	1	9	5	6	7
3	9	6	7	5	8	2	1	4	3
4	6	4	1	2	9	3	7	8	5
5	2	9	8	7	5	1	4	3	6
6	5	7	3	8	4	6	2	1	9
7	3	5	6	1	7	4	9	2	8
8	8	2	4	9	3	5	6	7	1
9	7	1	9	6	2	8	3	5	4

2.3 16x16 sudoku

Ve snaze ztížit co nejvíce řešení dochází k logickému rozšíření sudoku na více číslic. Lze se tak setkat s hlavolamy, které obsahují místo 9 řádků, 9 sloupců a 9 čtverců 3x3 větší rozměry.

Např. námi uváděný příklad² zahrnuje 16 řádků, 16 sloupců a rovněž 16 malých čtverců, tentokrát o rozměrech 4x4. V těchto oblastech se musí jedenkrát vyskytnout každá z číslic 1-16 (lze se setkat i s - na ruční řešení těžší - variantou, kde jsou místo čísel 10-16 použita písmena).

Úprava zdrojového kódu Linga je tentokrát velmi přímočará – není potřeba přidávat žádné další podmínky, ale stačí změnit rozměry v sekci `SETS` a upravit podmínku na malé čtverce. Nesmíme rovněž zapomenout na rozšíření příslušných oblastí v MS Excel.

`Model:`

`Sets:`

```
Cislice/1..16/;
Sachovnice(Cislice,Cislice):Y,Zadani,Vyplneno;
Krychle(Sachovnice,Cislice):X;
```

`Endsets`

`Data:`

```
@ole('Sudoku16.xls','Reseni')=Y;
Zadani,Vyplneno=@ole('Sudoku16.xls');
```

`Enddata`

```
Rozmer=@size(Cislice);
```

`!zadání pevných hodnot - kde je nula, může být Y libovolné, jinak musí být rovno zadanému číslu;`

```
@for(Sachovnice:Y<=Zadani+Rozmer*(1-Vyplneno));
@for(Sachovnice:Y>=Zadani-Rozmer*(1-Vyplneno));
```

`!číslo 1-16;`

```
@for(Krychle:@bin(X));
```

`!nedefinování vlastních číslic 1..16 pomocí 0-1 proměnných;`

```
@for(Sachovnice(i,j):
    Y(i,j)=@sum(Cislice(k):k*X(i,j,k))
```

```
);
```

`!zajištění v řádku právě 1 číslo, ve sloupci právě 1 číslo, v prostoru právě 1 číslo;`

```
@for(Sachovnice(i,j):
    @sum(Cislice(k):X(i,j,k))=1
```

```
);
```

```
@for(Sachovnice(i,k):
    @sum(Cislice(j):X(i,j,k))=1
```

```
);
```

```
@for(Sachovnice(j,k):
    @sum(Cislice(i):X(i,j,k))=1
```

```
);
```

`!všechny malé čtverce;`

```
@for(Cislice(i)|i#EQ#1 #OR# i#EQ#5 #OR# i#EQ#9 #OR# i#EQ#13:
```

```
@for(Cislice(j)|j#EQ#1 #OR# j#EQ#5 #OR# j#EQ#9 #OR# j#EQ#13:
```

```
@for(Cislice(k):
```

```
@Sum(Sachovnice(l,m)|l#LE#4 #AND# m#LE#4:X(i+1-1,j+m-
```

```
1,k))=1
```

```
)
```

```
)
```

```
);
```

`end`

² Existují ale i ještě větší sudoka – 25x25 a 49x49.

Zadání

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		11	9			16	13	4			14		10	6	15	
2	4	12	15		3	6		11		5		1	16	7	14	2
3	1		6		15	2			11	9	10				8	
4		13				1			4	6		15				
5						15		8	1	5	3		4	11	7	
6	6		1			12	8		9			2			3	
7	14		4	13	6			3		12	7	10	8			2
8	3	8			4	7	2		6					12	16	5
9	13			16		8	14	10	3	4	15		12	5	1	11
10			6	2				1	10		11		15	3		9
11	7		12		4		15	5		9	14					
12	10			8			11				1	12	4		13	16
13							7		15	2					12	3
14			7			10	6		1	8		13	11		9	14
15	8	6	5			3			14			9				
16		16		2				14		10						

Řešení

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	11	9	5	8	16	13	4	12	3	14	7	10	6	15	1
2	4	12	15	10	3	6	9	11	13	5	8	1	16	7	14	2
3	1	14	6	7	15	2	5	12	11	9	10	16	3	13	8	4
4	16	13	8	3	14	1	10	7	4	6	2	15	9	11	5	12
5	12	2	16	9	10	14	15	13	8	1	5	3	6	4	11	7
6	6	7	1	11	5	12	8	16	9	15	4	2	14	10	3	13
7	14	5	4	13	6	11	1	3	16	12	7	10	8	9	2	15
8	3	8	10	15	4	7	2	9	6	14	13	11	1	12	16	5
9	13	9	2	16	7	8	14	10	3	4	15	6	12	5	1	11
10	5	4	14	6	2	13	12	1	10	16	11	8	15	3	7	9
11	7	1	11	12	16	4	3	15	5	13	9	14	2	8	10	6
12	10	15	3	8	9	5	11	6	2	7	1	12	4	14	13	16
13	11	10	13	14	1	9	7	8	15	2	6	4	5	16	12	3
14	15	3	7	4	12	10	6	5	1	8	16	13	11	2	9	14
15	8	6	5	1	13	3	16	2	14	11	12	9	7	15	4	10
16	9	16	12	2	11	15	4	14	7	10	3	5	13	1	6	8

2.4 Součtové sudoku (Killer Sudoku)

Dodatečné omezující podmínky (samozřejmě stále platí jedinečné číslo v řádku, sloupci i malém čtverci) jsou tentokrát dány součtem několika buněk. Součtové oblasti se přitom nepřekrývají a může se stát, že se součet týká dokonce pouze jednoho políčka. V takovém případě jde vlastně o pevně zadané číslo. Ale i u těchto Sudok se můžeme setkat s několika již vepsanými čísly v zadání.

Úprava programu spočívá v přidání součtových oblastí do podmínek Linga. Zdrojový kód pro klasické sudoku není potřeba nijak měnit.

2.5 Větší-menší sudoku (Greater Than Sudoku)

Dodatečné podmínky jsou tentokrát formulovány pouze pomocí znamének menší – větší. Jedná se (aspoň z pohledu autora) a jednu z nejtěžších modifikací sudok.

Úprava programu se týká opět pouze dodání těchto podmínek ke zdrojovému kódu pro klasické sudoku.

Podívejme se tentokrát na příklad, který kombinuje zadání jak součtového, tak větší-menší sudoku.

Podmínky na součty můžeme lehce zapsat pomocí proměnných $Y_{i,j}$ (bohužel je tyto podmínky potřeba všechny vypsát - díky velkému množství různých oblastí, které je možné v součtovém sudoku zadávat, se nevyplatí dělat žádný standardizovaný formulář v excelu):

$Y(1,1)+Y(1,2)+Y(1,3)+Y(1,4)+Y(2,1)+Y(2,2)+Y(2,3)+Y(2,4)=41;$
 $Y(1,5)+Y(2,5)+Y(3,5)+Y(4,5)=27;$
 $Y(1,6)+Y(2,6)+Y(3,6)+Y(4,6)+Y(5,6)+Y(1,7)=27;$
 $Y(1,8)+Y(1,9)+Y(2,7)+Y(2,8)+Y(2,9)+Y(3,7)+Y(3,8)+Y(3,9)=38;$
 $Y(3,1)+Y(3,2)+Y(4,1)+Y(4,2)+Y(5,2)=26;$
 $Y(3,3)+Y(3,4)+Y(4,3)+Y(4,4)+Y(5,3)+Y(5,4)=26;$
 $Y(5,1)+Y(6,1)+Y(6,2)+Y(6,3)+Y(6,4)+Y(7,2)=36;$
 $Y(5,5)+Y(6,5)+Y(6,6)+Y(7,6)=18;$
 $Y(7,1)+Y(8,1)+Y(8,2)+Y(9,1)+Y(9,2)=21;$
 $Y(7,3)+Y(7,4)+Y(7,5)+Y(8,5)+Y(8,6)=22;$
 $Y(8,3)+Y(8,4)+Y(9,3)+Y(9,4)=19;$
 $Y(9,5)+Y(9,6)+Y(9,7)+Y(8,7)=19;$
 $Y(4,7)+Y(4,8)+Y(4,9)+Y(5,7)+Y(5,8)+Y(5,9)+Y(6,7)+Y(6,8)+Y(6,9)=45;$
 $Y(7,7)+Y(7,8)+Y(7,9)+Y(8,8)+Y(8,9)+Y(9,8)+Y(9,9)=40;$

Podmínky na nerovnosti rovněž zapíšeme přímo pomocí proměnných $Y_{i,j}$.

$Y(1,1) > Y(2,1); Y(1,3) < Y(2,3); Y(1,5) > Y(1,6); Y(1,6) > Y(2,6); Y(1,7) < Y(2,7);$
 $Y(2,1) < Y(3,1); Y(3,1) < Y(3,2); Y(3,2) < Y(3,3); Y(3,6) < Y(3,7); Y(4,1) < Y(4,2);$
 $Y(4,1) > Y(5,1); Y(5,1) > Y(5,2); Y(4,3) < Y(4,4); Y(3,6) > Y(4,6); Y(4,6) > Y(4,7);$
 $Y(4,8) > Y(4,9); Y(6,1) < Y(6,2); Y(6,4) > Y(6,5); Y(6,5) < Y(6,6); Y(5,6) > Y(6,6);$
 $Y(6,1) > Y(7,1); Y(6,2) < Y(7,2); Y(6,3) < Y(7,3); Y(6,6) < Y(7,6); Y(6,7) < Y(7,7);$
 $Y(6,8) > Y(7,8); Y(6,9) < Y(7,9); Y(7,4) < Y(7,5); Y(8,1) > Y(8,2); Y(8,3) < Y(8,4);$
 $Y(8,1) < Y(9,1); Y(8,2) < Y(9,2); Y(8,6) < Y(9,6); Y(7,8) < Y(8,8); Y(8,6) > Y(8,7);$
 $Y(8,9) < Y(9,9);$

Řešení

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	9	1	6	3	8	2	7	5	4
2	2	5	8	7	4	1	9	6	3
3	3	4	7	6	9	5	8	2	1
4	8	9	3	5	6	4	1	7	2
5	5	2	4	1	7	8	6	3	9
6	6	7	1	9	2	3	4	8	5
7	1	8	9	2	3	6	5	4	7
8	4	3	5	8	1	7	2	9	6
9	7	6	2	4	5	9	3	1	8

3 ZÁVĚR

V článku jsme ukázali, jak velmi jednoduše upravit zdrojový kód v SW Lingo pro klasická sudoku na řešení sudoku speciálních typů. Pomocí této úpravy je možné vyřešit libovolné dodatečné podmínky, se kterými autoři sudoku neustále přicházejí.

Použitá literatura

1. Chýna, Vladislav: Naprogramujte si vlastní sudoku řešitel v Lingo, Mezinárodní seminár mladých vědeckých pracovníků. Praha: Oeconomica, 2008, s. 1--10. ISBN 978-80-245-1405-5.
2. Pelikán, Jan: Diskrétní modely. Praha, VŠE 1999.
3. Lingo: the modeling language and optimizer

Kontaktné údaje

RNDr. Ing. Vladislav Chýna, PhD.
 VŠE Praha, Fakulta informatiky a statistiky
 nám. W. Churchilla 4 130 67 Praha 3
 email: vladislav.chyna@vse.cz

HODNOCENÍ VÝSLEDKŮ ATLETICKÉHO DESETIBOJE Z POHLEDU VÍCEKRITERIÁLNÍHO ROZHODOVÁNÍ

EVALUATION OF RESULTS OF ATHLETIC DECATHLON IN VIEW OF MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING

Josef Jablonský

Abstrakt

Mužský desetiboj je atletická soutěž, která se skládá z deseti samostatných disciplín – čtyři z nich jsou měřeny v sekundách a šest zbývajících v časových jednotkách. Každý atlet (varianta) je tedy popsán deseti kritériálními hodnotami. Současný systém hodnocení je založen na agregaci dílčích výsledků pomocí funkcí užitku, které jsou definovány pro každou disciplínu. Tento systém je používán od roku 1984. Cílem článku je analyzovat tento systém s ohledem na současné podmínky a porovnat jej s několika navrženými alternativními metodami. Navržené metody jsou aplikovány na reálná data, mimo jiné na výsledky posledního olympijského desetiboje v roce 2008.

Klíčová slova: vícekritériální rozhodování, desetiboj, funkce užitku

Abstract

Man decathlon is an athletic contest which consists of 10 events, four of them measured in seconds and the remaining six in meters. Each athlete (alternative) is described by his 10 results (criteria). Current system of classification is based on aggregation of results using utility (scoring) functions which are exactly defined for each event. This system is used since 1984 and the aim of the paper is to analyse it with respect to current conditions. The current way of classification is compared with several alternative methods. Proposed methods are applied on real results, specifically on the last Olympic race 2008.

Keywords: multiple criteria decision making, decathlon, utility function

1 ÚVOD

Desetiboj je atletická soutěž s dlouhou tradicí. Sestává se z deseti samostatných disciplín. Už od dob antického Řecka je považován za vyjádření všestrannosti sportovců a je často označován jako “královská atletická disciplína”. Poprvé byl atletický víceboj na programu Olympijských her v roce 1904 v St. Louis. V současné podobě byl desetiboj ustaven mezinárodní atletickou federací (IAAF) v roce 1914. Od této doby se desetiboj skládá z deseti disciplín (3 sprinty, 1 dlouhý běh, 3 skoky a 3 hody), jejichž pořadí je pevně dané. Celá soutěž je rozvržena do dvou dnů následovně:

1. den:

- Běh na 100 metrů,
- Skok do dálky,

- Vrh koulí,
- Skok do výšky,
- Běh na 400 metrů,

2. den:

- Běh na 110 metrů s překážkami,
- Hod diskem,
- Skok o tyči,
- Hod oštěpem,
- Běh na 1500 metrů.

Z obecného hlediska je desetiboj vícekritériální rozhodovací problém s počtem variant, který je určený počtem soutěžících a s deseti kritérii. Cílem hodnocení je uspořádat atlety (variant) od nejlepších po nejhorší. Je zřejmé, že kritériální hodnoty nejsou navzájem porovnatelné – jsou uvedeny buď v sekundách, nebo v délkových jednotkách a ani ty navzájem nejsou přímo porovnatelné. Proto jsou výsledky v jednotlivých disciplínách agregovány pomocí funkcí užitku (bodovací tabulky), které přiřazují výkonům z jednotlivých disciplin bodové ohodnocení. Soutěžící jsou potom uspořádáni podle bodů, které dosáhli.

1. SOUČASNÝ SYSTÉM HODNOCENÍ

Bodovací tabulky desetiboje prošly od roku 1914 několika vývojovými stupni. Poslední změna je z roku 1984 a tabulky vytvořené podle následujících principů platí dodnes:

1. Hodnocení pro jednotlivé disciplíny by mělo být vzájemně porovnatelné, tj. podobné úrovně výkonů v disciplínách by měly být hodnoceny podobným počtem bodů.
2. Tabulky by měly být buď:
 - lineární pro všechny disciplíny, nebo
 - slabě progresivní pro všechny disciplíny.
3. Tabulky by měly být aplikovatelné pro všechny úrovně sportovců (od mladých po profesionální)
4. Budou různé tabulky pro mužský desetiboj a ženský sedmiboj.
5. Výkony sportovců, specializovaných na jednotlivé dílčí disciplíny, by měly být východiskem pro tvorbu tabulek.
6. Tabulky by měly mít použitelnost i v budoucnosti.
7. Celkové bodové hodnocení při použití nových tabulek by mělo být podobné, jako u tabulek používaných dříve (před rokem 1984)

Na základě uvedených principů byly navrženy tabulky českým matematikem dr. Trkalem a byly akceptovány IAAF v roce 1984. Bodové hodnocení sportovců je získáno pomocí následujících vztahů:

$$u_{ik} = \text{INT}[a_k(b_k - p_{ik})^{c_k}], k \in R, i \in A, \quad (1)$$

$$u_{ik} = \text{INT}[a_k(p_{ik} - b_k)^{c_k}], k \in T, i \in A, \quad (2)$$

kde

R je množina indexů běžeckých disciplín (měřených v sekundách),

T je množina indexů disciplín měřených v centimetrech (metrech),

A je množina atletů (variant),

u_{ik} je počet bodů získaných i -tým atletem v k -té disciplíně,

p_{ik} je výkon i -tého atleta v k -té disciplíně (v sekundách nebo centimetrech),

INT(x) je cel část hodnoty x , a

a_k, b_k, c_k jsou specifické parametry pro k -tou disciplínu. Hodnoty parametrů a, b a c jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 – Parametry bodovacích funkcí

Disciplína	a_k	b_k	c_k
100 metrů	25.4347	18.00	1.81
Skok do dálky	0.14354	220.00	1.40
Vrh koulí	51.39	1.50	1.05
Skok do výšky	0.8465	75.00	1.42
400 metrů	1.53775	82.00	1.81
110 m překážek	5.74352	28.50	1.92
Hod diskem	12.91	4.00	1.10
Skok o tyči	0.2797	100.00	1.35
Hod oštěpem	10.14	7.00	1.08
1500 metrů	0.03768	480.00	1.85

Není jasné, jakým způsobem byly parametry bodovacích funkcí odvozeny. Interpretace parametru b není obtížná – jedná se o výkon, za který je nulové bodové ohodnocení. Parametr c_k vyjadřuje, jestli je funkce více či méně progresivní. Je zajímavé, že nejvíce progresivní jsou běžecké disciplíny a naopak, že funkce pro hody (vrhy) jsou téměř lineární. Interpretace parametru a není zřejmá vůbec.

Celkový počet bodů pro každého sportovce U_i je daný jako prostý součet bodů získaných v dílčích disciplínách:

$$U_i = \sum_{k=1}^{10} u_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Uvedený přístup je aplikovaný již od roku 1984, ale jako každý systém pro vícekritériální hodnocení variant, není ideální. Problémem je, že počet bodů, získaných v jednotlivých disciplínách není rovnoměrný – v některých disciplínách získávají špičkoví atleti výrazně vyšší bodové ohodnocení než v jiných. Rozdíly jsou ilustrovány v tabulce 2. Tabulka uvádí současný světový rekord v dané disciplíně (WR) a jemu odpovídající bodové ohodnocení získané podle vztahů (1) a (2). Dále je v této tabulce pro každou disciplínu uvedený průměrný počet bodů pro 100 historicky nejlepších výkonů v desetiboji (TOP100).

Tabulka 2 – Rozdíly v bodovém hodnocení

Disciplína	WR	u_{wr}	u_{100}
100 metrů	9.58	1202	917
Skok do dálky	895	1312	970
Vrh koulí	23.12	1295	815
Skok do výšky	245	1244	859
400 metrů	43.18	1156	899
110 m překážek	12.87	1126	946
Hod diskem	74.08	1383	808
Skok o tyči	614	1277	901
Hod oštěpem	98.48	1331	810
1500 metrů	206	1218	711

2. ALTERNATIVNÍ DEFINICE BODOVACÍCH FUNKCÍ

Desetiboj je úloha vícekritériálního hodnocení variant s cílem uspořádat varianty (atlety). Existuje celá řada metod pro uspořádání variant podle více kritérií, které jsou často založeny na velmi rozdílných principech. Metoda AHP/ANP, metody třídy PROMETHEE a ELECTRE a metody založené na agregaci funkcí užitku patří mezi nejčastěji používané v různých reálných aplikacích. V tomto článku se pokoušíme ukázat především na možnosti úpravy stávajících bodovacích funkcí. Různé upravené definice těchto funkcí byly v minulosti diskutovány v několika člancích např. (Cheng et al., 2003), (Westera, 2006) nebo (Taborski,

2008). My navrhujeme následující 4 modifikace, které budou v další části článku ilustrovány na reálných datech.

- M1 – Bodovací funkce (1) a (2) zůstávají beze změny, ale parametr a_k je upravený tak, aby se sjednotil počet bodů získaný za světový rekord na úrovni 1250 bodů (průměr hodnot u_{WR} v tabulce 2 je přibližně 1250). Tento model zachovává současnou míru progresu u všech disciplín (parametr c_k) a hranici pro nulové ohodnocení (parametr b_k).
- M2 – Podobné jako v předcházejícím případě, pouze je parametr a_k upravený tak, aby sjednotil počet bodů pro průměrných TOP100 výkonů v desetiboji. Průměrný počet bodů v posledním sloupci tabulky 2 je přibližně 864. To znamená, že např. pro první disciplínu bude parametr a_k redukován o 5.8% a pro poslední disciplínu bude navýšen o přibližně 21.5%.

Tabulka 3 – Parametry pro alternativní funkce

Disciplína	a_k	M1 - a_k	M2 - a_k
100 metrů	25.4347	26,4500	23,9646
Skok do dálky	0.14354	0,1368	0,1279
Vrh koulí	51.39	49,6100	54,4797
Skok do výšky	0.8465	0,8511	0,8514
400 metrů	1.53775	1,6630	1,4779
110 m překážek	5.74352	6,3800	5,2457
Hod diskem	12.91	11,6700	13,8048
Skok o tyči	0.2797	0,2737	0,2682
Hod oštěpem	10.14	9,5250	10,8160
1500 metrů	0.03768	0,0387	0,0458

- M3 – Lineární funkce užitku s dolní hranicí (nulový počet bodů) na stejné úrovni jako dosud (parametr b_k) a horní hranicí na úrovni 1250 bodů pro současný světový rekord (vcelku oprávněně se nepředpokládá, že by nějaký desetibojař mohl překonat individuální světový rekord v jakékoliv disciplíně).
- M4 – Lineární funkce užitku s dolní hranicí jako v předchozím případě. Počet bodů je daný následujícím vztahem (pro disciplíny s výkony v sekundách):

$$u_{ik} = \frac{b_k - p_{ik}}{b_k - q_{ik}} 864,$$

kd q_{ik} je výkon, který by získal průměrný počet bodů podle TOP100 (tabulka 2).

Tabulka 3 uvádí původní a modifikované hodnoty parametru a_k pro modely M1 a M2.

3. ILUSTRACE NA VÝSLEDČÍCH DESETIBOJE NA OH 2008

Alternativní definice bodovacích funkcí z předcházejícího oddílu budou v této části článku aplikovány na datový soubor s výsledky desetiboje, který proběhnul na Olympijských hrách v Pekingu v roce 2008. Kriteriaální matice, tj. jednotlivé výkony sportovců, je uvedena v tabulce 4. Všechny běžecké výkony jsou v sekundách, skoky jsou v centimetrech, ostatní výkony v metrech.

Tabulka 4 – Výkony prvních 15 atletů v desetiboji na OH 2008

	100m	Dálka	Koule	Výška	400m	110m	Disk	Tyč	Oštěp	1500m
1	10.44	778	16.27	199	48.92	13.93	53.79	500	70.97	306.59
2	10.96	761	14.39	211	47.30	14.21	44.58	500	60.23	267.47
3	10.90	733	14.49	205	47.91	14.15	44.45	470	73.98	269.17
4	11.07	737	16.53	208	50.91	14.47	50.04	500	64.01	301.56
5	11.26	708	15.42	196	49.51	14.21	45.17	500	65.40	269.29
6	11.21	768	14.78	211	49.54	14.71	45.50	480	63.93	289.63
7	10.53	756	15.15	196	47.70	14.37	48.39	430	51.59	268.94
8	11.12	729	13.23	205	49.65	14.37	45.39	520	60.21	272.90
9	10.85	704	15.09	199	47.96	14.08	50.91	460	51.52	271.62
10	10.80	770	13.67	199	48.47	14.71	40.41	480	60.27	266.77
11	11.15	704	14.36	211	50.90	14.51	49.35	480	67.07	287.03
12	11.02	723	16.26	202	51.56	15.51	47.43	510	62.57	281.34
13	10.89	729	14.79	196	48.98	14.06	39.83	480	67.16	289.60
14	11.19	719	13.78	199	49.99	14.73	44.09	470	71.44	277.96
15	10.64	707	15.82	196	49.66	13.90	36.73	470	65.60	300.49

Tabulka 5 uvádí celkový počet bodů a pořadí sportovců získané standardní metodikou – označeno jako M0. Dále jsou stejné informace uvedeny pro všechny 4 alternativní přístupy M1 – M4.

Uvedené výsledky jsou doplněny hodnocením získaným metodou PROMETHEE II, která patří mezi nejpoužívanější metody pro vícekriteriální hodnocení variant, i když je zřejmé, že tato metoda pro potřeby hodnocení desetibojařských výkonů není vhodná. Hlavním

důvodem je, že tato metoda porovnává dvojice variant s ohledem na každé kritérium. To znamená, že finální uspořádání závisí na vzájemných vztazích dvojic variant. To je neakceptovatelné pro potřeby hodnocení desetiboje, kde se ukazuje jako jediná možnost použít různé definice funkcí užitku a následně jejich agregace. U metody PROMETHEE II jsme pro všechny disciplíny použili lineární preferenční funkci s dostatečně vysokým prahem preference.

Tabulka 5 – Porovnání současného hodnocení a alternativních přístupů

	M0	P	M1	P	M2	P	M3	P	M4	P	PII
1	8791	1	8787	1	8762	1	9674	1	8803	1	1
2	8551	2	8584	2	8556	2	9441	3	8520	3	2
3	8527	3	8551	3	8555	3	9450	2	8569	2	3
4	8328	4	8319	4	8324	4	9338	4	8497	4	4
5	8253	5	8273	5	8288	5	9248	5	8392	5	6
6	8241	6	8247	7	8235	7	9245	6	8376	7	11
7	8238	7	8272	6	8246	6	9176	10	8282	11	8
8	8220	8	8242	8	8227	8	9197	9	8306	9	5
9	8205	9	8241	9	8227	8	9171	11	8292	10	12
10	8194	10	8227	10	8197	11	9153	12	8247	13	9
11	8178	11	8180	11	8200	10	9206	8	8369	8	7
12	8154	12	8139	13	8184	12	9207	7	8377	6	10
13	8118	13	8151	12	8109	13	9124	13	8243	14	14
14	8055	14	8065	14	8082	14	9100	14	8258	12	13
15	7992	15	8035	15	7971	15	9017	15	8141	15	15

Porovnání výsledků ukazuje relativní podobnost a blízkost výsledného uspořádání variant (atletů) získaného originálním postupem a pomocí modelů M1 a M2. Při aplikaci těchto modelů se objevilo pouze několik málo změn pořadí. Naopak modely M3 a M4 vedou často k poměrně velmi rozdílným výsledkům v porovnání se současnou metodikou.

Tabulka 6 ukazuje rozdíly v průměrném bodovém ohodnocení všech disciplín získaným současnou praxí a pomocí modelů M1 a M2. Je zřejmé, že průměrné hodnocení u modelů M0 a M1 na jedné straně a modelem M2 na straně druhé je poměrně výrazně odlišné. Minimální a maximální průměrné hodnocení se v prvních dvou případech liší až o 300 či více bodů.

U modelu M2 je tento rozdíl méně než 50 bodů. Podobná situace je u modelů M3 a M4, jejichž průměrné výsledky však nejsou v tabulce 6 uvedeny.

Tabulka 6 – Průměrné hodnocení podle vybraných modelů

Disciplína	M0	M1	M2
100 metrů	876	911	825
Skok do dálky	899	856	800
Vrh koulí	786	759	833
Skok do výšky	824	829	829
400 metrů	850	919	817
110 m překážek	925	1027	845
Hod diskem	782	707	837
Skok o tyči	860	842	825
Hod oštěpem	794	746	847
1500 metrů	674	691	819
	674	691	800
	925	1027	847

4. ZÁVĚR

Desetiboj je velice zajímavý vícekriteriální rozhodovací problém, který zajímá široký okruh osob. V tomto článku byl popsán současný systém hodnocení výsledků desetiboje, který je založený na definici dílčích funkcí užitku a jejich následné agregaci. Výsledkem je bodové hodnocení pro každého atleta, podle kterého jsou tito potom uspořádáni. Dále je navrženo několik alternativních způsobů hodnocení, z nichž se zdá nejvhodnější model M2. Tento přístup řeší problém vysokých rozdílů v hodnocení jednotlivých disciplín a současně zachovává současnou míru progresu. Kromě toho tento model také vede k zachování celkového počtu bodů, takže výsledky podle něj mohou být porovnatelné se současnou praxí.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] Cheng, C.L., Tsai, C.H., Chen, L. (2003) Applying Grey Relational Analysis to the Decathlon Evaluation Model. *International Journal of The Computer, The Internet and Management*, 11(3), pp. 54 – 62.

- [2] Cox, D.F, Dunn, R.T. (2002) An Analysis of Decathlon Data. *The Statistician*, 52(2), pp. 179-187.
- [3] Fiala, P. (2007) *Modely a metody rozhodování*. Oeconomica, Praha.
- [4] Jablonsky, J. (2007) Optimisation And Modelling With Spreadsheets. In: *Proceedings of the SOR'07*. BORI, Ljubljana, pp. 151–165.
- [5] Taborski, J. (2008) *Kvantitativní modely v atletickém desetiboji*. VSE Praha.
- [6] Westera, W. (2006) Decathlon, towards a balanced and sustainable performance assessment method. *New Studies in Athletics*, March/April, pp. 37-48 - accessible at <http://www.open.ou.nl/wim/publicationspdf/>

Kontaktní údaje

Prof. Ing. Josef Jablonský, CSc.
VŠE Praha, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
Tel: (420) 224 095 403,
E-mail: jablon@vse.cz

Článek vznikl s podporou GAČR – grant č. 402/09/0231 a IGA FIS VŠE – grant č. F4/18/2011.

TEORETICKÉ ASPEKTY MODELOV SVAR

THEORETICAL ASPECTS OF STRUCTURAL VAR MODELS

Brian König, Marek Oštrom

Abstrakt

Príspevok je zameraný na teoretické koncepty štrukturálneho VAR modelu a na jeden zo spôsobov jeho identifikácie. SVAR modely sú v posledných rokoch veľmi rozšírené a prakticky využívané metódy určené na dynamickú kvantifikáciu ekonomických vzťahov. Existujú rôzne spôsoby identifikácie SVAR modelu, ktoré zaviedli Blanchard a Perotti, znamienkové reštrikcie a pod. V príspevku je popísaná práve metóda znamienkovej reštrikcie.

KLúčové slová: *Štrukturálny VAR model, identifikácia SVAR modelu, znamienková reštrikcia, šoky*

Abstract

The paper is focused on the theoretical concepts of the structural VAR model and the one way of the identification. In recent years SVAR models represent widely and practically used methods for the quantification of dynamic economic relations. There are different ways of identifying SVAR model introduced by Blanchard and Perotti, sign restrictions and the like. This paper describes the method sign restrictions.

Keywords: *Structural VAR model, identification of the SVAR model, sign restriction, shocks*

ÚVOD

Súčasnú politicko-ekonomickú rozhodovanie je späté s potrebou dostatočného poznania makroekonomických vzťahov, interakciami s monetárnou a fiškálnou politikou a jej dopadmi na ekonomiku. Aj keď tvorcovia politiky vlády naďalej tvoria štrukturálne modely zahŕňajúce fiškálne efekty, čím ďalej tým viac sa do popredia dostávajú štrukturálne vektorovo autoregresné modely (SVAR), ktoré umožňujú sledovať fiškálne šoky.

Určenie týchto šokov v SVAR modeloch je možné viacerými spôsobmi. Prvý je identifikácia nulovými reštrikciami dlhodobých multiplikátorov. Druhý je identifikácia podľa poradia, kde sa šoky (náhodné zložky) usporiadajú takým spôsobom, aby sa dalo určiť akú časť šoku spôsobuje náhodná zložka vo vybranej rovnici. Ďalším spôsobom sú znamienkové reštrikcie a iné metódy. V článku sa venujeme popisu metódy znamienkovej reštrikcie.

MATEMATICKÝ ZÁPIS SVAR MODELU

Vychádzame s maticového zápisu VAR modelu:

$$\Gamma y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + u_t \quad (1)$$

Úpravou získame tvar

$$y_t = \Gamma^{-1} A_0 + \Gamma^{-1} A_1 y_{t-1} + \Gamma^{-1} u_t \quad (2)$$

Zavedením substitúcie a operátora oneskorenia má model nasledovný tvar

$$y_t = A(L) y_{t-1} + v_t \quad (3)$$

K danému VAR modelu má SVAR model nasledujúci tvar

$$B_0 y_t = B(L) y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

kde

$$\hat{v}_t = \hat{B}_0^{-1} \hat{\varepsilon}_t \quad (5)$$

Následne na základe vzťahu (5) môžeme zapísať model vektorových klzavých priemerov SVAR modelu

$$y_t = C(L) \varepsilon_t \quad (6)$$

Kde $C(L)$ predstavuje

$$C(L) = C_0 + C_1 L + \dots + C_k L \quad (7)$$

Potom matica $C_j = D_j B_0^{-1}$ predstavuje maticu impulse response (impulzných odoziev) na štrukturálne šoky ε_t a matica D_j predstavuje maticu impulse response na štrukturálne šoky v_t .

Aby sme mohli identifikovať tento typ modelu, musíme zaviesť obmedzenia priamo do matice parametrov B_0 . Ako sme spomínali na začiatku tohto článku existuje viacero spôsobov identifikácie, avšak my sa budeme venovať práve metóde znamienkovej reštrikcie.

ZNAMIENKOVÁ REŠTRIKCIA (SIGN RESTRICTION)

Nech S je matica s diagonálnymi prvkami rovnými štandardným odchýlkam štrukturálnej náhodnej zložky a mimo diagonálne prvky sú nulové:

$$\hat{v}_t = \hat{B}_0^{-1} \hat{S} \hat{S}^{-1} \hat{\varepsilon}_t = T \eta_t \quad (8)$$

T je matica vplyvu (impact matrix) a η_t sú odhadované šoky, kde η_t má jednotkový rozptyl. Metóda znamienkovej reštrikcie generuje alternatívny súbor šokov a alternatívnu maticu vplyvu pomocou výberu takej ortogonálnej matice Q , ktorá je definovaná ako $Q^T Q = Q Q^T = I$. Pôvodné šoky môžu byť zapísané pomocou tejto ortogonálnej matice:

$$\hat{v}_t = T Q^T Q \eta_t \quad (9)$$

$$= T^* \eta_t^* \quad (10)$$

príčom nový odhad šokov η_t^* má aj tú vlastnosť, že jeho matica kovariancií je I , pretože $E(\eta_t^* \eta_t^{*T}) = Q E(\eta_t \eta_t^T) Q^T = I$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & & \\ & & \sin(\theta) & \cos(\theta) & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

kde parameter θ je volený náhodne z rovnomerného rozdelenia a nadobúda hodnoty v intervale od 0 po π . Uvedený výber rotačnej matice naznačuje, že iba šoky pôsobiace na tretiu a štvrtú premennú systému sú rotujúcimi. Je zrejmé, že šoky prislúchajúce ostatným premenným, patria klasickému SVAR systému. Ak aplikujeme metódu znamienkovej reštrikcie iba na dva šoky, pričom všetky ostatné šoky sú identifikované štandardným spôsobom, môžeme povedať, že odhadovaný systém je postačujúci na to, aby dokázal určiť všetky ostatné šoky v systéme (napr. šoky hospodárskeho cyklu).

Avšak aj s použitím spomenutých reštrikcií sa dá predpokladať, že existuje veľký počet kombinácií $T Q^T$ a D_j generujúce maticu impulzné odozvy, ktoré spĺňajú požadované znamienkové obmedzenia. V praxi sa bežne využíva spomenuté zostrojenie matice Q takýmto spôsobom, pokiaľ nie je k dispozícii dostatočný počet d impulzov, ktoré by spĺňali dané ekonomické reštrikcie. Problém, ku ktorému dochádza pri identifikácii prostredníctvom metódy znamienkovej reštrikcie spočíva vo výbere vhodnej skupiny šokov. Často využívaným spôsobom je výber mediánu funkcie impulznej odozvy C_j^d , zvyčajne v spojení s impulzmi korešpondujúcimi vybranému percentilovému pásmu.

Záver

Článok sa zaoberá teoretickým prístupom k štrukturálnemu VAR modelu. Existuje viacero spôsobov identifikácie SVAR modelu, avšak predmetom tohto príspevku je poukázať na metódu znamienkovej reštrikcie. Jednou z hlavných výhod tohto prístupu identifikácie je jej vysoká miera interpretovateľnosti reakcií na šoky. Jej značnou nevýhodou je jej nejednoznačná identifikácia. Iné spôsoby identifikácie ako aj využitie SVAR modelu na konkrétnom modeli by mohlo byť zaujímavým predmetom ďalšieho skúmania danej problematiky.

Použitá literatúra

- [1] Blanchard, O. and R. Perotti (2002), "An Empirical Characterisation of the Dynamic Effects of Changes in Government Spending and Taxes on Output", *The Quarterly Journal of Economics*, 117, 1329-1368.
- [2] Blanchard, O. and D. Quah (1989), "The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances", *The American Economic Review*, 79, 655—673.
- [3] Fry, R.A. and A.R. Pagan (2007), "Some Issues in Using Sign Restrictions for Identifying Structural VARs", NCER Working Paper #14.
- [4] Fry, R.A. and A.R. Pagan (2005), "Some Issues in Using VAR's for Macroeconomic Research", CAMA Working Paper 19/05.
- [5] Lukáčik M. (2011), "The Comparison of Reactions of the EMU Countries to Different Type of Shocks Using SVAR models", In: AIESA, roč. 14, 2011.
- [6] Perotti, R. (2002), "Estimating the Effects of Fiscal Policy in OECD Countries", European Network of Economic Policy Research Institutes, Working Paper No. 15, October 2002.

Kontaktné údaje

Ing. Brian König, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826

email: konigbrian@gmail.com

Ing. Marek Oštrom

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826

email: marek.ostrom@gmail.com

MODELOVÁNÍ PODMÍNĚNÉ KORELAČNÍ MATICE

MODELING OF CONDITIONAL CORELLATION MATRIX

Marika Křepelová

Abstrakt

Ve finanční praxi je potřeba správně odhadnout korelační a kovarianční matici vytvořeného portfolia. Korelační a kovarianční matice je využívána k výpočtu VaR (Value at Risk), hedgových měřítek, parametrů beta u modelů CAPM a mnoha jiných. V mé práci se proto budu zabývat různými metodami jejího odhadu v rámci skupiny MGRACH (Multivariate GARCH). Jmenovitě budu porovnávat modely BEKK, DCC_E a GO-GARCH.

Klíčová slova: *MGARCH, Korelační matice, BEKK model, DCC_E model, GO-GARCH*

Abstract

Financial experience showed an importance of a correct estimate of correlation and covariance matrices. Correlation and covariation matrices are used to compute VaR (Value at Risk), hedge ratio, beta parameters for models CAPM etc. In my paper I am going to estimate these matrices with different methods under the group of MGARCH (Multivariate GARCH). I am going to compare models BEKK, DCC_E and GO-GARCH.

Keywords: *MGARCH, Correlation matrix, BEKK model, DCC_E model, GO-GARCH*

1 ÚVOD

Modelování rizika je velmi významným nástrojem. Riziko je modelováno jako druhý moment, který se dá odhadnout pomocí velmi využívaného nástroje popisující první a druhý moment zároveň a je nazýván model autoregresní podmíněné heteroskedasticity (neboli ARCH; Engle, 1982). Tento lineární ARCH model byl později zobecněn Bollerslevem (1986) a nazván GARCH. Oba tyto modely jsou velmi dobře známy a analyzovány (např. Engle, 2001). Avšak praxe vyžaduje modelovat i kovarianční matice, které se chovají jako ARMA proces. Jedním z příkladů je odhad CAPM modelu. Proto je snaha modelovat vícerozměrné ARCH modely.

Přístupů jak modelovat a nejlépe vystihnout podmíněnou korelační a kovarianční matici je mnoho (Bauwens a spol., 2006). V mé práci se zaměřím na porovnání třech – a to BEKK modelu (Engle, 1995), DCC_E modelu (Engle, 2002), a O-GARCH modelu (Alexander, 2001). Modely budu aplikovat na finanční časovou řadu tří akcií české burzy. Vybranými akciemi jsou akcie ČEZ, Telefonica a KB. Tyto akcie tvoří největší podíl na výpočtu burzovního indexu PX. U těchto akcií budu porovnávat stabilitu korelačních matic.

1.1 Data

Veškerá data použitá pro analýzu v této práci jsou stažena ze serveru *www.patria.cz*. Sledované období bylo od 2.10.2002 do 14.11.2011. Protože časové řady akcií nejsou stacionární v čase, zlogaritovala jsem jejich výnosy, neboli původní časové řady byly upraveny následujícím způsobem:

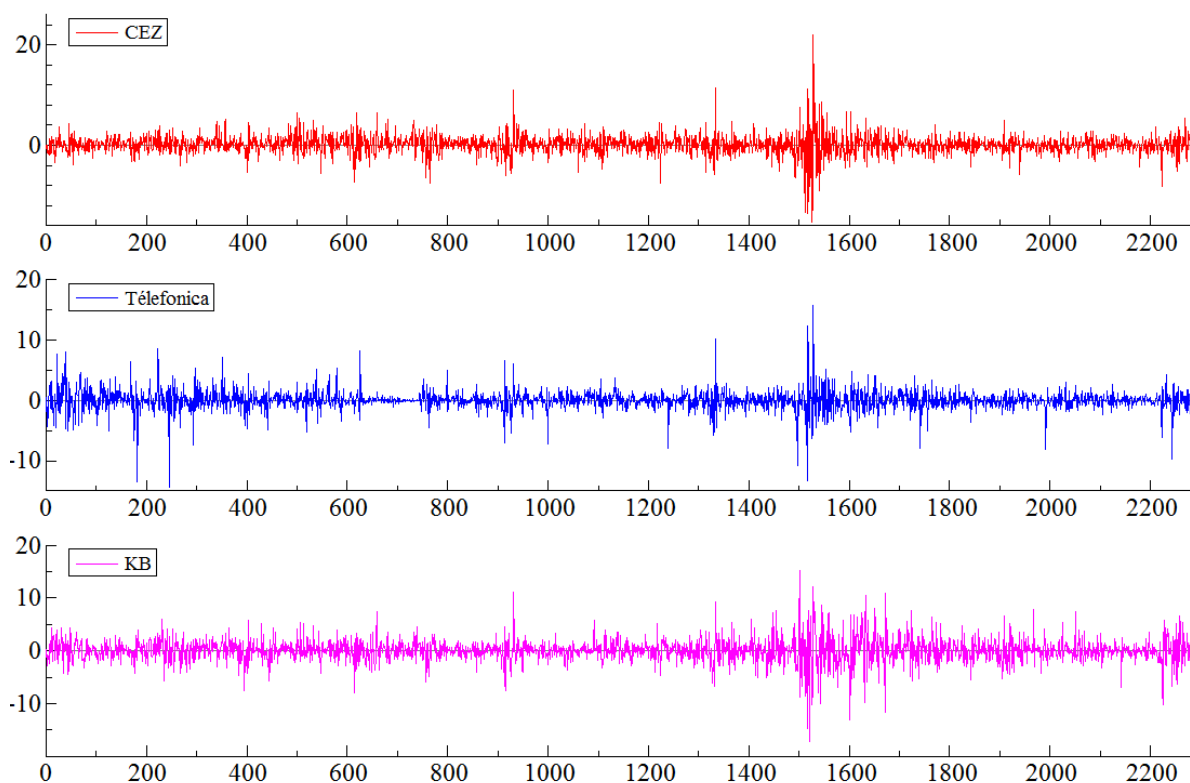
$$\ln(r_t^x) = \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$$

Celkový počet pozorování ve zkoumaném období je 2291. Výnosy akcií jsou zobrazeny na obr. 1. Z grafu je snadno zpozorovatelné několik úseků, kde se volatilita všech akcií zvýšila. Nejvýznamnější výkyvy volatility probíhají zhruba od 1500 pozorování do 1600, což přísluší datům první poloviny roku 2008 a dopadu finanční krize na české akciové trhy. Po tomto období následoval relativně volatilitně nízký rok 2009 a v roce 2010 se pohyb akcií opět chová velmi nestabilně. Akcie ČEZu a Telefonici vykazují vysokou stabilitu naopak akcie KB i v obdobích klidu jsou více náchylné k vysokým výnosům/ztrátám. Akcie po sledované období měly kladný průměr výnosů. Největší průměr měla opět akcie ČEZu s hodnotou 0,11%.

Tab. 1: Popis akcií v daném období (v % výnosů)

	min	průměr	max	std. odch
CEZ	-15.244	0.11047	22.016	2.0141
Telefonica	-14.446	0.037664	15.804	1.46
KB	-17.291	0.051931	15.283	2.28

Obr. 1: Graf výnosů jednotlivých akcií



1.2 Použité metody

Jak jsem v úvodu naznačila, v mém výzkumu budu uvažovat tři metody odhadu vícerozměrného GARCH modelu. U těchto modelů předpokládáme, že náhodná chyba ε_t má nulovou podmíněnou střední hodnotu a podmíněná kovarianční matice H_t je pozitivně definitní a dána jako

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} \xi_t,$$

kde ξ_t, \dots vektor inovací.

BEKK model (Engle et al., 1995)

Model navrhli Baba, Engle, Kraft a Kroner. Vzorec pro výpočet podmíněného matice rozptylů je

$$H_t = C_0^T C_0 + \sum_{k=1}^K C_{1k}^T x_t x_t^T C_{1k} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q A_{ik}^T \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}^T A_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p G_{ik}^T H_{t-1} G_{ik},$$

kde H_t ...matice podmíněného rozptylu,

C_0 , A_{ik} a G_{ik} ... matice parametrů rozměru $(n \times n)$,

C_{1k} ... je matice parametrů rozměru $(J \times n)$.

V modelu proměnná K představuje řád obecnosti procesu a p, q jsou v souladu s teorií GARCH modelu. Proměnná j označuje počet exogenních proměnných v modelu.

Za podmínky, že uvažují proces GARCH(1,1) lze model zapsat jako

$$H_t = C_0^T C_0 + A_{11}^T \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^T A_{11} + G_{11}^T H_{t-1} G_{11}.$$

Kovarianční stabilita je u modelů BEKK zajištěna tehdy a pouze tehdy, jestliže charakteristická čísla matic $\sum_{i=1}^q A_i + \sum_{i=1}^p G_i$ a součtu matic $\sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K (A_{ik} \times A_{ik}) + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^K (G_{ik} \times G_{ik})$ jsou menší než jedna v absolutní hodnotě (Engle, 1995).

DCC_E model (Engle, 2002)

Model je zkratkou Dynamic Conditional Correlation a snaží se zmenšit počet odhadnutých parametrů. Na rozdíl od model BEKK, kde je nutné odhadnout $O(k^2)$ parametrů, u modelu DCC_E se odhaduje pouze $O(k)$ parametrů. Vzorec pro výpočet je následující

$$H_t = D_t R_t D_t$$

kde D_t ... diagonální matice směrodatných odchylek získaný modelem GARCH rozměru $(k \times k)$

R_t ...korelační matice

O-GARCH model (Alexander, 2001)

Tento model se snaží vystihnout vícerozměrný GARCH model pomocí středních hodnot jednorozměrných GARCH modelů. Vektor chyb $\{\varepsilon_t\}$ může být zapsán jako lineární kombinace m nekorelovaných faktorů f_t s podmíněným rozptylem 1. Rovnice modelu vypadá takto

$$V^{-1/2} \varepsilon_t = u_t = W_m f_t,$$

$$H_t = \text{Var}(\varepsilon_t | I_t) = V^{1/2} W_m \Sigma_t W_m^T V^{1/2}.$$

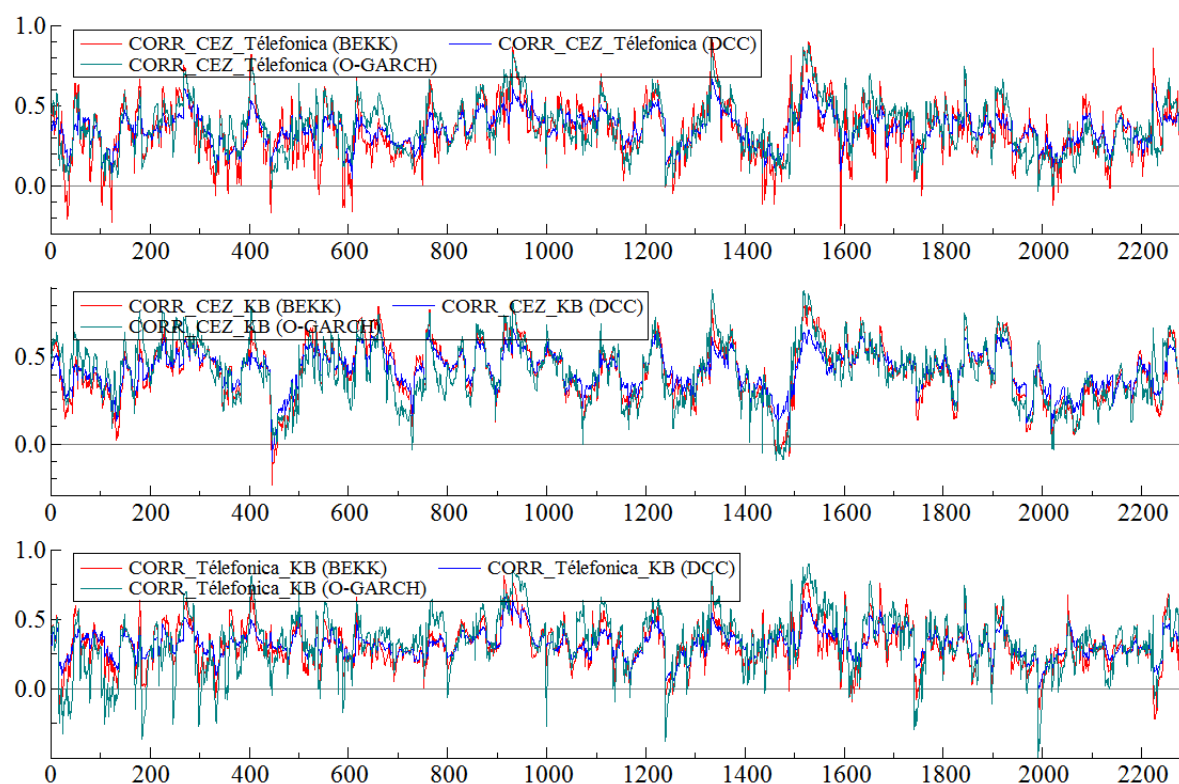
Detailní popis rovnic a použitých matic můžete najít v příslušné literatuře (Alexander, 2001). Předností tohoto modelu je, že pouze s několika hlavními komponent lze postihnout značnou část variability. Model se však nesmí použít, jestliže jsou data pouze slabě korelovaná nebo

komponenty mají stejnou měrnou jednotku. Další nevýhodou modelu je, že některé diagnostické testy se nevypořádají se zmenšenou maticí rozptylů (jelikož je využíván pouze rozptyl komponent).

2 ANALÝZA PODMÍNĚNÝCH KORELAČNÍCH MATIC

Ve zkoumaném období jsem odhadla vícerozměrné modely pomocí výše uvedených tří modelů a do grafu jsem zanesla hodnoty korelací z nich získaných. Podmíněná korelace obdržené modelem BEKK (modrá barva v grafu) vykazují největší nestabilitu. Jako nejvíce stabilní se zdají být korelace získané metodou DCC_E (v grafu označené červenou barvou). Tento fakt je pozorovatelný u všech tří kombinací akcií. Z grafu je také patrný ostrý pokles podmíněné korelace před finanční krizí a následně její prudký nárůst. Tyto výsledky se shodují i jinými pracemi (např. Naoui, 2010).

Obr. 2: Podmíněná korelace mezi jednotlivými akciemi



Při analýze podmíněných korelací získaných jednotlivými metodami jsem vypočetla jejich korelační koeficient. Pro názornost jsou výsledky vyobrazeny v tabulce 2, kde je brána v úvahu pouze kombinace akcií ČEZu a Telefoniky. Korelační koeficient mezi metodou DCC_E a metodou O-GARCH je poměrně vysoká. Naproti tomu korelace mezi metodou BEKK a ostatními je velmi nízká. I při náhledu na hodnoty věrohodnostní funkce považuji model DCC_E za nejlépe vyhovující, avšak rozdíl není velký.

Tab. 2: Korelační koeficienty podmíněné korelace u akcií ČEZ-Telefonica

	DCC	BEKK	O-GARCH
DCC	1.0000	0.27259	0.75498
BEKK	0.27259	1.0000	0.18283
O-GARCH	0.75498	0.18283	1.0000
<i>log-likelihood</i>	-8995.473	-9257.114	-9058.501

3 ZÁVĚR

V této práci jsem porovnávala podmíněnou korelaci získanou modely Dynamic Conditional Correlation (Engle, 2002), Baba-Engle-Kraft -Kroner (Engle a spol., 1995) a O-GARCH (Alexander, 2001). Model byl vždy aplikován na data tří akciových indexů pražské burzy – ČEZu, Telefonicí a Komereční banky. Výsledkem byla prokázána rozdílnost takto získaných podmíněných korelací. Proto předem musíme velmi dobře uvážit, kterým modelem budeme korelace odhadovat pro použití v praxi.

Jelikož dané období obsahuje i finanční krizi a tudíž strukturální zlom, v další práci bych vzala v úvahu modelování korelace s proměnlivými režimy.

Text vznikl v rámci grantu IGA F4/13/2010.

Použitá literatura

1. ALEXANDER, C. O. 2001. Orthogonal GARCH. In: Mastering Risk, 2001, č. 2, s. 21-38.
2. BAUWENS, S., LAURENT L., ROMBOUTS, J.V.K. 2006. Multivariate GARCH models: A Survey. In: Journal of Applied Econometrics, 2006, č.21, s.79-109.
3. BOLLERSLEV, T., 1986: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, In: Journal of Econometrics, 1986, č.31, s.307-327.
4. ENGLE, R. F., 2001. GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics. In: Journal of Economic Perspectives, 2001, č.15, s.157-168.
5. ENGLE, R. F., 2002. Dynamic Conditional Correlation-A Simple Class of Multivariate GARCH Models. In: Journal of Business and Economic Statistics, 2002, č.20, s.339-350.
6. ENGLE, R. F., KRONER K. 1995. Multivariate Simultaneous GARCH. In: Econometric Theory, 1995, č.11, s.122-150.
7. ENGLE, R. F., SHEPPARD K. 2001. Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH. In: NBER Working Paper 8554. National Bureau of Economic Research, Inc.
8. NAOUI, K. 2010. A Dynamic Conditional Correlation Analysis of Financial Contagion: The Case of the Subprime Credit Crisis. In: International Journal of Economics and Finance, 2010, č. 3, s.85-96.

POSTAVENÍ ČR A SR MEZI ZEMĚMI EU Z POHLEDU VYUŽÍVÁNÍ INTERNETOVÝCH SLUŽEB S VYUŽITÍM VÍCEKRITERIÁLNÍHO HODNOCENÍ VARIANT

POSITION OF THE CZECH REPUBLIC AND SLOVAKIA AMONG THE EU COUNTRIES FROM THE INTERNET SERVICES USAGE POINT OF VIEW USING MULTI-CRITERIA EVALUATION OF ALTERNATIVES

Martina Kuncová

Abstrakt

Metody vícekriteriálního hodnocení variant (např. WSA, TOPSIS, PRIAM) slouží ke srovnání či uspořádání variant dle zvolených kritérií a vah kritérií. Cílem tohoto článku je využít zmíněné metody pro zjištění postavení České republiky a Slovenska mezi 27 zeměmi Evropské Unie a třemi dalšími (Norsko, Island, Chorvatsko) z pohledu využívání internetových služeb. Pro srovnání bylo použito 9 kritérií spojených s využitím internetu z let 2008 a 2009.

Klíčová slova: *vícekriteriální hodnocení variant, internetové služby, srovnání zemí, EU, ČR, SR*

Abstract

Multi-criteria evaluation of alternatives methods (for example WSA, TOPSIS, PRIAM) belong to the principles that try to order the alternatives according to the chosen criteria and weights. The aim of this article is the usage of these methods to know the position of the Czech Republic and Slovakia among the 27 EU countries and 3 others (Norway, Island, Croatia) from the internet usage point of view. For the comparison 9 criteria (from 2008 and 2009) connected with the internet services were used.

Keywords: *multi-criteria evaluation of alternatives, internet services, countries comparison, EU, Czech Republic, Slovakia*

1 ÚVOD

Informační a komunikační technologie jsou oblastí, která se v posledních letech výrazně rozvíjí, a to zejména díky internetu. Každoročně vznikají nové a nové možnosti, jak využít internetových služeb k nákupu či prodeji, ke komunikaci prostřednictvím mailů či sociálních sítí, ke sdílení informací apod. Globalizace vede k tomu, že trendy v jedné zemi se brzy přesouvají do dalších zemí a do celého světa. Avšak každá země má svá specifika, možnosti, zvyky, svou infrastrukturu – takže situace v jednotlivých zemích není stejná. Z tohoto důvodu jsem se zaměřila na srovnání zemí z pohledu využívání internetových služeb a zjištění, jak si stojí Česká republika a Slovensko mezi ostatními evropskými zeměmi. Podobný přístup nalezneme např. na webových stránkách 3, které obsahují pořadí zemí z hlediska počtu uživatelů internetu – na špičce je EU, z jejích zemí pak Německo, Velká Británie a Francie, Česká republika si drží 40. místo, Slovensko pak 58. pozici (z 216 sledovaných zemí). Adam a kol. 1 pro změnu srovnávali využití internetu v podnikové sféře v Austrálii, na Novém Zélandu a ve Velké Británii. Další srovnání dvou zemí s využitím metod vícekriteriálního

hodnocení variant z pohledu ICT najdeme v příspěvkách Doucka a Nedomové 5,6,7 a také v článku 13 bylo využito těchto metod pro analýzu širokopásmového připojení v kraji Vysočina v České republice. Zemím EU se pak věnuje Cuervo a Rosalia 4, kteří na srovnání rozdílů v digitalizaci použili faktorovou a shlukovou analýzu.

2 MATERIÁL A METODY

Pro analýzu je potřeba nejdříve získat data, zvolit kritéria a vybrat metody na řešení. Data pocházejí z dokumentu nazvaného Digital Competitiveness Report vytvořeného Evropskou komisí v roce 2010 8. Mezi varianty je zařazeno 27 zemí Evropské Unie a 3 nečlenské země (Norsko, Island, Chorvatsko), použitá data jsou za roky 2008 a 2009 – pro ukázkou data za rok 2009 jsou v Tabulce 1 (názvy zemí ponechány v angličtině).

Tabulka 1 Varianty a kritéria – procento uživatelů daných internetových služeb v roce 2009 8

Country / criterion	zboží	Vkládání vlastních materiálů	čtení	IB	hraní	Zdravot. info	práce	online kurzy	učení
Austria	54	17	41	35	21	36	10	1	24
Belgium	59	18	34	46	33	33	13	4	18
Bulgaria	17	8	21	2	24	10	9	1	12
Cyprus	39	17	27	15	25	16	5	1	10
Czech Rep.	50	5	43	18	23	20	8	1	11
Denmark	74	33	64	66	34	46	27	4	37
Estonia	54	30	63	62	35	32	23	6	24
Finland	73	18	64	72	38	56	24	13	31
France	60	20	24	42	26	37	16	7	24
Germany	69	23	27	41	26	48	18	3	28
Greece	33	9	21	5	19	15	6	2	12
Hungary	48	29	36	16	29	36	18	2	19
Ireland	54	13	19	30	19	24	14	5	27
Italy	33	17	23	16	17	21	9	3	19
Latvia	50	34	46	42	38	29	25	7	23
Lithuania	44	25	49	32	35	29	15	8	22
Luxembourg	75	38	55	54	33	54	13	6	38
Malta	48	9	32	32	28	30	14	4	26
Netherlands	79	26	46	73	49	50	17	5	28
Poland	29	11	18	21	20	22	9	1	12
Portugal	40	12	28	17	20	28	10	2	27
Romania	12	14	21	2	21	16	5	3	14
Slovakia	50	7	35	26	31	30	16	1	11
Slovenia	49	23	34	24	27	32	12	3	21
Spain	47	19	38	24	30	32	16	7	32
Sweden	77	21	50	71	35	36	22	4	28
UK	64	33	43	45	36	34	25	7	30
Iceland	80	43	72	72	42	37	17	10	41
Norway	83	24	76	77	39	40	22	5	33
Croatia	33	21	36	16	22	26	14	2	20

Kritéria zobrazená v Tabulce 1 jsou následující:

1. Vyhledávání informací o zboží a službách
2. Vkládání vlastních materiálů na internet
3. Čtení online novin a časopisů
4. Internetové bankovníctví
5. Hraní nebo stahování her, filmů, hudby
6. Hledání informací o zdraví, nemocech, úrazech
7. Hledání práce či odesílání životopisů
8. Online kurzy
9. Vyhledávání informací o vzdělávání a vzdělávacích kurzech

Pro srovnání zemí byly použity metody vícekritériálního hodnocení variant, kde je potřeba znát jednak seznam variant, dále seznam kritérií, hodnoty jednotlivých variant dle kritérií a případně i váhy kritérií. Podrobnější informace lze nalézt např. v publikacích 9, 10, 11. Pro získání pořadí zemí byly vybrány tři metody, a to WSA, TOPSIS a PRIAM. Výpočty byly realizovány v programech IZAR 2 a Sanna 12.

WSA (Weighted Sum Approach – Metoda váženého součtu): Tato metoda seřazuje varianty na základě jejich uživatelské funkce (lineární). K výpočtu užiteků jsou potřeba váhy kritérií. Čím vyšší užitek, tím jde o lepší variantu 9.

TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution): Základní myšlenkou je předpoklad, že nejlepší variant má nejmenší vzdálenost od ideální varianty a největší od bazální varianty. Na základě indexu relativních vzdáleností lze opět varianty uspořádat do pořadí – čím vyšší relativní index, tím lépe se varianta umístila. I tato metoda vyžaduje váhy kritérií 11.

PRIAM (Programme utilisatnt l'Intelligence Artificielle en Multicritere): Tato metoda spadá do kategorie metod, které obvykle nevyžadují váhy, ale tzv. aspirační úroveň, tj. požadavky na jednotlivá kritéria. Cílem bývá nalézt ty varianty či tu variantu, která splňuje všechny požadavky. Pokud taková není, metoda počítá vzdálenost od aspiračních úrovní a uspořádá varianty do pořadí od nejmenší po největší vzdálenost 10. V tomto článku budeme předpokládat, že aspirační úroveň je shodná s maximy pro všechna kritéria (neboť jsou všechna maximalizační). Pak lze počítat vzdálenost pro každé kritérium na základě vzorce:

$$d_i = \sum_{j=1}^n \frac{a_j - y_{ij}}{a_j} ,$$

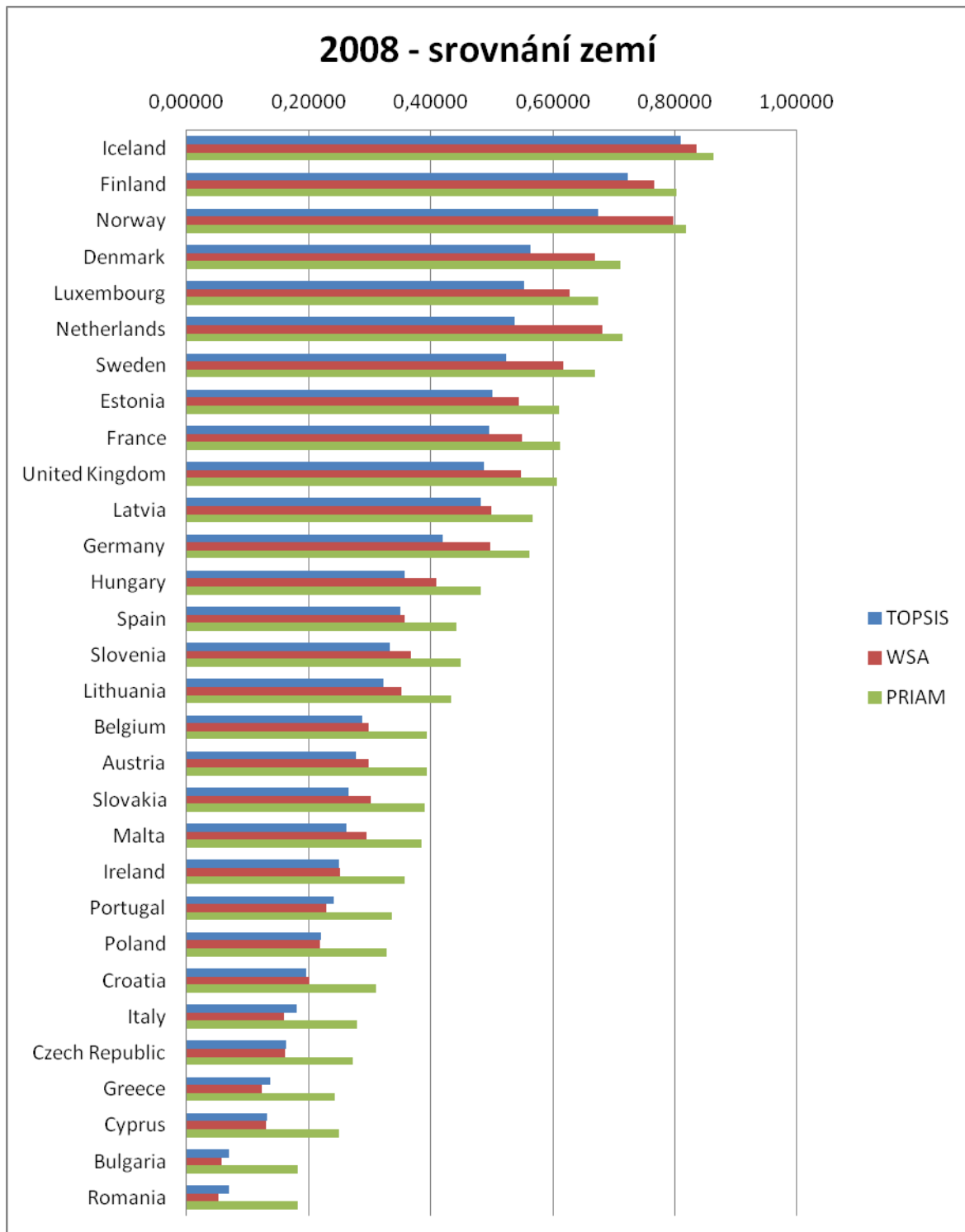
kde d_i je relativní index vzdálenosti varianty i , a_j je aspirační úroveň (maximum) pro kritérium j a y_{ij} je reálná hodnota pro variantu i a kritérium j ($i=1,2,\dots,30, j=1,2,\dots, 9$). Jelikož nejlepší varianta má relativní index nejnižší, bude pro srovnání s ostatními metodami použita hodnota $(1-d_i)$. I zde by bylo možné uplatnit váhy kritérií – ve srovnání však předpokládejme, že všechna kritéria mají stejnou váhu.

3 VÝSLEDKY SROVNÁNÍ

Z následujících grafů můžeme vidět výsledky srovnání všech zemí v letech 2008 a 2009. Je patrné, že všechny metody vykazují poměrně podobné pořadí zemí, metoda PRIAM dosahuje vyšších indexů u horších zemí, nicméně na pořadí tento fakt nemá vliv.

Pokud jde o postavení České republiky a Slovenska, lze konstatovat, že ve využívání internetových služeb nepatří obě země mezi špičku v Evropské unii. V obou sledovaných letech je však Slovensko lépe postavené než Česká republika. Té patří 26.místo pro rok 2008,

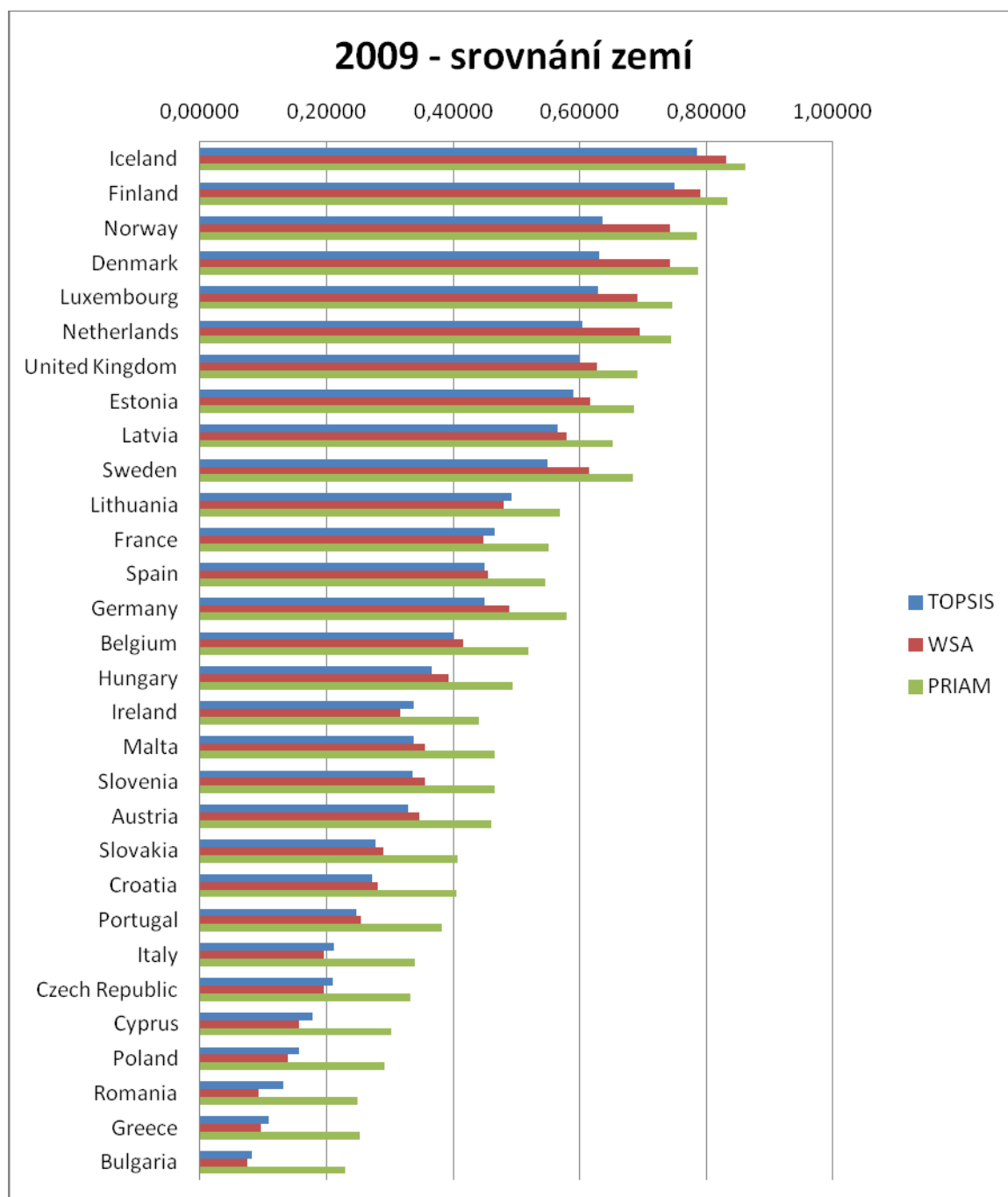
v roce 2009 si o jedno místo polepšila, zatímco Slovensko z původního 19.místa v roce 2008 kleslo na 21.příčku pro rok 2009.



Obrázek 1: Srovnání zemí v roce 2008 na základě kritérií spojených s internetovými službami

Podívejme se na výsledky podrobněji. Česká republika začala s úrovní 0,161 (WSA), 0,163 (TOPSIS) a 0,273 (PRIAM) v roce 2008, v roce 2009 se všechny indexy mírně zvýšily (0,195-WSA, 0,21-TOPSIS, 0,332-PRIAM). Avšak 25.-26.místo svědčí o nízké úrovni

využívání internetových služeb. Pouze 1 % Čechů využívá internet pro online kurzy (v roce 2009), 5 % pro nahrávání či vkládání vlastních materiálů na web, 8 % pro vyhledávání práce nebo zasílání životopisů, kdežto např. na Islandu jsou uvedena procenta uživatelů daných služeb 10 %, 43 % a 17 %. Slovensko se v prvních dvou uvedených službách také nepohybuje na vysokých číslech (1 %, 7 %), avšak internet pro vyhledávání práce používá 16 % obyvatel, což je poměrně slušná hodnota (nejvyšší procentní podíl má v této kategorii Dánsko s 27 %). V roce 2008 dosahuje Slovensko vyšší relativní indexy u všech metod než ČR v obou letech (0,308-WSA, 0,264-TOPSIS, 0,408-PRIAM). U nejlepších zemí EU se však indexy pohybují kolem 0,8.



Obrázek 2: Srovnání zemí v roce 2009 na základě kritérií spojených s internetovými službami

Jestliže bychom porovnávali mezi sebou pouze zmíněné dvě země, pak se meziročně Česká republika zlepšila ve všech kritériích kromě online kurzů (pokles ze 2 % na 1 %), kdežto Slovensko si meziročně pohoršilo zejména v kritériu hraní her a stahování hudby (z 39 % na 31 %) a dále v procentu těch, kteří vyhledávají informace o vzdělávání (pokles ze 14 % na 11 %). V roce 2008 bylo však Slovensko ve všech sledovaných kritériích lepší než Česká republika (až na online kurzy, které v ČR využili 2 % lidí, na Slovensku jen 1 %). V roce 2009 se Česká republika dostala na stejnou úroveň u procenta populace vyhledávající informace o zboží a službách (obě země 50 %) a předčila Slovensko v kritériu čtení online novin a časopisů (43 % uživatelů internetu v ČR oproti 35 % v SR). V kritériích internetové bankovníctví, hraní a stahování her a hudby a hledání zdravotních informací se meziroční procentní rozdíl mezi ČR a SR snížil, avšak stále je Slovensko lepší o 8-10 %.

4 ZÁVĚR

Cílem tohoto příspěvku bylo srovnání postavení České republiky a Slovenska s ostatními evropskými zeměmi z hlediska využívání internetových služeb. Pro srovnání a uspořádání byly použity metody vícekritériálního hodnocení variant, a to WSA, TOPSIS a PRIAM. Výsledky pro sledované roky 2008 a 2009 jsou co do pořadí zemí u všech metod obdobné. Postavení České republiky a Slovenska v dané kategorii je však poměrně špatné v porovnání s vyspělými evropskými zeměmi – nejbližší mají k takovým zemím, jako Chorvatsko, Itálie, Portugalsko, Kypr, Malta, Polsko či Řecko. U České republiky lze zaznamenat zlepšení ve využívání internetových služeb mezi roky 2008 a 2009, na Slovensku však naopak sledujeme spíše propad. Nejlépe si v Evropské unii vedou severské země a země Beneluxu. Důvody umístění se obou zemí v dolní polovině sledovaných zemí přesahují záměr tohoto článku, nicméně mohly by být součástí dalšího výzkumu. Otázkou však zůstává, zda vysoké procento využívání internetových služeb není spíše záparem než kladem – v souvislosti s měnícím se životním stylem, kde je volný čas využíván sezením u počítačů či notebooků, může být vysoké procento využívání internetu spíše negativem pro zdravý životní styl.

Použitá literatura

1. Adam, S., Mulye, R., Deans, K.R., Palihawadana, D.: E-marketing in perspective: a three country comparison of business use of the Internet. *Marketing Intelligence & Planning*, vol. 20, issue: 4, 2002, 243 - 251
2. Boksteflova, B., Kalcevova, J.: IZAR – the multiattribute evaluation decision support for Linux. In: *7th International Conference Efficiency and Responsibility in Education*, Czech University of Life Sciences Prague, 2010, 50-58
3. Central Intelligence Agency – the World Factbook: Country comparison – Internet users [online], 2011, [cit.2011-5-11], available at: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2153rank.html>
4. Cuervo, V., Rosalia, M.: A multivariate framework for the analysis of the digital divide: Evidence for European Union-15. *Information & Management*, vol.43, issue 6, 2006, 756-766.
5. Doucek, P., Nedomová, L.: How does financial crises influence ICT? In: *Človek in organizacija* (CD-ROM), Maribor, Univerza v Mariboru, 2010, 349-355.
6. Doucek, P., Nedomová, L., Novotný, O.: How ICT Affect the Czech Economy? *ECON*, 2011, vol. 19, No. 1, 106–116.
7. Doucek, P., Nedomová, L.: ICT and Economy – Slovenia and Czech Republic Experience. In: *Organizacija prihodnosti – Future Organization* [CD-ROM]. Maribor : Univerzita v Mariboru, 2011, s. 268–278.
8. European Commission, 2010, Europe's Digital Competitiveness Report 2010, Luxembourg Publications Office of the European Union, 2010
9. Evans, G.W.: An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs. *Management Science*. 1984, vol. 30, No. 11, 1268-1282.

10. Fiala, P.: *Modely a metody rozhodování*. Praha: Oeconomica 2006.
11. Figueira, J., Greco, S., Ehrgott M.: *Multiple Criteria Decision Analysis – State of the Art Surveys*. New York : Springer Science + Business Media Inc., 2005.
12. Jablonský, J. SANNA – A Spreadsheet Based System for Multicriteria Decision. In: *Book of Abstracts. Chania*, 2006, p. 148.
13. Kuncová, M., Kalčevová, J., Novotný, J., Vokáčková, H.: Multicriteria Decision in the Analysis of the Market Environment for the Notification Process of the Broadband Network Development. In: *Mathematical Methods in Economics* [CD-ROM]. České Budějovice : University of South Bohemia, 2010, 386–391

Kontaktní údaje

Ing. Martina Kuncová, PhD.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 449

email: kuncovam@vse.cz

Článek vznikl s podporou projektu Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze č. IGA F4/16/2011 „Modely operačního a finančního manaementu“.

DYNAMICKÉ MODELY VŠEOBECNEJ VYPOČÍATEĽNEJ ROVNOVÁHY¹

DYNAMIC COMPUTABLE GENERAL EQUILIBRIUM MODELS

Ivan Lichner, Tomáš Miklošovič

Abstrakt

Modely všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy (CGE²) slúžia na analyzovanie dopadov politických rozhodnutí na hospodárstvo ako celok, ako aj na jeho jednotlivé sektory a ekonomických agentov. Vzhľadom na potrebu skúmania a prognózovania hospodárskeho vývoja aj v dlhodobom nie len krátkodobom horizonte nepredstavuje statická verzia CGE modelov najvhodnejší nástroj na uvedené analýzy. Cieľom tohto článku je vytvorenie prehľadu spôsobov prekonania ťažkopádosti statických modelov prostredníctvom ich dynamizácie.

Kľúčové slová: *všobecná vypočítateľná rovnováha, dynamický model, časový horizont modelovania*

Abstract

Computable general equilibrium models represents an useful tool for analysis of policy decisions impacts on country level and on sectors and economic agents. Static version of CGE models is not very reliable method for longterm analysis and forecasts. Aim of this article is to create an overview of available approaches overcoming the rigidity of static models by their dynamization.

Keywords: *computable general equilibrium, dynamic model, modeling time horizon*

1 ÚVOD

Vo všetkých modeloch všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy sú vzťahy medzi jednotlivými premennými kalibrované na údajovej základni tzv. benchmarkovej rovnováhy, z roku v ktorom boli dáta zozbierané. Kalibračný proces vypočíta pomerové a čiastkové parametre v závislosti od exogénne definovaných elasticít správania sa tak, aby model reprodukoval vstupné dáta. Model je možné použiť na modelovanie a simulovanie možného budúceho hospodárskeho vývoja, ako napr. dopadov rôznych hospodárskych politík, pomocou zmien relevantných exogénnych premenných, na základe ktorých sa následne vypočítata nová rovnováha. Tento prístup bol často využívaný na analyzovanie dopadov jednotlivých politických rozhodnutí a nepriamych efektov zmien vo viacerých hospodárskych politikách. Avšak ostáva veľmi otáznou, či je možné predpokladať, že štruktúra hospodárstva danej krajiny v danom roku ostane konštantná dostatočne dlhý čas na to aby bola zabezpečená správnosť výsledkov simulácie. V prípade prebiehajúcich zmien v ekonomike spôsobených globálnou hospodárskou krízou je však možné očakávať zmeny v koeficientoch medzispotreby a exogénne určených elasticitách správania. Nepresnosť CGE modelovania sa zväčšuje s dĺžkou analyzovaného obdobia.

¹ Táto práca bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe zmluvy č. APVV-0541-10

² z anglického *Computable General Equilibriu*

V statických modeloch je správanie sa ekonomických agentov v otázkach úspor, investícií alebo využitia zdrojov exogénne definované, zatiaľ čo v prípade dynamických modelov tieto obsahujú rovnice úspor, investícií a alokácie zdrojov, ktoré umožňujú zmenu správania podnikov a spotrebiteľov medzi jednotlivými časovými obdobiami. Zahnutie možnosti zmien správania sa domácností (úspory) a optimalizácie rozhodovania podnikov (investície) umožňujú vierohodnejšie opísať vývoj investícií a výdavkov domácností .

2 MODELOVÉ PRÍSTUPY

Prvé pokusy o zavedenie časovej premennej do CGE modelov sa objavili až v neskoršom období. Jednou z hlavných príčin bola snaha čo najpresnejšie namodelovať nielen vplyv šoku po jeho zavedení do hospodárskej reality, ale snažiť sa predikovať aj správanie sa ekonomiky v strednodobom a dlhodobom období po zavedení uvedeného šoku. Prostredníctvom takéhoto prístupu bolo možné sledovať dlhodobější dopad na správanie sa jednotlivých agentov a celkovej ekonomiky, napríklad po zmenení daňovej politiky (nap. Zmena úrovne daňovej sadzby). Od tohto momentu sa dynamizácia modelu stala jednou z hlavných priorít vedeckého skúmania v tejto triede modelov. V priebehu času dynamizácia modelov postupne napreduje, pričom je možné sledovať tri hlavné spôsoby jej uplatňovania:

- statická rovnováha
- rovnováha rekurzívnej dynamizácie
- dynamická rovnováha

Toto členenie ako prvé uviedli Dixon a Parmenter (1996), zatiaľ čo kategorizácia daňovej dynamiky bola prezentovaná Pereirom a Shovenom (1988).

2.1 Statická rovnováha

Statické modely predstavujú modely len s jedným časovým obdobím. Modely generujú investície, úspory a dopyt po kapitálovom statku. Investície predstavujú len zložku dopytu a kapitál nie je generovaný tvorbou investícií počas daného časového obdobia. Väčšina tradičných modelov ako napríklad Shoven and Whalley (1972) a Dervis, De Melo a Robinson (1982) predstavuje práve statickú verziu. Obširnejšie verzie statických modelov predstavili Robinson, Yunez-Naude, Hinojosa-Ojeda, Lewis a Devarajan (1999). Van Tongeren, Van Meijl a Surry (2001) použili statický model na prognózovanie hospodárskych dopadov na určitý čas v dlhodobom horizonte. Nakalibrovali model na imaginárnu SAM maticu, o ktorej predpokladali, že reprezentuje ekonomiku na ustálenej ceste rastu. Aj keď ani v tomto prípade alebo kapitál zamenený priamo v danom časovom období, kalibrácia tohto modelu je konzistentná s predpokladom ustálenej rovnováhy.

2.2 Rekurzívna dynamizácia

Táto metóda predstavuje sled po sebe nasledujúcich statických modelov. Jednotlivé rovnováhy sú prepojené prostredníctvom akumulácie kapitálu. Dixon a Parmenter (1996) rozlišujú dva druhy rekurzívneho modelu podľa typu očakávaní: krátkodobé očakávania a adaptívne očakávania. Podľa druhu očakávaní sa jednotliví agenti na trhu aj správajú. Najvýraznejší rozdiel medzi statickým a rekurzívnym prístupom je v tom, že pri rekurzívnom prístupe musia byť splnené dodatočné podmienky. Pri rekurzívnom modeli s krátkodobými očakávaniami predstavuje miera úspor exogénny parameter a investície predstavujú celkové úspory v rámci jedného časového obdobia. Pri aplikácii adaptívnych očakávaní podľa Dixona a Rimmera (2002), závisia investície v roku t od očakávaného efektu výnosu v roku $t + 1$,

$$K_j(t + 1) = K_j(t) \times (1 - D_j) + Inv_j(t),$$

kde $K_j(t)$ je množstvo kapitálu v odvetví j použitého v čase t , $Inv_j(t)$ je množstvo investícií v odvetví j vyčlenených v čase t , D_j je odpisová miera - zvyčajne daná ako známy parameter.

Zatiaľ čo kapitál sa zvyčajne vyvíja v závislosti od rozhodnutí agentov, celková ponuka práce je limitovaná hlavne demografickou prognózou. Ponuka práce sa podľa Annabi, Cockburn, a Decaluwé (2004) v jednotlivých časovných obdobiach správa nasledovne:

$$L(t+1) = (1 + pg) \times L(t),$$

kde, $L(t)$ je celková ponuka pracovnej sily v čase t , pg je miera rastu populácie, ktorá je zvyčajne exogénne určená.

Aby ekonomika bola v rovnováhe, musí sa ponuka kapitálu rovnať dopytu po kapitáli. V takom prípade sa ekonomika dostáva do ustáleného stavu a dochádza k realokácii kapitálu a investícii. Dopyt po kapitáli naposledy spomenutí autori vyjadrili nasledovnou rovnicou:

$$\frac{Inv_j(t)}{K_j(t)} = f(r_j(t), N_j(t)),$$

kde $r_j(t)$ je návratnosť kapitálu a $N_j(t)$ náklady na kapitál.

Prvé snahy o zavedenie dynamických prvkov do modelu predstavili Ballard, Fullerton, Shoven a Whalley (1985). Model popísaný v Shoven a Whalley (1972), ktorý bol aplikovaný na americkú ekonomiku zahrňoval krátkodobé očakávania pre spotrebiteľov ohľadom budúcich cien, zatiaľ čo strana výroby zostala úplne statická. Príkladom rekurzívneho prístupu s adaptívnymi očakávaniami predstavuje model Monash austrálskej ekonomiky prezentovaný Dixonom a Rimmerom (2002).

2.3 Dynamická rovnováha

Plne dynamický prístup podľa [16] predpokladá, že spotrebiteľia aj výrobné sektory optimalizujú svoje správanie nielen v priebehu časovej periódy, ale aj medzi dvoma časovými obdobiami. Väčšina týchto modelov obsahuje určitú formu životného cyklu správania. Domácnosti optimalizujú funkciu užitočnosti medzi rôznymi jednotlivými obdobiami, zatiaľ čo sa snažia maximalizovať svoje príjmy v každej časovej perióde. Na strane výrobcov je optimálne správanie zabezpené maximalizáciou súčasnej diskontovanej hodnoty čistých peňažných tokov. Trhovú hodnotu firmy v niektorých prácach predstavuje súčasná diskontovaná hodnota budúcich vyplatených dividend. Táto trieda modelov je založená na hypotéze dokonalej predvídateľnosti popísať prechod do nového rovnovážny stav. Dynamické CGE modely sú veľmi výpočtovo náročné, pretože všetky rovnice definované na celom časovom horizonte sú riešené simultánne. Preto sa zvyčajne produkčná časť modelu člení len na niekoľko výrobných odvetví.

Prvé snahy o zavedenie dynamiky správania spotrebiteľov je možné nájsť v prácach Ballarda (1983), Auerbacha a Kotlikoffa (1983). Špeciálny typ CGE modelu predstavuje model prekrývajúcich sa generácií, ktorý bol založený na teórii životného cyklu domácností (Auerbach, Kotlikoff, 1987). Tieto modely obsahovali možnosť ovplyvňovania bohatstva budúcich generácií pomocou odkázania majetku (Knudsen a kol., 1998). Prvé snahy o dynamizáciu produkčnej stránky predstavovali modely Bovenberga (1985) a Summersa (1985). Dynamické prvky sa neskôr vyskytli aj v blokoch vlády, zahraničia a finančných trhov.

Aby model nepozostával z nekonečného počtu riešení, je potrebné definovať jeho uzávery. Existuje viacero možných uzáverov, ktoré je možné aplikovať, avšak výber konkrétneho uzáveru závisí od konkrétneho typu analýzy. Každý model by mal cielene simulovať daný problém a zle zvolený uzáver môže spôsobiť odchylenie sa od tohto cieľa. Pri dynamickom modeli je vhodné zvolený uzáver o to dôležitejší, že hlavne on pôsobí na správne správanie sa jednotlivých premenných v modeli.

V prípade ak použitý uzáver nereflektuje historickú špecifičnosť krajiny, ktorá je modelovaná môže dôjsť ku skreslenosti výsledkov. Väčšina premenných charakterizujúca vlastnosť hospodárskych dejín špecifickej modelovanej krajiny je exogénna. V rámci dynamického

modelovania však nie je vhodná ich fixácia na historických hodnotách. Tento problém je možné preklenúť definovaním nových endogénnych premenných, ktoré do určitej miery popisujú príslušné exogénne premenné. Autori Dixon a Rimmer (2002) uvádzajú, že uzáver na základe nových endogénnych premenných najlepšie opisuje postupný rozvoj exogénneho uzáveru.

3 ČASOVÝ HORIZONT V DYNAMICKOM MODELOVANÍ

Pri dynamických CGE modeloch predstavuje čas v porovnaní so statickými modelmi relevantný parameter. Úplná dynamizácia modelu zaručuje, že jednotliví agenti optimalizujú svoje správanie sa podľa toho, v ktorom časovom období sa momentálne nachádzajú. Autori Ginsburgh a Keyzer (1997) rozlišujú kategorizáciu podľa počtu periód na:

- konečný časový horizont
- nekonečný časový horizont

3.1 Konečný časový horizont

V prípade konečného časového horizontu sa predpokladá, že každý z agentov optimalizuje a plánuje svoje správanie v súčasnom období ako aj nasledujúcich obdobiach až do času T , následne ho však nezaujíma čo sa bude diať [13]. Modely s konečným časovým horizontom sú podľa Ginsburgha a Keyzera (1997) nevýhodné z niekoľkých príčin:

- nie je možné správne odhadovať správanie sa agentov po čase T
- možné nastanie nepredvídateľného správania
- agenti zvyčajne zmenia svoje správanie, keď končí ich „životnosť“

Agenti v tomto modeli rozdeľujú časový horizont na dva typy období. V súčasnom období optimalizujú svoje užitočnosti, zatiaľ čo v budúcich obdobiach iba očakávajú vývoj úrovne ich užitočnosti.

3.2 Nekonečný časový horizont

Pri dynamickom modeli s nekonečným časovým horizontom autori v [13] predpokladali, že celý model je založený na neoklasickej teórii. V ekonomike sa nenachádzajú žiadne štrukturálne deformácie a žiadne trhové nepružnosti. Všetci agenti sú racionálni a trh je dokonale konkurenčný. Model podľa Paltseva (2004) musí obsahovať exogénne premenné ako technologický pokrok a predpokladá sa kladná produktivita kapitálu a práce. Splnením týchto predpokladov dostávame, že domácnosti optimalizujú funkciu užitočnosti U :

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t u(C_t),$$

kde ρ je miera časovej preferencie, C_t je agregovaná spotreba v čase t , $u(C_t)$ je funkcia užitočnosti v čase t .

Táto funkcia užitočnosti pre domácnosti predstavuje, že v čase 0 je hodnota vážený súčet všetkých budúcich tokov, ktoré sú závislé od spotrebovaného množstva v čase t . Kladná hodnota ρ znamená, že funkcie užitočnosti v neskoršom čase majú menšiu váhu, ako na začiatku obdobia. Táto funkcia nám zabezpečuje, že domácnosti konzumujú „spojité“ množstvo spotrebného tovaru. Taktiež platí už vyššie spomínaná formulácia, že úspory, teda investície sa v nasledujúcom časovom období menia na kapitál a teda dodatočné zdroje, ktoré domácnosti môžu využívať na spotrebu v ďalšej perióde.

4 ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo priniesť prehľad modelových prístupov zavádzania dynamického aspektu do modelov všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy. Modely všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy predstavujú užitočný nástroj na analyzovanie reakcie hospodárstva a jeho jednotlivých odvetví na zmeny nastavení hospodárskych politík. Najbežnejšou je práve statická rovnováha, ktorá predpokladá, že štruktúra hospodárstva v referenčnom období je rovnovážna a je potrebné aby sa do tejto rovnováhy aj po zmene nastavenia niektorej z hospodárskych politík (napr. daňovej sadzby) ekonomika vrátila do rovnováhy s obdobnou štruktúrou, čo je však možné považovať za silný predpoklad. Takýto silný predpoklad je akceptovateľný však iba v krátkodobom horizonte, v prípade potreby preskúmania reakcie hospodárstva v dlhšom období je potrebné do modelu zaviesť dynamický element. V tejto práci sme poukázali na niekoľko prístupov avšak je potrebné pripomenúť, že praktická realizácia dynamizácie je závislá na niekoľkých aspektoch a to predovšetkým na dostupnosti vstupných údajov a taktiež na konkrétnej špecifikácii skúmaného politického rozhodnutia.

Použitá literatúra

1. ANNABI, N., COCKBURN, J. a DECALUWÉ, B. 2004. A Sequential Dynamic CGE Model for Poverty Analysis. In: CIRPEE-PEP, Université Laval, 2004.
2. ARROW, K.J., a G. DEBREU. 1954. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. In: *Econometrica*, 22, 1954, s. 265-290.
3. AUERBACH, A., a KOTLIKOFF, L. 1983. National savings, economic welfare, and the structure of taxation. In: M. Feldstein (Ed.), *Behavioral simulation methods in tax policy analysis*, Chicago, University of Chicago Press, 1983.
4. AUERBACH, A., a KOTLIKOFF, L. 1987. *Dynamic fiscal policy*. In: Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987.
5. BALLARD, C. 1983. Evaluation of the consumption tax with dynamic general equilibrium models. In: (PhD dissertation). Stanford: Stanford University Press, 1983.
6. BALLARD, C., FULLERTON, D., SHOVEN, J. B., a WHALLEY, J. 1985. A general equilibrium model for tax policy evaluation. In: Chicago: University of Chicago Press, 1985.
7. BOURGUINGNON, F., BRANSON, W. H., a DE MELO, J. 1989. Macroeconomic adjustment and income distribution: A macro-micro simulation model. In: OECD Technical Papers, 1, 1989.
8. BOVENBERG, L. 1985. Dynamic general equilibrium tax models with adjustment costs. In: A. Manne (Ed.), *Economic equilibrium: Model formulation and solution, mathematical programming study*, 23. Amsterdam: North-Holland, 1985.
9. DERVIS, K., DE MELO, J., a ROBINSON, S. 1982. *General Equilibrium Models for Development Policy*. In: Cambridge University Press, New York, 1982.
10. DIXON, P. B., a PARMENTER, B. R. 1996. Computable general equilibrium modeling for policy analysis and forecasting. In: H. M. Amman, D. A. Kendrick & J. Rust (Eds.), *Handbook of Computational Economics*, vol. 1, s. 3-85. Amsterdam: North-Holland, 1996.
11. DIXON, P. B., a RIMMER, M. T. 2002. Dynamic general equilibrium modeling for forecasting and policy: A practical guide and documentation of MONASH. In: R. Blundell, R. Caballero, J.-J. Laffont & T. Persson (Eds.), *Contributions to economic analysis*, vol. 256. Amsterdam: North-Holland, 2002.
12. GINSBURGH, V., KEYZER, M., 1997. *The Structure of Applied General Equilibrium Models*. MIT Press, Cambridge, MA.

13. CHENERY, H. B. 1975. The structuralist approach to development policy. In: *The American Economic Review*, 65(2), 1975, s. 310-316.
14. KALDOR, N. 1956. Alternative theories of distribution. In: *The Review of Economic Studies*, 23(2), 1956, s. 83-100.
15. KALECKI, M. 1971. *Selected essays on the dynamics of the capitalist economy*. In: Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1971.
16. KNUDSEN, M. B., PEDERSEN, L. H., PETERSEN, T. W., STEPHENSEN, P., a TRIER, P. 1998. Danish rational economic agents model – DREAM. Version 1.2. Statistics Denmark. In: http://www.dreammodel.dk/dwn_alle.html.
17. LOFGREN, H., HARRIS, R. a ROBINSON, S. 2001. A Standard Computable General Equilibrium (CGE) Model in GAMS. In: *Trade and Macroeconomics Discussion Paper No. 75*, International Food Policy Research Institute, Washington, D.C, 2001.
18. MOHORA, M. 2006. ROMOD: A Dynamic CGE model for Romania a tool for policy analysis. In: *Doctoral Thesis*. Erasmus University Rotterdam, 2006.
19. PALTSEV, S. 2004. Moving from Static to Dynamic General Equilibrium Economic Models: Notes for a beginner in MPSGE. In: *Massachusetts Institute of Technology*, Cambridge MA, 2004.
20. PEREIRA, A. M., a SHOVEN, J. B. 1988. A survey of dynamic computational general equilibrium models for tax policy evaluation. In: *Journal of Policy Modeling*, 10(3), 1988, s. 401-436.
21. ROBINSON, S. 1989. Multisectoral models. In: H. Chenery a T. N. Srinivasan (Eds.), *Handbook of development economics*, vol. 2, 1989, s. 885-947. Amsterdam: North- Holland.
22. ROBINSON, S. 1991. Macroeconomics, financial variables, and computable general equilibrium models. In: *World Development*, 19(11), 1991, s. 1509-1525.
23. ROBINSON, S., YUNEZ-NAUDE, A., HINOJOSA-OJEDA, R. A., LEWIS, J. D., a DEVRAJAN, S. 1999. From stylized to applied models: Building multisector CGE models for policy analysis. In: *North American Journal of Economic and Finance*, 10, 1999, s. 5-38.
24. SCARF, H. 1967. On the computation of equilibrium prices. In: W. Feliner (Ed.), *Ten economic studies in the tradition of Irving Fisher*, 1967, s. 207-230. New York: Wiley.
25. SHOVEN, J. B., a WHALLEY, J. 1972. A general equilibrium calculation of the effects of differential taxation of income from capital in the U.S. In: *Journal of Public Economics*, 1, 1972, s. 281-321.
26. SUMMERS, L. 1985. Taxation and the size of composite capital stock: An asset price approach. In: *Harvard: Harvard University Press*, 1985.
27. Szeto, K L (2002) A dynamic computable general equilibrium model of the New Zealand economy. Working Paper 02/07, New Zealand Treasury.
28. TAYLOR, L. 1983. *Structuralist Macroeconomics*. In: Basic Books, New York, 1983.
29. TAYLOR, L. 1990. Structuralist CGE models. In: L. Taylor (Ed.), *Social relevant policy analysis: Structuralist computable general equilibrium models for the developing world*, 1990, s. 1-70. Cambridge: The MIT Press.
30. VAN TONGEREN, F. W., VAN MEIJL, H., a SURRY, Y. 2001. Global models applied to agricultural and trade policies: A review and assessment. In: *Agricultural Economics*, 26, 2001, s. 149-172.
31. VOS, R. 1998. Aid flows and ‘Dutch disease’ in a general equilibrium framework for Pakistan. In: *Journal of Policy Modeling*, 22(1), 1998, s. 77-109.

Kontaktné údaje

Ing. Ivan Lichner

Ekonomický ústav, Slovenská akadémia vied

Šancová 56

811 05 Bratislava

Tel: (421 2) 52 498 307

e-mail: ivan.lichner@savba.sk

Mgr. Tomáš Miklošovič

Ekonomický ústav, Slovenská akadémia vied

Šancová 56

811 05 Bratislava

Tel: (421 2) 52 498 307

e-mail: tomas.miklosovic@savba.sk

DYNAMICKÉ INPUT-OUTPUT MODELY

DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODELS

Ivan Lichner, Silvia Pastoreková

Abstrakt

Input-output (I-O) modely predstavujú relatívne jednoduchý a účinný nástroj na skúmanie vzťahov previazanosti jednotlivých odvetví hospodárstva. Táto trieda modelov sa spočiatku vyvíjala predovšetkým v statickej verzii, ktorá je vhodná na analýzu previazanosti, avšak jej použiteľnosť na prognózovanie budúceho vývoja je značne obmedzená a preto neskôr došlo k rozmachu dynamických I-O modelov. Cieľom tohto článku je poskytnúť prehľad spôsobov dynamizácie I-O modelov.

Kľúčové slová: input-output modely, dynamický input-output model, input-output tabuľka

Abstract

Input-output models represent relatively simple and effective tool that explains interconnections between economic sectors. In the first stages of development of those kind of models, their design was mainly static, which is very useful for analysis of economic relations. On the other this kind of models do not produce very reliable forecasts of future development. Aim of this paper is to provide an overview of I-O models dynamization approaches.

Keywords: *input-output model, dynamic input-output model, input-output table*

1 ÚVOD

Input-output (I-O) modely predstavujú prístup skúmania ekonomických vzťahov, ktorý je schopný poskytnúť veľmi zaujímavé informácie o reláciách medzi jednotlivými sektormi hospodárstva. Na základe využitia historických údajov je možné pomocou matematického vyjadrenia fungovania hospodárstva získať často výsledky, ktoré by sme intuitívne neočakávali. Napriek veľmi prísnej matematickej formulácii však statická verzia input-output modelov nie je príliš vhodná na prognózovanie nakoľko pri overovaní presnosti výsledkov v porovnaní s následne zozbieranými údajmi nedosahuje požadovanú presnosť. Input-output modely sú založené na údajoch obsiahnutých v input-output tabuľkách. I-O tabuľky poskytujú pohľad na toky tovarov a služieb medzi výrobnými a spotrebnými odvetviami ekonomiky, ako aj o štruktúre nákladov potrebných na produkciu. Informácie zachytené v input-output tabuľkách pochádzajú z rôznych štatistických účtov popisujúcich hospodárstvo ako celok, alebo len jeho určitý územný celok. V input-output tabuľkách sú zachytené jednotlivé transakcie medzi výrobcami a spotrebiteľmi, nákupy finálnych výrobkov a náklady spojené so službami výrobných faktorov. Z tohto dôvodu input-output tabuľky predstavujú užitočný nástroj na analyzovanie stavu a dynamiky rozvoja ekonomiky, predovšetkým v prípade pokiaľ ide o analýzu dopadov zmien v konečnej spotrebe na jednotlivé odvetvia hospodárstva.

Ako prvý začal input-output modely ako analytický nástroj na skúmanie previazaných ekonomických systémov rozvíjať Vasilij Leontief. V najzákladnejšej forme (statické I-O modely) reprezentujú tieto modely v súčasnosti zaužívaný prístup na skúmanie národných

účtov a prepojenosti jednotlivých sektorov hospodárstva. Statický prístup však nepredstavuje vhodný nástroj na tvorbu prognóz budúceho vývoja. Nepresnosti výsledkov prognóz sú často pripisované viacerým praktickým obmedzeniam, ktoré sa objavujú pri zbere údajov potrebných na určenie jednotlivých koeficientov I-O modelu, ako sú napr. čas potrebný na ich zozbieranie a zvolený typ agregácie odvetví. Z teoretického uhlu pohľadu statický prístup nie je schopný poskytnúť informáciu o budúcom správaní sa štruktúry hospodárstva a zároveň takýto model ani není schopný odpovedať na otázku či ekonomika dosiahne rovnovážny stav ako reakciu na rozhodnutia hospodárskej politiky.

2 DYNAMICKÉ INPUT-OUTPUT MODELY

Ako reakcia na uvedené nedostatky statickej verzie I-O modelov došlo k rozšíreniu input-output modelov o dynamiku správania sa jednotlivých agentov hospodárstva. Väčšina dynamických modelov spomínaných v literatúre sa zameriava na zmeny v technických koeficientoch ako výsledok akumulácie kapitálu alebo technického pokroku v čase. Avšak existujú aj ďalšie spôsoby, ktorými autori vnášajú dynamiku do input-output modelov

2.1 Model s oneskorenou produkciou

Najjednoduchšiu formu dynamizácie input-output modelu predstavuje oneskorenie závislosti úrovne produkcie od úrovne konečného dopytu o jedno časové obdobie. Na začiatok si definujme objem produkcie jednotlivých odvetví \bar{x} :

$$\bar{x} = A\bar{x} + Y_t \quad (1)$$

kde \bar{x} predstavuje vektor celkovej produkcie odvetví, A je matica technických koeficientov priamej spotreby a Y_t reprezentuje konečný dopyt po produkcii jednotlivých sektorov. Model (1) predstavuje klasickú statickú verziu I-O modelu. Po zavedení predpokladu, že objem produkcie nie je determinovaný úrovňou finálneho dopytu v tom istom období, ale dochádza k oneskoreniu reakcie o jedno časové obdobie je možné uvedenú situáciu zapísať pomocou nasledovného vzťahu:

$$\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t + Y_t \quad (2)$$

Rovnica (2) predstavuje systém simultánnych diferenčných rovníc, ktoré tvoria jednoduchú dynamickú verziu input-output modelu. Vyššie uvedený model je po jednoduchej úprave možné prepísať ako:

$$\bar{x}_{t+1} - A\bar{x}_t = Y_t \quad (3)$$

Je potrebné poznamenať, že oproti klasickému statickému modelu je v tvare rovnice (3) vektor finálneho dopytu definovaný ako funkcia času, čo vnáša dynamiku správania do modelu.

2.2 Leontiefov dynamický model

V. Leontief rozvinul svoj základný statický model a rozšíril jeho základný tvar o zložku zachytávajúcu a popisujúcu proces akumulácie kapitálu. Bilančná rovnica v tomto prípade má nasledovný tvar:

$$\bar{x}_t = A\bar{x}_t + Y_t + B\bar{x}_t \quad (4)$$

kde \bar{x}_t predstavuje vektor celkovej produkcie jednotlivých odvetví v čase t , A je matica technických koeficientov priamej spotreby odvetví, Y_t predstavuje konečnú spotrebu v čase t ,

B je matica koeficientov akumulácie kapitálu v odvetviach. Po jednoduchej úprave je možné rovnicu (4) prepísať ako:

$$\bar{x}'_t = B^{-1}(I - A)\bar{x}_t - B^{-1}Y_t \quad (5)$$

Po zavedení substitúcie $M = B^{-1}(I - A)$ a $N = -B^{-1}$, je možné rovnicu (5) zapísať nasledovne:

$$\bar{x}'_t = M\bar{x}_t + NY_t \quad (6)$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je triviálne:

$$\bar{x}_t = e^{Mt}x_0 + \int_0^t e^{M(t-\tau)}NY_\tau d\tau \quad (7)$$

Táto rovnica popisuje správanie sa produkcie jednotlivých odvetví v čase v závislosti od tvaru rovnice finálneho dopytu a hospodárskej dynamiky v čase 0 (poísanej pomocou členu x_0). Ak $Y_t = K$, teda v prípade že konečný dopyt považujeme za konštantný, potom je rovnicu (7) možné prepísať nasledovne:

$$\bar{x}_t = (I - A)^{-1}K + R_t \quad (8)$$

kde $R_t = e^{Mt}[x_0 - (I - A)^{-1}K]$ (9).

Dynamická formulácia Leontiefovho input-output modelu bez rastu (konštantný finálny dopyt) v tvare rovnice (9) je totožná so statickou špecifikáciou v prípade ak jej člen $R_t = 0$.

2.3 Model bez akumulácie kapitálu

Niektorí autori navrhli mierne odlišne definovanú dynamickú verziu input-output modelu, napríklad A.C. Chang ho definoval nasledovne: dynamický celkový output definoval

ako \bar{x}'_t a dynamickú konečnú spotrebu ako $A\bar{x}_t + Y_t$. Pričom predpokladal, že sa tieto členy nerovnjajú a preto ďalej predpokladal, že je nevyhnutná dodatočná zmena \bar{x}'_t v produkcii a to taká, ktorá zabezpečí aby boli dopyt a ponuka v rovnováhe. Potom je uvedené možné zapísať nasledovne:

$$\bar{x}'_t = A\bar{x}_t + Y_t - \bar{x}_t \quad (10)$$

alebo $\bar{x}'_t = (A - I)\bar{x}_t + Y_t$ (11)

Je potrebné poznamenať, že Chiangov model (10) je totožný s Leontiefovým dynamickým modelom v tvare rovnice (5) v prípade, že sa koeficienty matice B rovnajú matici $-I$ (diagonálna jednotková matica). Čo by znamenalo, že pokiaľ je špecifikácia (10) správna potom matica B nemôže predstavovať maticu koeficientov akumulácie kapitálu a znižuje to hodnotu Leontiefovho dynamického modelu.

Matica $M = (I - A)$ je za predpokladu splnenia Hawkins – Simonovych podmienok stabilná a teda Chiangov model predstavuje model rovnováhy. Nakoniec je potrebné poznamenať, že riešenie rovnice (10) je totožné s riešením Leontiefovho statického modelu, preto je možné model Chianga považovať za zovšeobecnenie Leontiefovho modelu.

2.4 Model s nesplnenými objednávkami

Ďalší prístup dynamizovania I-O modelu navrhli C.B. Diaz a C. Ramos, ktorí celkovú produkciu definovali ako \bar{x}_t , konečný dopyt ako $A\bar{x}_t + Y_t$, a zaviedli dodatočnú premennú pre kapitál X_t , ktorú definovali nasledovne:

$$X_t = \int_0^t (A\bar{x}_t + Y_t - \bar{x}_t) dt \quad (12)$$

ktorá predstavuje akumuláciu rozdielu (prebytku alebo nedostatku) medzi konečným dopytom a celkovou produkciou v čase. Táto premenná predstavuje množstvo nesplnených objednávok každého z odvetví v čase t . Z rovnice (12) vyplýva, že:

$$X'_t = A\bar{x}_t + Y_t - \bar{x}_t \quad (13)$$

Ďalej autori predpokladali, že ak čas potrebný na výrobu jednej jednotky produkcie odvetvia i je t_i tak časť výrobku vyrobená za jednotku času bude $1/t_i$. Potom počet jednotiek produkcie odvetvia i vyrobených za jednotku času zodpovedajúci obejmu nesplnených objednávok bude:

$$\bar{x}_{it} = \frac{1}{t_i} X_{it} \quad (14)$$

Pre zjednodušenie autori zaviedli maticu časov produkcie T , ktorú definovali nasledovne:

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{t_n} \end{bmatrix}$$

potom:

Po zavedení substitúcie je možné rovnicu (14) prepísať nasledovne:

$$\bar{x}_t = T^{-1}X_t \quad (15)$$

Po jednoduchej úprave je potom rovnicu (13) možné prepísať ako:

$$X'_t = (A - I)T^{-1}X_t + Y_t \quad (16)$$

Táto rovnica definuje vývoj objemu nesplnených objednávok, a po matematickej úprave je možné na jej základe vypočítať vývoj objemu celkovej produkcie jednotlivých odvetví. Autori ďalej vo svojej práci uvádzajú, že v prípade konštantnej úrovne konečného dopytu $Y_t = K$ je riešenie úrovne nedodaných objednávok sektorov nasledovné:

$$X_t = T(I - A)^{-1}K + R_t \quad (17)$$

kde $R_t = e^{(A-I)t}[X_0 - T(I - A)^{-1}K]$. Uvedená rovnica popisuje vývoj objemu nesplnených objednávok v čase v rámci jednotlivých odvetví hospodárstva. Rovnicu produkcie v tvare (15) po zavedení príslušných substitúcií je možné zapísať nasledovne:

$$\bar{x}_t = (I - A)^{-1}K + e^{(A-I)t}[\bar{x}_0 - (I - A)^{-1}K] \quad (18)$$

keďže člen $e^{tA-I}T$ v prípade splnenia Hawkins-Simonových podmienok sa rovná 0, tak je možné konštatovať, že rovnica (18) predstavuje zovšeobecnenie Leontiefovho dynamického modelu (8).

3 ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo na poskytnutie prehľadu rôznych prístupov k dynamizácii input-output modelov, nakoľko statická verzia uvedených modelov neposkytuje dostatočné možnosti pre vytváranie prognóz možného budúceho vývoja. Hlavným nedostatkom statických I-O modelov sa ukázal predpoklad konštantnej štruktúry hospodárstva z pohľadu podielov produkcie jednotlivých odvetví na celkovej produkcii. Najbežnejšie aplikovanými spôsobmi sú zmeny v technických koeficientoch ako výsledok akumulácie kapitálu alebo technického pokroku v čase. V článku sme konkrétne ukázali niekoľko vybraných spôsobov dynamizácie modelov navrhnutých viacerými autormi. Na záver je však nutné poznamenať, že táto práca neobsahuje vyčerpávajúci zoznam spôsobov dynamizácie input-output modelov a v literatúre je možné nájsť aj ďalšie v tejto práci neuvedené spôsoby.

Použitá literatúra

1. BLANC, M.D., RAMOS, C. 2002. The foundations of dynamic input–output revisited: does dynamic input–output belong to growth theory?. In: Technical Report 258, 2002, Faculty of Economic Sciences, University of Oviedo, Oviedo, Spain.
2. CHIANG, A.C. 1984. Fundamental methods of mathematical economics. In: McGraw-Hill, Inc., New York, 1984. ISBN: 0-07-010813-7.
3. CRUZ JR., J. B., TAN, R. R., CULABA, A. B., , BALLACILLO, J.-A. 2009. A dynamic input–output model for nascent bioenergy supply chains. In: Applied Energy 86, 2009, s.86–94.
4. DOBOS, I., TALLOS, P. 2011. A dynamic Input-Output Model with Renewable Resources. In: Budapesti Corvinus Egyetem, 2011, Budapest. HU ISSN 1786-3031.
5. LEONTIEF, V. 1986. Input-output economics. In: Oxford University Press, 1986, New York.
6. VOIGTLAENDER, N. 2002. A dynamic Input-Output Model to Project U.S. Freight Transportation Demand. In: Master of Science Thesis at MIT, Boston.

Kontaktné údaje

Ing. Ivan Lichner

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 907) 819 491

email: ivan.lichner@savba.sk

Ing. Silvia Pastoreková

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: sis.pas@gmail.com

MODELOVANIE TRENDOV A CYKLOV V KRAJINÁCH V4

MODELLING TRENDS AND CYCLES IN V4 COUNTRIES

Martin Lukáčik, Karol Szomolányi

Abstrakt

Analytici skúmajúci rast a hospodárske cykly sú vždy postavení pred zásadný problém, akým spôsobom majú oddeliť cyklické fluktuácie od dlhodobého vývoja. Klasický a najjednoduchší postup, ktorý využíva lineárny deterministický trend a reziduál tohto modelu ako cyklickú zložku, nie je pre modelovanie v ekonomikách krajín Visegrádskej štvorky vhodný. Dôvodom je výrazný prepád spôsobený spoločenskými zmenami na začiatku deväťdesiatych rokov, ktorý sa prejaví ako štrukturálna zmena. V príspevku prezentujeme postupy, ktoré sa núkajú ako náhrada, pričom pripomínáme, že výsledky analýz výrazne závisia od použitej metódy.

KLúčové slová: trend, cyklus, filter, štrukturálna zmena

Abstract

Analytics studying the growth and business cycles are faced with the fundamental problem of separating cyclical fluctuations from long-run movements. The traditional simplest method of modelling trends uses deterministic linear time trend and cyclical component is observed by residual of the trend model. This approach is straightforward inapplicable to the economies of Visegrad group due to the breakdown caused by socioeconomic changes in early 90s. We present several other methods and draw the attention to dependence of results to employed method.

Keywords: trend, cycle, filter, structural break

ÚVOD

Najjednoduchšie postupy na oddelenie cyklických fluktuácií od dlhodobého vývoja vychádzajú z logiky, ktorá sa používa pri dekompozícii časového radu. Ak časový rad tvoria trendová, cyklická, sezónna a náhodná zložka, tak po odpočítaní trendu získame výkyvové zložky. Pri analýze ročných údajov postačuje rozdelenie radu na dlhodobý trend a cyklickú zložku. Pre odhad trendu sa potom zvykne používať logaritnicko-lineárny model.

Ak model rastu (model ekvivalentný zloženému úrokovaniu) má tvar:

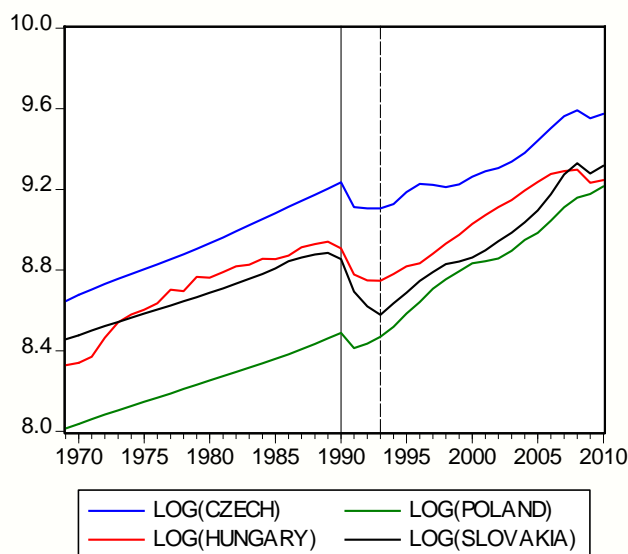
$$y_t = y_0 (1+r)^t e^{u_t} \quad (1)$$

kde r je súhrnná miera rastu, t je čas, u_t predstavuje náhodnú zložku a e základ prirodzeného logaritmu. Po zlogaritmovaní a následnej substitúcii dostaneme logaritnicko-lineárny model:

$$\ln y_t = \ln y_0 + t \ln(1+r) + \ln e^{u_t} = \beta_0 + \beta_1 t + u_t \quad (2)$$

Deterministická časť modelu predstavuje trend a reziduál modelu reprezentuje cyklickú časť.

Jednoduchosť prístupu je splatená predpokladom konštantnej miery rastu. Vážnejší problém je spojený so štrukturálnymi zmenami. Tie sú bežne prítomné pri modelovaní dlhodobějších vzťahov, čo je aj prípad analýz rastu a hospodárskych cyklov. V tranzitívnych ekonomikách krajín V4 sú zreteľné po spoločenských zmenách, ktoré nastali v roku 1989 (pozri obr.1).

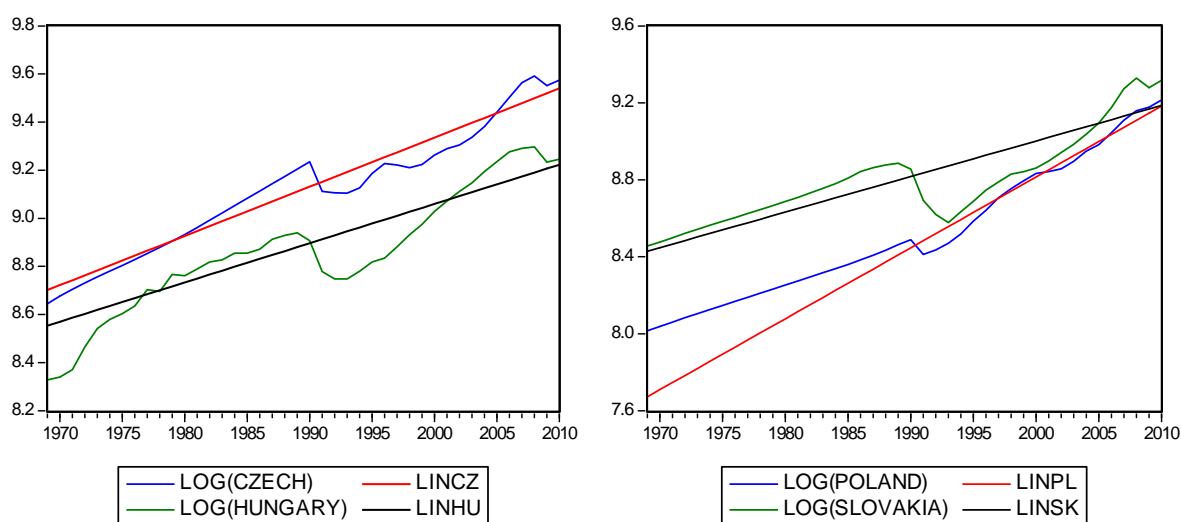


Obr.1: Priebeh analyzovaných radov logaritmu HDP na obyvateľa krajín V4

Aj keď začiatok zmeny vo všetkých krajinách nenastal úplne súčasne, v Maďarsku a Poľsku sa dá spozorovať už v roku 1989, kým v Čechách a na Slovensku až od roku 1990, tak táto je natoľko významná, že jej ignorovaním sa skreslia závery celej analýzy.

Takisto trvanie tohto prepadu nie je rovnaké. V Poľsku nastáva obrat už po roku 1991, kým v Čechách a Maďarsku ešte po roku 1991 doznieva mierny pokles, ktorý trvá až do roku 1993, čo je zároveň rok, po ktorý sa slovenská ekonomika prudko prepádala.

Aby bola situácia ešte zaujímavejšia, v prípade Poľska a Slovenska môžeme jednoznačne konštatovať rýchlejší rast ako pred touto zmenou, česká ekonomika vyzerá, že sa vrátila na svoju pôvodnú mieru rastu a najkomplikovanejšie sa prejavuje Maďarsko, ktoré by sme po poslednú krízu mohli priradiť k prvej dvojici, ale kvôli jej koncu už skôr k Čechám.



Obr.2: Odhad dlhodobého vývoja jednoduchým deterministickým lineárnym trendom

Z obr.2, kde sme aplikovali pre jednotlivé krajiny jednoduchý deterministický lineárny model trendu, vidíme, že tento prístup by mal byť jednoznačne upravený. V našom príspevku prezentujeme tri postupy, ktoré sa ponúkajú ako náhrada, ale pritom zostávajú jednoduchou alternatívou uvedeného prístupu.

1 TREND LINEÁRNY PO ČASTIACH

Najjednoduchším riešením štrukturálnej zmeny je odhad trendu lineárneho po častiach za pomoci umelých premenných. Toto štandardné riešenie prezentované väčšinou základných ekonometrických učebníc má jednu nevýhodu, analytik musí sám určiť obdobie štrukturálnej zmeny. Druhým nedostatkom tohto prístupu je, že trendová funkcia už nie je spojitá.

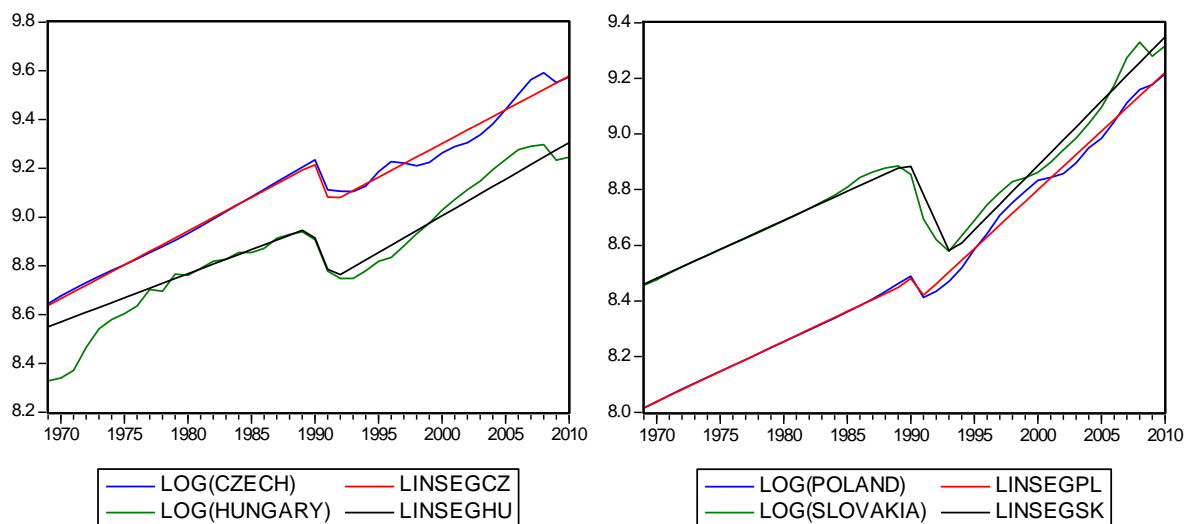
Ak by sme uvažovali jeden zlom (zmena, ktorá nastala v jednom období), model by mal tvar:

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\gamma_0 - \beta_0) d_t + (\gamma_1 - \beta_1) d_t t + u_t, \quad (3)$$

kde d predstavuje umelú premennú, ktorá sa rovná 0 pred zmenou a 1 po zmene. Model sa dá rozšíriť aj na dva zlomy (obrat nadol a následne o rok až tri opätovne obrat nahor), ale stále nám chýbajú hladké prechody medzi jednotlivými režimami:

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\gamma_0 - \beta_0) d_{1t} + (\gamma_1 - \beta_1) d_{1t} t + (\delta_0 - \beta_0) d_{2t} + (\delta_1 - \beta_1) d_{2t} t + u_t, \quad (4)$$

kde umelé premenné sú teraz dve d_1 a d_2 , pričom d_1 sa rovná 0 okrem obdobia poklesu a d_2 sa rovná 1 až pre obdobie následného rastu.



Obr.3: Odhad dlhodobého vývoja trendom lineárnym po častiach

Z obr.3, kde sme aplikovali pre jednotlivé krajiny model lineárny po častiach, vidíme, že tento prístup je jednoznačne vhodnejší ako jednoduchý trend. Analýzou cyklických zložiek zistíme, ako sa rozlišuje frekvencia cyklu v jednotlivých krajinách V4. Údaje sú zoskupené v tab.1.

Tab.1: Odhad frekvencie cyklickej zložky – trend lineárny po častiach

Krajina	Frekvencia cyklu	Faktor utlmovania
Česká republika	3,85 roka	0,62
Maďarsko	2,27 roka	0,84
Poľsko	3,51 roka	0,83
Slovensko	3,62 roka	0,86

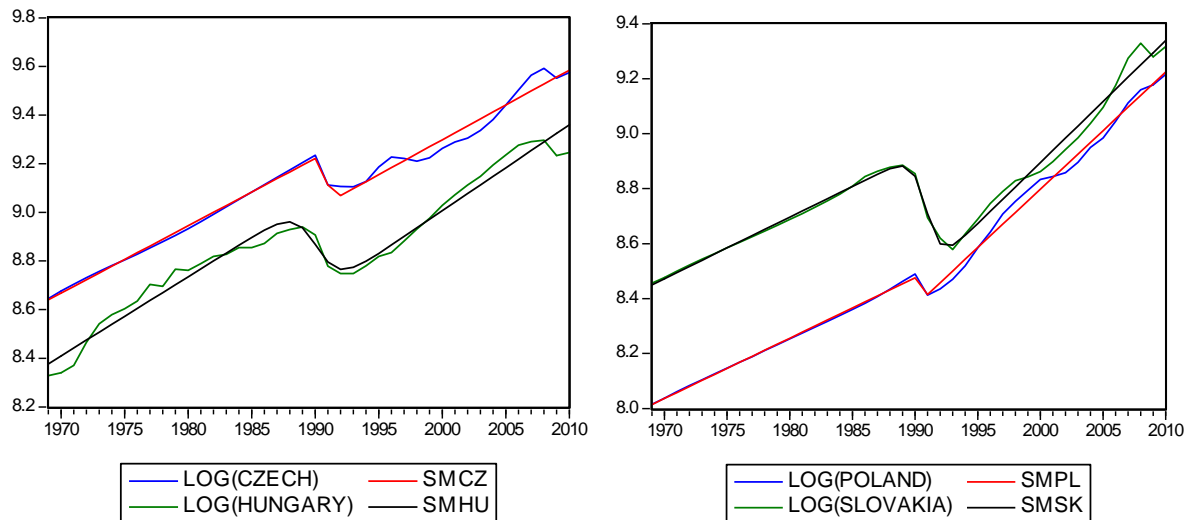
2 TREND S PLYNULÝMI PRECHODMI

Mills (2003) prezentuje inú možnosť ako sa dajú odhadovať štrukturálne zlomy, a to pomocou modelu trendu s plynulými prechodmi, ktorý umožňuje plynulú a hladkú zmenu medzi dvoma režimami.

Trend s logistickými plynulými prechodmi má tvar:

$$\ln y_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\gamma_0 + \gamma_1 t) \left(1 + e^{-\theta(t-\tau T)}\right)^{-1} + u_t, \quad (5)$$

kde T je počet pozorovaní, e je základ prirodzeného logaritmu, parameter θ predstavuje rýchlosť prechodu (nízke hodnoty znamenajú dlhé obdobie prechodu a naopak) a parameter τ stanoví prostredné obdobie prechodu. Na rozdiel od po častiach lineárneho trendu nemusíme stanoviť presné obdobie štrukturálneho zlomu a jeho trvanie, ale oba údaje sa odhadnú. Nevýhodou je nelinearita modelu, ktorá si vyžaduje preverovať rôzne inicializačné hodnoty pre odhadovú procedúru (a tým preveriť rôzne lokálne extrémny).



Obr.4: Odhad dlhodobého vývoja trendom s logistickými plynulými prechodmi

Z obr.4, kde sme aplikovali pre jednotlivé krajiny model trendu s logistickými plynulými prechodmi, takisto vidíme, že tento prístup je vhodnejší ako jednoduchý trend. Analýzou cyklických zložiek zistíme, ako sa rozlišuje frekvencia cyklu v jednotlivých krajinách, po odhade trendu týmto spôsobom. Údaje sú zoskupené v tab.2.

Tab.2: Odhad frekvencie cyklickej zložky – trend s plynulými prechodmi

Krajina	Frekvencia cyklu	Faktor utlmovania
Česká republika	9,27 roka	0,62
Maďarsko	11,21 roka	0,84
Poľsko	9,12 roka	0,83
Slovensko	8,47 roka	0,86

3 HENDERSONOVE KLZAVÉ PRIEMERY

Alternatívnou metódou na odhad trendovej zložky sú kĺzavé priemery. Pre ľubovoľný časový rad y_t , $t = 1, 2, \dots, T$ sa jednoduché kĺzavé priemery dĺžky $k < T$ určia nasledovne:

- prvý kĺzavý priemer sa vypočíta ako priemer prvých k hodnôt časového radu y_1, y_2, \dots, y_k
- druhý kĺzavý priemer sa vypočíta rovnako z hodnôt y_2, y_3, \dots, y_{k+1}
- tretí kĺzavý priemer z hodnôt y_3, y_4, \dots, y_{k+2} a tak ďalej.

Kĺzavé priemery priradíme prostrednému obdobiu kĺzavej časti k , preto dĺžka kĺzavej časti, označovaná MA je nepárne číslo. Ak $k = 2m + 1$, potom $m = (k - 1)/2$ označuje počet prvých a posledných kĺzavých priemerov, ktoré nemožno vypočítať.

Všeobecný vzorec pre výpočet kĺzavých priemerov:

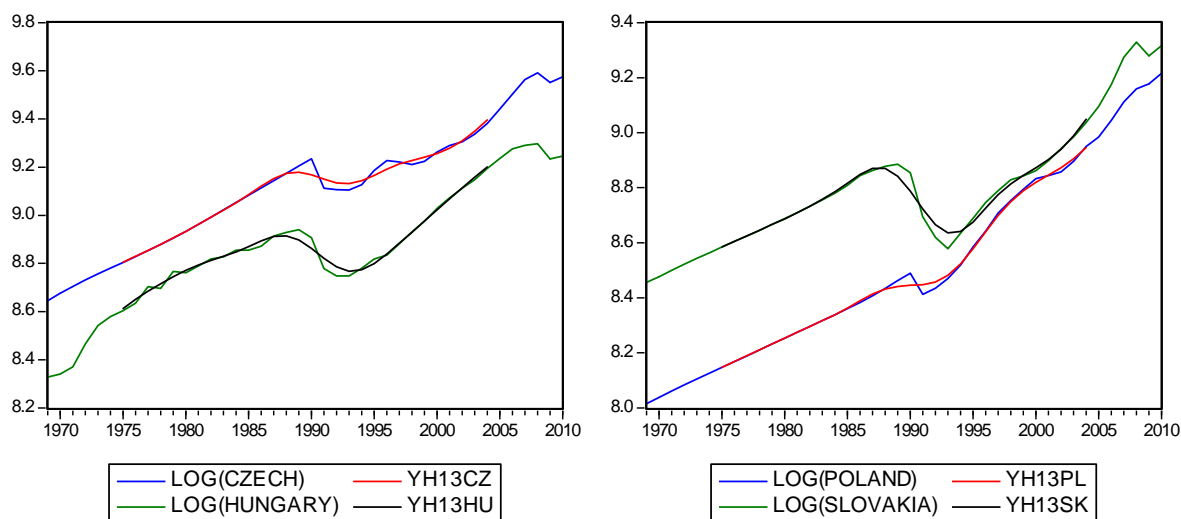
$$T_t = \frac{1}{k} \sum_{j=-m}^m y_{t+j}, \text{ pre } t = m+1, \dots, n-m-1 \quad (6)$$

Najzložitejšou otázkou pri aplikácii kĺzavých priemerov je určenie správnej dĺžky kĺzavej časti k (rádu kĺzavých priemerov). V časových radoch so sezónnou zložkou je dĺžka kĺzavej časti rovná počtu sezón. Všeobecne, čím je dĺžka kĺzavej časti k väčšia, tým sa viac hodnoty radu vyrovnávajú a trend má hladší priebeh, ale časový rad kĺzavých priemerov je kratší.

Skúmané časové rady obsahujú zvraty s nepravidelnou periodicitou. Použitie jednoduchých kĺzavých priemerov je v takomto prípade nevhodné, pretože hodnoty kĺzavých priemerov by nadhodnocovali alebo podhodnocovali skutočný trend, nakoľko predpoklad lineárneho trendu v každej kĺzavej časti nie je opodstatnený. Ak priebeh hodnôt kĺzavej časti dĺžky k popíšeme parabolou druhého stupňa, výpočet kĺzavého priemeru vyžaduje systém váh, ktoré sa menia s dĺžkou kĺzavej časti k . Takéto kĺzavé priemery sa nazývajú vážené kĺzavé priemery:

$$T_t = \frac{1}{k} \sum_{j=-m}^m a_j y_{t+j}, \text{ pre } t = m+1, \dots, n-m-1 \quad (7)$$

kde a sú symetrické váhy $a_j = a_{-j}$, ktorých súčet je 1. Systém váh sa odvodzuje metódou najmenších štvorcov. Špeciálne typy vážených kĺzavých priemerov sa nazývajú filtrami a existuje mnoho odporúčaných schém pre váhy – Hendersonove, Spencerove atď. My sme vybrali Hendersonove kĺzavé priemery, ktoré používa Americký úrad pre sčítanie ľudu.



Obr.5: Odhad dlhodobého vývoja získaný Hendersonovými kĺzavými priermi

Z obr.5, kde sme aplikovali pre jednotlivé krajiny Hendersonove kĺzavé priemery, vidíme, že tento prístup je opäť vhodnejší ako jednoduchý trend. Analýzou cyklických zložiek zistíme, ako sa rozlišuje frekvencia cyklu v jednotlivých krajinách. Údaje sú zoskupené v tab.3.

Tab.3: Odhad frekvencie cyklickej zložky – 13 členné Hendersonove kĺzavé priemery

Krajina	Frekvencia cyklu	Faktor utlmovania
Česká republika	6,11 roka	0,80
Maďarsko	6,20 roka	0,80
Poľsko	6,20 roka	0,69
Slovensko	6,88 roka	0,87

Okrem 13 členných Hendersonových kĺzavých priemerov sme postupne analyzovali 5, 7 a 9 členné Hendersonove kĺzavé priemery. V USA sa zvyknú používať aj 23 členné kĺzavé priemery, ale zároveň aj dĺžka radov je podstatne dlhšia ako nami uvažovaných 42 pozorovaní. Kvôli strate veľkého počtu pozorovaní pri takejto dĺžke kĺzavého priemeru sme tento typ neuvažovali. Pre porovnanie všetkých typov priemerov pozri tab.4.

Tab.4: Odhad frekvencie cyklickej zložky jednotlivých krajín – Hendersonove kĺzavé priemery

	Česká republika	Maďarsko	Poľsko	Slovensko
Henderson MA(5)	3,07 roka (0,76)	2,69 roka (0,65)	3,12 roka (0,80)	3,64 roka (0,78)
Henderson MA(7)	3,54 roka (0,70)	3,50 roka (0,59)	3,54 roka (0,77)	4,52 roka (0,78)
Henderson MA(9)	4,75 roka (0,69)	5,24 roka (0,71)	4,36 roka (0,64)	5,33 roka (0,83)
Henderson MA(13)	6,11 roka (0,80)	6,20 roka (0,80)	6,20 roka (0,69)	6,88 roka (0,87)

ZÁVER

Klasický a najjednoduchší postup, ktorý využíva lineárny deterministický trend a reziduál tohto modelu ako cyklickú zložku pri skúmaní rastu a hospodárskych cyklov, nie je vhodný. Dôvodom je existencia štrukturálnych zmien. V príspevku prezentujeme viacero iných metód, ktoré slúžia ako náhrada tohto postupu: po častiach lineárny trend, trend s logistickými plynulými prechodmi a Hendersonove kĺzavé priemery. Výsledky analýz potvrdzujú známu skutočnosť, že rozhodnutie o dĺžke cyklu výrazne závisí od použitej metódy. Ak akceptujeme priemernú dĺžku povojnového cyklu v USA podľa NBER, čo je 73 mesiacov (6,08 roka), tak najvhodnejšou metódou pre krajiny V4 sa javia 13 členné Hendersonove kĺzavé priemery.

Použitá literatúra

1. BARRO, R.J. 2007. *Macroeconomics: A Modern Approach*. South-Western College Pub 2007.
2. IŠTVÁNIKOVÁ, A. 1997. Econometric Modelling of Slovak Economy Transition. In *Mathematical Methods in Economics – Proceeding*, Ostrava: VŠB-TU, 1997.
3. LADIRAY, D., MAZZI, G. L., SARTORI, F. 2003. *Statistical Methods for Potential Output Estimation and Cycle Extraction*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2003.
4. LUKÁČIK, M., SZOMOLÁNYI, K. 2011. Možnosti analýzy hospodárskych cyklov. *Forum statisticum Slovacum*, roč. 7, č. 3, Bratislava: SŠDS, 2011, s.148-153.
5. LUKÁČIKOVÁ, A. 2010. *Monetárna politika v krajinách V4*. In *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu – Praha 15. - 17. december 2010*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2010.
6. LUKÁČIKOVÁ, A., LUKÁČIK, M. 2008. *Ekonometrické modelovanie s aplikáciami*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2008.
7. MILLS, T. C. 2003. *Modelling Trends and Cycles in Economic Time Series*. Palgrave Macmillan, 2003.
8. <http://www.ers.usda.gov/data/macroeconomics/> (november, 2011)

Kontaktné údaje

Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Karol Szomolányi, PhD.
 Fakulta hospodárskej informatiky
 Ekonomická univerzita v Bratislave
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 tel: (421 2) 67 295 822
 email: lukacik@euba.sk, szomolan@euba.sk

VYUŽITIE MODELU LOGIT PRI MODELOVANÍ MOŽNOSTI POISTIŤ SA

LOGIT MODEL USE IN MODELING THE POSSIBILITY OF INSURANCE

Adriana Lukáčiková

Abstrakt

V rámci ekonometrie existuje skupina modelov, ktoré slúžia na analýzu rozhodnutí jednotlivcov alebo firiem a pomáhajú vysvetliť, prečo bola zvolená daná alternatíva reakcie. Tieto modely sa nazývajú modely s umelými závislými premennými. V príspevku sa zaoberáme jedným z týchto modelov, a to logit modelom, pričom závislá premenná nadobúda iba dve obmeny, teda skúmaná reakcia je odpoveď áno alebo nie.

Kľúčové slová: *model logit, šanca, pomer šanci*

Abstract

In econometrics there is a group of models that are used to analyze the decisions of individuals or firms, and help explain why a given alternative was chosen response. These models are called models with dummy dependent variable. The paper deals with one of these models – logit model in which dependent variable takes only two variations, thus the reaction is the answer yes or no.

Keywords: *model logit, odds, odds ratio*

ÚVOD

Modely s umelými závislými premennými sa využívajú pri analýze rozhodnutí jednotlivcov alebo firiem. Ďalej budú aplikované modely, kedy závislá premenná bude nadobúdať iba dve obmeny podľa toho, či skúmaná odpoveď je áno alebo nie. Príkladom takéhoto typu modelov je rozhodovanie o voľbe poistenia, o politickom rozhodnutí a voľbe zamestnať sa alebo nie. V modeloch s umelou závislou premennou je výsledkom určenie pravdepodobnosti, či nastala skúmaná udalosť.

1 MODEL LOGIT

Pravdepodobnostný model využívajúci logistickú distribučnú funkciu má tvar:

$$P_i = E(y = 1 / x_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_i)}}, \quad (1.1)$$

kde $y = 1$, ak osoba bude poistená, x je vysvetľujúca premenná.

Takýto tvar modelu zabezpečí, že hodnota pravdepodobnosti bude nadobúdať hodnoty iba z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, avšak nakoľko je nelineárny, nemožno na odhad parametrov použiť estimátor najmenších štvorcov. Tento problém sa rieši vyjadrením pravdepodobnostného pomeru

$$\frac{P_i}{1-P_i} = \frac{1+e^{(\beta_0+\beta_1x_i)}}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1x_i)}} = e^{\beta_0+\beta_1x_i} \quad (1.2)$$

a jeho zlogaritmovaním

$$L_i = \ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = \beta_0 + \beta_1x_i. \quad (1.3)$$

Tento model je už lineárny v parametroch. Logaritmus pravdepodobnostného pomeru sa nazýva logit, model 1.3 sa volá LOGIT model.

Aby sme mohli určiť logaritmus pravdepodobnostného pomeru, musíme pravdepodobnosť vypočítať na základe relatívnych početností. Ak chceme použiť priame údaje, tak logaritmus podielu 0/1 alebo 1/0 nie je definovaný. Vtedy sa odporúča na odhad parametrov použiť metódu maximálnej vierohodnosti.[Lukáčik 2008]

2 VÝSLEDKY

Uvažujme teraz model, v ktorom bude závislá premenná vyjadrovať to, či klient bude respektíve nebude poistený. Sledovať budeme vplyv jednotlivých vysvetľujúcich premenných na pravdepodobnosť toho, či klient bude poistený alebo nie.

Vysvetľujúcimi premennými v modeli budú vek záujemcu, pohlavie, zdravotný stav a poistná doba v rokoch. V prvej etape sme uvažovali o viacerých vysvetľujúcich premenných, avšak z dôvodu ich štatisticky nevýznamného vplyvu ich už ďalej neuvádzame.

Najprv uvedieme na ilustráciu interpretácie dva čiastkové modely. V prvom bude ako vysvetľujúca premenná vystupovať kvantitatívna premenná a v druhom kvalitatívna premenná.

Model s kvantitatívnou vysvetľujúcou premennou x_i - poistné obdobie v rokoch.

Pod odhadnutým parametrom je v zátvorkách uvedená p-hodnota.

$$\hat{L}_i = 0,086 + 0,067x_i \quad (0,05) \quad (1.4)$$

Z výsledkov odhadnutého modelu môžeme vypočítať nasledovné charakteristiky. Pre ilustráciu uvažujme, že doba poistenia je 10 resp. 11 rokov.

Pravdepodobnosť, že klient bude poistený pri dobe poistenia napr. 10 rokov ($x = 10$) je

$$P(y = 1 / x_i = 10) = \frac{1}{1 + e^{-(0,0866+0,06709*10)}} \doteq 0,68.$$

Šanca, že poistia klienta pri dobe poistenia 10 rokov je

$$\frac{\hat{P}_i}{1-\hat{P}_i} = e^{0,0866+0,67009*10} \doteq 2,13.$$

Šanca, že poistia klienta pri dobe poistenia 11 rokov je

$$\frac{\hat{P}_i}{1-\hat{P}_i} = e^{0,0866+0,67009*11} \doteq 2,27.$$

Pomer šancí bude

$$OR = \frac{2,27}{2,13} = 1,07,$$

čo môžeme vypočítať aj ako $OR = e^{0,067009} \doteq 1,07$ a interpretovať: Ak sa zvýši doba poistenia o jeden rok, šanca, že klient bude poistený sa zvýši 1,07 násobne.

Model s kvalitatívnou vysvetľujúcou premennou x_i – zdravotný stav

Premenná x_i v tomto modeli má 2 obmeny. Hodnota 1 indikuje zdravého klienta, hodnota 0 rizikového klienta.

Odhadnutý model má tvar:

$$\hat{L}_i = -0,1823 + 1,0816x_i, \quad (0,0115) \quad (1.5)$$

Na základe výsledkov sa dá takisto ako v predchádzajúcom modeli dopočítať pravdepodobnosť, že poistia zdravého klienta (0,8367), šanca, že bude poistený zdravý človek (5,124) resp. tie isté charakteristiky pre rizikového klienta. Pomer šancí rovný 6,149 v prípade umelej vysvetľujúcej premennej vyjadruje, že šanca poistiť sa je u zdravého človeka 6,149 krát vyššia ako u rizikového.

Po početných experimentoch, v ktorých sme postupne vylučovali vysvetľujúce premenné, ktorých vplyv nebol významný, napr. rizikovosť zamestnania, pohlavie, pripoistenie, bol odhadnutý výsledný model, v ktorom ako nezávislé premenné vystupujú doba poistenia (x_1), zdravotný stav (x_2) a tarifa kapitálového životného poistenia (x_3), pričom rozoznávame 2 typy tejto tarify.

Model má tvar:

$$\hat{L}_i = -0,87703 + 0,07537x_{i1} + 1,7439x_{i2} - 1,13727x_{i3} \quad (0,0677) \quad (0,0283) \quad (0,15) \quad (1.6)$$

Z výsledkov vidíme, že na 10% hladine významnosti sú štatisticky významné parametre pri premenných doba poistenia a zdravotný stav.

Pomer šancí je pre dobu poistenia rovný 1,0783, teda ak sa zvýši doba poistenia o jeden rok, šanca poistiť sa vzrastie 1,07 krát pri ostatných nezmenených podmienkach a pre premennú

zdravotný stav je rovný 5,7196, teda šanca poistiť sa je u zdravého klienta 5,7196 krát väčšia ako u rizikového klienta.

ZÁVER

Realizované odhady ukázali, že najvýznamnejšími faktormi, ktoré ovplyvňujú možnosť poistiť sa sú doba poistenia a zdravotný stav klienta. Premenná pohlavie významne neovplyvňovala rozhodnutie, či daný klient bude poistený, teda na základe odhadovaných modelov môžeme usúdiť, že neexistuje diskriminácia medzi mužmi a ženami, čo však zrejme nie je v súlade so skutočnosťou. V príspevku sme sa pokúsili ukázať ďalšiu z možností aplikácie modelov s umelými závislými premennými, ktorá môže slúžiť ako podpora rozhodovania.

Použitá literatúra

1. GUJARATI, D. 1995. Basic Econometrics. McGraw-Hill 1985.
2. HUSÁR, J. – SZOMOLÁNYI, K. 2005 *Modelovanie ekonomických procesov I*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2005.
3. LEJNAROVÁ, Š. 2007. Modely diskretní binární volby. In: Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníkov KEKO FIS VŠE Praha a KOVE FHI EU, Bratislava: Ekonóm 2007.
4. LUKÁČIK, M. 2008. Ekonomické aplikácie modelu logit. In: Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníkov KEKO FIS VŠE Praha a KOVE FHI EU, Praha: Nakladatelství Oeconomica, 2008.
5. LUKÁČIKOVÁ, A. - LUKÁČIK, M. 2008. Ekonometrické modelovanie s aplikáciami. Bratislava: Ekonóm 2008.
6. STACHOVÁ, I. 2011. Modely s umelými závislými premennými. Diplomová práca 2011.
7. SURMANOVÁ, K. 2009. Úvod do ekonometrie: praktikum. Bratislava: EKONÓM, 2009. ISBN 978-80-225-2693-7

Kontaktné údaje

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 829

email: istvanik@euba.sk

VÝNONNOSŤ PORTFÓLIA A PRÍSPEVKY AKTÍV

PORTFOLIO PERFORMANCE AND ASSETS ATTRIBUTION

Vladimír Mlynarovič

Abstrakt

Príspevok prezentuje metódy analýzy efektov alokačnej politiky medzi triedami aktív z hľadiska ich efektov na výkonnosť fondu (portfólia). Pre definovanú množinu benchmarkov sú výnosy portfólia rozkladané na výnosy investičného štýlu a výnosy aktívnej politiky. Aplikáčna časť príspevku opisuje súčasnú verziu excelovskej aplikácie založenej na VBA používateľských funkciách a makrách. Aplikácia najskôr konštruje pre špecifikované časové obdobie profily rizika a výnosov portfólia individuálnych aktív z hľadiska: efektov kúpy a predaja, efektov zmeny cien a efektov výmenných kurzov. Tieto profily sú potom agregované do profilov tried aktív, ako dlhopisy akcie, atď. a profilu portfólia a sú konfrontované so zodpovedajúcimi benchmarkmi.

KLúčové slová: alokačná politika, výkonnosť portfólia, menové príspevky

Abstract

The paper presents methods of analysis allocation policy effects among assets classes from a viewpoint of their effect on funds (portfolios) performance. For the defined set of benchmarks the portfolio returns are split into policy returns and active ones. The application part of the paper describes the present version of excel application based on VBA user function and macros. The application at first constructs for a specified time period risk – return profiles of individual assets from the viewpoint: buy – sell effects, price changes effects, and exchange rates effects. The profiles are then aggregated into assets class profiles, e.g. bonds, shares, money market tools, and the portfolio profile and confronted with corresponding benchmarks.

Keywords: allocation policy, portfolio performance, multi-currency performance attribution

1 DEKOMPOZÍCIA VÝNOSOV PORTFÓLIS

V prezentovanej metodike, ktorá sa opiera o práce [2], [3] a [4] sa príspevky viacerých mien k výnosu aktíva začínajú rozkladom výnosu do troch základných zdrojov. Každý z nich má jednoznačnú finančnú interpretáciu. Následne po takejto dekompozícii možno komponenty agregovať na úrovni portfólia a vykazovať separovane.

Nech l_i je lokálny výnos aktíva i , ktoré je denominované v mene c . Ak sa mena c zhodnotí o nejakú hodnotu e_c v porovnaní s bázičnou menou, potom pre výnos r_i tohto aktíva v bázičkej mene platí

$$1 + r_i = (1 + l_i)(1 + e_c)$$

odkiaľ

$$r_i = l_i + e_c + l_i e_c \tag{1}$$

Výnos výmenného kurzu e_c závisí od fluktuácií spotovej miery v investičnom období. Nech $S_c(t)$ je spotová cena jednej jednotky meny c v bázičkej mene v čase t . Potom pre výnos výmenného kurzu meny c v čase od t_0 do t_f platí

$$e_c = \frac{S_c(t_f)}{S_c(t_0)} - 1 \quad (2)$$

Ako príklad uvažujme investíciu do akcie *Sony* z pohľadu EUR ako bázičkej meny. Kvôli jednoduchosti uvažujeme, že cena tejto akcie je na začiatku obdobia $Y100$ a výmenný kurz je 0.010 EUR za yen (t.j. $Y100/\text{EUR}$). Každá akcia *Sony* má na začiatku obdobia teda cenu 1.00 EUR. Predpokladajme, že na konci obdobia sa yen zhodnotí o 10% , na 0.011 EUR (t.j. $Y90.91/\text{EUR}$) a že *Sony* zarába lokálny výnos rovný 10% a zatvára na cene akcie rovnej $Y110$. Na konci obdobia je každá akcia *Sony* ocenená na 1.21 EUR ($110/90.91$) s výnosom 21 percent v EUR. Dosadenie $l_i = 0.10$ a $e_c = 0.10$ do vzťahu (1) vedie k výnosu 21% , ktorý je konzistentný z uzatváracou cenou 1.21EUR za akciu.

Pri analýze príspevkov viacerých mien sa ukazuje užitočné pracovať v terminológii *dodatočných výnosov*, ktoré sú definované vo vzťahu k bezrizikovým mieram. Bezriziková miera reprezentuje „oportunitné náklady“ investovania. To znamená, že investičné rozhodnutia by mali byť robené porovnávaním očakávaných výnosov s alternatívnou investíciou do bezrizikového aktíva.

Nech ρ_c je bezrizikový výnos meny c a ρ_b je zodpovedajúci výnos bázičkej meny. Prepísaním rovnice (1) v termínoch *dodatočných výnosov* dostaneme

$$r_i - \rho_b = (l_i - \rho_c) + (\rho_c + e_c + \rho_c e_c - \rho_b) + (l_i - \rho_c)e_c \quad (3)$$

Tento dôležitý výsledok dekomponuje *bázičkový dodatočný výnos* ($r_i - \rho_b$) do troch fundamentálnych zložiek. Prvou je *lokálny dodatočný výnos* ($l_i - \rho_c$), ktorý reprezentuje „trhový“ komponent a hovorí, či lokálny výnos aktíva preyšuje lokálnu bezrizikovú mieru. Stojí zato pripomenúť, že lokálny *dodatočný výnos* nezávisí od bázičkej meny. Pripomeňme tiež, že ρ_c závisí od aktíva i , ktoré sa uvažuje. Napríklad, v prípade *Sony* ρ_c predstavuje výnos yenu.

Druhý komponent rovnice (3) je *dodatočný výnos meny* m_c definovaný v tvare

$$m_c = \rho_c + e_c + \rho_c e_c - \rho_b \quad (4)$$

a hovorí, či držba hotovosti v mene c prekonáva držbu hotovosti v bázičkej mene. Tretia zložka v rovnici (3) je *cross product*, $(l_i - \rho_c)e_c$. Je výsledkom konverzie lokálnych *dodatočných ziskov naspäť* bo bázičkej meny. Všimnime si, že táto časť výnosov nemôže byť menovo hedžovaná, pretože lokálny *dodatočný výnos* aktíva je na začiatku obdobia neznámy. Signifikantné hodnoty tejto zložky sa objavia len keď existujú veľké lokálne *dodatočné výnosy* súčasne s veľkými fluktuáciami výmenného kurzu. Hoci je táto zložka typický malá, malá by byť ponechaná kvôli úplnej evidencii výnosu portfólia.

Dôležitým je poznamenať, že rovnica (3) platí rovnako pre hotovosť ako aj pre rizikové aktívum. Teoreticky, lokálny dodatočný výnos hotovosti je nula a veľa systémov pre dekomponovanie výkonnosti to využíva ako operačný predpoklad. V skutočnosti však lokálny dodatočný výnos hotovosti bude nenulový. Napríklad hotovosť prichádzajúca z krátkych predajov typický zarába menej ako je bezriziková miera, zatiaľ čo komerčné papiere obvykle zarábajú viac.

Pri agregácii na úroveň portfólia uvažujme portfólio P s váhami w_i . Potom pre dodatočný výnos R_P tohto portfólia v bázičných cenách platí

$$R_P = \sum_i w_i (r_i - \rho_b) \quad (5)$$

a po aplikácii vzťahu (3) možno tento výnos dekomponovať do troch zložiek:

$$R_P = L_P + M_P + Q_P \quad (7)$$

kde

$$L_P = \sum_i w_i (l_i - \rho_c) \quad (8)$$

predstavuje lokálny dodatočný, t.j. trhový, príspevok,

$$M_P = \sum_i w_i m_c \quad (9)$$

je efekt meny a pre krížový efekt platí

$$Q_P = \sum_i w_i (l_i - \rho_c) e_c \quad (10)$$

3 EXCELOVSKÁ APLIKÁCIA

Excelovská aplikácia v súčasnej verzii automatizuje spracúvanie účtovných informácií o vývoji vybraného penzijného fondu v štruktúre individuálny cenný papier, trieda aktív, fond a definovaná štruktúra benchmarkov. Zabezpečuje postupné dopĺňanie údajovej základne v čase, resp. jej revíziu pre nové časové obdobie. Pre vybrané časové obdobie analyzuje výkonnosť cenného papiera v štruktúre efektov vyplývajúcich zo zmeny účtovnej ceny, z realizovaných obchodov, zo zmeny výmenného kurzu a z výnosu z vlastníctva fondu. Bilancia tokov hotovosti je konštruovaná na základe reálnych obchodov a reálnych obchodných cien. Tieto informácie sú agregované cez triedy aktív až po úroveň fondu.

Pre dekompozíciu výnosov využíva excelovská aplikácia nasledujúce používateľské funkcie kontribučnej analýzy:

a) výnos akcie v dôsledku zmeny jej ceny

$$r_P(S) = \begin{cases} \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) & , ak \ n_1 \geq n_0 \\ \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) & , ak \ n_0 > n_1 \end{cases}$$

kde

p_1 = cena 1 = cena akcie v období t ,

$p_0 = \text{cena}_0 = \text{cena akcie v období } t-1,$
 $n_1 = \text{kusy}_1 = \text{počet kusov akcie v čase } t,$
 $n_0 = \text{kusy}_0 = \text{počet kusov akcie v čase } t-1,$
 $v_0 = \text{total}_0 = \text{celková hodnota akcie v čase } t-1,$
 $r_p(S) = \text{cena_nova} = \text{výnos akcie v dôsledku zmeny jej ceny.}$

b) výnos dlhopisu v dôsledku zmeny jeho ceny

$$r_p(B) = \begin{cases} \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)a & , \text{ak } n_1 > n_0 \\ \left(\frac{n_1}{n_0}\right)\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)a & , \text{ak } n_0 > n_1 \\ \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)a & , \text{ak } n_1 = n_0 \end{cases}$$

pričom

$$a = \frac{\frac{p_0 n_0}{100}}{v_0}$$

kde

$p_1 = \text{cena}_1 = \text{cena dlhopisu v období } t,$
 $p_0 = \text{cena}_0 = \text{cena dlhopisu v období } t-1,$
 $n_1 = \text{kusy}_1 = \text{počet kusov dlhopisu v čase } t,$
 $n_0 = \text{kusy}_0 = \text{počet kusov dlhopisu akcie v čase } t-1,$
 $v_0 = \text{total}_0 = \text{celková hodnota dlhopisu v čase } t-1,$
 $r_p(B) = \text{cena_bonds} = \text{výnos dlhopisu v dôsledku zmeny jeho ceny.}$

c) výnos aktíva v dôsledku obchodnej transakcie

$$r_r(A) = \begin{cases} \left(\frac{n_1}{n_0} - 1\right)\left(\frac{p_1}{p_k} - 1\right) & , \text{ak } n_1 > n_0, \quad n_0 \neq 0 \\ \left(1 - \frac{n_1}{n_0}\right)\left(\frac{p_k}{p_0} - 1\right) & , \text{ak } n_0 > n_1, \quad n_1 \neq 0 \\ \left(\frac{p_1}{p_k} - 1\right) & , \text{ak } n_0 = n_1, \quad n_1 \neq 0 \\ \left(\frac{p_k}{p_0} - 1\right) & , \text{ak } n_1 = 0, \quad n_0 > 0 \\ \left(\frac{p_1}{p_k} - 1\right) & \text{ak } n_0 = 0, \quad n_1 > 0 \end{cases}$$

kde:

$p_k = \text{cena_obchod} = \text{obchodovaná cena}$
 $p_1 = \text{cena}_1 = \text{cena termínovaného vkladu v období } t,$
 $p_0 = \text{cena}_0 = \text{cena termínovaného vkladu v období } t-1,$
 $n_1 = \text{kusy}_1 = \text{nominálna hodnota termínovaného vkladu v čase } t,$
 $n_0 = \text{kusy}_0 = \text{nominálna hodnota termínovaného vkladu v čase } t-1,$
 $r_p(A) = \text{buysell} = \text{výnos aktíva v dôsledku obchodnej transakcie.}$

d) výnos aktíva – alikvotný úrokový výnos

Ak $a_1 = 0$, potom $r_a(A) = 0$. V opačnom prípade sa východisková hodnota $r_a(A) = 0$ modifikuje podľa nasledovných možností:

$$r_a(A) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{n_0}{n_1} \alpha_1}{\alpha_0} - 1 \right) a & , ak \quad n_1 > n_0 > 0, \alpha_0 > 0 \\ \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0 \left(1 - \frac{n_0 - n_1}{n_0} \right)} - 1 \right] a & , ak \quad n_0 > n_1, \alpha_1 > 0, \alpha_0 > 0 \\ \frac{\alpha_1}{v_1} & , ak \quad n_0 = n_1, |\alpha_1 - \alpha_0| > |4p| \\ \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - 1 \right) a & , ak \quad n_0 = n_1, |\alpha_1 - \alpha_0| < |4p|, \alpha_2 \neq 0 \\ \frac{\alpha_1}{v_1} & \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{a_1}{v_1}$$

$$\alpha_i = a_i f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$p = \begin{cases} 1 & , ak \quad \alpha_0 = \alpha_2 \\ \frac{|\alpha_0 - \alpha_2|}{d_0 - d_2} & , ak \quad \alpha_0 \neq \alpha_2 \end{cases}$$

kde

$a_0 = \text{auv}0 =$ alikvotný úrokový výnos v čase $t-1$,

$a_1 = \text{auv}1 =$ alikvotný úrokový výnos v čase t ,

$a_2 = \text{auv}2 =$ alikvotný úrokový výnos v čase $t-2$,

$n_0 = \text{kusy}0 =$ počet kusov aktíva v čase $t-1$,

$n_1 = \text{kusy}1 =$ počet kusov aktíva v čase t ,

$v_1 = \text{total}1 =$ celková hodnota aktíva v čase t ,

$f_0 = \text{fx}0 =$ výmenný kurz v čase $t-1$,

$f_1 = \text{fx}1 =$ výmenný kurz v čase t ,

$f_2 = \text{fx}2 =$ výmenný kurz v čase $t-2$,

$d_0 = \text{datum}0 =$ časový moment $t-1$,

$d_2 = \text{datum}1 =$ časový moment $t-2$,

$r_a(A) = \text{auv_vypocet price} =$ výnos aktíva z AUV v čase t .

e) výnos aktíva – zmena výmenného kurzu

Východiskové hodnoty $r_f(A) = 0$ a $r_x(A) = 0$ sa modifikujú podľa nasledovných možností:

$$r_f(A) = \left\{ \left(\frac{f_0}{f_1} - 1 \right) + \left[\left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) \left(\frac{f_0}{f_1} - 1 \right) \right] \right\} x, \text{ ak } p_0 \neq 0, f_1 \neq 0, f_0 \neq 0, p_1 \neq 0$$

a

$$x = \frac{p_0 n_0 / f_0}{v_0}, \text{ ak } f_0, p_0, n_0 \neq 0$$

$$r_x(A) = \left\{ \left(\frac{f_0}{f_1} - 1 \right) + \left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - 1 \right) \left(\frac{f_0}{f_1} - 1 \right) \right] \right\} x, \text{ ak } \alpha_0, \alpha_1, f_0, f_1 \neq 0$$

pričom

$$x = \frac{a_0}{v_0}, \text{ ak } a_0, t_0 \neq 0$$

$$\alpha_i = a_i f_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{ak } a_i, f_i \neq 0$$

kde:

$a_0 = \text{auv0} =$ alikvotný úrokový výnos v čase $t-1$,

$a_1 = \text{auv1} =$ alikvotný úrokový výnos v čase t ,

$n_0 = \text{nominal0} =$ počet kusov aktíva v čase $t-1$,

$v_0 = \text{total0} =$ celková hodnota aktíva v čase $t-1$,

$f_0 = \text{fx0} =$ výmenný kurz v čase $t-1$,

$f_1 = \text{fx1} =$ výmenný kurz v čase t ,

$r_f(A) = \text{cena_fx1_price} =$ výnos aktíva z efektu zmeny výmenného kurzu na cenu,

$r_x(A) = \text{cena_fx1_auv} =$ výnos aktíva z efektu zmeny výmenného kurzu na AUV,

pričom

$$r_{fx}(A) = r_f(A) + r_x(A)$$

Použitá literatúra:

1. Brinson, G. – L. Hood – G. Beebover(1986): Determinants of Portfolio Performance. Financial Analyst Journal (July/August), pp. 39 – 48.
2. Brinson, G. – L. Hood – G. Beebover(1991): Determinants of Portfolio Performance II: An Update. Financial Analyst Journal (May/June), pp. 40 – 48.
3. Drobetz, W.- F. Kohler(2002): The Contribution of Asset Allocation Policy to Portfolio Performance. Financial Markets and Portfolio Management. Volume 16, Number 2, pp. 219 – 231.
4. Menchero, J. – B. Davis: Multi – Currency Performance Attribution. The Journal of Performance Measurement. Fall 2009, p. 45 -55.
5. Mlynarovič, V.: Finančné investovanie. Teória aplikácie. IURA Edition, Bratislava, 2001

Kontaktné údaje:

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Fakulta sociálnych a ekonomických vied UK

820 05 Bratislava, Odbojárov 10/a,

email: vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

ANALÝZA INVESTIČNÍCH NÁSTROJŮ

ANALYSIS OF INVESTMENT INSTRUMENTS

Petr Mynařík

Abstrakt

Ve svém příspěvku se zabývám porovnáváním různých druhů podílových fondů a jejich vyhodnocením. Na základě získaných údajů a informací jsem stanovil kritériální matici řešeného problému. K řešení jsem použil metodu PROMETHEE a snažil jsem se prokázat vhodnost zvolené metody na problematiku investičního rozhodování.

***KLíčové slova:** investiční nástroje, podílové fondy, vícekritériální hodnocení variant, PROMETHEE*

Abstract

In this contribution I write about comparing different types of shares funds and their evaluation. I set a criterial matrix of solved example on the basis of data and information. I used the method of Promethee and I tried to demonstrate the suitability of the chosen method on the issue of investment decisions.

***Keywords:** investment instruments, shares funds, multiple criteria decision making, PROMETHEE*

1 ÚVOD

Cílem tohoto příspěvku je ukázat čtenáři určité možnosti investování a stručnou charakteristiku investičních nástrojů. Teoretickou část se snažím doplnit zajímavými daty a informacemi z různých šetření a výzkumů.

V praktické části se zabývám analýzou a aplikací vybrané metody vícekritériálního hodnocení variant. Na řešeném příkladu se pokusím ukázat možné porovnání jednotlivých variant investičních produktů.

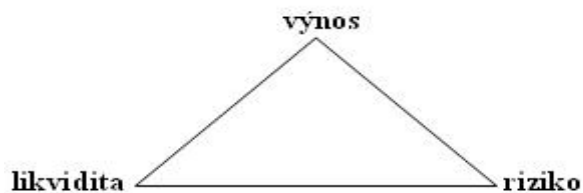
2 INVESTIČNÍ NÁSTROJE

Ne každý se zajímá o problematiku investování a investičních produktů, proto na samotný začátek stručně přiblížím tuto oblast. V další části bude jednoduše představeno investování do fondů a určité možnosti, jak lze investovat. Tento teoretický rámec bude doplněn konkrétními daty z praxe, kde se pokusím zohlednit určité zajímavosti a skutečnosti této oblasti.

2.1 Zásady investování

Pokud se věnujeme investování, musíme znát určité zásady, kterými bychom se měli řídit, chceme-li být úspěšní a dosáhnout svých cílů. Investiční nástroje můžeme hodnotit podle základních hledisek. Základní hlediska popisuje tzv. „investiční trojúhelník“. Tento základní

princip slučuje tři základní ukazatele, které se nesmí opomenout při výběru investičního produktu.



Obrázek 1. Investiční trojúhelník

Obrázek ukazuje vztah mezi jednotlivými ukazateli u investičních nástrojů. Platí zde předpoklad „něco za něco“, to znamená, že není možné současně dosáhnout nejlepších hodnot u všech tří hledisek. Chci-li investovat s nízkým rizikem, nemohu očekávat vysoký výnos. Naopak pokud mám zájem o vysoký výnos, musím bezpodmínečně podstoupit vyšší riziko investice. Platí úměra, že pokud chceme investováním více získat, musíme se odprostit od veškerých jistot a garancí, protože právě za garance a nízké riziko se draze platí.

Vždy si každý musí nastavit vlastní prioritu a podle toho se dále řídit při volbě konkrétního investičního instrumentu. S tím úzce souvisí investiční strategie, která je určitým kompromisem mezi dosažením nejvyššího výnosu, nejnižšího rizika a vysoké likvidity investice.

2.2 Druhy investičních nástrojů

V následné analýze budeme brát v potaz pouze podílové fondy. Tyto fondy reprezentují konkrétní investiční produkt, který je instrumentem kolektivního investování, kdy si za investované finanční prostředky kupujete tzv. podílové listy. Podílový list je cenný papír, jehož hodnota odpovídá podílu investovaných prostředků na vlastním jmění fondu. Kurs podílového listu nás přesně informuje o změnách zhodnocení portfolia fondu.

Podílové fondy lze rozdělovat na určité druhy. Je pochopitelné, že každý investor je jiný, má jiný přístup, a proto pro něj musí existovat odlišné alternativy. Základní dělení vymezuje 4 typy podílových fondů: fondy peněžního trhu, dluhopisové fondy, smíšené fondy a akciové fondy.

Následující jednoduchá tabulka ukazuje souhrn základních charakteristik všech zmíněných skupin podílových fondů.

Tabulka 1. Základní typy fondů

typ podílových fondů	investiční horizont	riziko	volatilita	očekávaný výnos
Fondy peněžního trhu	cca 1 rok	nejnižší	nejnižší	nízký
Dluhopisové fondy	2-3 roky	nízké	nízká	střední
Smíšené fondy	3 roky	vysoké	vysoká	vysoký
Akciové fondy	nad 5 let	nejvyšší	nejvyšší	nejvyšší

2.3 Poznatky z praxe

Na závěr bych se ještě zastavil u diverzifikace a ukázal zde zajímavý trend, který se projevuje velmi významně. Diverzifikaci lze chápat z několika hledisek: máme diverzifikaci geografickou (investice zaměřené na jednotlivé státy, příp. regiony), odvětvovou/strukturální (zaměření dle sféry působení – zemědělství, nerostné suroviny, služby,...) a časovou (nastavit si různé investiční horizonty).

Moje poznámka se bude týkat geografické diverzifikace. Je zřejmé, že se u mezinárodních akcií projevují velice podobné vývoje cen. U jednotlivých zemí se tyto cenové skoky projevují téměř ve stejnou dobu a lze to považovat za systémové riziko. Proto je pouze geografická diverzifikace nedostatečná, pouze tato diverzifikace nám nedokáže ochránit naše investice před případným poklesem [6].

Pro potvrzení tohoto tvrzení si můžeme vzpomenout na „finanční krizi“, která je stále aktuální. Propady se dotkly všech mezinárodně zaměřených titulů a ve stejnou dobu. V současné době je daleko účinnější odvětvová diverzifikace.

Zajímavou skutečností, která byla potvrzena v několika nezávislých studiích, je poznatek, že investoři mají tendenci držet podstatně větší část svého kapitálu v domácích akciích než v zahraničních titulech. Tento jev bývá označován jako „home bias“. Nejčastěji se tento přístup vysvětluje tak, že investoři cítí větší důvěru v domácí akcie. Mají k nim blíže, mají o nich větší informovanost a určitě se zde projevuje i určité „vlastenectví“. Mnoho odborníků předpovídá, že tato převaha v domácí akcie bude postupem času ubírat na síle. Tím, jak se svět globalizuje, i zde dojde k určitému posunu a investoři nebudou rozlišovat, o jaké akcie se jedná. Dále uvádí, že většina investorů využívá právě geografickou diverzifikaci při skladbě svého portfolia, a proto si musí zvolit i zahraniční akcie [5].

Na základě minulých výzkumů [1] lze vysledovat určité závislosti ve vztahu k riziku při volbě investičních nástrojů. Bylo opakovaně prokázáno, že větší sklon k riziku mají: *muži, ženatí, s vyšším vzděláním, s vyššími výdělky a s větším počtem odpracovaných let.*

Stručně rozebereme jednotlivé znaky:

a) Obecně platí, že muži daleko více riskují než ženy, a proto není důvod, aby v oblasti investování platilo něco jiného.

b) Další znak popisuje, zda je muž ženatý nebo nikoliv. Souvisí to s věkem a i s počtem odpracovaných let. Tito muži již mají vytvořený nějaký kapitál a jsou ochotni část svého kapitálu zainvestovat a případná ztráta je tolik nemrzí, protože mají již vytvořené nějaké rezervy.

c) Vyšší vzdělání může zajišťovat i vyšší informovanost a znalost. Čím více je investor informačně vybaven, tím více dokáže snižovat určité riziko. I když nelze riziko eliminovat zcela.

d) Vyšší výdělky jsou většinou spojeny s vyšším vzděláním, často to jsou spojené nádoby. A platí, že bohatší lidé jsou ochotni připustit ztrátu určité rezervy, pokud vidí možnost dalšího zbohatnutí.

e) Větší počet odpracovaných let lze vysvětlit, že větší jistota zaměstnání vede k agresivnějšímu investování. Investor je přesvědčen, že nepřijde o své pracovní místo, a proto ho případná ztráta tolik netrápí. Věří tomu, že by dokázal ztracené finanční prostředky zase brzo vydělat.

3 ANALÝZA A POROVNÁNÍ INVESTIČNÍCH NÁSTROJŮ

Tato část příspěvku je praktická, aplikuji jednu z metod vícekritériálního hodnocení variant (VHV) na konkrétní zadání a příklad. Záměrem této aplikace je ukázat možné alternativy řešení otázky investování do podílových fondů.

3.1 Základní data

Před samotnou analýzou bylo nezbytné vymezení variant, které budou porovnávány, a kritéria, podle nichž budeme hodnotit. Variantami jsou čtyři základní typy podílových fondů: *fondy peněžního trhu, dluhopisové fondy, smíšené fondy a akciové fondy*.

Ještě musím doplnit kritéria, která by charakterizovala významné parametry jednotlivých typů fondů. Zvolil jsem pět kritérií:

- riziko - srovnání možného rizika u daného investičního nástroje
- volatilita – míra kolísání ceny investičního nástroje
- očekávaný výnos - částka, kterou za očekávaného vývoje budeme mít na konci investování
- průměrná roční výkonnost za poslední 3 roky (p.a.) - vypočtená charakteristika na základě vlastního výzkumu
- průměrná roční výkonnost za posledních 5 let (p.a.) - vypočtená charakteristika na základě vlastního výzkumu

První tři kritéria mají hodnoty variant nastaveny stupnicově (1 - nejnižší, ..., 4 - nejvyšší). A u zbývajících dvou kritérií bylo nutné spočítat konkrétní hodnoty z dostupných zdrojů.

Za podkladové portfolio jsem vybral podílové fondy nabízené na českém trhu, které jsou dostupné českým investorům a které se nejčastěji nakupují. Do portfolio jsem zahrnul 9 fondů peněžního trhu, 17 dluhopisových fondů, 15 smíšených fondů a 37 akciových fondů. Doplním úplný výčet hodnocených fondů:

- a) fondy peněžního trhu: Conseq Konzervativní, Fond peněžního trhu, KBC Multi Cash, ING Český fond peněžního trhu, Sporoinvest, Pioneer – Sporokonto, IKS peněžní trh PLUS, Short Term Euro, Templeton Liquid Reserve,
- b) dluhopisové fondy: Conseq Dluhopisový, Korporátní dluhopisy, ČSOB bond mix, ING Český fond obligací, ISČS - Bond Invest, Sporobond, Trendbond, Vyvážený mix, Pioneer – obligační, IKS dluhopisový plus, Raiffeisen fond fondů konzervativní, Bond Corporate Euro, Franklin High Yield, Franklin U.S. Total Return, Parvest Euro Bond, Parvest Bond World, Conseq invest dluhopisy Nové Evropy,
- c) smíšené fondy: ČP invest - Smíšený f., ČSOB bohatství, ČSOB střeoevropský, Fond řízených výnosů, Pioneer - dynamický fond, IKS balanc. – konzerv., IKS balanc. – dynamický, Raiffeisen fond fondů balancovaný, AKRO balancovaný fond, Parvest Convertible Bond Europe Small Cap, Parvest Target Return Plus, Templeton Global Balanced, BNPP Absolute Return Growth, Raiffeisen TopSelection- Garantiefonds, PIA Guarantee Basket 2013,
- d) akciové fondy: Conseq Akciový, AXA CEE Akciový fond, ČP Invest - Farmacie a biotechnologie, ČP Invest - Globální značky, ČP Invest - Nové ekonomiky, ČP Invest - Ropa a energetický průmysl, ČSOB akciový mix, ING Český fond akcií, ING Emerging Markets, ING Invest Energy, ING Global High Dividend, ING Invest World, ISČS - Akciový mix, ISČS Top Stocks, ISČS Sportrend, Dynamický mix, Global Stocks, Pioneer - akciový fond, IKS akciový PLUS, Raiffeisen fond fondů růstový, Equity Brazil, HSBC Chinese Equity, AKRO akciový fond nových ekonomik, C-Quadrat Total Return Balanced, C-Quadrat Total Return Dynamic, C-

Quadrat Best Momentum, Templeton Asian Growth, Templeton Emerging Markets, Templeton Growth, Franklin European Small-Mid Cap Growth, Franklin Technology, Franklin U.S. Opportunities, Parvest Equity Euro Small Cap, Parvest Equity BRIC, Parvest Equity Latin America, ING Invest Computer Technologies, ING Invest Latin America.

U všech fondů následovalo počítání průměrné výkonnosti za poslední 3 roky (p.a.), resp. za posledních 5 let. Všechny získané hodnoty jsou aktuální k datu 15. 11. 2011. Vypočtené parametry představuje následující tabulka.

Tabulka 2. Vypočítané parametry výkonnosti

typ podílových fondů	průměrná roční výkonnost za poslední 3 roky	průměrná roční výkonnost za posledních 5 let
fondy peněžního trhu	1,54%	1,25%
dluhopisové fondy	5,02%	2,39%
smíšené fondy	4,66%	-0,76%
akciové fondy	13,32%	-1,83%

Tabulka nám ukazuje výrazně odlišné hodnoty u výkonnosti za poslední 3 roky a výkonnosti za posledních 5 let. Tento rozdíl je způsoben vlivem krize na ceny analyzovaných fondů. Nejsilnější dopad krize byl cca začátkem roku 2008, takže právě tento pokles je zahrnut ve výkonnosti za posledních 5 let, kde se silně projevuje ve zjištěných hodnotách výkonnosti. Po získání veškerých vstupních informací můžeme zapsat kritériální matici.

Tabulka 3. Kritériální matice

typ podílových fondů	riziko	volatilita	očekávaný výnos	průměrná roční výkonnost za poslední 3 roky	průměrná roční výkonnost za posledních 5 let
fondy peněžního trhu	1	1	1	101,54	101,25
dluhopisové fondy	2	2	2	105,02	102,39
smíšené fondy	3	3	3	104,66	99,24
akciové fondy	4	4	4	113,32	98,17
kritérium	min	min	max	max	max

Nyní máme veškeré potřebné informace pro aplikaci konkrétní metody vícekritériálního hodnocení variant (VHV).

3.2 Aplikace vybrané metody

Pro řešení a analýzu jsem si vybral metodu PROMETHEE, více o zvolené metodě lze zjistit v uvedené literatuře [2], [4].

Před samotným výpočtem a řešením nám již jen chybí nastavení váhového vektoru jednotlivých kritérií. To představuje stanovení preferencí mezi jednotlivá kritéria. Váhy jsem určoval na základě metody pořadí. Investor si sám seřadí kritéria podle důležitosti a na základě metody pořadí se poté jednoduše spočítá váhový vektor.

Metoda PROMETHEE využívá 6 základních typů preferenčních funkcí, některé z nich vyžadují zadání několika parametrů. V tabulce je vidět, pro které preferenční funkce jsem se rozhodl u jednotlivých kritérií a jaké jsem nastavil hodnoty u požadovaných parametrů.

Tabulka 4. Zadání PROMETHEE

kritérium	riziko	volatilita	očekávaný výnos	průměrná roční výkonnost za poslední 3 roky	průměrná roční výkonnost za posledních 5 let
povaha	min	min	max	max	max
preferenční funkce	obyčejné krit.	krit. s lin. preferencí	úrovňové krit.	krit. s indifferenční oblastí	Gaussovo krit.
zvolené parametry		$p = 2$	$p = 2,5$ $q = 1,5$	$p = 2$ $q = 1$	$\sigma = 1,5$

V dalším kroku již následovala výpočetní část příkladu. Pouze zbývalo nastavit váhový vektor, a tím určit důležitost zvolených kritérií. V příspěvku se zaměřím pouze na 2 různá zadání. Pro ilustrativní obrázek to bude určitě dostačující.

1. příklad: U prvního zadání platí předpoklad, že všechna kritéria mají stejnou váhu. Rozhodovatel neupřednostňuje žádné kritérium, tzn. že jsou stejně významná a neexistuje žádné, které by bylo důležitější než ostatní.

Tabulka 5. Váhový vektor

PREFERENCE		
kritérium	pořadí	váhy
riziko	1.	1/5
volatilita	1.	1/5
očekávaný výnos	1.	1/5
průměrná roční výkonnost za poslední 3 roky	1.	1/5
průměrná roční výkonnost za posledních 5 let	1.	1/5

Po aplikaci metody PROMETHEE dostaneme následující výstup, kde vidíme celkové pořadí hodnocených variant.

Tabulka 6. Matice globálních preferenčních indexů

	fondy peněžního trhu	dluhopisové fondy	smíšené fondy	akciové fondy	F+	F ⁻	F	pořadí
fondy peněžního trhu	0	0,3	0,566	0,598	1,464	0,788	0,676	2.
dluhopisové fondy	0,288	0	0,498	0,6	1,386	0,6	0,786	1.
smíšené fondy	0,1	0	0	0,38	0,48	1,264	-0,784	4.
akciové fondy	0,4	0,3	0,2	0	0,9	1,7	-0,678	3.

V tomto případě jsou jako nejlepší varianta vyhodnoceny *dluhopisové fondy*.

2. příklad: Rozhodovatel požaduje nejvyšší výnos i za cenu vyššího rizika. Bodovací metodou jsem opět stanovil váhový vektor potřebný pro samotný výpočet a nalezení nejlepší varianty.

Tabulka 7. Váhový vektor

PREFERENCE		
kritérium	pořadí	váhy
riziko	5.	1/15
volatilita	4.	2/15
očekávaný výnos	3.	3/15
průměrná roční výkonnost za poslední 3 roky	1.	5/15
průměrná roční výkonnost za posledních 5 let	2.	4/15

Tabulka 8. Matice globálních preferenčních indexů

	fondy peněžního trhu	dluhopisové fondy	smíšené fondy	akciové fondy	F+	F ⁻	F	pořadí
fondy peněžního trhu	0	0,133	0,421	0,464	1,018	1,151	-0,133	3.
dluhopisové fondy	0,451	0	0,397	0,467	1,315	0,566	0,749	1.
smíšené fondy	0,167	0	0	0,24	0,407	1,151	-0,744	4.
akciové fondy	0,533	0,433	0,333	0	1,299	1,171	0,128	2.

Po aplikaci metody byly nejlepší variantou také *dluhopisové fondy*.

4 ZÁVĚR

Ze získaných výsledků je patrné, že pro různá zadání je možné získat odlišná pořadí variant. To potvrzuje skutečnost, že neexistuje takové řešení, které by se dalo aplikovat na všechny typy investorů a které by bylo pro ně nejlepším možným řešením. Každý investor má vlastní preference, které se musí vždy brát v potaz, a až poté lze připravit kvalitní a správnou analýzu.

Použitá literatura

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. AGNEW J., BALDUZZI P., SUNDÉN A., Portfolio choice and trading in a large. The American economic review. Vol. 93, No. 1 (Mar., 2003), s. 193-215.
2. FIALA P. Modely a metody rozhodování. Oeconomica Praha, 2003. ISBN 80-245-0622-X.
3. GAZDA J., LIŠKA V. Kapitálové trhy a kolektivní investování. Professional Publishing, Praha, 2004. ISBN 80-86419-63-0.
4. HWANG C.L., MASUD A.S. Multiple objective decision making, Methods and applications. Springer Verlag, Berlin 1979.
5. PÁSTOR L. Portfolio selection and asset pricing models. The Journal of finance. Vol. 55, No. 1 (Feb., 2000), s. 179-223.
6. RANJAN DAS S., UPPAL R. Systemic risk and international portfolio choice. The Journal of finance. Vol. 59, No. 6 (Dec., 2004), s. 2809-2834.

Kontaktné údaje

Ing. Petr Mynařík

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: 728 937 106

email: petr.mynarik@vse.cz

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/16 /2011 – Fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze

APLIKACE METODOLOGIE BOXE A JENKINSOVÉ NA PŘEDPOVĚDI PRODEJŮ RYCHLOOBRÁTKOVÉHO SPOTŘEBNÍHO ZBOŽÍ

THE APPLICATION OF THE BOX AND JENKINS METHODOLOGY ON FMCG SALES FORECASTS

Dalibor Nečas

Abstrakt

Příspěvek pojednává o možné aplikaci metodologie Boxe a Jenkinsové na časové řady prodejů rychloobrátkového spotřebního zboží (*Fast Moving Consumer Goods*, FMCG) za účelem jejich predikce. Teoretická část je doplněna reálnou případovou studií pro jednu z předních potravinářských společností v České republice. Cílem práce není nahrazení role plánovače ve firmě automatizovaným statistickým softwarem, ale poskytnutí takového nástroje zkušenému pracovníkovi, který by mu měl usnadnit jak odhad budoucího vývoje prodejů, tak i stanovení chyby předpovědi a dalších užitečných charakteristik časové řady.

Klíčová slova: *Box-Jenkins, FMCG, předpovědi*

Abstract

This paper deals with a possibility of the Box-Jenkins methodology application on FMCG (*Fast Moving Consumer Goods*) sales time series as a tool to their prediction. The theoretical part is completed by a real case study for one of the leading Czech food companies. The goal of this paper is not to replace the role of corporate planner with some automatic statistical software, but to provide such a tool to an experienced worker, which would make him easier to estimate the future sales trends, as well as determinate errors in forecasts and other useful time series characteristics.

Keywords: *Box-Jenkins, FMCG, forecasts*

1 ÚVOD

Na rozdíl od předpovědi poptávky po produktech dlouhodobé spotřeby (*durable goods*, DG), pro které existuje rozsáhlý aparát standardních ekonometrických a statistických metod, využívajících obvykle znalosti o délce a průběhu životního cyklu produktů a míry jejich saturace na spotřebitelském trhu, viz např. (Hušek, 2009), pro předpověď prodejů rychle se obracejícího spotřebního zboží (*Fast Moving Consumer Goods*, FMCG) neexistuje prakticky žádný jednotný postup, který by byl hromadně aplikovatelný bez rozdílu. Spíše než životní cykly jednotlivých produktů, které zajímají více marketingové specialisty, je pro předpověď prodejů FMCG klíčový především vývoj odbytu v předchozích obdobích, sezóna, aktivity na podporu prodeje, momentální chování vybraného tržního odvětví a další charakteristiky. Klasický regresní přístup je z hlediska praxe příliš komplikovaný – jednak pro typickou autokorelaci ve sledovaných časových řadách, jednak pro velice obtížně zjištělné a současně měřitelné a separovatelné regresory. Vhodnější je proto pracovat s autokorelačními metodami vytvořenými speciálně pro časové řady, zde konkrétně s metodologií Boxe a Jenkinsové (viz dále).

Specifický je pro FMCG i stupeň agregace dat při tvorbě předpovědí prodeje. Zatímco u DG je obvyklé činit úsudky o každém výrobku (případně typu výrobku) zvlášť, u FMCG je typičtější predikování vývoje celé (někdy i velice početné) skupiny výrobků (ačkoliv plánování výroby je již rovněž rozvrženo po výrobcích). Důvodem k agregaci je rozdílné pojetí predikce. U předmětů dlouhodobé spotřeby slouží předpověď zejména k rozhodnutím investičního charakteru – zda investovat do rozšíření výroby, zda podpořit marketingovou propagaci a komunikaci výrobku. Naproti tomu u FMCG slouží predikce vývoje poptávky zejména k rozhodnutím operativního charakteru, která by v konečném důsledku měla vést ke stoprocentnímu pokrytí poptávky po všech produktech s minimálními náklady na jejich skladování. Právě řízení skladových zásob je hlavním cílem predikce FMCG a je proto logické pracovat s vyšším stupněm agregace na úrovni určitým způsobem homogenních skupin.

Následující kapitoly a odstavce pojednávají o vybraných modelech časových řad a jejich možné aplikaci při predikci prodeje konkrétní výrobní skupiny jedné z předních potravinářských společností v České republice. Dosud jsou tímto podnikem k předpovědím prodeje využívány zejména znalosti a zkušenosti plánovačů, informace o aktivitách podporujících prodej a systémové informace o předchozím vývoji prodeje bez dostupných hlubších analýz. Přesnost takových předpovědí samozřejmě závisí především na zkušenostech příslušného pracovníka a na jeho schopnosti vnímat změny a souvislosti v časových řadách a reagovat na informace z okolí. Cílem tohoto pojednání není nahrazení role plánovače ve firmě automatizovaným statistickým výpočtem více či méně přesných předpovědí, ale poskytnutí takového nástroje zkušenému pracovníkovi, který by mu měl usnadnit jak odhad budoucího vývoje prodeje, tak i stanovení možné chyby předpovědi a dalších užitečných charakteristik časové řady.

Není-li na příslušném místě v textu uvedeno jinak, jsou v následujících odstavcích použité definice a vzorce převzaté z publikací (Cipra, 2008) anebo (Arlt, Arltová, 2009).

2 VSTUPNÍ DATA

Z podnikového systému lze získat týdenní pozorování realizovaných prodejů požadované skupiny výrobků od března roku 2009. Z hlediska datové struktury je třeba upozornit na skutečnost, že mimo pracovní dny prodeje neprobíhají, takže prodané množství spotřebního zboží je závislé na počtu dní pracovního volna v týdnu. Tento vliv bude zohledněn při konstrukci modelu. Bohužel nejsou k dispozici historické údaje o podporách prodeje. I z tohoto důvodu vznikl nápad na pokus využít metodologii Boxe a Jenkinsové, (Box, Jenkins, 1970) bez podpůrných exogenních vysvětlujících proměnných (vyjma počtu pracovních dnů, které ale slouží pouze k transformaci vstupních dat – tato informace je totiž obecně vždy dostupná).

K predikci byla vybrána skupina výrobků, jež bude nadále v textu z důvodu ochrany poskytovatele dat označována pouze písmenem G.

3 METODOLOGIE BOXE A JENKINSOVÉ

Klasický dekompoziční přístup k časovým řadám spočívá v jejich rozložení (dekompozici) na trend, cyklickou složku, sezónní složku a reziduální složku, přičemž první tři jmenované složky jsou považovány za deterministické funkce času, zatímco reziduální složka představuje náhodný proces. K určení jednotlivých složek modelu se používá regresní analýza. Předpokladem takového postupu je nejen deterministický charakter systematických složek modelu, ale i nekorelovanost jednotlivých pozorování v časové řadě.

Oproti tomu Box a Jenkinsová (Box, Jenkins, 1970) přišli s postupem, který je založen právě na korelační analýze a umožňuje pracovat i se stochastickým trendem či stochastickou sezónní složkou. Použití Boxovy-Jenkinsové metodologie v praxi vyžaduje obvykle počítač s adekvátním softwarovým vybavením a alespoň 50 pozorování časové řady. Také interpretace výsledků odvozených na základě Boxovy-Jenkinsové metodologie je obtížnější, než v případě klasické regresní analýzy, jelikož se v podstatě jedná o modelování kombinace náhodných šoků.

Východiskem pro modely podle Boxovy-Jenkinsové metodologie je lineární proces ve tvaru

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \quad (3.1)$$

kde ε_t je řada nekorelovaných náhodných veličin stejného pravděpodobnostního rozdělení s nulovou střední hodnotou a konstantním konečným nenulovým rozptylem (tzv. bílý šum).

Ke zjednodušení zápisu dynamických modelů se používá lineární operátor časového zpoždění B , pro nějž platí

$$By_t = y_{t-1}, \quad (3.2)$$

$$B^j y_t = y_{t-j}, \quad (3.3)$$

$$\Delta y_t = (1 - B)y_t, \quad (3.4)$$

$$\Delta^d y_t = (1 - B)^d y_t. \quad (3.5)$$

Rovnici (3.1) lze potom s využitím (3.2) až (3.5) přepsat do tvaru

$$y_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t. \quad (3.6)$$

Podmínkou stacionarity procesu (3.6) je konvergence mocninné řady $\psi(z)$ pro $|z| \leq 1$, tj. platí-li $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Za předpokladu invertibility lze (3.6) přepsat do tvaru

$$\varepsilon_t = y_t - \pi_1 y_{t-1} - \pi_2 y_{t-2} - \dots = \pi(B) y_t, \quad (3.7)$$

příčemž podmínkou invertibility procesu je konvergence mocninné řady $\pi(z)$ pro $|z| \leq 1$.

3.1 Autoregresní proces AR(p)

Autoregresním procesem řádu p se označuje proces

$$\varepsilon_t = y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \dots - \varphi_p y_{t-p} = \varphi(B) y_t, \quad (3.8)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ jsou parametry a $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ je autoregresní operátor. Proces AR(p) je stacionární, jestliže pro všechny kořeny z_1, \dots, z_p polynomu $\varphi(z)$ platí $|z_1|, \dots, |z_p| > 1$, tj. že leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Proces AR(p) je vždy invertibilní, viz např. (Cipra, 2008).

3.2 Proces klouzavých průměrů MA(q)

Procesem klouzavých průměrů (někdy též uváděným jako proces klouzavých součtů) řádu q se označuje proces ve tvaru

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B) \varepsilon_t, \quad (3.9)$$

kde $\theta_1, \dots, \theta_q$ jsou parametry a $\theta(B) = 1 + \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ je operátor klouzavých průměrů.

Proces MA(q) je vždy stacionární. Podmínkou invertibility procesu MA(q) je, aby pro všechny kořeny z_1, \dots, z_q polynomu $\theta(z)$ platilo $|z_1|, \dots, |z_q| > 1$, tj. že leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině.

3.3 Smíšený proces ARMA(p, q) a ARIMA(p, d, q)

Kombinací procesů AR(p) a MA(q) vzniká smíšený proces ARMA(p, q)

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.10)$$

který lze s pomocí (3.2) až (3.5) jednodušeji zapsat jako

$$\varphi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t, \quad (3.11)$$

přičemž podmínky stacionarity procesu AR(p) a invertibility procesu MA(q) zůstávají zachovány. Obsahuje-li model ARMA(p, q) stochastický trend, který lze z modelu odstranit diferencováním, jedná se o integrovaný smíšený proces ARIMA(p, d, q)

$$\varphi(B)(1-B)^d y_t = \theta(B) \varepsilon_t, \quad (3.12)$$

kde d značí řád diferencování původní časové řady.

3.4 Sezónní proces SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Podobně jako stochastický trend lze pomocí Boxovy-Jenkinsové metodologie modelovat také stochastickou sezónnost. Model (3.12) se pouze modifikuje na proces SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ ve tvaru

$$\varphi(B)(1-B)^d \Phi(B^s) (1-B^s)^D y_t = \theta(B) \Theta(B^s) \varepsilon_t, \quad (3.13)$$

kde s značí sezónní faktor (např. pro čtvrtletní sezónnost je $s = 4$), P označuje řád sezónního autoregresního procesu, Q je řádem sezónního procesu klouzavých průměrů a D značí řád sezónní integrace časové řady, více viz (Arlt, Arltová, 2009).

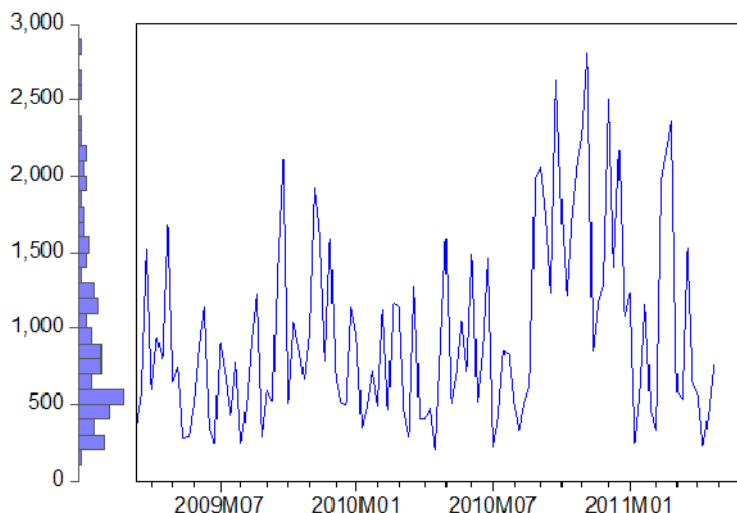
4 VÝSTAVBA A DIAGNOSTIKA MODELU

K dispozici je časová řada 111 týdenních pozorování prodejů skupiny výrobků G, konkrétně za období 2009W1–2011W17. Před vlastní konstrukcí předpovědního modelu je třeba časovou řadu očistit od vlivu počtu pracovních dnů, čehož lze snadno docílit vydělením původních hodnot řady počtem pracovních dnů připadajících na příslušný týden. Nově vypočtené hodnoty tak v podstatě udávají průměrný denní prodej daného týdne (obr. 4.1).

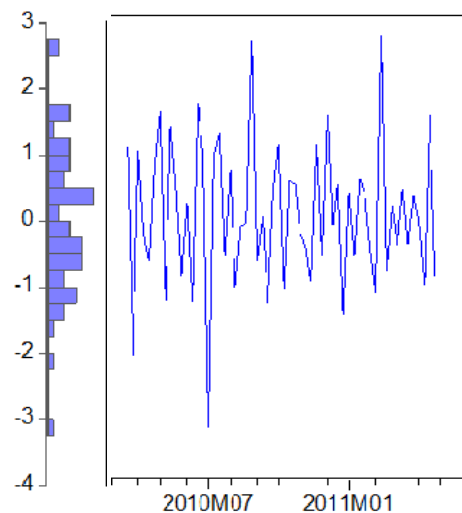
Z obrázku je patrný značný rozptyl i vychýlení hodnot časové řady. Podle rozšířeného Dickeyova-Fullerova testu je řada stacionární na hladině významnosti 1 %, nicméně opačně konstruovaný KPSS test zamítá hypotézu o stacionaritě řady od hladiny významnosti 5 %. Proto není možné považovat testování na stacionaritu řady za jednoznačně průkazné. Vzhledem k předpokládané sezónnosti a vizuálnímu zhodnocení průběhu několika možných transformací původní řady se subjektivně jeví jako nejvhodnější transformovat řadu prodejů FMCG pomocí přirozeného logaritmu s následnou první diferencí a první sezónní diferencí

(viz obr. 4.2). Podle předchozího se tedy bude obecně jednat o model $SARIMA(p, 1, q) \times (P, 1, Q)_{52}$ aplikovaný na přirozený logaritmus původní řady.

Obr. 4.1. Prodeje G očištěné o počet pracovních dnů v týdnu



Obr. 4.2. První diference a sezónní diference přirozeného logaritmu očištěné řady G



Podle exponenciálně klesajícího průběhu parciální autokorelační funkce a strmému poklesu autokorelační funkce transformované řady (tab. 4.1) je možné identifikovat proces $MA(2)$, tedy model ve tvaru $SARIMA(0, 1, 2) \times (0, 1, 0)_{52}$, viz tab. 4.2. Nicméně komplikovanost sezónních ARIMA modelů spočívá i v tom, že k problematice nelze přistupovat pouze na základě zobrazených korelačních struktur. Je třeba zkoumat více modelů i s ohledem na zkušenost a intuici analytika a podle dosažených hodnot vybraných informačních kritérií posléze vybrat ten nejvhodnější.

Na základě t -statistik z tab. 4.2 je zřejmé, že řád klouzavých průměrů modelu $SARIMA(0, 1, 2) \times (0, 1, 0)_{52}$ lze snížit ze dvou na jedna. Dále je patrné, že spočtený model vysvětluje průběh časové řady prodeje pouze ze 44 % a hodnoty informačních kritérií se pohybují okolo 2,5.

Tab. 4.1. Autokorelace a parciální autokorelace modifikované řady G

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.445	-0.445	12.107	0.001
2	-0.072	-0.337	12.427	0.002
3	0.018	-0.246	12.447	0.006
4	-0.023	-0.233	12.481	0.014
5	0.004	-0.214	12.483	0.029
6	0.123	-0.006	13.489	0.036
7	-0.161	-0.142	15.262	0.033
8	0.030	-0.142	15.326	0.053
9	0.054	-0.080	15.530	0.077
10	-0.052	-0.122	15.727	0.108
11	0.055	-0.055	15.951	0.143
12	0.014	-0.001	15.967	0.193
13	-0.235	-0.318	20.232	0.090
14	0.320	0.003	28.341	0.013
15	-0.096	-0.017	29.083	0.016

Tab. 4.2. SARIMA(0, 1, 2)×(0, 1, 0)₅₂

Dependent Variable: DLOG(G/WD,1,52)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 3/22/2010 4/25/2011
Included observations: 58 after adjustments
Convergence achieved after 84 iterations
MA Backcast: 3/08/2010 3/15/2010

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.907010	0.133730	-6.782406	0.0000
MA(2)	-0.063534	0.134709	-0.471640	0.6390
R-squared	0.453273	Mean dependent var		0.001138
Adjusted R-squared	0.443510	S.D. dependent var		1.109354
S.E. of regression	0.827559	Akaike info criterion		2.493201
Sum squared resid	38.35181	Schwarz criterion		2.564251
Log likelihood	-70.30284	Hannan-Quinn criter.		2.520877
Durbin-Watson stat	1.969756			
Inverted MA Roots	.97	-.07		

Po prozkoumání řady dalších variant modelů vychází ze srovnání jako nejvhodnější pro modelování sledované časové řady překvapivě proces SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1)₅₂, tedy model známý v praxi pod anglickým názvem *Airline model*, viz také (Cipra, 2008, str. 365).

Jednotlivé části modelu vychází podle *t*-testů v tab. 4.3 jako statisticky významné, hodnoty dvou ze tří informačních kritérií klesly pod 0,2 a schopnost modelu popsat průběh dosavadní časové řady značně vzrostla na téměř 95 %. Model obsahuje pouze klouzavé průměry, a je tedy podle předchozího stacionární. Všechny polynomiální kořeny leží vně jednotkového kruhu, proces tak splňuje i podmínku invertibility.

Tab. 4.3. Airline model, SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1)₅₂

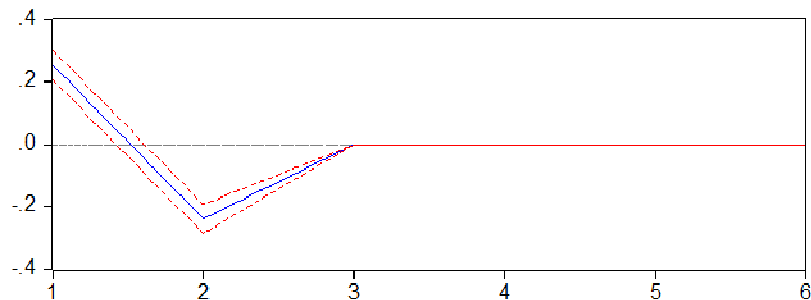
Dependent Variable: DLOG(G/WD,1,52)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3/22/2010 4/25/2011
 Included observations: 58 after adjustments
 Convergence achieved after 14 iterations
 MA Backcast: 3/16/2009 3/15/2010

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.932164	0.026480	-35.20313	0.0000
SMA(52)	0.877368	0.020797	42.18625	0.0000
R-squared	0.948040	Mean dependent var		0.001138
Adjusted R-squared	0.947113	S.D. dependent var		1.109354
S.E. of regression	0.255121	Akaike info criterion		0.139715
Sum squared resid	3.644852	Schwarz criterion		0.210765
Log likelihood	-2.051746	Hannan-Quinn criter.		0.167391
Durbin-Watson stat	1.859447			

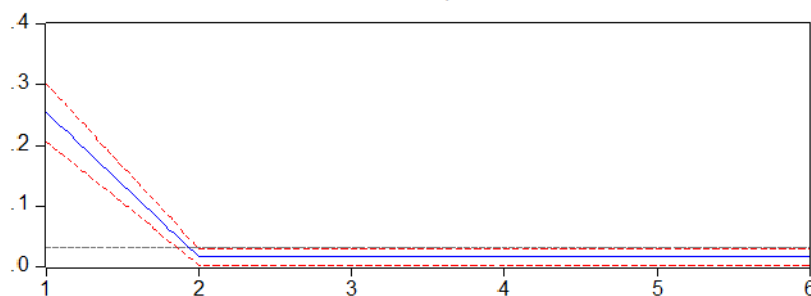
4.1 Diagnostika modelu SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1)₅₂

Kromě předchozí kontroly stacionarity modelu lze zkoumat i jeho funkci odezvy na jednotkový impuls ve výši dvojnásobku vypočtené směrodatné odchylky, viz např. (Hušek, 2009). Na obrázku 4.3 lze pozorovat velice rychlé odeznění šoku a stabilizaci řady na nulové úrovni v případě jednotkového impulsu a stabilizaci na nenulové úrovni v případě kumulovaného jednotkového impulsu (tj. šoku trvajícím delší období).

Obr. 4.3a. Jednotková odezva na impuls ve výši dvojnásobku směrodatné odchylky bílého šumu

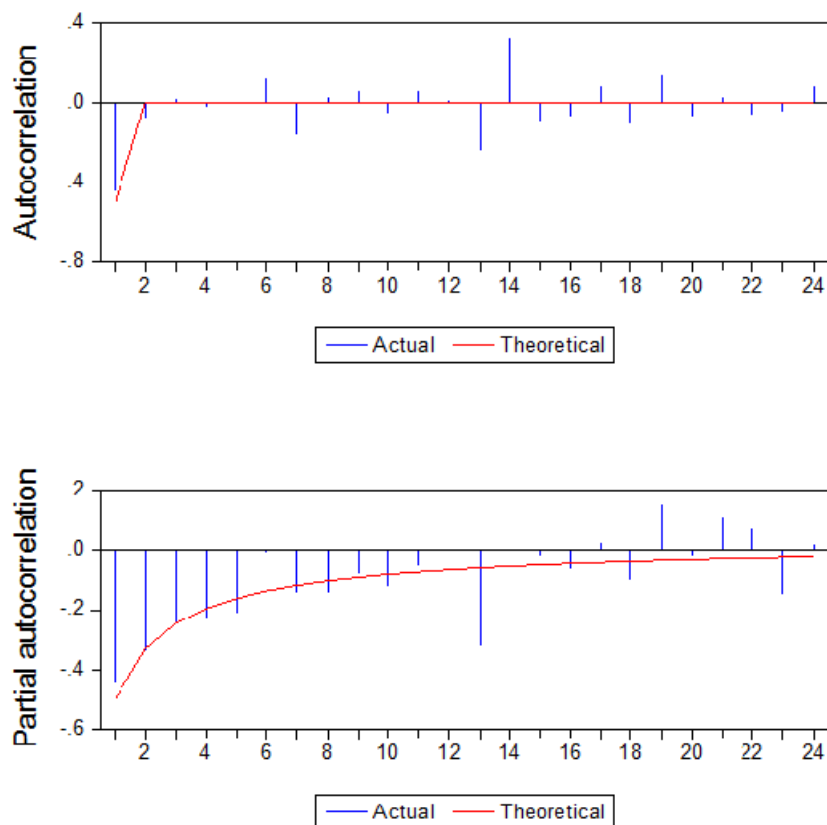


Obr. 4.3b. Kumulovaná jednotková odezva na impuls ve výši dvojnásobku sm. odchylky bílého šumu



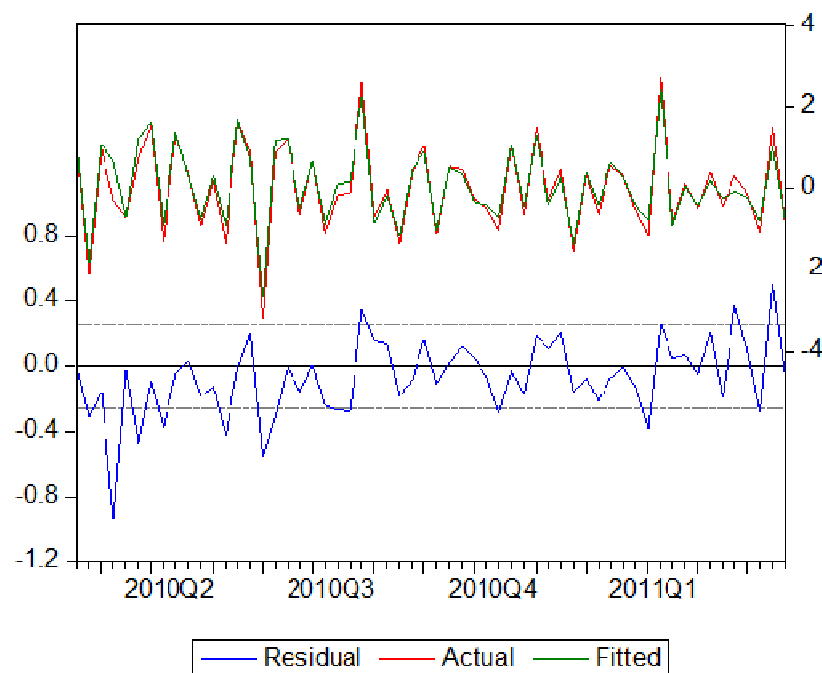
Průběhy teoretické a skutečné autokorelační a parciální autokorelační funkce (obr. 4.4) si až na řídké výjimky rovněž přibližně odpovídají. I z tohoto pohledu se tedy aplikovaný model jeví jako vhodný k popisu zkoumané časové řady prodeje G.

Obr. 4.4. Skutečný a teoretický průběh autokorelační a parciální autokorelační funkce modelu SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1)₅₂



Před testováním nekorelovanosti, normality a dalších předpokládaných vlastností bílého šumu je dobré si graficky zobrazit odchylky skutečných od vyrovnaných hodnot. Podle obr. 4.5 se zdá, že residua nejsou zcela zbavena systematické složky a obsahují pravděpodobně nelineárně rostoucí trend. Tento jev lze (po prozkoumání několika tvarů možného deterministického trendu) odstranit přidáním kvadratického trendu do původního modelu, čímž zároveň významně klesnou hodnoty testových kritérií a vypovídací schopnost modelu ještě vzroste na více než 95 % (viz tab. 4.4). Předchozí testované vlastnosti modelu zůstávají zachovány, zlepšení průběhu residuí je patrné z obr. 4.6.

Obr. 4.5. Skutečný a teoretický průběh časové řady a průběh residuí modelu SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1)₅₂

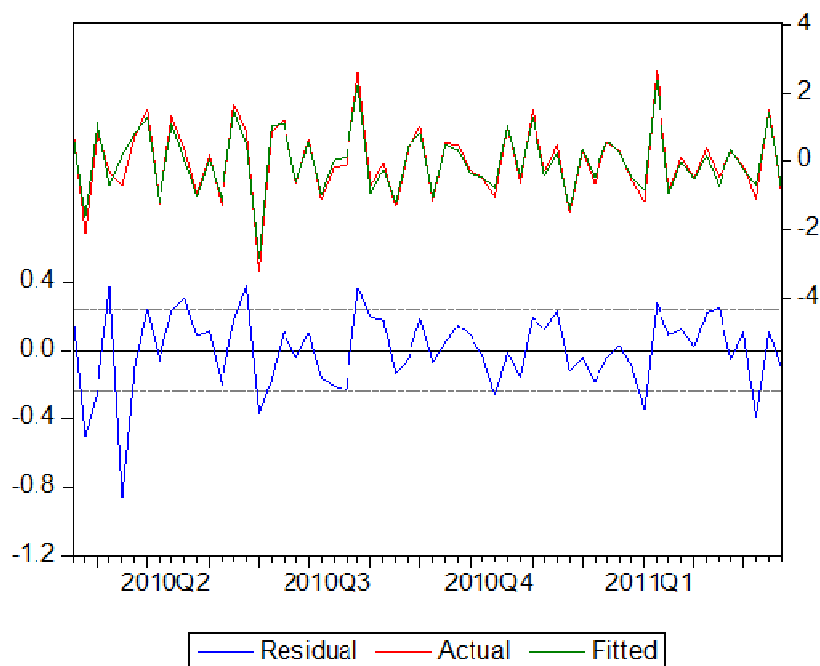


Tab. 4.4. Airline model s kvadratickým trendem

Dependent Variable: DLOG(G/WD,1,52)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 3/22/2010 4/25/2011
 Included observations: 58 after adjustments
 Convergence achieved after 17 iterations
 MA Backcast: 3/16/2009 3/15/2010

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
T	0.002065	0.000672	3.073960	0.0033
T^2	-2.38E-05	7.23E-06	-3.291068	0.0018
MA(1)	-0.986148	0.084358	-11.69008	0.0000
SMA(52)	-0.877798	3.30E-06	-265729.7	0.0000
R-squared	0.955651	Mean dependent var		0.001138
Adjusted R-squared	0.953187	S.D. dependent var		1.109354
S.E. of regression	0.240023	Akaike info criterion		0.050309
Sum squared resid	3.110998	Schwarz criterion		0.192408
Log likelihood	2.541048	Hannan-Quinn criter.		0.105659
Durbin-Watson stat	2.211045			

Obr. 4.6. Skutečný a teoretický průběh časové řady a průběh residuí *Airline* modelu s kvadr. trendem



Od spočteného bílého šumu se očekává, že bude mít normální rozdělení, čehož bylo dle testu Jarqueho-Bery (Jarque, Bera, 1980, str. 255–259) dosaženo. Nesystematická složka by také měla být nekorelovaná, proto se provádí testování její autokorelace. Vhodným nástrojem k tomu určeným je např. Ljungova-Boxova Q -statistika, viz (Arlt, Arltová, 2009), jejíž hodnoty včetně příslušných p -hodnot jsou pro několik prvních autokorelací zobrazeny v tab. 4.5. Podle jednotlivých Q -statistik nelze na hladině významnosti 5 % zamítnout nulovou hypotézu o nekorelovanosti bílého šumu.

Tab. 4.5. Odhadnuté autokorelace vypočteného bílého šumu a Ljungovy-Boxovy Q -statistiky k *Airline* modelu s kvadratickým trendem

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.116	-0.116	0.8173	
2	-0.121	-0.137	1.7347	
3	0.140	0.112	2.9809	0.084
4	-0.148	-0.140	4.4000	0.111
5	-0.051	-0.054	4.5715	0.206
6	-0.023	-0.091	4.6066	0.330
7	-0.152	-0.155	6.1734	0.290
8	-0.033	-0.102	6.2510	0.396
9	-0.076	-0.155	6.6575	0.465
10	-0.072	-0.132	7.0282	0.534
11	0.154	0.052	8.7786	0.458
12	-0.084	-0.132	9.3126	0.503
13	-0.086	-0.162	9.8871	0.541
14	0.240	0.084	14.442	0.273
15	0.013	0.014	14.456	0.343

Pro předpovědi prodejů skupiny produktů G byl tedy jako nejvhodnější navržen a úspěšně testován tzv. *Airline model* s kvadratickým deterministickým trendem ve tvaru

$$(1 - B)(1 - B^{52})\ln y_t = t + t^2 + (1 + \theta_1 B)(1 + \Theta_1 B^{52})\varepsilon_t, \quad (4.1)$$

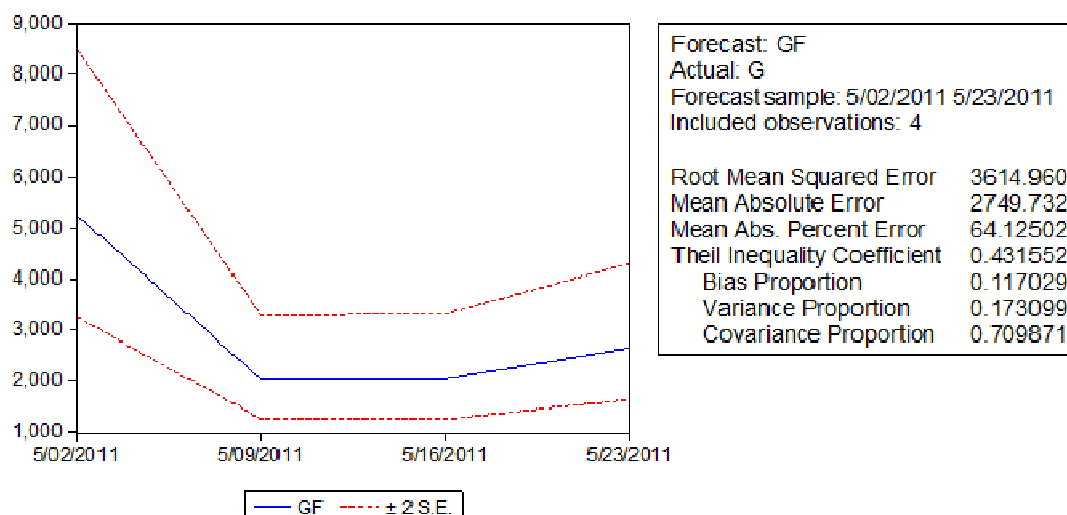
tj. po rozkladu

$$\ln y_t = \ln y_{t-1} + \ln y_{t-52} - \ln y_{t-53} + t + t^2 + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} + \Theta\varepsilon_{t-52} + \theta\Theta\varepsilon_{t-53}. \quad (4.2)$$

4.2 Přesnost předpovědi zkonstruovaného modelu

Na základě vypočteného modelu (4.2) pro 111 týdenních pozorování prodejů skupiny výrobků G byla provedena dynamická předpověď na 4 následující týdny od posledního pozorování. Na obr. 4.7 je znázorněn průběh bodových a intervalových předpovědí. Současně jsou na pravé straně obrázku vypsané charakteristiky hodnotící schopnost modelu předpovídat skutečnost, a to na základě ex post předpovědi (predikovaná data byla v době konstrukce předpovědního modelu známá, ale z výpočtů byla uměle vyřazena).

Obr. 4.7. Bodová a intervalová předpověď průběhu časové řady G pro období 2011W18–2011W21



Z obrázku a z uvedených charakteristik je na první pohled zřejmé, že provedená čtyřtýdenní předpověď příliš úspěšná nebyla. Odmocnina střední čtvercové chyby (*Root Mean Squared Error, RMSE*) i střední absolutní chyba (*Mean Absolute Error, MAE*) jsou vzhledem k dosahovaným hodnotám predikované proměnné relativně vysoké, o čemž svědčí i vysoká hodnota střední absolutní procentní chyby (*Mean Absolute Percentage Error, MAPE*). Více k uvedeným ukazatelům viz (Hušek, 2007, str. 285) nebo (Cipra, 2008, str. 245).

Zajímavým je z hlediska hodnocení přesnosti předpovědi ex post výše uvedený Theilův modifikovaný koeficient nesouladu U (*Theil Inequality Coefficient*) a jeho rozklad na proporce nesouladu.

Tento ukazatel, viz např. (Hušek, 2007, str. 285), nabývá v případě dobré predikční schopnosti modelu hodnoty blízké 0 (hodnota 0 znamená perfektní shodu napozorovaných dat s predikovanými). Naopak, je-li hodnota $U = 1$, jedná se o případ tzv. naivní předpovědi. Všechny hodnoty $U > 1$ jsou znakem horší než naivní předpovědi modelu.

Rozklad Theilova modifikovaného koeficientu nesouladu na složky zkreslení, rozptylu a kovariance, viz (Hušek, 2007, str. 286), umožňuje zjistit, jakou měrou se na celkovém nesouladu předpovědi podílí systematické vychýlení (rozdíl v průměrech skutečných a predikovaných hodnot), systematický rozdíl ve variabilitě (rozdíl mezi standardními odchylkami skutečných a predikovaných hodnot) a nesystematická náhodná chyba, zapříčiněná nedostatečnou korelací skutečných a predikovaných hodnot. Podíly jednotlivých složek nesouladu na celkové střední čtvercové chybě předpovědi (*Mean Squared Error, MSE*) se označují jako proporce nesouladu, konkrétně proporce zkreslení (někdy též vychýlení, *Bias Proportion*), proporce rozptylu (*Variance Proportion*) a proporce kovariance (*Covariance Proportion*).

Podle (Hušek, 2007) je model optimální k predikci v případě, kdy proporce zkreslení a rozptylu jsou rovny nule, zatímco podíl kovariance je roven 1 (kovariance chyby předpovědi se totiž vyskytuje prakticky pokaždé). Autor současně uvádí, že již podíl zkreslení mezi 0,1 až 0,2 značí nutnost modifikovat model za účelem snížení systematického zkreslení.

Z uvedeného je zřejmé, že model předpověděl skutečnost velice nepřesně a současně většina chyby předpovědi (přes 70,9 %) se skrývá v nesystematických, tedy náhodných změnách v chování skutečné řady. To odpovídá realitě, protože, jak bylo zmíněno již v úvodní části práce, odbyt potravinových FMCG je ve specifickém prostředí českého trhu značně ovlivněn zejména aktivitami na podporu prodeje (zejména slevami), jejichž vliv ale (vzhledem k nemožnosti jej v tomto konkrétním případě účinně sledovat a kvantifikovat) nebyl do modelu zahrnut. Navíc předpovědní schopnost modelů vytvořených na základě metodologie Boxe a Jenkinsové je typicky méně vhodná pro dlouhodobé předpovědi (v našem případě zřejmě více než dva týdny) a doporučuje se proto volit kratší horizont.

5 ZÁVĚR

Výsledkem pokusu o sestavení modelu pro předpověď prodeje konkrétní skupiny výrobků typu FMCG pomocí metodologie Boxe a Jenkinsové byl modifikovaný *Airline SARIMA* model, jehož soulad se vstupními daty činil přes 95 %. Ačkoliv šlo o model z hlediska historických hodnot dobře popisující skutečnost, při ověřování na reálných údajích z období předpovědi se ukázalo, že je model pro predikci nevhodný, a to jak kvůli přítomnosti významných nepředvídatelných a do modelu nezahrnutelných vlivů, tak kvůli nevhodnosti metodologie Boxe a Jenkinsové pro predikci delších horizontů (v tomto případě více než přibližně 2 týdny).

Vzhledem k tomu, že podpora prodeje je záležitostí obchodního oddělení a její účinnost (ve smyslu navýšeného množství prodaného zboží v daném týdnu) není zpětně zjistitelná, závisí schopnost předpovědi i při použití matematických metod opět nejvíce na osobních zkušenostech plánovače a jeho komunikaci s odděleními prodeje a marketingu.

Přesto mohou být předpovědi získané z vypočteného modelu užitečné. Při dostatečně dobrém odhadu tzv. upliftu (tj. zboží prodaného navíc díky podpoře prodeje) pro konkrétní budoucí týden by byl možná příslušný plánovač nakonec schopen na základě modelem odhadnutých prodejů dospět blíže ke skutečným hodnotám, než bez této opory.

Použitá literatura

Arlt, J., Arltová, M. 2009. Ekonomické časové řady. Praha : Professional Publishing, 2009.
ISBN: 978-80-86946-85-6.

Box, G., Jenkins, G. 1970. Time Series Analysis, Forecasting and Control.
San Francisco : Holden-Day, 1970.

- Cipra, T. 2008.** Finanční ekonometrie. Praha : Ekopress, s. r. o., 2008.
ISBN: 978-80-86929-43-9.
- Hušek, R. 2009.** Aplikovaná ekonometrie, Teorie a praxe. Praha : VŠE, Oeconomica, 2009.
ISBN: 978-80-245-1623-3.
- Hušek, R. 2007.** Ekonometrická analýza. Praha : VŠE, Oeconomica, 2007.
ISBN: 978-80-245-1300-3.
- Jarque, C. – Bera, A. (1980)** Efficient Tests for Normality, Heteroskedasticity, and Serial Independence of Regression Residuals, *Economics Letters*, 6

Kontaktní údaje

Ing. Dalibor Nečas

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4,

130 67 Praha 3

email: dalibor.necas@vse.cz

Článek vznikl s podporou projektu IGA Vysoké školy ekonomické v Praze s číslem F4/18/2011 „Efektivita a optimalita v ekonomickém rozhodování“.

This paper is supported by the IGA project of the University of Economics Prague – project no. F4/18/2011 "Efficiency and optimality in economic decision making: modeling approach".

POUŽITIE ECM MODELU NA KRÁTKODOBÚ PROGNÓZU HDP SLOVENSKEJ REPUBLIKY

SHORTTERM FORECASTING OF GDP OF THE SLOVAK REPUBLIC USING ECM MODEL

Silvia Pastoreková, Ivan Lichner

Abstrakt

Hrubý domáci produkt je makroekonomický ukazovateľ, ktorým meriame ekonomickú výkonnosť národného hospodárstva. Z hľadiska tvorby hospodárskej politiky je dôležité poznať jeho vývoj, tak v minulých obdobiach ako aj predpokladaný vývoj do budúcnosti. Úlohou analytikov je preto nájsť vhodný model na odhad vývoja HDP a jeho použitie pre následnú prognózu v budúcom období.

Cieľom tohto príspevku je vytvoriť makroekonomický model, ktorý je založený na metodológii modelov s korekčným členom (ECM) a určenie prognózy vývoja hrubého domáceho produktu na obdobie tretieho štvrťroka 2011 až druhého štvrťroka 2012.

***Kľúčové slová:** hrubý domáci produkt, ECM, kointegrácia, prognóza*

Abstract

Gross domestic product (GDP) is macroeconomic indicator, which is used to measure economic performance of national economy. For policymakers is important to understand the development of GDP, not only from historical point of view, but also to forecast its future growth. Analysts are trying to find suitable approach for modeling the development of GDP and consecutive forecasting.

The aim of this paper is to create a macroeconomic model of gross domestic product which is methodologically based on the principles of error-correction models (ECM) and to forecast the development of GDP for the period of 2011Q3 – 2012Q2.

***Key words:** gross domestic product, ECM, cointegration, forecasting*

ÚVOD

Ani nie dva roky po skončení globálnej finančnej a ekonomickej krízy v rokoch 2008-2009 sa Európa v súčasnosti nachádza vo veľmi vážnej dlhovej kríze s viacerými krajinami neschopnými splácať svoje záväzky a štátnymi dlhmi dosahujúcimi rekordné úrovne. Prognózovanie budúceho stavu ekonomiky SR bude teda výrazne ovplyvnené týmto vývojom. V súčasnosti sa nachádzame v období, kedy vo vyspelých krajinách nie je možné robiť dôležité ekonomické rozhodnutia bez dôkladnej analýzy vývoja základných ukazovateľov. Stále väčší dôraz sa kladie na konštrukciu štatisticko-ekonometrických modelov charakterizujúcich základné rysy vývoja celého národného hospodárstva.

Medzi najčastejšie diskutované témy vo svete ekonómov, ale aj politikov a širokej verejnosti patrí ekonomický rast krajiny. Poznanie jeho vývoja v budúcnosti je dôležité na zvolenie správnych opatrení štátu na podporu a rast domácej ekonomiky.

Cieľom tohto príspevku je vytvoriť makroekonomický model, ktorý je z metodologického hľadiska založený na princípe modelu s korekčným členom (ECM) a vytvoriť krátkodobú

prognózu vývoja hrubého domáceho produktu (HDP) na obdobie tretieho štvrťroka 2011 až druhého štvrťroka 2012.

ECM patrí v súčasnej dobe medzi často používané modelové prístupy. Metodológia ECM navrhnutá Englom a Grangerom¹ je založená na kombinácii štatistického a ekonometrického prístupu. Jej atraktivnosť spočíva vo fakte, že na rozdiel od klasických ekonometrických modelov dokáže vyjadriť oddelene krátkodobé aj dlhodobé vplyvy vysvetľujúcich premenných na vývoj vysvetľovanej premennej. Ako vysvetľujúce premenné vývoja HDP (v mil. Eur b.c.) použijeme v modeli mieru zamestnanosti (v %) a spotrebu domácností (v mil. Eur b.c.). Časové rady premenných sú za obdobie prvého štvrťroka 1996 až druhého štvrťroka 2011. Zdrojom údajov je databáza Štatistického úradu SR.

1 ECM MODEL PRE HRUBÝ DOMÁCI PRODUKT

Pri odhade modelu s korekčným členom pre HDP (v mil. Eur b.c.) predpokladáme, že tento je z dlhodobého hľadiska ovplyvnený mierou zamestnanosti (E, v %) a spotrebou domácností (C, v mil. Eur b.c.) Najprv sme jednotlivé uvažované premenné testovali na prítomnosť jednotkového koreňa pomocou rozšíreného Dickey a Fullerovho testu (ADF)². Testy boli vykonané pre premenné v základnom tvare aj pre prvé diferencie a uvažovali sme s konštantou aj trendom. Na 5 % hladine významnosti sme nezamietli nulovú hypotézu o jednotkovom koreni pre pôvodné premenné, avšak pre diferencované premenné sme túto hypotézu zamietli, t. j. každá uvažovaná premenná je integrovaná stupňa jeden.

Na odhad ECM modelu HDP použijeme dvojkrovú metódu Engla a Grangera. Prvým krokom metódy je analýza kointegrácie prostredníctvom overenia stacionarity rezíduí z dlhobovej (kointegračnej) rovnice. Použijeme zlogaritmované premenné kvôli odstráneniu nestacionarity vo variabilite. Odhadnutú kointegračnú rovnicu môžeme zapísať nasledovne, pričom hodnoty v zátvorkách pod rovnicou sú p-hodnoty koeficientov odhadnutého modelu:

$$\ln HDP_t = -0,9331 + 0,5129 \ln E_t + 0,9422 \ln C_t \quad (1)$$

(0,0517) (0,0000) (0,0000)

Všetky vysvetľujúce premenné odhadnutého dlhodobého modelu sú štatisticky významné na 5 % hladine významnosti a model vysvetľuje 99,36 % variability vysvetľujúcej premennej. Hrubý domáci produkt je z dlhodobého hľadiska determinovaný spotrebou domácností s elasticitou 0,94 a mierou zamestnanosti s elasticitou 0,51. Rezíduá získané z tejto dlhobovej rovnice sú stacionárne, a keďže premenné sú integrované rovnakého stupňa, znamená to podľa metodológie Engla a Grangera, že medzi premennými domáci dopyt a HDP na obyvateľa a priemernou nominálnou mesačnou mzdou je dlhodobý (kointegračný) vzťah. Určený kointegračný vektor je [1 0,933175 -0,512972 -0,942222].

V druhom kroku metódy Englea a Grangera použijeme kointegračný vektor a hodnoty rezíduálov z kointegračnej rovnice oneskorené o jedno obdobie (štvrťrok) na odhad najvhodnejšieho tvaru modelu s korekčným členom metódou najmenších štvorcov. Výsledný ECM model má tvar:

$$\Delta \ln HDP_t = 2,0629 \Delta \ln E_t + 1,0780 \Delta \ln C_t - 0,9040 (\ln HDP_{t-1} + 0,9331 - 0,5129 \ln E_{t-1} - 0,9422 \ln C_{t-1}) \quad (2)$$

¹ ENGLE, R. F.; GRANGER, C. W. J. 1987. Co-integration and error correction representation, estimation and testing. *Econometrica*. 1987, vol. 55, no. 2, p. 251 – 276.

² DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. 1981. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*. 1981, vol. 49, no. 4, p. 1057 – 1072.

Z krátkodobého hľadiska je domáci dopyt ovplyvnený mierou zamestnanosti s elasticitou 2,0629 a spotrebou domácností s multiplikátorom 1,078. Parameter pred členom korigujúcim chybu je záporný, čo znamená, že je splnený predpoklad o jeho znamienku a korekčný mechanizmus funguje. Koefficient krátkodobého prispôsobenia je $\gamma = -0,9040$, čo znamená rýchlu konvergenciu k dlhodobej rovnováhe, pretože každý štvrťrok sa odklon od dlhodobej rovnováhy upraví o 90,40 % smerom k rovnováhe, hore či dole.

Všetky parametre odhadnutého modelu s korekčným členom a model ako celok sú štatisticky významné na všetkých štandardne uvažovaných hladinách významnosti. Model vysvetľuje variabilitu hodnôt absolútnych prírastkov HDP na 85,95 %. Reziduá sú nezávislé čo potvrdzuje graf autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie rezíduí (obr. 1).

Sample: 1996Q2 2011Q2 Included observations: 61		AC	PAC	Q-Stat	Prob
Autocorrelation	Partial Correlation	1 -0.056	-0.056	0.2017	0.653
		2 -0.127	-0.130	1.2510	0.535
		3 -0.008	-0.024	1.2556	0.740
		4 -0.032	-0.052	1.3242	0.857
		5 -0.036	-0.047	1.4120	0.923
		6 0.144	0.130	2.8530	0.827
		7 -0.124	-0.123	3.9465	0.786
		8 0.056	0.080	4.1770	0.841
		9 -0.048	-0.077	4.3445	0.887
		10 -0.026	-0.010	4.3973	0.928
		11 0.033	0.021	4.4818	0.954
		12 0.151	0.129	6.2729	0.902
		13 -0.014	0.043	6.2878	0.935
		14 -0.021	-0.021	6.3254	0.958
		15 -0.053	-0.015	6.5617	0.969
		16 -0.048	-0.067	6.7603	0.978
		17 0.129	0.136	8.2183	0.962
		18 0.027	-0.013	8.2839	0.974
		19 -0.043	0.018	8.4542	0.981
		20 -0.109	-0.134	9.5586	0.975
		21 -0.001	0.011	9.5587	0.984
		22 -0.030	-0.048	9.6485	0.989
		23 0.069	0.022	10.127	0.990
		24 -0.073	-0.087	10.688	0.991
		25 0.004	-0.025	10.690	0.994
		26 0.009	0.035	10.698	0.996
		27 -0.013	-0.035	10.716	0.998
		28 -0.037	0.008	10.872	0.998

Obr. 1 Autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcia rezíduí odhadnutého ECM modelu
Zdroj: Vlastné výpočty

2 PROGNOZA VÝVOJA HRUBÉHO DOMÁCEHO PRODUKTU

V tejto časti použijeme odhadnutý model ECM z predchádzajúcej časti na určenie prognózy hrubého domáceho produktu na obdobie 2011Q3 až 2012Q2. Najprv však pred použitím ECM na prognózu potrebujeme poznať vývoj vysvetľujúcich premenných (spotreba domácností a miera zamestnanosti) v nami prognózovanom období. Použijeme na to expertný odhad Výboru pre makroekonomické prognózy Ministerstva financií SR, v ktorom sa predpokladá rast spotreby domácností o 3,7 % a rast miery zamestnanosti o 1,5 %

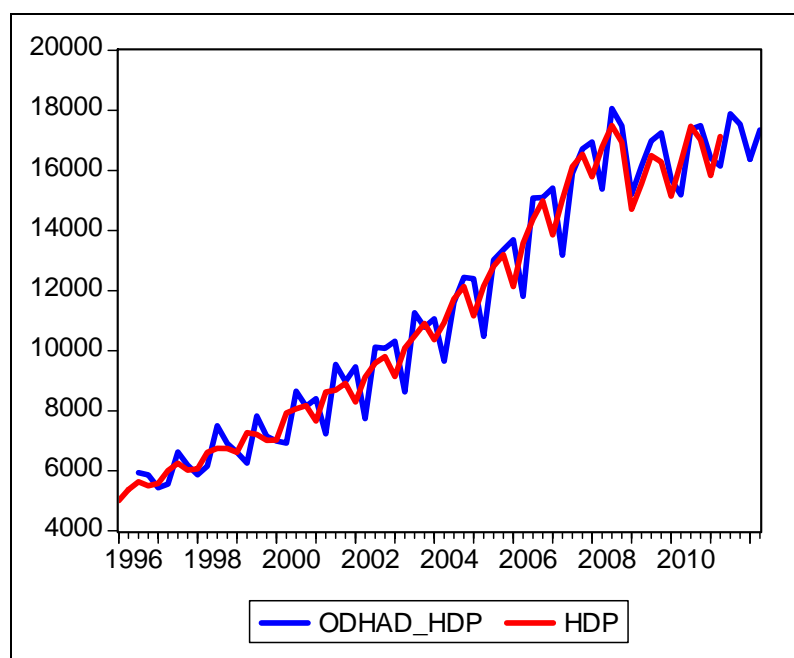
Prognóza HDP je v tabuľke č. 1. Odhadnutý model predpokladá mierny nárast hodnôt hrubého domáceho produktu v prognózovanom období.

Tab. 1 Prognóza hrubého domáceho produktu ECM a medziročná zmena (%)

Obdobie	2011Q3	2011Q4	2012Q1	2012Q2
Medziročná zmena (%)	2,36	3,04	3,39	1,26
HDP	17883,43	17536,65	16369,8	17346,27

Zdroj: Vlastné výpočty

Na obrázku 2 môžeme vidieť skutočné a odhadnuté hodnoty ECM hrubého domáceho produktu spolu s prognózou. Rozdiel medzi skutočnými hodnotami HDP a odhadnutými hodnotami modelom ECM je malý. Priemerne sa za sledované obdobie 1996Q1 až 2011Q2 modelom odhadnuté hodnoty HDP odchyľujú od skutočných hodnôt o $\pm 1024,63$ mil. EUR, t.j. o 7,07 %.



Obr. 2 Skutočné a odhadnuté hodnoty hrubého domáceho produktu modelom ECM a prognóza na obdobie 2011Q3 až 2012Q2

Zdroj: Vlastné výpočty

ZÁVER

Cieľom tohto príspevku bolo aplikovať metodológiu modelu s korekčným členom na určenie determinantov vývoja hrubého domáceho produktu a následné určenie krátkodobej prognózy HDP na obdobie 2011Q3 až 2012Q2. Ako štatisticky významné vysvetľujúce premenné sa ukázali byť miera zamestnanosti a spotreba domácností. Odhadnutý ECM model vysvetľuje variabilitu HDP na 85,95 %. Rezíduá spĺňajú podmienky bieleho šumu. Krátkodobá prognóza naznačuje mierny rast hodnôt HDP v odhadovanom období.

Oznam

Tento článok vznikol v rámci riešenia projektu VEGA číslo 1/0181/10 Hybridné modely prognózovania časových radov.

Literatúra

1. DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. 1993. Estimation and inference in econometrics. In: New York : Oxford University Press, 1993. 875 p. ISBN 0-19-506011-3.
2. DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. 1981. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. In: *Econometrica*. 1981, vol. 49, no. 4, p. 1057 – 1072.
3. ENGLE, R. F.; GRANGER, C. W. J. 1987. Co-integration and error correction representation, estimation and testing. In: *Econometrica*. 1987, vol. 55, no. 2, p. 251 – 276.
4. GREENE, W. H. 2003. *Econometric analysis*. In: Upper Saddle River : Prentice Hall, 2003. 1026 p. ISBN 0-13-066189-9.
5. HATRÁK, M. 1998. Error correction models and cointegration analysis in applied econometrics. In: *CEJORE*. 1998, vol. 6, no. 3-4, p. 183 – 191.
6. HATRÁK, M. 2007. *Ekonometria*. In: Bratislava : IURA EDITION, 2007. 503 p. ISBN 978-80-8078-150-7.

Kontakt

Ing. Silvia Pastoreková

Katedra štatistiky, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava 5
pastorekova.silvia@gmail.com

Ing. Ivan Lichner

Katedra operačného výskumu a ekonometrie, Fakulta hospodárskej informatiky, Ekonomická univerzita v Bratislave
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava 5
ivan.lichner@savba.sk

JOB SHOP ROZVRHOVACÍ PROBLÉM S BLOKOVACÍMI OPERÁCIAMI

JOB-SHOP SCHEDULING WITH BLOCKING CONSTRAINTS

Jana Patakyová, Ivan Brezina ml., Anna Hollá

Abstrakt

Job shop rozvrhovací problém patří do skupiny velmi složitých kombinatorických problémů, t.j. do třídy NP – těžkých úloh. Tento komplexní problém je rozšířením klasického rozvrhovacieho problému bez vyrovnávací paměti, kde spracovávaná úloha má čakať na obslužnom zariadení dovtedy, kým sa ďalšie obslužné zariadenie nevoľní pre túto úlohu. V práci sa zaoberáme zovšeobecnením tohto problému, kde zohľadňuje presun operácií medzi obslužnými zariadeniami a nastaveniami operácií závislých na poradí.

Kľúčové slová: job shop, blokovacie ohraničenia, nastavenie

Abstract

Job shop problem is one of the most difficult combinatorial problems. The blocking job shop problem is strongly NP-hard. The Blocking Job Shop is a version of the job shop scheduling problem with no intermediate buffers, where a job has to wait on a machine until being processed on the next machine. We study a generalization of this problem which takes into account transfer operations between machines and sequence-dependent setup times.

Keywords: job shop, blocking constraints, setup

ÚVOD

Flexibilný job shop rozvrhovací problém (ďalej FGBJS) je rozšírením zovšeobecneného rozvrhovacieho problému (bez flexibility), ktorý bol predstavený v dizertačnej práci¹. Gröflin a Klinkert² v uvedenom diele riešili zovšeobecnený job shop rozvrhovací problém (GBJS) pomocou tabu search algoritmu založeného na susedstve vkladania úloh (job insertion), ktoré umožňuje konzistentne generovať prípustné riešenie a dosiahnuť dobrú kvalitu riešenia.

1 FLEXIBILNÝ ZOVŠEOBECNENÝ JOB SHOP PROBLÉM

Pri FGBJS sú úlohy spracovávané na obslužných zariadeniach. Všetky úlohy a obslužné zariadenia sú dostupné nepretržite od času nula. Medzi obslužnými zariadeniami neexistuje

¹ PHAM D.N., 2008. Complex Job Shop Scheduling: Formulations, Algorithms and a Healthcare Application, Faculty of Economics and Social Sciences, 2008, s. 162

² GRÖFLIN H.– KLINKERT A., 2009. A new neighborhood and tabu search for the Blocking Job Shop. In: *Discrete Applied Mathematics*, roč. 157, 2009, č. 6, s. 3643 – 3655.

vyrovnávacia pamäť (*buffer*). Každá úloha pozostáva z operácií, ktoré sú spracovávané v určenom poradí. Každá operácia z hocijakej úlohy sa skladá zo 4 po sebe idúcich krokov:

1. *krok prevzatia (take – over step)* t_i s dobou trvania p_i^t , kde úloha je prevzatá z predchádzajúceho obslužného zariadenia,
2. *krok spracovania (processing step)*, kde úloha je spracovaná v nejakom čase a závisí od doby spracovania operácie na obslužnom zariadení, t.j. p_{ik} ($\mu(i) := k$),
3. *krok čakania (waiting step)*, kde úloha čaká nejaký čas na umiestnenie na ďalšom dostupnom obslužnom zariadení, t.j. blokuje súčasné obslužné zariadenie,
4. *krok odovzdania (hand – over step)* h_i s dobou trvania p_i^h , kde úloha je odovzdaná (presunutá) na ďalšie obslužné zariadenie alebo uvoľnená z aktuálneho, ak operácia je posledná z danej úlohy.

Každý krok sa vykonáva vždy v tomto poradí. Každý transfer úlohy krokov prevzatia a kroku odovzdania je synchronizovaný. Tieto dva kroky začínajú a (zvyčajne) končia v rovnakom čase. Každá operácia môže byť spracovávaná na jednom obslužnom zariadení, ktorý sa nachádza v množine obslužných zariadení. Čas spracovania operácie môže byť závislý od priradeného obslužného zariadenia. Na hocijakom obslužnom zariadení môže byť spracovávaná len jedna operácia v rovnakom čase. Dve operácie, ktoré sú spracované za sebou na jednom obslužnom zariadení majú určenú následnosť (*sequence – depends setup*). Okrem tejto podmienky platí pre operácie, že čas nastavenia prvej úlohy slúži na prípravu obslužného zariadenia a čas nastavenia poslednej úlohy na vymazanie obslužného zariadenia po ukončení poslednej operácie spracovanej na obslužnom zariadení. Všetky časy nastavenia pre všetky operácie môžu byť závislé od obslužného zariadenia³.

2 MATEMATICKÁ FORMULÁCIA PROBLÉMU

Nech J je množina n úloh, M množina m obslužných zariadení a $i \in I$ je množina operácií. Ďalej, nech $\mathfrak{S} \subseteq 2^I$ je taká množina úloh, že \mathfrak{S} je podmnožina množiny I , t.j. úloha $J \in \mathfrak{S}$ je množina operácií $\{i : i \in J\}$ a hocijaká operácia $i \in I$ je spracovávaná práve na jednom obslužnom zariadení. Pre hocijakú úlohu J , operácie v úlohe spracovanej v určenom poradí zapíšeme nasledovne $\{J_1, J_2, \dots, J_{|J|}\}$. J_r označuje r -tú operáciu úlohy J . Pre dve po sebe nasledujúce operácie i, j úlohy J platí, že ak $i = J_r$ a $j = J_{r+1}$ pre ľubovoľné r , $1 \leq r < |J|$ potom tieto operácie patria do množiny $(i, j) \in A_J$. Pre každé $(i, j) \in A_J$, ak operácia i predchádza operáciu j , potom operácia i je bezprostredný predchodca operácie j , t.j. $i = JP(j)$ a operácia j je bezprostredný nasledovník operácie i , t.j. $j = JS(i)$.

Každá operácia $i \in I$ je spracovávaná na priradenom jednom obslužnom zariadení a každé obslužné zariadenie môže spracovávať jednu operáciu v čase. Obslužné zariadenie nie je presne určené na spracovanie operácie. Existuje tu možnosť flexibility výberu obslužného zariadenia z podmnožiny alternatívnych obslužných zariadení $M_i \subseteq M$. Nech μ je konečné priradenie, ktoré priraďuje ku každej operácii obslužné zariadenie $k \in M_i$, t.j. $\mu(i) := k$ (patria do množiny I_k).

³ PHAM Dinh Nguyen: Complex Job Shop Scheduling: Formulations, Algorithms and a Healthcare Application

Do úlohy job shop rozvrhovania si zavedieme fiktívne operácie σ a τ s dobou trvania nula, kde σ začiatková operácia s dobou trvania $p_{\sigma ik}^s$ a τ posledná operácia s dobou trvania $p_{i\tau k}^s$ na obslužnom zariadení $k \in M_i$, ktorá nasleduje až po ukončení všetkých operácií v úlohe a nech p_{ijk}^s je nastavenie doby trvania pre dve po sebe idúce operácie $i, j \in I$, ktoré sú spracované na obslužnom zariadení $k \in M_i \cap M_j \neq \emptyset$. Žiadne predbiehanie operácií medzi sebou nie je prípustné. Všetky časy spracovania operácií sú kladné, iné doby trvania nie sú nezáporné. Všetky úlohy a obslužné zariadenia sú nepretržite dostupné v čase nula.

Ak je úloha dokončená na súčasnom obslužnom zariadení a ďalšie obslužné zariadenie je stále obsadené, potom blokovacie konštanty udržiavajú úlohu na súčasnom obslužnom zariadení a blokujú spracovanie inej úlohy dovtedy, kým ďalšie obslužné zariadenie nie je dostupné. Označme x_i^t a x_i^h ako začiatkový a konečný čas operácií $i \in I$ v tomto poradí. Ďalej definujeme priradovacie binárne premenné z_{ik} nasledovne:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ak operácia } i \text{ je priradená k obslužnému zariadeniu } k \in M_i \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

Pre dve operácie $i, j \in I, i < j, M_i \cap M_j \neq \emptyset$, definujeme poradie premenných y_{ij} nasledovne:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ak operácia } i \text{ predchádza operáciu } j \text{ na nejakom } k \in M_i \cap M_j \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$$\min x_\tau \tag{2.01}$$

za podmienok

$$x_i^h - x_i^t - \sum_{k \in M_i} p_{ik} z_{ik} \geq p_i^t \quad \text{pre každé } i = J_1, J \in \mathfrak{J} \tag{2.02}$$

$$x_j^h - x_j^t - (p_j^t + p_{jk}) z_{jk} \geq 0 \quad \text{pre každé } (i, j) \in A_J, J \in \mathfrak{J}, k \in M_j - M_i \tag{2.03}$$

$$x_j^h - x_j^t - p_{jk} z_{jk} - p_j^t (z_{jk} - z_{jk}) - p_{ijk}^s (z_{ik} + z_{jk} - 1) \geq 0 \\ \text{pre každé } (i, j) \in A_J, J \in \mathfrak{J}, k \in M_j - M_i \tag{2.04}$$

$$x_i^h - x_j^t = 0 \quad \text{pre každé } (i, j) \in A_J, J \in \mathfrak{J} \tag{2.05}$$

$$x_j^t + H(2 - z_{ik} - z_{jk}) + H(1 - y_{ij}) - x_i^h \geq p_i^h + p_{ijk}^s \\ \text{pre každé } (i, j) \in I, i < j, (i, j) \neq A_{J \in \mathfrak{J}}, k \in M_i \cap M_j \neq \emptyset \tag{2.06}$$

$$x_i^t + H(2 - z_{ik} - z_{jk}) + H y_{ij} - x_j^h \geq p_j^h + p_{ijk}^s \\ \text{pre každé } (i, j) \in I, i < j, (i, j) \neq A_{J \in \mathfrak{J}}, k \in M_i \cap M_j \neq \emptyset \tag{2.07}$$

$$x_i^t \geq \sum_{k \in M_i} p_{\sigma ik}^s z_{ik} \quad \text{pre každé } i \in I \tag{2.08}$$

$$x_\tau - x_i^h \geq p_i^h + \sum_{k \in M_i} p_{i\tau k}^s z_{ik} \quad \text{pre každé } i \in I \tag{2.09}$$

$$\sum_{k \in M_i} z_{ik} = 1 \quad \text{pre každé } i \in I \tag{2.10}$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \text{pre každé } i \in I, k \in M_i \tag{2.11}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pre každé } (i,j) \in I, i < j, M_i \cap M_j \neq \emptyset \quad (2.12)$$

$$x_i^t, x_i^h, x_\tau \geq 0 \quad \text{pre každé } i \in I \quad (2.13)$$

Účelová funkcia (2.01) má za úlohu minimalizovať čas dokončenia operácií (makespan) Precedenčné ohraničenie (2.02) zabezpečuje pre každú operáciu i (začiatková operácia úlohy), že po vykonaní krokov prevzatia a spracovania operácie môže nasledovať krok odovzdania operácie na ďalšie obslužné zariadenie. Ohraničenie (2.03) vyjadruje, že ak operácia i je spracovávaná na obslužnom zariadení k a táto operácia je bezprostredný predchodca operácie j ($i = JP(j)$), ktorá nie je spracovávaná na obslužnom zariadení k , potom platí $x_j^h - x_j^t \geq p_j^t + p_{jk}$. Ak obe operácie i a j sú spracované na tom istom obslužnom zariadení k (ohraničenie (2.04)), potom čas spracovania operácie je $(p_{ik} + p_{ijk}^s + p_{jk})^4$ a platí $x_j^h - x_j^t \geq p_{ijk}^s + p_{jk}^5$. Ohraničenie synchronizácie (zhody) (2.05) zaisťuje, že krok odovzdania operácie i je zhodný s krokom prevzatia bezprostrednej nasledujúcej operácie j ($j = JS(i)$) danej úlohy. Ohraničenia (2.06) a (2.07) sú disjunktné ohraničenia zabezpečujúce, že operácie i a j sú spracované na obslužnom zariadení k . Ak operácia i predchádza operáciu j , potom platí $x_j^t - x_i^h \geq p_i^h + p_{ijk}^s$ alebo ak operácia j predchádza operáciu i , potom $x_i^t - x_j^h \geq p_i^h + p_{ijk}^s$, kde p_i^h je čas odovzdania operácie $i \in I$. Čas ukončenia operácie $i \in I$ spracovanej na obslužnom zariadení nemusí byť kvôli možnému blokovaniu vždy rovnaký. Čas dokončenia operácie $i, j \in I$, ak operácia opustí obslužné zariadenie je definovaný nasledovne $C_i = x_i^t + p_i^t + p_{ik}z_{ik}$. Predpokladajme, že na obslužnom zariadení k sú spracované tri operácie $u, v, w \in I$ v tomto poradí, potom platí $p_{uvk}^s + p_{vk} + p_{vwk}^s \geq p_{uvw}^s$. Tento predpoklad je splnený, ak platí pre nastavenie času operácií nerovnosť $p_{uvk}^s + p_{vwk}^s \geq p_{uvw}^s$. Ak v je prvá operácia spracovávaná v poradí na obslužnom zariadení k , potom platí nerovnosť $p_{ovk}^s + p_{vwk}^s \geq p_{ovk}^s$. Podobne, ak v je posledná operácia v poradí spracovávaná na obslužnom zariadení k , potom platí $p_{uvk}^s + p_{vzk}^s \geq p_{uzk}^s$. Ohraničenia (2.08) a (2.09) zohľadňujú začiatkový a konečný čas operácie v každom poradí. Priradovacie ohraničenia (2.10) požadujú, že práve jedno obslužné zariadenie je priradené ku každej operácii. Ohraničenia (2.11) až (2.14) popisujú obor rozhodovacích premenných.

3 POPIS ALGORITMU

Použitý algoritmus riešenia FGJSP je metaheuristika, ktorá využíva lokálne prehľadávanie⁶ s tabu zoznamom. Je schopná vyhnúť sa lokálnym extrémom a tak ju radíme medzi pokročilé metaheuristické metódy. Jej základným rozdielom oproti metóde lokálneho prehľadávania je existencia zoznamu zakázaných prechodov, takzvaného tabu listu, v ktorom sú uchovávané už použité riešenia. Tieto riešenia neberieme do úvahy pri výbere najlepšieho suseda. Kvôli

⁴ kde p_{ik} je čas spracovania operácie $i \in I$ na obslužnom zariadení $k \in M_i$ a p_{ijk}^s je čas medzi operáciami $i, j \in I$ spracovaných na obslužnom zariadení.

⁵ kde x_j^t je začiatkový čas kroku prevzatia t_j operácie $j \in I$ a x_i^h je začiatkový čas kroku odovzdania h_i operácie $i \in I$.

⁶ Lokálne prehľadávanie je iteratívny proces, ktorý postupuje od jedného riešenia k ďalšiemu dovtedy, kým nie je splnená podmienka.

pamäťovej náročnosti nie je možné uchovať všetky použité riešenia – uchovávané je iba niekoľko posledných. Množstvo uchovaných riešení je kompromisom medzi pamäťovou náročnosťou a potrebou zabrániť zacykleniu, pretože tabu zoznamom je zabránené iba kratším zacykleniam ako je dĺžka tabu zoznamu. Tabu list zabraňuje vzniku cyklu vnútri algoritmu. Nie je možné uchovávať v tabu zoznamoch celé riešenia ale len ich typické vlastnosti. Zo susedov sú vylúčené všetky riešenia, ktoré tieto vlastnosti majú. Nevýhodou je, že môžu byť zo zoznamu vylúčené aj nepreskúvané riešenia. Pri tejto metóde je daný konečný počet iterácií, nakoľko udržať tabu list v pamäti každej iterácie je pomerne náročné. Tabu prehľadávanie pozostáva z nasledujúcich procedúr: 1. *počiatočné riešenie*, 2. *inicializácia tabu zoznamu*, 3. *pravidlo zastavenia*, 4. *okolie*, 5. *prechod* a 6. *pridanie do tabu zoznamu*. Vďaka tabu zoznamu je tento algoritmus schopný poskytnúť pomerne kvalitné riešenia, podobne ako ostatné spomenuté pokročilé metaheuristické algoritmy.

4 VÝSLEDKY PRÁCE

Súčasťou príspevku je výpočet flexibilného blokovacieho job shop rozvrhovacieho problému založenom na lokálnom prehľadávaní s tabu zoznamom. Testy sú vykonané na procesore Intel® Core™2 Duo CPU 2.10GHz s 3GB RAM. Vstupnými dátami boli 8 štandardných benchmarkov používaných pre job shop problémy. Benchmark je navrhnutý pre základný job shop problém, preto je nutné pre túto úlohu doplniť o časy umiestnenia úloh na obslužné zariadenie, odobranie úlohy z obslužného zariadenia a časy nastavenia obslužných zariadení medzi operáciami. Algoritmus pracuje s množinou tabu parametrov, kde maximálna iterácia počtu je $\max_{iter} = 10000$, univerzálny tabu list dĺžky $t = 10$ a počet účelových funkcií hodnoty opakovania $\max c = 4$ a overenie dĺžky $\max \sigma = 100$. Iné končiacie kritéria vrátane času spracovania, t.j. 30 min. a maximálneho počtu nezlepšených pohybov $\max q = 1000$. Tieto hodnoty parametrov získame z predbežného ladenia. TS algoritmus hodnotí efektívnosť ich prevádzkových časov. Použijeme dve hodnotiace metriky: priemernú odchýlku času dokončenia operácií a priemerný výpočtový čas dokončenia operácií. Výsledky z tohto skúmania sme zhrnuli v *tabuľke 1*.

Zdroj: vlastné spracovanie,

Data	veľkosť		priemerná odchýlka (%)			Priemerný výpočtový čas (s)		
	<i>n</i>	<i>m</i>	MOC ⁷	MFP ⁸	BN ⁹	MOC	MFP	BN
la01-la05	10	5	11.27	9.43	11.87	1.69	1.25	1.27
la06-la10	15	5	5.71	5.11	10.07	3.92	2.21	2.74
la11-la15	20	5	7.64	7.61	6.95	7.44	3.53	5.13
la16-la20	10	10	11.29	9.21	10.56	3.55	4.09	2.59
la21-la25	15	10	10.78	12.00	6.06	9.45	8.34	6.51
la26-la30	20	10	9.32	7.44	10.93	18.9	13.57	12.31
la31-la35	30	10	6.85	10.83	11.71	61.93	36.2	34.86
la36-la40	15	15	9.75	13.47	11.14	15.85	17.56	12.36

tabuľka č. 1.: výpočet flexibilného blokovacieho job shop rozvrhovacieho problému

⁷ Most Critical Operation

⁸ Most Favorable Position

⁹ Bottleneck

ZÁVER

Cieľom príspevku je navrhnúť a implementovať rozrhovací algoritmus riešenia rozvrhov výrobných procesov s blokovacími operáciami. Súčasťou práce je prehľad úloh obsahujúcich blokovacie operácie a prehľad publikovaných prác, ktoré sa s nimi zaoberajú. Podrobnejšie sme rozpracovali flexibilný zovšeobecnený job shop rozrhovací problém.

Použitá literatúra

1. GRÖFLIN H.– KLINKERT A., 2009. A new neighborhood and tabu search for the Blocking Job Shop. In: *Discrete Applied Mathematics*, roč. 157, 2009, č. 6, s. 3643 – 3655.
2. PHAM D.N., 2008. Complex Job Shop Scheduling: Formulations, Algorithms and a Healthcare Application, Faculty of Economics and Social Sciences, 2008, s. 162
3. Mascis A. – Pacciarelli D., 2002. Job-shop scheduling with blocking and no-wait constraints. In. *European Journal of Operational Research*, r. 143, 2002, p. 498–517

Kontaktné údaje

Ing. Jana Patakyová, Ing. Ivan Brezina, Ing. Anna Hollá

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824, email: jana.pataky@gmail.com, brezina.ivan@yahoo.com,
annaholla@gmail.com

MODELÝ UMIESTNENIA RECYKLAČNÝCH CENTIER NA BÁZE VIACKRITERIÁLNEHO PROGRAMOVANIA

LOCATION OF RECYCLING CENTRES BASED ON MULTICRITERIA PROGRAMMING

Juraj Pekár, Ivan Brezina

Abstrakt

Pri rozhodovaní o umiestňovaní recyklačných centier možno okrem klasických modelov matematického programovania použiť aj ich rôzne modifikácie, ktoré môže poskytnúť viac podkladov pre výber lokality ich umiestnenia. Jednou z možností je aj použitie metód viackriteriálneho programovania, ktoré poskytujú nástroje pre rozhodovanie o umiestnení recyklačných centier pri rešpektovaní viacerých cieľov.

Kľúčové slová: *lokačné úlohy, viackriteriálne rozhodovanie*

Abstract

Except classical mathematical programming models various modifications of models may be applied in process of decision making on the location of recycling centers. It can provide more materials for selecting new location. One possibility is the use of methods of multi criteria programming, providing tools for deciding making on the location of recycling centers in respect of several objectives.

Keywords: *location problems, multicriteria decision*

ÚVOD

Modelovanie lokácie recyklačných centier tak, ako aj všeobecne modelovanie výrobných, dodávateľských, distribučných a recyklačných procesov smeruje ku koordinácii materiálových, finančných, informačných a rozhodovacích tokov (Fiala, 2002). Materiálové toky reprezentujú toky odpadov do recyklačných centier. Vo finančných tokoch sú obsiahnuté náklady vybudovania a prevádzkovania recyklačných centier, ako aj náklady na zvoz odpadu. Informačné toky svojou podstatou predstavujú informácie o stave spracovania odpadu. Rozhodovacie toky umožňujú na báze dostupných informácií rozhodovať o celkovej efektívnosti recyklačného procesu. Jednou z možností získavania relevantných informácií pre optimalizáciu recyklačného procesu je aj rozhodovanie o umiestnení recyklačných centier na báze matematického programovania, pri rešpektovaní viacerých cieľov na báze metód viackriteriálneho programovania.

VIACKRITERIÁLNE PROGRAMOVANIE V LOKAČNÝCH ÚLOHÁCH

Klasické lokačné úlohy predpokladajú pri rozhodovaní o umiestnení objektu len jedno rozhodovacie kritérium. Pri reálnom rozhodovaní je však potrebné rozhodovať na základe viacerých kritérií. Zahnutie viacerých cieľov do rozhodovacieho modelu znamená zvyčajne jeho zrealnenie. Takéto modely sú popísané množinou variantov, množinou hodnotiacich kritérií a väzbami medzi nimi. K dispozícii musia byť pritom subjektívne preferencie rozhodovateľa na množine hodnotiacich kritérií.

Na riešenie lokačných problémov pri rešpektovaní viacerých kritérií možno všeobecne použiť modely a metódy viackriteriálneho programovania (Steuer, 1986), (Mlynarovič, 1998), (Cohon, 2004), pričom základný tvar úlohy viackriteriálneho programovania možno zapísať takto:

$$\text{"max"} \{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \mid \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \}$$

kde y_i – i -tá kriteriálna funkcia, $i = 1, 2, \dots, k$,

\mathbf{y} – kriteriálny vektor,

\mathbf{Y} – množina prípustných riešení v kriteriálnom priestore.

Symbol "max" pritom reprezentuje skutočnosť, že nie je možné jednoznačne určiť súčasnú maximalizáciu všetkých kritérií, tento symbol len predstavuje snahu o dosiahnutie najlepších hodnôt.

Na riešenie úloh viackriteriálneho programovania možno použiť celý rad metód, ich základné rozdelenie (Fiala, 2002) však dané spôsobom aplikácie subjektívnych preferencií rozhodovateľa na množine hodnotiacich kritérií. Základné metódy sú takto rozdelené na metódy s preferenčnou informáciou a priori (preferenčná informácia je k dispozícii pre vlastným nájdením kompromisného riešenia problému), metódy s preferenčnou informáciou a posteriori (najskôr sú nájdené všetky dominované riešenia, teda riešenia, ku ktorým neexistuje lepšie riešenie hodnotené aspoň podľa jedného kritéria a nie horšie podľa ostatných kritérií, a až následne je poskytnutá preferenčná informácia) a metódy s približnými informáciami (založené na interaktívnom dialógu medzi užívateľom a analytikom). Ďalšie modely predstavujú aplikáciu metód a priori. Modelovanie bolo aplikované pri riešení problémov rozmiestňovania recyklačných centier pri rešpektovaní viacerých kritérií v Slovenskej republike.

Umiestnenie recyklačných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a celková minimálna vzdialenosť

Pri riešení úloh nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte recyklačných centier (Brezina a kol., 2009) sme sa stretli s problémom umiestňovania recyklačných centier do uzlov (obcí) s nižším dopytom po odbere odpadu určeného na recykláciu, keďže v tejto úlohe sa neprihliada na veľkosť dopytu potenciálneho recyklačného centra. Pri úlohe celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte recyklačných centier (Brezina a kol., 2009) na druhej strane vznikol problém s uzlami s nižším dopytom umiestnenými mimo oblastí s väčšou hustotou uzlov. To spôsobovalo zhoršenú dostupnosť uvedených uzlov.

Tento druh problémov možno riešiť konštrukciou úlohy viackriteriálneho programovania ako kombinácie týchto dvoch úloh (počet kritérií sa rovná dvom, $k = 2$). Nakoľko štruktúra úloh je zhodná, t. j. úlohy majú zhodné premenné, štruktúrne ohraničenia sa líšia iba v skupine ohraničení zabezpečujúcich nadobudnutie hodnoty premennej z , ktorá reprezentuje hodnotu účelovej funkcie pre problém nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte recyklačných centier, preto možno uvedenú úlohu formulovať ako úlohu viackriteriálneho programovania:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = z \rightarrow \min$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} - x_i \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = p$$

$$\sum_{i=1}^n d_{ij} y_{ij} - z \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$z \geq 0$$

kde z predstavuje hodnotu najväčšej vzdialenosti recyklačného centra od jednotlivých uzlov,

$y_{ij} \in \{0, 1\}, x_i \in \{0, 1\}, i, j = 1, 2, \dots, n, z \geq 0, n$ – počet potenciálnych recyklačných centier, ako aj všetkých uzlov,

$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$, bivalentné premenné nadobudnú hodnotu 0, tak sa potenciálne j -te recyklačné centrum neotvorí,

b_j – množstvo odpadu dodávaného do j -teho uzla,

d_{ij} – najkratšia vzdialenosť z i -tého uzla do j -teho uzla,

p – počet recyklačných centier.

Umiestnenie recyklačných centier pomocou kritérií: maximálne pokrytie a minimálny počet centier

Ďalším problém, s ktorým sa možno stretnúť pri riešení lokačných úloh, je problém maximálneho pokrytia (Brezina a kol., 2009). Vstupné parametre definované rozhodovateľom uvedenej úlohy sú maximálna prijateľná vzdialenosť pre dodávanie odpadu z uzlov do recyklačných centier a počet recyklačných centier. Pritom rozhodovateľ musí vhodne zvoliť uvedené parametre, prípadne riešiť úlohu s rôznymi parametrami. Jedným z riešení je zostrojenie úlohy viackritériálneho programovania. Pritom prvá účelová funkcia reprezentuje percentuálne pokrytie uzlov a druhá účelová funkcia počet recyklačných centier. Pri riešení nastáva problém pri nízkej cieľovej hodnote počtu recyklačných centier, nakoľko uvedená účelová funkcia nadobúda celočíselné hodnoty.

Potom možno uvedenú úlohu viackritériálneho programovania zapísať:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i y_i}{dm} \rightarrow \max$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j, y_j \in \{0, 1\}$$

kde dm – celkový dopyt uzlov,
 a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -tého uzla do vzdialenosti K ,
 b_j – množstvo odpadu dodávaného z j -tého uzla.

Umiestnenie recyklačného centra pomocou kritérií: minimálna cestná sieť a minimálna prejdená vzdialenosť

Úloha hľadania minimálnej kostry grafu (Unčovský, 1991) slúži na riešenie určitej skupiny problémov teórie grafov, kde sa konštruje systém s minimálnou dĺžkou. Tento systém zabezpečuje vzájomné spojenie všetkých jeho súčastí a svojou podstatou môže byť predpokladom na riešenie problému umiestnenia recyklačných centier pomocou metód viackritériálneho programovania (ako jedno z kritérií).

Cieľom úlohy hľadania minimálnej kostry grafu je vybrať zo skupiny priamych ciest také, ktoré tvoria systém, umožňujúci dostať sa z každého uzla do každého uzla tak, aby celková dĺžka používaných ciest bola minimálna. V tomto prípade ide o výber najkratšieho systému ciest spájajúcich všetky uzly, pričom nezáleží na tom, aký počet prechodov po jednotlivých cestách sa bude realizovať.

V uvedenej úlohe hľadania minimálnej kostry grafu je stanovený cieľ minimalizujúci celkovú dĺžku používaných ciest (premenne x_{ij} nadobúdajú bivalentné hodnoty, ktoré reprezentujú používanie cesty z i -tého do j -tého uzla), účelová funkcia má potom tvar $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$, kde c_{ij} je

priama vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom.

Pri možnej aplikácii riešení týchto úloh na umiestňovanie recyklačného centra vzniká určitý problém, nakoľko aj uzly, ktoré sú blízko zvoleného centra (1. uzol) v prípade nižšej vzdialenosti iného ako vybraného recyklačného centra, vyberá cestu práve do uvedeného uzla. Ak použijeme uvedený model, môžeme vytvoriť druhú účelovú funkciu, ktorá okrem cieľa na prevádzkovanie minimálnej cestnej siete prevádzkovateľom zabezpečí aj minimálnu hodnotu prejdenej vzdialenosti v prípade individuálnej dopravy do recyklačného centra z jednotlivých uzlov (problém lokalizácie v uzloch siete).

V úlohe hľadania minimálnej kostry grafu sa používajú aj premenne y_{ij} , ktoré reprezentujú početnosť prejdenia cesty medzi i -tým a j -tým uzlom. Potom funkciou v tvare $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij}$

vypočítame celkovú vzdialenosť, ktorú treba prejsť, aby odpad bol doručený do recyklačného centra z jednotlivých uzlov.

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=2}^n y_{ji} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$0 \leq y_{ij} \leq (n-1)x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Umiestnenie recyklačných centier pomocou kritérií: minimálna vzdialenosť a rovnomernosť vyťaženia recyklačných centier

Pri riešení úloh nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom počte recyklačných centier (Brezina a kol., 2009) umiestňujeme recyklačné centrá na základe jediného kritéria, ktoré neberie do úvahy množstvo požiadaviek v jednotlivých oblastiach. Môže to však spôsobiť nadbytočné zriadenie recyklačných centier v oblastiach s nízkym dopytom. Uvedenú situáciu umožňuje odstrániť uplatnenie druhého kritéria zohľadňujúceho rovnomernosť zaťaženia jednotlivých recyklačných centier.

Problém, ktorý vzniká pri riešení tejto úlohy, je nelineárnosť štruktúrnych ohraničení zabezpečujúcich nadobudnutie percentuálnych odchýlok od priemernej hodnoty dopytu, t. j. od požadovanej hodnoty dopytu na jedno recyklačné centrum.

ZÁVER

Klasické lokačné úlohy na báze matematického programovania sú pomerne známe z literatúry ako jednokritériálne úlohy. Na základe známych úloh s jedným cieľovým kritériom boli v príspevku opísané viackritériálne úlohy, ktoré lepšie odzrkadľujú reálne požiadavky rozhodovateľov na umiestnenie recyklačných centier. V príspevku opisujeme štyri úlohy vytvorené na báze jednokritériálnych úloh. Problém výberu recyklačných centier pri použití kritéria minimálnej vzdialenosti, ktorá neprihliada na výšku dopytu, ako aj problém pri použití kritéria celkovej minimálnej vzdialenosti (určitá „diskriminácia“ obyvateľov v regiónoch s nižšou úrovňou dopytu) možno vyriešiť práve použitím metód viackritériálneho programovania. Druhou zo skupiny úloh popísaných v tomto príspevku je umiestnenie recyklačných centier pri využití kritérií maximálneho pokrytia a minimálneho počtu recyklačných centier. Ďalšia úloha analyzovaná v príspevku je postavená na úlohách optimalizácie prepravných trás. Význam tejto úlohy spočíva v tom, že dopyt je zabezpečený recyklačným centrom v špecifických situáciách (napr. živelné pohromy atď.). Riešenie potom reprezentuje množina ciest, ktoré musia byť udržiavané na zabezpečenie plynulého zásobovania jednotlivých uzlov tak, aby bol získaný kompromis medzi kritériom minimálnej cestnej siete a minimálnou prejdenou vzdialenosťou, ak uvažujeme individuálnu dopravu do recyklačného centra z uzlov siete. Poslednou úlohou riešenou aplikovaním metód viackritériálneho programovania bolo umiestnenie recyklačných centier pomocou kritérií

minimálnej vzdialenosti a rovnomernosti vyťaženia recyklačných centier. Obdobne, aj tu sa rieši problém, ktorý nastáva pri riešení úlohy s kritériom minimálnej vzdialenosti, t. j. neberie sa do úvahy dopyt. Kritérium rovnomernosti vyťaženia zahŕňa práve vplyv dopytu na lokalizáciu recyklačných centier.

Použitá literatúra

1. BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – GEŽÍK, P. – PEKÁR, J. 2009. *Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009. 220 s. ISBN 978-80-225-2825-2.
2. COHON, J. L. 2004. *Multiobjective programming and planning*. New York : Academic Press, 2004, p. 352, ISBN 0-486-43263-7.
3. FIALA, P. 2002. *Modelování a analýza produkčních systémů*. Praha : PROFESSIONAL PUBLISHING, 2002. 259 s. ISBN 80-86419-19-3
4. MLYNAROVIČ, V. 1998. *Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 1998. 233 s. ISBN 80-225-0985-X.
5. STEUER, R. E. 1986. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*. New York : JOHN WILEY and SONS, 1986. ISBN 047188846X.
6. UNČOVSKÝ, L. a kol. 1991. *Modely teórie grafov*. Bratislava : ALFA, 1991. 240 s. ISBN 80-05-00812-0.

Kontaktné údaje

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: pekar@euba.sk

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: brezina@euba.sk

OPTIMALIZACE KONTEJNEROVÉ PŘEPRAVY

SKIP TRANSPORT OPTIMIZATION

Jan Pelikán

Abstrakt

U přepravy kontejnerů jde o přemístění kontejnerů, např. návěsů, z výchozího umístění všech kontejnerů, depotu, do místa určení s využitím vozidla, tahače. Kapacita vozidla je omezená, obvykle jde o jeden nebo dva kontejnery. Problém je definován na grafu, kde uzly jsou místa výchozího umístění a místa určení, celkové přepravní náklady jsou minimalizovány. Na rozdíl od klasického problému přepravy kontejnerů je v práci studován problém přepravy mezi uzly komunikační sítě, úloha je převedena na lineární dopravní problém.

KLíčové slová: kontejnerová přeprava, přepravní problém, dopravní problém

Abstract

The skip transport consists in transport of skips (big containers, trailers) from initial location to destination location using vehicles (tractors). Capacity of vehicles is limited, usually the capacity of the vehicles is one or two containers. The problem is defined on the graph, nodes are initial and destination locations, total transport cost is minimized. Unlike the skip delivery problem a skip pickup and delivery problem is studied, the optimal solution is found as optimal solution of the linear transportation problem.

Keywords: skip transport, pickup and delivery problem, transportation problem

1 SKIP DELIVERY PROBLEM

There are many papers which pay attention to skip delivery problem (SDP). In [1] it is studied the problem of transport skip, which are transported by vehicles with capacity one or two. There is a set of customers with their skip demand. Each customer is the node in the graph $G=\{V,H\}$, V is a set of nodes, H a set of edges. Demand of the node i is denoted by positive integer b_i . The cost of travel from node i to node j is c_{ij} , it is suppose that the triangular inequality is satisfied and the matrix C is symmetrical. Number of vehicles in the depot is unlimited, the capacity of vehicles is unique and it is $V>0$ integer. All skips are available in the depot and from the depot are delivered to the nodes according node demand b_i .

1.1 Case $V=2$.

In the case $V=2$ there are only two possible round trips:

- from depot 1 to the node i and node j and return to the node 1, this trip we denote e_{ij} ,
- from depot 1 to the node i and return to the depot, the trip is e_{ii} .

Now we define an artificial graph problem: minimum weight b-matching problem as follows.

The graph $G'=\{V',H'\}$, where $V'=V-\{1\}$. The set of edges H' contains all round trips e_{ij} and e_{ij} , where trip e_{ij} is edge of the graph G' and e_{ii} the loop of the graph G' . The weight of the edge e_{ij} is $c'_{ij}=c_{1i}+c_{ij}+c_{j1}$, and the weight of the loop e_{ii} is $c'_{ii}=c_{1i}+c_{i1}$.

SDP problem with $V=2$ can be formulated as minimal weighted b-matching problem (BM) of the graph G' . The mathematical formulation of the BM problem is as follows:

Let have the integer variables x_{ij} , where (i,j) is edge or loop of the graph G' . The value x_{ij} for $i \neq j$ is a number of trips type a) and x_{ii} a number of trips type b).

Mathematical model the minimal weighted b-matching problem:

$$z = \sum_{i,j} c'_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum x_{ij} + \sum 2x_{ii} \geq b_i, i \in V'$$

This problem can be solved in polynomial time[1]. Moreover the problem is reducible, i.e. there is an optimal solution of the instance in which each node is served by as many full load depart-node trips as possible. Reducible instance can be transformed into an instance of the generalized minimum cost matching problem, because demand of nodes is only one container.

1.2 Case $V=1$ or 2.

Similar results hold for the case with capacity of vehicles is one or two. At first the cost of transfer thru the edge (i, j) must differ for vehicle with capacity one or capacity two. The cost of travel from node i to node j is c_{ij} is $k_1 c'_{ij}$, if the capacity of the vehicle is one, and $c_{ij} = k_2 c'_{ij}$ if the capacity is two, where c'_{ij} is distance from node i to node j . If $k_2/k_1 \leq 1$ we will use only vehicle with capacity two, in case $k_2/k_1 \geq 2$ all used vehicles are with capacity one in the optimal solution.

In the case $V=1$ or 2 we construct the undirected complete graph $G' = \{V, E'\}$ as an instance of the minimum weight b-matching problem in following way:

$c_{ij} = k_2(c'_{li} + c'_{ij} + c'_{jl})$, $i \neq j$, $i, j \in V - \{1\}$ and x_{ij} gives the number of trips 1- i - j -1 with a vehicle with capacity two,

$c_{li} = 2k_1 c'_{li}$ for $i \in V - \{1\}$ and x_{li} is the number of trips 1- i -1 and vehicle capacity one,

$c_{ii} = 2k_2 c_{li}$ for $i \in V - \{1\}$ and x_{ii} is number of trips 1- i -1 and vehicle capacity two.

Under assumption of symmetrical cost matrix and holding triangular inequality the problem with capacity vehicles one or two is reducible.

2 SKIP PICKUP AND DELIVERY PROBLEM

2.1 Definition of skip pickup and delivery problem

Given a distribution network with a set of n nodes and the cost matrix C travel cost between all pair of nodes, where c_{ij} is the costs - distance between nodes i and j . Let us denote q_{kl} the number of skips that has to be transported from node k to node l . Vehicles with capacity V are used for pickup and delivery and they can start in any node. All routes have to be cyclical, each vehicle has to come back to the node it starts from. The objective is to minimize total cost of all the routes. The optimal solution is a set of cyclical routes, for each of them it is specified the depot, which cover all demands for pickup and delivery. It is supposed triangular inequality and symmetry for C .

The problem can be solved by the method which is shown on the example as follows.

Example.

There are 5 nodes and capacity of vehicle one. Travel costs C and transport requirements are:

$$C = \begin{pmatrix} 0,3,7,3,2 \\ 3,0,2,1,6 \\ 7,2,0,2,3 \\ 3,1,2,0,6 \\ 4,6,3,6,0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,0,0,0,4 \\ 1,0,2,5,0 \\ 0,0,0,0,1 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,3,0,0,0 \end{pmatrix}.$$

Now, we compute the input and output degree of all nodes (Tab.1).

Tab.1: In and out degree

Node	1	2	3	4	5
out-degree	4	8	1	0	3
in-degree	1	3	2	5	5
difference	3	5	-1	-5	-2

Existence of routes will be ensured if in-degree is equal out-degree for all nodes, a number of vehicles entering the node is equal a number of vehicles living the node.

To do it, it has to add edges from nodes with negative difference to nodes with positive difference out-degree and in-degree with minimal cost. The new additional edges mean transfers of vehicles without load, we can obtain by solving a linear transportation problem (see Tab.2).

Tab.2. Optimal solution of the transportation problem

	1	2	a_i
3	7	2	1
4	3	1	5
5	4	6	2
b_j	3	5	

Optimal cost is 17, number of additional edges are: one edge (3, 2), one edge (4,1), 4 edges (4,2), two edges (5,1). The number of vehicles traveling thru edge (i,j) without load is denoted y_{ij} , optimal value is $y_{32}=1$, $y_{41}=3$, $y_{42}=4$, $y_{51}=2$, otherwise $y_{ij}=0$. Full load vehicle going thru edges are q_{ij} with costs 41. Total costs $41+17=58$ are optimal.

2.2 Algorithm for route generation.

A number of vehicles entering each node equals to a number of vehicles leaving it. For generation of cyclical routes in the form of path in the network (i_1, i_2, \dots, i_t) , the following general algorithm can be used:

Algorithm for the route generation:

Step 1. If $y_{ij} = 0$ for all arcs $(i, j) \in E$, it is not possible to generate any route, otherwise select any arc $(i_1, i_2) \in E$, $y_{i_1, i_2} > 0$. Set $y_{i_1, i_2} = (y_{i_1, i_2} - 1)$ and $t = 2$.

Step 2. Repeat while $i_1 \neq i_t$: Select any arc $(i_t, i_{t+1}) \in E$, $y_{i_t, i_{t+1}} > 0$. Set $y_{i_t, i_{t+1}} = (y_{i_t, i_{t+1}} - 1)$ and $t = t + 1$.

Proposition 1.

If $\sum_{i=1}^n y_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ji}$ for $j = 1, 2, \dots, n$, then the previous algorithm will generate cycles.

Proof.

If, in the step 2, the path (i_1, i_2, \dots, i_t) is not closed, i.e. $y_{i_t, j} = 0$ for all nodes j , then $1 < \sum_{i=1}^n y_{ij} \neq \sum_{i=1}^n y_{ji} = 0$ for $j = i_t$ that contradicts the assumption.

3 Conclusions

In the paper a new kind of the skip delivery problem is shown and a method for solving the problem is proposed.

Acknowledgements

This research was supported by GAČR grant No. GACR 402/09/0041 and IGA F4/18/2011.

4 References

1. ARCHETTI, C., MANSINI, R, SPERANZA, M.G. 2005. Complexity and reducibility of the skip delivery problem. In: Transportation Science, Vol. 39, No.2, May 2005, pp. 182-187.

Kontaktné údaje

prof.RNDr. Jan Pelikán, CSc.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

W. Churchilla 4, 13067 Praha 3

Tel: (420 2) 67 295 824

email: pelikan@vse.cz

POROVNANIE VYBRANÝCH HEURISTICKÝCH METÓD RIEŠENIA MULTIDIMENZIONÁLNEHO PROBLÉMU BATOHU

COMPARISON OF CHOSEN HEURISTICS METHODS OF SOLVING MULTIDIMENSIONAL KNAPSACK PROBLEM

Ján Pittner

Abstrakt

Článok sa zaoberá porovnaním efektívnosti vybraných heuristických algoritmov na riešenie multidimenzionálneho problému batohu. Vysvetľuje fungovanie špecifického genetického algoritmu a jeho porovnanie s autorovým algoritmom. Po prezentovaní výsledkov nasleduje krátka úvaha o dodatočnom zlepšení výsledkov.

KLúčové slová: *genetický algoritmus, problém batohu, porovnanie, heuristika*

Abstract

The article deals with comparing the effectiveness of selected heuristic algorithms for solving the multidimensional knapsack problem. It tries to clarify the functioning of a specific genetic algorithm and its comparison with the author's algorithm. After presenting the results, follows a brief consideration of additional improvements to the algorithm.

Keywords: *genetic algorithm, knapsack problem, comparison, heuristics*

1 DEFINÍCIA PROBLÉMU

Problém batohu predstavuje úlohu kombinatorickej optimalizácie. Majme danú množinu vecí(tovarov), pričom každá vec má stanovenú váhu a hodnotu. Ďalej majme kontajner (batoh), ktorý má stanovenú nosnosť. Našou úlohou je potom rozhodnúť, ktoré z daných vecí vložíme do batohu a to tak, aby sme maximalizovali cenu vložených vecí a neporušili váhové obmedzenie kontajnera.

Využitie našiel tento problém napríklad pri simulovaní investičných rozhodnutí, vytváraní kryptografického systému, alebo členením a rozdeľovaním surovín pre výrobný proces.

Problém batohu môžeme formulovať aj ako zápis úlohy celočíselného lineárneho programovania a to nasledovne:

$$\max \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

S obmedzením:

$$\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c$$
$$x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,\dots,n$$

Vektor optimálneho riešenia bude $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ a hodnota optimálneho riešenia z^* . Množina X^* predstavuje množinu optimálneho riešenia, t. j. množinu predmetov korešpondujúcich s vektorom optimálneho riešenia.

1.1 Multidimenzionálny problém batohu

Existuje mnoho variantov problémov batohu, odlišujúcich sa navzájom rôznymi atribútmi. Preto sa zamerajme na jeden konkrétny variant, a teda na *0/1 multidimenzionálny problém batohu*. NP-ťažký 0/1 multidimenzionálny problém batohu je zovšeobecnením jednoduchého 0/1 problému batohu. Skladá sa z vybratia podmnožiny daných objektov (teda položiek) takým spôsobom, aby sa dosiahla maximalizácia celkovej hodnoty zabalených objektov, pri dodržaní obmedzení batohu.

Formálny zápis tohto typu problému je nasledovný.

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

so všeobecným zápisom obmedzení

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq n$$

Kde n je počet objektov, m je počet obmedzujúcich dimenzií batohu, c_j predstavuje hodnotu objektu j uloženého v batohu, x_j je binárnou premennou indikujúcou stav objektu (1 – nachádza sa v batohu, 0 – nenachádza sa v batohu), b_i predstavuje hranicu i -tej dimenzie batohu a napokon $a_{i,j}$ predstavuje vstupy z matice obmedzení. Táto matica obsahuje obmedzujúcu hodnotu pre každý objekt v jednotlivých dimenziách¹, Matica má teda veľkosť $N \times M$.

2 VYBRANÉ NEDETERMINISTICKÉ RIEŠENIA PROBLÉMU BATOHU

Nedeterministickú metódu, inak nazvanú aj heuristika chápe informatika ako veda ako postup získania riešeni problému, ktoré však nie je presné a nemusí byť nájdené v krátkom čase. Slúži však najčastejšie ako metóda rýchlo poskytujúca dostatočné a dosť presné riešenie, ktoré však nemožno obecné dokázať. Najčastejšie použitie heuristických metód nachádzame v prípadoch, kde je použitie deterministických algoritmov časovo neprípustné.

Medzi vybrané heuristické metódy riešiace problém multidimenzionálneho batohu sme zaradili:

- Algoritmus tabu-search
- Genetické algoritmy

¹ Podľa druhov dimenzií to môže byť napríklad váha, veľkosť, objem, cena atď.

2.1 Tabu search

Tabu search je metóda matematickej optimalizácie patriaca do tried techník založených na trajektóriách. Tabu search vylepšuje výkon metód lokálneho prehľadávania zavedením pamäťových štruktúr, ktoré popisujú už objavené riešenia. Ak bolo potenciálne riešenie determinované, je označené ako „tabu“ na základe čoho ho už algoritmus pri nasledovnom prehľadávaní ignoruje. Metóda potom postupuje iteratívne pri prehľadávaní priestoru riešení, pričom po označení nájdeného riešenia ako tabu, je tento priestor riešení pri ďalšej iterácii redukovaný o tabu oblasť, čím sa redukuje čas vykonávania algoritmu lokálneho prehľadávania. Algoritmus začína inicializačným riešením X_{ini} . Počas každej iterácie procesu je skúmané okolie súčasného riešenia X zamerané na získanie najlepšieho riešenia X' ako nového riešenia. Zvolené riešenie X' nesmie byť označené ako „Tabu“. Stav Tabu konkrétneho riešenia predchádza zacykleniu pri nemonotónnom prehľadávaní priestoru, napríklad v prípade, že prijímané sú aj horšie riešenia. Avšak tento stav tabu obmedzenia môže byť ponechaný pre riešenie X' v prípade, že príslušná účelová funkcia $F(X')$ je vyššia ako účelová funkcia doteraz najlepšieho riešenia $F(X^*)$. Tento mechanizmus sa nazýva kritérium ašpirácie. Akonáhle je vybrané nové riešenie X' vykonáva sa transformácia, pri ktorej sa transformuje X na X' . Transformácia sa skladá z dvoch krokov:

- Krok drop zvolí komponenty zo súčasného riešenia X , ktoré majú hodnotu 1 a nastaví ich hodnotu na 0. Výber týchto komponentov determinuje rovnica:

$$i^* = \min \left\{ \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} x_j \right) - b_i \mid i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

i^* je indexom ohraničenia, ku ktorého hranici sa dané riešenie najviac blíži

$$j^* = \max \left\{ \frac{a_{i,j}}{c_j} \mid x_j = 1, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

- Krok add vyberie jeden z viacerých komponentov, ktoré majú hodnotu 0 a nastaví ich na hodnotu 1. Zvolené komponenty nesmú byť označené ako tabu, okrem prípadu, v ktorom je realizované kritérium ašpirácie. Pridávanie objektov do batohu sa realizuje až pokiaľ neexistuje objekt, ktorý sa môže pridať.

Fáza intenzifikácie a diverzifikácie ukončuje lokálne prehľadávanie. Úlohou fázy intenzifikácie je smerovanie prehľadávania na sľubné oblasti priestoru riešení na základe charakteristík, nachádzajúcich sa vo vysoko kvalitných doteraz objavených riešení v príslušnej oblasti. Medzi fázy intenzifikácie patrí napríklad intenzifikácia strategickým oscilovaním. Pri tomto type intenzifikácie môže algoritmus na istý fixný počet iterácií prijímať neprístupné riešenia. Neprístupné riešenie je potom premietnuté na prístupnú oblasť a vygeneruje nové prípustné riešenie. Projekcia je vykonaná tým, že z batohu sú vylúčené tovary, ktorých pomer ceny a obmedzení sú najnižšie. Metóda strategickej oscilácie bola úspešne implementovaná pre riešenie úloh binárneho celočíselného programovania². Najväčšou nevýhodou tejto metódy sú požiadavky na výpočtový čas. Táto nevýhoda pramení z ideí prehľadávania oblasti neprístupných riešení. V súčasnosti sa na zníženie tejto požiadavky zavádzajú limity na prehľadávanie do hĺbky v oblastiach neprístupných riešení.

Fáza diverzifikácie na druhej strane smeruje prehľadávanie na doteraz nenavštívené riešenia. Obsahuje pamäť, ktorá uchováva informácie vo vzťahu k doteraz navštíveným riešeniam od začatia prehľadávania. Pamäť má názov „dlhodobá pamäť“ a je používaná k uprednostňovaniu nových oblastí. Fáza diverzifikácie začína generovaním nového počiatočného riešenia $X_{\text{diverzifikacia}}$. Toto riešenie nie je generované náhodne, ale zohľadňuje tovary, ktoré majú najčastejšie hodnotu 0 alebo 1. Fáza diverzifikácie obsahuje pole s názvom História. i -ta hodnota pola História[i] reprezentuje počet iterácií pri ktorých má i -ty tovar v súčasnom riešení hodnotu 1. Potom ak je hodnota i -teho prvku pola História[i] vyššia ako prah, hodnota i -teho prvku $X_{\text{diverzifikacia}}[i]$ je nastavená na hodnotu 0 a tovar i je označený ako tabu. Potom naopak, ak je hodnota i -teho prvku pola História[i] nižšia ako prah, hodnota i -teho prvku $X_{\text{diverzifikacia}}[i]$ je nastavená na hodnotu 1 a tovar i je označený ako tabu. Týmto spôsobom je vyhľadávanie nútené postupovať do oblastí, ktoré boli zamietnuté prechádzajúcim vyhľadávaním. Vyhľadávanie v tejto oblasti je potom obmedzené fixným počtom iterácií, potom pokračuje vo vyhľadávaní s prvotnými podmienkami.

2.2 Genetické algoritmy

Genetické algoritmy sú metódy používané na riešenie mnohých, aj optimalizačných problémov. Názov a myšlienka je úzko spätá s Darwinovou teóriou evolúcie, kde sa počas mnohých generácií prírodná populácia vyvíja podľa princípov prirodzeného výberu a zákona prežitia najschopnejšieho. Týmto spôsobom je potom genetický algoritmus schopný vygenerovať riešenia pre rôzne problémy.

Genetické algoritmy uskutočňujú stochastické globálne prehľadávanie priestoru riešení. Prehľadávanie sa uskutočňuje výmenou informácií medzi chromozómami a zavádzaním nových informácií. Základné genetické operátory sú

- rozmnožovanie
- mutácia
- prekríženie

² Glover, F., Kochenberger, G.: Critical event tabu search for multidimensional knapsack problems, Meta-Heuristics: Theory and applications, Kluwer Academic pub, 1996

V tomto článku využijeme na ukážku algoritmus navrhnutý Beasleyom a Chunom, ktorý hoci nepatrí medzi najaktuálnejšie, zachytáva také riešenie daného problému, ktoré slúži ako podklad pre mnohé súčasné vedecké práce. Algoritmus využíva genetický operátor, ktorý prostredníctvom funguje podobne ako transformácia v algoritme tabu-search. A to tak, že sa skladá z dvoch fáz, ADD a DROP. Úlohou DROP fázy je modifikácia neprípustného riešenia na prípustné, prostredníctvom prechádzania už uložených vecí v kontajneri a porovnávaním ich pseudo-užitočnosti. Vec s najmenšou pseudo užitočnosťou je vylúčená z riešenia, čo tým pádom transformuje riešenie na prípustné. Nasleduje spustenie fázy ADD, ktorá má za úlohu zlepšiť prípustné riešenie dosiahnuté po vykonaní DROP fázy a to tým, že do kontajnera pridá vec s najvyššou pseudo užitočnosťou, ktorá zároveň neporuší žiadne z obmedzení. Základná myšlienka tohoto genetického algoritmu má potom tvar³:

```

1: nastav  $t := 0$ ;
2: inicializuj  $P(t) := \{S_1, \dots, S_N\}, S_i \in \{0,1\}^n$ ;
3: ohodnot'  $P(t) := \{f(S_1), \dots, f(S_N)\}$ ;
4: nájdi  $S^* \in P(t)$  a platí, že  $f(S^*) \geq f(S), \forall S \in P(t)$ 
5: while  $t < t_{\max}$  do
6: vyber  $\{P1; P2\} := \Theta(P(t));$  //  $\Theta$  predstavuje selekciu prostredníctvom binárneho turnaja
7: prekriž  $C := \Omega_c(P1, P2);$  //  $\Omega_c$  predstavuje uniformný operátor križenia
8: mutuj  $C \leftarrow \Omega_m(C);$  //  $\Omega_m$  predstavuje mutačný operátor
9: urob  $C$  prípustným,  $C \leftarrow \Omega_r(C);$  //  $\Omega_r$  predstavuje repair operátor
10: if  $C \equiv$  lubovolné  $S \in P(t)$  then //  $C$  predstavuje duplikát člena populácie
11: zahod'  $C$  a choď na 6;
12: end if
13: ohodnot'  $f(C)$ ;
14: nájdi  $S' \in P(t)$  s.t.  $f(S') \leq f(S), \forall S \in P(t)$  a nahrad'  $S' \leftarrow C$ 
15: if  $f(c) > f(S^*)$  then
16:  $S^* \leftarrow C$ 
17: end if
18:  $t \leftarrow t + 1;$ 
19: end while
20: return  $S^*, f(S^*)$ 

```

Legenda:

t – číslo aktuálnej generácie

P – rodič(parent)

S – riešenie(solution)

C – potomok(child)

³ Chu, P., Beasley, J.: A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. In: Journal of Heuristics Volume 4 Number 1, DOI: 10.1023/A:1009642405419

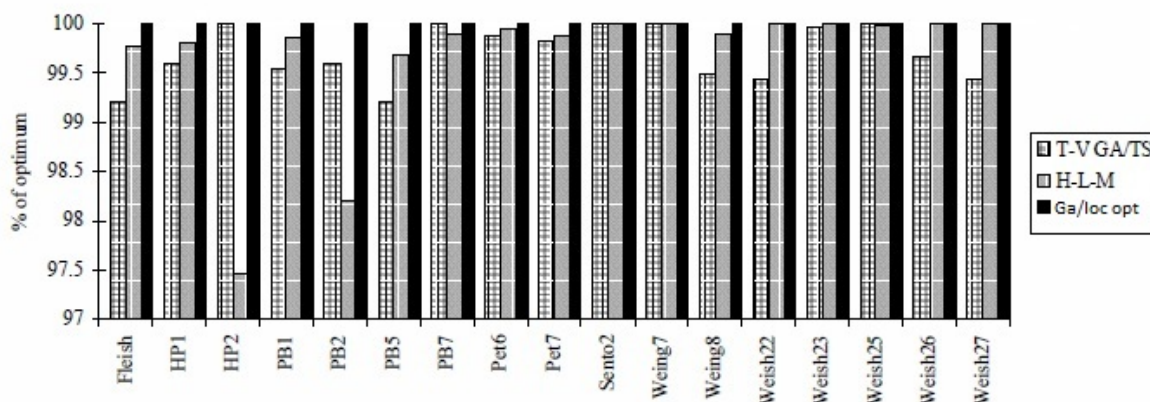
f()- fitness funkcia (hodnotenie jednotlivých chromozómov)

Tento genetický algoritmus sme modifikovali tak, že sme namiesto opravného operátora (ADD/DROP fáza) implementovali penalizačnú funkciu, ktorá zabezpečí znížený výskyt neprístupných riešení počas behu algoritmu. Naproti tomu sme však zabezpečili lokálnu optimalizáciu potomkov u ktorých je spôsobom pokus/omyl pridávaný dodatočný objekt, pričom objekty sú zoradené podľa ich pseudo užitočnosti. Tým pádom majú potomkovia v rámci možnosti (niektoré objekty sú fixne stanovené prekrížením) maximalizovanú účelovú funkciu.

Oproti konkurenčným algoritmom boli podstatne zmenené niektoré parametre. Algoritmus pracuje s 100 000 generáciami, pričom veľkosť populácie je 10. Šancu mutácie potom rátame ako $1/\text{počet ukladaných objektov}$, šancu zamiešania ako $20/\text{počet ukladaných objektov}$. Elitizmus potom zabezpečí presun najlepšieho jedinca do novo vytvorenej populácie.

3 ZÍSKANÉ VÝSLEDKY

Navrhnutý algoritmus je porovnávaný s algoritmom Thiela a Vossa a algoritmom Hoffa, Lokkentangena a Mitteta. Algoritmus Thiela a Vossa je hybridným algoritmom využívajúcim Tabu search a genetické algoritmy. Naproti tomu Hoff, Lokkentangen a Mittet implementujú štandardný opravný operátor do ich genetického algoritmu.



Obrázok 1. Porovnanie vybraných algoritmov⁴

S obrázku možno vidieť, že nami navrhovaný algoritmus našiel 100% optimum vo všetkých prípadoch, vďaka implementácii algoritmu lokálnej optimalizácie. Otázkou ale potom zostáva exekučný čas a počet generácií algoritmu potrebný na výpočet problému, ktorý z obrázku nie je zrejмый.

Názov	priemerný čas(ms)	priemerný počet generácií
Fleish	530,1	799,7

⁴ Zdroj pôvodného grafu - Hoff, A., Lokkentangen, A., Mittet, I.: Genetic algorithms for 0/1 multidimensional knapsack problems, Molde College, Norway

Hp1	18723,4	37635,3
Hp2	1397,7	2431,9
Pb1	9548,9	19540,3
Pb2	3762,1	6848,6
Pb5	545,9	827,1
Pb7	16,6	1
Pet6	14,1	1,3
Pet7	175,4	172
Sento2	41	6,1
Weing7	525,1	615,5
Weing8	2649,2	3313,3
Weish22	160,6	107
Weish23	34,3	7,7
Weish25	443,2	392,1
Weish26	86,5	42,6
Weish27	21,3	1,2

Tabuľka č.1 Výsledky navrhovaného algoritmu

Z tabuľky je vidieť vyšší priemerný čas a priemerný počet generácií pri probléme s názvom Hp1. Po analýze vstupných dát a vykonaní experimentov, pri ktorých sme menili počet jedincov v populácii sa nám podarilo tieto časy znížiť avšak za cenu zásahov do zdrojového kódu. Výsledky sú teda závislé najmä od nastavenia parametrov genetického algoritmu.

Použitá literatúra

1. Ben-Tal, A., Ghaoui L., Nemirovskii A.: Robust Optimization, Princeton University Press 2009, Princeton ISBN: 0691143684, 9780691143682.
2. Hoff, A., Lokkentanen, A., Mittet, I.: Genetic algorithms for 0/1 multidimensional knapsack problems, Molde College, Norway
3. Chu, P., Beasley, J.: A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. In: Journal of Heuristics Volume 4 Number 1, DOI: 10.1023/A:1009642405419
4. Vasquez, M., Hao, J.: An hybrid approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem. In: 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence
5. Glover, F., Laguna, M.: Tabu Search, Kluwer, Norwell MA, 1997
6. Hanafi, S., Freville, A.: An efficient tabu search approach for the 0-1 multidimensional knapsack problem. In: CEJOR Volume 106, April 1998

7. Glover, F.,Laguna, M.: Tabu Search, Kluwer Academic Publishers, 1997, ISBN: 0-7923-9965-X
8. Thiel, J. and Voss, S. (1993) : Some experiences on solving multiconstraint zero-one knapsack problems with genetic algorithms. In: *INFOR.Vol 32, No 4*, pp 226-243.
9. Richardson, J. , Palmer, R. , Liepins, G. and Hilliard, M. (1989) : Some Guidelines for Genetic Algorithms with Penalty Functions. In: Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, pp 191-197.

VYUŽITIE SIMULAČNÝCH MODELOV V PODNIKOVÝCH PROCESOCH

USE OF SIMULATION MODELS IN BUSINESS PROCESSES

Peter Princ

Abstrakt

V tomto článku sa zameriavam na možnosti využitia simulačných metód pri analýze podnikových procesov. Samotná aplikácia simulačných metód na podnikový proces je ukázaná pomocou modelu logistických procesov medzi skladoom a výrobnou zónou vo vybranom výrobnom podniku. Model je vytvorený v programe Simul8.

Kľúčové slová: simulačné metódy, logistické toky, Simul8

Abstract

This paper is focused on the possibility of using simulation methods for the analysis of business processes. The application of simulation methods for business processes is shown on the model of logistic flows between warehouse and production zone. The model is created in Simul8.

Keywords: simulation methods, logistic flows, Simul8

1. ÚVOD

V súčasnej ekonomickej situácii podniky hľadajú stále nové a nové možnosti ako nájsť odpovede na otázky súvisiace s ich ekonomickým rastom. Veľa trhov sa pomaly spamätáva z chaosu z rokov 2008 a 2009. V tejto práci sa zameriame na výrobný podnik dodávateľa automobilových súčiastok. Vedenie podniku sa rozhodlo začať produkciu nového výrobného programu a chcelo využiť možnosti simulačných modelov pri riešení jednotlivých procesov s tým súvisiacich.

Banks definuje simuláciu ako imitáciu operácií skutočného procesu alebo systému v čase. Simulácia zahŕňa tvorbu umelej histórie systému a pozorovanie tejto histórie na načerpanie vzťahov súvisiacich s jednotlivými charakteristikami skutočného systému.

Model reprezentuje systém alebo proces. Simulačný model je reprezentáciou ktorá zahŕňa čas a zmeny ktoré sa uskutočňujú v čase. Diskrétny model je taký model v ktorom sa zmeny uskutočňujú v celých časových bodoch, nie priebežne. Model môže zahŕňať logické, matematické a štruktúrne aspekty systému alebo procesu, kde čas je kritický komponent. Predstavený model bol simulovaný v programe Simul8.

2. VÝCHODISKOVÁ SITUÁCIA

Výrobca vstrekovacích čerpadiel dokončil výstavbu novej haly, do ktorej postupne presúva výrobu z iných závodov v Európe a tak významne rozširuje svoju výrobu. Nová výrobná hala, ktorá bola dostavaná v roku 2008, je postupne zaplňovaná takmer tridsiatimi novými montážnymi linkami. Výroba je náročná na čistotu prostredia i dielov. Preto je montáž

vykonávaná v uzavretom priestore a väčšina dielov je pred použitím umytá v špeciálnych umývacích linkách.

1. Vedenie závodu stálo pred otázkou, akú umývaciu kapacitu je nevyhnutné zainvestovať, aby bolo možné vyhovieť plánovaným požiadavkám na výrobnú kapacitu.
2. Vyťaženosť umývacích liniek je závislá na výrobnom programe montážou a v rámci zmien dochádza k častým súbehom výrobných špičiek.
3. Problém nebolo možné vyriešiť bežnými statickými výpočty v tabuľkovom procesore, a preto bola zvolená dynamická simulácia.
4. Súčasťou projektu boli aj detailné simulácie skladu s regálovými zakladači a logistiky.

2.1. Riešenie projektu

Boli vytvorené dva dynamické modely:

1. simuluje výrobu a výstupy tohto modelu slúži ako časť vstupov
2. model, ktorý simuluje logistiku v novej hale s ohľadom na meniace sa požiadavky zákazníkov.

Pomocou modelu boli zodpovedané nasledovné otázky:

1. Koľko umývacích liniek bude potrebné v okamihu nábehu výroby a koľko v okamihu dosiahnutia plnej kapacity?
2. Aké množstvo a aké druhy regálov budú potrebné pre skladovanie umytých dielov v čistom priestore?
3. Aké hmotnosti budú transportované manipulantom v čistom priestore (riziko prekročenia normy bezpečnosti práce)?
4. Aké zásoby dielov pred umývacími linkami je potrebné držať, aké budú signálne hladiny pre doplnenie zásoby logistikou?
5. Koľko kusov manipulačnej techniky bude potreba v okamihu nábehu výroby a koľko v okamihu dosiahnutia plnej kapacity?
6. Aký vplyv bude mať porucha regálového zakladača na výrobu v čistom priestore. Aká doba výpadku je maximálne prípustná, aby nebola ohrozená výroba?

Obsahom projektu je vytvorenie modelu pre simuláciu logistických tokov medzi skladom a výrobou. V modeli je zahrnutá simulácia manipulačnej techniky vrátane regálových zakladačov. Je sledovaný komplexný materiálový tok od príjmu materiálu po záverečnej testovanie a expedíciu hotových výrobkov.

2.2. Logistické toky zahrnuté v modeli:

1. Manipuláciu materiálu k umývačkám a jeho založenie do regálov u umývačiek vo výrobe - materiál vychyšaný zo skladu regálovým zakladačom alebo retrakmi na úložisko, ktoré sa nachádza na severnom konci každého regálu v sklade, je ďalej manipulovaný do výroby:
 - nízkozdvížnym vozíkom - v prípade, keď sú manipulované celé palety (palety sú v regáloch zabalené igelitom, skladajú sa z KLT krabíc obsahujúcich jednotlivé diely pre výrobu čerpadiel - celá paleta je veľmi ťažká)
 - vláčikom v prípade, kedy nie je potrebná celá paleta. Paleta sa rozbalí a vodič zakladača vyberie len potrebný počet KLT krabíc, ktoré sa ďalej skladajú na vozíky vláčiku.

2. Manipuláciu prázdnych obalov a palet späť do skladu (Prázdne obaly sa z výroby opäť môžu odvážať po jednotlivých kusoch do skladu, kde sú vyhradené palety pre jednotlivé typy KLT krabíc (celá paleta sa môže skompletizovať aj za 3 až 4 dni). Kompletná paleta sa prevezie na zabalenie, zapáskuje sa a zaskladní. Vysoko točivé obaly sa kompletizujú priamo v oblasti pred umývačkami a kompletné palety sa odváža priamo na balenie a páskovanie a následné zaskladnenie.

3. Manipulácia prázdnych obalov pre finálnu výrobu na koniec linky.

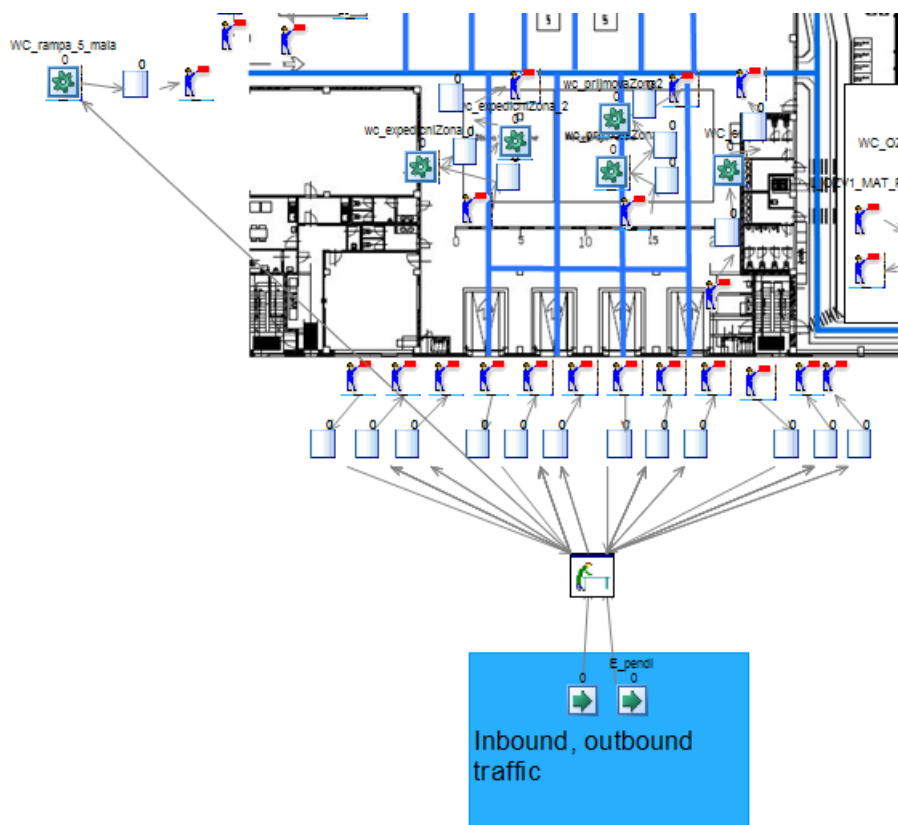
4. Manipuláciu finálnych výrobkov do skladu.

5. Toky súvisiace s ostatnými činnosťami:

a) Príjem, expedície - v modeli sa sleduje vyťaženie 4 rámp, slúžiacich pre príjem a expedíciu veľkých nákladných áut a jednej malej bočnej rampy slúžiace len pre príjem malých áut (dodávky).

- U 4 hlavných rámp - príjem prebieha 12 hod denne, pričom sa uvažuje 4 hodinový vrchol medzi 8:00 - 12:00. Po príchode auta je nutné najskôr vyložiť palety z auta nízkozdvižným vozíkom do príjmovej zóny, kde dochádza k zdržaniu materiálu kvôli administratíve 60 minút. Vozík počas tohto zdržania môže vykonávať ostatné práce a potom sa vracia späť a prevezie palety na pozície, odkiaľ si ich preberie regálový zakladač.

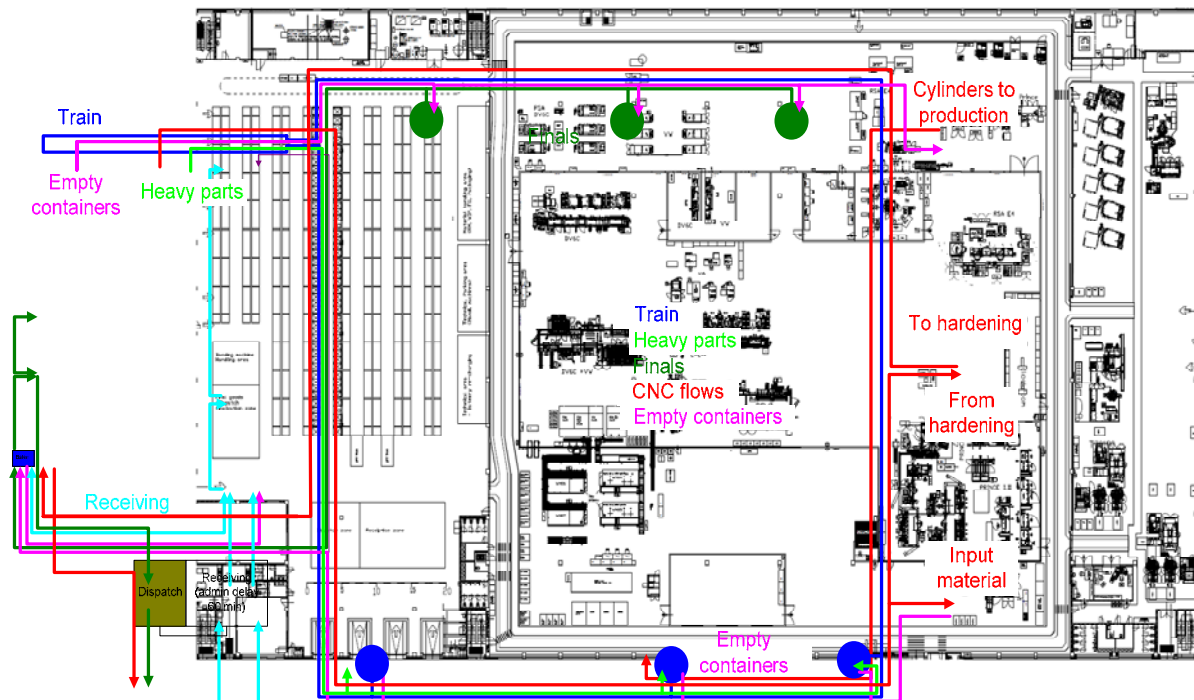
- Podobne prebieha expedícia hotových výrobkov (v simulácii je expedícia modelovaná ako príjem - proces manipulácie a vyťaženie rámp je rovnaký)



Obrázok 1. Príjem / expedícia - simulované jedným smerom

- Priemerný počet palet na aute, od ktorého sa odvíja dĺžka naloženia / vyloženia auta - na veľkom aute sa ráta s 20 paletovými miestami, na malom aute (nakladané / skladanom bočnými vrátami) sú 4 palety.

- b) Dopravník - v rámci areálu jazdí tzv. dopravník, ktorý preváža materiál zo starej haly, vzorky na testovanie kvality (ktoré je v starej hale) a šrot a ďalší odpad po areáli.
- c) CNC a Šrot - vo výrobnej hale dochádza tiež k obrábaniu a produkcii tzv. cylindrov v CNC strojoch, pri tom sa produkuje šrot, ktorý sa odváži cca 1 x denne cez expedíciu Dopravníkom do kontajnera umiestnenom v areáli.
- d) "Rakva" - hotové cylindre sú prevážané v hermeticky uzavretej rakve



Obrázok 2. Logistické toky v modeli

2.3. Obmedzenia v modeli

- Dverová priepustnosť - každé vozidlo má inú veľkosť
- Koridor medzi regálmi môže byť obsluhovaný iba vozíkom VNA s výnimkou krajných regálov, ktoré môžu byť obsluhované zakladačom
- nazdvíhané hmotnosti skladníkmi musia rešpektovať právne normy
- skladový areál sa skladá z 12 dlhých regálov a stojanov 4 krátkych rozdelených do sekcií podľa typu materiálu
- obeh procesu KLT kontajnerov
- Nedostatočná kapacity rámp pre automobily - autá sú preto obsluhované aj na piatej rampe, ktorá sa nenachádza na centrálnej recepcii a nebola plánovaná na tento účel
- Príjmový proces bol simulovaný za 60 minút meškanie, pretože zahŕňa proces administratívnej kontroly a skúšania vzoriek
- rýchlosť každého vozidla - vysokozdvížne vozíky a vozíky majú rýchlosť 8-10 km/h, VNA vozíky majú rýchlosťou 9 km/h

3. Výsledky simulácie

Najdôležitejším úzkym miestom v našej simulácii je dĺžka predávky materiálu logistikmi do regálov v priestore umývačiek. Pôvodný čas predávky bol stanovený na 2 minúty avšak vzhľadom na výsledky našej simulácie je tento čas neakceptovateľný v prípade plného využitia výrobných kapacít. Tento stav bol spôsobený najmä kontrolou a počítaním všetkých častí v každom KLT kontajneri pred samotným založením do regálu. Maximálne prípustný

čas predávky bol na základe výsledkov simulácie stanovený na 1,3 minúty, ideálnym by bol však čas 0,5 minúty. Ako možné riešenie tohto úzkeho miesta vidíme zmenu v organizácii delenia zodpovednosti pri kontrole a počítaní jednotlivých častí v KLT kontajneri a návrh nového IT riešenia pre lepšiu sledovateľnosť a identifikovateľnosť v procese.

Ďalším úzkym miestom je paletový priestor pri umývačkách, pretože výrobná hala nebola pôvodne navrhnutá pre súčasný objem výroby. Preto navrhujeme pre zlepšenie terajšieho stavu skrátenie doby predávky, zväčšenie priestoru pre palety, a následne modifikáciu počtu regálov pri umývačkách. Najviac používané materiály by mali byť dodávané priamo na paletové miesto a nie v KLT kontajneroch. Tento stav by ale zapríčinil väčšiu pracovnú zaťaženosť pracovníkov a nadvíhanú hmotnosť pre operátorov umývačiek a preto by sa muselo zmeniť množstvo pracovníkov tak aby boli dodržané legislatívne normy.

Sklad je rozdelený medzi manipulačnú a expedičnú zónu a z tohto dôvodu sme testovali rôznu proporčnosť medzi zónami pri rôznych výrobných scenároch. Navrhujeme prestavanie jedného príjmového miesta na príjmové miesto pre menšie autá, ktoré môže prebiehať počas plnej prevádzky, tak ako to bolo preskúšané v simulácii.

Pri porovnaní súčasnej situácie v závode, priestoru ktorý zaberá logistika a ktorý zaberá výroba, k situácii ktorá je aktuálna u iných výrobcov v danom obore pomocou metódy benchmarkingu, sme prišli k záveru, že dané proporčné číslo pre nami skúmaný podnik je nedostatočné. Z tohto dôvodu, tento problém vidíme ako jeden z hlavných pri budúcej expanzii spoločnosti.

4. Záver

V súčasnej dobe sú simulačné modeli používané pre analýzu veľkého množstva podnikových procesov v situácii keď nie je možné nájsť riešenie pomocou klasických analytických prístupov. V tejto prípadovej štúdii, sme overili správnosť využitia simulačných modelov pre logistické procesy medzi skladdom a produkciou. Na modelovanie procesu bol aplikovaný simulačný program Simul8, ktorý je svojou jednoduchosťou a prehľadnosťou vhodný na simuláciu podnikových procesov. Pomocou záťažových testov aplikovaných na simulačný model boli odskúšané rôzne možné stavy systému. Týmto sa poodhalili nové skutočnosti a mohli byť pripravené nové stratégie odozvy na tieto stavy. Takéto postupy by mohli byť použité aj pri modelovaní iných systémov v podobných inštitúciách.

Dedikácia

Tento článok vznikol za podpory grantu IGA F4/16/2011, Fakulta Informatiky a Statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze.

Použitá literatúra

1. PRINC, P.2010. Využitie simulačných metód v podnikovom procese. Bratislava, 2010.
2. BANKS, J. *Discrete event simulation*. New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
3. DLOUHÝ, M., FÁBRY, J., KUNCOVÁ, M., HLADÍK, T. *Simulace podnikových procesů*. Brno: Computer Press, 2007. 199s. ISBN 978-80-251-1649-4.

Kontaktné údaje

Ing. Peter Princ
Katedra ekonometrie

Fakulta informatiky a statistiky
VŠE v Praze
Tel: +420 224 09 5445
email: peter.princ@vse.cz

RRR-ALGORITMUS PRO ZONOTOPY

RRR-ALGORITHM FOR ZONOTOPES

Miroslav Rada¹

Abstrakt

Článek je motivován studiem množiny potenciálních MNČ-odhadů intervalové regrese. Je známo, že pro bodové vstupy a intervalové výstupy má tato množina speciální kombinatorickou strukturu, konkrétně se jedná o zonotop – speciální typ polyedru reprezentovatelného jako Minkowského součet konečného počtu úseček nebo také jako lineární obraz krychle. Článek je zaměřen na rozbor dalších možných, prakticky použitelných, reprezentací a charakteristik zonotopu. Hlavním výstupem článku je metaalgoritmus RRR, který pomocí rekurze a rekonstrukce obrazů zonotopu v nižších dimenzích spočte vrcholovou a fazetovou reprezentaci zonotopu a jeho objem.

Klíčová slova: zonotop, intervalová regrese, RRR-algoritmus, objem

Abstract

The paper is motivated by examination of the set of all OLS-estimations of interval regression. It's well known that the set has special combinatorial properties for the case of "crisp input-interval output", namely it's the zonotope – a special type of polyhedron representable by Minkowski sum of finite line segments or by linear mapping of hypercube. The paper deals with the analysis of further practically usable representations or properties of zonotopes. The main result of the paper is the metaalgorithm RRR, which is based on recursion and reconstruction of mappings of zonotope in lower dimensions. It solves the vertex- and facet-enumeration problems and computes volume of a zonotope.

Keywords: zonotope, interval regression, RRR-algorithm, volume

1 INTERVALOVÁ REGRESE A ZONOTOPY

1.1 Intervalový regresní model a možnosti vyjádření jeho řešení

Pod pojmem *intervalový regresní model* se rozumí dvojice (X, \mathbf{y}) taková, že X je matice o rozměru $n \times p$, která má plnou hodnotu, a $\mathbf{y} = [y_d, y^h]$ je intervalový vektor rozměru $n \times 1$. *MNČ-řešení intervalového regresního modelu* je množina

$$(1) \quad B(X, \mathbf{y}) = \{\beta: \beta \in \mathbb{R}^p; \beta = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}; y_d \leq \mathbf{y} \leq y^h\}.$$

Pod pojmem intervalové regrese je možné si představit klasickou lineární regresní rovnicí $E(\mathbf{y}) = X\beta_0$, kde β_0 je neznámý odhad skutečných parametrů závislosti, přičemž přesné hodnoty \mathbf{y} nejsou známy; je známo pouze to, že patří do intervalů \mathbf{y} . $B(X, \mathbf{y})$ je tedy řešením problému „Jsou dána přesná vstupní data ovlivňující nepřesně (intervalově) zadanou velikost výstupu – jaké jsou možné MNČ-odhady závislosti mezi vstupem a výstupem?“.

¹ Publikace vznikla s podporou projektů GA ČR 402/09/H045 a IGA VŠE F4/18/2011.

Je možné si povšimnout, že nad intervalovým vektorem \mathbf{y} se nepředpokládá žádné pravděpodobnostní rozdělení. Pokud by nějaké rozdělení zadané bylo, bylo by možné se na množinu $B(X, \mathbf{y})$ dívat jako na obor hodnot takového rozdělení.

Obecnější a ucelnější studii intervalové regrese, zejména zobecnění na podobu (X, \mathbf{y}) , kde jak matice vstupů, tak vektor výstupů jsou zadány intervalově, podává včetně možných aplikací a relevantní literatury práce Černý, Antoch, Hladík (2011).

Implicitní definice množiny $B(X, \mathbf{y})$ pomocí rovnice (1) neposkytuje příliš jasnou představu o její podobě. Je nicméně zřejmé, že se jedná o omezený polyedr, a jak bude patrné z dalšího textu, jde o polyedr se speciálními vlastnostmi, které do určité míry usnadňují jeho vyjádření pomocí „rozumnějších“ zápisů. Obecný polyedr je možné popsat např. jako konvexní obal množiny vrcholů (platí pro omezené mnohostěny, nazvěme tuto množinu *vrcholová reprezentace polyedru*) nebo jako průnik množiny poloprostorů (*fazetová reprezentace*). Znalost vrcholů jakožto krajních bodů přináší informaci o „extrémních“ hodnotách odhadovaných regresních parametrů a umožňuje vyjádřit všechny jejich hodnoty jako konvexní kombinaci vrcholů. Fazetová (poloprostorová) reprezentace může být užitečná např. pro optimalizaci nad MNC-řešením, poskytuje také snadnou kontrolu, zda zadaný vektor regresních parametrů patří do MNC-řešení intervalového regresního modelu (ačkoli tato otázka může být snadno zodpovězena vyřešením úlohy lineárního programování, viz Černý, Rada (2010)), apod.

Vzhledem k tomu, že velikost vrcholové, resp. fazetové reprezentace obecného polyedru může být exponenciální funkcí velikosti vstupu (vstupem rozumějme např. dimenzi pro obecný polyedr nebo počet parametrů v případě intervalové regrese), může být účelné „náročný“ popis polyedru nahradit méně náročným, byť méně přesným, geometrickým objektem. Zajímavé výsledky se týkají zejména aproximace polyedrů elipsoidy.

Další užitečnou charakteristikou polyedru může být jeho objem – v případě množiny $B(X, \mathbf{y})$ je to přirozená míra „neurčitosti“, kterou do klasického regresního modelu přináší neurčitost intervalových pozorování.

Článek je organizován následovně – nejprve jsou popsány speciální vlastnosti $B(X, \mathbf{y})$ jako zonotopu – speciálního typu polyedru, a následně jsou rozebrány známé výsledky týkající se jeho reprezentace. Stěžejní částí článku je druhá kapitola, kde je navržen algoritmus řešící problémy enumerace vrcholů a fazet zonotopu a výpočtu objemu zonotopu.

1.2 Zonotop

Minkowského součet dvou množin $A \in \mathbb{R}^d$ a $B \in \mathbb{R}^d$ je operace definovaná jako

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Zonotop je konvexní polyedr, reprezentovatelný jako Minkowského součet konečného počtu úseček, zonotop Z v \mathbb{R}^d je tedy $Z = L_1 + L_2 + \dots + L_m$, kde $L_i = [a_i, b_i]$ je úsečka s krajními body $a_i, b_i \in \mathbb{R}^d$ pro $i = 1, \dots, m$. Alternativně je možné psát

$$(2) \quad Z = s + G_1 + G_2 + \dots + G_m,$$

přičemž $s = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ a $G_i = [0, g_i]$, $g_i = b_i - a_i$ pro všechna $i = 1, \dots, m$. Vektor s je *posunutí* zonotopu a vektory g_i se budou nazývat *generátory* zonotopu. Zonotop je s využitím předchozího značení možné jednoznačně popsat pomocí s a seznamu generátorů g_1, \dots, g_m . Takový zonotop se bude značit $Z(s; g_1, \dots, g_m)$. Pro úplnost dodejme, že *dimenze* zonotopu je dimenze afinního obalu seznamu generátorů.

Zonotopy mají zajímavé geometrické vlastnosti:

- a) Jsou středově symetrické. Tato vlastnost plyne z faktu, že úsečky jsou středově symetrické a Minkowského součet zachovává středovou symetrii.
- b) Krychle v \mathbb{R}^d je speciální případ zonotopu s generátory navzájem kolnými.
- c) Každý zonotop je lineární obraz nějaké krychle s dimenzí nejvýše m , kde m je počet generátorů zonotopu. Pro obecný zonotop Z v \mathbb{R}^d je tedy možné psát

$$(3) \quad Z = \{x: x = Gy, y_d \leq y \leq y^h, y \in \mathbb{R}^m\},$$

kde matice G má rozměr $d \times m$. Důkaz tohoto tvrzení je možné najít např. v Černý, Rada (2010).

- d) Každé lineární zobrazení zonotopu je samo o sobě zonotopem. Tato vlastnost bezprostředně plyne z předchozích dvou tvrzení, neboť při zobrazení $f(x) = G'x$ bude obraz zonotopu Z vyjádřen jako

$$Z' = \{G'x: x \in Z\} = \{z: z = G'Gy, y_d \leq y \leq y^h\}.$$

- e) Mějme zonotop $Z = \mathcal{Z}(s; g_1, g_2, \dots, g_n)$, přičemž $g_1 = \alpha g_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$Z = \begin{cases} \mathcal{Z}(s; g_1 + g_2, g_3, \dots, g_n) & \text{pro } \alpha \geq 0, \\ \mathcal{Z}(s + g_2; g_1 - g_2, g_3, \dots, g_n) & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

Generátor g_2 nazveme *redundantním*. Redundantní generátory je možné postupně odstraňovat použitím výše uvedeného převodu. Procedura, která odstraní všechny redundantní generátory, bude užitečná v kapitole 2, pojmenujme ji *red*.

Zavedme následující značení: symbolem A_i se značí i -tý sloupec dané matice A .

Připomeňme nyní tvrzení c) z předchozího výčtu a předpokládejme zonotop Z z tohoto tvrzení. Pokud položíme $s = Gy_d$ a $g_i = G_i(y_i^h - y_{id})$, je možné zonotop Z napsat pomocí vzorce (2), kde $G_i = [0, g_i]$.

Pokud se nyní vrátíme k intervalovému regresnímu modelu (X, \mathbf{y}) z podkapitoly 1.1 a jeho MNČ-řešení $B(X, \mathbf{y})$, pak je možné s využitím předchozích definic a tvrzení psát, že MNČ-řešení

$$B(X, \mathbf{y}) = \mathcal{Z}\left(Qy_d; Q_{\cdot 1}(y_1^h - y_{1d}), \dots, Q_{\cdot n}(y_n^h - y_{nd})\right),$$

kde $Q = (X^T X)^{-1} X^T$.

1.3 Reprezentace MNČ-řešení jako různých popisů zonotopu

Zápis množiny $B(X, \mathbf{y})$ jako zonotopu otevírá možnost použít k jejímu popisu algoritmů specifických pro zonotopy, přičemž jako vstup pro tyto algoritmy je k dispozici popis pomocí generátorů.

Pro algoritmy formulované nad zonotopy je důležitá věta o mezích počtů fází a vrcholů zonotopu (viz. Ziegler (2004)), podle které pro počet fází f_{d-1} a počet vrcholů f_0 zonotopu dimenze d o m generátorech platí

$$f_{d-1} \leq 2 \binom{m}{d-1} \text{ a } f_0 \leq 2 \sum_{i=0}^{d-1} \binom{m-1}{i}.$$

Navíc, nerovnosti výše jsou pro speciální zonotopy splněné jako rovnosti, a proto tyto meze není možné obecně zlepšit. Není proto možné pro obecný zonotop navrhnout algoritmus, který by v čase polynomiálním v dimenzi zonotopu spočítal ze zadaných generátorů jeho fazetovou nebo vrcholovou reprezentaci.

Pro problémy podobného typu, tj. kde velikost výstupu je exponenciální funkcí velikosti vstupu, má nicméně smysl preferovat algoritmy, pro které se velikost vypočteného výstupu zvětšuje polynomiálním tempem. Například pro enumeraci vrcholů jisté třídy zonotopů o m generátorech a dimenzi d je zřejmě možné navrhnout triviální algoritmus, který bude postupně testovat obrazy všech vrcholů krychle, která je jeho inverzním obrazem ve smyslu vzorce (3), a vypíše ty vrcholy, které leží na hranici zkoumaného zonotopu. Takový algoritmus zpracuje 2^m bodů, přičemž pro danou třídu zonotopů může být vrcholy např. jen 2^d z nich. Algoritmus tedy pro každý vypsání vrchol zonotopu musí ověřit řádově 2^{m-d} vrcholů krychle. Jistě by bylo účelné navrhnout takový algoritmus, který na vypsání nového vrcholu bude potřebovat čas nejvýše polynomiální v počtu celkem vypsání vrcholů, nebo dokonce čas polynomiální ve velikosti vstupu.

Další vhodnou vlastností algoritmů s exponenciální časovou složitostí je *kompaktnost*. Algoritmus je kompaktní, pokud je jeho paměťová složitost polynomiální ve velikosti vstupu. (Ne)užitečnost (ne)kompaktního algoritmu je možné demonstrovat na algoritmu pro výpočet fazetové reprezentace d -dimenzionálního zonotopu – je možné navrhnout triviální algoritmus, který postupně projde všechny $(d-1)$ -tice generátorů zonotopu a spočte, jakou fazetu tyto generátory určují. V případě, že je nově spočtená fazeta originální (tj. nebyla dosud vygenerována jinou $(d-1)$ -ticí generátorů, přidá ji do seznamu fazet, jinak ji zahodí. Takový algoritmus má pro svůj běh nutně exponenciální paměťové požadavky. Užitečnější by byl zřejmě algoritmus, u kterého by bylo implicitně zaručeno, že výstup nebude obsahovat duplicitní fazety a u kterého by paměťové požadavky bylo možné omezit polynomem závislým jen na vstupu.

Pro získání fazetové reprezentace zonotopu je možné použít Seymourův algoritmus pro generování nadrovin matroidů (Seymour (1994)), který je polynomiální ve velikosti vstupu a výstupu, nicméně není kompaktní.

Pro výpis všech vrcholů zonotopu existuje kompaktní algoritmus polynomiální ve velikosti vstupu a výstupu, viz Avis, Fukuda (1996).

Obecně se předpokládá (viz Ziegler (2004)), že výpočet objemu zonotopu je exponenciálně časově složitý problém. Zonotop Z dimenze d o m generátorech je možné rozdělit do rovnoběžnostěn tvořených jednotlivými d -ticemi generátorů. Jeho objem je poté roven součtu objemů těchto rovnoběžnostěn, tedy (předpokládejme bez újmy na obecnosti, že Z má plnou dimenzi)

$$(4) \quad \text{vol}(Z) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq m} |\det(g_{i_1} \dots g_{i_d})|.$$

2 RRR ALGORITMUS

Reduction-and-reconstruction-Recursion algoritmus je metaalgoritmus umožňující řešit (přinejmenším) následující úlohy týkající se zonotopů:

- a) výpočet objemu,
- b) enumerace vrcholů,
- c) enumerace fazet.

Algoritmus při svém běhu volá procedury *BasicCase* a *Combine*, jejichž konkrétní podoba je vázaná na úlohu, k jejímuž řešení se RRR algoritmus používá.

Na vstupu algoritmu se očekává zonotop zadaný seznamem generátorů v \mathbb{R}^d a posunutím, tedy $Z = Z(s; g_1, \dots, g_n)$. Je možné si povšimnout, že pro každou permutaci π prvků $\{1, \dots, n\}$

je $Z(s; g_1, \dots, g_n) = Z(s; g_{\pi(1)}, \dots, g_{\pi(n)})$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že ze seznamu generátorů zonotopu g_1, \dots, g_n jsou generátory $g_1, \dots, g_{\dim(Z)}$ lineárně nezávislé vektory, a mimo to také navíc předpokládejme, že dimenze Z je d . Řekněme, že procedura *red* navržená v předchozí kapitole kromě redundantních generátorů také změní pořadí tak, aby prvních d generátorů bylo lineárně nezávislých.

Podoba řídicí procedury, která se rekurentně vyhodnocuje, je následující:

```
[1] Function RRR( $\hat{s}; \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_n$ )
[2]   ( $s; g_1, \dots, g_n$ ) := red( $\hat{s}; \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_n$ )
[3]   if  $n = \dim(g_1, \dots, g_n)$  then
[4]     OUTPUT := BasicCase( $s; g_1, \dots, g_n$ )
[5]   else
[6]     DATA1 := RRR( $s; g_1, \dots, g_{n-1}$ )
[7]     DATA2 := RRR( $P(s, g_n); P(g_1, g_n), \dots, P(g_{n-1}, g_n)$ )
[8]     OUTPUT := Combine( $s; g_1, \dots, g_n; DATA_1, DATA_2$ )
[9] end.
```

Procedura $P(v, g)$ je projekční funkce, promítající vektor $v \in \mathbb{R}^d$ rovnoběžně s generátorem g do vhodně zvolené nadroviny. V textu předpokládejme nadrovinu

$$(5) \quad H = \{\xi: \xi \in \mathbb{R}^d, \xi_i = 0\}$$

pro nějaké i takové, že $g \notin H$.

Základní idea algoritmu spočívá v postupném výpočtu zonotopu Z pomocí posloupnosti zonotopů Z_d, \dots, Z_n , kde $Z_i = Z(s; g_1, \dots, g_i)$ pro i splňující $d \leq i \leq n$.

První člen posloupnosti Z_d je vzhledem k předpokladu, že prvních d generátorů Z je lineárně nezávislých, kombinatoricky jednoduchý zonotop odpovídající d -dimenzionálnímu rovnoběžnostěnu, pro nějž je výpočet požadovaného výstupu triviální. Výpočet výstupu pro Z_d řeší procedura *BasicCase*.

Při konstrukci každého dalšího, řekněme i -tého, zonotopu Z_i se použije již spočtený výstup pro zonotop Z_{i-1} a zkoumá se, jakým způsobem se výstup změní přidáním generátoru g_i . Algoritmus je založen na pozorování, že přidání nového generátoru k zonotopu vede k „roztažení“ jeho střední části. Toto roztažení je dáno definicí Minkowského součtu – pokud je x prvkem množiny Z_{i-1} , pak, vzhledem k $Z_i = Z_{i-1} + G_i$, musí být $x' = x + g_i$ prvkem Z_i . Jak bude patrné dále, pokud bude známa konkrétní kombinatorická podoba této „střední části“, bude možné vypočítat výstup pro zonotop Z_i . Za „střední část“ nyní prohlásme zobrazení zonotopu Z_{i-1} rovnoběžně s generátorem g_n do nějaké nadroviny (zobrazení jednotlivých bodů pomocí projekční funkce $P(v, g)$). Při znalosti výstupu algoritmu pro oba zonotopy, tj. pro Z_{i-1} a jeho obraz, jsou tyto výstupy zpracovány pomocí procedury *Combine* do výstupu pro zonotop Z_i .

2.1 Aplikace 1: Výpočet objemu

Pro výpočet objemu definujme procedury *BasicCase* a *Combine* následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \text{BasicCase}(s; g_1, \dots, g_n) &= |\det(g_1, \dots, g_n)| \\ \text{Combine}(s; g_1, \dots, g_n; \alpha_1; \alpha_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 |g_n| \end{aligned}$$

Symbol g_{ni} v předchozím vzorci označuje i -tou složku vektoru g_n , index i označuje index proměnné ξ_i v definici nadroviny (5), do které procedura P promítala zonotop Z_{n-1} .

Idea pro proceduru *Combine* pro tuto aplikaci RRR jednoduchá – zonotop Z_i má objem zonotopu Z_{i-1} zvětšený o objem „roztažení“. Objem „roztažení“ je „délka roztažení“ vynásobená „velikostí roztahované množiny“. Z definice Minkowského součtu vyplývá, že

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_{i-1} + G_i = \{x + \alpha g_i : x \in Z_{i-1}; 0 \leq \alpha \leq 1\} = \\ &= Z_i \cup \{x' + \alpha g_i : x' \in \text{upperBoundary}(Z_{i-1}, g_i); 0 < \alpha \leq 1\}, \end{aligned}$$

kde $\text{upperBoundary}(Z, g) = \{x : x = \text{argmax}_y \{gy : y \in Z \cap x + g\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ je „horní“ hranice polyedru Z , tedy, neformálně řečeno, body, které budou generátorem g_i posunuty „nejdále“. Počet těchto bodů ($d-1$ -dimenzionální objem) vynásobený délkou vektoru g_i pak zřejmě udává přírůstek objemu zonotopu Z_{i-1} . Počet bodů na horní hranici je objemem obrazu Z_{i-1} projekcí do roviny kolmé na g_i , délka g_i je euklidovskou L_2 normou.

Druhý možný přístup ke konstrukci procedury *Combine* a zejména k volbě projekční funkce $P(v, g)$ vychází přímo ze vzorce (4). Na objem Z_{i-1} je možné se dívat jako na součet determinantů matic, které je možné vytvořit z generátorů g_1, \dots, g_{i-1} . Druhý sčítanec procedury *Combine*, tedy $\alpha_2 |g_{ni}|$ interpretujme následovně. Pomiňme numerické potíže a předpokládejme, že determinant matice A počítáme převodem A na dolní trojúhelníkový tvar a vynásobením prvků na diagonále. Na promítání pomocí funkce P je vlastně anulování jedné složky všech sloupců matic tvořených těmi d -ticemi generátorů, které obsahují generátor g_i . Hodnota α_2 je součet všech subdeterminantů matic rozměru $d - 1 \times d - 1$ tvořených promítnutými generátory $P(g_1, g_i), \dots, P(g_{i-1}, g_i)$.

Výhodou takového postupu oproti přímému výpočtu pomocí vzorce (4) je fakt, že jsou v rámci funkce *red* implicitně vynechávány nulové determinanty.

2.2 Aplikace 2: Enumerace vrcholů

Pro triviální případ enumerace vrcholů rovnoběžnostěnu je možné psát

$$\text{BasicCase}(s; g_1, \dots, g_n) = \left\{ v : v = s + \sum_{i=1}^n c_i g_i, c \in \{0,1\}^n \right\}.$$

Z předchozí podkapitoly vyplývá, že při přechodu od Z_{i-1} k Z_i se vytvoří nová „horní hranice“ zonotopu posunutím původní o g_i , pro každý vrchol v patřící do horní hranice Z_{i-1} bude součástí vrcholového popisu Z_i vrchol $v + g_i$. Pokud analogicky definujeme i „spodní hranici“ zonotopu, vrcholy Z_{i-1} ležící na této hranici jsou i vrcholy Z_i . Množinu vrcholů Z_{i-1} můžeme rozdělit na tři disjunktní podmnožiny: množinu vrcholů patřících zároveň do horní i spodní hranice E (extrémní body obrazu Z_{i-1}), množinu vrcholů patřících pouze do horní hranice H , a množinu vrcholů patřících pouze do dolní hranice D , ze středové symetrie zonotopu plyne, že vrcholy D a H jsou si navzájem středově symetrickými obrazy.

- [1] **Function** $\text{Combine}(s; g_1, \dots, g_n; \text{VertexSet}_1, \text{VertexSet}_2)$
- [2] $E := \{v, v + g_n : v \in \text{VertexSet}_1, P(v, g_n) \in \text{VertexSet}_2\}$
- [3] $D := \{v : v \in \text{VertexSet}_1, 0 = \max_w \{w : -wg_n - s + v = (g_1, \dots, g_{n-1})y, y \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 \leq y \leq 1\}\}$
- [4] $H := \{v + g_n : v = c - 2v', v' \in D, c = s + \sum_{i=1}^{n-1} g_i/2\}$
- [5] $\text{OUTPUT} := E \cup H \cup D$
- [6] **end.**

2.3 Aplikace 3: Enumerace fazet

Mějme proceduru $\text{Facet}(s; g_1, \dots, g_n; j_1, \dots, j_{d-1})$, která pro daný zonotop vypočítá nadrovinu (a její poloprostor), ve kterém leží fazeta (a zonotop sám) určená generátory s indexy

j_1, \dots, j_{d-1} . Při znalosti takové procedury budeme jako adekvátní výstup enumerace fazet zonotopu Z považovat množinu $d-1$ -prvkových indexních množin, kterou označíme $J(Z)$, vzhledem ke středové symetrii každý prvek takové množiny bude generovat 2 fazety.

S reprezentací výstupu pomocí indexních množin souvisí určitá komplikace – při návratu z na vyšší úroveň rekurze je nutné mít informaci, kterým generátorům zonotopu vyšší úrovně odpovídají generátory zonotopu nižší úrovně. V jednotlivých procedurách bude proto předáván seznam indexů původních generátorů j_1, \dots, j_n , jimž odpovídají generátory aktuálně zpracovávaného zonotopu. V případě, že bude v rámci procedury *red* zmenšován počet generátorů, bude zachován menší z indexů.

Procedura *BasicCase* má opět triviální podobu – stěny rovnoběžnostěnu dimenze n jsou určeny $n-1$ -ticemi generátorů.

$$BasicCase(s; g_1, \dots, g_n; j_1, \dots, j_n) = \{\{j_1, \dots, j_n\} \setminus \{j_i\} : 1 \leq i \leq n\}$$

Co se týče procedury *Combine*, využijeme pozorování, že $J(Z_{i-1})$ je podmnožinou $J(Z_i)$. Nově vzniklé fazety jsou určeny přidaným generátorem g_i a generátory určujícími fazety obrazu Z_{i-1} , tedy

$$Combine(s; g_1, \dots, g_n; IndexSet_1, IndexSet_2; j_1, \dots, j_n) = \\ = IndexSet_1 \cup \{set \cup j_n : set \in IndexSet_2\}.$$

Pro vypsání fazet ve smyslu poloprostorové reprezentace zonotopu je pak nutné na všechny indexní množiny spustit proceduru *Facet*.

Výše uvedená formulace podobně jako při výpočtu objemu implicitně vylučuje některé indexní množiny odpovídající duplicitním fazetám. Formulace algoritmu výše přesto může duplicitní fazety generovat. Pro odstranění duplicit je možné vždy před „přidáním“ individuální indexní množiny $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ do výsledku otestovat, zda existuje takový generátor $g_k, k < \max(J)$, že $g_k \cup J$ tvoří množinu lineárně závislých vektorů. Pokud ano, pak bude daná fazeta vygenerována jinou indexní množinou a množina J se do výstupu nepřidává.

Použitá literatura

1. D. Avis, K. Fukuda, Reverse search for enumeration, *Discrete Applied Mathematics* 65 (1996) 21–46.
2. M. Černý, J. Antoch, M. Hladík, On the possibilistic approach to linear regression models involving uncertain, indeterminate or interval data, Technical Report, University of Economics, Prague, 2011; <http://nb.vse.cz/~cernym/plr.pdf>.
3. M. Černý, M. Rada, A note on linear regression with interval data and linear programming, In: *Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XV*, Kluwer, Iura Edition, Slovakia, 2010, pp. 276–282.
4. P. D. Seymour, A note on hyperplane generation, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 61 (1994), 88–99.
5. G. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, Germany, 2004.

Kontaktní údaje

Ing. Miroslav Rada

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 4, 130 00 Praha 3

Tel: (+420) 224 095 443

email: miroslav.rada@vse.cz

LOKAČNÉ MODELY VEREJNÉHO SEKTORA. PUBLIC SECTOR LOCATION MODELS

Marian Reiff

Abstrakt

Pre aplikácie vo verejnom sektore sú typické úlohy zabezpečenia pokrytia a naopak pre komerčný sektor úlohy typu medián. Cieľom úlohy zabezpečenia pokrytia je poskytnúť zákazníkovi adekvátne pokrytie. Úlohu pokrytie možno definovať napríklad ako podmienku, že v maximálnej vzdialenosti od zákazníka sa nachádza aspoň jedno obslužné zariadenie a cieľom je minimalizovať celkový počet zariadení. Obdobou úlohy zabezpečenia pokrytia je úloha maximálneho pokrytia. V tejto úlohe nie je cieľom zabezpečiť pokrytie úplne všetkých zákazníkov, ale maximalizovať počet uspokojených požiadaviek zákazníkov ktorí sú pokrytí a to s fixným počtom obslužných zariadení.

KLúčové slová: verejný sektor, úlohy rozmiestňovania,

Abstract

For applications in the public sector are typical problems of ensuring coverage and vice versa for the commercial sector median type problems. The aim of the role of security coverage is to provide customers with adequate coverage. Covering problem can be defined as a problem with condition that within maximum distance from the customer is at least one operating facility and the goal to minimize the overall number of located facilities. A similar task is to ensure maximum coverage. This role is to ensure full coverage of all customers, but to maximize the number of satisfied covered customer with a fixed number of service facilities..

Keywords: public sector, facility location

1 DYNAMICKÝ MODEL ROZMIESTNENIA ZARIADENÍ VEREJNÉHO SEKTORA - DYNAMICKÝ MODEL MAXIMÁLNEHO POKRYTIA NADPIS KAPITOLY

Pre zariadenia od ktorých sa očakáva, že budú slúžiť po dlhšie časové obdobie, možno vo všeobecnosti povedať, že podmienky ako dopyt zákazníkov, distribučné náklady platné na začiatku obdobia, sa s veľkou pravdepodobnosťou časom menia. Taktiež možno tvrdiť, že premiestnenie týchto zariadení prináša so sebou dodatočné náklady (Wesolowsky, 1973) a preto je potrebné spraviť také rozhodnutie o rozmiestnení ktoré zabezpečí ziskovosť počas celej doby životnosti zariadenia a nie len v súčasnosti (Owen a Daskin, 1998). Využitie optimalizácia nákladov spojených s premiestnením zariadení, čiže využitie výhod plánovaného premiestnenia zariadení je možné vzhľadom na fakt, že zmeny v statických parametroch modelov je možné ekonometricky odhadnúť (Wesolowsky, 1973).

Tato špecifikácia je možná na základe nasledujúcich rozdielov. V úlohách rozmiestnenia zariadení v ktorých umiestnenia zariadenia je nezávislé na čase, manažér vyberie lokalitu ktorá je zisková počas definovaného časového horizontu naopak v úlohách rozmiestnenia prerozmiestnenia zariadení manažér určí počiatočnú lokalitu a stanový čas a nasledujúcu lokalitu do ktorej sa premiestni výrobné alebo skladové zariadenie.

(Schilling, 1980) rozpracoval prístup modelovania rozmiestňovacích úloh inšpirovaný potrebou verejného sektora rozmiestniť strediská rýchlej zdravotnej pomoci. Autor rozvinul úlohu viackriteriálneho maximálneho pokrytia nasledovne. Nech:

d_{ij} predstavuje najkratšiu vzdialenosť alebo čas medzi uzlom i a uzlom j v období t ,

$N_{it} = \{ \}$ je množina lokalít z ktorých je možné pokryť uzol i v období t ,

h_{it} predstavuje dopyt v uzle i v období t ,

P_t predstavuje počet obslužných zariadení v prevádzke v období t .

Definujme variabilné premenné modelu nasledovne:

$$x_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{ak obslužné zariadenie je v prevádzke v lokalite } j \text{ v období } t, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{ak uzol } i \text{ je pokrytý v období } t, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Matematická formulácia modelu:

$$\max \sum_{i=1}^m h_{it} y_{it} \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{it}} x_{jt} \geq y_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, T \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jt} = P_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1.3)$$

$$x_{jt} \geq x_{j,t-1} \quad j = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T \quad (1.4)$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\} \quad j = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T \quad (1.5)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, T \quad (1.6)$$

Model zlučuje T úloh maximálneho pokrytia, (pre každé obdobie jedna úloha maximálneho pokrytia, a to s celkovým počtom období T). Účelová funkcie (1.1) je T rozmerný vektor individuálnych hodnôt účelovej funkcie pre každé obdobie, vo všeobecnosti pre každé obdobie s rôznou hodnotou účelovej funkcie. Na základe ohraničenia (1.4) sa predpokladá, že ak je zariadenie už raz otvorené, zotrúva otvorené aj v nasledujúcich obdobiach.

2. ÚLOHA MAXIMÁLNEHO POKRYTIA SO STOCHASTICKÝM DOPYTOM A POTENCIÁLNYM ZAHLTENÍM

Teóriu obsluhy využívajú aj autori (Berman a Krass, 2004) v úlohách rozmiestnenia zariadení so stochastickým dopytom a s potenciálnym zahltením zariadení. Za náhodnými prvky modelu možno považovať dopyt zákazníkov ktorý je kvantifikovaný nielen množstvom ale aj časom a druhým prvkom náhodnosti je možná strata dopytu zákazníka (môže to byť aj pokuta, penále) v prípade ak zariadenie nie je schopné adekvátne obslúžiť zákazníka a to z dôvodu zahltenia obslužného zariadenia. Cieľom úlohy je nájsť najlepšie rozmiestnenie množiny zariadení, ako aj určiť obslužné kapacity týchto zariadení k_j , teda určiť počet obslužných kanálov v danom zariadení j . Na výsledný navrhnutý systém sa možno pozeráť ako na priestorovo rozvrhnutý systém hromadnej obsluhy s M možnými frontami

a s $\sum_{j=1}^M k_j$ možnými kanálmi obsluhy. Výsledný model spája problémy výpočtovej náročnosti

modelov rozmiestnenia (väčšina patrí medzi NP úlohy) s dynamikou obslužných systémov čoho výsledkom je „neriešiteľná“ úloha. Pri tvorbe prakticky využiteľného modelu je preto potrebné z tohto dôvodu prijať niektoré zjednodušujúce predpoklady a aproximácie. Jednou s hlavných aplikačných oblastí modelov tohto typu je rozmiestňovanie zariadení verejného sektora ako napríklad strediská rýchlej zdravotnej starostlivosti, hasiči, policajné stanice a tak ďalej. V takýchto typoch úloh je dôležitá schopnosť rýchlej odozvy obslužného zariadenia v prípade prijatia telefonической požiadavky. Charakteristickými vlastnosťami týchto úloh sú nepredvídateľnosť množstva prichádzajúcich požiadaviek a času kedy sú prijaté požiadavky a ich efekt na výkonnosť zahľteného systému, vyplývajúci z prijatia príliš veľkého počtu požiadaviek na obsluhy v určitom časovom období.

Úloha maximálneho pokrytia zákazníkov je úlohou so statickým priradením zákazníkov k zberným centrá, to znamená, že ak je zákazník priradený k danému stredisku, tak jeho požiadavku je možné spracovať iba obslužnými kanálmi z daného strediska, ku ktorému je priradený. Priradenie zákazníka ku stredisku môže prebiehať dvoma spôsobmi, a to centralizovane, priradením zákazníka k stredisku systémom, alebo zákazník si vyberie sám stredisko na základe nejakého kritéria, napríklad kritérium čo najbližšie k zákazníkovi. Úlohami maximálneho pokrytia sa zaoberajú autori (Marianov a Serra, 1998) a navrhli dva modely. Úlohou je rozmiestniť M stredísk obsluhy a priradiť ich k jednotlivým zákazníkom, pričom zákazník dochádza do strediska za účelom poskytnutia služby. Model predpokladá, že zákazník je pokrytý ak sa nachádza v určitej vzdialenosti od strediska a pravdepodobnosť, že v stredisku musí čakať v rade s najviac c ďalšími zákazníkmi je aspoň α , alebo alternatívne, pravdepodobnosť, že zákazník bude obslužený do určitého času τ po príchode do strediska je aspoň α .

Nech:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ak v lokalite } j \text{ je umiestnené stredisko,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak zákazník } i \text{ je priradený k stredisku } j, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^X y_{ij} \quad (1.7)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, j = 1, 2, 3, \dots, N_i \quad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^{N_i} y_{ij} \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^X x_j = M \quad (1.10)$$

$$P(\text{v zariadení } j \text{ čaká v rade najviac } c \text{ zákazníkov}) \geq \alpha \quad j = 1, 2, 3, \dots, X \quad (1.11)$$

alebo

$$P(\text{doba čakania v zariadení } j \leq \tau) \geq \alpha \quad j = 1, 2, 3, \dots, X \quad (1.12)$$

$$y_{ij} = \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, j = 1, 2, 3, \dots, X \quad (1.13)$$

$$x_j = \{0, 1\} \quad j = 1, 2, 3, \dots, X \quad (1.14)$$

Ohraničenia modelu sa vo väčšine zhodujú s ohraničeniami klasickej úlohy maximálneho pokrytia. Prvé ohraničenia (1.8) zabezpečuje, že zákazník i je priradený k stredisku (zariadeniu) v lokalite j iba v tom prípade, ak sa v tejto lokalite otvorí stredisko pre obslužné kanály. Druhé ohraničenie (1.9) zabezpečuje, že každý zákazník je priradený najviac k jednému stredisku a tretie ohraničenie (1.10) limituje počet rozmiestnených stredísk na M . Odlišujúcimi ohraničeniami sú ohraničenie (1.11) a (1.12) zabezpečujúce pokrytie zákazníka definované pravdepodobnosťou čakania v stredisku, pričom pravdepodobnosť, že musí čakať v rade s najviac c ďalšími zákazníkmi je aspoň α , respektíve pravdepodobnosť, že zákazník bude obslužený do určitého času τ po príchode do strediska je aspoň α . Model možno využiť pri rozmiestňovaní fixných obslužných kanálov ako zdravotné strediská, distribučné centrá alebo banky. Požiadavky na pokrytie zákazníkov možno modelovať s využitím teórie hromadnej obsluhy, konkrétne s využitím charakteristík systémov obsluhy pre jednotlivé bližšie špecifikácie obslužné systémy. Ľavé strany ohraničení sú väčšinou kasajúcou funkciou koeficientu využitia ψ a počtu serverov k . Na základe tohto predpokladu možno určiť dopredu kritickú hodnotu ψ a linearizovať tak ohraničenie s ohľadom na počet obslužných kanálov k .

Použitá literatúra

1. Berman, O. and D. Krass 2004. Facility Location Problems with Stochastic Demands and Congestion. *Facility location: applications and theory*. Z. Drezner and H. W. Hamacher. Heidelberg, Springer.
2. MARIANOV, V. a SERRA, D. 1998. Probabilistic Maximal Covering Location-Allocation for Congested System. In *Journal of Regional Science*, roč. 38, č. 3, s. 401 - 424.
3. OWEN, S. a DASKIN, M. S. 1998. Strategic facility location: a review. In *European Journal of Operational Research*, roč. 111, č. 423 – 447.
4. SCHILLING, D. A. 1980. Dynamic location modeling for public-sector facilities: A multicriteria approach. In *Decision Sciences*, č. 11, s. 714 - 724.
5. WESOŁOWSKY, G. O. 1973. Dynamic facility location. In *Management Science*, roč. 19, č. 11, s. 1241 – 1248.

Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: reiff@euba.sk

RIEŠENIE PROBLÉMU OKRUŽNÝCH JÁZD POMOCOU ALGORITMU VČELEJ KOLÓNY

SOLVING VEHICLE ROUTING PROBLEM BY APPLYING BEE COLONY ALOGITH

Marián Šedivý

Abstrakt

Vo svojom príspevku sa zameriavam na riešenie problému okružných jász aplikáciou algoritmu včelej kolóny. Včely sú vysoko organizovaný sociálny hmyz. Prežitie celej kolónie záleží na každej jednotlivéj včele. Aby zabezpečili existenciu kolónie využívajú systematickú segregáciu úloh medzi jednotlivé včely. Vďaka simulácii správania včiel pri zbere potravy dokážeme efektívne hľadať optimálne riešenia optimalizačných úloh.

Kľúčové slová: problém okružných jász, algoritmus včelej kolóny, inteligencia roju,

Abstract

My contribution aims on solving the vehicle routing problem by use of bee colony algorithm. Bees are highly organized social insects. The survival of the entire colony depends on every individual bee. Bees use systematic task segregation among them to ensure a continued existence of its colony. By simulating behavior of bees during foraging we can efficiently find optimal solutions to optimization problems.

Keywords: BCO, VRP, Bee Colony Optimization, Vehicle Routing Problem, Swarm Intelligence

1 RIEŠENIE OKRUŽNÝCH PROBLÉMOV

VRP pokrýva distribúciu tovarov alebo služieb v danom časovom horizonte, pre skupinu zákazníkov, pomocou súboru vozidiel, ktoré sú umiestnené v jednom alebo viacerých staniách, obsluhované posádkou a jazdiace po vhodnej cestnej sieti. Konkrétne riešenie VRP spočíva v nájdení množiny trász, z ktorej každá prislúcha jednému vozidlu tak aby začalo a skončilo svoju

cestu v prislúchajúcej stanici, boli uspokojené všetky požiadavky zákazníkov, splnené všetky obmedzujúce podmienky pri minimalizácii globálnych cestovných nákladov.

Zložitosť VRP problému vo veľkej miere vyplýva z faktu, že VRP problém sa nachádza na rozhraní dvoch dobre známych a študovaných problémov uloženia balíkov (Bin Packing Problem – BPP¹) a problému obchodného cestujúceho (Traveling Salesman Problem – TSP²). Pre vyriešenie VRP potrebujeme vyriešiť obidva tieto problémy. Treba podotknúť, že tieto problémy tiež patria do triedy NP – ťažkých problémov. A teda už nájdenie riešenie pre každý z nich osobitne vyžaduje veľkú námahu a je časovo náročné.

Sieť ciest využívaná na transport tovarov a služieb je vo všeobecnosti opísaná ako graf kde jeho uzly predstavujú stanice, zákazníkov alebo križovatky a hrany (spojnice týchto uzlov) sú úseky trás. Tieto úseky, ako aj celé grafy môžu byť orientované alebo neorientované. Orientované grafy sú typické pre mestské trasy kde je potrebné rešpektovať jednosmerné ulice, alebo obchádzky. Každá hrana má svoju hodnotu vyjadrenú napríklad ako dĺžku v km a čas potrebný na jej prejdenie (ten závisí od použitého vozidla, ale aj od času kedy daným úsekom prechádzame).

Preprava tovarov a služieb je vykonávaná vozovým parkom s fixnou skladbou a veľkosťou vozidiel alebo je skladba vozového parku dodefinovaná na základe požiadaviek zákazníkov. Pri obmedzeniach kladených na vozidlá treba zohľadniť aj ľudský faktor. S ním sú spojené pracovné hodiny, nutnosť prestávok počas vedenia vozidla, nadčasy a iné.

Jednotlivé trasy musia taktiež spĺňať isté podmienky dané napríklad povahou prepravovaných tovarov, úrovňou kvality služieb alebo charakteristikami zákazníkov a vozidiel. Medzi typické obmedzenia patria: na každej trase nesmie byť presiahnutá kapacita využívaných vozidiel; zákazníci na danej trase môžu požadovať iba doručenie, iba vyzdvihnutie alebo kombináciu oboch; zákazníci môžu byť obslužení iba v nimi vyhradenom čase (časové okná) a počas pracovnej doby posádky vozidla. Tieto podmienky musíme zohľadniť v poradí obsluženia zákazníkov na pridelennej trase. Predchádzajúce obmedzenie môže napríklad

¹ Bin Packing Problem je problém, pri ktorom treba uložiť čo najviac objektov do čo najmenšieho počtu kontajnerov s konštantnou veľkosťou.

² Traveling Salesman Problem - riešením problému obchodného cestujúceho je nájsť takú okružnú cestu medzi mestami, ktorá bude najlacnejšia. Okružná cesta značí poradie v akom je potrebné prejsť jednotlivými miestami a na záver sa vrátiť do začiatočného bodu.

vyžadovať obsluhu zákazníka spolu s inou podmnožinou zákazníkov na jednej trase avšak tento zákazník musí byť obslužený pred resp. po zákazníkoch z danej podskupiny. Toto je aj prípad problému okružných jász s donáškou a zberom kde sa vykonáva rozvoz aj zber tovarov a tovar zozbieraný od zákazníkov musí byť doručený iným zákazníkom jedným vozidlom počas tej istej trasy.

Schéma klasifikácie variantov problému okružných jász (Genderau, et al., 1998)

Kapacita/vázba	M:M	1:M
Obmedzená kapacita	Odvoz na telefón	System doplňovania
Neobmedzená kapacita	Expresné doručenie pošty	Služby kuriéra a opráv

Tabuľka 1.1 varianty problému okružných jász

Problémy typu M:M s kapacitnými obmedzeniami patria medzi najviac komplikované z toho dôvodu, že miesta vyzdvihnutia a doručenia musia ležať na jednej trase a vyzdvihnutie musí predchádzať doručeniu.

Pri probléme odvozu na telefón (Dial-a-Ride) taktiež známeho aj ako Stacker Crane Problem uvažujeme o dvoch variáciách. Pri preemptívnom type problému je možné nechať prepravované objekty na medzi zastávke a neskôr ich opäť naložiť a doručiť a tým zefektívniť celý proces. Pri nepreemptívnom type túto možnosť nemáme. Odvoz na telefón je často využívaný pri prevoze starších ľudí, prípadne ľudí s obmedzenou pohyblivosťou či zdieľaných taxíkoch.

Služby kuriéra a opráv môžeme prirovnať k problému okružných jász s časovými oknami, kde vykonanie služby nemusí vždy nasledovať za požiadavkou, ale je centrálné naplánované aby sa minimalizovali náklady na prepravu. Taktiež veľmi dôležitú úlohu zohráva čas potrebný na vykonanie služby.

Na problém okružných jász môžeme pozeráť aj z hľadiska adaptácie na meniace sa požiadavky. Ak sú všetci zákazníci známi a priori vtedy hovoríme o *statickom VRP*, kde plánujeme cestu pre celý vozový park tak, aby boli uspokojené všetky požiadavky klientov pri minimálnych nákladoch (najkratšia trasa, najmenší čas). Ak však stále pribúdajú nové a nové

požiadavky, počas toho ako vozidlá začali doručovanie, hovoríme o *dynamickom VRP*. Pri dynamickej povahe problému musíme upravovať trasy jednotlivých vozidiel aby čo najefektívnejšie uspokojili dopyt. Najprv sa vyráta optimálna trasa pre požiadavky, ktoré poznáme a tá sa následne dynamicky upravuje. Požiadavky prijaté po určitom čase môžu byť odložené na druhý deň.

Pri vozovom parku treba brať do úvahy aj to, že vozidlá nie sú homogénne. Môžu sa líšiť v kapacite, objeme prepravovaného nákladu, veku, technickom stave, dojazde na dlhšie vzdialenosti, potrebe špeciálneho vodičského oprávnenia a iných aspektoch.

Vyhodnotenie celkových nákladov na cesty a kontrola ich prevádzkových obmedzení, vyžaduje znalosť cestovných nákladov a cestovného času medzi každým párom zákazníkov a medzi stanicami a zákazníkmi. Za týmto účelom sa pôvodný cestný graf (ktorý je často veľmi riedky) transformuje do úplného grafu, ktorého vrcholy zodpovedajú zákazníkovi a stanicami. Pre každú dvojicu vrcholov i a j úplného grafu, je definovaná spojnica (i, j) , ktorej náklady $c_{i,j}$ sú nákladmi na najkratšiu cestu od vrcholu i do vrcholu j . Cestovný čas $t_{i,j}$ každej spojnice (i, j) sa vypočíta ako súčet cestovných časov spojnic, ktoré patria do najkratšej cesty z i do j .

Ciele riešenia problému okružných jász môžu byť nasledovné:

- minimalizácia celkových nákladov či už z hľadiska prejdenej vzdialenosti alebo času a pri fixných nákladoch minimalizácia počtu vozidiel a tým aj členov posádky,
- minimalizácia počtu vozidiel (a posádky) potrebných na obsluženie zákazníkov,
- vybalansovanie trász z hľadiska cestovného času a objemu nákladu vo vozidlách,
- minimalizácia penále spojeného s čiastočne obsluženými zákazníkmi.

2 ALGORITMUS VČELEJ KOLÓNY

Tento algoritmus, často označovaný aj ako optimalizácia prostredníctvom včelej kolónie (Bee Colony Optimization – BCO), alebo umelá včelia kolóna (Artificial Bee Colony – ABC) napodobňuje správanie včiel pri zbere potravy. Keďže lietanie je pre včely veľmi náročné a vyčerpávajúce, snažia sa optimalizovať zber potravy aby získali čo najväčšie množstvo peľu preletením najkratšej vzdialenosti. Základnou ideou BCO je vytvorenie multi – agentového systému (kolónie umelých včiel), ktorý je schopný riešiť zložité problémy kombinatorickej optimalizácie.

Včely sú vysoko organizovaný sociálny hmyz. Prežitie celej kolónie záleží na každej jednotlivej včele. Aby zabezpečili existenciu kolónie využívajú systematickú segregáciu úloh medzi jednotlivé včely. Včely vykonávajú rôzne úlohy ako zháňanie potravy, reprodukciu, starostlivosť o mladé, hliadkovanie, upratovanie a stavanie úľa. Z týchto úloh je práve zháňanie potravy najdôležitejšie, pretože včely musia byť schopné zabezpečiť nepretržitý prísun potravy pre kolóniu.

Správanie včiel pri zháňaní potravy bolo dlhé roky záhadou až kým Karl von Frisch nedešifroval význam pohybov, ktoré robia včely pri svojom kývavom tanci (waggle dance). Tento tanec včely používajú na vzájomnú komunikáciu. Predpokladajme, že včela našla bohatý zdroj potravy. Po jej návrate do úľa, začne tancovať v tvare osmičky. Prostredníctvom tohto informatívneho tanca, včela dokáže informovať ostatné zberačky potravy o smere a vzdialenosti k novoobjavenému zdroju a tým k nemu môže pritiahnúť viac včiel.

Celý algoritmus založený na procese zháňania a zberu potravy môžeme opísať pomocou nasledovných krokov:

- Počas prvej iterácie, keď ešte včely nemôžu sledovať žiaden tanec vyletia z úľa náhodne do miest s potravou. Vo svojej práci (Wong, et al., 2009) využíva pre túto

fázu dva heuristické prístupy a to heuristiku prechodu stavov³ a heuristiku najbližšieho suseda⁴,

- Následne sa včely vrátia do úľu kde odovzdajú potravu a majú na výber z viacerých možností:
 - zavrhnúť daný zdroj potravy a stať sa nerozhodnutým nasledovníkom,
 - pokračovať v zbere potravy na danom zdroji bez toho aby regrutovala ďalšie včely,
 - začať tancovať a tým presvedčiť ostatné včely nasledovníčky aby išli s ňou zbierať potravu na danom zdroji,
- Včela si vyberá z hore uvedených možností na základe určitej pravdepodobnosti. Mechanizmus kedy si včela vyberá nasledovanie určitej tancujúcej včely nie je veľmi známi, ale existujú domnienky, že regrutovanie včiel je funkciou kvality daného zdroja (Camazine, et al., 1991).

Správanie včiel pri zháňaní potravy bolo aplikované ako výpočtový algoritmus na riešenie komplexných problémov v rôznych oblastiach. V literatúre sa spomína aplikácia algoritmu pri dynamickej alokácii serverov (Nakrani, et al., 2004), optimalizácii numerických funkcií (Karaboga, et al., 2007), (Karaboga, et al., 2008), smerovaní paketov⁵ v telekomunikačných sieťach (Wedde, et al., 2004), stochastickom VRP (Lučić, et al., 2003), (Teodorović, 2008) a rozvrhovacom probléme (Job Shop Scheduling Problem) (Chong, et al., 2006), (Chong, et al., 2007).

2.1 Konštrukcia cesty umelými včelami

Proces zháňania potravy pri BCO je nasledovný. Počas tejto fázy musí včela prejsť z jedného miesta do druhého miesta pokiaľ nevykoná celý okruh (vráti sa na začiatok svojej cesty) na základe tranzitívneho pravidla. Toto pravidlo definuje pravdepodobnosť prechodu z miesta i do miesta j po n prechodoch, $\rho_{ij,n}$ ako je zapísané vo vzťahu (1.1). Keď je konštrukcia cesty hotová, získame permutáciu miest, ktorá je jedným z riešení nášho TSP.

³ Včela začína v náhodnom mieste a na základe pravidla prechodu stavov si vyberie ďalšie miesto kam poletí. Viac o presnom opise algoritmu viď. Kapitola 2.1

⁴ Včela začína v ľubovoľnom mieste a vyberá si najbližšie susedné mesto kam poletí. Ak tejto podmienke vyhovuje viac miest, aplikuje sa náhodný výber.

⁵ Paket je ucelený blok dát, ktorý sa prenáša v sieti a spracováva ako celok. Je nedeliteľný na menšie časti.

Označme d_{ij} vzdialenosť dvoch miest a $\rho_{ij,n}$ fitness hodnotu hrany spájajúcu tieto dve mestá. $A_{i,n}$ je množina zatiaľ nenavštívených miest, ktoré sú dosiahnuteľné z miesta i na prechode n . Parametre α a β určujú relatívnu významnosť fitness hodnoty hrany verzus heuristickú vzdialenosť.

$$\rho_{ij,n} = \frac{[\rho_{ij,n}]^\alpha \cdot \left[\frac{1}{d_{ij}}\right]^\beta}{\sum_{j \in A_{i,n}} \left([\rho_{ij,n}]^\alpha \cdot \left[\frac{1}{d_{ij}}\right]^\beta\right)} \quad (1.1)$$

d_{ij} nadobúda hodnoty nepriamo úmerné k $\rho_{ij,n}$. Čím je vzdialenosť medzi i a j kratšia, tým väčšia je pravdepodobnosť, že j bude vybrané ako nasledujúce miesto návštevy. Fitness hodnota hrany $\rho_{ij,n}$ meria pravdepodobnosť, že v preferovanej ceste bude existovať spojenie medzi i a j . V prírode ak včela nájde nový zdroj potravy, začne tancovať. Ak týmto tancom osloví inú včelu, tá bude zbierať potravu na novom zdroji. Pri BCO je táto situácia modelovaná implementáciou preferovanej cesty θ . θ je permutáciou prechodov jednotlivými miestami, ktoré včela získala od inej včely (navádzanie pri zháňaní potravy). Ďalej uvedieme vzťah pre $\rho_{ij,n}$:

$$\rho_{ij,n} = \begin{cases} \frac{\lambda}{1 - \lambda |A_{i,n} \cap F_{i,n}|} & , j \in F_{i,n}, |A_{i,n}| > 1 \\ \frac{1}{|A_{i,n} - F_{i,n}|} & , j \notin F_{i,n}, |A_{i,n}| > 1 \\ 1 & , |A_{i,n}| = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\forall j \in A_{i,n}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

kde λ reprezentuje pravdepodobnosť navštívenia miesta vo θ . $F_{i,n}$ je množina, ktorá obsahuje jedno preferované miesto odporučené vo θ , do ktorého sa včela presunie z miesta i na prechode n . Ak včela práve začala prehľadávanie z úľa $F_{H,0} = \{\theta(1)\}$. Ak práve navštívené miesto θ je na m -tej pozícii v preferovanej ceste po n prechodoch, potom $F_{\theta(m),n} = \{\theta(m+1)\}$. $F_{i,n}$ obsahuje iba jedno miesto pretože uvažujeme iba o $\theta(m+1)$ (nasledujúce príľahlé miesto

k miestu i z θ). Prvé dve podmienky z (1.2) zabezpečujú, že hrany odporúčané vo θ sú priradené s pravdepodobnosťou λ , zatiaľ čo zvyšné hrany sú priradené s rovnakou pravdepodobnosťou. Ak uvažujeme o l hranách, jedna hrana (ktorá existuje vo θ) bude sa bude rovnať λ a ostatné $\frac{(1-\lambda)}{l-1}$. Ak žiadna hrana nie je podobná v porovnaní s θ , všetky uvažované hrany z $A_{i,n}$ sa budú rovnať $\frac{1}{l}$. Tretia podmienka priradí hodnotu 1 pre $\rho_{ij,n}$ ak už ostáva iba jedno miesto z $A_{i,n}$. Ide teda o posledný prechod predtým, než sa včela vráti do začiatočného miesta a tým ukončí svoju trasu.

3 OPIS PRÁCE ALGORITMU

Včely v úle sú rozdelené do troch skupín a to aktívne včely, čakajúce včely a prieskumníci. Aktívne včely sú všetky, ktoré práve využívajú zdroj potravy. Ich počet je rovnaký ako počet zdrojov jedla. Čakajúce včely sú úli a čakajú na informácie, od aktívnych včiel. Ich počet je zvyčajne zhodný s aktívnymi včelami. Aktívne včely tancujú pre čakajúce a tie si potom na základe získaných informácií vyberajú zdroj jedla kam poletia. Lepšie zdroje preto pritiahnu viac čakajúcich včiel. Prieskumníci sú včely, ktoré hľadajú nové zdroje potravy v okolí úľu. Aktívna včela, ktorej zdroj potravy bol zavrhnutý (neprilákal žiadne včely) sa stáva prieskumníkom.

Na to aby včely efektívne prehľadávali priestor a nachádzali nové riešenia, aplikujeme nasledovné dve pravidlá *Mutácia výmenou* (SwapMutation) a *Mutácia vložení* (InsertMutation). Pri prvej mutácii ide o náhodnú mutáciu trasy, čím získame nové riešenie f , ktoré nie je veľmi vzdialené od pôvodného riešenia g . Mutácia výmenou spočíva v nasledovných krokoch:

- Náhodne vyber dve trasy z riešenia g a z každej trasy vyber náhodne dvoch zákazníkov.
- Vymeň navzájom týchto dvoch zákazníkov čím vznikne nové riešenie f .

Druhé pravidlo, Mutácia vložení sa skladá z nasledujúcich krokov:

- Náhodne vyber jedného zákazníka z jednej trasy v riešení g .
- Odober tohto zákazníka z danej trasy a vlož ho do inej náhodne vybranej trasy, čím vznikne nové riešenie f .

Potom ako vznikne nové riešenie aplikujeme pravidlá porovnávania riešení opísané vyššie. Ak je získané riešenie f vybrané namiesto riešenia g , aplikujeme Mutáciu výmenou aby sme sa pokúsili novo získané riešenie ďalej zlepšiť a to takto:

- Porovnaj všetky možné párové zmeny zákazníkov na trase tak, aby bola dosiahnutá najkratšia vzdialenosť.
- Ak existuje taká párová zmena, ktorá skráti vzdialenosť, trasa sa aktualizuje. Inak sa trasa nemení.

4 ZÁVER

Aplikácia včelieho algoritmu na riešenie problému okružných jász sa javí ako veľmi vhodná. Na overenie tohto tvrdenia bola vytvorená aplikácia, ktorá využíva hore uvedené postupy na riešenie problému okružných jász s kapacitným obmedzením. V aktuálnom stave aplikácia poskytuje síce výsledky mierne vzdialené od optimálnej hodnoty, avšak algoritmus pracuje veľmi rýchlo a po vhodnom odladení by mal poskytovať aj správne výsledky.

5 LITERATÚRA

Camazine, S. and Sneyd, J. 1991. *A model of collective nectar source selection by honey bees: Self-organization through simple rules*. U.S.A. : Elsevier, 1991.

Genderau, M. and Potvin, J-Y. 1998. Dynamic Vehicle Routing and Dispatching. [book auth.] T. G. Crainic and G. Laporte. *Fleet management and logistics*. Boston : Kluwer, 1998.

Chong, C. S., et al. 2006. *A bee colony optimization algorithm to job shop scheduling*. Arizona : Winter Simulation Conference, 2006.

—. **2007.** *Using a bee colony algorithm for neighborhood search in job shop scheduling problems*. Praha : 21. European Conference on Modeling and Simulation, 2007.

Karaboga, D. and Basturk, B. 2008. *On the performance of artificial bee colony (abc) algorithm*. Turecko : Springer, 2008.

Karaboga, D. and Bsturk, B. 2007. *A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (abc) algorithm.* Turecko : Springer, 2007.

Lučić, P. and Teodorović, D. 2003. *Vehicle routing problem with uncertain demand at nodes: The bee system and fuzzy logic approach.* Berlín : Springer-Verlag, 2003.

Nakrani, S. and Tovey, C. 2004. *On honey bees and dynamic server allocation in internet hosting centers.* U.S.A : Sage Publications, 2004.

Teodorović, D. 2008. *Swarm intelligence systems for transportation engineering: Principles and applications.* Srbsko : Elsevier, 2008.

Wedde, F. H., Farooq, M. and Zhang, Y. 2004. *Beehive: An efficient faulttolerant routing algorithm inspired by honey bee behavior.* Berlín : Springer, 2004.

Wong, L. P. and Chong, Ch. S. 2009. *An Efficient Bee Colony Optimization Algorithm for Traveling Salesman Problem using Frequency-based Pruning.* Wales : IEEE International Conference, 2009. ISBN: 978-1-4244-3759-7.

Kontaktné údaje

Ing. Marián Šedivý

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: marian.sedivy@gmail.com

RIEŠENIE OKRUŽNÝCH ÚLOH POMOCOU METAHEURISTÍK

SOLVING OF VEHICLE ROUTING PROBLEMS USING METAHEURISTICS

Zuzana Škerlíková, Jana Patakyová

Abstrakt

S problematikou optimalizácie sa stretávame neustále. Je predmetom rôznych matematických formulácií, publikácií a výskumu. Okružné úlohy (z angl. vehicle routing problem - VRP) sú jednou z najznámejších optimalizačných úloh. Je to aj vďaka nesmiernemu počtu praktických aplikácií, ktoré táto formuláciou pomerne jednoduchá, ale pritom výpočtovo nesmierne zložitá úloha ponúka. V tomto článku som sa zamerala na metaheuristiky, pomocou ktorých vieme získať pomerne dobré riešenie okružných úloh vzhľadom na ich časovú náročnosť výpočtov. Metaheuristiky, ktorým sa v tomto príspevku v krátkosti venujem sú: mravčie kolóny, programovanie s ohraničujúcimi podmienkami, deterministické žíhanie, genetické algoritmy, simulované žíhanie a tabu search.

Kľúčové slová: okružné úlohy, metaheuristika,

Abstract

We constantly encounter with the optimization problem. Various mathematical formulations, researches and publications are dedicated to this problem. Vehicle routing problem is one of the most known optimization problems. It is also thanks to the enormous number of practical applications to the formulation of a relatively simple yet computationally extremely difficult task offers. I focus on metaheuristics in this article. We can get a quite a good solution of the vehicle routing problem due to their time – consuming calculations. This paper briefly devotes: Ant Algorithms, Constraint Programming, Deterministic Annealing, Genetic Algorithms, Simulated Annealing, Tabu Search.

Keywords: vehicle routing problem, metaheuristic

1. METAHEURISTIKY

1.1. Mravčie kolóny

Prvý mravčí systém pre okružné úlohy bol vytvorený len nedávno, v roku 1997 Bullnheimerom, Hartlom a Straussom, ktorí uvažovali s najjednoduchšou verziou tohto problému – okružnou úlohou s vozidlami s obmedzenou kapacitou.

Pre komplexnejšie verzie okružných úloh Gambardella, Taillard a Agazzi v r. 1999 vytvorili väčší systém mravčej kolóny (napr. pre okružne úlohy s časovými oknami vytvorili systém, ktorý je organizovaný hierarchiou umelých mravčích kolón navrhnutých tak, aby postupne

optimalizovali viacero účelových funkcií; prvá kolóna minimalizuje počet vozidiel, zatiaľ kým druhá kolóna minimalizuje prejdenú vzdialenosť). Kooperácia medzi kolónami je zabezpečená výmenou informácií prostredníctvom aktualizácie feromónmi.

Existujú dve základné fázy mravčieho systému: konštrukcia trasy pre vozidlá a aktualizácia trás.

Algoritmus mravčej kolóny

Po inicializácii mravčej kolóny sa obe fázy – konštrukcia trasy a aktualizácia trasy opakujú niekoľkokrát. Pokiaľ ide o prvotné umiestnenie umelých mravcov bolo zistené, že počet mravcov by mal byť na začiatku každej iterácie rovný počtu všetkých zákazníkov. Heuristika, ktorá využíva procedúru vyčerpávajúceho prehľadávania všetkých permutácií získaných výmenou dvoch miest, sa používa na skrátenie trás vozidiel generovaných umelými mravcami. Táto heuristika výrazne vylepšuje kvalitu získaného riešenia. Popri tomto priamočiarom lokálnom vyhľadávaní si môžeme tiež predstaviť celý zoznam kandidátov na výber, ktorí sú predurčení už v začiatkovej fáze celého algoritmu. Pre každý vrchol v_i oddelíme $V - \{v_i\}$ v závislosti od zvyšujúcej sa vzdialenosti d_{ij} preto, aby sme získali list kandidátov.

Konštrukcia okružnej cesty

Aby sme vedeli zistiť okružnú cestu, umelé mravce vytvárajú riešenia tým, že si úspešne vyberajú mestá, ktoré navštívia až kým nebudú navštívené všetky mestá – uzly. Kedykoľvek by trasa do ďalšieho viedla k neprípustnému riešeniu kvôli kapacite vozidla alebo dĺžke trasy, je do trasy opäť zavedený sklad a začne sa nová trasa. Pre voľbu uzla (ktorý zatiaľ nebol navštívený), musíme vziať do úvahy dva aspekty: či bola voľba daného uzla dobrá – ide o informáciu, ktorá je uložená vo feromónových stopách τ_{ij} a je spojená s každým uhlom (v_i, v_j) ; a či je táto voľba sľubná. Táto druhá miera vhodnosti, tzv. *viditeľnosť* – označená η_{ij} , je vlastne heuristická funkcia.

Ak platí:

$$\Omega = \{v_j \in V : v_j \text{ je možné navštíviť}\} \cup \{v_0\}$$

potom zvolíme vrchol v_j a navštívime ho:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{h \in \Omega} [\tau_{ih}]^\alpha [\eta_{ih}]^\beta}; & \text{pre } v_j \in \Omega \\ 0; & \text{pre } v_j \notin \Omega \end{cases}$$

Toto pravdepodobnostné rozdelenie je ovplyvnené parametrami α a β , ktoré určujú relatívny vplyv na trasu a viditeľnosť. Viditeľnosť je definovaná ako prevrátená hodnota vzdialenosti a pravdepodobnosť výberu je potom rozšírená o problém konkrétnej informácie. Teda zahrnutie úspor a využitie kapacity potom môže viesť k lepším výsledkom. Na druhej strane je to však relatívne nákladné (pokiaľ ide o výpočtový čas), a preto sa tým nebudeme

zaoberať. Zavedieme parametre f a g a použijeme nasledujúcu parametrickú funkciu úspor pre viditeľnosť:

$$\eta_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - g d_{ij} + f |d_{i0} - d_{0j}|$$

Aktualizácia trasy

Po tom, ako umelé mravce našli prípustné riešenie, feromónové stopy sú stanovené v závislosti od hodnoty účelovej funkcie. Pravidlo aktualizácie je nasledovné:

$$\tau_{ij}^{\text{nové}} = \rho \tau_{ij}^{\text{staré}} + \sum_{\mu=1}^{\sigma-1} \Delta \tau_{ij}^{\mu} + \sigma \Delta \tau_{ij}^{\alpha}$$

kde ρ pre $0 < \rho < 1$ je vytrvalosť, *perzistencia* trasy a $(1-\rho)$ je odparovanie, *evaporácia* trasy. Jedine v prípade, že trasa (v_i, v_j) bola použitá μ -tým najlepším mravcom, hodnota

feromónovej stopy je zvýšená o hodnotu $\Delta \tau_{ij}^{\mu}$, ktorá je potom rovná $\frac{\sigma - \mu}{L_{\mu}}$; v opačnom prípade nezvýši hodnotu feromónovej stopy. Okrem toho, na všetky trasy, ktoré patria k zatiaľ najlepšiemu nájdenému riešeniu (hodnota účelovej funkcie L^{α}), je kladený dôraz tak, ako keby ich využilo σ elitných mravcov. Teda každý elitný mravec zvýši hodnotu intenzity trasy

hodnotou $\Delta \tau_{ij}^{\alpha}$, ktorá je rovná $\frac{1}{L^{\alpha}}$, ak trasa (v_i, v_j) patrí do zatiaľ najlepšieho riešenia, v opačnom prípade nezvýši hodnotu intenzity trasy.

1.2. Programovanie s ohraničujúcimi podmienkami

Programovanie s ohraničujúcimi podmienkami je vzorom pre riešenie širokého spektra problémov. Problémy sú vyjadrené prostredníctvom premenných, oborom hodnôt premenných a ohraničujúcimi podmienkami medzi premennými. Problémy sú potom riešené použitím kompletnými prehľadávacimi technikami ako sú: prístup hĺbkového prehľadávania (*depth-first search*) – pre uspokojenie a metóda vetiev a hraníc (*branch and bound*) – pre optimalizáciu. Bohatstvo jazyka, ktorý sa používa na vyjadrenie problémov v programovaní s ohraničujúcimi podmienkami, tvorí z tejto metódy vhodného kandidáta na pre riešenie okružných úloh. Preto môžeme používať všeobecné výrazy ako podmienky. Okrem výrazov obsahujúcich základné aritmetické a logické operácie môžeme využiť komplexnú symboliku podmienok na vyjadrenie problému. Programovanie s ohraničujúcimi podmienkami podporuje vyhľadávanie využitím rozšírenia podmienok. Ak vieme odvodiť hranice alebo podmienky premenných alebo ich vieme predbežne stanoviť, potom sú tieto zmeny rozšírené na všetky ohraničujúcimi podmienky tak, aby zredukovali celú túto oblasť.

V každom uzle prehľadávacieho stromu, rozširujúci algoritmus odstráni také hodnoty z oboru ohraničujúcimi podmienok, ktoré sú nekonzistentné s ostatnými premennými. Ak tento algoritmus odstráni všetky hodnoty jednej premennej, potom neexistuje riešenie v tomto podstromu a hľadanie pokračuje spätným chodom a vykonáva iné rozhodnutie v bode rozhodovania. Spätný chod je chronologický: rozhodnutia môžu byť anulované iba v opačnom poradí k poradiu, v ktorom boli vykonávané. Navyše, môžeme obnoviť obory hodnôt ohraničujúcich premenných spätným chodom do predchádzajúceho uzla. Nie je však

povolené všeobecné rozšírenie alebo relaxácia oborov hodnôt. Tieto fakty zohrávajú dôležitú úlohu pri spôsobe riešenia okružných úloh.

1.3. Deterministické žihanie

Deterministické žihanie funguje podobne ako mravčie kolóny s výnimkou takou, že použijeme deterministické pravidlo na akceptáciu nejakého pohybu. Existujú dve štandardné implementácie tejto techniky: prahové prijatie (*threshold accepting* – Dueck a Scheurer 1990) a chod od záznamu k záznamu (*record to record travel* – Dueck 1993).

V iterácii t v algoritme prahového prijatia prijímame riešenie x_{t-1} , ak platí:

$$f(x_{t+1}) < f(x_t) + \theta_1$$

kde θ_1 je parameter kontroly používateľa.

V algoritme chodu od záznamu k záznamu je *záznam* najlepším riešením x^a získané počas realizácie algoritmu. V iterácii t prijímame riešenie x_{t+1} ak platí:

$$f(x_{t+1}) < \theta_2 f(x_t)$$

kde θ_2 je parameter kontroly používateľa len o niečo málo väčšieho od 1.

1.4. Genetické algoritmy

Genetické algoritmy sú pravdepodobne najznámejšou metaheuristikou a získavajú zaslúženú pozornosť celého sveta. Ide o počítačové procedúry, ktoré využívajú mechanizmy prirodzeného výberu na vývoj riešení rôznych problémov.

Základný koncept bol vytvorený v r. 1975 Johnom H. Hollandom, kým praktické použitie na riešenie komplexných problémov prezentovali v r. 1975 De Jong a v r. 1989 Goldberg. Genetické algoritmy vyvíjajú populáciu zakódovaných jedincov ako chromozómy vytváraním nových generácií potomkov pomocou iteračných procesov, až kým nie sú splnené niektoré konvergenčné kritéria. Tieto kritéria by napríklad mohli odkazovať na maximálny počet generácií, konvergencia na homogénnu populáciu zloženú z podobných jedincov alebo na získanie optimálneho riešenia. Najlepšie generovaný chromozóm je potom dekódovaný a poskytuje zodpovedajúce riešenie.

Genetické algoritmy pracujú namiesto s jediným riešením až s celou populáciou kandidátov, takže vedú vykonávať viac vyhľadávaní naraz. Každý jedinec predstavuje potenciálne riešenie problému. Pôvodne bolo každé riešenie prezentované reťazcom bitov, kde interpretácia významu reťazca je špecifikácia problému.

Vytvorenie novej generácie individualít zahŕňa tri kroky:

- ✓ **Krok 1: Fáza selekcie (výberu)** – pozostáva z náhodného výberu dvoch rodičov z populácie pre účely krytia.
- ✓ **Krok 2: Fáza rekombinácie** – alebo reprodukčného procesu využíva vybraných rodičov na vytváranie potomkov, ktorí budú formovať nasledujúcu generáciu.
- ✓ **Krok 3: Fáza mutácie** – pozostáva z náhodnej modifikácie niektorých génov (génu) vždy len jedného rodiča v danom okamihu kvôli tomu, aby sa mohol ďalej

prehľadávať priestor prípustných riešení a aby sa zachovala a zaistila genetická rozmanitosť.

Nová generácia je vytvorená opakovaním selekcie – výberu, reprodukciou a mutáciou až kým všetky chromozómy v novej populácii nahradia tie zo starej populácie. Aby sme podporili efektívne vyhľadávanie, je potrebné zaručiť vhodnú rovnováhu genetickej kvality a rozmanitosti v populácii.

1.5. Simulované žihanie

Simulované žihanie je stochastická relaxačná technika, ktorá má svoj pôvod v štatistickej mechanike. Je založená na analógií žihania pevných látok, kde pevná látka je zohriata na vysokú teplotu a postupne sa chladí tak, aby sa kryštalizovala na nízkoenergetickú konfiguráciu.

Simulované žihanie riadi pôvodnú metódu lokálneho vyhľadávania takto:

2. Akceptujeme riešenie S^t ako nové aktuálne riešenie práve vtedy, keď platí:

$$\Delta \leq 0,$$

kde

$$\Delta = f(x) - f(x_t).$$

3. Aby sme umožnili vyhľadávaniu opustiť lokálne optimum, prijímame kroky s pravdepodobnosťou:

$$e^{-\frac{\Delta}{T}}, \text{ ak } \Delta > 0, \text{ kde } T \text{ je teplota;}$$

ktoré zvyšujú hodnotu účelovej funkcie.

4. Hodnota T sa mení od relatívne veľkej hodnoty k malej hodnote blízkej 0. Hodnoty sú kontrolované chladiacim rozvrhom, ktorý určuje počiatočné hodnoty ako aj hodnoty počas celého trvania algoritmu.
5. Počas iterácie t simulovaného žihania je riešenie x nakreslené náhodne v $N(x)_t$. Ak platí:

$$f(x) \leq [f(x)]_t,$$

potom x_{t+1} stanovíme rovné x . Ak platí:

$$f(x) > [f(x)]_t,$$

potom:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x & \text{s pravdepodobnosťou } p_t \\ x_t & \text{s pravdepodobnosťou } (1 - p_t) \end{cases}$$

kde p_t je zvyčajne klesajúca funkcia t a $f(x) - f(x_t)$. Často definujeme p_t ako rovné $e^{-\frac{\Delta}{T}}$.

- Existujú tri kritéria zastavenia:
 - hodnota f^{α} držiteľa x^{α} neklesla o najmenej $\pi_1\%$ počas najmenej k_1 po sebe nasledujúcich iterácií cyklu T ;
 - počet akceptovaných krokov bol menší ako $\pi_2\%$ počas najmenej k_2 po sebe nasledujúcich iterácií cyklu T ;
 - bolo vykonaných k_3 z T iterácií.

1.6. Tabu searching

Základná koncepcia tabu vyhľadávania je metaheuristika pridaná na ďalšiu heuristiku. Tabu vyhľadávanie prehľadáva priestor prípustných riešení tak, že sa v každej iterácii presúva od riešenia s k najlepšiemu riešeniu v podmnožine svojich susedov $N(s)$. V porovnaní s pôvodnými metódami, riešenie sa môže od iterácie k iterácií zhoršovať. Aby sme predišli zacykleniu, riešenia, ktoré obsahujú nedávno preskúmané atribúty sú dočasne zakázané. Čas, počas ktorého daný atribút ostáva zakázaný sa líši. Ak sú splnené určité podmienky, tak je možné prepísať status zakázaných atribútov. Tieto podmienky sa volajú aspiračné kritéria a nastávajú napríklad vtedy, ak najnovšie nájdené riešenie je lepšie ako všetky predchádzajúce riešenia.

Tendencia vychyľovať sa zo stanoveného kurzu sa môže byť zamietnutá ako nejaký zdroj chyby, ale nakoniec sa môže ukázať ako zdroj zisku. Týmto spôsobom pracujú metódy tabu vyhľadávania s výnimkou, že nové smery nie sú určované náhodne. Namiesto toho prebieha podľa predpokladu, že nemá zmysel prijímať nové riešenie, kým nám to riešenie nezaručí, že sa vyhneme trase, ktorú sme už preskúmali. Tento predpoklad zabezpečí to, aby nové množiny prípustných riešení boli preskúmané s cieľom obísť lokálne minimá s predpokladom nakoniec nájsť požadované riešenie.

Počiatkové riešenie je obvykle vytvorené nejakou jednoduchou heuristikou. Po ňom je vykonaný pokus o vylepšenie použitím miestneho vyhľadávania s jednou alebo viacerými susedskými štruktúrami a so stratégiou prijatia toho najlepšieho pokusu. Väčšina využitých susedov je veľmi dobre známa a boli v minulosti predstavení v rôznych konštruktívnych a zlepšovacích heuristikách.

- *Granular Tabu*: Granular tabu vyhľadávanie je prvým z troch algoritmov, ktorý sa používa pri tabu vyhľadávaní. Hlavná myšlienka vychádza z pozorovania, že čím sú dlhšie hrany grafu, tým majú menšiu pravdepodobnosť, že patria do optimálneho riešenia. Takže ak eliminujeme všetky hrany, ktorých dĺžka presahuje určitý tzv. *prah zrnitosti* (z angl. granularity threshold), niekoľko nesľubných riešení nikdy nebude zahrnutých do prehľadávacieho procesu.
- *Metóda adaptívneho riadenia pamäte*: jednou z najzaujímavejších vývojov, ktoré nastali v tabu vyhľadávaní v posledných rokoch je koncept adaptívneho riadenia pamäte, ktorú predstavili v r. 1995 Rochat a Taillard. Adaptívne riadenie pamäte je vlastne množina dobrých riešení, ktorá je dynamicky aktualizovaná počas procesu prehľadávania. Pravidelne sa niektoré komponenty vyťahujú z tejto množiny a rôzne kombinujú tak, aby produkovali nové dobré riešenia. Pri výbere týchto trás si ale musíme dávať pozor na to, aby sme sa vyhli zarátaniu jedného zákazníka dvakrát do toho istého riešenia. Výberové konanie sa vďaka tomuto obmedzeniu často končí iba s čiastočným riešením, ktoré je potrebné dokončiť pomocou nejakej heuristiky.
- *Kelly a Xu*: v tomto prípade Kelly a Xu (1996) zvažovali výmeny hrán medzi dvoma trasami, globálne premiestňovanie niektorých uzlov do iných trás a lokálne vylepšenia

trás. Stratégia globálneho premiestňovania rieši tok v sieti modelov tak, aby optimálne premiestňovala daný počet uzlov do iných trás. Aproximácie sú vyvinuté tak, aby vedeli vypočítať náklady vkladania a vyhadzovania uzlov, pričom musíme brať do úvahy kapacitu vozidla. Optimalizácia trasy sa vykonáva priemerovaním troch optimalizačných výmen a zlepšovacou mechanikou tabu vyhľadávania. Tento algoritmus sa riadi niekoľkými parametrami, ktoré sa dynamicky prispôbujú počas prehľadávania. Množina najlepších riešení je zaznamenaná pravidelne používaná na obnovenie hľadania nových parametrov.

Použitá literatúra

1. Tian Y., Song J., Yao D. a Hu J.: Dynamic vehicle routing problem using hybrid ant system, In: 2003 IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems, č.2., 2003, s: 970- 974.
2. Dueck G.: New Optimization Heuristics :The Great Deluge Algorithm and the Record-To-Record Travel, In: Journal of Computational Physics, č. 104, 1993, s:86-92.
3. Arbelaitz O., Rodriguez C. and Zamakola I.: Low Cost Parallel Solutions for the VRPTW Optimization Problem, In: International Conference on Parallel Processing Workshops. IEEE Computer Society. Valencia, Spain 2001, s.:176-181.
4. Alba E., Dorronsoro B.: Solving the Vehicle Routing Problem by Using Cellular Genetic Algorithms, In: Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization, EvoCOP'04, LNCS, r. 2004 č. 3004, s.: 11-20.
5. Cordeau F., Laporte G., Mercier A.: A unified tabu search heuristic for vehicle routing problems with time windows". In: Journal of the Operational Research Society č. 52, s.: 928-936, r. 2001

Kontaktné údaje

Ing. Zuzana Škerlíková, Ing. Jana Patakyová
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 907)934824
email: zuzana.skerlikova@gmail.com, jana.pataky@gmail.com

ANALÝZA PODIELU DLHU NA HDP

ANALYSIS OF DEBT TO GDP RATIO

Ing. Václav Školuda

Abstrakt

Predkladaná práca sa zaoberá analýzou podielu dlhu na hrubom domácom produkte Dánskeho kráľovstva. Analýza je založená na ekonometrickom modeli pomocou vektorovej autoregresie (VAR). Na model bola aplikovaná Johansenova procedúra a v závere bol použitý tvar modelu s korekčným členom. Samotný model vychádzal z údajov pre Dánske kráľovstvo v posledných dvoch dekádach a funkčný tvar bol inšpirovaný modelom používaným Švédskym úradom pre riadenie dlhu.

Kľúčové slová: *VAR model, ECM model, HDP*

Abstract

The present work deals with the analysis of the debt to gross domestic product ratio of Denmark. The analysis is based on econometric models using vector autoregression (VAR). To the model was applied Johansen's procedure and in the end was used the error correction model. The actual model is based on data for Denmark in the last two decades and was inspired by the functional form of the model used by the Swedish debt management.

Keywords: *VAR model, ECM model, GDP*

1 ÚVOD

Modelovanie podielu dlhu na HDP je v každom období dôležité. Jeho optimálnu výšku sa už pokúšalo zistiť niekoľko autorov. Každý však vychádzal so svojich jedinečných predpokladov a teda sa nikomu nepodarilo vytvoriť univerzálny model. Teoretickou základňou na tvorbu modelu sa zaoberá druhá kapitola. Výber krajiny predchádzal výberu modelu. Dánske kráľovstvo som si vybral nielen kôli osobnej preferencii, ale aj pre jeho makroekonomickú situáciu. Inflácia dosahuje dlhodobo 1%, kurz Dánskej koruny je vo fluktuáčnom pásme 2,25 % voči Euru, krajina je členom ERM II a tiež podiel dlhu na HDP dlhodobo nepresahuje odporúčanú úroveň 60%. V krajine prebehlo referendum zamietajúce vstup do Eurozóny.

Tretia kapitola pojednáva o vlastnej aplikácii modelu. V prvej časti sa využíva Johansenova procedúra pre vektorovú autoregresiu. Po otestovaní je vytvorený vektorový chybu korigujúci model, ktorého odhad je ďalej využitý na vysvetlenie jednotlivých vzťahov. Záver kapitoly je venovaný predikcii do budúcnosti pomocou schopnosti modelu odpovedať na šoky. Štvrtá kapitola zhrňa poznatky nadobudnuté pri tvorbe a aplikácii modelu.

2 TEÓRIA MODELU

Pri výbere konečnej rovnice určenej na konkrétne modelovanie som vychádzal z viacerých zdrojov a možných rovníc. Analýzou vzťahov v Dánskej ekonomike sa javil ako najvhodnejší model švédsky model. Pravdepodobne to bude preto, že obe krajiny majú relatívne pokojné hospodárstvo a nie sú členmi Eurozóny. Konkrétnym modelom bola rovnica využívaná Švédskym úradom pre riadenie dlhu v podobe:

$$d = d_{-1}(1 + i - y) + b$$

kde d – podiel dlhu na HDP
 i – reálna úroková miera
 y – reálny rast HDP
 b – potreba požičiavať si

Táto rovnica už vyzerala, že by mohla dobre vystihovať aj dánske údaje, možno pre blízkosť daných krajín nielen na mape. Po menších úpravách som dostal nižšie popísanú rovnicu v tvare:

$$D_t = \beta_0 + \beta_1 B2_t + \beta_2 r_t + u_t$$

Model uvedený danou rovnicou možno považovať za vektorovo-autoregresný, keďže z hľadiska podielu dlhu na HDP (tak, ako je zapísaný) možno očakávať, že tento podiel bude závisieť aj od jeho predchádzajúcich veľkostí. Rovnaké uvažovanie možno použiť pri nesplatennej časti dlhu. Najväčšie problémy sú pri vysvetlení vplyvu týchto veličín na tržný úrok. Stačí si však predstaviť modelovú situáciu, kde štát vydá pokladničné poukážky alebo iné cenné papiere s krátkou alebo strednodobou lehotou splatnosti. Tieto cenné papiere sú považované za veľmi bezpečné, preto sú na finančnom trhu žiadané. Z uvedeného vyplýva, že možno očakávať vnútornú spätnú reakciu na ich úročenie.

Odhad veľkosti jednotlivých koeficientov vo výslednom modeli podielu dlhu na HDP vidím nasledujúco. Koeficient pri úrokovej miere bude pravdepodobne záporný, keďže vzrast podielu dlhu na HDP si bude vyžadovať prostriedky na jeho splatenie a tie zväčša štát dostáva lacnejšie, než je úrok na trhu. Koeficient pri nesplatennej časti dlhu vidím naopak pozitívne. Možno totiž očakávať, že s rastom podielu dlhu na HDP bude tiež rásť podiel nesplatennej časti dlhu na HDP.

3 APLIKÁCIA MODELU. JOHANSENOVA PROCEDÚRA

V predchádzajúcej časti bol teoreticky odôvodnený model, ktorý budeme ďalej analyzovať. Jedná sa o model podielu dlhu na HDP v tvare:

$$D_t = \beta_0 + \beta_1 B2_t + \beta_2 r_t + u_t$$

kde D – podiel verejného dlhu na HDP [dlhdp]
 $B2$ – podiel nesplatennej časti dlhu na HDP [b2]
 r – tržný úrok zväčšený o 1 (výnosnosť) [urok]

Za dlh je považovaný hrubý dlh centrálnej vlády prepočítaný na jednotlivé štvrťroky. Hrubý domáci produkt pochádza z Národných účtov a jedná sa rovnako ako pri dlhu o sezónne vyrovnanú hodnotu v bežných cenách. Splátky národného dlhu vstupujúce do premennej $B2$, sú výdavky centrálnej vlády na zníženie dlhu v jednotlivých štvrťrokoch. Premenná $B2$ je vypočítaná ako podiel rozdielu dlhu a jeho splatenej časti a HDP z minulého obdobia. Za tržný úrok je považovaná trojmesačná úroková sadzba na medzibankovom trhu (údaje o štátnych pokladničných poukážkach, ktoré by som inak použil, neboli dostupné). Dáta pre analýzu boli získané zo stránok Dánskej národnej banky, štatistického úradu a z databázy Eurostatu.

Uvedený model budeme testovať pomocou Johansenovej procedúry, ktorá by sa dala zhrnúť do nasledujúcich krokov:

- Určíme rád integrácie všetkých premenných, v našom prípade ADF test
- Pomocou testu dĺžky oneskorenia určíme jeho optimálnu veľkosť
- Zistíme počet kointegrujúcich vektorov pomocou λ trace a λ_{max}

Na základe zistených hodnôt vytvoríme vektorový model s korekčným členom (VECM alebo VMKCH). S týmto modelom budeme ešte ďalej pracovať.

3.1 Test jednotkových koreňov

Očakávaným výsledkom tohto testu je, že všetky premenné budú integrované rovnakého stupňa (1) z čoho vyplýva, že ich prvé diferencie sú integrované stupňa (0), čiže sú stacionárne, čo je v kontexte VAR modelu žiadúce. Testovanie prebehne pomocou

Augmented Dickey-Fuller (ADF) Testu. ADF test dopadol podľa očakávania a jeho zaver možno zapísať:

$$dlhdp \sim I(1)$$

$$b2 \sim I(1)$$

$$urok \sim I(1)$$

3.2 Test optimálnej dĺžky oneskorenia a ďalšie testy

Pre analýzu kointegrácie potrebujeme poznať ideálnu dĺžku oneskorenia VAR modelu. Na základe Schwarzovho informačného kritéria a Hannanovho-Quinnovho informačného kritéria som sa rozhodol pre oneskorenie dve obdobia, čo pri charaktere údajov (štvrtročné makroekonomické veličiny) je opodstatnené. Analýza prebiehala v prostredí programu EViews, ktorý štandardne poskytuje tieto informačné kritériá vo výstupe.

Test normality sa v našom prípade pre jednoduchosť scvrkol na jednoduché porovnanie kritickej hodnoty Jarque-Bera s tabelovanou hodnotou χ^2 rozdelenia. EViews nám rozhodovanie ešte zjednodušuje, lebo pod Joint a Prob. Píše jedno číslo, ktoré stačí porovnať s požadovanou hladinou významnosti.

$$0.1923 > 0.05 - \text{môžeme zamietnuť normalitu}$$

Test jednotkových koreňov (stability) spočíva v zistení rozloženia koreňov charakteristického polynómu, pričom všetky členy musia ležať vnútri jednotkového komplexného kruhu. Čo aj bolo splnené.

3.3 Počet kointegrujúcich vektorov

Na zistenie optimálneho počtu kointegrujúcich vektorov sa vyžíva Johansenov test kointegrácie. Test využíva dve základné štatistiky koeficientu vierohodnosti a to λ trace a λ max ku ktorým uverejnil kritické hodnoty práve Johansen spolu s Juseliusovou. Na základe výstupu programu EViews som zhodnotil prítomnosť práve jedného kointegrujúceho vektora. Uvedené sa opäť dalo očakávať vzhľadom na charakter analyzovaného modelu.

3.4 Tvorba VECM

Na základe predchádzajúcich zistení vytvoríme vektorový model s korekčným členom (VECM). Nasledujúce dve tabuľky zodpovedajú postupne kointegračnému vektoru a VEC rovnici. V tabuľke sa nachádzajú koeficienty, štandardné odchýlky a t-štatistiky.

<i>Kointegračný vektor</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Št. odchýlka</i>	<i>t-štatistika</i>
<i>dlhdp (-1)</i>	1		
<i>b2 (-1)</i>	1.022305	0.00753	-135.767
<i>urok (-1)</i>	-0.115544	0.06225	1.85627
<i>konšt.</i>	0.132640		

<i>VEC rovnica</i>	<i>Koeficient</i>	<i>Št. odchýlka</i>	<i>t-štatistika</i>
<i>Adlhdp</i>	1.428747	0.27628	5.17136
<i>Ab2</i>	3.031492	0.43865	6.91095
<i>Aurok</i>	-0.219393	0.11310	-1.93976

Takto získanú rovnicu môžeme zapísať v nasledujúcom tvare, pozor však na zmenu znamienok oproti výstupu z počítača.

$$D_t = 0,1326 + 1,0223B2_t - 0,1155r_t$$

Uvedená rovnica predstavuje výsledok analýzy dlhodobých vzťahov. Teraz však ešte treba vykonať analýzu krátkodobého prispôsobovania sa (ECM). Vypočítame reziduály, ktoré budú krátkodobo predstavovať korekčný člen.

$$ec_t = D_t - 0,1326 - 1,0223B2_t + 0,1155r_t$$

3.5 Zhrnutie výsledkov

Analýza dlhodobého pomeru národného dlhu a HDP pomocou vektorového modelu s korekčným členom nám poskytla niekoľko zaujímavých výsledkov. Podľa očakávania koeficient pri člene B2 (podiel nesplateného dlhu na HDP) dosiahol kladné hodnoty a z odhadu môžeme povedať, že zväčšenie podielu národného dlhu na hrubom domácom produkte o jednu jednotku, spôsobí zväčšenie podielu nesplatenej časti národného dlhu na hrubom domácom produkte o 2%, čo je v kontexte dánskej makroekonomickej situácie očakávateľné. Ďalší koeficient sa nachádza pri úrokovej miere. Jeho znamienko sme tiež správne očakávali v úvode. Môžeme sa teda domnievať, že jednotková zmena podielu dlhu na HDP vyvolá pokles úrokovej miery o 11%, čo v absolútnom vyjadrení predstavuje napríklad pokles úrokovej miery z 5% na 4,45%, samozrejme dlhodobo. Nesmieme zabúdať, že úrokovú mieru môžeme považovať v uvedenom vzťahu za mierne exogénnu.

Zhodnotenie výsledkov krátkodobého chybu vyrovnávajúceho modelu sa dá rozdeliť na viacero častí. Po prvé si všimnime veľkosť koeficientu pri korekčnom člene vyjadrujúcom rýchlosť prispôsobenia. V našom prípade vyjadruje, že za necelé tri štvrtroky sa systém dostane do rovnováhy. Za povšimnutie tiež stojí jeho veľká štatistická významnosť. V druhom rade sa zastavíme pri veľkosti úroku. Aj napriek neveľkej štatistickej významnosti sa dá koeficient pekne vysvetliť. Jeho znamienko je opačné ako znamienko pri dlhodobom vzťahu čo môže ozrejmovvať, že vláda z krátkodobého hľadiska je ochotná akceptovať trhový úrok avšak z dlhodobejšieho hľadiska vie naň veľmi dobre vplývať, vďaka už spomenutému veľkému dopytu po vládných cenných papieroch. Pripomínam však, že za úrok boli dosadené hodnoty tržnej úrokovej miery a nie vládne pokladničné poukážky. Do tretice sa pristavme pri koeficiente pri podiele nesplateného dlhu na HDP. Číslo dosahujúce hodnotu 0,56 predstavuje elasticitu tohto podielu a nemôžeme ho pokladať za malé kôli predpokladanej dlhodobejšej reakcii podielu nesplatenej časti verejného dlhu na hrubom domácom produkte na podiel národného dlhu na HDP pri použití štvrtročných údajov.

4 ZÁVER

Za modelovanú časť ekonomickej reality som si vybral podiel dlhu na hrubom domácom produkte a modelovanou krajinou bolo Dánsko. Po počiatočných problémoch som sa dopracoval až k upravenému modelu, ktorého pôvodnú verziu používa Švédsky úrad pre riadenie dlhu. Nasledovala peripetia pri tvorbe údajovej základne, pri ktorej som narazil na nekonzistenciu dát medzi národným štatistickým úradom a Eurostatom. Ako najspoľahlivejší zdroj informácií sa opäť ukázala národná banka skúmanej krajiny.

Definíciu modelu nasledoval vlastný odhad jeho parametrov, ako dlhodobej zložky, tak aj chybu korigujúceho člena. Na odhad bola použitá takzvaná Johansenova procedúra pozostávajúca z viacerých krokov (určenie rádu integrácie, určenie dĺžky oneskorenia a počtu kointegračných vektorov). Uvedená procedúra bola obohatená o viacero testov (testovanie stability a normality). Keďže všetky testy dopadli podľa očakávania mohli sme prejsť k formulácii jednotlivých vzťahov. Ich zhrnutie a vysvetlenie obsahuje časť 3.5 spolu s porovnaním s očakávanými hodnotami. Keďže sa v súčasnosti nachádzame v nestabilnom období ekonomického vývoja môžeme predpokladať že sa ďalší odhadovaný vývoj zastaví bez vonkajšieho zásahu pri hranici 60%, ktorá je aj hranicou ERM II pre podiel dlhu na HDP. Kvalita odhadu sa však ukáže až časom spolu s novými údajmi.

Použitá literatúra

1. ALBU L.: A Simulation Model of Public Debt Sustainability: Institute for Economic Forecasting, Bukurešť, 2008
2. DANMARKS NATIONLBANK: Danish government borrowing and debt 2007: Kodaň, 2008
3. DOEPKE M, LEHNERT A., SELLGREN A. W.: Macroeconomics: University of Chicago, 1999
4. EViews 5 User's Guide, Quantitative Micro Software, Irvine, 2004
5. HATRÁK M.: Ekonometria: Iura Edition, Bratislava, 2007
6. HUSÁR J.: Aplikovaná makroekonómia: SPRINTvfra, Bratislava, 2003
7. HUSÁR J., SZOMOLÁNYI K.: Modelovanie ekonomických procesov I.: EKONÓM, Bratislava, 2005
8. HUSÁR J., SZOMOLÁNYI K., MACÁK M.: Makroekonomické vzťahy medzi rastom HDP, dlhom vlády a Maastrichtské kritériá, KOVE, FHI, EUBA, Bratislava, 2005
9. HUŠEK R.: Aplikovaná ekonometrie, teorie a praxe: Praha, 2009
10. LACHMAN D.: Challenges to the Swedish welfare state: IMF, 1995
11. LISÝ J. a kol.: Ekonómia v novej ekonomike: Iura Edition, Bratislava, 2005
12. LUKÁČIKOVÁ A., LUKÁČIK M.: Ekonometrické modelovanie s aplikáciami: EKONÓM Bratislava, 2008

Kontaktné údaje

Ing. Václav Školuda

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: 420-224 095 445

Email: skoluda@gmail.com

OPTIMALIZACE ROZDĚLOVÁNÍ KNIHOVNÍHO ROZPOČTU

LIBRARIAN ALLOCATION BUDGET PROBLEM

Tereza Suchánková, Radka Bezděková, Erik Borš

Abstrakt

Článek se zabývá problémem alokace finančních zdrojů v knihovnách na nákup nové literatury. Na nákup je vyčleněn většinou předem určený rozpočet, který je třeba vhodně rozdělit. Náklady na pořízení materiálu v čase rostou, zatímco u rozpočtu je tendence spíše opačná. Rozdělení prostředků by mělo zohledňovat různé faktory (potřeby různých oddělení dotyčné instituce, počet aktivních uživatelů, adekvátnost současné kolekce, cirkulace). Cílem práce je vytvořit matematický model, který pomocí metod analýzy obalu dat a následné optimalizace určí počet nově nakoupené literatury v jednotlivých kategoriích a jednom období. Model bude obsahovat všechny důležité aspekty potřebné ke kvalifikovanému rozhodnutí (důležitost kategorií, využívanost, priority uživatelů, historický aspekt, atd.). Vytvořená metodika byla aplikována na knihovnu Ministerstva životního prostředí ČR.

Klíčová slova: Úloha rozdělení rozpočtu, knihovna, DEA modely, cílové programování

Abstract

The article deals with the problem of allocation of financial resources in libraries for purchase of new literature. A budget for this purpose is usually predetermined and must be allocated suitably. The cost of material grows in time, while the budget tends to decrease. Allocation of funds should take into account various factors (needs of departments of the institution, number of active users, adequacy of the current collection, circulation). The aim is to create a mathematical model that uses DEA models and subsequent optimization; model will be able to determine the number of purchased literature in a period in each category considering all the important aspects needed for informed decision (importance of categories, use, priorities of users, historical aspect etc.). The method was applied to the library of the Ministry of the Environment of the Czech Republic.

Keywords: Budget allocation problem, library, DEA analysis, goal programming

1 ÚVOD

Každoročně ve všech knihovnách, ať již veřejných, akademických nebo soukromých, dochází k plánování rozdělení přiděleného rozpočtu - knihovníci musí vybrat ty publikace, které knihovna nakoupí pro následující období. Během této procedury je nezbytné přihlížet k mnoha faktorům a přitom respektovat rozdílné a mnohdy protikladné cíle jednotlivých zájmových skupin (knihovníci, uživatelé, vlastník knihovny a další). Knihovny se obecně s potřebou zohlednění těchto faktorů vypořádávají různými způsoby a ne vždy mají knihovníci k dispozici odborné podklady, na základě kterých je možno o doplnění knihovního fondu fundovaně rozhodnout. Následující kapitola bude věnována problematice rozdělování rozpočtových prostředků v rámci veřejné knihovny příslušející ministerstvu. Vzhledem k charakteristice tohoto typu knihovny můžeme nalézt značné podobnosti s akademickými knihovnami obecně.

Vzhledem k neustálému tlaku na snižování rozpočtu knihoven a zároveň zachování její odborné úrovně jsou knihovníci mnohdy nuceni rušit předplatné různých odborných periodik, popřípadě nákup monografií tak, aby mohli stále odebírat pouze ty publikace, které tvoří jádro knihovního fondu. Tento faktor vyžaduje značnou optimalizaci celého procesu rozdělování zdrojů tak, aby byla zachována kvalita knihovního fondu.

(Canepi, 2007) se pokouší zjistit elementy pro „best practices“ v akademických knihovnách. V rámci své analýzy 28 přístupů k rozdělování rozpočtu dochází k závěrům, že mezi nejdůležitější faktory, které je nutné zohlednit při rozhodování o použití finančních prostředků, jsou zejména:

1. počet uživatelů knihovny
2. průměrný náklad na nákup publikace
3. cirkulace - využití materiálů
4. počet odborných útvarů zasahujících do chodu knihovny.

Celkem analýza identifikovala přes 20 různých faktorů, které v rámci zkoumaných modelů zasahovaly do rozhodovacího procesu.

V minulosti bylo vyvinuto několik modelů rozdělování rozpočtu knihovny. Základní seznam a popis modelů a postupů vytvořených v minulosti uvádí (Budd, 1991). Zajímavým přístupem je model, který uvádí (Arora, a další, 2002). Jedná se o optimalizaci rozdělování knihovního rozpočtu nejen mezi jednotlivé kategorie publikací, ale také napříč vzájemně propojenými jednotkami akademické knihovny. Model je vytvořen pouze pro odborné publikace.

(Wise, a další, 2000) uvádí, že modely využívající techniku cílového programování zřejmě nabízejí nejvhodnější přístup k nalézání řešení, která dosahují zároveň vícero konkurenčních a mnohdy konfliktních cílů s různými prioritami.

Níže uvedená metodika z tohoto přístupu vychází také, ovšem jej doplňuje o další významné faktory a metody, které umožňují přesnější a adekvátnější zastoupení subjektivního odborného faktoru tak, aby nebyl narušen optimalizační charakter úlohy.

2 METODIKA

V případě ministerské knihovny se vyskytují tři typy publikací (knižní monografie, odborná periodika a elektronické zdroje¹), na jejichž koupi je nutné rozpočet vhodně rozdělit. Během rozdělovacího procesu je nutné respektovat filosofii knihovny, která sleduje misi ministerstva a podporuje jej v jeho odborné činnosti.

Analýza problému odborného rozdělení přiděleného rozpočtu jednotlivým knihovnickým kategoriím (např. environmentální politika, encyklopedie, mapy, předpisy a další) bude provedena ve třech fázích:

1. Určení hodnot efektivního využívání knihovnického fondu,
2. Určení agregovaných vah kategorií $K_i - v_i$,
3. Určení optimálního rozdělení knihovnického rozpočtu.

Existující metodiky optimalizace rozdělování knihovního rozpočtu často obsahují pouze poslední fázi. Objem nově nakupovaných publikací do jednotlivých kategorií je v mnoha metodikách určen pomocí mezních nebo cílových hodnot (Wise, a další, 2000). K jejich

¹ Zjišťování využívání elektronických zdrojů se věnuje například www.arl.org/stats/initiatives/.

podrobnější specifikaci dochází především na základě odhadů zainteresovaných subjektů a dosavadní praxe knihovníků. Při použití těchto hodnot může docházet ke zkreslení plánovaných objemů a k jejich následnému rozporu s očekávanou poptávkou, popř. s požadovanou kvalitativní úrovní. Uvedená metodika se snaží tomuto problému předcházet exaktní specifikací daných, v tomto případě cílových, hodnot. Tyto cílové hodnoty jsou tvořeny tak, aby respektovaly požadavky uživatelů ve formě výpůjček a rezervací, zároveň odbornou úroveň knihovního fondu (např. citace publikací) a stávající rozsah publikací.

Knihovny obecně dělí publikace do různých kategorií. Každá kategorie má ale odlišnou důležitost, pokud přihlídneme k účelu a filosofii dané knihovny. Existující metodiky často ale jejich odlišnou důležitost neuvažují vůbec nebo při jejich odhadu vycházejí ze značně subjektivních veličin. K subjektivnímu vnímání důležitosti kategorií je nezbytné přihlížet, ovšem je také nutné je objektivizovat, abychom došli k výsledkům s vysokou vypovídací hodnotou. Z tohoto důvodu uvedená metodika nejprve zjišťuje a zpracovává preference zainteresovaných subjektů (jednotlivých útvarů a knihovníků) a veřejnosti a poté je vyhodnocuje a standardizuje pomocí ověřených metod tvorby vah.

Pro optimalizaci rozdělování knihovního fondu je v existujících metodikách využíváno od jednoduchých matematických výrazů až po sofistikovanější přístupy, např. cílové programování. Navržená inovativní metodika částečně vychází z přístupu cílového programování, ovšem nelineárně jej modifikuje.

2.1 Efektivní využívání knihovnického fondu

Publikace jsou rozděleny do jednotlivých kategorií K_i , přičemž každá kategorie bude charakterizována následujícími veličinami:

- celkový počet publikací v kategorii Q_i ,
- počet nově nakoupených, popř. darovaných, publikací P_{i0} v uplynulém roce,
- cirkulace publikací – počet výpůjček V_i a počet rezervací na publikaci R_i v uplynulém roce,
- citace – počet citací publikací v dané kategorii za posledních 5 let C_i .

Pro každou kategorii K_i bude vypočtena hodnota její reálné *využívanosti* a bude porovnána s potenciálem, který daná kategorie vzhledem k podmínkám v dané knihovně skýtá. K této analýze budou využity modely analýzy obalu dat (DEA – Data Envelopment Analysis), jejichž podrobnější specifikaci lze nalézt například v (Jablonský, 2007). V uvedeném případě bude vhodné využít modelů orientovaných na vstupy, které umožňují ohodnotit efektivnost využívání porovnávaných kategorií při respektování situace knihovny. Jedná se o zjištění tzv. hranice efektivnosti, na které leží ty kategorie, které vzhledem k podmínkám nejlépe využívají svého potenciálu.

Pro každou kategorii K_i platí, že jejími „vstupy“ jsou již nakoupené publikace zastoupené v knihovním fondu – tj. P_{i0} a Q_i . Naopak „výstupem“ kategorie je její úspěšnost z hlediska využívání daných publikací, a to nejen ve formě výpůjček V_i a rezervací R_i jednotlivých publikací, ale také jejich citací C_i v dokumentech vytvářených uživateli knihovny, např. ve vědeckých člancích apod.

Pro zjištění optimální výše vstupů, které jsou schopny zabezpečit daný objem výstupů, je nutné danou neefektivní jednotku promítnout na hranici efektivnosti a následně vstupy adekvátně ponížit.

Míru efektivnosti, pro jednotlivé kategorie je možné vypočítat na základě CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) DEA modelu, který je níže uveden. Tento model při hodnocení dané

jednotky – kategorie uvažuje i efektivnost ostatních. Na základě jejich vzájemného vztahu je tak možné určit hranici efektivnosti.

$$\min z = \theta_q - \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \theta_q \mathbf{x}_q, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q, \quad (3)$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \varepsilon = 10^{-8}, \quad (4)$$

kde θ_q je proměnná, kterou lze interpretovat jako potřebnou míru snížení objemu vstupů, aby jednotka dosáhla efektivní hranice. \mathbf{s}^+ a \mathbf{s}^- jsou přídatné proměnné odpovídající jednotlivým omezením pro vstupy \mathbf{X} a výstupy \mathbf{Y} . λ je vektor vah, jehož prvky jsou přiřazeny daným jednotkám. ε je infinitezimální konstanta (zpravidla 10^{-8}) a $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$. Hodnota účelové funkce představuje míru efektivnosti e_i , pokud tedy $z = 1$, poté je jednotka K_q efektivní. Ty kategorie, které jsou efektivní, lze dále seřadit podle jejich úspěšnosti, tj. jak dalece se vymykají v porovnání s ostatními kategoriemi – pro tento případ lze s výhodou využít tzv. míry superefektivnosti. Míra superefektivnosti zachycuje vzdálenost zkoumané jednotky od této nově utvořené efektivní hranice. Hodnota účelové funkce bude v modelu superefektivnosti vyšší než 1.

Na základě výsledků analýzy lze jednotlivé kategorie rozdělit do dvou disjunktních množin:

- E ... množina neefektivních kategorií K_i s mírou efektivnosti e_i ,
- M ... množina efektivních kategorií K_i s mírou superefektivnosti m_i .

Pomocí daných měr lze zjistit cílové hodnoty využívanosti jednotlivých kategorií, které budou odpovídat jejich potenciálu. Pro neefektivní jednotky se jedná o přiblížení se hranici efektivnosti, tj. dosažení míry efektivnosti $e_i = 1$. Cílem bude snížení vstupů (nově nakoupených publikací) na optimální úroveň. Pro efektivní jednotky zamezení jejich přetíženosti – vysoká míra superefektivnosti značí značnou „popularitu“ dané kategorie K_i . Z tohoto důvodu je vhodné nakoupit vyšší počet nových publikací do této kategorie za účelem snížení přetíženosti při zachování její efektivnosti.

2.2 Agregované váhy kategorií K_i

Důležitým faktorem při rozdělování knihovního rozpočtu je zjištění preferencí jednotlivých zainteresovaných subjektů z hlediska existujících kategorií K_i v rámci knihovny. Těmi mohou být nejen různé skupiny uživatelů, ale také sami knihovníci, kteří reprezentují filosofii dané knihovny. V případě veřejné ministerské knihovny jsou těmito subjekty samozřejmě knihovníci, dále jednotlivé odborné útvary (odborní ministerstva) a externí uživatelé. Předpokládejme, že těchto subjektů bude L .

Ke zjištění preferencí je vhodné využít již existujících metodik odhadu vah. Mezi sofistikované metody patří tzv. Saatyho metoda kvantitativního párového srovnávání, kterou podrobněji popisuje např. (Fiala, 2008).

Saatyho metoda vzhledem ke značně přesným odhadům patří mezi nejčastěji používané metody pro tvorbu vah. Subjektivně se srovnávají vždy páry veličin i a j vzhledem k jejich relativní důležitosti a toto porovnání je následně obsaženo v tzv. Saatyho matici $S = (s_{ij})$, přičemž prvky matice mohou nabývat celočíselných hodnot od 1 do 9 (nebo jejich převrácených hodnot pro opačné preference), kdy zároveň platí, že:

- 1 - i a j jsou rovnocenné
- 3 - i je slabě preferováno před j
- 5 - i je středně silně preferováno před j
- 7 - i je velmi silně preferováno před j
- 9 - i je absolutně preferováno před j .

Hodnoty $s_{ii} = 1$, protože veličina je rovnocenná sama se sebou a dále platí, že $s_{ji} = 1/s_{ij}$ pro všechna i a j . Jednotlivé hodnoty s_{ij} představují přibližný poměr vah mezi veličinami i a j . Jednotlivé váhy v_i lze vypočítat pomocí metody geometrického průměru. Řešením úlohy je geometrický průměr řádků matice S . Předpokladem použitelnosti výsledků je ale konzistence matice S .

Vzhledem k L zainteresovaným subjektům knihovny je nutné vytvořit L Saatyho matic S . Ministerská knihovna je primárně určena interním potřebám ministerských pracovníků, ale zároveň není možné zanedbat veřejnost, která tvoří významný podíl v počtu uživatelů knihovny. Z uvedeného vyplývá, že bude vytvořena ještě jedna Saatyho matice, jež bude zachycovat preference veřejných uživatelů, kterým bude následně odpovídat soubor vah v_{ie} . Agregované váhy v_i kategorií K_i lze vytvořit pomocí váženého průměru dílčích vah v_{il} a v_{ie} , kde důležitost jednotlivých útvarů ministerstva O_l je dána počtem zaměstnanců n_l . Ministerská knihovna je ovšem primárně určena jejím interním zaměstnancům, aby jim zabezpečila přístup ke kvalitním informačním zdrojům pro výkon jejich práce. Z tohoto důvodu není možné, aby veřejnost příliš zasahovala do rozhodovacího procesu přidělování finančních zdrojů jednotlivým kategoriím publikací – proto předpokládáme, že cílem je zahrnout veřejnost do rozhodovacího procesu tak, aby její pravomoci odpovídaly průměrně velkému útvaru ministerstva (n_e).

$$v_i = \frac{\sum_{l=1}^L n_l v_{il} + n_e v_{ie}}{\sum_{l=1}^L n_l + n_e}. \quad (5)$$

Pro jednotlivé váhy musí platit: $\sum_{i=1}^K v_i = 1, \quad 0 \leq v_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, K.$ (6)

2.3 Optimální rozdělení knihovního rozpočtu

Po určení důležitosti jednotlivých kategorií publikací K_i v knihovně je možné formulovat účelovou funkci. Cílem optimalizace je maximalizovat užitnost knihovního fondu při respektování jeho kvality a odbornosti. Prostředkem k dosažení tohoto cíle je cílování hodnot aktuální využitelnosti kategorie K_i směrem k jejich potenciálu, tj. minimalizace odchylek od tohoto cíle.

Účelovou funkci lze vyjádřit takto:

$$\min Z = \sum_{i \in \{M\}} |d_i^+|^{1/v_i} + \sum_{i \in \{E\}} |d_i^-|^{v_i}. \quad (7)$$

Kladné a záporné odchylky od cílů d_i^+ , resp. d_i^- , lze vyjádřit takto:

$$d_i^+ = P_{i0} m_i - P_{i1}, \quad i \in \{M\}, \quad (8)$$

$$d_i^- = P_{i0}e_i - P_{i1}, \quad i \in \{E\}, \quad (9)$$

kde P_{i0} značí počet nakoupených, popř. darovaných, publikací v kategorii K_i v loňském roce ($t=0$) a P_{i1} jsou proměnné vyjadřující plánovaný nákup publikací do kategorie K_i pro nadcházející rok ($t=1$) a odchylky d_i^+, d_i^- nabývají libovolných hodnot.

Účelová funkce vyjádřená výrazem (7) zachycuje nelineární charakter vlivu důležitosti jednotlivých kategorií K_i na mechanismus přibližování se cílovým hodnotám využitosti knihovnického fondu.

V případě nelineární funkce je nutné přidat omezení, které zabezpečuje, že pro neefektivní kategorie K_i musí platit, že počet nově nakoupených knih může být nejvýše roven počtu nakoupených knih v loňském roce. Situaci vyjadřuje následující výraz:

$$P_{i0} \geq P_{i1}, \quad i \in \{E\}. \quad (10)$$

Během rozdělování knihovního rozpočtu je nezbytné přihlížet i k dalším omezením. Výše uvedené výrazy představují maximalizaci využití knihovního fondu při zachování jeho kvality a odborné úrovně a zároveň při respektování subjektivního faktoru relativní důležitosti jednotlivých kategorií K_i určených zainteresovanými útvary. Dále jsou uvedené některá požadovaná omezení.

Respektování přiděleného rozpočtu je dáno níže uvedenou podmínkou:

$$\sum_{i=1}^K c_i P_{i1} \leq B, \quad (11)$$

kde c_i je průměrný náklad na koupi publikace v kategorii K_i , P_{i1} jsou proměnné vyjadřující plánovaný nákup publikací do kategorie K_i pro nadcházející rok a B je objem přiděleného rozpočtu knihovně.

Nezanedbatelným faktorem, který ovlivňuje poptávku po knihovních publikacích, je **dynamický charakter počtu uživatelů knihovny**. Z tohoto důvodu je vhodné znát míru vývoje počtu uživatelů knihovny a dále ji promítnout do objemu nově nakupovaných publikací. Vzhledem k tomu, že uživatelé knihovny jsou nejen interní, tj. zaměstnanci ministerstva pracující na jednotlivých útvarech, ale také externí uživatelé, je nutné obě tyto skupiny při optimalizaci uvažovat. Ministerstvo disponuje L útvary. Nyní je možné určit průměrnou míru růstu počtu uživatelů q :

$$q = \sum_{l=1}^L \left(\frac{V_{l,t-1} + V_{e,t-1}}{V_{lt} + V_{et}} \frac{N_{lt} + N_{et}}{N_{l,t-1} + N_{e,t-1}} \right), \quad (12)$$

kde $V_{l,t-1}$ je počet výpůjček v útvaru l během minulého roku $t-1$, V_{lt} je počet výpůjček v útvaru l během běžného roku t , $N_{l,t-1}$ je počet uživatelů knihovny (včetně knihovníků) v útvaru l v minulém roce $t-1$ a N_{lt} představuje počet uživatelů knihovny (včetně knihovníků) v útvaru l v běžném roce t . Index e u výše uvedených veličin představuje hodnoty pro veřejné uživatele. Pokud tuto podmínku zahrneme do modelu, poté se výrazy (8) a (9) změní. Upravené podmínky jsou zachyceny rovnicemi (13) a (14).

$$d_i^+ = P_{i0}m_iq - P_{i1}, \quad i \in \{M\}, \quad (13)$$

$$d_i^- = P_{i0}e_iq - P_{i1}, \quad i \in \{E\}. \quad (14)$$

3 APLIKACE METODIKY NA KNIHOVNU PŘI MŽP

V případě ministerské knihovny bylo možné provést optimalizaci pouze knižních publikací rozdělených do 37 různých kategorií – odborná periodika nejsou rozdělena do kategorií (pouze tuzemské a zahraniční) a elektronické zdroje nejsou monitorovány, co do úrovně jejich využívání. Ministerstvo dále nezaznamenává a nevyhodnocuje, jaké informační zdroje byly využity při tvorbě výstupů ministerských zaměstnanců (počty citací). Z tohoto důvodu bude částečně omezeno zabezpečení zlepšení, popř. udržení, kvality a odbornosti knihovního fondu. K analýze jsou použita data z roku 2010, protože data pro rok 2011 ještě nebyla dostupná v době zpracování analýzy.

Na základě analýzy jednotlivých kategorií K_i pomocí DEA modelu vyplynulo, že *efektivní jsou pouze 4 kategorie*, přičemž jejich míry superefektivity jsou: J – 1,71; MA – 1,38; MPB – 3,58 a R – 1,09. Vysoká hodnota míry superefektivity u kategorie MPB značí její významnou přetíženost a popularitu. Ostatní kategorie byly neefektivní a jim odpovídající nákup publikací by měl v dalším období zpomalit.

Každá kategorie publikací je z hlediska jednotlivých skupin uživatelů jinak důležitá. Pro analýzu je nutné ale znát priority. Ministerstvo má celkem 10 interních útvarů, z nichž jeden není v rámci knihovny aktivní – z jeho podnětu nebyla uskutečněna ani 1 výpůjčka ani rezervace. Z tohoto důvodu nebudeme tento útvar pro další výpočty preferencí uvažovat. Z uvedeného vyplývá, že celkem bude vytvořeno 10 Saatyho matic (9 od interních útvarů a 1 vypovídající o preferencích veřejnosti), ze kterých budou následně odvozeny agregované váhy kategorií. *Ve výsledku existují pouze 4 kategorie, jejichž váha je vyšší než 5%* - do této skupiny patří i efektivní a nejvíce vytěžovaná kategorie MPB.

Pro financování nákupu nových monografií pro rozšíření knihovního fondu má knihovna k dispozici určitý objem finančních prostředků, tj. $B = 200\,000$ Kč (fiktivní hodnota). Meziroční růst počtu uživatelů byl 22,7%.

Tabulka 1. Zhodnocení nejdůležitějších 4 knihovních kategorií.

Kategorie K_i (váha v_i)	Míra efektivity e_i	Míra superefektivity s_i	Potenciál kategorie $e_i qP_{i0}$ nebo $s_i qP_{i0}$	P_{i1}	P_{i0}
MB (0,1118)	0,688	-	190	190	225
MC (0,0836)	0,72	-	201	201	228
MPB (0,0657)	1	3,58	40	40	9
P (0,1120)	0,61	-	64	64	86

Uvedené optimální řešení předpokládá, že na nakoupení všech potřebných publikací postačí pouze část finančních prostředků z celkových $B = 200\,000$ Kč, a to 135 364 Kč, přičemž u všech kategorií bude dosaženo jejich potenciálu vzhledem k jejich využívání a potřebnosti. Právě z toho důvodu, že byl fiktivní rozpočet dostatečný pro financování všech potřebných publikací, je jednotlivých potenciálů dosahováno. Pokud by bylo rozpočtové omezení napjato, tj. rozpočet by nepokryl všechny požadované publikace, jednotlivé kategorie by se přibližovaly ke svému potenciálu, ale nemusely by jej nutně dosáhnout již první rok. Díky nelineární formulaci účelové funkce by se ale počet nově nakoupených monografií v kategoriích ke svému potenciálu (efektivní hranici) přibližoval pomaleji, respektive rychleji, v závislosti na důležitosti dané kategorie.

Optimální řešení předpokládá, že ke zvýšení využívání a kvality knihovního fondu je vhodné tento postupně restrukturalizovat v závislosti na existujících požadavcích zejména interních uživatelů. Pouze u dvou kategorií je doporučen nárůst koupě nových monografií v porovnání s předchozím rokem.

Poděkování

Článek vznikl za podpory a v souladu s projekty VaV SP/II/4h3/50/07 a IGA F4/18/2011.

Použitá literatura

1. ARORA, A. a KLABJAN, D. 2002. A model for budget allocation in multi.unit libraries. *Library Collections, Acquisitions, & Technical Services*. 2002, Sv. 26, s. 423-438.
2. BUDD, J. 1991. Allocation formulas in the literature: a review. *Library Acquisitions: Practice and Theory*. 1991, s. 95-107.
3. CANEPI, K. 2007. Fund allocation formula analysis: Determining elements for best practices in libraries. *Library Collection, Acquisitions, & Technical Services*. 2007, Sv. 31, s. 12-24.
4. FIALA, P. 2008. *Modely a metody rozhodování*. Praha : Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1345-4.
5. JABLONSKÝ, J. 2007. *Programy pro matematické modelování*. Praha : VŠE, 2007. ISBN 978-80-245-1178-8.
6. Statistics & Assessment: A Gateway to Library Assessment Tools. [Online] Association of Research Libraries. [Citace: 14. 10. 2011.] www.arl.org/stats/initiatives/.
7. WISE, K. a PERUSHEK, D.E. 2000. Goal Programming as a Solution Technique for the Acquisitions Allocation Problem. *Library & Information Science Research*. 2000, Sv. 22, 2, s. 165-183.

Kontaktní údaje

Ing. Tereza Suchánková

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. Winstona Churchilla 1938/4, 130 00 Praha 3

Tel: (+420) 607 934 256

email: tereza.suchankova@vse.cz

Ing. Radka Bezděkovská

SYSNET s.r.o.

Kroftova 1, 150 00 Praha 5

Tel: (+420) 728 256 165

email: bezdekovska@gmail.com

Mgr. Erik Borš

SYSNET s.r.o.

Kroftova 1, 150 00 Praha 5

Tel.: (+420) 602 772 673

email: ebors@sysnet.cz

MODELOVÁNÍ VÝROBY VODNÍ ELEKTRÁRNY V ZÁVISLOSTI NA PRŮTOKU A SPÁDU

MODELING HYDRO GENERATION AS A FUNCTION OF HEAD AND FLOW

Jiří Šumbera

Abstrakt

Závislost výroby vodní elektrárny na výškovém rozdílu hladin, tzv. spádu, je při modelování energetických trhů a sítí často opomíjena. Cílem této práce je porovnat modelovací přístupy založené na smíšeném celočíselném programování, které tuto vlastnost zachycují. Tyto přístupy vycházejí z metody aproximace jednorozměrné nelineární funkce po částech lineární funkcí a tuto metodu rozšiřují pro druhý rozměr. Je kladen důraz na přístupy s co nejjednodušším způsobem zachycení této závislosti, neboť musí být aplikovatelné v modelech velkých rozměrů. Přístupy jsou srovnány z hlediska počtu celočíselných proměnných.

***Klíčová slova:** vodní elektrárna, spád, aproximace, smíšené celočíselné programování*

Abstract

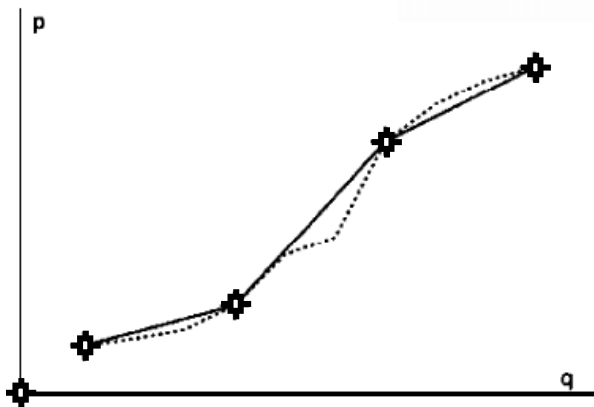
During electricity market modeling, the dependency of hydro generation on the difference of reservoir levels (head) is often neglected. This paper tries to compare the modeling approaches based on mixed integer programming, which capture this head-dependency. These approaches generalize the one-dimensional approximation of a non-linear function using a piece-wise linear function into the second dimension. Approaches with the simplest way of capturing the head-dependency are preferred as they must be applicable to large-scale systems. Consequently, the approaches are compared with respect to the number of binary variables used.

***Keywords:** head-dependent hydro, approximation, mixed integer programming*

1 MODELOVÁNÍ CHARAKTERISTIK ELEKTRÁRNY METODAMI LINEÁRNÍHO A SMÍŠENÉHO CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVÁNÍ

V posledních letech nacházejí velkého využití modelovací metody založené na aplikaci lineárního (LP) a smíšeného celočíselného programování (MIP). Tyto metody lze uplatnit i při modelování toků elektřiny v sítích či modelování trhů s elektřinou. Schopnosti solverů pokročily natolik, že dnes umožňují modelovat velmi rozsáhlé systémy. Na druhou stranu se vždy najdou úlohy, které jsou i pro dnešní nejvýkonnější počítače příliš složité. Z tohoto důvodu jsou vyhledávány efektivní modelovací postupy, které umožní vyřešit daný problém s co nejmenšími požadavky na zdroje (čas výpočtu, velikost formulace, atd.).

Řada úloh vznikajících při modelování trhů s elektřinou si vystačí s LP, ale složitější problémy – jako jsou například nekonvexní funkční závislosti – je možné řešit jen pomocí výpočetně výrazně náročnějšího MIP. Základní úlohou této oblasti je zachycení vztahu mezi výrobou elektřiny a spotřebou paliva v elektrárně, kterou popisuje tzv. křivka Vstup-Výstup. V nejjednodušším pojetím je tato závislost aproximována lineárně. Tento přístup ale předpokládá možnost spojitého přechodu mezi stavy výroby a nevýroby a také možnost výroby libovolně malého množství elektřiny. V terminologii LP je výroba reálnou, shora omezenou proměnnou. Pro skutečnou elektrárnu ale mimo horní meze výroby existuje i dolní mez, a pod ní existuje jen jeden možný stav – nevýroba. Podobně i lineární aproximace křivky Vstup-Výstup nemusí zachycovat některé její důležité vlastnosti, a je zvolit lepší metody aproximace - například po částech lineární křivkou. Oba dva problémy je možno řešit přeformulováním původního LP problému jako MIP. Obrázek 1 zobrazuje reálnou křivku Vstup-Výstup spolu s její MIP aproximací.



Obrázek 1: křivka Vstup-Výstup a její MIP aproximace

Tato práce má následující dělení. Kapitola 2 popisuje charakteristiky výroby elektřiny ve vodní elektrárně a její reprezentaci dvourozměrnou nelineární funkcí. Kapitola 3 přibližuje některé společné myšlenky používané pro aproximaci této funkce pomocí po částech lineární funkcí, jako je například použití bivalentních proměnných a speciálních typů omezení. Kapitola 4 tyto metody detailně popisuje a konečně kapitola 5 se věnuje jejich srovnání s důrazem na výpočetní obtížnost charakterizovanou počtem celočíselných proměnných.

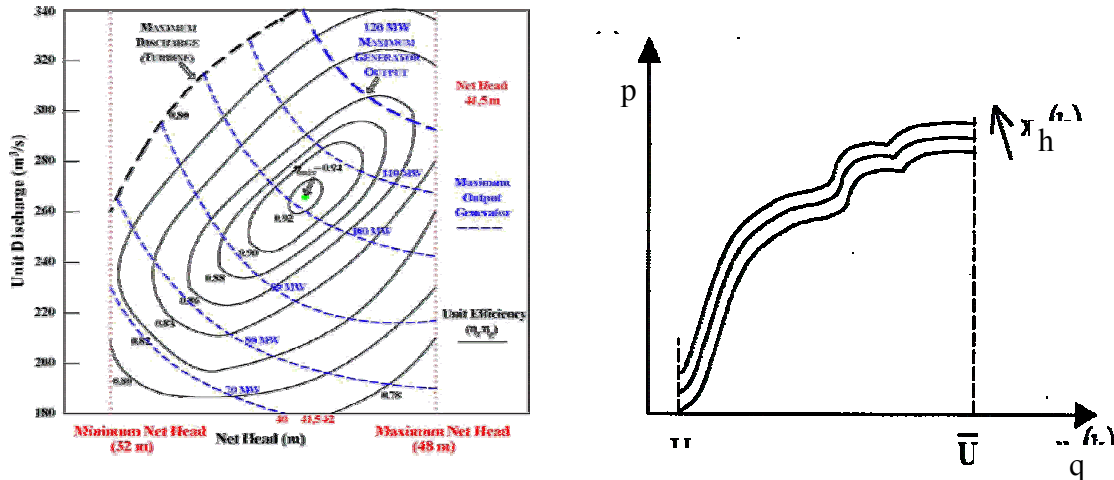
2 CHARAKTERISTIKY VODNÍ ELEKTRÁRNY

Okamžitá výroba elektřiny ve vodní elektrárně (p) je úměrná účinnosti generatoru a turbíny (η_g, η_t), rozdílu vodních hladin, tzv. spádu (h), a průtoku vody turbínou (q)

$$p = g * \eta_g * \eta_t * h * q \quad (1)$$

Tuto základní identitu je možné odvodit ze vztahu pro potenciální energii (mgh), po vydělení časem a zavedení charakteristik reprezentujících ztráty, tj. účinnosti.

V důsledku fyzikálních zákonů a konstrukčních provozních omezení jsou spád i účinnosti obecně nelineární funkce. Například účinnost turbíny závisí na spádu, průtoku a také designu turbíny, který je podřízen očekávanému využití¹. Obrázek 2a, tzv. Hillův diagram, ukazuje vrstevnice účinnosti elektrárny spolu s vrstevnicemi výrobní funkce v závislosti na toku a spádu.



Obrázek 2. a) Hillův diagram. b) řezy výrobní funkce

Výrobní funkce vodní elektrárny má v prvním přiblížení blízko k typické mikroekonomické produkční funkci:

- Je rostoucí v obou svých proměnných
- Z počátku rostoucí výnosy z rozsahu vykazují nasycení
- Mezní míra substituce je konvexní vzhledem k počátku

Obrázek 2b ukazuje řezy výrobní funkcí pro různé hodnoty spádu. Je vidět, že pro konstantní hodnotu spádu může mít tato funkce lokální optima či naopak body, kterým je vhodné se vyhnout - ať už z důvodu nízké účinnosti či z konstrukčních důvodů. Tyto jednorozměrné funkce jsou analogická křivce Vstup-Výstup klasické elektrárny a lze je i analogicky modelovat (viz Kapitola 4, Metoda 1).

Pro další potřeby bude výrobní funkce uvažována ve zjednodušeném tvaru, který tuto funkci uvažuje jako obecnou nelineární funkci závislou na průtoku a spádu

$$p = f(h, q) \tag{2}$$

Přestože v tomto tvaru zápisu není rozdíl mezi oběma proměnnými, z praktického hlediska má větší význam závislost výroby na průtoku než na spádu. V případě průtočné říční elektrárny se většinou spád mění méně než průtok. Podobně i u přehradní elektrárny, jejíž výroba není díky akumulaci nádrže dána množstvím přitékající vody ale naopak množstvím vody regulovaným obsluhou, je klíčové zachytit závislost na tomto parametru. Pro většinu velkých nádrží se průtok v čase mění mnohem rychleji než spád. Z těchto důvodů vychází některé z níže prezentovaných aproximačních metod z jednorozměrné aproximace výroby jakžto funkce pouze průtoku, do které je závislost výroby na spádu dodatečně doplněna.

3 MATEMATICKÝ APARÁT

V následujícím textu je použito toto značení:

p , resp. $f(x,y)$ výrobní funkce, resp. obecná funkce dvou proměnných x a y

¹ Například flexibilní zdroj jako vodní elektrárna s rezervoárem bude mít maximální účinnost blíže středu rozsahu výroby a ne v bodě maximálního průtoku, jak je tomu u průtočných říčních elektráren.

q , resp. x	průtok (spotřeba paliva), resp. první proměnná x
h , resp. y	spád, resp. druhá proměnná y
b	bivalentní proměnná, tj. nabývá pouze hodnoty 0 nebo 1
v	spojitá proměnná LP, tj. nabývá kladných reálných hodnot
λ	spojitá proměnná LP tvořící konvexní kombinaci

Na rozdíl od problémů LP, kdy všechny proměnné jsou reálné kladné, se v úlohách MIP vyskytuje celé řada jiných proměnných. Mezi nimi má hlavní místo bivalentní proměnná, která může nabývat pouze dvou hodnot: 0 nebo 1. Ostatní typy proměnných (celočíslné, polo-spojité, atd) lze totiž vždy převést na tyto proměnné². Podobně je i jejich důležitost dána metodou řešení - většina komerčních solverů řeší problémy MIP metodou větvení a hranic která při nalezení celočíselně nepřipustného řešení dělí množiny přípustných řešení na dvě části – což lze opět snadno vyjádřit bivalentní proměnnou.

Základní použití bivalentní proměnné je při modelování situace, která má pouze dvě vzájemně se vylučující varianty. Rozšířením tohoto pohledu na více vzájemně se vylučujících variant, z nichž pouze jednu chceme vybrat, je soubor proměnných typu Special Ordered Set 1 (SOS1). V tomto souboru může nabývat nanejvýš jedna proměnná nenulové hodnoty. To, co odlišuje tento soubor od souboru bivalentních proměnných, je dodatečná informace o seřazení těchto proměnných v podobě váh. Ty umožňují solveru efektivněji větvit přípustnou množinu³. Hodnoty SOS1 proměnných nejsou omezeny na množinu $\{0, 1\}$.

Dalším rozšířením SOS1 je soubor proměnných typu Special Ordered Set 2 (SOS2), v rámci kterého mohou až dvě po sobě následující proměnné nabývat nenulových hodnot. Tyto soubory jsou nejčastěji používány k aproximaci nelineárních funkcí jedné proměnné. Podobně při aproximaci funkcí N proměnných by šlo s výhodou využít soubory typu SOSN, avšak solvery již tyto proměnné většinou nepodporují. Toto omezení lze v praxi obejít návratem k bivalentním proměnným – pro každou proměnnou ze souboru SOSN je použita jedna bivalentní proměnná a jejich součet je shora omezen číslem N .

Vzhledem k tomu, že modely v následující kapitole vycházejí z principů SOSN, vyskutují se v jejich formulaci podobná omezení. Vyplatí se proto tato omezení podrobněji popsat.

Omezení členství

$$\sum_{i \in I} b_i = 1 \quad (3)$$

Toto omezení vyjadřuje princip exkluzivity, neboť v něm právě jedna bivalentní proměnná b_i nabývá hodnoty 1. Množina indexů I nejčastěji tvoří pokrytí učitě množiny, nejčastěji intervalu či obdélníku. Toto omezení pak říká pouze to, že modelované veličina je právě v jedné podmnožině i tohoto intervalu.

Konvexní omezení

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (5)$$

První rovnice definuje x jako lineární kombinaci n čísel x_i pomocí koeficientů λ_i . Z modelovacího pohledu jsou x_i pevně daná čísla a x a λ_i jsou proměnné, a proto je tato rovnice zcela běžným omezením LP. Rovnice (5) - spolu s tím, že koeficienty λ_i jakožto proměnné LP jsou kladné, tj. $\lambda_i \geq 0$ pro $i=1..n$ - dělá z lineární kombinace (4) kombinaci konvexní. Z tohoto důvodu se toto omezení nazývá konvexním omezením.

² Například libovolnou celočíselnou proměnnou lze vyjádřit v binárním tvaru, tj. jako součet bivalentních proměnných.

³ Bez této dodatečné informace nejsou SOS1 soubory efektivnější než soubor bivalentních proměnných.

Přestože v konvexní kombinaci je n sčítanců, nenulových je často jen několik z nich. Pokud jsou nenulové pouze dvě hodnoty i_1 a i_2 , pak konvexní kombinace (4) reprezentuje úsečku mezi body x_{i_1} a x_{i_2} . Podobně v případě tří nenulových hodnot se jedná o trojúhelník.

Omezení proměnných konvexní kombinace

$$\lambda_i \leq \sum_{j \in J} b_j \quad (6)$$

Za předpokladu, že b_j jsou bivalentní proměnné svázané podmínkou členství (3) a $J \subset I$, nabývá pravá strana hodnoty 0 nebo 1. V prvním případě bude proměnná λ_i rovna 0 a nebude tedy přispívat do konvexní kombinace (4). Vztah (6) proto omezuje, které proměnné λ_i budou moci vystupovat v konvexní kombinaci s nenulovou hodnotou.

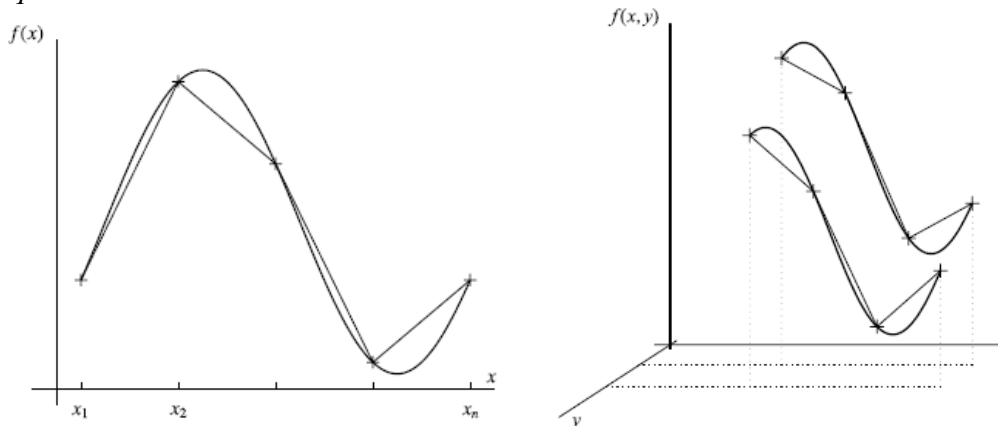
4 METODY APROXIMACE

Metoda 1 - konstatnní spád

V případě nezávislosti výroby na spádu se výrobní funkce stává jednorozměrnou (viz obr. 3a)

$$p = f(h^*, q) = f(q) \quad (7)$$

a můžeme ji aproximovat po částech lineární funkcí. Tato situace nastává pokud je skutečná závislost na spádu velmi malá⁴ či pokud závislost explicitně modelovat nechceme. V tom případě je vhodné zvolit hodnotu h^* tak, aby co nejlépe vyjadřovala $p = f(h, q)$ pro všechny hodnoty q ⁵.



Obrázek 3. Výrobní funkce pro a) konstantní spád b) po částech konstantní spád

Aproximaci získáme rozdělením intervalu na $n-1$ podintervalů s krajními body x_i , $i=1..n$. Body x_1 a x_n pak odpovídají krajním bodům původního intervalu. Je vhodné zavést tyto body zlomu v bodech, kde se výrazně mění sklon výrobní funkce, tj. účinnost elektrárny. Hodnotu funkce f v těchto bodech pak značíme f_i . Každý bod z původního intervalu pak lze vyjádřit jako konvexní kombinaci dvou nejbližších bodů zlomu

$$\text{(referenční omezení pro } x) \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad (8)$$

Aproximovaná hodnota funkce je pak dána konvexní kombinací se shodnými váhami

$$\text{(funkční omezení)} \quad f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \quad (9)$$

Váhy λ_i jakožto proměnné modelu, musejí splňovat omezení konvexnosti

⁴ Například v případě říčních průtočných elektráren

⁵ Volíme h tak, aby průměrná absolutní odchylka $|f(h, q) - f(h^*, q)|$ byla co nejmenší.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (10)$$

a dále musejí být typu SOS2, tj. maximálně dvě po sobě jdoucí hodnoty smějí být nenulové, aby výše uvedená konvexní kombinace tvořila úsečku. Alternativní formulace SOS2 podmínek skrze $n+1$ dodatečných bivalentních proměnných b_i je

$$\text{(omezení členství pro } b^x) \quad \sum_{i=1}^{n-1} b_i^x = 1 \quad (11)$$

$$\text{(omezení proměnných k.k.)} \quad \lambda_i \leq b_{i-1}^x + b_i^x \quad i = 1..n \quad (12)$$

Bivalentní proměnná b_i nabývá hodnoty 1, pokud x je z intervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Hodnoty b_0 a b_n necht' jsou nula⁶. Omezení členství říká, že libovolná hodnota je právě v jednom intervalu na ose x . Druhé omezení umožňuje pouze dvěma po sobě jdoucím váhám nabývat nenulových hodnot.

Metoda 2 - po částech konstantní spád

V případě, kdy výrobní funkce na spádu závisí, se zavádí vzorkování druhé proměnné y pomocí vzorkovacích proměnných y_j . Body y_l a y_m opět odpovídají krajním bodům intervalu. Analogicky pak definujeme funkční hodnotu f_{ij} jako hodnotu v bodě $[x_i, y_j]$. Nejjednodušší metodou aproximace funkční závislosti v druhé proměnné je funkcí po částech konstantní. To znamená, že funkce f v intervalu $[y_j, y_{j+1})$ nezávisí na proměnné y a v bodě y_{j+1} se její hodnota skokem mění (viz obr. 3b). Označíme-li f_{ij} jako hodnotu funkce v bodě $[x_i, y_j^*]$, kde y_j^* je nějaká hodnota y z intervalu $[y_j, y_{j+1})$, pak tuto po částech konstantní aproximaci získáme pomocí rovnic (8) a (10)-(12) a dále pak pomocí následujících omezení:

$$\text{(referenční omezení pro } y) \quad y \leq \sum_{j=1}^{m-1} b_j^y y_{j+1} \quad \text{a} \quad y \geq \sum_{j=1}^{m-1} b_j^y y_j \quad (13)$$

$$\text{(omezení členství pro } b^y) \quad \sum_{j=1}^{m-1} b_j^y = 1 \quad (14)$$

$$\text{(funkční omezení)} \quad f \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{ij} + M(1 - b_j^y) \quad j = 1..m-1 \quad (15)$$

$$f \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{ij} - M(1 - b_j^y) \quad j = 1..m-1$$

Referenční omezení (13) nastaví proměnnou b_j^y rovnou jedné pro $y \in [y_j, y_{j+1})$. Z celkem $2(m-1)$ omezení (15) jsou aktivní 2 omezení (pouze ta, pro která je b_j^y rovna 1). Ostatní omezení jsou díky dostatečně velké konstantě M neaktivní⁷.

Převrácená úloha, tj. úloha kde by spád byl aproximován po částech lineárně a průtok po částech konstantně, nemá z důvodů popsaných v kapitole 2 praktické použití.

Metoda 3 - po částech lineární spád (na trojúhelníku)

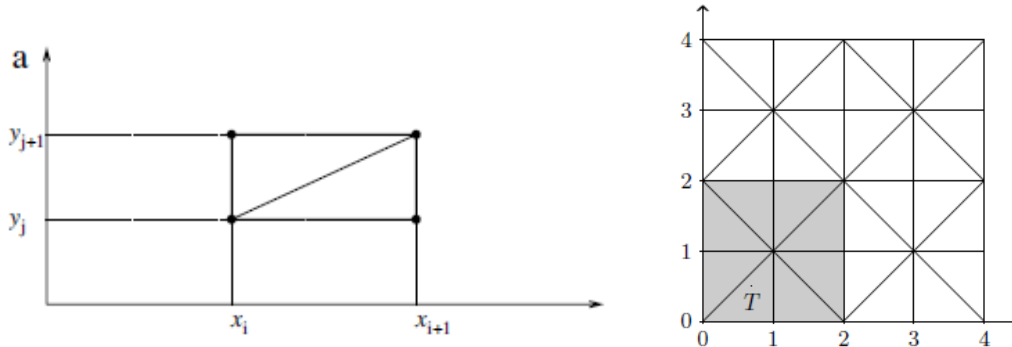
V předchozích metodách byly v konvexní kombinaci maximálně 2 body nenulové, tj. výsledná konvexní kombinace definovala úsečku. Konvexní kombinaci je možné rozšířit na 3 body, které – pokud neleží na jedné přímce – pak tvoří trojúhelník. Tím vzniká možnost, jak aproximovat funkci dvou proměnných funkcí, která je lineární v obou proměnných [1].

⁶ Tyto proměnné zavádíme, aby vztah (12) platil pro všechny i . Pokud by mohly nabývat hodnoty 1, pak by odpovídaly intervalům $[x_0, x_1]$ a $[x_n, x_{n+1}]$, které nemodelujeme.

⁷ Vhodnou volbou dostatečně malého M lze zlepšit relaxační vlastnosti těchto omezení.

$$f = f_0 + x \frac{\Delta f}{\Delta x} + y \frac{\Delta f}{\Delta y} \quad (16)$$

Nejedná se o funkci bilineární, neboť neobsahuje smíšený člen xy ⁸. Obecně je možné funkci f rozložit do trojúhelníkového pokrytí nekonečně mnoho způsoby. Pokud chceme efektivně porovnat tento způsob s předcházející metodou, je nutně výchozím pokrytím pokrytí obdélníkové (vzniklé kartézským součinem vzorkování $\{x_1, \dots, x_n\}$ a $\{y_1, \dots, y_m\}$), které je dále rozpuštěno na trojúhelníky. Dělení obdélníků může být pro všechny obdélníky stejné (typicky podle hlavní či vedlejší diagonály, viz obr. 4a) či může záviset na konkrétní pozici obdélníku v mřížce (viz obr. 4b).



Obrázek 4. Metody dělení. a) dle hlavní diagonály b) dělení „Union Jack“
Základní formulace této metody je dvourozměrnou analogií rovnic (8)-(12):

(referenční omezení pro x)

$$x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \quad (17)$$

(referenční omezení pro y)

$$y = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} y_j = \sum_{j=1}^m y_j \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \quad (18)$$

(funkční omezení)

$$f = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} f_{ij} \quad (19)$$

(konvexní omezení pro λ)

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} = 1 \quad (20)$$

Proměnné λ_{ij} musejí být typu SOS3, tj. nejvýše 3 hodnoty smějí být nenulové, což lze pomocí bivalentních proměnných b_{ij}^h a b_{ij}^d - odpovídající hornímu a dolnímu trojúhelníku v obdélníku definovaném dvojicemi $[x_{i-1}, x_i]$ a $[y_{i-1}, y_i]$ - namodelovat jako

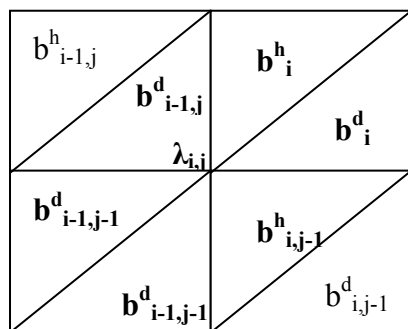
(omezení členství)

$$\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}^h + b_{ij}^d = 1 \quad (21)$$

(omezení proměnných k.k.)

$$\lambda_{ij} \leq b_{ij}^h + b_{ij}^d + b_{i-1,j-1}^h + b_{i-1,j-1}^d + b_{ij-1}^h + b_{i-1,j}^d \quad i = 1..n, j = 1..m \quad (22)$$

⁸ Tuto funkci není možno pomocí MIP aproximovat.



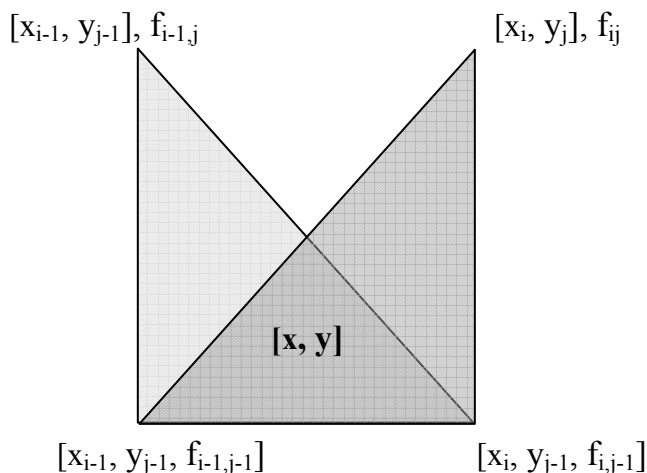
Obrázek 5. Omezení proměnných konvexní kombinace pro dělení dle hlavní diagonály. Tučně zvýrazněné bivalentní proměnné omezují proměnnou λ

V případě jiných dělení obdélníku se mění pouze omezení proměnných konvexní kombinace (22), tj. omezení typu

$$\lambda_{ij} \leq \sum_{k,l \in I} b_{kl} \quad i = 1..n, j = 1..m \quad (23)$$

Metoda 4 - po částech lineární spád (flexibilní trojúhelníky)

Rovnice (22) apriori definují způsob dělení sítě na trojúhelníky. Existuje ale také adaptivní způsob dělení obdélníků [2], který apriori neomezuje zda bude obdélník dělen pomocí hlavní nebo vedlejší diagonály. Lze toho dosáhnout zahrnutím dalších bivalentních proměnných do omezení (22). V tomto případě jsou pro konkrétní $[x,y]$ ležící v obdélníku tvořeném kartézským součinem intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ a $[y_{i-1}, y_i]$ dva nejbližší body zafixovány a bod třetí je zvolen tak, aby zlepšil hodnotu účelové funkce. Například při maximalizaci výroby z daného množství vody daná funkce zvolí třetí bod konvexní kombinace tak, aby hodnota f byla co největší. Z tohoto důvodu mohou pro konkrétní bod $[x,y]$ nabývat nenulových hodnot až 4 λ_{ij} .



Obrázek 6. Flexibilní volba trojúhelníku.

Pro $[x,y]$ v průniku obou trojúhelníků bude pro $f_{ij} > f_{i-1,j}$, vybrán trojúhelník vpravo. V tomto případě nejprve rozšíříme (22) na

$$\lambda_{ij} \leq b_{ij}^h + b_{ij}^d + b_{i-1,j-1}^h + b_{i-1,j-1}^d + b_{ij-1}^h + b_{ij-1}^d + b_{i-1,j}^h + b_{i-1,j}^d \quad i = 1..n, j = 1..m \quad (24)$$

a dále využijeme toho, že již nepožadujeme trojúhelníkové dělení, a stačí požadovat

$$\lambda_{ij} \leq b_{ij} + b_{i-1,j-1} + b_{ij-1} + b_{i-1,j} \quad i = 1..n, j = 1..m \quad (25)$$

kde b_{ij} jsou bivalentní proměnné odpovídající obdélníku. Tím dojde ke snížení počtu bivalentních proměnných na polovinu. Podobně se změní i omezení členství

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ij} = 1 \quad (26)$$

Využitím separability obdélníkové sítě lze dosáhnout dalšího snížení jejich počtu z mn na $m+n$

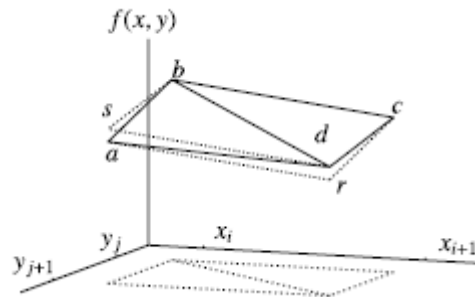
$$\lambda_{ij} \leq b_i^x + b_{i-1}^x + b_{j-1}^y + b_j^y \quad i = 1..n, j = 1..m \quad (27)$$

Nyní ovšem původní omezení členství v jediném obdélníku nahradíme dvěma omezením pro 2 intervaly: jeden na ose x a druhý na ose y

$$\sum_{i=1}^n b_i^x = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m b_j^y = 1 \quad (28)$$

Metoda 5 - po částech lineární spád (obdélníky)

Tato metoda vychází z metody po částech konstantního spádu, ale do každé rovnice funkčního omezení (15) zavádí ještě korekční člen, který je lineární ve spádu. Na rozdíl od trojúhelníkové metody, ale platnost gradientu spádu rozšiřuje na celý obdélník. Vzhledem k tomu, že čtvrtý roh obdélníku neleží obecně v rovině dané jeho třemi ostatními rohy, je v blízkosti tohoto rohu tato aproximace nespojitá.



Obrázek 7. Aproximace obdélníkem

Tato metoda je proto určitým mezistupněm mezi po částech konstantním a po částech lineárním přístupem. Referenční omezení pro y (13) je nahrazeno omezeními

$$y = \sum_{j=1}^{m-1} (b_j^y y_j + v_j (y_{j+1} - y_j)) \quad (29)$$

$$v_j \leq b_j^y \quad j = 1..m-1 \quad (30)$$

$m-1$ nových proměnných v_j slouží k namodelování relativní pozice y v j -tém intervalu, tj $[y_{j-1}, y_j]$. Podobně i funkční omezení (15) se změní na

$$\begin{aligned} f &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{ij} + v_j K_{ij} + M(2 - b_j^y - b_i^x) \quad j = 1..m-1, \quad i = 1..n-1 \\ f &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{ij} + v_j K_{ij} - M(2 - b_j^y - b_i^x) \quad j = 1..m-1, \quad i = 1..n-1 \end{aligned} \quad (31)$$

Z těchto $2(m-1)(n-1)$ omezení jsou aktivní pouze dvě, pro která jsou b_i^x a b_j^y rovna 1. Člen K_{ij} vyjadřuje gradient spádu v ij -tém obdélníku a volí se jako $\min(f_{i,j+1} - f_{i,j}, f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j})$, tj. menší z gradientů spádu ve okrajích obdélníku rovnoběžných s osou y (viz obr. 6).

5 SROVNÁNÍ NÁROČNOSTI METOD APROXIMACE

Tabulka 1 shrnuje metody dle tří kritérií: počtu omezení a počtu spojitých a bivalentních proměnných. Z hlediska počtu omezení mají všechny metody složitost $O(nm)$ s výjimkou

nejjednodušší po částech konstantní metody M2, která je $O(n+m)$. Počet spojitých proměnných pro M2 a M5 je $O(n+m)$, zatímco pro modely založené na rovinné konvexní kombinaci (M3,M4) je to $O(nm)$. Počet bivalentních proměnných je pro všechny metody $O(n+m)$ s výjimkou M3, která je $O(nm)$.

Tabulka 1: Počty proměnných a omezení

Metody	M1	M2-pčk	M3-troj	M4-flex	M5-obd
Celkem omezení	n+8	n+2m+8	nm+10	nm+12	2mn -m- n+11
Celkem spojitých proměnných	n	n	nm	nm	n+m-1
Celkem bivalentních proměnných	n-1	n+m-2	2(n-1)(m-1)	n+m-2	n+m-2
Celkem bivalentních proměnných po započtení omezení členství	n-2	n+m-4	2(n-1)(m-1)-1	n+m-4	n+m-4
Referenční omezení x	2	2	2	2	2
Konvexita λ	2	2	2	2	2
Omezení členství pro b^x	2	2	2	4	2
Funkční omezení	2	2(m-1)	2	2	2(n-1)(m-1)
Omezení volby konvexní kombinace pro λ	n	n	nm	nm	n
omezení členství pro b^y	-	2	-	-	2
referenční omezení pro y	-	-	2	2	2
Omezení volby pro v	-	-	-	-	m-1
λ	n	n	nm	nm	n
v	-	-	-	-	m-1
b^x	n-1	n-1	2(n-1)(m-1)	n+m-2	n-1
b^y	-	m-1	-	-	m-1

Je zřejmé, že výpočetně nejnáročnější je M3, neboť všechny její charakteristiky jsou $O(nm)$. Výpočetně nejjednodušší je M2, která má ale nejhorší aproximační vlastnosti. M4 a M5 se snaží o kvalitní aproximaci při zachování pouze $O(n+m)$ počtu bivalentních proměnných. Aproximace metodou M4 je přesnější, ale vyžaduje $O(nm)$ spojitých proměnných. Naopak metoda M5 vyžaduje pouze $O(n+m)$ spojitých proměnných na úkor kvality aproximace (aproximovaná funkce není všude spojitá).

Vzhledem k tomu, že k modelování podmínky členství na n podmnožinách není potřeba n bivalentních proměnných, ale pouze $n-1$, a to díky omezení členství⁹, obsahuje tabulka i řádek v němž je uveden prakticky potřebný počet bivalentních proměnných.

Z aplikačního hlediska se jeví nejdůležitější zkoumat vlastnosti metod pro relativně malé modely. Vzhledem k tomu, že z výpočetního hlediska jsou MIP problémy proměnné náročnější než LP¹⁰, je hlavní srovnání metody dle počtu celočíselných resp. bivalentních proměnných. Tabulka 2 zachycuje počty bivalentních proměnných pro několik velmi malých modelů. Motivací pro malé modely jsou především tyto skutečnosti:

⁹ Například pro případ 3 podmnožin nepotřebujeme 3 bivalentní proměnné, ale stačí pouze 2 - v situaci, kdy jsou obě nulové (tj. modelovaná veličina neleží ani v jedné podmnožině náležejícím těmto dvěma proměnným), musí díky podmínce členství ležet v podmnožině třetí.

¹⁰ LP lze vyřešit v polynomiálním čase, zatímco MIP je NPH.

1) Vzhledem ke tvaru výrobní funkce (přibližně konkávní v celém rozsahu hodnot) lze očekávat kvantitativně nejlepší zlepšení kvality aproximace již pro malé n, m . Zvyšování kvality aproximace bude přinášet menší marginální zpřesnění (např. vzhledem k velikosti modelu)

2) Metody musejí být aplikovatelné i v modelech se velkým počtem vodních elektráren.

Nejmenší možný model, který zachycuje vliv spádu je model 2x2 (tj. $n=2, m=2$, resp. $m=3$ pro M2), v kterém se výroba mění s průtokem (lineárně) a spád take lineárně (resp. skokem pro M2). Model 3x2 pracuje s výrobní funkcí, která má dvě účinnosti, tj. jeden bod zlomu. Ostatní modely jsou definovány analogicky.

Tabulka 2: Počty bivalentních proměnných (po započtení exkluzivity) pro malé modely

Model	M2	M3	M4	M5
2x2	1	1	0	0
3x2	2	3	1	1
2x3	2	3	1	1
3x3	3	7	2	2

Je zřejmé, že nejjednodušší model 2x2 nevyžaduje při použití metod M4 či M5 žádnou bivalentní proměnnou. V případě rostoucí kvality aproximace nejrychleji rostou nároky metody M3 v důsledku z její $O(nm)$ složitosti.

6 ZÁVĚR

Této práci srovnala porovnat modelovací přístupy výroby vodní elektrárny, které zachycující vliv spádu. Přístupy byly srovnány z hlediska počtu bivalentních proměnných. V případě nejmenšího modelu, který již zachycuje vliv spádu na účinnost, byly nalezeny dvě metody, které umožňují aproximaci realizovat bez použití bivalentních proměnných.

Numerické srovnání kvality aproximace a doby řešení zkoumaných metod bude provedeno v navazující studii.

Použitá literatura

1. BABEEV, D.A: Piece-Wise Linear Approximation of Functions of Two Variables. *Journal of Heuristics*, 2:313–320, 1997.
2. FICO Xpress: MIP formulations and linearizations. Quick reference. *XpressMP 7 Documentation*. Poslední aktualizace 31. března, 2009, s. 13
3. D'AMBROSIO C., LODI A., MARTELLO S.: Piecewise linear approximation of functions of two variables in MILP models. *Operations Research Letters*, Volume 38, Issue 1, leden 2010, s. 39-46.

Kontaktní údaje

Ing. Jiří Šumbera

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: sumbera@jikos.cz

ANALÝZA DOPADU KRÍZY NA PRIEMYSEL SR¹

THE IMPACT OF THE CRISIS TO THE SLOVAK INDUSTRY

Kvetoslava Surmanová, Andrea Furková

Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme analýzou vývoja priemyslu Slovenskej republiky a možným dopadom krízy z roka 2008. Pozornosť sme sústredili prevažne na strojársky a automobilový priemysel, ktoré sa v podstatnej miere podpisujú na vývoji ukazovateľov tohto odvetvia. Vplyv krízy sme prostredníctvom umelých premenných zakomponovali do navrhnutých ekonometrických modelov, ktoré boli v záverečnej časti príspevku využité na prognostickú aplikáciu.

Kľúčové slová: *strojársky priemysel, automobilový priemysel, model, umelá premenná, kríza*

Abstract

The paper deals with analysis of the development industry of the Slovak Republic and the potential impact of the crisis in year 2008. We focused on the engineering and automotive industries, which are signed essentially to develop indicators this industry. We distil the impact of the crisis (dummy variables) into proposed econometric models. The final models are used for forecasting.

Keywords: *Engineering Industry, Automotive Industry, Dummy Variable, Crisis, Forecast*

1 ÚVOD

Priemyselná výroba (C) ako jedna zo štyroch základných kategórií² priemyslu (B+C+D+E)³ sa význame podieľa na štruktúre hospodárstva. Jadrom priemyselnej výroby je automobilový a strojársky priemysel. Patria nielen medzi hlavných zamestnávateľov, ale i tvorcov HDP, pridanej hodnoty a investícií.

2 STROJÁRSKY A AUTOMOBILOVÝ PRIEMYSEL

2.1 Krátky prehľad vývoja priemyselného odvetvia

V rebríčku spoločností, ktoré sa v najväčšej miere podieľajú na výške ukazovateľov automobilového priemyslu stoja finalizačné fabriky nemeckej (Volkswagen Slovakia, a.s.), francúzskej (PSA Slovakia, s.r.o.) a kórejskej automobilky (Kia Motors Slovakia, s.r.o.). Ich tržby v roku 2009 dosiahli 6,481 mld. Eur, čo je 11,28 % z celkových tržieb priemyslu SR

¹ Tento príspevok je podporovaný Grantovou agentúrou Slovenskej republiky - VEGA, grant č.. 1/0595/11 "Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód".

² Ďalšími kategóriami priemyslu sú nasledovné:

- ťažba a dobývanie (B),
- dodávka elektriny, plynu, pary a studeného vzduchu (D),
- dodávka vody, čistenie a odvod odpadových vôd, odpady a služby odstraňovania odpadov (E).

³ Označenie B, C, D a E označujú základné kategórie odvetvovej klasifikácie ekonomických činností (SK NACE Rev. 2)

a v roku 2010 sa ich tržby zvýšili až na 12,7 % z celkových tržieb priemyslu SR (viď. tabuľka č. 1).

Tab. č. 1 Tržby za roky 2009 a 2010

Rok	2009	2010
Priemysel spolu (B+C+D+E) (tis. Eur b.c.)	57 446 956,60	67 484 076,80
Priemyselná výroba (C) (tis. Eur b.c.)	45 307 542,40	54 716 392,60
Volkswagen Slovakia a.s., PSA Slovakia s.r.o., Kia Motors Slovakia s.r.o.	6 481 962,00	8 581 977,00

Zdroj: www.statistics.sk, Trend TOP v priemysle, september 2011

Na Slovensku sa rozvíjajú a majú domovské miesto aj ďalšie spoločnosti strojárkeho a automobilového priemyslu, ktoré zabezpečujú subdodávky komponentov v súlade s požiadavkami svetového automobilového priemyslu. V roku 2008, tesne pred prvou vlnou krízy zamestnával strojársky a automobilový priemysel viac 148,18 tis. osôb, čo je viac ako 6 % zamestnaných osôb celého národného hospodárstva (viď. tabuľka č. 2).

Tab. č. 2 Priemerný počet zamestnaných osôb

Rok	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Národné hospodárstvo SR (NH) (tis. osôb)	2 122,3	2 139,0	2 150,6	2 170,6	2 199,8	2 254,7
Priemyselná výroba (C) (tis. osôb)	549,23	550,22	550,29	549,66	564,89	580,12
Strojársky a automobilový priemysel (tis. osôb)	110,72	111,00	114,85	15,81	118,91	124,13
Podiel C na zamestnanosti NH (%)	25,88	25,72	25,59	25,32	25,68	25,73
Podiel stroj. a automob. priemyslu na zamestnanosti NH (%)	5,22	5,19	5,34	0,73	5,41	5,51
Rok	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Národné hospodárstvo SR (NH) (tis. osôb)	2 254,7	2 332,7	2 398,3	2 329,6	2 339,4	2 355,6
Priemyselná výroba (C) (tis. osôb)	580,12	575,10	581,33	470,24	483,32	499,26
Strojársky a automobilový priemysel (tis. osôb)	132,43	137,57	148,18	122,59	133,29	137,09
Podiel C na zamestnanosti NH (%)	25,73	24,65	24,24	20,19	20,66	21,19
Podiel stroj. a automob. priemyslu na zamestnanosti NH (%)	5,87	5,90	6,18	5,26	5,70	5,82

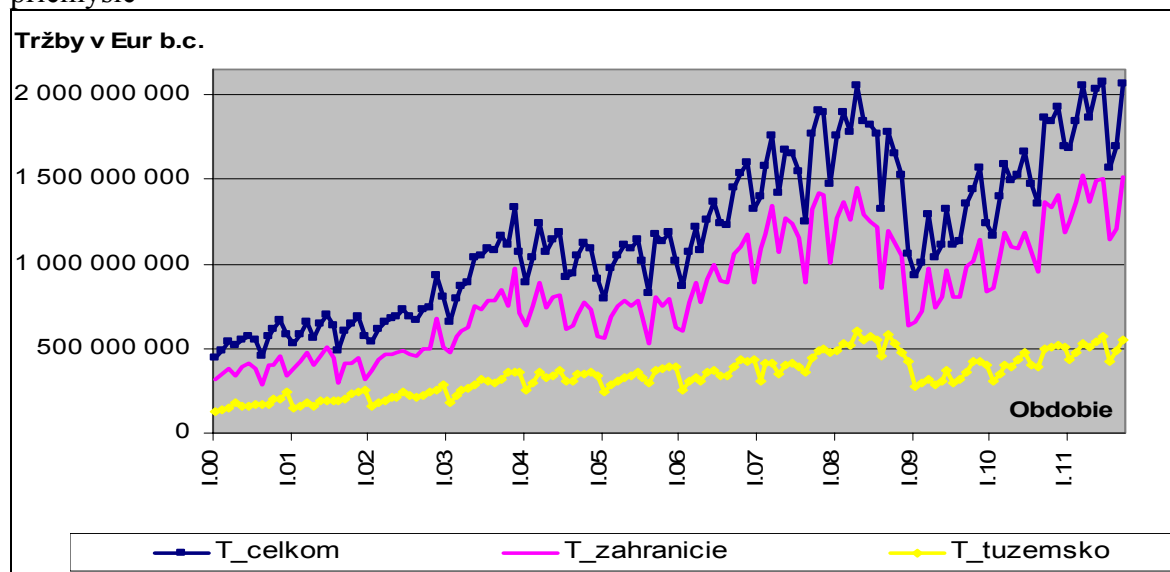
Zdroj: www.statistics.sk,

Údaje v tabuľke vyjadrujú stav vždy posledného mesiaca príslušného roka a rok 2011 zachytáva stav za mesiac jún. V pokrízovom období nastal prepád v počte zamestnaných osôb o viac ako 25 tis. osôb, ale počas posledných rokov opäť dochádza k rastu zamestnanosti. Dôsledky krízy sa prejavil aj na tržbách, ktoré sa v januári 2009 prepádli o viac ako polovicu v porovnaní s ich vrcholom v apríli 2008 (viď. obrázok č.1).

Na obrázku č. 1 sú zachytené celkové tržby (T_{celkom}) v strojárskom a automobilovom priemysle namerané na mesačnej báze. Pre porovnanie podielu vyprodukovanej produkcie určenej na domácu spotrebu a na vývoz sú zakreslené tiež krivky tržieb z produkcie smerujúcej za hranice SR ($T_{\text{zahranicie}}$) a domácej spotreby (T_{tuzemsko}).

Z obrázku č. 1 možno vidieť cyklický vývoj priebehu tržieb strojárkeho a automobilového priemyslu. Pričom najvýraznejší pokles nastal na konci roka 2008, kde sa naplno prejavili dôsledky krízy.

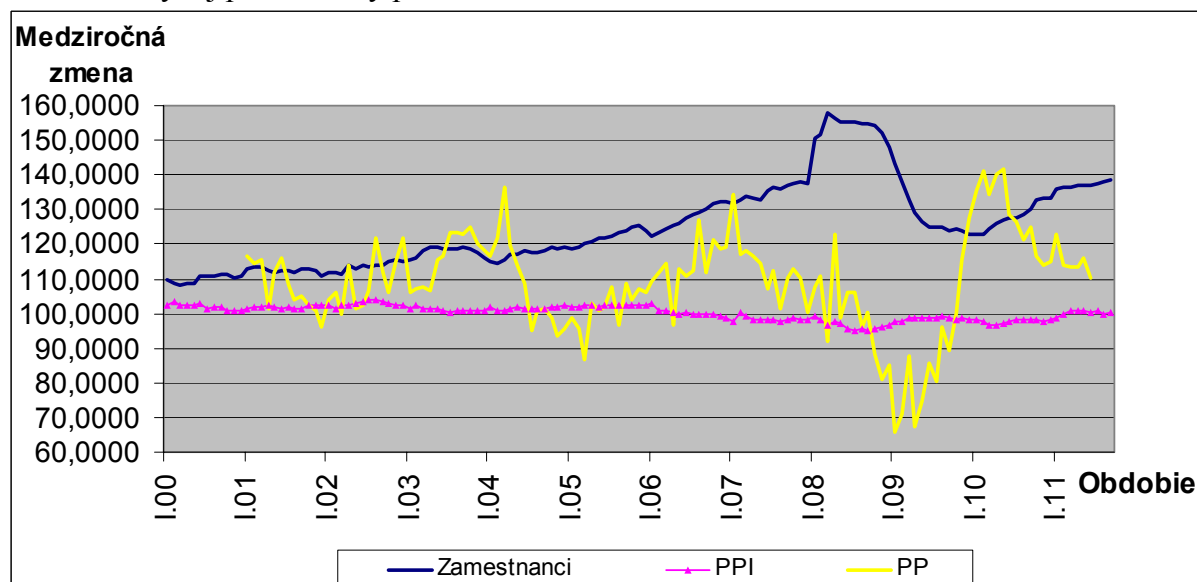
Obr. č. 1 Prehľad tržieb za vlastné výrobky a služby v strojárskom a automobilovom priemysle



Zdroj: www.statistics.sk,

Vysoká otvorenosť slovenskej ekonomiky a jej previazanosť na svetový obchod, ktorá bola považovaná za významný ekonomický prínos, v čase globálnej hospodárskej krízy mala negatívny dopad. Slovenská ekonomika sa výrazne spomalila, čo malo za následok výrazný pokles dopytu po práci, ktorý sa prejavil druhotne v podobe poklesu kúpyschopnosti domácností a ich spotreby.

Obr. č. 2 Vývoj produktivity práce a zamestnanosti



Zdroj: www.statistics.sk,

Na obrázku č. 2 možno vidieť závislosť medzi medziročnou zmenou produktivitou práce (PP) a zamestnanosťou. Pokles PP býva spojený s poklesom zamestnanosti a naopak ak rastie PP, tak rastie zamestnanosť. Tretia krivka zachytáva viac-menej rovnovážny priebeh indexu cien priemyselných výrobcov. Cieľom každej ekonomiky je pochopiteľne dosiahnuť vysokú úroveň zamestnanosti pri nízkej miere inflácie a vysokej miere hospodárskeho rastu. Zároveň

je možné sledovať aj zvyšujúcu sa mieru zamestnanosti v čase recesie, avšak s drobným časovým oneskorením. Aj na tomto grafe je teda možné spozorovať cyklickosť vývoja ekonomiky.

2.2 Modelový prístup k analýze spoločností strojárskoho a automobilového priemyslu.

Ako už bolo naznačené predmetom príspevku je analýza dopadov krízy na priebeh strojárskoho a automobilového priemyslu. Na analýzu boli využité mesačné údaje Štatistického úradu SR za obdobie január 2000 - september 2011. Pri tvorbe ekonometrického modelu sme ako závislú premennú zvolili tržby z predaja vlastných výrobkov a služieb strojárskoho a automobilového odvetvia. Zostrojili sme dva varianty modelu tržieb, pričom každý bol odhadnutý bez umelej premennej, ktorá zachytáva prepád ekonomiky v dôsledku krízy na konci roka 2008 a so spomenutou umelou premennou. Pri konštrukcii modelov boli použité tieto premenné:

T_t – tržby strojárskoho a automobilového priemyslu za vlastné výkony a tovar, v Eur b.c.,

PP_t – produktivita práce strojárskoho a automobilového priemyslu, v Eur,

Z_t – priemerný počet zamestnaných osôb, v osobách,

D_t – umelá premenná, $t \in (2000m01 - 2008m09)$, $D = 0$,

$t \in (2008m10 - 2011m09)$, $D = 1$,

O_Z_t – objem nových objednávok zo zahraničia, v Eur.

Z dôvodu, že premenná produktivita práce bola dostupná len do šiesteho mesiaca roka 2011, boli oba varianty funkcie tržieb odhadované na intervale 2000m01 – 2011m06. Výsledky z experimentov uvádzame v tabuľke č. 3

Tab. č. 3 Výsledky z regresnej analýzy

VARIANT A	A.1 - ZÁKLADNÝ MODEL		A.2 - ROZŠÍRENÝ MODEL VPLYV KRÍZY	
Premenná	Odhad parametrov	Štandardná odchýlka	Odhad parametrov	Štandardná odchýlka
konštanta	0,522	0,672	1,038	1,225
ln(PP)	1,011	0,008	1,009	0,008
ln(Z)	0,892	0,043	0,876	0,044
D	-	-	-0,014	0,010
AR(1)	0,710	0,063	0,134	0,046
AR(4)	0,141	0,070	0,704	0,063
AR(12)	0,135	0,046	0,153	0,071
R^2	0,99923		0,99924	
VARIANT B	B.1 - ZÁKLADNÝ MODEL		B.2 - ROZŠÍRENÝ MODEL VPLYV KRÍZY	
Premenná	Odhad parametrov	Štandardná odchýlka	Odhad parametrov	Štandardná odchýlka
konštanta	4,384	0,543	109,471	25 162,950
log(O_Z)	0,809	0,026	0,742	0,029
D	-	-	-0,106	0,029
AR(1)	0,235	0,078	0,245	0,075
AR(4)	0,189	0,077	0,182	0,068
AR(12)	0,411	0,069	0,573	0,064
R^2	0,9811		0,9823	

Zdroj: vlastný výpočet

Aby sme mohli zrealizovať prognózu na obdobie 2011m07 – 2011m09, bolo potrebné získať chýbajúce hodnoty produktivity práce. Použili sme metódu exponenciálneho vyrovnávania Holta-Wintersa, adaptívny a tiež multiplikatívny prístup, čím sme získali viacero scenárov pre varianty A.1 a A.2. Výsledky uvádzame v tabuľke č. 4. Výsledky prognózovaných tržieb strojárského a automobilového priemyslu uvádzame v tab. č. 5.

Tab. č. 4 Prognóza tržieb strojárského a automobilového priemyslu – Variant A

	skutočnosť	A.1 – aditívny	A.1 - multiplikatívny	A.2 - aditívny	A.2 - multiplikatívny
07.2011	1 566 164 094	1 925 807 382	1 921 585 121	1 927 066 893	1 922 850 979
08.2011	1 695 084 093	1 699 019 219	1 687 531 494	1 703 497 503	1 689 819 232
09.2011	2 066 788 281	2 107 976 290	2 117 886 357	2 121 911 457	2 120 625 073

Zdroj: vlastný výpočet

Tab. č. 5 Prognóza tržieb strojárského a automobilového priemyslu – Variant B

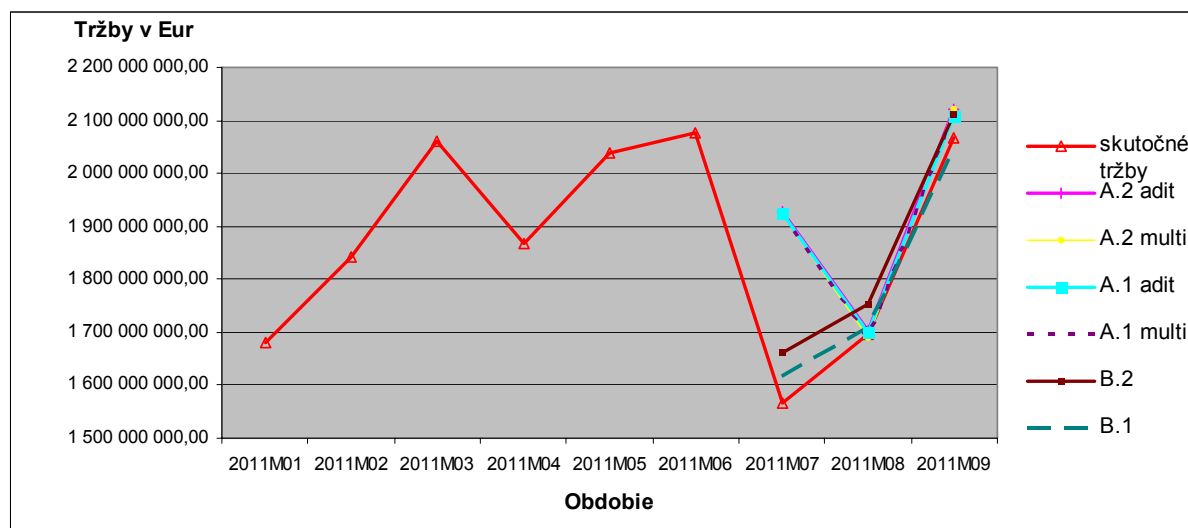
	skutočnosť	B.1	B.2
2011M07	1 566 164 094	1 615 671 095	1 661 567 611
2011M08	1 695 084 093	1 709 763 044	1 753 224 499
2011M09	2 066 788 281	2 044 236 969	2 109 811 240

Zdroj: vlastný výpočet

3 ZÁVER

Vyhodnotenie uvedených modelov, t.j. prognostických scenárov je najvhodnejšie prostredníctvom grafického zobrazenia (vid' obr. 3).

Obr. č. 3 Grafický priebeh tržieb rok 2011 a varianty prognózy



Zdroj: vlastný výpočet

Z obrázka č. 3 vidno, že ako najlepší sa javí variant B, presnejšie B.1, t.j. model bez zakomponovania umelej premennej. Na základe uvedeného môžeme skonštatovať nasledovné. Kríza sa prejavila ako sme mohli vidieť na obr. 1 a 2 aj v strojárskom a automobilovom priemysle. Jej negatívne dôsledky sa v tomto odvetví neprejavovali dlhodobo, o čom svedčia ukazovatele tohto odvetvia. Svoju úlohu určite zohralo tzv. šrotovné, ako injekcia štátu pre pozdvihnutie automobilového a strojárského priemyslu. Už na začiatku roka 2009 dochádza k nárastu produktivity práce a aj ostatných ukazovateľov. Tento

pozitívny impulz sa prejavil v raste produkcie i v ďalších odvetviach, čo malo pozitívne dopady na celé národné hospodárstvo.

Použitá literatúra

1. HANČLOVÁ, J. - KUBICOVÁ, I. - MACHÁČEK, M. - MELECKÝ, A. - MELECKÝ, L. - MELECKÝ, M. - NEVIMA, J. - RAMÍK, J.. Makroekonomické modelování české ekonomiky a vybraných ekonomik EU. Ostrava : VŠB-TU, 2010. ISBN 978-80-248-2353-9.
2. LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. 2008. Ekonometrické modelovanie s aplikáciami. Bratislava: EKONÓM, 2008.
3. Trend TOP v priemysle. 2011. Ročenka týždenníka o ekonomike a podnikaní TREND 39/2011.
4. www.statistics.sk

Kontaktné údaje

Ing., Kvetoslava Surmanová, PhD.,
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 823 email: surman@euba.sk

Ing., Andrea Furková, PhD.,
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 832 email: andrea.furkova@pobox.sk

NOVÉ MODELOVÉ PŘÍSTUPY V OR: MULTIAGENTNÍ SIMULACE

NEW MODELLING APPROACHES IN OR: AGENT-BASED SIMULATION

Martina Zouharová

Abstrakt

Článek se zaměřuje na možné přínosy multiagentní simulace v OR, a to jak na poli výzkumném, tak edukačním. Podstata multiagentního programování, stejně jako řešení konkrétních problémů s jeho pomocí (např. aplikace mravenčích kolonií na problém obchodního cestujícího) je zasazeno do kontextu představení programu *NetLogo*. V tomto směru článek navazuje na naše předchozí publikace.

Klíčová slova: *multiagentní modelování, operační výzkum, NetLogo, mravenčí kolonie*

Abstract

The paper focuses on possible benefits from using agent-based simulation techniques in OR, both from the research and educational perspectives. The principles of agent-based modelling, together with the demonstration of its use for concrete OR applications (such as agent-based ant-colony optimization of the TSP), are exposed in the context of the *NetLogo* software. In this respect, we follow up on our previous paper on a similar topic

Keywords: *agent-based simulation, operational research, NetLogo, ant colony*

1 MULTIAGENTNÍ VS. DISKRÉTNÍ SIMULACE

Multiagentní simulace (agent-based simulation, ABS) získala od svého vzniku v průběhu devadesátých let rychle na oblibě, a to jak na poli exaktních, tak humanitních věd. Jako nástroj operačního výzkumu (*operational research, OR*) se tento přístup vedle dosud nejhojněji užívané diskrétní simulace (*discrete event simulation, DES*) zatím příliš neprosadil. Nad otázkou, proč tomu tak je, se vedou různé polemiky; faktem však zůstává, že *ABS* disponuje oproti *DES* specifiky, díky kterým je možné u určitých problémů docílit efektivnějšího řešení, u jiných dokonce jejich užití řešení daného problému teprve umožní.

Vycházíme-li tedy z povahy konkrétního problému, pak diskrétní simulaci je vhodné volit v případě problémů, v rámci kterých lze probíhající procesy dobře definovat. Zpravidla jde o systémy, v nichž dochází k hromadění různých typů požadavků (variace problematiky hromadné obsluhy). Jednotlivé entity v systému vykazují pasivní chování, jejich průchod systémem je diktován „shůry“ pomocí jednoduchých statických pravidel. Od počátku jsme obeznámeni s režimem fungování systému jako celku a usilujeme tedy o optimalizaci jeho dílčích aspektů.

U multiagentní simulace naproti tomu chování systému jako celku neznáme. Jednotlivé entity (agenti) činí svá rozhodnutí individuálně v závislosti na aktuálním stavu prostředí či chování ostatních agentů, a dynamiku systému tak průběžně utváří. Zatímco u *DES* jsme tedy s chováním systému obeznámeni, v případě *ABS* je předmětem našeho zkoumání. Samotné programování simulačních modelů probíhá formou „*bottom-up*“. Jde o induktivní přístup

k řešení, jehož cílem je detekovat vliv vztahů lokální úrovně na chování celého systému. Výsledek tedy namísto nalezení optimálního řešení, či rovnovážného stavu představuje co nejdetailnější popis dynamiky systému[1]. Vykazuje-li celek určité vzorce chování, které by bylo jen stěží možné (popř. nemožné) dovodit ze základních vztahů, hovoříme o tzv. *emergentním jevu*, jehož podchycení je hlavním přínosem takto simulovaných modelů.

Užití *ABS* se nabízí u simulačních modelů, v rámci kterých je podstatné, aby jednotliví agenti (entity) byli schopni (viz [10], [8]):

- učit se či přizpůsobovat měnícímu se prostředí, popř. do různé míry vzájemně spolupracovat a vytvářet koalice;
- odhadovat reakce ostatních agentů na jimi zvolené strategie a své chování tomuto faktu přizpůsobit;
- měnit své chování v závislosti na prostorových aspektech atp.;

Jedno z možných vysvětlení, proč se *ABS* vedle *DES* v rámci *OR* příliš nerozšířila, je dáno historicky. Metodologie i softwarové nástroje diskrétní simulace byly, na rozdíl od multiagentní simulace, vyvíjeny přímo pro potřeby *OR*. Zatímco softwarové nástroje jako *Simul8* či *SimProcess* disponují velmi intuitivním a uživatelsky přátelským rozhraním, multiagentní modely je zpravidla nutno zapisovat pomocí programovacího jazyka, což mnohé uživatele odradí. Motivací tohoto článku je proto nejen poukázat na možnosti, které multiagentní modelování nabízí, ale také v návaznosti na [11] blíže představit nástroj multiagentní simulace *NetLogo*, jehož syntax je natolik jednoduchá, že činí multiagentní modelování dostupné i uživatelům, kteří s programováním dosud nepřišli do styku.

2 SYSTÉM NETLOGO

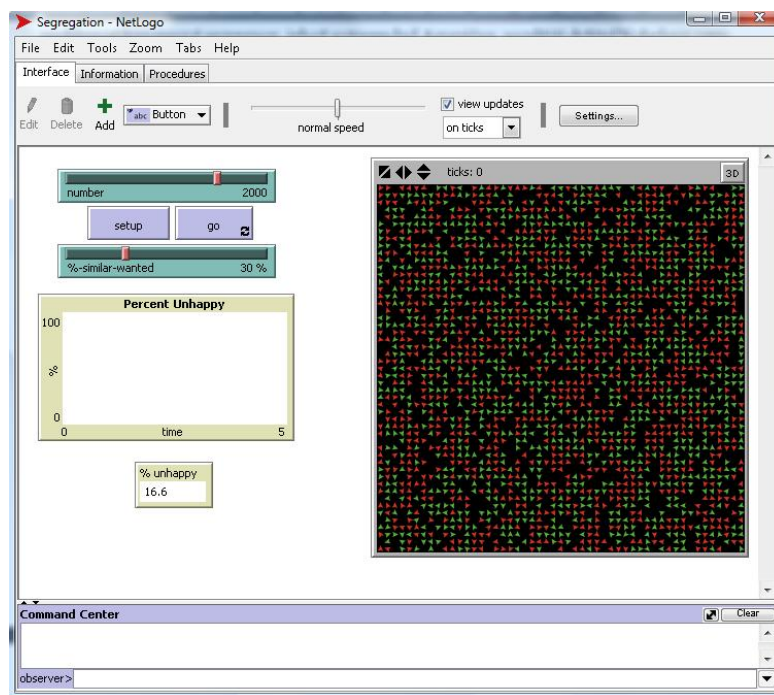
V dnešní době existuje pro multiagentní modelování již celá řada softwarových nástrojů, a to jak komerčních, tak volně dostupných. *NetLogo* spadá do druhé ze zmíněných kategorií a spolu s jeho intuitivní a srozumitelnou syntaxí ho lze proto považovat za příznivou variantu obeznámení se s multiagentním modelováním. Počátečnímu seznámení s *NetLogem* (potažmo *ABS*) jistě rovněž napomůže dostupná knihovna se širokou škálou ukázkových příkladů zdrojového kódu či s celými řešeními konkrétních problémů.

Základní principy modelování v programu *NetLogo* byly představeny v [11]. V rámci tohoto článku se jednak skrze zápis kódu jednoduchého modelu rasové segregace blíže zaměříme na syntax programu *NetLogo*, jednak na možnosti praktického využití jeho dvou rozšiřujících aplikací: *HubNet* a *BeviorSpace*. První ze jmenovaných umožňuje komunikaci mezi jednotlivými modely *NetLoga* skrze počítačovou síť, druhá slouží k automatizovanému, opakovanému spouštění modelu. Obě aplikace budeme rovněž ilustrovat praktickými příklady z oblasti *OR*.

2.1 Model rasové segregace: ukázka zápisu kódu

Jednu z častých aplikací multiagentní simulace představuje snaha o modelování socioekonomických jevů. Často citovaným příkladem multiagentního modelování, na němž se pokusíme ilustrovat práci s programovacím jazykem *NetLoga*, je model zabývající se problematikou rasové segregace. Jeho autorem byl Američan, pozdější držitel Nobelovy ceny za ekonomii, *Thomas Crombie Schelling*. Simulace se věnovala analýze příčin rasové segregace a k velkému překvapení veřejnosti prokázala, že příčinou nemusí být rasová netolerance (v době vzniku modelu šlo o často diskutované téma). Jednalo se o ilustraci chování dvou typů barevně odlišných buněk, které bylo determinováno typem (tj. zde barvou)

buněk sousedních. Na základě zadané míry preference buněk shodného typu se měnil požadavek na počet buněk shodné barvy v bezprostředním okolí každé z nich. S rostoucí preferencí pro buňky shodné barvy (tzn. s klesající mírou tolerance) se tento požadavek zvyšoval. Pokud bylo aktuální procentuální zastoupení shodných buněk v okolí menší než-li požadované, buňka se snažila přestěhovat, resp. přemístit na volné pole, kde by zastoupení shodně zbarvených sousedících buněk zadané míře tolerance již vyhovovalo. V případě dostatečného zastoupení buněk shodného typu buňka setrvala na svém místě. Simulace dokázala, že již minimální míra preference mít ve svém okolí buňky shodné barvy (tj. jev vyplývající z psychologického aspektu věci, nikoli z rasistického smýšlení), vede po dostatečném počtu kroků, k vytváření shluků buněk shodné barvy („ghetta“). Dříve, než-li se budeme věnovat samotnému zápisu kódu tohoto modelu v prostředí *NetLogo* (zápis kódu převzat z [9]), podívejme se na podobu základního okna modelu.



Obrázek 1: Základní okno modelu rasové segregace

Z obrázku 1 je patrné, že v modelu máme možnost pomocí posuvníků volit jednak počet zúčastněných buněk (zastoupení obou typů barev buněk je shodné), jednak procentuální požadavek na množství sousedů shodné barvy, tj. míru (ne)tolerance. Graf kontinuálně vykresluje procentuální stav nespokojených buněk snažících se přestěhovat, reportér umístěný pod grafem pak zobrazuje v každém kroku simulace aktuální stav téhož. Poslední z objektů, krom samotného okna simulace, představuje tlačítko „setup“ a „go“. Tlačítko „setup“ připraví vše do výchozí pozice, tlačítko „go“ spustí (popř. po opětovném stisknutí přeruší) chod simulace.

Po představení podstaty modelu a stručném popisu podoby jeho základního okna se můžeme dále již věnovat zápisu samotného kódu. Podobu vysvětlujících komentářů k jednotlivým příkazům jsme, pro lepší přehlednost, volili ve formě poznámek vepsaných přímo do kódu.

Zápis modelu vždy začíná definováním globálních proměnných (viz obrázek 2).

```

globals [percent-unhappy] ;; proměnná udávající kolik % buněk (lidí) je nespokojených,
;; tj. chce se přestěhovat
;; proměnná je globální - jediná pro celý model (viz oddíl 2.2)

turtles-own [
  happy? ;; globální proměnná vypovídající o každé konkrétní buňce (člověku)
;; zda se v závislosti na množství shodně barevných buněk v jejím okolí
;; chce aktuálně přestěhovat
;; proměnná je globální - týkající se želv (viz oddíl 2.2)
  similar-nearby ;; kolik shodně barevných buněk se nachází na sousedních políčkách
;; každé z želv
  other-nearby ;; kolik jinak barevných buněk se nachází na sousedních políčkách
;; každé z želv
  total-nearby ;; suma předchozích dvou proměnných
]

```

Obrázek 2: Způsob zápisu globálních proměnných

Po definici globálních proměnných je třeba učinit zápis příkazů navázaných na jednorázové tlačítko „setup“, které nám říká, co se má v modelu jednorázově stát po jeho stisknutí.

```

to setup
  clear-all
  if number > count patches
    [ user-message (word "V modelu je mozne pracovat maximalne s " count patches " zelvami.")
      stop ] ;; pokud je na slideru týkajícím se volby počtu želv (number) vyšší
;; číslo než kolik je políček v dané velikosti světa (možno volit),
;; pak uživateli bude zobrazena výše uvedená zpráva

  ask n-of number patches
    [ sprout 1
      [ set color red ] ] ;; vytvoří na náhodně zvolených políčkách, jejichž počet je shodný
;; s nastavenou hodnotou na slideru "number", jednu želvu červené barvy

  ask n-of (number / 2) turtles
    [ set color green ] ;; poloviční počet z vytvořených želv změní barvu na zelenou
  update-variables ;; aktualizuje hodnoty proměnných: procedura navázaná na tlačítko "setup",
;; jejíž definice následuje dále v kódu
  do-plots ;; vykreslí graf: procedura navázaná na tlačítko "setup",
;; jejíž definice následuje dále v kódu
end

```

Obrázek 3: Procedury spojené s tlačítkem „setup“

Podobným způsobem je rovněž potřeba zapsat procedury navázané na tlačítko „go“, které spouští (a po opětovném stisknutí přerušuje) běh simulace. Jde o tlačítko „trvalé“, proto se procedury na něj navázané zopakují v každém kroku simulace.

```

to go
  if all? turtles [happy?] [ stop ]
;; pokud jsou všechny želvy spokojené, zastaví simulaci
  move-unhappy-turtles ;; přestěhuje nespokojené želvy: procedura navázaná na tlačítko "go",
;; jejíž definice následuje dále v kódu
  update-variables ;; aktualizuje hodnoty proměnných: procedura navázaná na tlačítko "go",
;; jejíž definice následuje dále v kódu
  tick
  do-plots ;; vykreslí graf: procedura navázaná na tlačítko "go",
;; jejíž definice následuje dále v kódu
end

```

Obrázek 4: Procedury spojené s tlačítkem „go“

Následuje zápis zbylých procedur.

```

to move-unhappy-turtles
  ask turtles with [ not happy? ]
    [ find-new-spot ] ;; pokud není některá z želv spokojená, zahájí se procedura
                      ;; "find-new-spot" definovaná dále v kódu
end

to find-new-spot
  rt random-float 360 ;; otočí želvu náhodným směrem
  fd random-float 10  ;; vybere v tomto směru náhodné políčko z deseti
  if any? other turtles-here
    [ find-new-spot ] ;; pokud je toto políčko obsazeno, zopakuje proceduru
  move-to patch-here  ;; přestěhuje želvu na vybrané políčko
end

to update-variables      ;; aktualizace proměnných
  update-turtles         ;; vnořená procedura definovaná dále v kódu
  update-globals         ;; vnořená procedura definovaná dále v kódu
end

to update-turtles
  ask turtles [
    set similar-nearby count (turtles-on neighbors)
      with [color = [color] of myself]
      ;; nastaví pro danou želvu hodnotu globální proměnné "similar-nearby",
      ;; tj. spočítá želvy shodné barvy na osmi sousedních polích
    set other-nearby count (turtles-on neighbors)
      with [color != [color] of myself]
      ;; nastaví pro danou želvu hodnotu globální proměnné "other-nearby"
    set total-nearby similar-nearby + other-nearby
    set happy? similar-nearby >= ( %-similar-wanted * total-nearby / 100 )
      ;; zkontroluje, zda procentuelní požadavek na počet shodně barevných
      ;; sousedních želv je splněn, rozhodne, zda je daná želva spokojená
      ;; a nastaví hodnotu globální proměnné "happy"
  ]
end

to update-globals
  let total-neighbors sum [total-nearby] of turtles
  set percent-unhappy (count turtles with [not happy?]) / (count turtles) * 100
  ;; počítá procentuelní zastoupení nespokojených želv
end

to do-plots
  set-current-plot "Percent Unhappy"
  plot percent-unhappy ;; vykreslí do grafu hodnoty globální proměnné "percent unhappy"
end

```

Obrázek 5: Zápís procedur modelu rasové segregace

Uvedením ilustračního příkladu, jsme se pokusili demonstrovat jednak základní principy tvorby modelu, jednak jednoduchost syntaxe programu *NetLogo*, která je velice dobře čitelná i uživateli, který s programem doposud nepracoval. Díky tomu lze již vytvořené modely, ať již z knihovny *NetLogo* či z jiných zdrojů, užívat jako praktické tutoriály.

2.2 Aplikace HubNet

Aplikace *HubNet* umožňuje vytváření skupinových, interaktivních, simulačních modelů. Aplikaci se jeví vhodné užít spíše jako podpůrný edukační nástroj *OR*, než-li nástroj vhodný k výzkumným aktivitám, o to více však má v tomto směru co nabídnout. Prostřednictvím *NetLogo* a aplikace *HubNet* může pedagog na svém počítači (server *HubNetu*) aktivně zapojit studenty (klienty) do běhu simulace. Zatímco na počítači pedagoga je potřeba mít nainstalováno *NetLogo*, k připojení klientských počítačů již stačí běžná internetová síť.

Jakmile je aplikace *HubNetu* spuštěna, lze skrze ovládací panel aplikace korigovat, co se jednotlivým klientům zobrazí. S účastníky simulace je dále možno komunikovat prostřednictvím zasílání zpráv a v případě potřeby je od dané simulace odpojovat či je do simulace znovu zařazovat.

Vzhledem k faktu, že edukační cíl byl hlavním záměrem vývoje tohoto nástroje, je dimenzován přibližně pro 25 aktivně zapojených klientů, tj. přibližně jednu třídu (větší počet klientů může v některých případech činit aplikaci obtížejší). Přínosný může být fakt, že třída, resp. jednotliví klienti, nemusí být fyzicky přítomni na jednom místě, postačí pouze jejich současné připojení k internetu.

Pro praktickou ilustraci užití nástroje *HubNet* jsme zvolili příklad z oblasti teorie her: princip tvorby kartelu [4]. Každý ze zapojených studentů je v rámci tohoto modelu v pozici člena kartelu a jako takový se na počátku zavazuje jednak k udržování shodné, společně dohodnuté ceny, jednak k prodeji určitého smlouveného objemu produktu. Drží-li se všichni těchto dohodnutých cen a kvót, dochází k maximalizaci společného zisku. Činí-li tak, zvolili pro svého agenta možnost „spolupracovat“. Každý z členů (studentů), má však možnost dohodu nedodržet. Motivací tak učinit je samozřejmě zvýšení vlastního zisku na úkor členů, kteří se dohody drží. Studenti mohou pro své agenty volit, a v závislosti na chování kupujících a zbylých členů kartelu v průběhu simulace měnit, další čtyři strategie:

Strategie „kvóta plus“ – člen kartelu produkuje o něco více, než je množství stanovené kvótou; toto dodatečné množství prodává za nižší cenu než je dohodnuta.

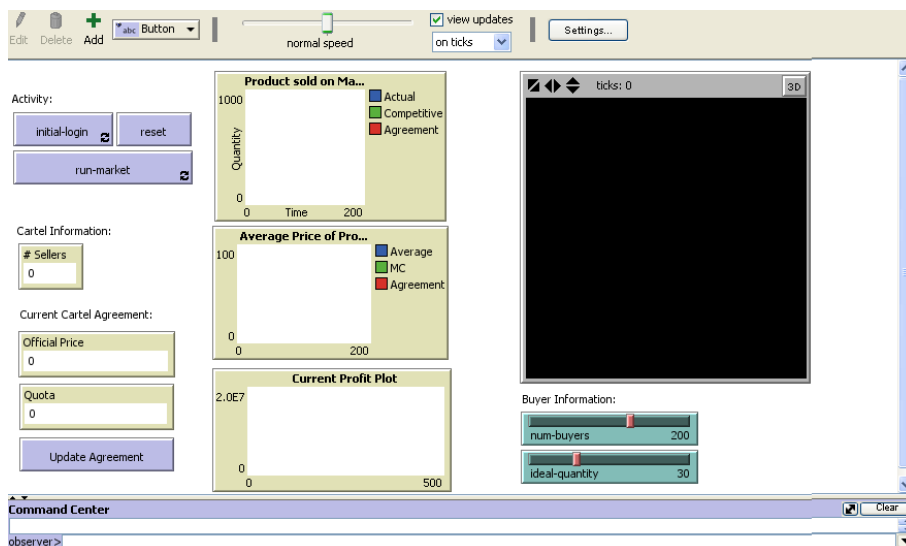
Strategie „kvóta mínus“ – člen kartelu analogicky k předešlé variantě produkuje o něco méně, než stanovuje kvóta, prodává ovšem za dohodnutou cenu. Motivací k tomuto chování může být snaha udržet ceny dostatečně nahoře a kartel pohromadě.

- Strategie „ceny převyšující mezní náklady“ – člen kartelu dodává další jednotky produktu tak dlouho, dokud cena, za níž jsou kupující ochotni kupovat, převyšuje mezní náklady.
- Strategie „zaplavení trhu“ – spočívá v produkci levného zboží, jímž je saturován trh.

Zatímco klienti jsou v pozici prodávajících, tj. tvůrců kartelu, kteří aktivně volí strategie svého jednání, kupující jsou entity s danými vzorci chování. Ve zvoleném modelu jednají na základě definovaného pravidla: koupit co nejlevněji a zároveň zaplatit více než je předem stanovená maximální částka, kterou je daný kupující ochoten zaplatit. Počet kupujících, maximální cenu a množství produktu, které jednotliví kupující poptávají, nastavuje vedoucí aktivity (pedagog) na serveru *HubNetu* pomocí posuvníků v základním okně modelu (viz obrázek 6). Kromě posuvníků se v základním okně dále zobrazuje podoba aktuálně platné kartelové dohody (monitory umístěné vlevo) a několik grafů, které referují o:

- prodaném množství produktu; ve shodném grafu se rovněž zobrazuje, kolik produktu by bylo možné prodat za předpokladu dokonalé konkurence či existence monopolu (tj. shodné množství v případě fungujícího kartelu);
- průměrné ceně produktu, již bylo docíleno v daném kroku na základě všech proběhnuvších transakcí; v grafu se dále zobrazuje dohodnutá cena kartelem a úroveň mezních nákladů prodejců;
- aktuálním ziskem prodejců.

Po spuštění aplikace mohou klienti (studenti) za účelem maximalizace vlastního zisku zkoušet jednotlivé strategie interaktivně měnit a sledovat reakci dalších členů kartelu, vývoj zisku (jak celkového, tak individuálního), vznikání a zanikání jednotlivých kartelových dohod atp. Vlastní zkušeností tak studenti zábavnou formou ověřují teoretická východiska konkrétních modelů, což napomáhá jejich snazšímu pochopení.



Obrázek 6: Základní okno serveru aplikace *HubNet* pro model tvorby kartelových dohod

2.3 Aplikace *BehaviorSpace*

Aplikace *BehaviorSpace* slouží k automatizovanému spouštění jednotlivých běhů programu. V tomto nástroji je možno definovat, jakým způsobem se budou měnit počáteční parametry modelu, kolikrát bude model spuštěn pro každou kombinaci parametrů, zda se budou data ukládat při každém kroku modelu nebo až na konci atd. Výstupy z modelů je možno ukládat do tabulky v externím souboru, kterou pak lze zpracovat programem pro statistickou analýzu dat [7].

Pro ilustraci možného užití aplikace *BehaviorSpace* jsme zvolili problematiku optimálního nastavení parametrů **algoritmu mravenčích kolonií** aplikovaného na **problém obchodního cestujícího** (*Traveling salesman problem, TSP*, [12]).

Chování mravenčích kolonií představuje vzhledem k efektivnosti jejich aktivit velmi inspirativní podnět pro přístup k řešení optimalizačních problémů, který dal vzniknout hned několika druhům algoritmů. Pro řešení problematiky obchodního cestujícího se vědci inspirovali aktem hledání potravy, kdy mravenci pozoruhodně efektivním způsobem nalézají nejkratší cestu mezi mravenišťem a zdrojem potravy. Děje se tak na základě nepřímé komunikace pomocí feromonů, které mravenci zanechávají na cestách, po nichž prošli. Pravidlo následovat co nejintenzivnější feromonovou stopu je základním stavebním prvkem kolektivního chování hledání potravy, v rámci kterého dochází k postupné selekci cest až k té nejefektivnější, tj. nejkratší.

Algoritmus inspirovaný pozorováním chování reálných mravenců je rovněž založen na označování cesty „virtuálním feromonem“. Aby ukládání feromonu vedlo ke zvýhodňování kratších tras, je do algoritmu dále implementována myšlenka časového měřítka v podobě vypařování feromonu. Vypařování nesmí být příliš rychlé, jinak by se neprojevil efekt rojové inteligence, zároveň je však potřeba, aby nebylo příliš pomalé. Jaká je tedy optimální hodnota nastavení tohoto parametru? Snazšímu hledání odpovědi na tuto otázku, stejně jako hledání hodnot zbylých parametrů, napomůže nástroj *BehaviorSpace*.

Dříve než se seznámíme s dalšími parametry modelu, nastiňme jeho podstatu. V problému obchodního cestujícího jde o nalezení *Hamiltonova okruhu* spojující n měst [6]. V modelu, který lze rovněž nalézt v knihovně ukázkových příkladů (viz [13]), lze počet měst volit za pomoci posuvníku (viz obrázek 7). Města jsou reprezentována uzly grafu, který je generován náhodně po stisknutí tlačítka příprav. Nejde nám o řešení konkrétního problému, ale o

vypozorování fungování algoritmu, zejména o důsledky změn v nastavení počátečních parametrů. Hrany spojující uzly představují možné cesty, je tedy zřejmé, že jejich délka je rovněž generována náhodně.

Volba cesty, kterou každý z mravenců v příslušném kroku simulace volí, závisí na:

- informaci, zda-li město již bylo navštíveno;
- vzdálenosti mezi aktuálním uzlem (městem) i a všemi dostupnými uzly j ;
- na množství feromonové stopy na každé z hran mezi aktuálním uzlem (městem) a všemi dostupnými uzly j .

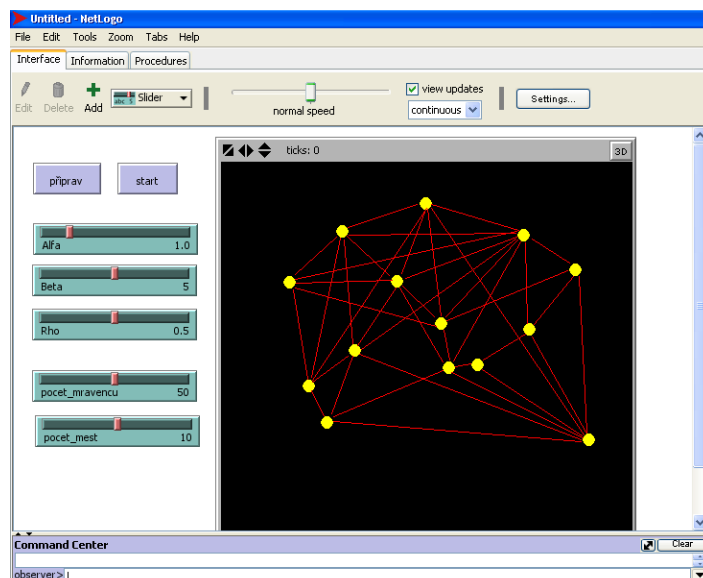
Množství feromonové stopy je informace, která se v průběhu řešení problému mění na základě „zkušeností“ získaných mravenci. Proces změn probíhá na globální a lokální úrovni:

- **globální aktualizace** feromonové stopy je provedena mravencem, kterému se podařilo najít doposud nejlepší *Hamiltonův okruh* v grafu; virtuální feromon je aplikován na hrany doposud nejlepší nalezené cesty, což stimuluje mravence k aktivitám v jejím bezprostředním okolí;
- **lokální aktualizace** se týká každé hrany navštívené některým z mravenců. Jednak zajišťuje lokální zvyšování feromonu, zejména však má na starosti zajištění záporné zpětné vazby v podobě „vypařování feromonu“, čímž dochází k „zapomínání“ dlouhých či málo využívaných tras.

Bližší popis algoritmu lze například v [2], [3] či [5]. Pro účely této práce postačí nastínění podstaty parametrů, jejichž hodnoty mohou být v rámci modelu voleny. Jde celkem o tři:

- α (**alfa**) - určuje sklon mravenců preferovat cestu s vyšším množstvím feromonu;
- β (**beta**) – určuje sklon mravenců preferovat kratší cestu;
- ρ (**rho**) – ovlivňuje míru vypařování feromonu, tj. schopnost algoritmu zapomínat již vyzkoušená řešení, která nejsou dostatečně dobrá;

Zaměříme-li se na možné hodnoty výše uvedených parametrů, které jsou patrné z posuvníků v základním okně modelu na obrázku 7, není složitým úkolem zjistit, kolik kombinací jejich nastavení čítá prostor parametrů modelu. Jde o jedenáct hodnot pro parametr α (možno volit od 0 do 1; po desetinách), šest pro parametr β (možno volit od 0 do 5; po jednotkách) a jedenáct pro parametr ρ (možno volit od 0 do 1 po desetinách), tj. o 726 možných kombinací. Zajímá-li nás nastavení parametrů, které by z pohledu chování modelu bylo optimální, bylo by bez *BehaviorSpace* potřeba ručně vyzkoušet každou z nich, a jednalo by se tak o poměrně časově náročnou záležitost. S *BehaviorSpace* oproti tomu stačí určit podmnožinu hodnot z každého posuvníku a aplikace spustí model se všemi kombinacemi nastavení sama. Všechny získané výsledky aplikace přehledně zaznamená a po ukončení všech běhů simulace lze získaná data otevřít i v jiném programu, například v tabulkovém procesoru. Na základě užití aplikace *BehaviorSpace* lze ve výše uvedeném modelu dojít k optimálnímu nastavení parametrů: $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\rho = 0.5$ [7].



Obrázek 7: Aplikace algoritmu mravenčích kolonií na TSP v prostředí *NetLogo*

Aplikace *BehaviorSpace* je účinným nástrojem pro zmapování celého prostoru chování zkoumaných systémů, který umožňuje určit takové hodnoty parametrů, které vedou k nejrychlejší detekci kýžených jevů, například rovnováhy systému.

3 ZÁVĚR

Multiagentní simulace je pro svá specifika zajímavou alternativou, či doplňkem k hojně užívané diskrétní simulaci. V počátečních snahách tvorby modelů se jako vhodné jeví pro jednoduchost syntaxe a názornost prezentování výsledků programové prostředí *NetLogo*, s nímž se nástrahy multiagentního modelování podaří jistě překonat i uživatelům, kteří dosud s žádným programovacím jazykem nepřišli do styku.

Použitá literatura

1. BURIAN J.: Reaktivní multiagentní modely v ekonomii. Disertační práce, VŠE-FIS, Praha, 2010.
2. D. MERKLE, M. MIDDENDORF, H. SCHMECK: Pheromone evaluation in Ant Colony Optimization, Industrial Electronics Society, 26th Annual Conference of the IEEE, Vol. 4 pp. 2726–2731, 2000.
3. CHIONG R.: Nature-Inspired Algorithms for Optimisation. Springer, 2009
4. MAROULIS, S., WILENSKY, U. : NetLogo HubNet Oil Cartel model, Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL, 2004
5. OUYANG J., GUI-RONG Y. : A multi-group ant colony system algorithm for TSP, Machine Learning and Cybernetics, Vol. 1, pp. 117–121, 2004.
6. PELIKÁN, J.: Diskrétní modely v operačním výzkumu, Professional Publishing, Praha 2001.
7. ROACH, CH.: NetLogo Ant System model. Computer Vision and Bio-inspired Computing Laboratory. Florida Institute of Technology, Melbourne, FL 2007.
8. STERMAN, J.: Business Dynamics: System thinking and modelling for a complex world. Irwin McGraw-hill, New York, 2000.

9. WILENSKY, U. : NetLogo Segregation model. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL, 1997.
10. XIN-SHE Y. : Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms: Second Edition, Luniver Press, 2010.
11. ZOUHAROVÁ, M.: Praktické uplatnění systému Netlogo pro potřeby operačního výzkumu, Mezinárodní vědecký seminář - Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu, Bratislava 2010

Internetové zdroje:

12. Zdrojový kód modelu *TSP* pomocí *ACO* v prostředí NetLogo autorů ROACH, CH., MENDOSA B; dostupné z <http://jmvidal.cse.sc.edu/netlogomas/>, staženo dne 22.10.2011.
13. User Manual umístěný na oficiálních stránkách *NetLoga* ; dostupné z <http://ccl.northwestern.edu/betlovo>, staženo dne 16.10.2011.

Kontaktné údaje

Ing. Martina Zouharová

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha

email: em.zouharova@gmail.com