

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ
NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII
A OPERAČNÍM VÝZKUMU

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

ZBORNÍK

10. – 12. december 2013

10. – 12. prosinec 2013

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., EU Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., VŠE Praha
doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

Ing. Jan Fábry, PhD.
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.
Ing. Marian Reiff, PhD.

AH 10,57

Kontakt:

jablon@vse.cz, reiff@euba.sk

Editor: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc. ,
Ing. Marian Reiff, PhD.

Web editor: doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2013

ISBN: 978-80-225-3786-5

Obsah

Andrej Babej, Pavel Gežík, Lucia Mieresová:	<u>Zber odpadu – modelový prístup na báze okružných úloh</u>	5
Martin Benkovič, Patrik Kupkovič:	<u>Dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy malej otvorenej ekonomiky</u>	11
Sára Bíza Bisová:	<u>Alternativní specifikace ve vektorových autoregresích</u>	18
Adam Borovička:	<u>Selected Pieces of Knowledge of the Fuzzy Set Theory and Their Application</u>	25
Ivan Brezina jr., Peter Horvát:	<u>Relatívna efektívnosť vládnych výdavkov krajín Európskej únie</u>	33
Michal Černý:	<u>ILPIC (Inverse Linear Programming with Interval Coefficients): Some Applications, Theory and Algorithms</u>	38
Petr Fiala:	<u>Problém výběru portfolia projektů</u>	44
Pavel Gežík:	<u>Optimalizácia zberu separovaného odpadu</u>	51
Eduard Hozlár:	<u>Modelovanie rizika neplatenia pohľadávok</u>	57
Michaela Chocholatá:	<u>Zohľadnenie možných nelinearít pri testovaní platnosti teórie parity kúpnej sily</u>	62
Pavol Jurík:	<u>Informačné systémy na podporu riadenia dodávateľských reťazcov</u>	67
Maria Kobzareva, Jan Pelikán:	<u>Fuzzy prístup k řešení úlohy optimalizace portfolia</u>	72
Brian König:	<u>Analýza fiškálnej politiky v SR: ECM prístup</u>	81
Brian König:	<u>Analýza nezamestnanosti a jej makroekonomických dopadov</u>	91
Martina Kuncová, Veronika Rejmanová:	<u>Volba dodavateľa elektřiny pomocí simulačného modelu</u>	98
Patrik Kupkovič, Martin Benkovič:	<u>Modelovanie deliteľnej a nedeliteľnej práce – RBC prístup</u>	104
Martin Lukáčik:	<u>Parametre produkčnej funkcie ekonomiky</u>	110
Adriana Lukáčiková:	<u>β – konvergencia v krajinách Európskej únie</u>	117
Lucia Mieresová:	<u>Optimálna lokalizácia zberných miest v Bratislavskom kraji pri stanovenej maximálnej vzdialenosti</u>	122

Veronika Miřková:	<u>Matica spoločenského účtovníctva a systém národných účtov</u>	132
Vladimír Mlynarovič:	<u>Rozvinuté schémy dekompozície výnosov portfólia</u>	138
Kirill Odintsov:	<u>Optimalizační úlohy se stochastickou dominancí druhého řádu v omezeních - aplikace na úlohu optimalizace portfolia</u>	148
Filip Ostrihoň:	<u>Podiel príjmu z úrokov a podnikania na disponibilnom príjme domácností SR</u>	156
Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková:	<u>Rovnovážne stratégie v dvojstupňovom dodávateľskom reťazci</u>	161
Marian Reiff, Andrea Furková, Kvetoslava Surmanová:	<u>Analýza maloobchodného trhu z pohľadu lokalizácie zákazníkov</u>	166
Nataliya Soldatyuk:	<u>Study of Economic Epidemiology Models</u>	173
Stanislav Sopko:	<u>Riešenie optimalizačných úloh na lokálnej úrovni a v prostredí internetu</u>	179
Karol Szomolányi:	<u>Model slovenského hospodárskeho cyklu</u>	186
Michaela Tichá:	<u>Vícekritériální hra</u>	195

ZBER ODPADU – MODELOVÝ PRÍSTUP NA BÁZE OKRUŽNÝCH ÚLOH*

WASTE COLLECTION – MODELLING BASED ON VEHICLE ROUTING PROBLEM *

Andrej Babej, Pavel Gežík, Lucia Mieresová

Abstrakt

Ochrana životného prostredia je v súčasnosti dôležitou témou, ktorá sa stále viac dostáva do popredia hlavne v súvislosti s odpadom, zberom odpadu a recykláciou. Aktuálna situácia poukazuje na nevyhnutnosť riešiť danú problematiku a potrebu vybudovať komplexný systém nakladania s odpadom, ktorý zohľadní všetky aspekty zabezpečujúce ochranu životného prostredia. Jedným zo základných bodov stratégie ochrany životného prostredia je materiálové zhodnotenie odpadov v čo najväčšej miere.

Kľúčové slová: zber produktov, recyklácia, zberné miesto

Abstract

Environmental protection is currently an important issue, which is increasingly gaining prominence mainly related to waste, collection of waste and recycling. The current situation highlights the need to address this issue and the need to develop a comprehensive waste management system, taking into account all aspects of ensuring protection of the environment. One of the aims of the strategy of environmental protection is material recovery of waste as much as possible.

Keywords: Collection of Products, Recycling, Collection point

1 ODPAD

Opadom rozumieme čokoľvek čo už majiteľ nepotrebuje, nevyužíva, pretože to pre neho nemá, resp. stratilo význam, a preto sa toho chce zbaviť. Odpad vzniká pri každej ľudskej činnosti, či už vo výrobnej alebo v spotrebiteľskej sfére. Látky obsiahnuté v odpadoch často ohrozujú životné prostredie (kvalita vody, ovzdušia, pôdy). Ich prenikanie do rastlín ohrozuje cez potravinový reťazec aj živočíchy a samotnú ľudskú populáciu.

Z legislatívneho hľadiska je odpadom hnutelná vec, ktorej sa jej držiteľ zbavuje, chce sa jej zbaviť alebo je v súlade so zákonom alebo osobitnými predpismi povinný sa jej zbaviť.

* Článok je spracovaný ako jeden z výstupov výskumného projektu EFEKTIVITA RECYKLÁCIE V PODNIKATEĽSKOM PROSTREDÍ, „GREEN LOGISTIKA“ A „GREEN IMAGE“ PODNIKU registrovaného pod evidenčným číslom I-13-108-00.

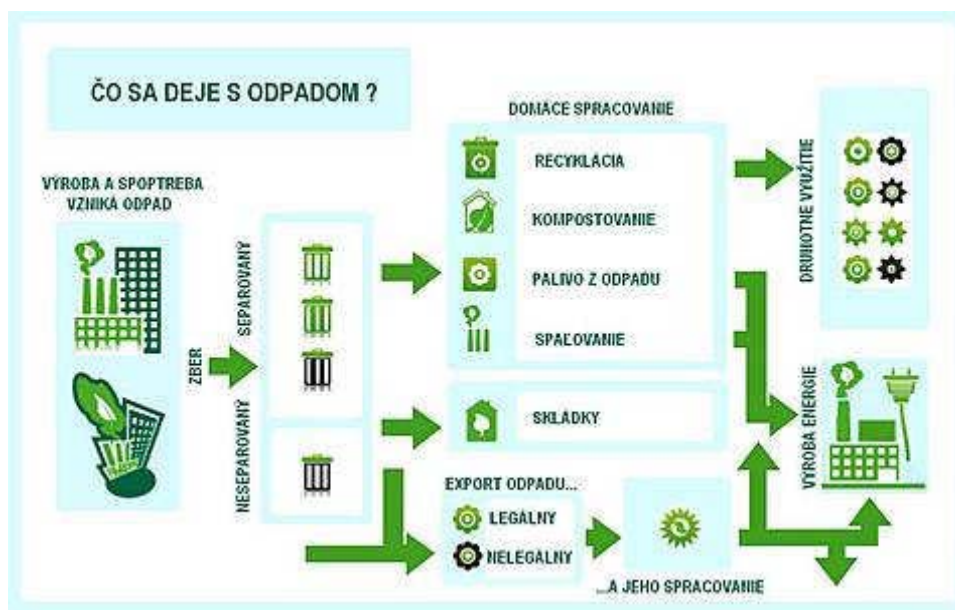
* Article is elaborated as one of the outputs of the research project RECYCLING EFFICIENCY IN BUSINESS ENVIRONMENT, "GREEN LOGISTICS" AND "GREEN IMAGE" ENTERPRISE registered under the record number I-13-108-00 .

Rozoznávame dva druhy odpadu:

Prírodný odpad v obehu látok: rastliny – bylinožravce - mäsožravce - hmyz - mikroorganizmy je teoreticky dokonalý. Každý prírodný odpad má svojho odberateľa a spotrebiteľa.

Odpad vytvorený **v dôsledku ľudskej činnosti** predstavuje výrazný problém. Pre ľudský odpad neexistuje takmer žiaden odberateľ, ktorý by ho prirodzenou cestou vedel spracovať a využiť pre seba. Ľudia, na rozdiel od prírody, vytvárajú také druhy odpadu, s ktorými si príroda sama nevie poradiť. Keďže tvorbu odpadu nie je možné úplne zastaviť je potrebné vyriešiť úlohu ako s ním správne naložiť. Správne nakladanie s odpadmi je rovnako dôležitý problém ako zabezpečenie základných životných potrieb a využívanie odpadov ako druhotných surovín nadobúda stále väčší význam. Problém hospodárenia s odpadmi je problémom nielen ekologickým, ale aj ekonomickým, technologickým a spotrebiteľským. Možnosti nakladania s odpadom sú:

- Skládkovanie – je najrozšírenejšou a najstaršou metódou nakladania s odpadmi. Vyspelé krajiny skládkujú viac ako 90% tuhého odpadu,
- Termické metódy (spaľovanie, pyrolýza) – dosiahla sa redukcia objemu až o 1/2,
- Chemické metódy – neutralizácia, ultrafialová fotolýza, chemická oxidácia, oxidácia peroxidom vodíka, ozonizácia, alkalická chlorácia, elektrolytická oxidácia,
- Biotechnologické metódy (kompostovanie, metanizácia, solidifikácia) – používajú sa pri biologických odpadoch,
- Recyklácia.



Obrázok č. 1 - Schéma nakladania s odpadom¹

Na to aby sme mohli vykonať ktorúkoľvek už spomenutú činnosť je najprv potrebné vykonať zber odpadu.

¹ EurActiv.sk <http://www.euractiv.sk/separovanie-a-samosprava/zoznam_liniek/odpad-akohodnotny-zdroj-do-buducna-000292>

2 ZBER ODPADU

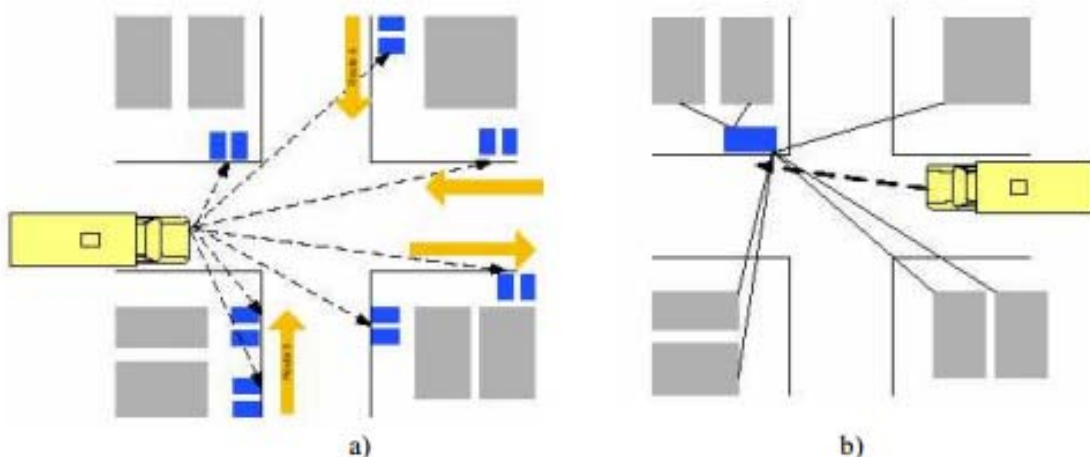
Zber odpadu závisí od rôznych faktorov a podmienok územia, na ktorom má byť vykonávaný. Za hlavné faktory ovplyvňujúce zber odpadov a materiálov považujeme²:

- Štruktúru / hustotu osídlenia
- Dopravné možnosti

Vzhľadom na tieto faktory je zrejmé, že zber odpadu sa bude vykonávať v osídlených a zastavaných územiach s vybudovanou infraštruktúrou, čo znamená v obciach a mestách. Vzhľadom na umiestnenie zberného miesta môžeme definovať dve základné metódy zberu odpadov a to:

Metóda odvážania (obr. 2a) - Recyklovateľné odpady a materiály sú zhromažďované na zberných stanovištiach pri pozemku vlastníka objektu a sú odoberané v pravidelných časových intervaloch. Výhodou tohto systému je, že je pohodlnejší pre obyvateľstvo. Jeho nevýhodou je, že vyžaduje zvýšené náklady nielen na zberné nádoby ale tiež na logistiku. Pri metóde odvážania sa používajú okružné úlohy – konkrétne úloha čínskeho poštára. Zberné vozidlo je nútené navštíviť každú ulicu resp. cestu (hranu), na ktorej sa nachádzajú producenti odpadu (domácnosti, firmy) so zbernými nádobami.

Metóda prinášania (obr. 2b) - Metóda prinášania vyžaduje od obyvateľa priniesť recyklovateľné zložky odpadov na miesto zberu. Za výhodu tohto riešenia môžeme považovať zníženie nákladov na zariadenie a jednoduchšiu logistiku odvozu. Metóda prinášania spočíva vo vytvorení siete zberných miest zväčša umiestnených v priestoroch zvýšenej koncentrácie a pohybu obyvateľov. Výsledky tejto metódy sú založené na uvedomelosti obyvateľov a ich motivácii recyklovať. Metóda je finančne menej náročná ako predchádzajúca metóda odvážania. Môže byť tiež využitá pre separovaný zber odpadu, kedy sú pre rozdielne druhy zbieraných materiálov zberné nádoby farebne rozlišované. Pri metóde prinášania sa používajú okružné úlohy – konkrétne úloha obchodného cestujúceho. Zberné vozidlo je v tomto prípade nútené navštíviť každé vytvorené zberné miesto (môže byť vytvorené na križovatke viacerých ciest a pod.), ktoré reprezentuje uzol v sieti zberných miest. Po navštívení všetkých uzlov sa zberné vozidlo vracia späť na svoje stanovište.



Obrázok č. 2 - Zber a) metóda odvážania, b) metóda prinášania²

² ČERMÁK, O., 2007. *Odpadové hospodárstvo - Spôsoby zberu a odstránovania odpadov*. Bratislava: STU, 2007. 106 s. ISBN 978-80-227-2662-7.

Po vyzbieraní odpadu od producentov (domácnosti, firmy) sa zberné vozidlá vracajú na svoje stanovištia (zberné dvory), ktoré plnia funkciu dočasných skládok vyzbieraných surovín. Z týchto dočasných skládok je potrebné vyzbierané suroviny prepraviť na vhodné spracovateľské/recyklačné/predajné miesto, prípadne na trvalú skládku odpadu ak sa jedná o taký odpad, ktorý nie je možné ďalej využiť/predať. Potrebu prepravy už vyzbieraných surovín sa zaoberajú úlohy rozvozu a zvozu materiálu, ktoré si rozoberieme v ďalšej časti príspevku.

3 ÚLOHY ROZVOZU A ZVOZU MATERIÁLU (ODPADU)

V prípade hľadania najkratšej okružnej cesty, pričom sú určené kapacitné obmedzenia, sú špecifickým problémom úlohy rozvozu a zvozu materiálu. V tomto prípade je hlavným predpokladom dopravná sieť, ktorá obsahuje jedno hlavné stredisko a niekoľko rozvozných miest, pričom cieľom je premiestnenie určeného množstva materiálu (odpadu) z daného centra (centrálneho skladu, strediska, resp. centrálneho zásobovacieho jednotka) do jednotlivých rozvozných miest (odberateľské uzly), ktoré požadujú dodávku resp. odvoz rôznych množstiev tovaru. Ďalším predpokladom je existencia dopravného prostriedku s danou ohraničujúcou kapacitou K .

Predpokladáme teda existenciu prepravnej siete s $n+1$ uzlami a $n(n+1)/2$ úsekmi, ktorých ohodnotenie udáva matica najkratších vzdialeností $D_s = \{d_{ij}\}$. Hlavné stredisko danej siete je označené ako u_0 , ostatné uzly siete sú postupne u_1, u_2, \dots, u_n . Každý z uzlov siete požaduje dovoz/odvoz q_i jednotiek tovaru z hlavného strediska u_0 . Stredisko má k dispozícii prostriedok na prepravu s kapacitou K . Ďalej sa predpokladá platnosť $q_i \leq K$ pre všetky uzly v sieti ($i = 1, 2, \dots, n$). Tým pádom môže byť požiadavka každého odberateľa uspokojená jedinou návštevou daného dopravného prostriedku. Úlohou je nájsť najkratšiu trasu dopravného prostriedku tak, aby nebola prekročená kapacita dopravného prostriedku pri nakladaní a vykladaní tovaru a aby všetky požiadavky odberu v jednotlivých uzloch boli uspokojené pre každú z okružných rozvozných jazd, z ktorých sa trasa skladá.

Rozlišujeme tri základné typy úloh rozvozu a zvozu materiálu: [2]

- úlohy rozvozu – tovar je len vykladaný
- úlohy zvozu – tovar je len nakladaný
- úlohy rozvozu a zvozu – niektoré tovary sú nakladané a iné sú vykladané

Matematické prostriedky na riešenie takýchto typov úloh poskytuje teória grafov. Z dôvodu komplikovanosti pri použití optimalizačných metód na riešenie úloh tohto typu sa pri praktických riešeniach využívajú vo väčšej miere heuristické metódy, ktoré poskytujú dobré výsledky a majú podstatne nižšie požiadavky na množstvo matematických operácií.

Heuristické metódy riešenia takejto úlohy možno rozdeliť na:

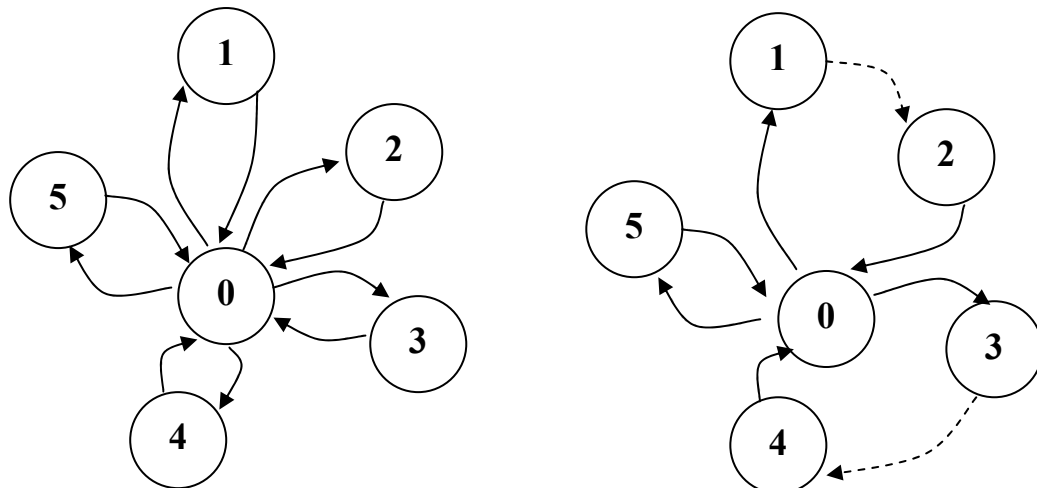
- metódy, v ktorých sú trasy dopravných prostriedkov budované priamo postupným pridávaním uzlov s priebežnou kontrolou prípustnosti príslušných kapacitných prírastkov: *Clarkova-Wrightova metóda* – najpoužívanejšia metóda skupiny, *kombinatorická metóda s obmedzeným návratom*, *násobný algoritmus postupného zväčšovania rozvoznej trasy*,
- metódy, ktoré úlohy dekomponujú na jednoduchšie úlohy, v ktorých všetky riešenia spĺňajú podmienky, a treba určiť iba najlepšie riešenie podúloh z hľadiska stanoveného kritéria, napr. *stierací algoritmus* (*algoritmus sweep*).

Clarkova-Wrightova metóda

Clarkova-Wrightova metóda patrí medzi heuristické algoritmy, ktoré sú založené na postupnom spracovaní východiskového prípustného riešenia. Rozvozná trasa je tu tvorená kyvadlovými jazdami *stredisko – uzol – stredisko*, z čoho je zrejmé, že východiskové riešenie je neefektívne, a preto sa v ďalších krokoch vyberajú dve okružné cesty, ktoré je možné spojiť pri dodržaní podmienky kapacitného ohraničenia dopravného prostriedku, a týmto spojením sa celková okružná trasa najviac skráti. Koniec výpočtu nastáva vtedy, keď už nie je možné spojiť žiadne ďalšie dve okružné jazdy bez dosiahnutia úspor v ohodnotení rozvozných tras. [2]

Algoritmus umožňuje spojenie len tých dvoch okružných jazd v uzloch, ktoré boli v pôvodných jazdách spojené úsekom so strediskom. Pri označení počtu uzlov n , vznikne v symetrickej prepravnej sieti najviac $n(n+1)/2$ možností spojenia a tento počet v priebehu výpočtu klesá z dôvodu väčšieho počtu uzlov v jednotlivých jazdách. Úsporu, ktorá vzniká pri spojení uzlov u_i a u_j patriacich do dvoch rôznych okružných jazd, v ktorých sú tieto uzly spojené so strediskom u_0 , možno vyjadriť vzťahom: $d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$; $i, j = 1, 2, \dots, n$, kde prvky matice D_s predstavujú najkratšie vzdialenosti medzi všetkými uzlami v sieti.

Princíp spájania jednotlivých rozvozných trás:



Obrázok č. 3 - Princíp spájania jednotlivých rozvozných trás³

Clarkov-Wrightov algoritmus

1. Východiskovým prípustným riešením je trasa $u_0-u_1-u_0-u_2-u_0-u_3-u_0-\dots-u_0-u_n-u_0$, ktorú označíme ako T . Zobrazenie Q pre r okružných jazd je definované tak, že Q_r udáva súčet všetkých požiadaviek q_i , ktoré r -tá jazda uspokojuje. Ďalej sa definuje zobrazenie F_i pre všetky nestrediskové uzly, ktoré im priraduje číslo okružnej jazdy, do ktorej príslušný uzol patrí. V prvom kroku sú definované $Q_r = q_r$ a $F_i = i$.
2. Pre všetky neusporiadané dvojice uzlov (u_i, u_j) prepravnej siete, kde $i \neq j$ a $i, j \neq 0$, výpočet koeficientu $l_{ij} = d_{i0} + d_{0j} - d_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.
3. Určenie najvyššej kladnej hodnoty l_{ij} a prechod na bod 4. Ak také l_{ij} neexistuje, výpočet sa končí a výsledným riešením je trasa určená postupnosťou T .

³ BREZINA, I. – ČICKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2009. *Kvantitatívne metódy na podporu logistických procesov*, Bratislava: EKONÓM, 2009. 192 s. ISBN 978-80-225-2648-7

4. V prípade, že platí nerovnosť $Q(F_i) + Q(F_j) \leq K$, zlúčia sa príslušné dve jazdy. Číslo novej jazdy r sa určí na základe $F_r = \min \{F_i, F_j\}$. Pre všetky uzly k zo spojených jazd $F_k = r$ a $Q_r = Q(F_i) + Q(F_j)$.
5. Súčasne $l_{ia} = 0$ a $l_{bj} = 0$ (pretože algoritmus umožňuje spájanie len tých uzlov, ktoré sú bezprostredne spojené so strediskom) a takisto sa rovnajú nule všetky hodnoty l_{je} , ktoré by viedli k vzniku podcyklov v rámci príslušnej jazdy. Návrat k bodu 2.

ZÁVER

Z uvedeného vyplýva že pri zbere odpadu sa využívajú tri najznámejšie metódy z okružných úloh. Úloha čínskeho poštára v prípadoch kedy má zberné vozidlo navštíviť každú domácnosť a firmu produkujúcu odpad, t.j. prejsť každou ulicou v obci/meste. Úloha obchodného cestujúceho je reprezentovaná v prípadoch, kedy zberné vozidlo obsluhuje iba centralizované miesta zberu odpadu, ktoré sa zvyčajne situujú ku križovatkám ciest, tieto zberné miesta reprezentujú jednotlivé uzly – miesta v sieti, ktoré musí zberné vozidlo navštíviť. Poslednou spomenutou je Clark-Wrightova metóda, ktorá je v príspevku detailnejšie rozpracovaná a slúži na zvoz už vyzbieraného odpadu z domácností resp. zberných miest do centrálnych zberných/spracovateľských skladov, resp. na určenú skládku odpadu.

Použitá literatúra

1. BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2009. *Kvantitatívne metódy na podporu logistických procesov*, Bratislava: EKONÓM, 2009. 192 s. ISBN 978-80-225-2648-7
2. BREZINA I. a kol. 2009. *Modelovanie reverznej logistiky : optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*, Bratislava: EKONÓM, 2009. 222 s. ISBN 978-80-225-2825-2
3. ČERMÁK, O., 2007. *Odpadové hospodárstvo - Spôsoby zberu a odstraňovania odpadov*. Bratislava: STU, 2007. 106 s. ISBN 978-80-227-2662-7
4. EurActiv.sk http://www.euractiv.sk/separovanie-asamosprava/zoznam_liniek/odpad-akohodnotny-zdroj-do-buducna-000292
5. PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2012: *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012, ISBN 978- 80-225-3349-2

Kontaktné údaje

Ing. Andrej Babej

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 903 411 793, email: andrej.babej@gmail.com

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 908 333 360, email: pavelgezik@gmail.com

Ing. Lucia Mieresová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 904 389 298, email: lucia.mieresova@gmail.com

DYNAMICKÝ STOCHASTICKÝ MODEL VŠEOBECNEJ ROVNOVÁHY MALEJ OTVORENEJ EKONOMIKY

DYNAMIC STOCHASTIC GENERAL EQUILIBRIUM MODEL OF SMALL OPEN ECONOMY

Martin Benkovič, Patrik Kupkovič

Abstrakt

Používanie dynamických stochastických modelov všeobecnej rovnováhy pre analýzu správania sa ekonomického systému patrí v súčasnosti medzi štandardné a často využívané prístupy. DSGE modely popisujú ekonomický rast, vplyvy monetárnej a fiškálnej politiky v ekonomickom systéme. Výhoda DSGE modelov vychádza z použitia silných mikroekonomických základov. Rovnice modelu sú získané optimalizáciou správania jednotlivých ekonomických subjektov. V závere sú prezentované vybrané parametre modelu odhadnuté bayesovskou technikou odhadu a ilustrovaná vybraná funkcia reakcie na šok.

Kľúčové slová: *dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy, funkcie reakcií na šoky, malá otvorená ekonomika*

Abstract

Use of dynamic stochastic general equilibrium models to analyze the behavior of economic system is currently one of the standard approach used in economic research. Advantage of DSGE models is based on strong microeconomic assumptions. This approach helps to better understand the economic systems and implications of various monetary and fiscal policies. Equations included in model are obtained by optimizing behavior of economic agents in economic system. In conclusion are presented estimated parameters by Bayesian estimation technique and we illustrate selected impulse response function.

Keywords: *dynamic stochastic general equilibrium model, impulse response functions, small open economy*

1 MODEL

Východiskom je model, ktorý bol publikovaný autorom Liu (2005) a Vášíček, Musil (2006). Model predstavuje 2 ekonomiky, domáca - malá otvorená ekonomika a je výrazne menšia ako zahraničná ekonomika. Domáca ekonomika nemá vplyv na zahraničnú ekonomiku. V závere bude prezentovaný model v log-linearizovanom tvare, kde premenné vyjadrujú percentuálne odchýlky od ustáleného tvaru.

1.1 Reprezentatívna domácnosť

Reprezentatívne domácnosti maximalizujú funkciu užitočnosti vyjadrenú v tvare

$$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{(C_t - hC_{t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right] \quad (1)$$

pre $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$, kde E_t vyjadruje očakávanú hodnotu funkcie užitočnosti, β ($0 < \beta < 1$) diskontný faktor, C_t spotreba, h ($0 < h < 1$) formovanie návykov v spotrebe domácností, σ ($\sigma > 0$) inverzná elasticita intertemporálnej substitúcie, N_t počet odpracovaných hodín, φ ($\varphi > 0$) inverzná elasticita ponuky práce. Domácnosti maximalizujú diskontovanú hodnotu očakávanej užitočnosti vyjadrenú ako užitočnosť zo spotreby zníženú o neužitočnosť z hodnoty práce. Reprezentatívne domácnosti sú obmedzené rozpočtovým ohraňčením. Príjem z nominálnych miezd a portfólia využívajú pre ďalšiu spotrebu a nákup nového portfólia

$$P_t C_t + E_t \left(\frac{D_{t+1}}{1+r_t} \right) \leq D_t + W_t N_t \quad (2)$$

pre $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$, kde P_t je celkový index spotrebiteľských cien, D_t nominálny nákup portfólia držaného v čase $t - 1$, r_t nominálna úroková miera a W_t nominálna mzda.

Podmienky prvého rádu sú vyjadrené v nasledujúcom tvare

$$(C_t - hC_{t-1})^{-\sigma} \frac{W_t}{P_t} = N^\varphi \quad (3)$$

$$\beta R_t E_t \left[\frac{P_t}{P_{t+1}} \left(\frac{C_{t+1} - hC_t}{C_t - hC_{t-1}} \right)^{-\sigma} \right] = 1 \quad (4)$$

pre $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$, kde $R_t = 1 + r_t$. Rovnica (3) vyjadruje intratemporálnu spotrebu, ktorá dáva do rovnosti hraničnú užitočnosť zo spotreby s hraničnou hodnotou práce. Rovnica (4) vyjadruje intertemporálnu Eulerovu rovnicu.

1.2 Reprezentatívna firma

Celkový output je vyjadrený produkčnou funkciou s konštantnou elasticitou substitúcie (CES) v tvare

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (5)$$

pre $t = 0, 1, 2, \dots$, kde ε je elasticita medzi rôznymi typmi tovarov $Y_t(i)$.

Kontinuum monopolisticky konkurenčných firiem produkujúcich diferencované tovary $Y_t(i)$ získame využitím nasledujúcej produkčnej funkcie

$$Y_t(i) = A_t N_t(i) \quad (6)$$

Pre i -tu firmu, pre $t=0,1,2,\dots$ kde $a_t = \log A_t$ opisujúci technologický progres (firma špecifikuje index produktivity) nasledujúcim AR(1) procesom pre všetky t v tvare

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad (7)$$

Log-lineárna aproximácia celkovej produkčnej funkcie je definovaná

$$y_t = a_t + n_t \quad (8)$$

Reálne celkové náklady produkcie môžu byť vypočítané ako súčin reálnej mzdy $\frac{W_t}{P_{H,t}}$ a celkového počtu odpracovaných hodín $N_t = \frac{Y_t}{A_t}$, pre $t = 0,1,2,\dots$

$$TC_t = \frac{W_t}{P_{H,t}} \frac{Y_t}{A_t}$$

Odvodíme marginálne náklady a log-linearizujeme ich

$$MC_t = mc_t = w_t - p_{H,t} - a_t$$

1.3 Centrálna banka

Domáca centrálna monetárna autorita je tretím agentom v modeli. Centrálna banka implementuje monetárnu politiku. Jej základným cieľom je stabilizovať infláciu a output. Taylorove pravidlo ukazuje centrálnej banke ako zmeniť úrokovú mieru ak existuje produkčná medzera alebo odchýlka inflácie od inflačného cieľa. Pravidlo je vyjadrené Woodfordom (2001). Centrálna banka zvyšuje nominálnu úrokovú mieru v prípade pozitívneho outputu alebo inflačnej medzery.

Toto správanie centrálnej banky v režime cielenia inflácie môže byť aproximované modifikovaným Taylorovým pravidlom ako môžeme vidieť Musil (2006). Vývoj monetárnej politiky centrálnej banky môže byť aproximovaný vzťahom modifikovaného Taylorovho pravidla (vo forme medzery), kde cielenie inflácie je dosiahnuté vo vzťahu implicitne. Vývoj inflačnej medzery (π_t), π_t je odchýlka inflácie spotrebiteľských cien od cieľa

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + 1 - \rho_r (\phi_1 \pi_t + \phi_2 y_t) \quad (9)$$

pre všetky t , kde ρ_r ($0 \leq \rho_r \leq 1$) je miera vyhladzovania úrokovej miery (oneskorený parameter pre medzeru úrokovej miery), ϕ_1 a ϕ_2 ($\phi_1, \phi_2 \geq 0$), sú relatívne váhy inflačnej medzery a miery rastu outputu.

3.4 Zahraničný sektor

Predstavíme si zahraničnú ekonomiku v najjednoduchšej forme. Hoci ide iba o zjednodušenie, umožňuje nám zaviesť základné vzťahy medzi domácou a zahraničnou ekonomikou. Zahraničný sektor je exogénny vzhľadom na malú otvorenú ekonomiku. Je popísaný dvomi rovnicami. Prvá je spojená s outputom zahraničnej ekonomiky

$$y_t^* = \lambda_1 y_{t-1}^* + \epsilon_t^{y^*} \quad (10)$$

pre všetky $t=0,1,2,\dots$. Vývoj zahraničného outputu je opísaný AR(1) procesom pre $0 < \lambda_1 < 1$ a produkčný šok $\epsilon_t^{y^*}$.

Druhá rovnica opisuje správanie sa zahraničnej reálnej úrokovej miery

$$r_t^* - E_t \pi_{t+1}^* = \rho_{r^*} (r_{t-1}^* - \pi_t^*) + \epsilon_t^{r^*} \quad (11)$$

pre všetky t , kde ρ_{r^*} ($0 < \rho_{r^*} < 1$) je parameter AR(1) procesu. Krátkodobá reálna úroková miera je vyjadrená spôsobom nominálnej úrokovej miery a inflácie. Toto vyjadrenie je užitočné špeciálne pre interpretáciu, pretože zahraničná inflácia ovplyvňuje domácu infláciu cez ceny importovaných tovarov.

2 REAKCIE MODELU NA IMPULZ

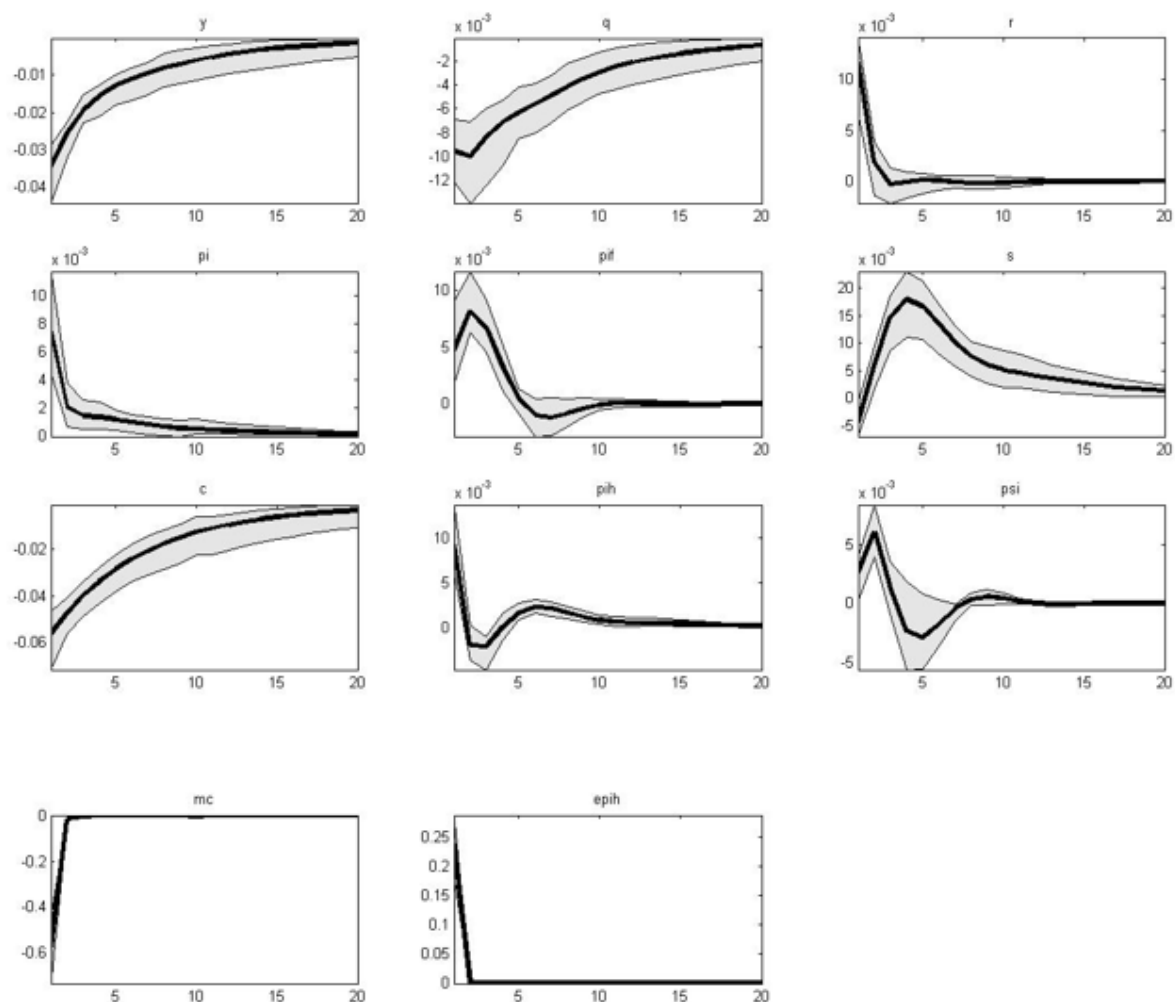
Východiskom je model, ktorý bol publikovaný autorom Liu (2005) a Vášíček, Musil (2006). Model predstavuje 2 ekonomiky, domáca - malá otvorená ekonomika a je výrazne menšia ako zahraničná ekonomika. Domáca ekonomika nemá vplyv na zahraničnú ekonomiku.

2.1 Šok v domácej inflácii

Graf v prílohe E zobrazuje vplyv pozitívneho šoku v domácej inflácii. Keďže ekonomika predstavuje malú otvorenú ekonomiku, šok vyvolá relatívne vysoký skok v domácej ekonomike. Ovplyvňuje najmä pravidlá obchodovania poklesom konkurencieschopnosti. Zmena v importovanej inflácii je vyššia a domáca inflácia klesá, čo zlepšuje konkurenčnú pozíciu domácich výrobcov na zahraničných trhoch. Na situáciu reaguje centrálna banka zvýšením úrokovej miery z dôvodu vyššej celkovej inflácie. Zmena v úrokovej miere vyvoláva znehodnotenie domácej meny. Vyššia úroková miera spôsobuje zmeny v správaní sa domácností vzhľadom na intertemporálnu substitúciu. Vysoká úroveň domácej inflácie ovplyvňuje správanie sa ponuky práce. Marginálne náklady domácich výrobcov stúpajú a v krátko čase sa dostávajú do rovnováhy. Vývoj outputu je ovplyvnený reštriktívnou monetárnou politikou, horšími podmienkami vo výmenných reláciách spojené s nízkym exportom a apreciáciou domácej meny.

Premenné potom ako dosiahnu svoj vrchol sa postupne vrátia k svojej rovnovážnej hodnote. Premenné neoscilujú, čo je spôsobené zmenami v domácej a celkovej inflácii. Zmena v domácej inflácii ovplyvňuje vývoj pravidiel obchodovania a výmenného kurzu. Reakcia centrálnej banky musí byť silná, čo má vplyv na domácu ekonomiku.

Graf č. 1 Šok v domácej inflácii



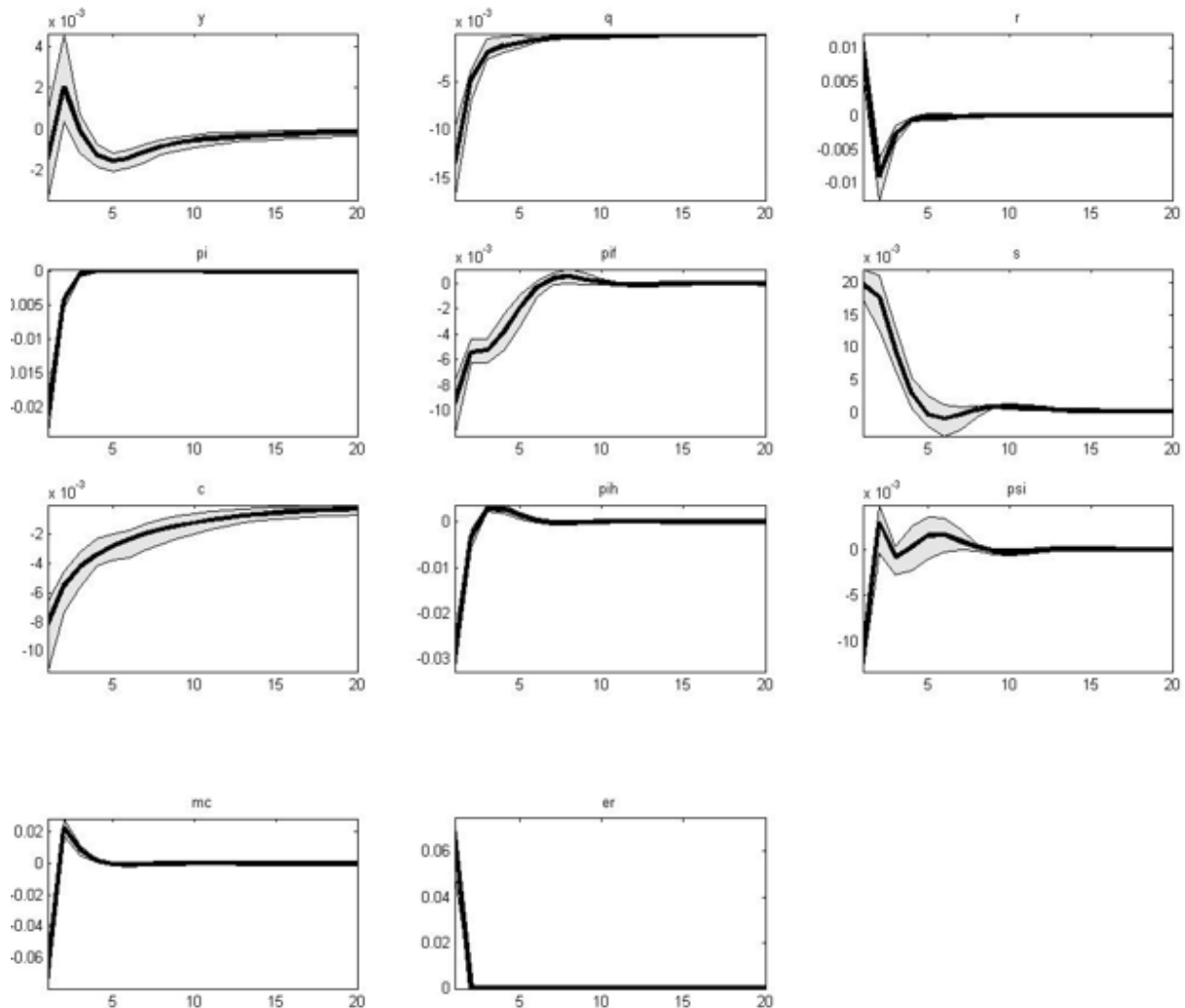
Vývoj je ovplyvnený očakávaniami. Predpokladáme, že výsledok šoku v domácej inflácii závisí od inflačných očakávaní. Ak je monetárna politika dôveryhodná, negatívne vplyvy na ekonomiku (meraný domácou produkčnou medzerou) budú menšie a priebeh bude hladký. Šok v domácej inflácii je významný pre analýzu reakcií monetárnej politiky.

2.1 Šok v úrokovej miere

Graf v prílohe E zobrazuje vplyv dočasného kladného šoku v nominálnej úrokovej miere. Pretože ide o reštriktívnu politiku, celková inflácia klesá. Zmeny sa objavili okamžite a sú relatívne krátkodobé. Táto politika má len krátkodobý vplyv. Depreciácia výmenného

kurzu je relatívne vysoká. Má vplyv na výrobcov a ide o vplyv transmisných kanálov pre zvýšenie outputu.

Graf č. 2 Šok v nominálnej úrokovej miere



Zvýšenie úrovne outputu je spojené s vyššími cenami produkcie (domáca inflácia). Spotreba je nižšia a reprezentatívny výrobcovia musia nastavovať nižšie ceny, aby predali celú produkciu. Taktiež domáca inflácia (aj celková inflácia) je nižšia a apreciacia domácej meny je vysoká, čo predstavuje zlú konkurenčnú schopnosť domácich výrobcov. Vyššia úroková miera má negatívny vplyv na spotrebu domácností. Budúca spotreba sa stane menej atraktívnou a reprezentatívna domácnosť bude spotrebúvať viac v súčasnom období. Vplyv monetárnej reštrikcie, reprezentovaný úrokovou mierou ovplyvňuje celkovú infláciu. Znižovanie inflácie závisí na inflačných očakávaníach. Okamžite po monetárnom šoku spotreba klesá. Monetárny šok ovplyvňuje správanie sa všetkých agentov v ekonomike vo výraznej miere.

ZÁVER

V príspevku sme predstavili časti DSGE modelu postavené na koncepte malej otvorenej ekonomiky. Model je postavený na silných mikroekonomických východiskách. V modeli vystupovali reprezentatívny agenti, ktorí optimalizovali svoje správanie vzhľadom na ohraničenia. Vo výsledkoch boli prezentované najlepšie dosiahnuté výsledky. Funkcie reakcií na šoky poskytujú prijateľné vysvetlenie dynamického nastavenia slovenskej ekonomiky. Slovenská ekonomika je ovplyvňovaná veľkou ekonomikou.

POUŽITÁ LITERATÚRA

1. LIU P. 2005. A Small New Keynesian Model Of the New Zealand Economy. Reserve Bank of New Zealand and Research School of Pacific and Asian Studies – The Australian National University. P. Liu personal Web Site. [online]. 2005. Dostupné na internete: <www.rspas.anu.edu.au/~liuphi/files/rednek/rednek.pdf>
2. LIU P. 2006. A Small New Keynesian Model of the New Zealand Economy. Reserve Bank of New Zealand. Discuss Paper. P.Liu personal Web Site. [online]. 2006. Dostupné na internete: www.rbnz.govt.nz/research/discusspapers/dp06_03.pdf 467-482.
3. VAŠÍČEK, O. – MUSIL, K. 2005. The Czech Economy with Inflation Targeting Represented by DSGE Model: Analysis of Behaviour. Brno. CVKSČE MU. ISBN 1801–4496.

Kontaktné údaje

Ing. Martin Benkovič

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: benkovic.m@gmail.com

Ing. Patrik Kupkovič

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: patrik.kupkovic@gmail.com

ALTERNATIVNÍ SPECIFIKACE VE VEKTOROVÝCH AUTOREGRESÍCH

ALTERNATIVE SPECIFICATIONS IN VECTOR AUTOREGRESSIONS

Sára Bíza Bisová

Abstrakt

Často se setkáváme se situacemi, kdy v rámci zvoleného časového vzorku nevykazují vztahy mezi analyzovanými ukazateli shodné tendence a intenzity - může to být zapříčiněno změnou měnové politiky, změnami národního i celosvětového charakteru, kdy se mění intenzita vztahů či dokonce jejich znaménka. Studie je zaměřena na konkrétní přístup specifikace nelineárních vztahů ve VAR modelech. Jsou konstruovány dva modely – model s běžnou specifikací, předpokládající konzistenci vztahů a procesů v rámci vzorku, a model rozšířený, zahrnující dodatečné regresory pro odlišení vlivu v období prvních vln světové finanční krize. Pro zmíněné modely jsou konstruovány a porovnávány funkce odezvy. Nezaznamenali jsme výrazné rozdíly ve funkcích odezvy. Rozšířený model nevykazuje cenový puzzle efekt, intervaly spolehlivosti jsou ovšem poměrně široké a nemůžeme tudíž tyto rozdíly interpretovat s jistotou.

***Klíčová slova:** inflace, specifikace, VAR model, funkce odezvy.*

Abstract

We often face situations when relations between analyzed macroeconomic indicators do not show the same tendency and intensity in the whole selected sample period – it may be due to monetary policy regime switching, changes in national or global level, when intensity or even signs of the relations can change. The study focuses on a particular specification approach dealing with the problem of non-constant and non-linear relations in the VAR models. We specify two models – a model with standard specification assuming the consistency of relations in the sample period and an extended model including additional regressors to distinguish the impact of the first wave of the global financial crisis. For the mentioned models impulse response functions were constructed and compared. We find only slight differences between the outputs. The extended model does not show price puzzle effect, but, wide confidence intervals bring some uncertainty to our interpretations.

***Keywords:** inflation, specification, VAR model, impulse response functions.*

1 ÚVOD

Modelování transmisního mechanismu měnové politiky je tématem řady studií, aktuálnost tohoto tématu přetrvává již několik desítek let. Mezi aplikované ekonometrické koncepce jsou přitom velmi často zahrnovány modely VAR. Častým problémem těchto analýz bývá nesourodost časového vzorku, pro které jsou modely konstruovány a na kterých jsou následně odhadovány. Tato práce se věnuje konstrukci specifikace snažící se obsáhnout určitou část odlišností v procesu transmise v průběhu použitého časového vzorku z dat české ekonomiky, kterým je období 1998 – 2012.

2 MODEL Y VEKTOROVÉ AUTOREGRESE

Modely VAR jsou běžně užívanou ekonometrickou technikou pro účely makroekonometrických analýz, prognóz a zejména konstrukce funkcí odezvy. Tento přístup předpokládá existenci zpoždění ve vztazích mezi proměnnými, čehož je využíváno například pro modelování měnového transmisního mechanismu měnových politik, kde se předpokládá existence zpoždění mezi akcí na straně jedné veličiny a reakcí na straně veličin jiných, jako je efekt změn úrokových sazeb na inflaci. Pro účely odhadů budeme konstruovat modely VAR v redukované formě, která nezahrnuje vztahy mezi endogenními proměnnými.

Základy aplikace VAR modelů v oblasti analýzy monetární politiky, a na makroekonomické úrovni obecně, položil Sims (1980). Později se metodologii VAR modelů v rámci analýz měnových politik a jejich transmisních mechanismů věnovala řada autorů, jako Leeper a kol. (1996), ad. Dnes je technika VAR modelů v makroekonomických analýzách poměrně frekventovaně užívaná, v Evropě pak zejména ke komparaci průběhu transmisních mechanismů mezi jednotlivými zeměmi, především v souvislosti s EU a EMU. Studie se přitom odlišují zejména ve třech parametrech: v zahrnutých proměnných, v množinách analyzovaných ekonomik a dále v identifikacích v SVAR modelech¹.

Obecně lze m -rozměrný VAR(p) model zapsat ve formě (např. Hušek, 2009)

$$\mathbf{z}_t = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{z}_{t-i} + \mathbf{v}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

kde:

\mathbf{z}_t - $m \times 1$ rozměrný vektor napozorovaných hodnot endogenních proměnných,

$\boldsymbol{\omega}$ - $m \times 1$ rozměrný vektor obsahující úrovněvé konstanty redukovaného VAR modelu,

\mathbf{A}_i - $m \times m$ matice redukovaných parametrů,

\mathbf{v}_t - $m \times 1$ rozměrný vektor náhodných složek redukovaného VAR modelu,

m - počet endogenních proměnných VAR modelu (tj. počet rovnic modelu),

p - maximální délka zpoždění.

Každá z rovnic modelu (1) obsahuje stejnou množinu vysvětlujících proměnných, které mají exogenní charakter (jedná se o zpožděné endogenní proměnné, různé umělé proměnné apod.

Funkce odezvy měří efekt jednotkového exogenního šoku na běžnou i budoucí hodnoty jednotlivých endogenních proměnných (tj. v jednotlivých rovnicích) VAR modelu. Odvození a interpretaci funkcí odezvy je možné nalézt např. v Arlt, Arltová (2009), Lütkepohl (2005) ad. Analýza funkcí odezvy je běžně užívána k analýze a anticipaci dopadů hospodářských politik.

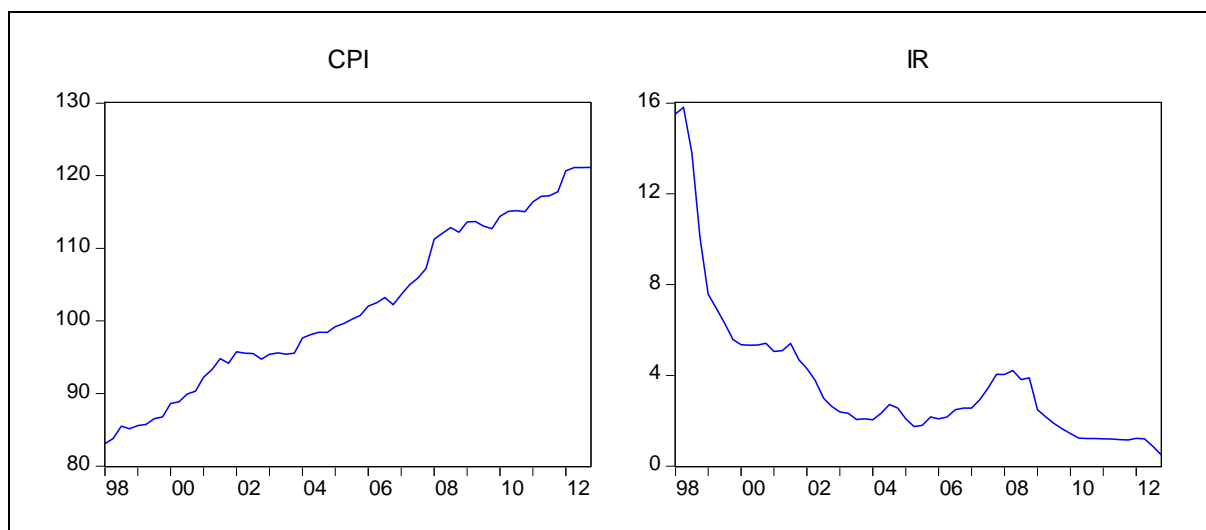
¹ Jak uvádí Mojon, Peersman (2001).

3 EMPIRICKÁ ANALÝZA NA ZÁKLADĚ VAR MODELŮ

3.1 Data

K odhadům byla zvolena čtvrtletní data české ekonomiky za období 1998:1 -2012:4. Index spotřebitelských cen (*CPI*) byl získán z databáze Českého statistického úřadu² ve formě bazických indexů sází roku 2005. Zdrojem dat úrokové sazby – 3M PRIBOR (*IR*) - je Česká národní banka³. Grafy uvedených časových řad jsou uvedeny v obrázku 1.

Obrázek 1 - Grafy časových řad - CPI a IR



Index spotřebitelských cen byl očištěn od sezónnosti metodou X12 ARIMA. Obě časové řady byly vyhodnoceny jako nestacionární na 5% hladině významnosti a proto byly provedeny patřičné transformace dat – proměnná *CPI* byla převedena na první diference logaritmu a *IR* na první diference. Takto upravená data již byla testy jednotkových kořenů vyhodnocena jako stacionární. ADF testy pro úroňové hodnoty a pro transformovaná data jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 - ADF testy jednotkových kořenů

LEVEL	t-statistic	Prob.*	D-LOG	t-statistic	Prob.*
<i>CPI</i>	-0.485191	0.8864	<i>CPI</i>	-4.590175	0.0004
<i>IR</i>	-2.154578	0.2248	<i>IR</i>	-4.068376	0.0022

3.2 Volba maximální délky zpoždění

Optimální délka zpoždění byla zvolena dle hodnot informačních kritérií zobecněných pro vícerozměrné systémy a dalších charakteristik. Pro rozšířený model (viz podkapitola 3.3) poukazují výstupy na zahrnutí 4 zpoždění - dle Akaikeho a Hannan-Quinnova kritéria (tabulka 2). Pro základní model kritéria poukazují dokonce na 5 zpoždění, za účely srovnání však používáme také VAR(4) model. Funkce odezvy pro VAR(5) model nevykazují signifikantní rozdíly.

² www.czso.cz

³ www.cnb.cz

Tabulka 2 - Kritéria volby maximální délky zpoždění ve VAR modelu (rozšířený model)

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	186.4053	-	8.42e-06	-6.014475	-5.363469	-5.762082
1	222.3120	57.70723	2.71e-06	-7.154001	-6.358327*	-6.845520
2	224.3623	3.148707	2.92e-06	-7.084369	-6.144028	-6.719801
3	231.7874	10.87238	2.61e-06	-7.206692	-6.121682	-6.786036
4	241.4505	13.45935*	2.16e-06*	-7.408947*	-6.179269	-6.932203*
5	242.9040	1.920741	2.41e-06	-7.318001	-5.943656	-6.785171
6	244.4948	1.988510	2.68e-06	-7.231959	-5.712945	-6.643040

Odhad modelů lze získat přímou aplikací MNČ na jednotlivé rovnice modelu, o vlastnostech odhadové funkce MNČ např. Hušek (2007).

3.3 Alternativní specifikace

Pro srovnání budeme konstruovat dva dvourozměrné VAR modely se stejnými endogenními proměnnými – *CPI* a *IR*. Základní model v běžné specifikaci, tj. model s úrovnovými konstantami a zpožděnými endogenními proměnnými dle doporučené délky zpoždění. Rozšířený model zahrnující doplňkovou složku pro výkyvy v období prvních vln světové finanční krize I/2008 – IV/2009.

Základní model má následující formu

$$\begin{aligned} CPI_t &= c_1 + \sum_{i=1}^4 CPI_{t-i} + \sum_{i=1}^4 IR_{t-i} + v_{1t} \\ IR_t &= c_2 + \sum_{i=1}^4 CPI_{t-i} + \sum_{i=1}^4 IR_{t-i} + v_{2t} \end{aligned} \quad (2)$$

Rozšířený model pak pro roky 2008 a 2009 přijímá mezi regresory také druhé mocniny jednotlivých endogenních proměnných v patřičném zpoždění

$$\begin{aligned} CPI_t &= d_1 + \sum_{i=1}^4 CPI_{t-i} + \sum_{i=1}^4 IR_{t-i} + \sum_{i=1}^4 I_{t-i} CPI_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^4 I_{t-i} IR_{t-i}^2 + w_{1t} \\ IR_t &= d_2 + \sum_{i=1}^4 CPI_{t-i} + \sum_{i=1}^4 IR_{t-i} + \sum_{i=1}^4 I_{t-i} CPI_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^4 I_{t-i} IR_{t-i}^2 + w_{2t} \end{aligned} \quad (3)$$

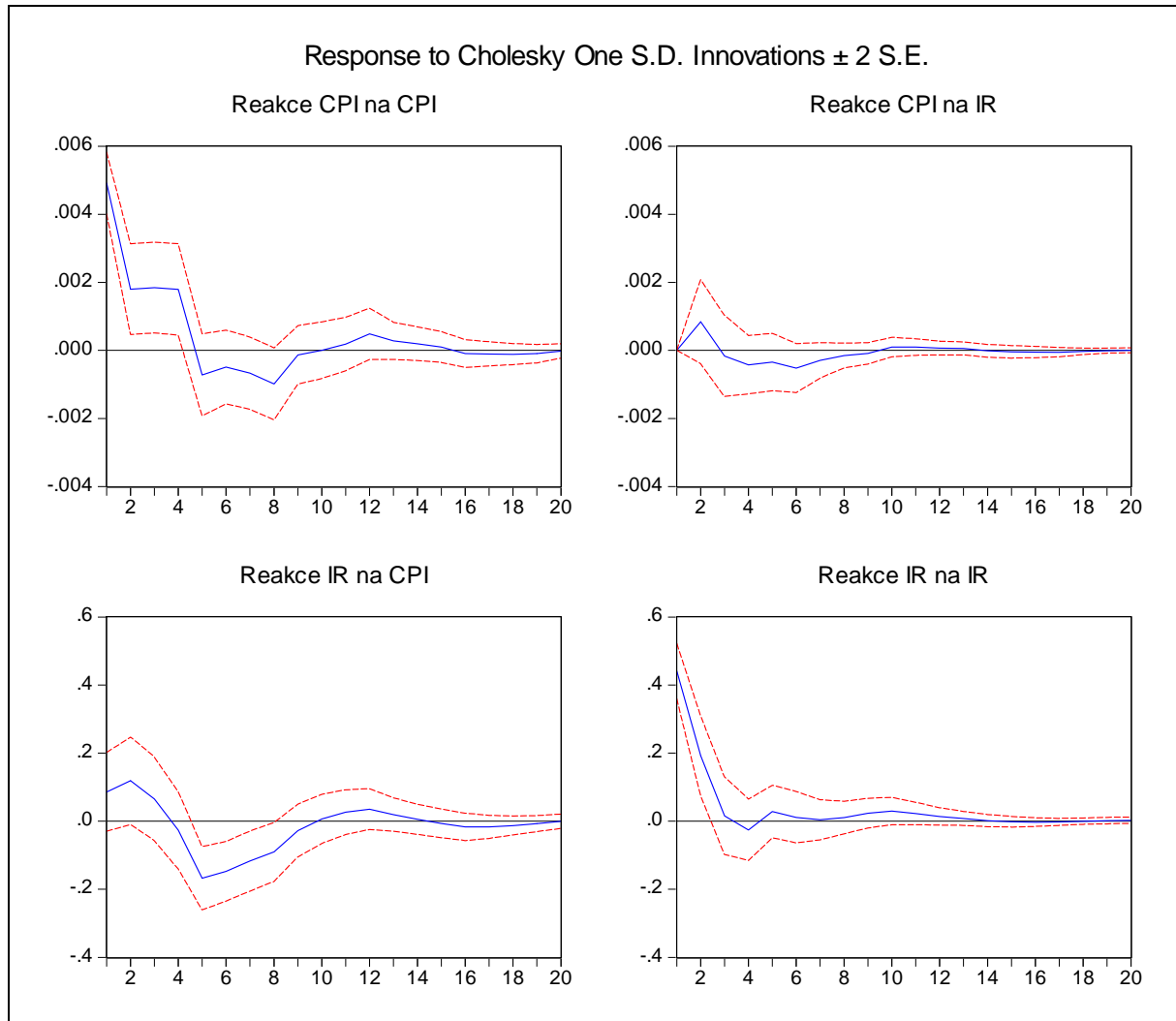
kde umělá binární proměnná *I* je indikátor zmíněného období, tj. obsahuje hodnoty 1 v období I/2008 – IV/2009.

3.4 Analýza funkcí odezvy

Výstupy funkcí odezvy jsou obsaženy na obrázcích 2 (základní model) a 3 (rozšířený model). Funkce odezvy se příliš neodlišují, můžeme si však všimnout určitého rozdílu v odezvě cenové hladiny na jednotkový exogenní šok v úrokové sazbě - v rozšířeném modelu, oproti modelu základnímu, neshledáváme cenový puzzle efekt v prvních dvou obdobích od impulsu. Odezva je ovšem velmi slabá a intervaly spolehlivosti poměrně široké, takže tento rozdíl je třeba interpretovat s určitou rezervou. Reakce úrokové sazby na jednotkový exogenní šok v inflaci mění v průběhu horizontu znaménka a není tudíž možné se k její interpretaci

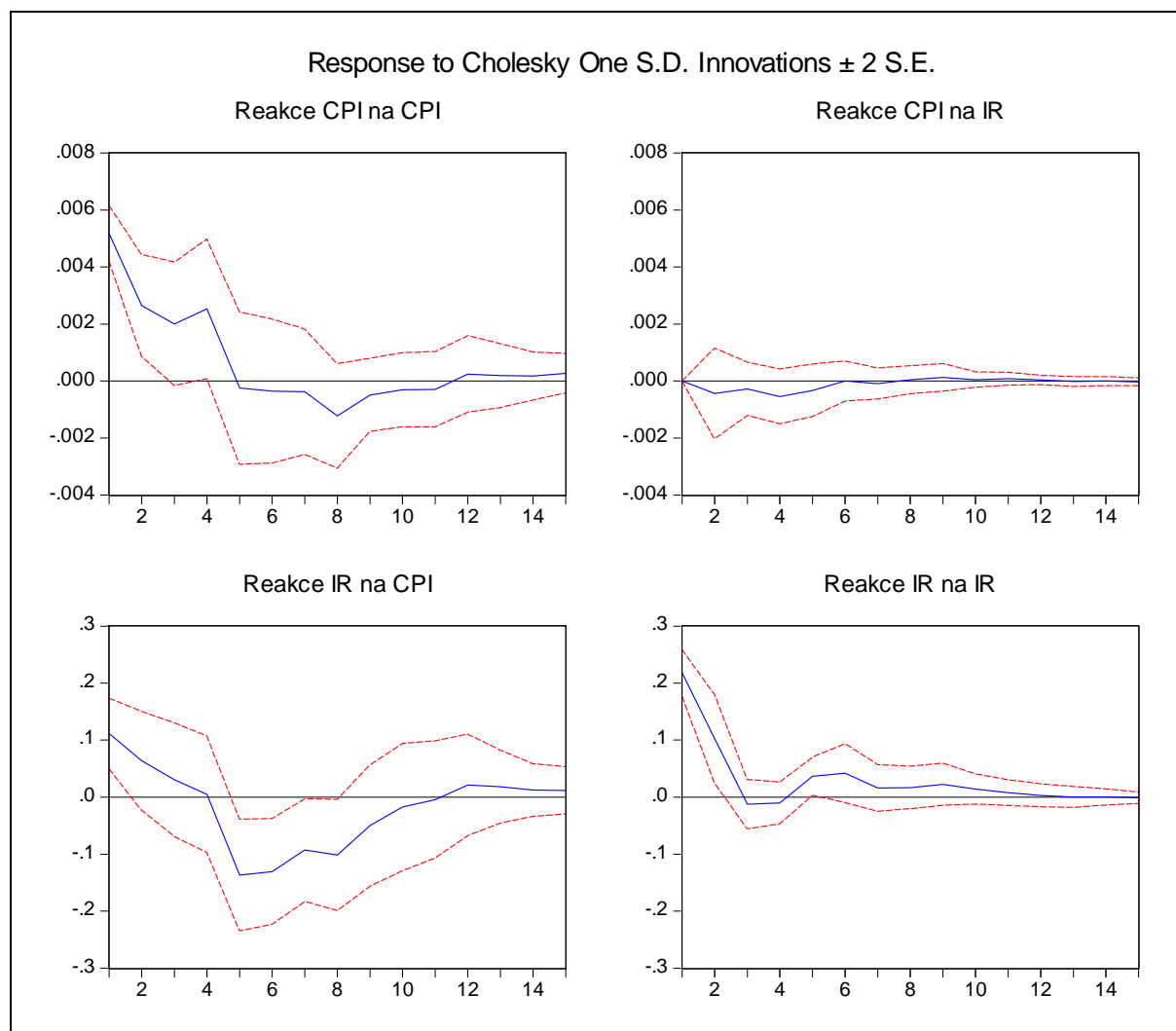
jednoznačně vyjádřit. V rozšířeném modelu jsou dále intervaly spolehlivosti pro odezvy na jednotkový exogenní šok v *CPI* širší než v modelu základním.⁴

Obrázek 2 - Výstupy funkcí odezvy – základní model



⁴ Podotkněme, že jsme odhadovali model o 4 zpožděních, řada regresorů je tudíž statisticky nevýznamná.

Obrázek 3 - Výstupy funkcí odezvy – rozšířený model



4 ZÁVĚR

Sestavili jsme alternativní specifikaci, kde jsme se pokusili vystihnout nekonzistenci v intenzitách vztahů mezi veličinami v rámci časového vzorku. Odhadli jsme základní model s běžnou specifikací a rozšířený model předpokládající odlišný efekt veličin v období prvních vln světové finanční krize. Výsledky poukazují na významnost rozšíření v některých obdobích. V rámci funkcí odezvy pak rozdíly nejsou příliš velké, rozšířený model však neobsahuje cenový puzzle efekt v reakci inflace na jednotkový exogenní šok v úrokové sazbě.

Základní nevýhodou uvedené specifikace je razantní nárůst regresorů, a tudíž pokles stupňů volnosti. Při aplikaci na česká makroekonomická data je přitom tento fakt značně omezující a není tak možné aplikovat jej na modely o větším počtu endogenních proměnných se zahrnutím vyšší maximální délky zpoždění, obojí je ovšem pro makroekonomickou analýzu podstatné. Zahrnutí nižších řádů zpoždění ve vektorových autoregresích má často za následek existenci puzzle efektů, neboť reakce probíhající právě přes zpoždění se nemohou do funkcí odezvy promítnout.

Použitá literatura

1. ARLT, J. – ARLTOVÁ, M. 2009. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing, 2009. ISBN 978-80-86946-85-6.
2. HUŠEK, R. 2007. *Ekonometrická analýza*. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1300-3.
3. HUŠEK, R. 2009. *Aplikovaná ekonometrie: teorie a praxe*. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1623-3.
4. LEEPER, E. M., SIMS, Ch. A., ZHA, T. 1996. What does monetary policy do? *Brookings Papers on Economic Activity*. 1996, Vol. 2, pp. 1-63.
5. LÜTKEPOHL, H. 2005. *New introduction to multiple time series analysis*. Berlin: Springer, 2005. ISBN 3-540-40172-5.
6. MOJON, B., PEERSMAN, G., 2001. A VAR description of the effects of monetary policy in the individual countries of the EURO area. *ECB Working Paper*. December 2001, No. 92.
7. SIMS, CH. 1980. Macroeconomics and Reality. *Econometrica*. 1980, Vol. 48, No. 1, pp. 1-48.

Kontaktní údaje

Ing. Sára Bíza Bisová

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 403

email: sara.bisova@gmail.com

Článek vznikl s podporou projektu VŠE IGS F4/19/2013, Fakulta informatiky a statistiky, VŠE v Praze.

This paper was supported by Grant No. VŠE IGS F4/19/2013, Faculty of Informatics and Statistics, University of Economics Prague.

SELECTED PIECES OF KNOWLEDGE OF THE FUZZY SET THEORY AND THEIR APPLICATION

Adam Borovička

Abstract

The article deals with the basic notions and instruments of the fuzzy set theory. The fuzzy set, membership function, (triangular) fuzzy number, or intersection and union of fuzzy sets are formulated. The fuzzy programming model is specified and its solution principle is described. In the end, the basic concepts of the fuzzy set theory are applied to the real simplified decision making problem in the field of the capital market where some investor wants to create the portfolio of the open shares funds.

Keywords: fuzzy number, fuzzy set, membership function

1 INTRODUCTION

In many decision making situations, we can meet several elements of uncertainty. For instance in the capital market, vague investor preferences or uncertain, stochastic character of the input data should be taken into account in order to make the decision making process more real. One way, how to do it, is the fuzzy set theory application.

So the main aim of the article is to introduce the substantial concepts of the fuzzy set theory and show their application. The basic notions are described, the fuzzy programming model and its solution principle is introduced. For illustration, the described instruments and principles of the fuzzy set theory are used to solve the real simplified multicriteria investment decision making situation. The potential investor wants to make the portfolio of the open shares funds on the basis of the several choice criteria.

2 FUZZY SET THEORY

We are not always able to express everything exactly. Many manners are only vague, uncertain. In order to model these situations more precisely, the modified set theory was developed. This concept is known as the fuzzy set theory labouring by L. A. Zadeh (Zadeh, 1965).

2.1 Basic notions

Let us briefly explain the basic principle of the concept mentioned above. Similar to (Dubois et al., 1980), we denote a classical set of the object X called *universe*, whose generic elements are marked x . The membership in a classical subset A of X can be viewed as a membership (or characteristic) function from X to $\{0,1\}$ such that

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

$\{0,1\}$ is called a *valuation set* which can also be stated as the real interval $[0,1]$. Then A is called a *fuzzy set* (Zadeh, 1965). $\mu_A(x)$ characterizes the grade of membership of x in A . The closer the value of $\mu_A(x)$ is to 1, the more x belongs to A . The fuzzy set A may be written by the set of pairs as follows

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}.$$

We can say that A is a subset of X that has no sharp boundary.

Now let us introduce two basic operations with fuzzy sets - *intersection* and *union* - by (Pedrycz et al., 2010). Given two fuzzy sets A, B and their membership functions μ_A, μ_B . The membership function of their intersection $A \cap B$ is computed in the form

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad x \in X.$$

The membership function of the union $A \cup B$ is determined as follows

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad x \in X.$$

2.2 (Triangular) fuzzy number

According to (Dubois et al., 1980), a fuzzy number is a convex fuzzy set of the real line R such that

- a) $\exists! x_0 \in R, \mu_A(x_0) = 1$ (is called the mean value of A),
- b) $\mu_A(x)$ is piecewise continuous.

A fuzzy number intuitively represents a value which is inaccurate. This value can be characterized as “about x_0 ”. It belongs to a very frequent phenomenon in practice.

As (Novák, 2000) alludes, the most used type of fuzzy number is the *triangular fuzzy number*. Its membership function has the shape of a triangle as we can see in the following graph (Figure 1).

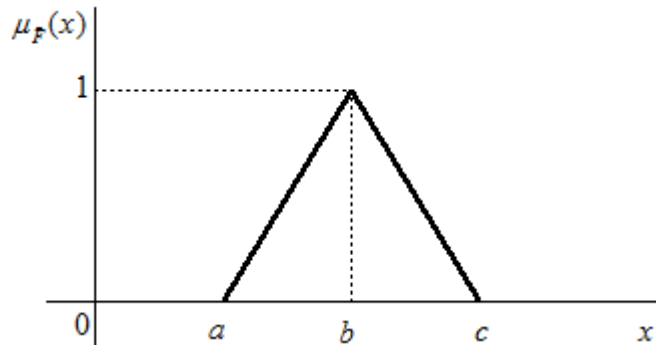


Figure 1: Membership function of a triangular fuzzy number

The membership function of the triangular fuzzy number \tilde{F} is formalized as

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \wedge x > c \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 1 & x = b \end{cases},$$

where a, b, c are parameters illustrated in the figure above. Concretely, a can be interpreted as the lower bound, b the peak point and c the upper bound of the fuzzy number. Mostly, the position of parameters a, c is symmetric around the value of b . It means that the membership function usually creates an isosceles triangle. Of course, the different cases of the dissimilar sides of the triangle can be defined.

The triangular fuzzy number can be formally written as follows

$$\tilde{F} = (a, b, c).$$

Sometimes, it is necessary to keep at disposal “only” left or right triangular fuzzy number. As in (Gupta, 2010), the membership function of the left triangular fuzzy number \tilde{F}_l may be written as follows

$$\mu_{\tilde{F}_l}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases},$$

and for right triangular fuzzy number \tilde{F}_r ,

$$\mu_{\tilde{F}_r}(x) = \begin{cases} 0 & x > c \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 1 & x \leq b \end{cases}.$$

The left triangular fuzzy number \tilde{F}_l can be depicted as (Figure 2).

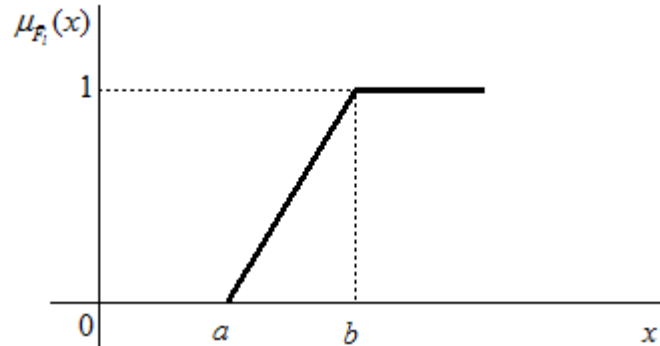


Figure 2: Left triangular fuzzy number

The right triangular fuzzy number \tilde{F}_r can be also illustrated as follows (Figure 3).

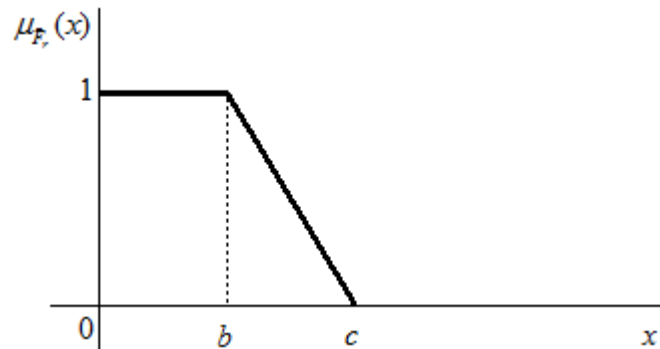


Figure 3: Right triangular fuzzy number

One important question must be answered. Why has just the triangular fuzzy number used? It is one of the most favourite types of fuzzy numbers. Its membership function is piecewise continuous linear, so the computational operations with them are known and more simple. They are able to express or approximate the decision maker’s vague, linguistic preferences.

2.3 Bellman’s approach for a fuzzy problem solution

Bellman’s approach is applied to the situation of the fuzzy multiple objective programming problem (Bellman et al., 1970).

We can consider the objective functions as the fuzzy goals. Further in the model, there are fuzzy and strict constraints. Let us denote them. We have k fuzzy goals G_j ($j=1,2,\dots,k$), m fuzzy constraints C_i ($i=1,2,\dots,m$). The strict conditions align the set of the solution feasibility X

$$X = \{\mathbf{x} \in R^n, p_i(\mathbf{x}) R_i q_i, i = 1, 2, \dots, m\},$$

where $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ is the vector of unknown variables, $p_i(\mathbf{x})$ is the left side, R_i is the relation mark and b_i is the right side of the i -th condition. Fuzzy goals and conditions are actually the same, they have an analogical function. Each fuzzy goal has the membership function $\mu_{G_j}(\mathbf{x})$, each fuzzy condition has the membership function $\mu_{C_i}(\mathbf{x})$.

The fuzzy solution is the fuzzy set which is created as an intersection of fuzzy goals and constraints. Regarding the solution feasibility set, the fuzzy decision is formulated as the following fuzzy set A

$$A = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m \cap X.$$

Then this fuzzy set will have the membership function $\mu_A(\mathbf{x})$ as follows

$$\begin{aligned} \mu_A(\mathbf{x}) &= \mu_{G_1}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{G_2}(\mathbf{x}) \wedge \dots \wedge \mu_{G_k}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{C_1}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{C_2}(\mathbf{x}) \wedge \dots \wedge \mu_{C_m}(\mathbf{x}) = \\ &= \min_{i,j} \{ \mu_{G_j}(\mathbf{x}), \mu_{C_i}(\mathbf{x}) \} \end{aligned}$$

As an illustration, the fuzzy decision for a simplified situation of one fuzzy goal and one fuzzy condition is displayed in the following picture (Figure 4).

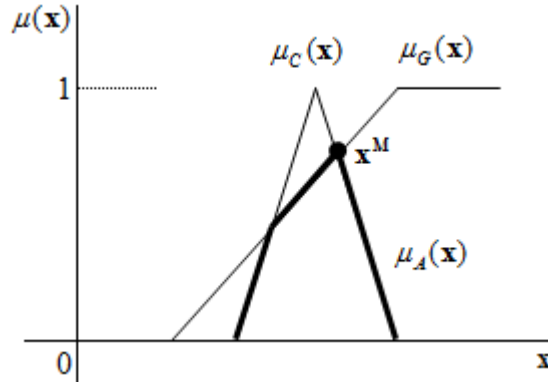


Figure 4 Genesis of the fuzzy solution

A maximizing solution can be as follows

$$\mu_A(\mathbf{x}^M) = \begin{cases} \max \mu_A(\mathbf{x}) & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}$$

If the function $\mu_A(\mathbf{x})$ has one unique maximum \mathbf{x}^M , then this solution can be classified as strictly representing all goals and limits with the highest grade of membership as possible. It is obvious, that the final result is calculated on the basis of the *maximin* operator.

To find the maximum of the membership function $\mu_A(\mathbf{x})$ in terms of the problem with fuzzy goals and conditions, the supporting model is formulated as (Zimmermann, 1978)

$$\begin{aligned}
&\lambda \rightarrow \max \\
&\mu_{G_j}(\mathbf{x}) \geq \lambda \quad j = 1, 2, \dots, k \\
&\mu_{C_i}(\mathbf{x}) \geq \lambda \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
&\mathbf{x} \in X \\
&\lambda \in \langle 0, 1 \rangle
\end{aligned}$$

where $\mu_A(\mathbf{x}) = \min_{i,j} \{ \mu_{G_j}(\mathbf{x}), \mu_{C_i}(\mathbf{x}) \}$.

This approach will be applied to the practical application in the decision making process with the open shares funds.

3 FUZZY PORTFOLIO OPTIMIZATION

And now we apply the introduced pieces of knowledge about the fuzzy set theory to particular investment decision making situation in terms of the capital market with the open shares funds.

As a long-term client of Česká spořitelna, I choose the open shares funds managed and offered by Česká spořitelna investment company. So we have three main groups of the open shares funds – *mixed*, *bond* and *stock*. One fund from each group is chosen (see Table 1) on the bases of the decision making procedure which is not included in this article¹.

Table 1: Selected shares funds from each group

Fund type	Selected fund
<i>Mixed fund</i>	Fond řízených výnosů
<i>Bond fund</i>	Sporinvest
<i>Stock fund</i>	Global Stocks

And now the final investment portfolio must be created. Firstly, three essential criteria are set.

The efficiency (return) of shares fund is created by earnings from interest-bearing securities and capital profit (loss). Both items are capitalized in fund price. Then a shares fund return is comprehended as a difference in purchase and particular selling price. For the multiple criteria objective programming method, the objective function of portfolio return can be described as the weighted sum of return of selected open shares funds

$$f_1(\mathbf{x}) = v_p = \sum_{i=1}^n v_i x_i,$$

where v_i ($i=1,2,\dots,n$) is the return rate of the i -th shares fund, x_i ($i=1,2,\dots,n$) denotes the share of the i -th shares fund in the portfolio.

The return of the shares fund is determinate as a average monthly for the time period from 2008 to 2012².

The next evaluative criterion is **risk**. It can be comprehended as investor apprehension about investment loss. In other words, a potential investor is afraid that his or her investment aims

¹ Multi-criteria evaluation method – fuzzy PROMETHEE II.

² Because of latter foundation of *Portfolio 4* and *Plus*, their returns must be estimated on the basis of an average returns development of other funds in the same group for watched time period.

will not be fulfilled and he or she will not achieve expected returns. The risk of a shares fund is stated as a variance or a standard deviation of a fund return rate. The risk of the whole investment portfolio is formulated according to (Gordon et al., 1986 or Sharpe, 1970) as a portfolio variance

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij},$$

or rather as a portfolio standard deviation

$$f_2(\mathbf{x}) = \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}},$$

where $\sigma_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ is the covariance, which expresses a linear dependency between the return rates of the i -th and j -th shares fund.

We work with variance or standard deviation on the annual basis for five-year period, return covariance as well.

The cost connected with a shares fund is represented by duties, namely the initial charge and management fee. The initial charge is subtracted from the stake, the management fee from the fund property (Ježek, 2002). The costs of the investment portfolio are calculated as by the following formula

$$f_3(\mathbf{x}) = n_p = \sum_{i=1}^n n_i x_i,$$

where $n_i(i = 1, 2, \dots, n)$ are the cost connected with the investment in the i -th shares fund and $x_i(i = 1, 2, \dots, n)$ represents the share of the i -th shares fund in portfolio.

The particular values of all criteria for three selected open shares funds are in the following table (Table 2)

Table 2: Costs, risk and return of the selected open shares funds³

Shares fund	Cost [%]	Risk [%]	Return [%]
<i>Fond řízených výnosů</i>	2.56	3.92	1.35
<i>Sporoinvest</i>	1.07	2.42	0.68
<i>Global Stocks FF</i>	5.02	25.64	0.004

It is obvious that return is maximizing criterion, costs and risk are minimizing criteria (objective functions). In order to diversify the investment portfolio, the potential investor specifies the minimal and maximal shares. The minimum is 15 % and the maximum 50 %.

So the aim is to make the portfolio from these three chosen open shares funds with as the best values of criteria as possible under the portfolio diversification conditions.

The fuzzy model includes three fuzzy goals, no fuzzy constraints and strict portfolio diversification and non-negativity conditions. The fuzzy goals are expressed via the triangular

³ http://www.csas.cz/banka/content/inet/internet/cs/RR_SK.VIII.xml (cit. 15. 7. 2013) and self-calculation in MS Excel.

fuzzy numbers. In order to gain the extreme points of the fuzzy number for each objective function, the one objective mathematical model in a minimizing and maximizing form will be solved under the strict conditions (diversification and non-negativity constraints). Then the triangular fuzzy number for each fuzzy goal can be formulated. In the case of the maximizing criterion *return*, the appropriate left triangular fuzzy number \tilde{F}_{return} is specified and in the case of the minimizing criteria *risk* and *costs*, the right triangular fuzzy numbers \tilde{F}_{risk} , or \tilde{F}_{costs} are formulated. Then the supporting model can be specified as follows

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \max \\ \mu_{\tilde{F}_{return}}(\mathbf{x}) &\geq \lambda \\ \mu_{\tilde{F}_{risk}}(\mathbf{x}) &\geq \lambda \\ \mu_{\tilde{F}_{costs}}(\mathbf{x}) &\geq \lambda \\ \mathbf{0.15} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{0.5} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \lambda &\in \langle 0,1 \rangle \end{aligned}$$

If the problem mentioned above is solved, we gain the following results (Table 3).

Table 3: **Investment portfolio**

Shares fund	Share	Objective function	Value
<i>Fond řízených výnosů</i>	43,14 %	<i>Return</i>	0,87 %
<i>Sporoinvest</i>	41,86 %	<i>Risk</i>	8,49 %
<i>Global Stocks</i>	15 %	<i>Costs</i>	2,31 %

As we can see, the lowest share has the open stock shares fund Global Stocks, the other two funds have approximately the same share in the portfolio. It is possible to say, that the portfolio is rather risk-conservative, the fund with the highest risk shares in the portfolio in the lowest possible level.

4 CONCLUSION

The main aim of the article was to introduce the basic concepts of the fuzzy set theory and their illustrative practical application. The fuzzy set, membership function, (triangular) fuzzy number, or intersection and union of the fuzzy sets are defined. The fuzzy programming model is formulated and its solution principle is described. In the end, the real simplified investment decision making situation is solved in order to illustrate the usage of the fuzzy set theory in practice.

References

1. BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A.: Decision making in a fuzzy environment. *Management Science*. Vol. 17, No. 4, 1970, pp.141-164.
2. Česká spořitelna – the data about the open shares funds, accessible from: http://www.csas.cz/banka/content/inet/internet/cs/RR_SK.VIII.xml, [cit. 15. 7. 2013].
3. DUBOIS, D.; PRADE, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, Inc. 1980. ISBN 0-12-222750-6.

4. GORDON, A. J.; FRANCIS, J. C.: *Portfolio Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, Inc. 1986. ISBN 0-13-686825-8.
5. GUPTA, M.; BHATTACHARJEE, D.: Multi Objective Problem in Fuzzy Environment where Resources are Triangular Fuzzy Number. *European Journal of Scientific Research*. 2010, Vol. 46, No. 1, pp. 99-106.
6. JEŽEK, T.: *Peníze a trh*. Praha: Portál. 2002. ISBN 80-7178-685-3.
7. NOVÁK, V.: *Základy fuzzy modelování*. Praha: BEN – technická literatura. 2000. ISBN 80-7300-009-1.
8. PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R.: *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications*. New Jersey: Wiley. 2010. ISBN 978-0-470-68225-8.
9. SHARPE, W. F.: *Portfolio Theory and Capital Markets*. USA: McGraw-Hill, Inc. 1970. ISBN 978-0070564879
10. ZADEH, L. A.: Fuzzy Sets. *Inf. & Control*. 1965, Vol. 3, No. 8, pp. 338-353.
11. ZIMMERMANN, H. J.: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978, Vol. 1, No. 1, pp. 45-55.

Contact

University of Economics in Prague, Faculty of Informatics and Statistics, Department of Econometrics

W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague 3, Czech Republic

E-mail: adam.borovicka@vse.cz

Telephone number: +420 224 09 5445

The research project was supported by Grant No. IGA F4/19/2013 of the Internal Grant Agency, Faculty of Informatics and Statistics, University of Economics, Prague and Grant No. 13-07350S of the Grant Agency of the Czech Republic.

RELATÍVNA EFEKTÍVNOSŤ VLÁDNYCH VÝDAVKOV KRAJÍN EURÓPSKEJ ÚNIE

RELATIVE EFFICIENCY OF GOVERNMENT SPENDING OF EUROPEAN UNION COUNTRIES

Ivan Brezina¹, Peter Horvát²

Abstrakt

Vládne výdavky predstavujú kľúčový nástroj vlády, ktorým dokáže ovplyvniť ekonomický vývoj krajiny. Hľadanie optimálnej úrovne vládných výdavkov je hlavne politický proces, ktorý má však následky v reálnej ekonomike. Pomocou DEA metód je v príspevku analyzovaný vplyv vládných výdavkov na HDP v krajinách Európskej únie a zostavené poradie na základe indexu relatívnej efektivity.

Kľúčové slová: DEA analýza, vládne výdavky, krajiny Európskej únie

Abstract

Government spending is a key government instrument to affect the economic development of the country. Setting the optimal level of government spending is mainly a political process. But it has consequences in the real economy. In this paper is analyzed the impact of government spending on the GDP in the European Union countries using DEA methods. Final ranking of countries is based on the index of relative efficiency.

Keywords: DEA analysis, government spending, European Union countries

1 ÚVOD

Fiskálna politika vlády je jedným z kľúčových nástrojov na ovplyvnenie vývoja ekonomiky. Vládne výdavky sú dôležité nielen kvôli výstavbe a zveľačovaniu verejných statkov a služieb a podpore znevýhodnených účastníkov na trhu práce, formou sociálnych dávok, ale aj v čase recesie na naštartovanie ekonomického rastu. Nielen vo vyspelých krajinách je v poslednej dekáde možné pozorovať dlhodobý previs vládných výdavkov nad príjmami, čo vedie k stále rastúcemu zadĺženiu krajín. V tomto príspevku bude našim cieľom vyhodnotiť relatívnu efektivitu vládných výdavkov, a to hlavne ich vplyv na rast HDP v jednotlivých krajinách Európskej únie pomocou metód DEA.

2 MOTIVÁCIA

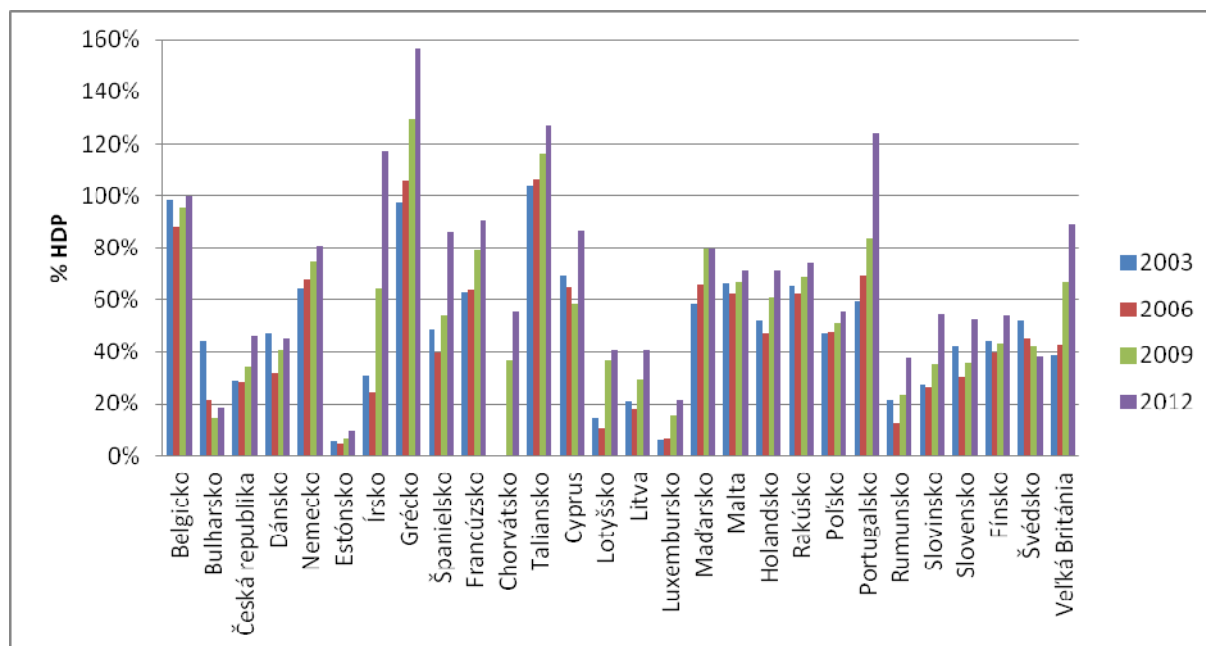
V krajinách Európskej únie je možné pozorovať rast pomeru úrovne zadĺženia k HDP za posledné roky. Jednou z príčin, hlavne v krajinách PIIGS (Portugalsko, Írsko, Taliansko, Grécko a Španielsko), je aj podpora domáceho bankového sektora v čase hypotekárnej krízy. Graf 1 ukazuje vývoj pomeru zadĺženia vlády k HDP v jednotlivých krajinách za roky 2003, 2006, 2009 a 2012. Vo väčšine krajín je možné pozorovať nárast dlhu za zvolené obdobie. Samotná úroveň dlhu nie je problémom, aj keď väčšina krajín porušuje Maastrichtské kritériá, ale so zvyšujúcou sa úrovňou dlhu rastie nedôvera investorov, že daná

¹Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu IGMP číslo I-13-109-00

²Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu VEGA číslo 1/0595/11

krajina bude schopná splatiť svoje záväzky, a preto si k novému dlhu pýtajú rizikovú prémii. A tu nastáva problém, pretože značná časť prostriedkov, ktoré by mohli byť použité napríklad na budovanie infraštruktúry je spotrebovaná na platbu úrokov.

Graf 1: Vývoj pomeru vládneho dlhu k HDP v krajinách EÚ



Zdroj: Eurostat

3 METODOLÓGIA A DÁTA

3.1 Dáta

Na analýzu boli použité ročné časové rady vládnych výdavkov a HDP na obyvateľa za roky 1998 až 2012. Vypočítali sme prvé diferencie a z týchto dát boli vypočítané priemerné multiplikátory vládnych výdavkov ako podiel prvej diferencie vládnych výdavkov a prvej diferencie HDP za predpokladu „ceteris paribus“. Tabuľka 1 zobrazuje vypočítané priemerné hodnoty multiplikátora vládnych výdavkov pre jednotlivé krajiny za roky 1999 až 2012.

Tabuľka 1: Hodnoty multiplikátora vládnych výdavkov

Krajina	Multiplikátor	Krajina	Multiplikátor	Krajina	Multiplikátor
Belgicko	3.81	Chorvátsko	4.94	Rakúsko	5.44
Bulharsko	4.33	Taliansko	0.78	Poľsko	4.85
Česká republika	5.15	Cyprus	0.62	Portugalsko	2.38
Dánsko	2.56	Lotyšsko	5.63	Rumunsko	4.74
Nemecko	6.12	Litva	7.68	Slovinsko	4.75
Estónsko	6.10	Luxembursko	6.24	Slovensko	6.48
Írsko	2.40	Maďarsko	4.79	Fínsko	2.91
Grécko	5.05	Malta	4.66	Švédsko	5.38
Španielsko	2.81	Holandsko	1.86	Veľká Británia	4.99
Francúzsko	3.87				

Zdroj: Vlastné výpočty

3.2 Metodológia

Na porovnanie relatívnej efektívnosti krajín bola použitá metóda DEA, konkrétne model BCC. Pri výbere modelu a vstupných parametrov sme sa inšpirovali prácou Wang a Alvi [3]. Medzi vstupné parametre boli zaradené prvé diferencie vládnych výdavkov v konkrétnom roku a priemerný multiplikátor vládnych výdavkov. Výstupné parametre tvoria prvé diferencie HDP v konkrétnom roku a v rokoch t+1 až t+3, pretože našim cieľom bolo zachytiť aj dlhodobý efekt vládnych výdavkov.

4 VÝSLEDKY

Pre každý rok sme vypočítali pomocou DEA analýzy skóre relatívnej efektívnosti pre jednotlivé krajiny. Počet pozorovaní poklesol v dôsledku použitej metodiky a výstupných premenných na 11. V tabuľke 2 sú zobrazené agregované výsledky jednotlivých analýz. V prvom stĺpci je priemerná hodnota skóre danej krajiny za 11 rokov, v druhom koľkokrát bola daná krajina relatívne efektívna v skúmanom období a v poslednom výsledné poradie, ktoré je zostavené na základe priemerného skóre.

Tabuľka 2: Priemerná hodnota indexu relatívnej efektivity vládnych výdavkov, počet výskytov krajiny, kedy jej relatívna efektivita je rovná 1 v jednotlivých rokoch a konečné poradie jednotlivých krajín

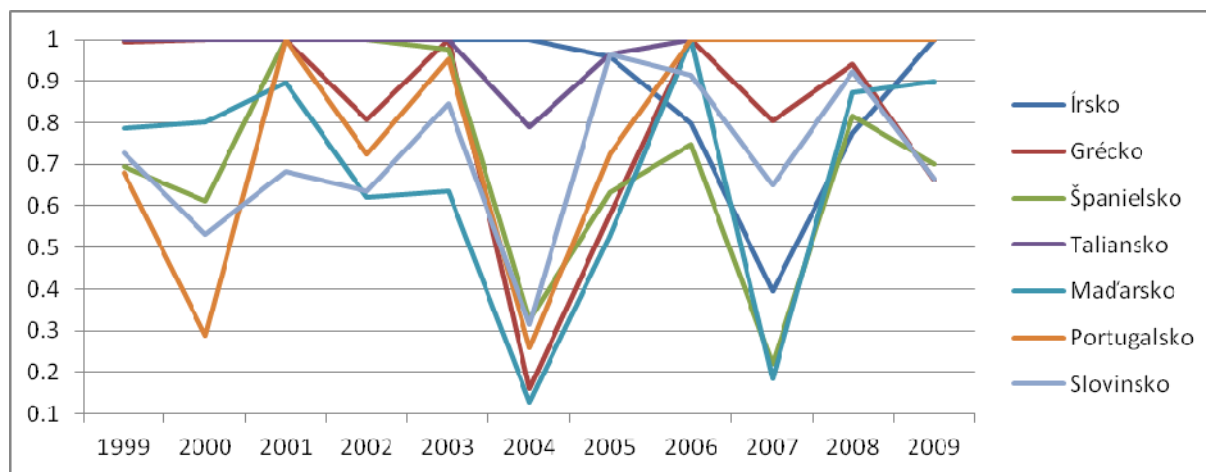
Krajina	Skóre	Efektivita	Poradie	Krajina	Skóre	Efektivita	Poradie
Belgicko	0.71	2	21	Litva	0.57	0	28
Bulharsko	0.82	6	7	Luxembursko	1.00	11	1
Česká republika	0.80	4	10	Maďarsko	0.67	1	26
Dánsko	0.85	5	6	Malta	0.76	4	16
Nemecko	0.72	3	20	Holandsko	0.82	4	8
Estónsko	0.67	1	25	Rakúsko	0.77	4	13
Írsko	0.90	7	4	Poľsko	0.73	4	19
Grécko	0.81	4	9	Portugalsko	0.78	5	11
Španielsko	0.70	2	23	Rumunsko	0.68	2	24
Francúzsko	0.62	0	27	Slovinsko	0.71	0	22
Chorvátsko	0.74	3	18	Slovensko	0.78	5	12
Taliansko	0.98	9	3	Fínsko	0.86	4	5
Cyprus	1.00	11	1	Švédsko	0.75	4	17
Lotyšsko	0.76	2	15	Veľká Británia	0.77	5	14

Zdroj: Vlastné výpočty

Z pomedzi krajín EÚ relatívne efektívne využívajú vládne výdavky Cyprus a Luxembursko, ktoré boli efektívne vo všetkých 11 pozorovaniach a teda ich súhrnný index má hodnotu 1, čo v prípade Cyprusu môže byť mierne prekvapujúce nakoľko táto krajina musela v roku 2013 požiadať o zahraničnú pomoc, aby mohla zachrániť svoj bankový sektor. Na druhej strane Cyprus má obrovský bankový sektor a osudným sa mu stala silná angažovať jeho bánk v Gréckom dlhu. Podobný prípad ako Cyprus je Írsko, ktoré je vysoko v poradí jednotlivých krajín (na 4. mieste) a takisto muselo požiadať o zahraničnú pomoc kvôli bankovému sektoru, ale je zatiaľ jediná z krajín Eurozóny, ktoré požiadali o záchranný program a pravdepodobne úspešne ukončí záchranný program a nebude žiadať o dodatočné pôžičky. Na treťom mieste sa nachádza Taliansko, ktoré síce patrí medzi možných kandidátov na zahraničnú pomoc, pretože má po Grécku druhý najvyšší pomer vládneho dlh k HDP, ale napriek tomu dokáže efektívne využívať verejné výdavky. Jedným z dôvodov vysokého hodnotenia Cyprusu

a Talianska môže byť skutočnosť, že obe krajiny majú najnižšiu hodnotu multiplikátora vládnych výdavkov a aj napriek tomu v sledovaných obdobiach dosahovali ekonomický rast. Nasledujú severské krajiny Fínsko (5) a Dánsko(6) a trochu prekvapujúco Bulharsko (7), menej prekvapujúco Holandsko (8) a Česká republika(10). Medzi najväčšie prekvapenia je možné zaradiť umiestnenie Grécka v prvej desiatke krajín (9). Aby sme mohli analyzovať relatívne dobré postavenie niektorých krajín, ktoré mali problémy s udržateľnosťou verejných financií, hlavne Grécka, zobrazili sme jednotlivé hodnoty skóre za obdobie 1999 až 2009 na grafe 2. Z neho vyplýva, že pre väčšinu týchto krajín boli kritické dva roky 2004 a 2007, kedy došlo k prepadu relatívnej efektivity vládnych výdavkov. Výnimku tvorí Taliansko, ktoré vykazuje relatívne stabilný vývoj. Takisto je možné pozorovať, že v prípade Grécka vysoké postavenie v poradí krajín je spôsobené hlavne v obdobiach na začiatku, kedy dosahuje efektívitu blízku 1, ale v ďalších obdobiach klesá.

Graf 2: Vývoj relatívnej efektivity pre vybrané krajiny



Zdroj: Vlastné výpočty

5 ZÁVER

Na základe použitej metódy sa nám nepodarilo dokázať neefektívnosť vynakladania verejných prostriedkov v krajinách Eurozóny, ktoré boli nútené požiadať o záchranné programy na zvládnutie svojich dlhov alebo boli medzi potenciálnymi uchádzačmi o medzinárodnú pomoc. Jedným z možných príčin je, že boli použité priemerné hodnoty multiplikátorov vládnych výdavkov a nie aktuálne hodnoty multiplikátorov, nakoľko sme sa chceli vyhnúť použitiu parametrov, ktoré by boli zložené z vstupných aj výstupných parametrov.

Použitá literatúra

1. DEWAN, S.- ETTLINGER, M.2009. Comparing Public Spending and Priorities Across OECD Countries. In *Center for American Progress* [online]. 2009,[cit. 2012-12-02]. Dostupné na internete: < http://www.americanprogress.org/issues/2009/10/pdf/oecd_spending.pdf>.
2. GUPTA, S.- HONJO, K.- VERHOEVEN, M.1997. *The Efficiency of Government Expenditure: Experiences from Africa*: IMF Working paper WP/97/153: International monetary fund,1997.60p.
3. WANG, E.C.- ALVI, E. 2012. Relative Efficiency of Government Spending and Its Determinants: Evidence from OECD and Asian Countries. In *International Conferences of RCIE, KIET, and APEA: China and the World Economy and Global*

Economy [online]. 2012.[cit. 2012-12-02]. Dostupné na internete:<
<http://faculty.washington.edu/karyiu/confer/sea12/papers/SG12-104%20Wang.pdf>>

Kontaktné údaje

Ing. Ivan Brezina

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 6729 5826

email: brezina.ivan@yahoo.com

Ing. Peter Horvát

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 6729 5826

email: lpeter.horvat@gmail.com

ILPIC (INVERSE LINEAR PROGRAMMING WITH INTERVAL COEFFICIENTS): SOME APPLICATIONS, THEORY AND ALGORITHMS

Michal Černý

Abstrakt

Zabýváme se obecnou formulací problému inverzní optimalizace jak pro lineární, tak i pro nelineární případ. Formulujeme a studujeme některé obecné otázky s důrazem na to, za jakých podmínek je možné k řešení inverzního optimalizačního problému použít binární vyhledávání. Částečné řešení podáme pro případ inverzního lineárního programování s intervalovými koeficienty (ILPIC). Metodu ilustrujeme pomocí dvou příkladů z operačního výzkumu: návrh sítě s předepsaným maximálním tokem a návrh výplatní matice pro maticovou hru.

Klíčová slova: *optimalizace, operační výzkum, intervalová optimalizace, inverzní optimalizace*

Abstract

We give a general formulation of the inverse optimization problem, applicable both for linear and nonlinear setup. We formulate some general questions deserving attention: in particular, we ask under which conditions the inverse optimization problem can be solved by the Binary Search technique. A partial solution to this problem is shown in case of linear programming with interval coefficients (ILPIC). We also illustrate the applicability of the method by two examples: designing a network and designing a payoff matrix for a matrix game.

Keywords: *optimization, operations research, interval optimization, inverse optimization*

1 INTRODUCTION

1.1. Problem statement. Let a set $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, called *admissible space*, be given. We consider the family of optimization problems

$$\min f(x, \theta) \text{ s.t. } g(x, \theta) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

parametrized by $\theta \in \Theta$. Here f is an objective function, x is a vector of variables, θ is a vector of parameters and g is a vector-valued constraint function (i.e., the constraints $g(x, \theta) \leq 0$ can be written as $g_1(x, \theta) \leq 0, \dots, g_m(x, \theta) \leq 0$).

The *inverse optimization problem* asks: given $f, g, \Theta, f_0 \in \mathbb{R}$, find $\theta_0 \in \Theta$ such that

$$\min\{f(x, \theta_0) : g(x, \theta_0) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n\} = f_0$$

or assert that none exists.

1.2. Interpretation. In fact, the task is to find data of an optimization problem such that its optimal value equals to the prescribed level f_0 , when the data can be selected from the admissible region Θ .

A particular value $\theta^* \in \Theta$ is called *scenario*. Also the optimization problem $\min f(x, \theta^*)$ s.t. $g(x, \theta^*) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n$ is called *scenario*.

1.3. Optimal value function. The function

$$V(\theta) = \inf\{f(x, \theta) : g(x, \theta) \leq 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$

is called *optimal value function*. We admit that V attains $\pm\infty$. This means in particular that the scenario θ^* is infeasible when $V(\theta^*) = \infty$ and that the scenario θ^* is unbounded when $V(\theta^*) = -\infty$.

2 BINARY SEARCH

Assume that V can be evaluated efficiently, say in polynomial time. This holds true for linear programming, semidefinite programming, general convex programming under some additional assumptions on Lipschitz-boundedness of f and many more optimization problems; see [8] for details.

Here we state a general theorem giving us a method for solving the inverse optimization problem.

2.1. Theorem. Let Θ be a convex set, let $\underline{\theta} \in \Theta$ and $\bar{\theta} \in \Theta$ satisfy

$$-\infty < V(\underline{\theta}) \leq f_0 \leq V(\bar{\theta}) < \infty \quad (1)$$

and let V be continuous on Θ . Then, for any $\varepsilon > 0$ Binary Search finds a scenario $\theta_0 \in \Theta$ such that $|V(\theta_0) - f_0| < \varepsilon$.

2.2. Proof of Theorem 2.1. By convexity of Θ , for each $\lambda \in [0, 1]$ we have $\theta_\lambda := (1 - \lambda)\underline{\theta} + \lambda\bar{\theta} \in \Theta$. By continuity, the function $v(\lambda) := V(\theta_\lambda)$ attains the value f_0 for some $\lambda_0 \in [0, 1]$ (using Bolzano's Intermediate Value Theorem) and it can be found up to an arbitrarily small error using Binary Search over $\lambda \in [0, 1]$. Q.E.D.

2.3. Remark. Recall that Binary Search is the following procedure. Start with $\underline{\lambda} = 0$ and $\bar{\lambda} = 1$. Given $\underline{\lambda}$ and $\bar{\lambda}$ such that $v(\underline{\lambda}) < f_0 < v(\bar{\lambda})$, set $\lambda^* = \frac{1}{2}(\underline{\lambda} + \bar{\lambda})$ and evaluate $v(\lambda^*)$. If $|v(\lambda^*) - f_0| < \varepsilon$, terminate. If $v(\lambda^*) < f_0$, set $\underline{\lambda} := \lambda^*$; otherwise set $\bar{\lambda} := \lambda^*$ and iterate.

3 QUESTIONS & PROBLEMS

It is hard to give a general bound on computational efficiency of the method of Theorem 2.1, since we would need further assumptions on V (like monotonicity, Lipschitz-boundedness or other similar properties). Another problem is whether the assumptions of Theorem 2.1 are satisfied in a particular case – for example, in case of Linear Programming (which is the case when f and g are linear functions both in x

and θ) it is easy to find an example when V is not continuous. Moreover, it can happen that even finding $\underline{\theta}, \bar{\theta}$ such that (1) holds is a complicated problem (say, **NP-hard**). More generally, it can happen that finding the bounds $\bar{V} = \sup\{V(\theta) : \theta \in \Theta\}$ and $\underline{V} = \inf\{V(\theta) : \theta \in \Theta\}$ is a computationally hard problem, showing that even the natural question whether $\underline{V} \leq f_0 \leq \bar{V}$ holds need not be easy-to-answer.

4 ILPIC: INVERSE LINEAR PROGRAMMING WITH INTERVAL COEFFICIENTS

4.1. Formulation of ILPIC. Here we restrict ourselves to the case of inverse Linear Programming. The general problem can be formulated as follows: given f_0 and $\Theta \subseteq \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, find a scenario $(A, b, c) \in \Theta$ such that

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = f_0$$

or assert that none exists. Moreover, we restrict ourselves to the case of *interval coefficients*, which is the case when

$$\mathbf{A} = [\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}$$

is a given *interval matrix* and

$$\mathbf{b} = [\underline{b}, \bar{b}] = \{b \in \mathbb{R}^m : \underline{b} \leq b \leq \bar{b}\}, \quad \mathbf{c} = [\underline{c}, \bar{c}] = \{c \in \mathbb{R}^n : \underline{c} \leq c \leq \bar{c}\}$$

are given *interval vectors*. (Any inequality between vectors/matrices is understood entrywise.) For this case we have an interesting theorem on continuity of V .

4.2. Theorem [6, 9].

- (a) If $\underline{A} = \bar{A}$ and $-\infty < \underline{V} \leq \bar{V} < \infty$, then V is continuous.
- (b) If every scenario $(A, b, c) \in \mathbf{A} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ satisfies

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, x \geq 0, c^T x \leq 0\} &= \{0\}, \\ \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq 0, b^T y \geq 0\} &= \{0\}, \end{aligned} \tag{2}$$

then $-\infty < \underline{V} \leq \bar{V} < \infty$ and V is continuous.

4.3. Remark. In (a) we assume that $-\infty < \underline{V} \leq \bar{V} < \infty$; that is, we assume that every scenario $(A, b, c) \in \mathbf{A} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ is feasible and bounded. Though in general it is not easy to test whether this assumption holds true, in many applications we can infer that this is the case from the economic meaning of the problem under consideration. We will show some examples.

4.4. Remark. Observe that in the Linear Programming case, the optimal value function is computable in polynomial time. This shows that each iteration of Binary Search of Theorem 2.1 is a computationally tractable procedure.

5 APPLICATIONS

5.1. Application: Designing a network. Let a network (V, E, S, T) be given, where V is the set of vertices, E is the set of edges, S is the source vertex and T is the sink. Assume that for each edge e we are given a pair of nonnegative numbers $\underline{k}_e \leq \bar{k}_e$. Our task is to select capacities of edges such that the maximum flow through the network is f_0 .

It is well-known that the problem can be formulated as a linear programming problem. We add an artificial edge (T, S) to the graph G with unbounded capacity. Given a vector k of capacities of edges, we can easily solve the linear programming problem

$$\max\{x_{TS} : (\forall e \in E - \{(T, S)\}) 0 \leq x_e \leq k_e, C^T x = 0\}, \quad (3)$$

where C is the incidence matrix of G .

The inverse problem asks to select $k \in [\underline{k}, \bar{k}]$ such that

$$\max\{x_{TS} : (\forall e \in E - \{(T, S)\}) 0 \leq x_e \leq k_e, C^T x = 0\} = f_0.$$

Clearly we have

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \max\{x_{TS} : (\forall e \in E - \{(T, S)\}) 0 \leq x_e \leq \underline{k}_e, C^T x = 0\}, \\ \bar{V} &= \max\{x_{TS} : (\forall e \in E - \{(T, S)\}) 0 \leq x_e \leq \bar{k}_e, C^T x = 0\} \end{aligned}$$

since an increase in capacities cannot decrease the size of a maximum flow. It follows that it is easy to test whether $\underline{V} \leq f_0 \leq \bar{V}$. Clearly, we have $0 \leq \underline{V} \leq \bar{V} < \infty$ by the nature of the problem. So, Theorem 4.2(a) tells us that the optimal value function $V(k)$ is continuous on $[\underline{k}, \bar{k}]$ since the capacities appear only in the right-hand sides of (3) and we can use Theorem 2.1 for finding a solution.

5.2. Application: Designing a matrix game [6]. Recall that a finding a mixed Nash strategy for Player I in a matrix game with payoff A can be found by solving the linear programming problem

$$\max\{\gamma : Ax \geq \gamma e, e^T x = 1, x \geq 0\}, \quad (4)$$

where e is all-one vector. Recall also that the optimal value equals to the value of the game.

Let $\underline{A} \leq \bar{A}$ and f_0 be given. In [6] it is shown that (4) satisfies the assumptions of Theorem 4.2(b). Clearly

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \max\{\gamma : \underline{A}x \geq \gamma e, e^T x = 1, x \geq 0\}, \\ \bar{V} &= \max\{\gamma : \bar{A}x \geq \gamma e, e^T x = 1, x \geq 0\}, \end{aligned}$$

since an increase in payoff cannot decrease the value of the game. It follows that we can efficiently test whether $\underline{V} \leq f_0 \leq \bar{V}$ and if so, we can use Theorem 2.1 for finding a payoff matrix $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ such that the value of the game is f_0 .

6 CONCLUSIONS

The results on inverse linear programming look appealing. However, there are many issues still to be resolved. For example, the conditions (2) are sufficient, but not necessary. Indeed, it is possible to construct a linear programming problem with a continuous objective value function such that at least one of the conditions (2) is not satisfied. So it would be desirable to re-prove Theorem 4.2 with a weaker assumption. Next, while testing the first condition of (2) can be done by a polynomial-time algorithm, testing the second condition of (2) seems to be **NP**-hard in general. So it would be desirable to construct a different, poly-time testable sufficient condition for continuity of the optimal value function.

Of course, many natural questions remain open for nonlinear programming problems. For example, for which classes of nonlinear programming problems it holds that \underline{V} and/or \bar{V} can be determined in polynomial time? Another example: for which nonlinear programming problems can we prove an analogy of Theorem 4.2(b)?

Acknowledgment

The work was supported by project P403/12/1947 of the Czech Science Foundation and F4/11/2013 of the Internal Grant Agency of University of Economics, Prague. This talk is based on results of [2], [4] and [6]. Many thanks to M. Hladík and A. Mostafaei.

References

- [1] CHINNECK, J. W., RAMADAN, K., Linear programming with interval coefficients. *Journal of the Operational Research Society*, 2000, vol. 51, no. 2, pp. 209–220, ISSN 0160-5682
- [2] ČERNÝ, M., A note on inverse optimization: Two applications of the Binary Search technique. *Proceedings of Hradec Economic Days 2014*, to appear.
- [3] HLADÍK, M., Optimal value range in interval linear programming. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2009, vol. 8, no. 3, pp. 283–294, ISSN 1568-4539
- [4] HLADÍK, M., ČERNÝ, M., Inverse optimization: On strategies for solving the inverse linear programming problem by a parametric approach. *Proceedings of ICPAM-LAE 2013*, to appear.
- [5] LI, D.-F., Linear programming approach to solve interval-valued games, *Omega*, 2011, vol. 39, no. 6, pp. 655–666, ISSN 0305-0483
- [6] MOSTAFAEE, A., HLADÍK, M., ČERNÝ, M., Inverse linear programming with interval coefficients. 2013, submitted.
- [7] SCHAEFER, A. J., Inverse integer programming. *Optimization Letters*, 2009, vol. 3, no. 4, pp. 483–489, ISSN 1862-4472
- [8] VAVASIS, S. A. *Nonlinear Optimization: Complexity Issues*. Oxford University Press, 1991

- [9] WETS, R. J.-B., On the continuity of the value of a linear program and of related polyhedral-valued multifunctions. *Mathematical Programming Study* 24, 1985, Springer, pp. 14–29

Contact

Michal Černý
Department of Econometrics, University of Economics, Prague
W. Churchill Square 4, 13067 Prague, Czech Republic
cernym@vse.cz

PROBLÉM VÝBĚRU PORTFOLIA PROJEKTŮ

PROJECT PORTFOLIO SELECTION PROBLEM

Petr Fiala

Abstrakt

Projektové řízení je spojeno s výrazným stupněm rizika při realizaci projektů, protože každý projekt je originál. S řízením portfolia projektů jsou spojeny různé typy rizik. Při jejich řízení je možno využít standardní metody nebo se pokusit navrhnout a aplikovat sofistikované metody, založené na kvantitativní analýze. Příspěvek je zaměřen na problém výběru portfolia projektů. Výběr portfolia projektů je dynamickou úlohou vícekriteriálního rozhodování při riziku. V příspěvku je navrženo využití rozhodovacích stromů a vícekriteriálních metod rozhodování pro modelování a řešení tohoto problému. Postup je naznačen na ilustračním příkladu.

***Klíčová slova:** projekty, portfolio projektů, rozhodovací strom, vícekriteriální rozhodování*

Abstract

Project management is associated with a significant level of risk in project implementation because each project is unique. The management of project portfolio is linked with different types of risk. Using of standard methods or trying to design and apply sophisticated methods based on quantitative analysis is possible for portfolio management. The paper focuses on the of project portfolio selection problem. Selection of project portfolio is a dynamic multi-criteria decision-making problem under risk. The paper proposes the use of decision trees and multi-criteria decision making methods for modeling and solving this problem. The procedure is illustrated on an example.

***Keywords:** projects, project portfolio, decision tree, multi-criteria decision-making*

1 ÚVOD

Projekt je prostorově a časově ohraničený soubor technologicky a organizačně souvisejících činností, jehož účelem je dosažení stanoveného cíle při zadaném čase, zdrojích, nákladech a kvalitě. Projektové řízení je způsob řízení pomocí projektů. Je to je vysoce účinný nástroj řízení změn, komplexní koncepce efektivního dosahování projektových cílů, která umožňuje manažerům dosáhnout odpovídající kvality výstupu s minimálními nároky na čas a ostatní zdroje. Projektové řízení zahrnuje řízení jednotlivých projektů a vytvoření organizační struktury a koordinaci projektů z hlediska termínů a disponibilních zdrojů. Projektové řízení je spojeno s výrazným stupněm rizika při realizaci projektů, protože každý projekt je originál.

Portfoliem projektů jsou všechny projekty, které jsou ve firmě realizovány v daném čase. Mezi základní cíle řízení portfolia projektů patří:

- optimalizace výsledků celého portfolia projektů a nikoliv jednotlivých projektů,
- výběr projektů k zahájení,
- přerušení nebo zastavení projektů
- definování priorit projektů,
- koordinování interních a externích zdrojů,
- organizace učení se z projektů navzájem.

Cílem příspěvku je navrhnout proceduru pro výběr portfolia projektů při uvažovaném riziku rozhodování. Struktura článku je následující. V části 2 je charakterizována úloha výběru portfolia projektů. Pro postupné rozhodování při riziku je vhodným nástrojem rozhodovací strom, který je charakterizován v části 3. Úloha výběru portfolia projektů je vícekritériální problém. Vícekritériální rozhodovací stromy a interaktivní vícekritériální postup je popsán v části 4. V části 5 je procedura ilustrována na jednoduchém příkladu. Část 6 je věnována zhodnocení navržené procedury a jsou navrženy možné modifikace a zobecnění.

2 VÝBĚR PORTFOLIA PROJEKTŮ

Projekty jsou považovány za nástroj pro dosahování strategických cílů organizace. Neustálé inovace, obnova a organizační učení jsou považovány za životně důležité pro přežití. V důsledku toho mají vedoucí postavení na trhu flexibilní a projektově řízené organizace. Intenzivní globální konkurence nutí mnoho firem k hledání nových metod řízení. Pro výběr portfolia projektů jsou v podstatě dva možné přístupy, jeden je založen na standardních v praxi používaných metodách, druhý přístup je založen hledání a aplikování nových a aplikovat sofistikovaných metod, založených na kvantitativní analýze.

Klíčem k úspěchu v řízení portfolia projektů je vybrat správné projekty ve správný čas (Levine, 2005). Proces výběru projektů je považován za hlavní součást systému řízení portfolia projektů. To by mělo být doprovázeno periodicky opakovanou kontrolou portfolia projektů, která by identifikovala projekty, které by měly být ukončeny.

Většinou se předpokládá, že portfolio by mělo být konstruováno takovým způsobem, aby byla maximalizována možnost dosažení strategických cílů firmy. To odpovídá představě, že výběr portfolia je problém vícekritériálního rozhodování.

Hlavním cílem každého projektu je zvýšit hodnotu firmy, takže většina manažerů preferuje finanční kritéria pro hodnocení projektů. Mezi nejčastěji používané ukazatele patří čistá současná hodnota, vnitřní výnosové procento, doba návratnosti, míra návratnosti.

Kromě těchto finančních ukazatelů by však při výběru portfolia projektů měly být brány v úvahu i další charakteristiky, mezi které např. patří:

- Pravděpodobnost dokončení projektu včas, v rámci rozpočtu a v navržené kvalitě;
- Soulad mezi strategickými a taktickými plány;
- Rovnováha mezi investičními projekty a projekty údržby;
- Efektivní využívání zdrojů;
- Vzájemné vztahy mezi projekty;
- Rozsah jednotlivých projektů;
- Časová závislost spotřeby zdrojů u jednotlivých projektů;
- Alokace výdajů a zdrojů na výzkum a vývoj;
- Alokace marketingových výdajů a zdrojů.

V tomto článku je analyzován dynamický vícekritériální výběr portfolia projektů. Analýza se provádí s časovým horizontem T období. V každém období se portfolio projektů přehodnotí v souladu se strategickými cíli firmy. Management může rozhodnout o zahájení nových projektů, ale také ukončení některých dalších, které jsou v současné době realizovány. I v případě, že firma má volné prostředky, je někdy lepší rozhodnout, že se nezahájí nový projekt a čekat na výhodnější návrh. Avšak zatímco skupina projektů, které jsou v současné době připraveny k realizaci, je jasně definována, není tak snadné předpovědět, jaké nové návrhy se v budoucnosti objeví.

Firma musí rozhodnout, zda přiřadit všechny volné prostředky na současných návrhů, nebo ponechat určitou část prostředků nevyužitou na nějakou dobu a čekat na lepší varianty, které mohou nastat později. Navrhujeme pro řešení tohoto problému použít rozhodovací strom s více kritérii a interaktivní vícekritériální analýzu.

3 ROZHODOVACÍ STROMY

Při posuzování možných projektů se často setkáváme s posloupností dílčích rozhodnutí, která na sebe navazují, a úkolem rozhodovatele je vybrat z možných posloupností takovou, která vede k nejlepšímu cílovému řešení. Jedná se o více-etapové rozhodovací procesy. Rozhodování probíhá v časových obdobích $t = 1, 2, \dots, T$. Pro řešení těchto problémů se s úspěchem používají tzv. rozhodovací stromy. Při řešení více-etapových rozhodovacích problémů se postupuje ve dvou fázích. První fází je konstrukce rozhodovacího stromu a druhou fází je jeho vyhodnocení.

Při konstrukci rozhodovacích stromů se používá grafové struktury stromu, která vhodně modeluje větvení možností. Při konstrukci této grafové struktury rozhodovacího problému rozhodovatel vytváří rozhodovací strom a vyhodnocuje jeho části s cílem nalezení optimální posloupnosti rozhodnutí. Uvažují se dva druhy uzlů, rozhodovací a situační. Rozhodovací uzly budeme značit čtverečkem a písmenem R , situační uzly označujeme kroužkem a písmenem S . Hrany stromu představují větvení možností rozhodovacích a situačních. Začneme rozhodovacím uzlem, ze kterého vycházejí hrany představující možná rozhodnutí a_i . Konce těchto hran jsou situační uzly, ze kterých vycházejí hrany reprezentující možné situace s_j , které se mohou vyskytovat s podmíněnými pravděpodobnostmi p_j . Na tyto hrany mohou navazovat další rozhodovací uzly s možnými rozhodnutími, dále situační uzly s možnými situacemi atd. Kombinací těchto základních prvků mohou vzniknout rozsáhlé rozhodovací stromy. Koncové hrany, na které už nenavazují další rozhodovací a situační uzly představují možné konce posloupností dílčích rozhodnutí, které jsou ohodnoceny.

Při vyhodnocování rozhodovacích stromů se postupuje obráceným směrem od koncových hran zpět k výchozímu rozhodovacímu uzlu. Rozhodnutí vybírá rozhodovatel, který nemůže ovlivnit výskyt situace a musí brát v úvahu všechny situace s jejich podmíněnými pravděpodobnostmi výskytu. Z možných rozhodnutí se vybírá vždy to, které přináší lepší ohodnocení. Při výběru se používá princip maximalizace očekávané hodnoty. Tímto způsobem se získá optimální posloupnost rozhodnutí.

4 VÍCEKRITÉRIÁLNÍ ANALÝZA

Pro výběr nejvhodnější strategie dynamického řízení portfolia projektů použijeme vícekritériální rozhodovací stromy (Haimes a Tulsiani, 1990). Pro jejich analýzu budeme používat standardní postupy vícekritériálního rozhodování (Fiala, 2008).

Budeme hledat výslednou kompromisní strategii pro dynamický výběr portfolia projektů. Tato strategie by měla být tzv. efektivní. Efektivní (nedominovaná) vícekritériální strategie je taková, ke které neexistuje jiná alternativní strategie, která by byla lepší alespoň podle jednoho kritéria a nebyla horší podle ostatních kritérií.

Vícekritériální analýza je dvoustupňová:

1. Určení všech efektivních strategií pro dynamický výběr portfolia.
2. Interaktivní postup pro určení výsledné kompromisní strategie pro dynamický výběr portfolia.

Pro identifikaci všech efektivních strategií může být použit následující jednoduchý postup:

1. Začít od posledního období $t = T$ identifikovat dílčí efektivní strategie pro všechny rozhodovací uzly období T .
2. Přejít na předchozí období $t = t - 1$.
3. Pro každý rozhodovací uzel období t identifikovat strategie, které splňují podmínky efektivnosti.
4. Je-li $t > 1$, přejít na krok 2, jinak postup končí.

Počet efektivních strategií může být velký. Pro výběr výsledné kompromisní strategie z množiny všech efektivních strategií je možno použít jednoduchý interaktivní postup mezi rozhodovatelem a řešitelem, který probíhá v jednotlivých iteracích. V každé iteraci q je analyzována množina strategií $\mathcal{S}(q)$ a je určena tzv. ideální varianta (vektor nejlepších hodnot podle každého kritéria $\mathbf{H}(q)$) a tzv. bazální varianta (vektor nejhorších hodnot podle každého kritéria $\mathbf{D}(q)$). Z těchto variant rozhodovatel vidí, mezi jakými hodnotami se mohou kritériální hodnoty pohybovat. Rozhodovatel je dotazován na aspirační úroveň kritérií $\mathbf{A}(q)$, které by akceptoval při výběru kompromisní strategie. Jakmile je rozhodovatel spokojen s navrženou strategií, postup končí.

Interaktivní postup pro určení výsledné kompromisní strategie má následující kroky:

1. Iterace $q = 1$, množina všech analyzovaných strategií $\mathcal{S}(1)$ je rovna množině všech efektivních strategií.
2. Určit ideální variantu $\mathbf{H}(q)$ a bazální variantu $\mathbf{D}(q)$
3. Rozhodovatel je dotazován, zda akceptuje bazální hodnoty, pokud ano, přechod na krok 8.
4. Rozhodovatel je dotazován, zda navrhne aspirační úroveň $\mathbf{A}(q)$, pokud ne, přechod na krok 6.
5. Rozhodovatel zadá aspirační úroveň $\mathbf{A}(q)$ a určí se odpovídající množina akceptovatelných strategií $\mathcal{S}(q+1)$. Jestliže je $\mathcal{S}(q+1) = \emptyset$, informovat rozhodovatele a přejít na krok 4, jinak na krok 7.
6. Rozhodovatel je dotazován, která bazální hodnota je pro něj neakceptovatelná. Potom se definuje nová množina strategií $\mathcal{S}(q+1)$, které převyšují neakceptovatelnou bazální hodnotu.
7. Zadat $q = q + 1$, přechod na krok 2.
8. Rozhodovatel je dotazován, které kritérium by mělo dosáhnout ideální hodnotu. Výsledná kompromisní strategie je ta, která maximalizuje toto kritérium.

5 ILUSTRAČNÍ PŘÍKLAD

V článku jsou navrženy vícekritériální iterační kombinatorické aukce jako modely pro elektronický obchod. Kombinatorické aukce jsou důležitým subjektem intenzivního ekonomického výzkumu. Iterační proces pomáhá dražitelům vyjádřit jejich preference. Vícekritériální přístup může být nápomocen při detailní analýze kombinatorických aukcí. Kombinace takových přístupů může poskytnout mnohem komplexnější pohled na elektronické aukce. Je navržen možný flexibilní nástroj pro e-obchod.

Budeme postup ilustrovat na jednoduchém příkladu s výběrem portfolia projektů ve dvou časových obdobích $t = 1, 2$. V prvním období se vybírá ze dvou projektů P_1 a P_2 . Omezené zdroje umožňují vybrat pouze jeden z těchto projektů. V druhém období vzniknou s určitou pravděpodobností návrhy na další projekty P_3 a P_4 , současně oba projekty s pravděpodobností 0,2, pouze projekt P_3 s pravděpodobností 0,5 a pouze projekt P_4 s pravděpodobností 0,3.

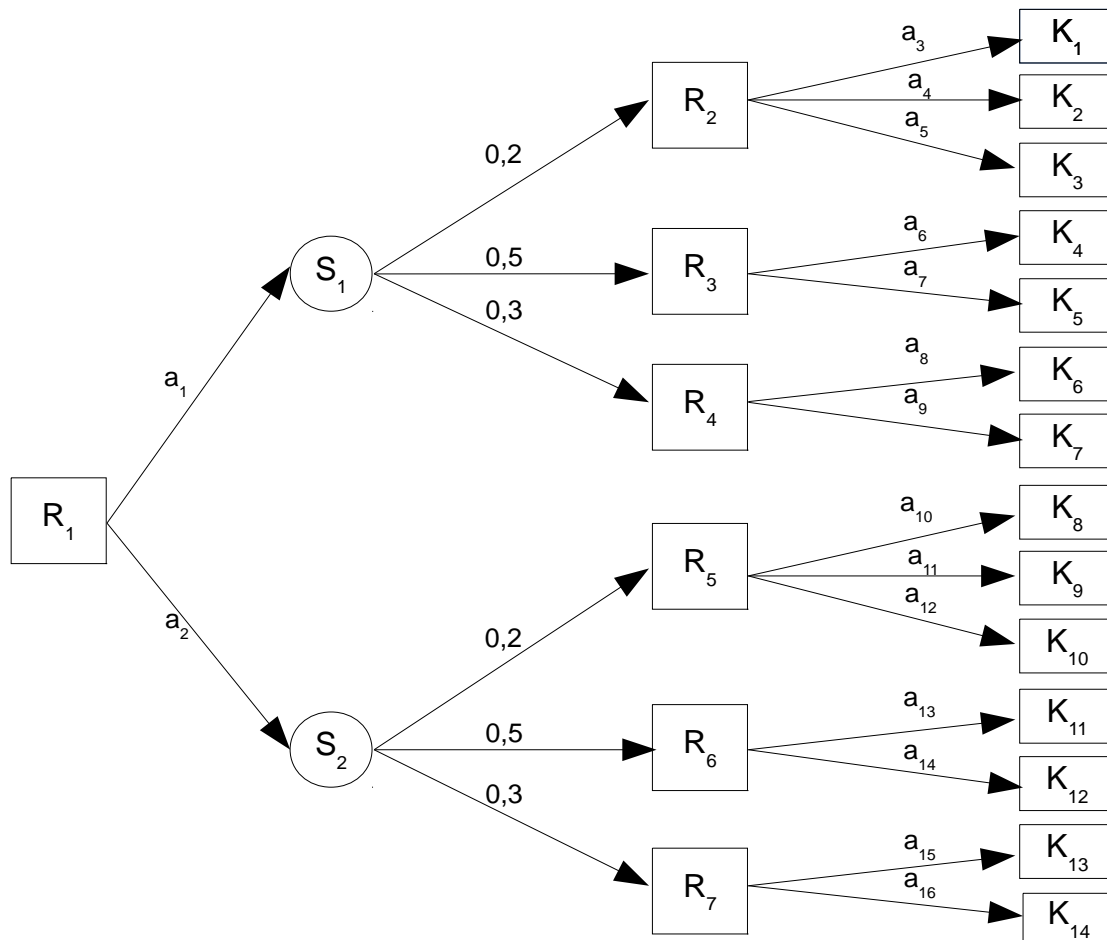
Rozhodovatel může v této fázi vybrat vzhledem k omezeným zdrojům pro realizaci pouze jeden z projektů P_3 a P_4 , nebo žádný projekt. Rozhodovací strom pro tuto situaci je na Obr. 1.

Rozhodovací uzel R_1 má dvě možná rozhodnutí, a_1 odpovídá výběru projektu P_1 a a_2 odpovídá výběru projektu P_2 . Situační uzly S_1 a S_2 popisují tři možné stavy vzniku návrhů projektů, současně oba projekty P_3 a P_4 , pouze projekt P_3 a pouze projekt P_4 s danými pravděpodobnostmi. Rozhodovací uzel R_2 má tři možná rozhodnutí, a_3 odpovídá výběru projektu P_3 , a_4 odpovídá výběru projektu P_4 a a_5 odpovídá rozhodnutí nevybrat žádný nový projekt. Rozhodovací uzel R_3 má dvě možná rozhodnutí, a_6 odpovídá výběru projektu P_3 a a_7 odpovídá rozhodnutí nevybrat žádný nový projekt. Rozhodovací uzel R_4 má dvě možná rozhodnutí, a_8 odpovídá výběru projektu P_4 a a_9 odpovídá rozhodnutí nevybrat žádný nový projekt. Analogická struktura rozhodovacího stromu je pro větve ze situačního uzlu S_2 .

Hodnocení vybraného portfolia je provedeno podle tří kritérií:

- f_1 : čistá současná hodnota NPV,
- f_2 : procento přírůstku tržeb z nového trhu,
- f_3 : procento přírůstku tržeb z nového produktu.

Odhadované hodnoty kritérií jsou v Tab. 1 podle jednotlivých koncových uzlů rozhodovacího stromu.



Obr. 1 Rozhodovací strom pro výběr portfolia projektů

Koncový uzel	f_1	f_2	f_3	Koncový uzel	f_1	f_2	f_3
K_1	70	10	12	K_8	60	15	20
K_2	80	6	15	K_9	70	12	8
K_3	30	5	8	K_{10}	20	7	6
K_4	70	10	12	K_{11}	60	15	20
K_5	30	5	8	K_{12}	20	7	6
K_6	80	6	15	K_{13}	70	12	8
K_7	30	5	8	K_{14}	20	7	6

Tab. 1 Kriteriaální hodnoty v koncových uzlech

Celkový počet strategií pro tento rozhodovací strom je 24. Podle postupu pro identifikaci efektivních strategií určíme podle očekávaných hodnot 4 efektivní strategie (Tab. 2).

Strategie	f_1	f_2	f_3
$a_1 - a_3 - a_6 - a_8$	73	8,8	12,9
$a_1 - a_4 - a_6 - a_8$	75	8	13,5
$a_2 - a_{10} - a_{13} - a_{15}$	63	14,1	16,4
$a_2 - a_{11} - a_{13} - a_{15}$	65	13,5	14

Tab. 2 Efektivní strategie

Použijeme interaktivní postup pro určení výsledné kompromisní strategie:

1. Iterace $q = 1$, množina všech analyzovaných strategií $S(1) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.
2. $H(1) = (75; 14,1; 16,4)$, $D(1) = (63; 8; 12,9)$.
3. Rozhodovatel neakceptuje bazální hodnoty.
4. Rozhodovatel navrhne aspirační úroveň.
5. $A(1) = (70; 8,5; 10)$, $S(2) = \{s_1\}$ a rozhodovatel je s touto strategií spokojen.

Tato strategie v prvním období vybere projekt P_1 a v druhém období podle situace vybere projekt P_3 nebo P_4 s očekávanými hodnotami kritérií $f_1 = 73$, $f_2 = 8,8$ a $f_3 = 12,9$.

6 ZÁVĚR

Rozhodování při výběru portfolia projektů je rozhodováním při riziku. U většiny firem je výběr portfolia kontinuálním procesem. Při výběru portfolia projektů jsou obvykle brána v úvahu různá kritéria. V důsledku toho může být tento problém formulovat jako dynamické vícekritériální rozhodování za rizika.

Navržená procedura pro výběr portfolia respektuje charakteristiky problému:

- riziko,
- dynamiku,
- vícekritériálnost.

Procedura je interaktivní metoda založená na vícekriteriálních rozhodovacích stromech. Postup je dvoufázový. V první fázi jsou vybrány efektivní strategie. V druhé fázi je pomocí interaktivní vícekriteriální metody vybrána preferovaná strategie. Procedura je flexibilní a je možno ji modifikovat a zobecňovat. Postoj rozhodovatele k riziku je možno modifikovat např. použitím pravidla stochastické dominance. Pro výběr preferované strategie je možno použít další vícekriteriální metody.

Poděkování

Výzkumný projekt byl podporován grantem č. 13-07350S 07/0166, uděleným Grantovou agenturou České republiky, a grantem IGA F4/19/2013, Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

1. Fiala, P. (2003). Projektové řízení - modely, metody, analýzy. Professional Publishing, Praha.
2. Fiala, P. (2008): Modely a metody rozhodování. Oeconomica, Praha 2008.
3. Haimes, Y., Li, D., Tulsiani, V. (1990). Multiobjective decision tree method. Risk Analysis 10 (1990), 111-129.
4. Levine, H. A. (2005). Project Portfolio Management. Jossey-Bas, San Francisco.

Kontaktní údaje

Prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha, Česká republika

Tel: (420 2) 24 095 447

email: pfiala@vse.cz

OPTIMALIZÁCIA ZBERU SEPAROVANÉHO ODPADU¹

OPTIMIZATION OF THE SEPARATED WASTE COLLECTION

Pavel Gežík

Abstrakt

Optimalizácia zberu separovaného odpadu má za cieľ spraviť z recyklácie a separovania odpadu nie len environmentálne prijateľný ale zároveň aj ekonomicky výhodný proces nakladania s odpadom. Na tento účel je nutné minimalizovať náklady spojené so zberom odpadu. Tieto náklady možno minimalizovať správnym umiestnením zberných miest a centrálného zberného miesta, optimálnou obsluhou týchto miest a minimalizáciou prepravných nákladov, ako aj určením optimálneho prepravovaného množstva separovaného odpadu. Optimalizáciou týchto nákladov sa zaoberajú modely zamerané na zber odpadu a recykláciu.

***Kľúčové slová:** Optimalizácia, Recyklácia, Zberné miesto, Separovaný odpad*

Abstract

Optimization of the collection of separated waste aims at making the recycling and waste separation not only environmentally friendly but also economically efficient waste handling procedures. For this purpose it is necessary to minimize the costs associated with waste disposal. These costs can be minimized by proper location of collection points and a central collection point, correct operation of these sites and minimizing transport costs as well as determining the optimal amount of transported waste recovered. For this reason, there are models designed for waste collection and recycling, which are dealing with this cost optimization.

***Keywords:** Optimization, Recycling, Collection point, Separated Waste*

ÚVOD

Možnosť opätovného použitia surovín získaných zo separovaného odpadu môže predstavovať nemalé ušetrenie na nákladoch spojených s obstarávaním surovín na zabezpečenie výroby, a teda sa stala silnou ekonomickou motiváciou pre zavádzanie princípov recyklovania surovín do priemyselnej praxe. Podnik zberom separovateľného odpadu docieli i iné ekonomické ciele. Staré alebo pokazené výrobky získané v zberných miestach môže využiť ako náhradné diely, taktiež má možnosť predat' tieto výrobky na sekundárnych trhoch s tým, že náklady na ich opravu, resp. prerobenie sú iba malá časť pôvodných nákladov súvisiacich s ich výrobou. Na základe tejto motivácie môže podnik výrobu orientovať na produkty, ktoré spĺňajú požiadavky súvisiace s ich opätovným prerobením. Hodnota medzi pôvodnými nákladmi na výrobu týchto produktov a nákladmi spojenými s ich zberom a opätovným použitím bude predstavovať pre podnik zisk. Na to aby podnik maximalizoval takýto zisk, musí minimalizovať práve náklady spojené so zberom separovateľného odpadu.

¹ This paper is supported by the Grant IGP No. I-13-108-00 of the University of Economics in Bratislava, "RECYCLING EFFICIENCY IN BUSINESS ENVIRONMENT, "GREEN LOGISTICS" AND "GREEN IMAGE" ENTERPRISE".

Tento príspevok opisuje možnosti získavania materiálu prostredníctvom recyklácie a taktiež ako ušetriť na nákladoch spojených s nákupom materiálu potrebného na výrobu. Vysvetľuje možnosti optimalizácie nákladov spojených so zberom separovaného odpadu v zberných miestach, ktorý je určený na recykláciu. Zároveň rieši náklady spojené so zriadením zberných miest a ich predpokladanú prevádzku, či obsluhu, s predpokladom, že takto optimalizované náklady sa prejavia v cene surovín získaných recykláciou.

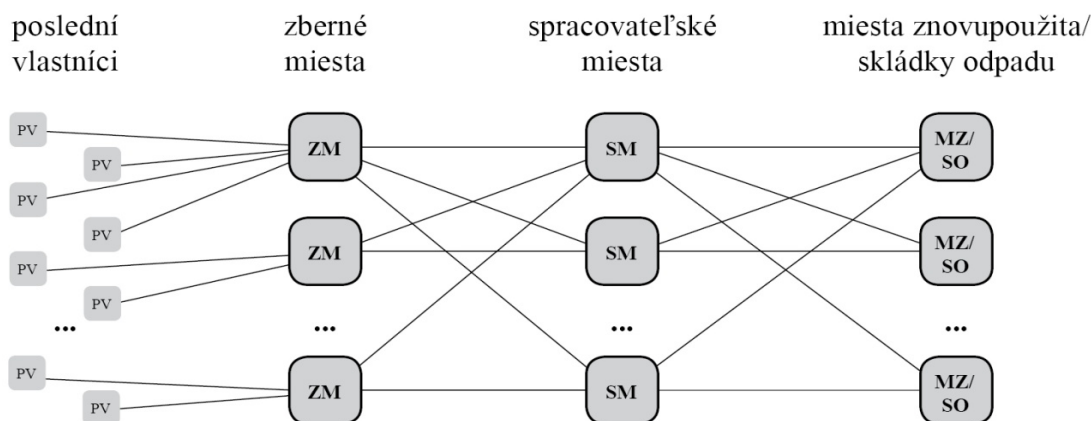
Spomínaná problematika nie je v aktuálnej hospodárskej praxi novinkou a je riešená práve vednou oblasťou, ktorá sa nazýva reverzná logistika. Vo všeobecnosti sa pojem reverznej logistiky začal spomínať už v 90-tych rokoch publikovaním viacerých štúdií. Tieto štúdie sa zaoberajú práve opačným tokom informácií a materiálu oproti dovtedy konvenčnému prístupu v dodávateľských reťazcoch. Prvá štúdia (Stock, 1992) navrhuje použitie reverznej logistiky v podnikaní a v spoločnosti všeobecne. Druhá (Kopicki et al. 1993) sa zaoberá príležitosťami na opakované použitie a recykláciu už raz použitého materiálu. Najširší prehľad možných použití reverznej logistiky a využitia recyklácie vznikol v roku 2004, keď bolo publikovaných viac ako 60 prípadových štúdií (de Brito, Dekker, Flapper, 2004).

V slovenskej republike sa s modelovaním procesov spojených s recyklovaním začalo až po roku 2000. Najskôr sa riešila len problematika recyklovania, konkrétne recyklovanie materiálov v automobilovom priemysle (Kováč, 2004) a až neskôr boli zhrnuté teoretické aspekty tohto modelovania a rôzne chápania reverznej logistiky (Brezina, 2007), na základe ktorého sa pokračovalo i s modelovaním samotných procesov. To sa orientuje najmä na návrh sietí reverznej logistiky a jedným z prvých modelov reverznej logistiky bolo rozpracovanie teoretického modelu recyklácie papiera (Brezina, Čičková, Pekár, 2008). Cieľom modelu bolo umiestniť centrálny podnik na recykláciu papiera spolu s rozmiestnením skladov a centier triedenia papiera v sťahových mestách.

1 MODEL Y ZBERU SEPAROVANÉHO ODPADU

Modelovanie zberu odpadu podmienilo mnoho skutočností. Ale asi najsilnejší vplyv na potrebu venovať sa modelovaniu zberu odpadu mala legislatíva, ktorá prinútila výrobcov zaoberať sa problematikou tvorby odpadu práve z produktov, ktoré vyrábajú. Práve títo výrobcovia podľa noriem a právnych predpisov podliehajú zákonom a smerniciam z oblasti recyklovania, kedy im legislatíva ukladá povinnosť starať sa o to, čo sa stane s ich produktmi po dovŕšení ich životnosti (tzv. OEM problém – Original Equipment Manufactures Problem). V snahe znížiť náklady, ktoré sú spojené s týmto problémom vznikli rôzne modelové prístupy a vytvorili sa mnohé modely, ktoré riešia zber starých produktov. Dôvody tohto zberu sú ekonomické ako napr. recyklácia ale i environmentálne, kedy sa zbierajú z dôvodu eliminácie množstva odpadu a minimalizácie jeho negatívneho vplyvu na životné prostredie.

Modely zaoberajúce sa zberom produktov po skončení ich životnosti sa dajú nazvať i modelmi zoberajúcimi sa problémom recyklácie. Tie sú orientované najmä na optimálne rozmiestnenie zberných a spracovateľských miest, kedy cieľom zberných miest je zabezpečenie zberu produktov určených na recykláciu od ich posledných používateľov. Po separovaní v zberných miestach sa produkty podľa charakteru prepravujú do spracovateľských miest, ktorých rozmiestnenie je tiež predmetom optimalizácie v rámci procesu minimalizácie prepravných nákladov. V spracovateľských miestach sa produkty spracujú a na základe ich ďalšej použiteľnosti, resp. nepoužiteľnosti, sa prepravujú do miest opätovného spracovania. V nich sa upravujú na surovinu, ktorá bude ďalej použitá v procese výroby alebo sa umiestňujú na špecializované skládky odpadu. Proces je znázornený na obrázku 1.



Obrázok 1 - Schéma procesov modelov zaoberajúcich sa zberom odpadu

Tieto modely sa vo všeobecnosti aplikujú na zberné suroviny, napr. na zber papiera, skla či iného, často obalového materiálu. Pri týchto modeloch je optimalizácia orientovaná najmä na zber, teda činnosť, ktorá je realizovaná po skončení životnosti produktu, resp. účelu použitého materiálu.

Väčšina modelov v oblasti optimalizácie procesov spojených s recykláciou je podobná tradičným modelom z klasickej logistiky, zaoberajúcich sa lokačnými problémami a rozmiestňovaním, či návrhom siete. Cieľom týchto modelov je najmä minimalizovať náklady spojené s dopravou, spracovaním, či skladovaním separovaného odpadu. K týmto modelom možno pridať modely na určovanie fyzického množstva separovaného odpadu. Na základe týchto informácií možno modely recyklačných procesov rozdeliť do troch základných oblastí²:

- lokalizácia recyklačných centier a zberní odpadu,
- minimalizácia prepravných nákladov optimalizáciou prepravných trás,
- optimalizácia zásobovacích procesov.

2 LOKALIZÁCIA RECYKLAČNÝCH CENTIER A ZBERNÝCH MIEST

Pri rozhodovaní o umiestňovaní obslužných centier možno použiť rôzne typy modelov a rôzne prístupy. Jedná sa najmä o modely matematického programovania, ale často sú využívané i metódy výberu potencionálnych oblastí na základe bodových, či iných viackriteriálnych metód. V praxi, ale i v literatúre sú tieto modely známe ako lokačné modely.

Najčastejšie prístupy na lokalizáciu oblastí umiestnenia recyklačného/zberného miesta pre separovaný odpad sú založené na metódach používajúcich vzdušné alebo cestné vzdialenosti medzi jednotlivými uzlami v sieti. Tieto uzly v sieti môžu predstavovať napr. mestá, ale často sú to obytné oblasti či fiktívne stredy vypočítanej podľa hustoty obyvateľstva v danej oblasti. Niektoré modely môžu využívať tzv. ukazovateľ tonokilometra (osobokilometrov), pričom musí byť splnený základný predpoklad, a to znalosť parametrov jednotlivých uzlov (kapacita prepravovaného substrátu v tonách, vzdialenosť medzi uzlami v kilometroch). Cieľom týchto modelov je optimálne umiestnenie zberných miest či už na báze stanovenia maximálnej vzdialenosti uzlov od obslužného centra alebo stanovenia optimálneho počtu obslužných centier.

² BREZINA I. - ČIČKOVÁ Z. - GEŽÍK P. - PEKÁR J.: *Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009.

V literatúre je rozpracované veľké množstvo modelov, z ktorých väčšina je založená na koncepcii pokrytia. Všeobecne existujú dve základné koncepcie – jedna si kladie za cieľ pokryť všetkých obyvateľov minimálnym počtom obslužných centier – tzv. lokačno-pokryvacia úloha (Location Set Covering Problem – LSCP), druhá má pri obmedzenom počte obslužných centier maximalizovať pokrytie obyvateľov (Maximal Covering Location Problem – MCLP).³

Najčastejšie využívaným konkrétnym lokačným modelom riešeným pre problematiku zberných miest určených na zber separovaného odpadu je prípad optimálneho umiestnenia obslužného centrálného zberného miesta. Vychádza z predpokladu, že centrálné obslužné zberné miesto možno lokalizovať len do vopred daných uzlov, príp. existujúcich zberných miest, pretože sa nachádzajú na existujúcej cestnej sieti. Úlohou v praxi môže byť optimálne umiestnenie centrálného skladu, centrálného zberného miesta, miesta spracovania odpadu alebo výrobného závodu. Na prepravu sa používajú rovnorodé dopravné prostriedky a hlavným cieľom je minimalizácia prepravných nákladov (napr. najazdená vzdialenosť), z takto lokalizovaného obslužného centrálného zberného miesta do jednotlivých ostatných zberných miest (uzlov). Výhoda vhodne vybraného obslužného centra sa môže prejavovať nielen v úsporách v palive, ale aj v čase, v nižšom opotrebení áut a v celkovej efektívnosti práce.

Existencia už vybudovaných zberných miest rozširuje využitie lokačných modelov nie len na lokalizáciu centrálnych zberných miest, ale umožňuje aj preverovanie efektívnosti rozmiestnenia už existujúcich zberných miest. Zároveň tieto modely slúžia i ako nástroj optimalizácie k vybudovávaniu nových zberných miest do siete už existujúcich zberných miest, a tým sa snažia minimalizovať napr. vzdialenosť pre všetkých obyvateľov v spádovej oblasti do daných zberných miest podľa vopred stanovených parametrov (najčastejší parameter je časová dostupnosť zberného miesta pre každého obyvateľa stanovená ako maximálna časová hranica).

Často riešenou otázkou v oblasti lokalizácie zberných miest je i minimalizácia počtu zberných miest pri dosiahnutí stanovených podmienok, resp. ohraničení. Modely, ktoré riešia túto otázku poskytujú presný počet zberných miest, ktoré je nutné vybudovať aby boli splnené všetky stanovené podmienky, ktoré môžu predstavovať časovú dostupnosť, kapacitnú dostupnosť či maximálne pokrytie zberného miesta.

3 OPTIMALIZÁCIA PREPRAVNÝCH TRÁS

Ako bolo v predchádzajúcej časti spomenuté, zberné miesta sa lokalizujú práve s cieľom minimalizácie prepravných nákladov, t.j. tak aby najazdené kilometre, príp. iné jednotky udávajúce vzdialenosť medzi zbernými miestami boli minimálne. Na minimalizáciu týchto nákladov ale vplýva i optimalizácia prepravných trás. Práve tá má za úlohu riešiť okružné úlohy, resp. úlohy určenia trás rozvozu a zvozu separovaného odpadu. Táto trieda úloh sa nazýva „úlohy rozvozu a zvozu“ (Vehicle Routing Problem – VRP). Pri týchto úlohách (pre potreby optimalizácie zberu separovaného odpadu sa budú myslieť hlavne úlohy zvozu) vzniká požiadavka aby do už určeného obslužného centrálného zberného miesta bolo z jednotlivých zberných miest odpadu odvezené určité požadované množstvo vyzbieraného separovaného odpadu pri minimálnych prepravných nákladoch.

³ PEKÁR J. - BREZINA I. - ČIČKOVÁ Z. - REIFF M.: *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. Bratislava. EKONÓM, 2012. - 226 s.

Okrem úloh rozvozu a zvozu sú často riešené i okružné úlohy, a to konkrétne úlohy obchodného cestujúceho (TSP - Travelling salesman problem). Pri týchto úlohách je cieľ obslúžiť každé zberné miesto v rámci zberu odpadu do centrálného zberného miesta, resp. daným dopravným prostriedkom prejsť každým zberným miestom a odvieť z neho nakumulovaný separovaný odpad do centrálného zberného miesta, príp. miesta ďalšieho spracovania.

Podstatou úlohy obchodného cestujúceho je nájsť optimálnu cestu, ktorá spočíva v prepojení určitého počtu uzlov – zberných miest, pričom začiatkový aj konečný uzol predstavuje centrálné zberné miesto a každý uzol – zberné miesto je v okružnej ceste zahrnuté práve raz. Pri takejto formulácii úlohy obchodného cestujúceho sa uvažuje len o jednom „obchodnom cestujúcom“, teda len o jednom obslužnom prostriedku (vozidle). Ďalej sa predpokladá, že kapacita tohto prostriedku je dostatočne veľká na to aby boli splnené požiadavky všetkých zberných miest. Vo všeobecnosti však v zbernom mieste môže byť vyzbierané také množstvo separovaného odpadu, ktoré presahuje kapacitu jedného prostriedku alebo musí rešpektovať iné obmedzenia týkajúce sa napr. času otvorenia zberného miesta, obsluhy zberného miesta a pod.

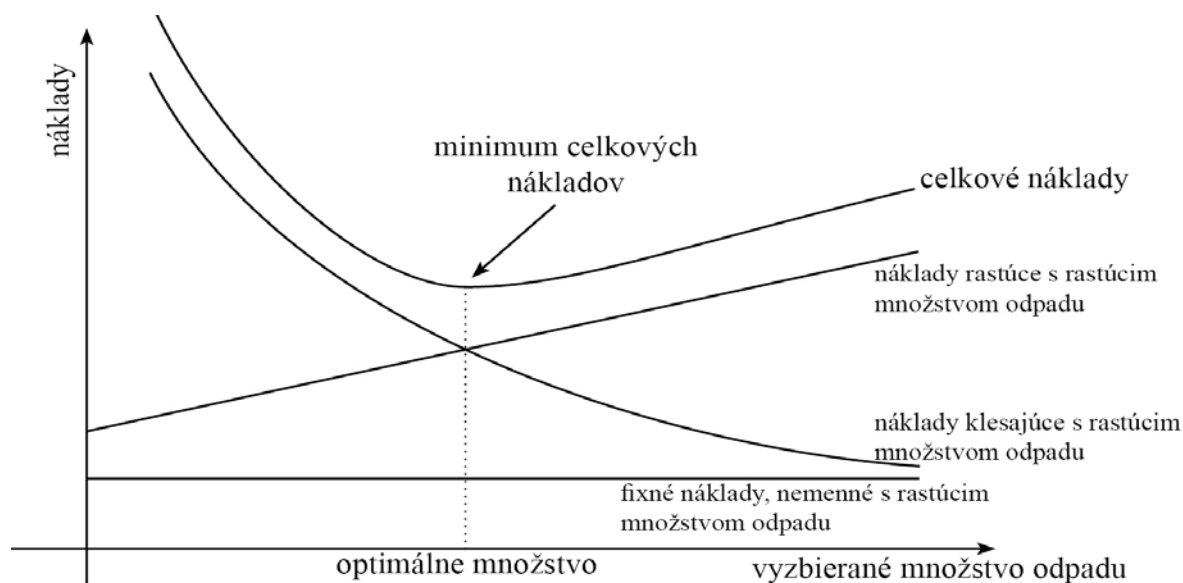
Optimalizácia prepravných trás často spočíva v eliminácii tzv. kyvadlových jazd, kedy z centrálného zberného miesta odchádza obslužný prostriedok (vozidlo) do zberných miest, naloží vyzbieraný separovaný odpad a vracia sa do centrálného zberného miesta. Teda pri každej jazde tohto prostriedku je začiatkový a koncový uzol (centrálné zberné miesto) totožný a každý uzol – zberné miesto je v okružnej trase zahrnuté práve raz. Trasu je potrebné určiť tak aby každý uzol – zberné miesto navštívil jeden obslužný prostriedok iba raz a pri preprave sa nesmie prekročiť kapacita vozidla. Cieľom za týchto podmienok je nájsť najkratšiu alebo v inom zmysle najmenej nákladnú cestu. Pri tejto formulácii sa uvažuje, že požiadavky jednotlivých uzlov možno zabezpečiť najviac jednou jazdou obslužného prostriedku.

4 OPTIMALIZÁCIA ZÁSBOVACÍCH PROCESOV

Všetky modely v tejto skupine majú za cieľ optimalizáciu nákladov spojených so zásobovacími procesmi, resp. minimalizáciu nákladovej funkcie tvorenej týmito nákladmi. Majú spoločný základ v EOQ prístupe k modelovaniu zásob, ktorý hľadá také množstvo, pri ktorom funkcia celkových nákladov zohľadňuje nielen náklady na prevádzku zberného miesta ale i náklady spojené s jeho obsluhou, príp. náklady spojené s výkupom surovín (obrázok 2). Množstvo zásob – množstvo separovaného odpadu, ktoré je potom určené na základe nájdenia lokálneho minima funkcie celkových nákladov, je považované za optimálne množstvo, ktoré je potrebné odvieť zo zberného miesta do centrálného zberného miesta.

Tieto modely sú zamerané na nájdenie optimálnej veľkosti množstva vyzbieraného separovaného odpadu, teda množstva, ktoré sa jednorazovo bude odvázať istým obslužným prostriedkom zo zberného miesta. Ďalšou veličinou, ktorú sa tieto modely snažia optimalizovať je cyklus, ktorý je charakterizovaný ako čas medzi vyprázdnením zberného miesta a okamihom, kedy je vyzbierané stanovené optimálne množstvo separovaného odpadu.

Proces stanovenia spomínaného optimálneho množstva je náročný kvôli stochastickosti zberu separovaného odpadu a súvisí najmä s neurčitým načasovaním a objemom vyzbieraného odpadu. Právě z tohto dôvodu sú tieto modely riešené vo väčšine prípadov práve simulačnou optimalizáciou, ktorá zabezpečuje isté odhady na daných hladinách významnosti.



Obrázok 2 – Funkcia nákladov zberného miesta

ZÁVER

Príspevok neuvádza konkrétne príklady z praxe alebo konkrétne modely, či prístupy k riešeniu optimalizácie zberu separovaného odpadu. Jeho cieľom je poskytnúť ucelený prehľad modelov a prístupov k optimalizácii ako i načrtnúť istý postup tejto optimalizácie. Uvádza ciele, ktoré sú v jednotlivých oblastiach optimalizácie zberu separovaného odpadu ako i postupy a parametre, ktoré ju ovplyvňujú. Rozdeľuje optimalizáciu do troch oblastí, kedy v prvej oblasti sa určí optimálna lokalizácia zberných miest ako aj centrálného zberného miesta. Následne určí spôsob, ako sa budú dané zberné miesta obsluhovať a ako sa bude získavať odpad z týchto zberných miest. V poslednej časti vysvetľuje ako sa stanovuje množstvo odpadu, ktoré bude zväšané do centrálného zberného miesta.

Použitá literatúra

BREZINA I. - ČIČKOVÁ Z. - GEŽÍK P. - PEKÁR J.: *Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009.

BREZINA, I. - GEŽÍK, P. - ČIČKOVÁ, Z.: *Manažment reverznej logistiky*. In *Ekonomika a manažment* : vedecký časopis Fakulty podnikového manažmentu Ekonomickej univerzity v Bratislave 2009. roč. 6, č. 1, s. 45-60.

DEKKER, R. - FLEISCHMANN, M. - INDERFURTH, K. - WASSENHOVE, L. N. v. (Eds.): *Reverse Logistics*. Berlin : Springer-Verlag, 2004.

PEKÁR J. - BREZINA I. - ČIČKOVÁ Z. - REIFF M.: *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. Bratislava. EKONÓM, 2012. - 226 s.

Kontaktné údaje

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: pavel.gezik@euba.sk

MODELOVANIE RIZIKA NEPLATENIA POHLĀDĀVOK

RECEIVABLES NONPAYMENT RISK MODELLING

Eduard Hozlár

Abstrakt

Príspevok charakterizuje pohľadávky ako zdroj financovania podnikateľských aktivít. V príspevku je tiež navrhnutá metodológia modelovania rizika spojeného s možnosťou nezaplatenia pohľadávok. Táto metodológia je založená na optimalizačných technikách a využíva prístupy lineárneho a cieľového programovania.

Kľúčové slová: pohľadávky, funkcia intenzity rizika, optimalizácia

Abstract

The paper characterizes receivables as a source of corporate funding. The paper also suggests a methodology of risk modeling connected with receivables nonpayment. The methodology is based on optimization techniques and uses linear programming and goal programming approaches.

Keywords: receivables, risk intensity function, optimization

1 MECHANIZMUS FINANCOVANIA PODNIKU PROSTREDNÍCTVOM FAKTORINGOVÉHO ÚVEROVANIA

Pre vysvetlenie mechanizmu faktoringu budeme predpokladať existenciu dodávateľsko-odberateľských vzťahov medzi výrobcom tovaru a jeho odberateľmi, ktorých je veľký počet (napríklad obchody, v ktorých sa tento tovar predáva).

Pohľadávku možno vo všeobecnosti vymedziť ako právo vznikajúce jednému účastníkovi (veriteľovi, dodávateľovi) požadovať plnenie od druhého účastníka (dlžníka, odberateľa), vzniknuté z určitého záväzkového vzťahu (objednávka, dodávka).

Z ekonomického hľadiska možno pohľadávky charakterizovať ako určitú formu poskytnutia obchodného úveru obchodnému partnerovi.

V účtovníctve pohľadávky predstavujú majetkovú zložku podniku, ktorá vznikla z uskutočnených účtovných prípadov v minulom období a peniaze z nich budú plynúť v budúcnosti. Pohľadávky sú nehmotným majetkom, majetkovým právom na získanie peňažnej úhrady od odberateľov najmä za poskytnuté výkony, ako sú dodávky tovarov, výrobkov, prác a služieb. V tomto prípade ide o pohľadávky z obchodného styku. V účtovníctve je sledované celé obdobie existencie pohľadávky, t. j. od okamihu jej vzniku napr. pri fakturácii výkonov až po jej zánik, t.j. rôzne formy jej reálneho speňaženia (fyzické peniaze) alebo iného vyrovnania, pričom sa akceptuje ich všeobecná právna úprava, ako aj daňová legislatíva.

Vo všeobecnosti sa pohľadávky ku dňu vzniku členia podľa dohodnutej doby splatnosti na krátkodobé pohľadávky s dohodnutou dobou splatnosti do jedného roka a na dlhodobé pohľadávky s dohodnutou dobou splatnosti nad jeden rok.

Na výrobu tovaru za určité obdobie (napr. mesiac) dodávateľský podnik vynaloží známe množstvo finančných prostriedkov, ktoré sa premietnu do jeho ceny. Odberatelia kúpia od

dodávateľa vyrobený tovar za danú cenu, avšak požadujú odloženie platby kúpnej ceny o niekoľko období (mesiacov). Pre výrobu v ďalšom období musí mať dodávateľský podnik k dispozícii ďalšie finančné prostriedky, pretože sa mu v predchádzajúcom období odberatelia nezaplatili za dodaný tovar. Výrobca má však k dispozícii pohľadávky pred lehotou splatnosti voči svojim odberateľom.

Za účelom financovania takýchto podnikov si banky založili špeciálne finančné inštitúcie – faktoringové spoločnosti. Tieto ponúkajú dodávateľským podnikom možnosť odkúpenia pohľadávok, ktoré im vznikli dodaním tovaru odberateľom a sú ešte pred lehotou splatnosti. Na dobu do splatnosti odkúpených pohľadávok ponúkajú dodávateľovi úver, sadzba a výška ktorého závisia od objemu a bonity odkúpených pohľadávok a tiež od bonity dodávateľa.

Faktoringová spoločnosť odkupuje pohľadávky dodávateľov spravidla za 100% menovitej hodnoty pohľadávky, a to v prípade, keď riziko z nezaplatenia znáša dodávateľ. Keď Faktoringová spoločnosť prevezme aj riziko z nezaplatenia, kúpna cena pohľadávok je podstatne nižšia.

Faktoringová spoločnosť kúpnu cenu pohľadávok nezaplatí hneď, ale je dohodnuté, že splatnosť kúpnej ceny pohľadávky je dňom úhrady odberateľa za dodaný tovar. Odkúpením pohľadávok voči odberateľom sa zmenil pôvodný veriteľ (dodávateľ) na nového veriteľa (faktoringová spoločnosť), a preto dlžník (odberateľ) je povinný plniť (platiť za dodaný tovar) novému veriteľovi.

Faktoringová spoločnosť má teda vo svojich aktívach jednak množstvo pohľadávok voči odberateľom dodávateľa a jednu pohľadávkou voči dodávateľovi za poskytnutý úver. V pasívach má záväzok zaplatiť dodávateľovi cenu odkúpených pohľadávok.

Dodávateľ má v aktívach namiesto množstva pohľadávok voči svojim odberateľom (zaplatiť kúpnu cenu za dodaný tovar) jednu pohľadávkou voči Faktoringovej spoločnosti (zaplatiť cenu postúpených pohľadávok). V pasívach má záväzok zaplatiť faktoringovej spoločnosti poskytnutý úver.

Tým, že faktoringová spoločnosť prevzala pohľadávky odberateľa do svojho majetku, prevzala aj všetku starostlivosť o tieto pohľadávky. Dodávateľ tak nemusí vykonávať správu pohľadávok (evidencia, upomienkovanie, evidencia platieb, ďalšie vymáhanie, atď.)

1.1 Analýza vstupných údajov pre faktoringové financovanie

Z hore uvedeného je zrejmé, že pevne daná je menovitá hodnota každej pohľadávky. S každou pohľadávkou je spojená aj doba jej splatnosti, preto sa pohľadávky členia na pohľadávky pred splatnosťou a pohľadávky po splatnosti (kedy existuje možnosť uplatniť si sankcie za oneskorené plnenie).

Absolútne parametre vplyvajúce na mieru rizikovosti okrem iných sú:

- celková výška pohľadávok (a jej vývoj v čase)
- objem a počet pohľadávok po lehote splatnosti (a jeho vývoj v čase)
- veková štruktúra pohľadávok (a jej vývoj v čase, pričom môže ísť o štruktúru v absolútnom vyjadrení, teda v peňažných jednotkách, alebo o štruktúru v percentuálnom vyjadrení voči celkovému objemu pohľadávok)

Dôležitými parametrami pre posúdenie potenciálneho obchodného partnera (odberateľa aj dodávateľa) analyzujeme jeho:

- solventnosť, čiže okamžitú platobnú schopnosť
- likviditu, čiže potenciálnu platobnú schopnosť

- zadlženosť, čiže jeho kapitálovú štruktúru (samostatne alebo vo vzťahu k majetkovej štruktúre)

Pohľadávky z hľadiska ich vymožiteľnosti sa členia na:

- Neklasifikované pohľadávky: pohľadávky do lehoty splatnosti, kde dlžník je platobne schopný a súčasne pohľadávku nie je možné zaradiť do skupiny kde dlžník je v likvidácii, konkurze, v exekúcii, prípadne sa pohľadávka vymáha súdne.
- Klasifikované pohľadávky triedy I: pohľadávky po lehote splatnosti, kde dlžník je platobne schopný, dočasne platobne neschopný, alebo pohľadávky do lehoty splatnosti, kde dlžník je platobne schopný, dočasne platobne neschopný alebo platobne neschopný a súčasne pohľadávku nie je možné zaradiť do skupiny, kde dlžník je v likvidácii, konkurze, v exekúcii, prípadne sa pohľadávka vymáha súdne
- Klasifikované pohľadávky triedy II: pohľadávky po lehote splatnosti, kde dlžník je dlhodobo platobne neschopný.
- Klasifikované pohľadávky triedy III: pochybné a sporné pohľadávky po lehote splatnosti a pohľadávky po lehote splatnosti, kde je dlžník platobne neschopný.
- Premlčané pohľadávky
- Pohľadávky voči subjektom v likvidácii
- Pohľadávky voči subjektom v konkurze
- Pohľadávky súdne vymáhané - aktívne súdne spory a exekúcie

Dôležitú úlohu tiež hrá zabezpečenie plnenia záväzku (najmä zabezpečenie záložným právom, ručením, ale aj inými zabezpečovacími nástrojmi).

1.2 Výstup pre faktoringové financovanie

Na základe posúdenia rizikovosti dodávateľa a jeho pohľadávok, faktoringová spoločnosť navrhne klientovi (dodávateľovi) nasledovné hodnoty parametrov:

1. Za prevzatie správy pohľadávok, analýzu odberateľov a ďalšie služby spojené so správou pohľadávok – **faktoringový poplatok vo výške $fp\%$** z objemu odkúpených pohľadávok;
2. **Úverový limit vo výške UL (v EUR)**, ktorý závisí od bonity klienta a zabezpečenia úveru
3. **Percento financovania** v rámci úverového limitu $pf\%$ z objemu odkúpených pohľadávok pred lehotou splatnosti
4. **Úroková sadzba $\% p.a.$** pre výpočet úroku zo skutočne čerpaných úverových prostriedkov.

V praxi sa faktoringový poplatok v priemere pohybuje na úrovni 0,5 až 1,5 %, priemerné percento financovania 70% až 80% pre typ faktoringu s regresom, kedy riziko z nezaplatenia zostáva na klintovi - dodávateľovi. Úverový limit a úroková sadzba sa spravidla určujú podľa podmienok financujúcej banky.

2 MODELOVANIE RIZIKA NEZAPLATENIA POHL'ADÁVKY

Nech R je množina ukazovateľov, ktoré opisujú pohľadávku a dlžníka a nech F je množina funkcií, ktoré opisujú intenzitu rizika nezaplatenia pohľadávky, kde pre každé $r \in R$ máme vybranú funkciu $f_r \in F$, ktorá pre vybranú hodnotu d daného ukazovateľa definuje

$$f_r(d) \in \langle 0,1 \rangle$$

kde

$$f_r(d) \begin{cases} = 0, & \text{nulová pravdepodobnosť, že pohľadadá nebude zaplatená} \\ \approx 0, & \text{nízka pravdepodobnosť, že pohľadadá nebude zaplatená} \\ \approx 1, & \text{vysoká pravdepodobnosť, že pohľadadá nebude zaplatená} \\ = 1, & \text{pravdepodobnosť, že pohľadadá nebude zaplatená s istotou} \end{cases}$$

Ak w_i je váha, ktorá vyjadruje dôležitosť ukazovateľa r , kde

$$\sum_{r \in R} w_r = 1, \quad w_r \geq 0, \quad \forall r,$$

potom pre pohľadávku i dostávame jej výstupný tok

$$O_i = \sum_{r \in R} w_r f_r(d_i) \in \langle 0,1 \rangle,$$

kde d_i je hodnota ukazovateľa pre pohľadávku i .

Predpokladajme, že z historických údajov poznáme množinu I pohľadávok, ktorá sa skladá z dvoch podmnožín I_1 a I_2 , kde

$$I = I_1 \cup I_2, \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

a podmnožina I_1 obsahuje všetky pohľadávky, ktoré boli zaplatené a množina I_2 obsahuje všetky pohľadávky, ktoré neboli zaplatené. Nech $l \in \langle 0,1 \rangle$ je taká úroveň celkovej rizikovosti pohľadávky meranej jej výstupným tokom, pre ktorú platí, že výstupné toky do úrovne tejto hodnoty reprezentujú zaplatené pohľadávky a výstupné toky nad touto úrovňou definujú pohľadávky, ktoré neboli zaplatené.

Úlohu nájsť zodpovedajúcu úroveň celkovej rizikovosti l spolu so zodpovedajúcimi váhami dôležitosti jednotlivých ukazovateľov možno formulovať ako nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$\min \quad l$$

za podmienok

$$\sum_r w_r = 1, \quad w_r \geq 0, \quad \forall r,$$

kde ε je dostatočne malé kladné číslo.

Ak na základe historických analýz existuje predstava o úrovni celkovej rizikovosti l , potom pre nájdenie zodpovedajúcich váh významnosti jednotlivých ukazovateľov možno použiť nasledujúcu úlohu cieľového programovania

min α
za podmienok

$$\begin{aligned} O_i - \alpha &\leq l - \varepsilon, i \in I_1 \\ O_i + \alpha &\geq l, i \in I_2 \\ \sum_r w_r &= 1, w_r \geq 0, \forall r, \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

kde α je tzv. minimaxová premenná. Lineárne programovanie možno taktiež využiť na celkové identifikovanie dôležitosti vybraného ukazovateľa j , pretože nulová optimálna hodnota účelovej funkcie nasledovnej úlohy lineárneho programovania

min w_j
za podmienok

$$\begin{aligned} O_i &\leq l - \varepsilon, i \in I_1 \\ O_i &\geq l, i \in I_2 \\ \sum_r w_r &= 1, w_r \geq 0, \forall r, \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

znamená, že tento ukazovateľ nemá žiaden efekt na identifikáciu rizika toho, že pohľadávka nebude zaplatená.

Použitá literatúra

1. DANIEL, P., 2013: Správa a vymáhanie pohľadávok. IURA Edition, Bratislava
2. MLYNAROVÍČ, V., 1998: Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania. Ekonóm, Bratislava.
3. MLYNAROVÍČ, V. – HOZLÁR, E., 1993: Viackriteriálne rozhodovanie. ES Ekonomická univerzita, Bratislava, pp. 210.

Kontaktné údaje

doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.

Univerzita Komenského, Fakulta sociálnych a ekonomických vied,

Mlynské Luhy 4, Bratislava

email: eduard.hozlar@fses.uniba.sk

ZOHLADNENIE MOŽNÝCH NELINEARÍT PRI TESTOVANÍ PLATNOSTI TEÓRIE PARITY KÚPNEJ SILY[#]

CONSIDERING OF POSSIBLE NON-LINEARITIES IN TESTING OF THE PURCHASING POWER PARITY THEORY

Michaela Chocholatá

Abstrakt

Predmetom príspevku je poukázanie na existenciu možných nelinearít pri testovaní platnosti parity kúpnej sily - PPP (Purchasing Power Parity). Vzhľadom na často problematickú platnosť PPP, sa v poslednom období v literatúre možno stretnúť s testovaním PPP na báze nelineárnych prístupov. V príspevku prezentujeme prehľad literatúry využívajúcej nelineárne prístupy a prezentujeme dva z nich, a to KSS test Kapetaniosa, Shina a Snella a Endersov-Ludlowov (EL) test s uvedením niektorých ich hlavných výhod.

Kľúčové slová: parita kúpnej sily, nelinearita, KSS test, EL test

Abstract

The object of this paper is referred to the existence of possible non-linearities in testing of the PPP (Purchasing Power Parity) validity. Taking into account the often problematic validity of PPP, it is possible during the recent period to encounter in the literature with the testing of PPP based on non-linear approaches. In this paper we present a review of the literature employing the non-linear approaches, and we present two of them, KSS test of Kapetanios, Shin and Snell, and also the Enders and Ludlow (EL) test, dealing with some of their main advantages.

Keywords: purchasing power parity, non-linearity, KSS test, EL test

1 ÚVOD

Teória parity kúpnej sily – PPP (Purchasing Power Parity), ktorá zohľadňuje prepojenie medzi výmennými kurzami a vývojom zodpovedajúcich cenových hladín, zohráva už pomerne dlhý čas významnú úlohu tak v oblasti teoretického výskumu ako aj v empirickej oblasti. Prístupy k testovaniu platnosti tejto teórie sa v priebehu času vyvíjali, pričom v poslednom období sa možno stretnúť so štúdiami, v ktorých autori poukazujú na skutočnosť, že prispôsobovanie sa reálneho výmenného kurzu smerom k PPP má charakter nelineárneho procesu, napr. v dôsledku existencie transportných nákladov, bariér obchodu a oficiálnych intervencií na trhoch so zahraničnými menami. Obstfeld a Taylor (1997) a O'Connell a Wei (2002) skúmali nelineárnu povahu procesu prispôsobenia pomocou modelu TAR (Threshold Autoregressive). Autormi nelineárneho testu jednotkového koreňa, v ktorom je nulová hypotéza o existencii jednotkového koreňa testovaná voči alternatívnej hypotéze vychádzajúcej z modelu ESTAR (Exponential Smooth Transition Autoregression),

[#] Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0595/11 „Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód“.

sú Kapetanios, Shin a Snell (2003), pričom pre tento test sa v literatúre používa označenie KSS. Pri analýze dynamického správania odchýlok od PPP využili prístup nelineárneho prispôsobenia pomocou modelu ESTAR napr. Cuestas (2007) a Žďárek (2012).

Cuestas (2007) analyzoval empirickú platnosť PPP v 8 krajinách strednej a východnej Európy s využitím dvoch skupín testov jednotkového koreňa (modely ESTAR a nelineárne deterministické trendy) s cieľom otestovať nelineárny charakter vo vývoji reálneho výmenného kurzu. Autor v závere konštatuje, že po zohľadnení možných zdrojov nelinearity výsledky preukázali empirickú platnosť PPP v analyzovaných krajinách. Žďárek (2012) testoval relatívnu verziu PPP pre 12 tranzitívnych ekonomík (nových členských štátov EÚ) s využitím štandardných testov jednotkového koreňa a ich robustných verzií. Hoci výsledky štandardných lineárnych testov nie sú jednoznačné, robustné verzie testov (zohľadnenie prítomnosti nelinearit v časových radoch) aspoň čiastočne potvrdzujú platnosť teórie PPP.

Na testovanie stacionarity odchýlok od PPP vyvinuli Enders a Ludlow (2002) modifikáciu ADF (Augmented Dickey-Fuller) testu s využitím Fourierovej aproximácie, pričom tento test je aplikovateľný aj pri testovaní rezíduí z Engleho-Grangerovej kointegračnej metódy. Na výhody Fourierovej aproximácie v porovnaní s alternatívnymi prístupmi typu TAR alebo ESTAR, keďže v prípade Fourierovej transformácie nie je nutné špecifikovať funkčnú formu alternatívnej hypotézy, poukazujú Jiménez-Martín a Robles-Fernández (2005). Chi-Wei (2012) testoval platnosť dlhodobej PPP z nelineárneho hľadiska pre 7 krajín strednej a východnej Európy s využitím testu stacionarity s Fourierovou funkciou, pričom potvrdil platnosť PPP pre dve krajiny – Bulharsko a Rumunsko.

Predmetom tohto príspevku je prezentácia novších prístupov testovania platnosti teórie PPP s využitím testov zohľadňujúcich možné nelinearity, a to testu KSS a Endersovho-Ludlowovho (EL) testu s cieľom poukázať na ich výhody v porovnaní so štandardným ADF testom.

2 KAPETANIOSOV, SHINOV A SNELLOV (KSS) TEST

Jedným z najpoužívanejších testov na identifikovanie rádu integrácie časového radu je ADF test. V prípade KSS testu je nulová hypotéza rovnaká ako v prípade ADF testu, alternatívna hypotéza však vychádza z nasledujúcej špecifikácie modelu ESTAR:

$$\Delta q_t = \gamma q_{t-1} \left[1 - \exp\{-\theta q_{t-1}^2\} \right] + \varepsilon_t, \quad \theta \geq 0, \quad (1)$$

kde q_t je logaritmus reálneho výmenného kurzu, $\left[1 - \exp\{-\theta q_{t-1}^2\} \right]$ je exponenciálna tranzitívna funkcia zachytávajúca nelineárne prispôsobovanie a ε_t označuje rovnako nezávisle rozdelené náhodné zložky s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom. Nulová hypotéza o existencii jednotkového koreňa v q_t (t. j. $\Delta q_t = \varepsilon_t$) implikuje, že $\theta = 0$ (a teda $\left[1 - \exp\{-\theta q_{t-1}^2\} \right] = 0$). KSS test teda spočíva v testovaní nasledujúcich hypotéz: $H_0 : \theta = 0$ a $H_1 : \theta > 0$. Vzhľadom na to, že γ v rovnici (1) nie je za predpokladu platnosti nulovej hypotézy identifikované, nemôžeme priamo testovať $H_0 : \theta = 0$. Autori testu KSS navrhujú preto preparametrizovanie modelu (1) pomocou Taylorovej aproximácie prvého rádu, čo vedie k získaniu nasledujúceho modelu (pozri napr. Zhou, Bahmani-Oskooee a Kutun (2008)):

$$\Delta q_t = \delta q_{t-1}^3 + \xi_t \quad (2)$$

Vo všeobecnejšom prípade, ak uvažujeme so sériovou koreláciou náhodných zložiek v (2), môžeme tento model rozšíriť na tvar:

$$\Delta q_t = \sum_{j=1}^p \rho_j \Delta q_{t-j} + \delta q_{t-1}^3 + \xi_t, \quad (3)$$

kde p je počet oneskorení zabezpečujúci korekciu sériovej korelácie náhodných zložiek. Nulová hypotéza o nestacionarite vychádzajúc z modelu (2) alebo (3) má potom tvar: $H_0 : \delta = 0$ oproti alternatívnej $H_1 : \delta < 0$. Kapetanios, Shin a Snell (2003) ukázali, že zodpovedajúca t -štatistika t_{NL} nemá asymptoticky štandardné normálne rozdelenie, preto jej asymptotické kritické hodnoty získali pomocou stochastických simulácií.

3 ENDERSOV – LUDLOWOV (EL) TEST

Pri analýze platnosti PPP sa možno stretnúť s viacerými modelmi, ktoré berú do úvahy transakčné náklady, a z ktorých je zároveň zrejmé, že proces prispôsobovania sa rovnovážnej úrovni je nevyhnutne nelineárnym stochastickým procesom. Takýto nelineárny proces je však problematické zachytiť na základe využitia lineárnych testov jednotkového koreňa (Jiménez-Martín a Robles-Fernández (2005)).

Enders a Ludlow (2002) modifikovali ADF test s cieľom zohľadniť nelineárny vývoj reálneho výmenného kurzu, pričom využili Fourierovu aproximáciu. Takto modifikovaný ADF test potom vychádza z modelu v tvare:

$$q_t = \alpha(t)q_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta q_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4)$$

kde q_t je logaritmus reálneho výmenného kurzu a ε_t je stochastická náhodná zložka. Špecifikácia funkčnej formy $\alpha(t)$ nie je nutná, keďže je ju možné aproximovať dostatočne dlhým Fourierovým radom. $\alpha(t)$ s využitím jednej frekvencie možno potom písať v tvare (Enders a Ludlow (2002), Jiménez-Martín a Robles-Fernández (2005)):

$$\alpha(t) = a_0 + a_1 \sin \frac{2\pi k}{T} t + b_1 \cos \frac{2\pi k}{T} t \quad (5)$$

kde k je celé číslo z intervalu $\langle 1, T/2 \rangle$. V súvislosti s ADF testom je vhodné poznamenať, že štandardnej forme ADF testu zodpovedá situácia, keď v (5) $a_1 = b_1 = 0$. Jiménez-Martín a

Robles-Fernández (2009) poukazujú na skutočnosť, že frekvencie poskytujú cenné informácie o dynamike analyzovaného časového radu. Prístup zohľadňujúci frekvencie je užitočný pri identifikácii dĺžky obchodných cyklov a rôznych sezónnych výkyvov, umožňuje kvantitatívnu definíciu cyklu a tiež rozlíšenie dlhodobých, strednodobých a krátkodobých komponentov podľa požiadaviek analytika.

EL test možno využiť aj pri testovaní platnosti PPP s využitím Engleho – Grangerovho kointegračného prístupu. Budeme vychádzať z chápania PPP ako dvojstranného vzťahu (6):

$$e_t = \theta_0 + \theta_1(p_t - p_t^*) + \varepsilon_t \quad (6)$$

kde e_t predstavuje logaritmus nominálneho výmenného kurzu, p_t a p_t^* označujú logaritmy domácej a zahraničnej cenovej hladiny, θ_0 a θ_1 sú neznáme parametre a ε_t reprezentuje odchýlku od dlhodobej rovnováhy v období t .

Ak symbolom $\hat{\varepsilon}_t$ označíme časový rad odchýlok od dlhodobej rovnováhy, aplikáciou MNŠ na vzťah (6) dostávame:

$$\hat{\varepsilon}_t = e_t - \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1(p_t - p_t^*) \quad (7)$$

V prípade, že uvažujeme s nelineárnym procesom prispôsobenia, môžeme $\hat{\varepsilon}_t$ zapísať v tvare:

$$\hat{\varepsilon}_t = \alpha(t)\hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta \hat{\varepsilon}_{t-i} + \xi_i \quad (8)$$

kde $\alpha(t)$ je definované v (5), δ je neznámy parameter a ξ_i je náhodná zložka. Namiesto hľadania špecifickej formy funkcie nelineárneho prispôsobenia sa celý problém redukuje na nájdenie najvhodnejších hodnôt a_0 , a_1 , b_1 a k v modeloch (4), resp. (8) a (5). Popis nutných a postačujúcich podmienok pre návratnosť procesu prispôsobenia k strednej hodnote možno nájsť napr. v Jiménez-Martín a Robles-Fernández (2005), ktorí zároveň poukazujú na vhodnosť použitia EL prístupu v porovnaní s alternatívami typu TAR, prípadne ESTAR. Pri aplikácii popisovanej procedúry s využitím Fourierovej aproximácie totiž nie je nutné špecifikovať funkčnú formu alternatívnej hypotézy.

4 ZÁVER

Teória PPP je dôležitou súčasťou viacerých makroekonomických modelov, overovanie a testovanie jej platnosti sa teda javí ako kľúčové. Zanedbanie existencie možných nelinearít pri analýze PPP môže však viesť nesprávnemu záveru, že v skutočnosti stabilný nelineárny vzťah medzi výmenným kurzom a cenami má nestacionárny charakter. Predmetom príspevku bolo preto poukázať na možné prístupy k zohľadneniu nelinearít pri testovaní platnosti PPP s cieľom prijatia správneho záveru.

Použitá literatúra

1. CUESTAS, J. C. 2007. Purchasing Power Parity in Central and Eastern European Countries: an Analysis of Unit Roots and Nonlinearities. Working Paper WP-AD 2007–22, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S. A., 2007, October, 16 p.
2. ENDERS, W. – LUDLOW, J. 2002. Non-linear decay: Tests for an attractor using a Fourier approximation. Working Paper 01-02-02, Department of Economics, Finance and Legal Studies, University of Alabama, 2002.
3. CHI-WEI, S. 2012. Flexible Fourier stationary test in purchasing power parity for Central and Eastern European countries. In Ekonomický časopis, Bratislava: Ekonomický ústav SAV: Prognostický ústav SAV, ISSN 0013-3035, 2012, roč. 60, č. 1, s. 19-31.
4. CHOCHOLATÁ, M. 2013. Vybrané prístupy k analýze výmenných kurzov a ich interakcií. Predložená habilitačná práca, FHI EU v Bratislave, 2013, 135s.
5. JIMÉNEZ-MARTÍN, J. A. – ROBLES-FERNÁNDEZ, L. 2005. Non-linear adjustment to purchasing power parity: an analysis using Fourier approximations. [online]. Universidad Complutense de Madrid, 05/6, 2005. 24 p. [cit. 2013.08.20]. Dostupné na internete: <http://eprints.ucm.es/7901/1/0508.pdf>.
6. JIMÉNEZ-MARTÍN, J. A. – ROBLES-FERNÁNDEZ, L. 2009. PPP: Delusion or Reality? Evidence from a Nonlinear Analysis (March 10, 2009). Open Economies Review, Forthcoming. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1356809>.
7. KAPETANIOS, G. – SHIN, Y. – SNELL, A. 2003. Testing for a unit root in the nonlinear STAR Framework, In Journal of Econometrics, 2003, vol. 112, p. 359-379.
8. OBSTFELD, M. – TAYLOR, A. 1997. Non-linear Aspects of Goods-Market Arbitrage and Adjustment: Heckscher's Commodity Point Revisited. In Journal of Japanese and International Economics, 1997, vol. 11, p. 441-479.
9. O'CONNELL, P. – WEI, S. 2002. The bigger they are the harder they fall. In Journal of International Economics, 2002, vol. 56, p. 21-53.
10. ZHOU, S. – BAHMANI-OSKOOEE, M. – KUTAN, A.M. 2008. Purchasing Power Parity before and after the Adoption of the Euro. In Review of World Economics, 2008, Vol. 144, No. 1, p. 134-150.
11. ŽDÁREK, V. 2012. Testing the Relative PPP Hypothesis in CEE States-Does the 'PPP Puzzle' Still Keep up? In ACTA VŠFS, 2012, vol. 6, No. 2, p. 108-135.

Kontaktné údaje

Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: michaela.chocholata@euba.sk

INFORMAČNÉ SYSTÉMY NA PODPORU RIADENIA DODÁVATEĽSKÝCH REŤAZCOV

INFORMATION SYSTEMS FOR SUPPLY CHAINS MANAGEMENT SUPPORT

Pavol Jurík

Abstrakt

V podmienkach globálnej ekonomiky nie je pre podniky jednoduché udržať si konkurencieschopnosť a spokojnosť zákazníkov. Firmy musia v záujme prežitia neustále hľadať možnosti na zlepšovanie, a preto čoraz viac upriamujú svoju pozornosť na svoje dodávateľské reťazce. Tento trend je umocnený aj rozvojom a napredovaním informačných technológií. Tento článok sa zaoberá možnosťami využitia informačných systémov ako nástrojov na zefektívnenie kooperácie a riadenia dodávateľských reťazcov.

Kľúčové slová

Dodávateľské reťazce, SCM, DIMS

Abstract

In the environment of global economy it is not easy for companies to remain competitive and keep customer satisfaction. Companies must constantly seek opportunities for improvement in order to survive, and thus they are increasingly focusing their attention on their supply chains. This trend is enhanced by the development and progress of information technology. This article explores the possibilities of using information systems as tools for streamlining of supply chains cooperation and management.

Keywords

Supply chains, SCM, DIMS

ÚVOD

Zvyšujúca sa konkurencia na globálnych trhoch ako aj stále vzrastajúce očakávania zákazníkov spôsobujú, že jednotlivé podnikateľské subjekty upriamujú čoraz väčšiu pozornosť na svoje dodávateľské reťazce. Podľa Misru, Khana a Singha: „*Dodávateľský reťazec je sieť dodávateľov, tovární, skladov, distribučných centier a obchodov, prostredníctvom ktorých sú suroviny získavané, transformované, vyrábané a dodávané zákazníkovi. Dodávateľský reťazec pozostáva zo všetkých aktivít spojených s tokom a transformáciou tovarov zo štádia suroviny až po hotový výrobok určený pre konečného spotrebiteľa, vrátane s tým súvisiacich informačných tokov. Manažment dodávateľských reťazcov je potom súbor synchronizovaných rozhodnutí a činností zameraných na efektívnu integráciu dodávateľov, výrobcov, dopravcov, skladov, predajcov a zákazníkov tak, aby*

správny produkt alebo služba mohla byť distribuovaná v správnom množstve na správnom mieste a v správnom čase za účelom dosiahnutia spokojnosti zákazníka a minimalizácie celkových nákladov.“ [1] Práve informácie sú hnacím motorom, ktorý poháňa rozvoj riadenia dodávateľských reťazcov smerom vpred a môžu hrať významnú úlohu v konkurenčnom boji firiem.

1 INFORMAČNÉ SYSTÉMY NA PODPORU RIADENIA DODÁVATEĽSKÝCH REŤAZCOV

Softvérové aplikácie typu SCM predstavujú spravidla analytické systémy pracujúce v reálnom čase, ktoré slúžia na riadenie toku produktu a s tým súvisiacich informácií naprieč celou sieťou dodávateľského reťazca. Ich úlohou je prispieť ku skvalitneniu základných operácií SCM, akými sú napr. výber dodávateľov, plánovanie výroby, plánovanie zásob, plánovanie dopravy, plánovanie dopytu a iné. Spočiatku sa jednalo o roztrieštené systémy, zamerané výlučne len na niektorú konkrétnu oblasť operácií v rámci dodávateľského reťazca, teda napr. len plánovanie výroby alebo len plánovanie zásob. V súčasnosti je však trendom integrovať všetky takéto operácie do jednotných a rozsiahlych SCM systémov. Rozvoj v oblasti telekomunikácií a informačných technológií teda umožňuje vznik nových SCM systémov spájajúcich dodávateľov, výrobcov, prepravcov, maloobchodné predajne a zákazníkov po celom svete a to spôsobom, ktorý podporuje takmer okamžitú výmenu informácií medzi jednotlivými subjektmi.

Podľa Kumara a Hillegersberga sú SCM systémy laikmi často zamieňané za ERP systémy. [2] Systémy ERP sú strategické nástroje, ktoré napomáhajú podnikateľským subjektom získať konkurenčnú výhodu tým, že umožňujú integráciu všetkých vnútro podnikových procesov a optimalizáciu spotreby disponibilných zdrojov. V prípade ERP sa však jedná o systémy pre jedinú spoločnosť a ich cieľom je integrácia a synchronizácia obchodných procesov iba v rámci danej spoločnosti. Dodávateľské reťazce sa však spravidla rozprestierajú naprieč mnohými spoločnosťami, z ktorých každá z nich do neho prispieva určitou časťou. Okrem toho jedna spoločnosť môže byť súčasťou aj viacerých dodávateľských reťazcov, pretože sa môže podieľať na tvorbe rôznych typov výrobkov. Z uvedeného je zrejmé, že ERP systémy nie sú vhodným nástrojom na podporu operácií v rámci riadenia dodávateľských reťazcov. Výrobcovia niektorých ERP systémov síce tvrdia, že ich systémy podporujú aj predaj, distribúciu, obchodné plánovanie, plánovanie výroby a podobne, no problémom je to, že sa vždy zameriavajú iba na jeden podnikateľský subjekt. Systém na podporu rozhodovania v rámci dodávateľského reťazca by mal umožňovať vykonávanie efektívnych rozhodnutí naprieč celým dodávateľským reťazcom a mal by podporovať integráciu a kooperáciu všetkých participujúcich subjektov. Okrem toho je potrebné zabezpečiť to, aby systém zbieral aktuálne údaje v reálnom čase v rámci celého dodávateľského reťazca, čo ERP systémy opäť neumožňujú, pretože sa zameriavajú vždy len na konkrétny jeden subjekt. [1]

Podľa Martiška prínosy SCM systémov pre výrobné firmy by sa mali prejavovať najmä v nákladovosti, vytváraní príležitostí pre zvýšenie obratu firmy a v návratnosti podnikových aktív. [3] Zníženie nákladov je pritom možné dosiahnuť najmä zvýšením transparentnosti

vzťahov v dodávateľskom reťazci, zvýšením produktivity pri zabezpečovaní dodávateľských vzťahov, minimalizáciou skladových zásob (a teda aj nákladov na prevádzku skladov), znižovaním obstarávacích nákladov na material, znižovaním výrobných a prepravných nákladov. Tvorba príležitostí na zvýšenie obratu firmy súvisí najmä so zvyšovaním priepustnosti logistického reťazca na vstupe, zrýchlením reakčnej schopnosti na požiadavky trhu, zrýchlením reakčného času na špecifické a neočakávané požiadavky a v neposlednom rade so získavaním presnejších a detailnejších informácií o stave vybavovania objednávok. Z hľadiska návratnosti podnikových aktív je možné dosiahnuť zlepšenie tým, že sa skráti čas trvania všetkých cyklov v dodávateľskom reťazci, urýchli sa obrat zásob, sprehľadnia sa peňažné toky v rámci dodávateľského reťazca, subjekty budú mať k dispozícii rýchle a kvalitné informácie o reálnom dopyte, zníži sa stav material zásob a surovín. [3]

V súčasnej dobe mnohé odvetvia a spoločnosti čelia dynamicky sa meniacemu konkurenčnému prostrediu. Ak sa chcú v tomto prostredí presadiť, potrebujú správne nástroje na podporu správnych rozhodnutí. Medzi faktory meniaceho sa prostredia môžeme zaradiť najmä skracovanie životných cyklov produktov, väčšia neistota a nepredvídateľnosť spotrebiteľského dopytu, sezónnosť záujmu o niektoré skupiny produktov, znižovanie počtu skladov, zvýšená tendencia využívať služby tretích strán, globalizáciu a iné. Väčšina existujúcich softvérových riešení pre dodávateľské reťazce však nedostatočne zohľadňuje takéto podmienky konkurenčného boja. Medzi ich časté nedostatky môžeme zaradiť napr. prílišné zameranie san a jednu konkrétnu oblasť operácií v rámci dodávateľského reťazca (teda nezachytávajú všetky typy operácií komplexne a vyvážené), nízky stupeň flexibility a otvorenosti voči zmenám (čo si súčasné dynamicky sa meniace prostredie vyžaduje), nedostatočné meranie výkonnosti, nedostatky v rýchlosti a spoľahlivosti prenosu informácií. V záujme prekonania týchto problémov je potrebné, aby prišla nova generácia systémov, ktorá bude podnikateľským subjektom umožňovať lepšiu kooperáciu a integráciu v rámci riadenia operácií v dodávateľských reťazcoch. [1]

Podľa Misru, Khana a Singha by budúca generácia SCM systémov mala disponovať nasledujúcou sadou vlastností: [1]

- **integrácia** – prepojenie všetkých subjektov a aktivít, ktoré sa podieľajú na transformácii surovín na hotové výrobky v rámci daného dodávateľského reťazca a na ich dodaní k zákazníkovi;
- **prepojenie s E-Commerce a M-Commerce**, pričom pod E-Commerce rozumieme obchodovanie s výrobkami alebo službami prostredníctvom elektronických systémov, ako napr. internet a M-Commerce predstavuje realizáciu e-Commerce prostredníctvom bezdrôtových mobilných zariadení, ako napr. PDA, notebooky, smartfóny a pod.
- **zapojenie sa do spoločného plánovania, rozvrhovania a optimalizácie dodávateľského reťazca** – jedná sa najmä o zlepšenie zdieľania informácií a celkovej koordinácie medzi jednotlivými subjektmi a ich aktivitami;
- **integráciu merania výkonu** – globálne meranie výkonnosti celého reťazca, ako aj jednotlivých jeho častí za účelom zabezpečenia krátkych dodacích časov tovaru zákazníkovi a jeho dostupnosti na sklade;

- **orientácia na zákazníka** – zbieranie a vyhodnocovanie dát o potrebách zákazníka a ich následné zdieľanie za účelom maximalizácie zákazníckej spokojnosti;
- **globalizácia** – globálny pohľad na celý dodávateľský reťazec počnúc prvotným dodávateľom a končiac finálnym spotrebiteľom, čo prispeje k lepšej informovanosti vrcholového manažmentu za účelom dosahovania efektívnejších rozhodnutí;
- **synchronizácia** – synchronizácia plánovania dodávok, plánovania výroby, plánovania logistiky a pod.
- **agilnosť** – SCM systémy musia byť schopné rýchlo a presne spracovávať transakcie, pričom informácie ako aj samotné produkty a suroviny by sa mali rýchlo presúvať naprieč dodávateľským reťazcom bez zbytočných zdržaní;
- **medzipodniková kolaborácia** – napr. dodávateľ a výrobca môžu spolupracovať pri tvorbe nového produktu, alebo výrobca a predajca môžu spolupracovať pri tvorbe odhadov predaja;
- **zachytávanie a riadenie dopytu** – monitorovanie a vyhodnocovanie požiadaviek zákazníka napr. na základe jeho aktivít na podnikových webových stránkach a následné premietanie týchto požiadaviek do plánovania;
- **využívanie sieťových a najmä webových technológií** – webové technológie môžu prispieť k tomu, čo zákazník chce – presnosť, aktuálnosť a nízku cenu;
- **koordinácia** – dosiahnutie toho, aby všetky subjekty v rámci daného dodávateľského reťazca postupovali jednotne a nie protichodne;
- **učenie** – schopnosť systému sa rozvíjať a zdokonaľovať pri vyhodnocovaní informácií, príp. sa rozširovať o novú funkcionálnosť.

Dodávateľský reťazec vo svojej podstate predstavuje distribuované prostredie, pozostávajúce z konečného počtu subjektov, ktoré sú síce autonómne, no v záujme dosiahnutia svojich cieľov je pre ne výhodné vzájomne kooperovať. Jednotlivé subjekty teda nepôsobia izolovane, existujú medzi nimi informačné, materiálne aj finančné toky a svojím geografickým rozložením vytvárajú sieť vzájomne sa ovplyvňujúcich komponentov jedného systému. V záujme dosiahnutia maximálnej novej kompatibility a spoľahlivosti sa potom javí ako rozumné, aby všetky subjekty patriace do daného reťazca používali jednotný informačný a komunikačný systém, v rámci ktorého budú prijímať, odovzdávať, uchovávať, zdieľať, spracovávať a vyhodnocovať potrebné informácie.

Z uvedených dôvodov by budúcnosť SCM systémov mohla spočívať v rozvíjaní a zdokonaľovaní distribuovaných informačných manažérskych systémov (Distributed Information Management Systems, DIMS). Podľa Závodného: „*distribuovaný systém spracovania dát je založený na kooperatívnej autonómii a integrácii územne rozptýlených uzlov tak, že sa používateľovi javia ako jeden celok. Distribuované sú technické prostriedky, dáta, funkcie a logika a spracovania.*“ [4] V prípade DIMS sa jedná o distribuované systémy zamerané na agregáciu informácií z rozsiahlych sieťových systémov a ich následné poskytovanie manažmentu v prijateľnej, výpovednej a relevantnej forme.

ZÁVER

Zefektívnenie riadenia operácií, akými sú napr. výber dodávateľov, plánovanie výroby, plánovanie zásob, plánovanie dopravy či plánovanie dopytu, v rámci dodávateľského reťazca môže byť významným nástrojom pre firmy na udržanie si konkurencieschopnosti v dynamickom prostredí globálnej ekonomiky. Kľúčovú úlohu v tomto procese môžu zohrať informačné a komunikačné technológie, najmä rozvoj a zdokonaľovanie distribuovaných informačných manažerských systémov.¹

Použitá literatúra

[1] MISRA, V. – KHAN, M. I. – SINGH, U. K. 2010. *Supply Chain Management Systems: Architecture, Design and Vision*. In: *Journal of Strategic Innovation and Sustainability* vol. 6(4). 2010. s. 102 – 108.

[2] KUMAR, K. – HILLEGERSBERG, J. V. 2000. *ERP Experiences and Evolution*. In: *Communications of the ACM*, vol. 43, č. 4, s. 22 – 26

[3] MARTIŠKO, B. 2005. *Systémy SCM a SRM v podnikovej praxi (3)*. [online]. [cit. 21-11-2013]. Dostupné na internete: < <http://www.atpjournal.sk/buxus/docs/atp-2005-11-70.pdf> >

[4] ZÁVODNÝ, P. 2010. *Distribuované spracovanie dát*. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2010. 270 s. ISBN 978-80-225-2901-3

Kontaktné údaje

Ing. Pavol Jurík

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 6729 5871

email: pavol.jurik.euba@gmail.com

¹ Tento príspevok bol podporený grantom VEGA, číslo projektu 1/0104/12 „Modelovanie cenovej politiky dodávateľského reťazca v konkurenčnom prostredí“.

FUZZY PŘÍSTUP K ŘEŠENÍ ÚLOHY OPTIMALIZACE PORTFOLIA

FUZZY APPROACH FOR PORTFOLIO SELECTION PROBLEM

Maria Kobzareva, Jan Pelikán

Abstrakt

Jedním ze způsobu modelování neurčitostí v optimalizačních modelech je fuzzy přístup, který pracuje s fuzzy množinami, popsanými pomocí funkce příslušnosti. Jelikož fuzzy množiny jsou nástrojem pro matematické modelování vágně popsaných procesů, které nejsou přesně ohraničené, fuzzy přístup je tak modelovacím nástrojem, který umožňuje řešit úlohy, které obsahují neurčitá data. Tento problém je rozšířen v mnoha oblastech a je více vhodný pro reálné úlohy, jelikož v praxi zřídka potkáte úlohu, kde data jsou předem pevně určena a nemají tendenci se náhodně měnit. Tento článek popisuje metodu fuzzy dekompozice a metodu pořadí a navrhuje možnost řešit model optimalizace portfolia s neurčitou množinou dat pomocí předložených přístupů. Problém je popsán na případové studii, předložen ekonomický i matematický model úlohy, algoritmus řešení a ilustrace a porovnání výsledků z případové studie.

Klíčová slova: *fuzzy čísla, trojúhelníková fuzzy čísla, fuzzy proměnné, metoda hranic a dekompozice, fuzzy lineární programování, neurčitá data, problém optimalizace portfolia, ranking funkce*

Abstract

One of the modern approaches for uncertainty modeling is fuzzy approach, which deals with fuzzy sets defined with fuzzy membership functions. Fuzzy approach is a modeling tool, which solves problems in which data are uncertain. This problem is frequently solved problem in many fields and it is more appropriate for real-life applications, because in practice data are hardly deterministic, but tend to change unexpectedly. The paper introduces fuzzy decomposition methodology and ranking function approach to solve fuzzy defined problems and suggests a possibility of solving portfolio optimization problem with uncertain data set using presented methods. The applications are described on a case study and provided with mathematical models and its detailed description. The paper also presents computation experiments and its results.

Key words: *fuzzy variables, fuzzy linear programming, bound and decomposition method, data uncertainty, robustness, portfolio optimization problem, fuzzy number, triangle fuzzy number, ranking function*

1. INTRODUCTION

One of the recent approaches to modeling uncertainty is fuzzy set approach, where set is described by fuzzy membership function. We distinguish two main classes of fuzzy problems: problems with fuzzy variables and problems with fuzzy parameters. The problems in which both above mentioned elements are applied are called fully fuzzified linear programming (FFLP) problems. Fully fuzzy problem is therefore generalized version of fuzzy linear programming problem where all decision parameters and variables are fuzzy numbers.

In this paper we present portfolio problem formulated as fully fuzzy problem and two approaches to solve the problem. Bound and decomposition method and ranking function method are introduced to find an optimal fuzzy solution for fully fuzzy linear programming (FFLP) portfolio optimization problem. In the bound and decomposition method, the given FFLP problem is decomposed into three crisp linear programming (CLP) problems with bounded variables constraints, the three CLP problems are solved separately and by using its optimal solutions, the fuzzy optimal solution to the given FFLP problem is obtained. In fuzzy ranking function method we create a new model using ranking function and by solving the modified model we obtain fuzzy optimal solution. The methods are illustrated on a case study, results are provided.

The paper is organized as follows: in section 2 we introduce basic formulation of portfolio optimization model. In section 3 the fully fuzzy linear programming portfolio optimization problem is introduced. In section 4 we present ranking function method and the properties of the presented linear ranking function with related theorems are introduced, section 5 is associated with bound and decomposition method. In section 6 fully fuzzy portfolio optimization problem is solved using the above mentioned methods, results are presented and compared.

2. THE PORTFOLIO SELECTION PROBLEM AND ITS FUZZY FORMULATION

Let us introduce portfolio optimization problem, where we have to select shares from a given number of shares, respecting the condition that the value of selected shares will not exceed given investment limit K . The aim is to maximize future value of selected shares, future values of shares are given. The problem is that the real share value may be less than predicted value. The purpose of the case study is to find so called fuzzy optimal solution under given circumstances, which respects unexpected decrease in future share value.

Let us define n as a number of shares, K the limit of total expenses on selected shares, for share i a_i is the price of share, c_i is expected profit of share i , d_i is possible decrease in share profit. Binary variable x_i defines the decision to choose share i , when $x_i=1$, or decision not to choose the share in case $x_i=0$.

The basic model of choosing the shares is described below:

$$\max \sum_{i=1}^n c_i x_i, \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq K, \quad x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\dots,n. \quad (1)$$

According to this model we will create a fully fuzzy model in the following section.

3. FULLY FUZZY LINEAR PROGRAMMING PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM

Consider the following fully fuzzy linear programming portfolio optimization problem with n fuzzy variables, formulated as follows:

$$\max \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \tilde{x}_i, \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \tilde{x}_i \leq \tilde{K}, \quad \tilde{x}_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\dots,n, \quad (2)$$

Let the parameters \tilde{a}_i , \tilde{c}_i , \tilde{x}_i and \tilde{K} be the triangular fuzzy number (a_i, b_i, c_i) , (p_i, q_i, r_i) , (x_i, y_i, t_i) and (L, K, H) respectively. Then, the problem (2) can be written as follows:

$$\max (z_1, z_2, z_3) \approx \sum_{i=1}^n (p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i), \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n (a_i, b_i, c_i) * (x_i, y_i, t_i) \leq (L, K, H),$$

$$(x_i, y_i, t_i) \in \{0,1\} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Now, since (x_i, y_i, t_i) is a triangular fuzzy number, we can obtain bounded constraint as follows:

$$x_i \leq y_i \leq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Using the arithmetic operations and partial ordering relations, we decompose the given FLPP (2) as follows:

$$\max z_1 \approx \sum_{i=1}^n \text{lower value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i))$$

$$\max z_2 \approx \sum_{i=1}^n \text{middle value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i))$$

$$\max z_3 \approx \sum_{i=1}^n \text{upper value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i))$$

Subject to (5)

$$\sum_{i=1}^n \text{lower value of } ((a_i, b_i, c_i) * (x_i, y_i, t_i)) \leq L, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^n \text{middle value of } ((a_i, b_i, c_i) * (x_i, y_i, t_i)) \leq K, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^n \text{upper value of } ((a_i, b_i, c_i) * (x_i, y_i, t_i)) \leq H, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n;$$

and all decision variables are non-negative.

From the above decomposition problem, we construct the following CLP problems namely, middle level problem (MLP), upper level problem (ULP) and lower level problem (LLP) as follows:

(MLP)

$$\max z_2 \approx \sum_{i=1}^n \text{middle value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i)) \quad (6)$$

subject to

Constraints in the decomposition problem in which at least one decision variable of the (MLP) occurs and all decision variables are non-negative.

(ULP)

$$\max z_3 \approx \sum_{i=1}^n \text{upper value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i))$$

subject to (7)

$$\sum_{i=1}^n \text{upper value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i)) \geq z_2^\circ;$$

Constraints in the decomposition problem in which at least one decision variable of the (ULP) occurs and are not used in (MLP); all variables in the constraints and objective function in (ULP) must satisfy the bounded constraints; replacing all values of the decision variables which are obtained in (MLP) and all decision variables are non-negative.

(LLP)

$$\max z_1 \approx \sum_{i=1}^n \text{lower value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i))$$

subject to (8)

$$\sum_{i=1}^n \text{lower value of } ((p_i, q_i, r_i) * (x_i, y_i, t_i)) \leq z_2^\circ;$$

Constraints in the decomposition constraints in which at least one decision variable of the (LLP) occurs which are not used in (MLP) and (ULP); all variables in the constraints and objective function in (LLP) must satisfy the bounded constraints; replacing all values of the decision variables which are obtained in the (MLP) and (ULP) and all decision variables are non-negative, where z_2° is the optimal objective value of (MLP).

Remark 3.1: In the case of LP problem involving trapezoidal fuzzy numbers and variables, we decompose it into four CLP problems and then, we solve the middle level problems (second and third problems) first. Then, we solve the upper level and lower level problems and then, we obtain the fuzzy optimal solution to the given FLP problem involving trapezoidal fuzzy numbers and variables.

4. BOUND AND DECOMPOSITION METHOD

In this section we describe bound and decomposition method for solving a FFLP problem presented in [1]. The algorithms to solve fuzzy portfolio optimization model with bound and decomposition method proceeds as follows.

Step 1: Construct (MLP), (ULP) and (LLP) problems from the given the FFLP portfolio optimization problem.

Step 2: Using existing linear programming technique, solve the (MLP) problem, then the (ULP) problem and then, the (LLP) problem in the order only and obtain the values of all real decision variables x_i , y_i , and t_i and values of all objectives z_1 , z_2 and z_3 . Let the decision variables values be x_i° , y_i° , and t_i° , $i = 1, 2, \dots, n$ and objective values be z_1° , z_2° and z_3° .

Step 3: An optimal fuzzy solution to the given FFLP problems is $\tilde{x}_i^\circ = (x_i^\circ, y_i^\circ, t_i^\circ)$, $i=1, 2, \dots, n$ and the maximum fuzzy objective is $\tilde{z}^\circ = (z_1^\circ, z_2^\circ, z_3^\circ)$. (by the Theorem 4.1.).

Now, we prove the following theorem which is used in the proposed method.

Theorem 4.1: Let $[x_M^\circ] = \{ x_i^\circ, y_i^\circ \in M \}$ be an optimal solution of (MLP) , $[x_U^\circ] = \{ x_i^\circ, y_i^\circ \in U \}$ be an optimal solution of (ULP) and $[x_L^\circ] = \{ x_i^\circ, y_i^\circ \in L \}$ be an optimal solution of (LLP) where L , M and U are sets of decision variables in the (LLP), (MLP) and (ULP) respectively. Then $\{ \tilde{x}_i^\circ =$

$(x_i^1, x_i^2, x_i^3), i=1,2,\dots,n \}$ is an optimal fuzzy solution to the given problem (2) where each one of x_i^1, x_i^2, x_i^3 is an element of L, M and U .

Proof: Let $[\tilde{y}_i] = \{\tilde{y}_i, i=1,2,\dots,n\}$ be a feasible solution of (2). Clearly, $[y_M], [y_U]$ and $[y_L]$ are feasible solutions of (MLP), (ULP) and (LLP) respectively. Now, since $[x_M], [x_U]$ and $[x_L]$ are optimal solutions of (MLP), (ULP) and (LLP) respectively, we have $Z_1([x_L]) \geq Z_1([y_L]); Z_2([x_M]) \geq Z_2([y_M])$ and $Z_3([x_U]) \geq Z_3([y_U])$.

This implies that $Z([\tilde{x}_i]) \geq Z([\tilde{y}_i])$, for all feasible solution of the problem (2).

Therefore, $\{\tilde{x}_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3), i=1,2,\dots,n \}$ is an optimal fuzzy solution to the given problem (2) where each one of x_i^1, x_i^2 and $x_i^3, i=1,2,\dots,n$ is an element of L, M and U .

Hence the theorem.

5. RANKING FUNCTION METHOD

An efficient approach for ordering the elements is to define a ranking function $D : F(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}$ which maps for each fuzzy number into the real line, where a natural order exists. We define orders on by:

$\tilde{A} \succcurlyeq \tilde{B}$ if and only if $D(\tilde{A}) \geq D(\tilde{B})$

$\tilde{A} \preccurlyeq \tilde{B}$ if and only if $D(\tilde{A}) \leq D(\tilde{B})$

$\tilde{A} = \tilde{B}$ if and only if $D(\tilde{A}) = D(\tilde{B})$

Where \tilde{A}, \tilde{B} are in $F(\mathfrak{R})$. Also we write $\tilde{A} \succcurlyeq \tilde{B}$ if and only if $-\tilde{A} \preccurlyeq -\tilde{B}$. The following lemma is now immediate.

Lemma 3.1. Let D be any linear ranking function then:

- $\tilde{A} \succcurlyeq \tilde{B}$ if $\tilde{A} - \tilde{B} \succcurlyeq 0$ if $-\tilde{B} \succcurlyeq -\tilde{A}$
- $\tilde{A} \succcurlyeq \tilde{B}$ and $\tilde{C} \succcurlyeq \tilde{D}$ then $\tilde{A} \oplus \tilde{C} \succcurlyeq \tilde{B} \oplus \tilde{D}$

Proof.

We restrict our attention to linear ranking function, that is a ranking function D such that:

For any \tilde{A}, \tilde{B} belonging to $F(\mathfrak{R})$ and any $k \in \mathfrak{R}$. Here we introduce a linear ranking function that is similar to the ranking function [2]. For any arbitrary fuzzy number $\tilde{A} = (\underline{A}(r), A \square(r))$, we use ranking function as follows:

$$D(\tilde{A}) = 1/2 \int_{[0,1]}(\underline{A}(r)) + \int_{[0,1]}(A \square(r))$$

For triangular fuzzy number this reduces to:

$$D(\tilde{A}) = A + 1/4(A'' - A')$$

Then, for triangular fuzzy number \tilde{A} and \tilde{B} , we have:

$$\tilde{A} \succcurlyeq \tilde{B} \text{ if and only if } A + 1/4(A'' - A') \geq B + 1/4(B'' - B')$$

Definition 4.1. Any solution which satisfies the set of constraints of FFLP is called a feasible solution. Let S be the set of all feasible solutions of FFLP. We say that x^* is optimal feasible solution for FFLP if for all $x \in S: \tilde{c} \otimes x^* \succcurlyeq \tilde{c} \otimes x$

Definition 4.2. If $\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c} \in FT(\mathfrak{R})$ then FFLP is transformed into the triangular fully fuzzy linear programming (TFFLP).

Lemma 4.1. If $\tilde{x} \in FT(\mathfrak{R})$ was positive then $D(\tilde{x}) \geq 0$.

Definition 4.3. we define the portfolio optimization problem as follow:

$$\max \sum CX, \text{ s.t. } \sum AX \leq K, X \in \{0,1\}$$

$$\text{Where: } A = \begin{bmatrix} S_1 & T_1 \\ e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\text{Where: } X = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = [S + 1/4S'' - 1/4S', -1/4S, 1/4S],$$

$$T_1 = [T + 1/4T'' - 1/4T', -1/4T, 1/4T],$$

$$e = [1, -1/4, 1/4], K_1 = K + 1/4(K'' - K'),$$

$$C = [C - 1/4C' + 1/4C'', -1/4C, 1/4C] \text{ if } \tilde{C} \geq 0 \text{ in the equation}$$

$$C = [C - 1/4C' + 1/4C'', 1/4C, -1/4C] \text{ if } \tilde{C} < 0 \text{ in the equation}$$

Theorem 4.1. TFFLP (9) and definition (2) are equivalent.

Let S_1 and S_2 be the set of all feasible solutions of TFFLP and definition (2) respectively. Then $\tilde{X} \in S_1$ if:

Solving fully fuzzy linear programming problem

$$(SX, SX' + XS', SX'' + XS'') \oplus (TY, YT' - TY'', YT'' - TY') \leq \tilde{K}$$

$$(X, X', X''), (Y, Y', Y'') \geq 0, X, X', X'', Y, Y', Y'' \in \{0,1\}$$

Where $\tilde{a}_i, \tilde{K}, \tilde{c}_i \in \text{FT}(\mathfrak{R})$ and if :

$$(SX + TY, S'X + SX' + YT' - TY'', SX'' + XS'' + YT'' - TY') \leq \tilde{K}$$

$$(X, X', X''), (Y, Y', Y'') \geq 0, X, X', X'', Y, Y', Y'' \in \{0,1\}$$

If:

$$SX + TY + 1/4(SX'' + XS'' + YT'' - TY' - S'X - SX' - YT' + TY'') \leq K + 1/4(K'' - K')$$

$$X + 1/4(X'' - X') \geq 0$$

$$Y + 1/4(Y'' - Y') \geq 0$$

$$\text{If: } X, X', X'', Y, Y', Y'' \in S_2$$

Hence $S_1 \subset S_2$ and $S_2 \subset S_1$.

Now we prove that any optimal solution in LP definition (2) will make an optimal solution in TFFLP (9). If X^* is optimal solution then for all $X \in S_2$ we have:

$$CX^* \geq CX$$

But if any $X = (x, x', x'')$ it is assumed as fuzzy number, according to the definition of C we have:

$$D(\tilde{C} \otimes \tilde{X}^*) \geq D(\tilde{C} \otimes \tilde{X})$$

Then:

$$\tilde{C} \otimes \tilde{X}^* \leq \tilde{C} \otimes \tilde{X}$$

And this means that $\tilde{X}^* = (x^*, x'^*, x''^*)$ is an optimal solution for S_1 .

Remark If z^* be optimal solution of equation (9) then we have $z^* = D(\tilde{z}^*)$ that $\tilde{z}^* = \tilde{C} \otimes \tilde{X}^*$.

6. CASE STUDY

Let us solve the problem with investment limit $K=50\,000$ and set of 23 shares, from which a subset has to be selected. The data subset was obtained from web pages <http://finance.yahoo.com/>, where we used path investment, stocks, earning dates to collect necessary data. Each share has a current price, which was stated in the beginning of April 2013, estimated profit of the share and possible decrease in profits. The price a_i of share i , the profit c_i and decrease of the profit d_i are given in the Tab. 1.

In the table below you can also find the highest price of share and the lowest price of share for a ten year period. The values a_i^* , a_{i-}^* , a_{i+}^* , c_i^* , c_{i-}^* , c_{i+}^* were calculated according to the formulas presented in decomposition method.

	a_i	c_i	d_i	a_i lowest	a_i highest	c_i-d_i	c_i+d_i	a_i^*	a_{i-}^*	a_{i+}^*	c_i^*	c_{i-}^*	c_{i+}^*
1	2999	237	64	119	3085	173	301	3740,5	-749,75	749,75	269	-59,25	59,25
2	10400	271	31	5927	10400	240	302	11518,3	-2600	2600	286,5	-67,75	67,75
3	1633	45	15	1103	2383	30	60	1953	-408,25	408,25	52,5	-11,25	11,25
4	6825	72	14	3523	6954	58	86	7682,75	-1706,3	1706,25	79	-18	18
5	1625	30	14	998	1753	16	44	1813,75	-406,25	406,25	37	-7,5	7,5
6	1791	1	13	1791	3647	-12	14	2255	-447,75	447,75	7,5	-0,25	0,25
7	1189	10	12	768	3889	-2	22	1969,25	-297,25	297,25	16	-2,5	2,5
8	998	-13	12	830	1720	-25	-1	1220,5	-249,5	249,5	-7	3,25	-3,25
9	2253	42	11	1150	2860	31	53	2680,5	-563,25	563,25	47,5	-10,5	10,5
10	3934	44	9	1800	4476	35	53	4603	-983,5	983,5	48,5	-11	11
11	3554	62	9	2390	3554	53	71	3845	-888,5	888,5	66,5	-15,5	15,5
12	3608	61	9	457	3608	52	70	4395,75	-902	902	65,5	-15,25	15,25
13	3918	102	7	3918	5268	95	109	4255,5	-979,5	979,5	105,5	-25,5	25,5
14	4901	91	6	4038	5344	85	97	5227,5	-1225,3	1225,25	94	-22,75	22,75
15	2543	26	6	2543	6555	20	32	3546	-635,75	635,75	29	-6,5	6,5
16	768	10	5	355	940	5	15	914,25	-192	192	12,5	-2,5	2,5
17	3134	8	3	1854	3135	5	11	3454,25	-783,5	783,5	9,5	-2	2
18	1398	12	2	748	1398	10	14	1560,5	-349,5	349,5	13	-3	3
19	3299	3,7	2	2260	3299	1,7	5,7	3558,75	-824,75	824,75	4,7	-0,925	0,925
20	5272	58	2	3914	5367	56	60	5635,25	-1318	1318	59	-14,5	14,5
21	168	-1	0	100	1915	-1	-1	621,75	-42	42	-1	0,25	-0,25
22	283	-8	0	283	852	-8	-8	425,25	-70,75	70,75	-8	2	-2
23	1808	23	0	1361	1808	23	23	1919,75	-452	452	23	-5,75	5,75

Tab. 1: List of shares and their parameters

We will use the algorithms described above and solve linear problems, results are shown in the Tab. 2. Beside the optimal value F in the table you can also find the corresponding solution x , which denotes the share selection.

method	Solution x	F
MLP	1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1	1104
LLP	1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1	917
ULP	1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1	1291
ranking	1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1	1306
	0 0	
	1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1	
robust	1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1	994

Tab. 2: Steps of the algorithm and optimal robust solution

As you can see in Tab. 2 maximum objective function value for decomposition method is $F = 1104$ with the corresponding share selection $x = (1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1)$, for ranking function model the objective value is $F = 1306$, corresponding share selection $x = (1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1)$.

As you can see from the table above, optimal solution for presented approaches is different. Using decomposition method we would select shares 1 to 5, 9, 11 to 14, 16, 20 and 23, total expected profit would be 1104, on the other hand if we use ranking function method we would obtain the following solution - shares 1 to 3, 5, 9, 11 to 14, 16, 18 and 23 should be selected with total expected profit 1306. If we compare those results with the solution, obtained from solving the same problem with robust optimization model, presented in our recent paper [3], we would find out that robust solution corresponds with decomposition method solution, though with a lower value of objective function.

7. CONCLUSION

This paper offers possibility to solve portfolio optimization problem with uncertain share values using two fuzzy approaches – bound and decomposition method and ranking function. The problem takes into account the fact that share profits could not be the same as predicted, but real profit share value could be less. In this paper we concentrate on two fuzzy approaches for portfolio optimization model, which use defuzzification method to solve the problem. Both approaches work with a fully fuzzy linear programming problem, defined by triangle fuzzy numbers in objective function, constraints and parameters. The presented methods are described on a case study, providing with computation experiments and comparison of results for both presented approaches.

Acknowledgements:

This research was supported by the project 403/12/1947 founded by the Grant Agency of the Czech Republic and the project F4/18/2011 founded by the Internal Grant Agency of the University of Economics, Prague.

References

- [1] M.JAYALAKSHMI, P. PANDIAN A New Method for Finding an Optimal Fuzzy Solution For Fully Fuzzy Linear Programming Problems, International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA) ISSN: 2248-9622 Vol. 2, Issue 4, July-August 2012, pp.247-254

- [2] T. ALLAHVIRANLOO, F. HOSSEINZADEH LOTFI, M. KH. KIASARY, N. A. KIANI, L. ALIZADEH Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problem by the Ranking Function, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 1, 19 - 32
- [3] J. Pelikán, M. Kobzareva Method for Solving Robust Optimization Model, Mathematical Methods in Economics 2013. Jihlava: College of Polytechnics Jihlava, 2013, s. 706-711. ISBN 978-80-87035-76-4.

Contacts

Prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc.

Ing. Maria Kobzareva

University of economics, Prague, Faculty of informatics and statistics

W. Churchill Sq. 4

130 67 Prague 3

Czech Republic

Tel: +420 224 095 444

email: pelikan@vse.cz, mariakobzareva@vse.cz

ANALÝZA FIŠKÁLNEJ POLITIKY V SR: ECM PRÍSTUP

ANALYSIS OF FISCAL POLICY IN SR: ECM APPROACH

Brian König

Abstrakt

Článok sa zoberá analýzou fiškálnej politiky v SR založenej na ekonometrickom prístupe ECM. Ako kľúčový determinant správania sa výdavkov štátneho rozpočtu je exogénne stanovený deficit štátneho rozpočtu, ktorého výška je cieľovaná vládou. V prvej časti je uvedená metodológia ECM modelov a princíp kointegrácie. Druhá časť sa zameriava na popis skonštruovaného modelu príjmov štátneho rozpočtu. Záverečná časť obsahuje konkrétne odhady dlhodobých rovnovážnych vzťahov a prognózované hodnoty príjmov a výdavkov štátneho rozpočtu.

Kľúčové slová: Chybu korigujúci model (ECM), fiškálna politika, dlhodobá rovnováha.

Abstrakt

The article deals with the analysis of fiscal policy in the Slovak Republic based on the ECM econometric approach. As a key determinant of state expenditure was exogenously set government budget deficit, the amount of which is targeting by the effort of government. In the first part the methodology of ECM models and the cointegration principle are presented. The second part focuses on the description of import and export models. The final section describes the estimation of long-term equilibrium relationship and the forecasts of government expenditure and revenue.

Key words: Error Correction model, fiscal policy, long-run equilibrium.

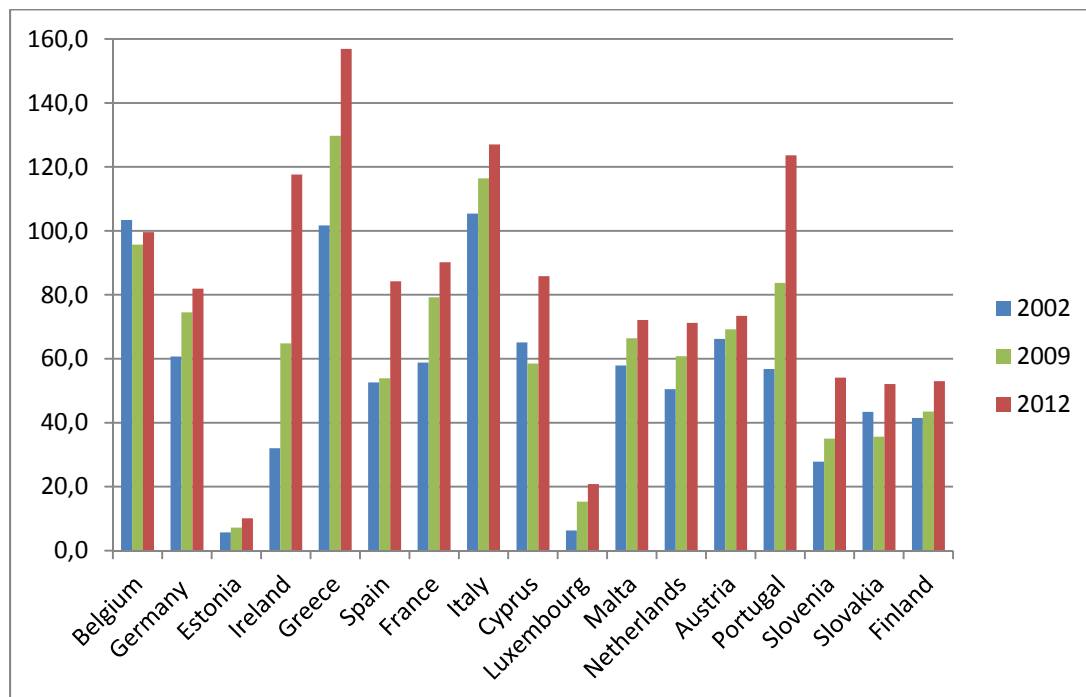
ÚVOD

V súčasnosti vlády takmer všetkých štátov dosahujú každoročne deficit verejných financií a sú nútené tento deficit pokryť z požičaných zdrojov. Miera zadlženosti dosiahla neúnosnú úroveň nie len vo svete, ale aj vo väčšine krajín eurozóny (EZ), ako aj na Slovensku. Na úrovni európskej politiky dochádza k mnohým diskusiám zameraným na hľadanie nástrojov na konsolidáciu verejných financií, ktorá má viesť k fiškálnej udržateľnosti vlád jednotlivých krajín eurozóny. Jednou z implikácií európskych politických rozpráv je aj zmluva o stabilite, ktorej cieľom je zaviesť osobitné pravidlá so zámerom vytvorenia udržateľného stavu verejných financií a zabránenia vzniku nadmerného deficitu. Zmluva nás zaväzuje prijať zákony požadujúce vyrovnané alebo prebytkové verejné rozpočty. Úspešný návrh fiškálnej politiky si vyžaduje podrobné znalosti transmisijného mechanizmu fiškálnej politiky. Zámerom tejto štúdie je analýza fiškálnej politiky v kontexte udržateľného deficitu a jeho vplyvu na výdavky štátneho rozpočtu.

1. PREHĽAD ZADLŽENOSTI SR A KRAJÍN EUROZÓNY

Napriek viacerým prijatým opatreniam v oblasti udržateľnosti verejných financií, situácia vo väčšine krajín eurozóny nie je veľmi priaznivá. Vývoj verejného dlhu¹ jednotlivých krajín eurozóny (EZ) je zobrazený na grafe č.1.

Graf č.1- verejný dlh krajín eurozóny v rokoch 2002, 2009, 2012 vyjadrený v percentách HDP



Zdroj: Autor, spracované na základe dát Eurostatu

Na grafe č.1 môžeme vidieť vývoj úrovne vládneho dlhu v krajinách EZ v období krízy a reakcie vládnych strán jednotlivých krajín EZ na prepuknutú krízu. Na úvod treba podotknúť, že všetky krajiny EZ zaznamenali nárast verejného dlhu v čase medzi rokmi 2009-2012, avšak niektoré iba mierny, iné zase dramatický. Zoradené krajiny podľa výšky prírastku verejného dlhu v rokoch 2009 – 2012 môžeme vidieť v tabuľke č.1. Slovenská republika sa nachádza na 11.tom mieste s výškou prírastku verejného hrubého dlhu 16,5 % HDP, za ňou sa nachádzajú už len krajiny ako Slovinsko, Grécko, Cyprus, Španielsko, Portugalsko a Írsko.

tabuľka č.1 – zoznam krajín EZ podľa veľkosti absolútneho prírastku verejného hrubého dlhu v rokoch 2009-2012

štát	Estonia	Belgium	Austria	Luxembourg	Malta	Germany	Finland	Netherlands	Italy
Prírastok dlhu v % HDP	2.9	3.9	4.2	5.5	5.7	7.4	9.5	10.4	10.6
štát	France	Slovakia	Slovenia	Greece	Cyprus	Spain	Portugal	Ireland	
Prírastok dlhu v % HDP	11	16.5	19.1	27.2	27.3	30.3	39.9	52.8	

Zdroj: Autor, spracované na základe dát Eurostatu

¹ Verejný dlh je definovaný v Maastrichtskej zmluve ako konsolidovaný hrubý dlh všeobecnej vlády v nominálnej hodnote, nezaplatený na konci roka. Pod všeobecnou vládou rozumieme ústrednú štátnu správu, regionálnu štátnu správu, miestnu štátnu správu a fondy sociálneho zabezpečenia.

Ak si porovnáme krajiny EZ, ktorých prírastok verejného hrubého dlhu v rokoch 2009-2012 je nad 15% HDP (od Slovenska smerom nahor) a zoradíme ich podľa relatívneho percentuálneho nárastu² verejného dlhu v rokoch 2009-2012, získame nasledujúcu tabuľku:

tabuľka č.2 – zoznam krajín EZ podľa veľkosti relatívneho prírastku verejného hrubého dlhu v rokoch 2009-2012

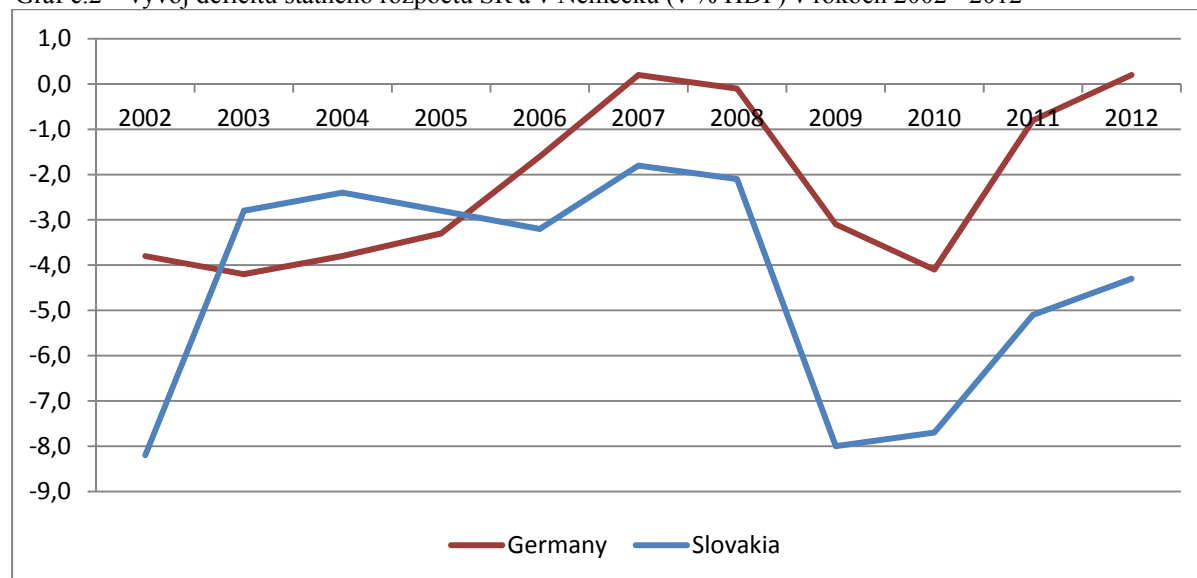
štát	Greece	Slovakia	Cyprus	Portugal	Slovenia	Spain	Ireland
relatívny rast oproti roku 2009	20.97%	46.35%	46.67%	47.67%	54.57%	56.22%	81.48%

Zdroj: Autor, spracované na základe dát Eurostatu

Na základe údajov v tabuľke č. 2 vidíme, že relatívny nárast verejného hrubého dlhu v SR je vyšší ako v Grécku a na podobnej úrovni ako na Cypre a v Portugalsku.

Hlavný zdroj nárastu hrubého verejného dlhu je financovanie deficitného štátneho rozpočtu. Ak vláda zostaví štátny rozpočet, ktorého výdavky sú vyššie ako príjmy resp. uvažuje s vyššími očakávanými príjmami ako v skutočnosti dosiahne, je nútená pokryť tento schodok z požičaných peňazí. Na grafe č. 2 môžeme vidieť vývoj deficitu štátneho rozpočtu v rokoch 2002 – 2012.

Graf č.2 – vývoj deficitu štátneho rozpočtu SR a v Nemecku (v % HDP) v rokoch 2002 - 2012



Na grafe (2) je vidieť, že po roku 2008 schodok štátneho rozpočtu v SR výrazne vzrástol a že v rokoch 2011, 2012 vidieť snahy vlády k jeho znižovaniu. Taktiež možno sledovať a to najmä od roku 2006 podobnosť v pohyboch deficitov SR a Nemecka, ktoré ako hlavný ťahúň európskej únie udáva vo veľkej miere jej smerovanie.

² Zoradenie krajín podľa relatívneho percentuálneho nárastu hrubého verejného dlhu umožňuje hlbší náhľad na správanie sa danej krajiny v čase krízy. Ak napr. krajina X mala v roku 2009 výšku hrubého dlhu 200% HDP a v roku 2012 220 % HDP, výška jej relatívneho verejného hrubého dlhu vzrástla o 10%. Avšak ak iná krajina Y udržiavala v roku 2009 verejný hrubý dlh vo výške okolo 20% HDP a v roku 2012 dosiahla jeho výšku na úrovni 40 % HDP, poukazuje to na výraznú zmenu v správaní sa hospodárskej politiky a relatívny nárast hrubého verejného dlhu o 50 %.

2. METODOLÓGIA

Pri analýze fiškálnej politiky budeme vychádzať z predpokladu snahy vlády konsolidovať verejné financie v strednodobom horizonte. Vychádzame z očakávaní, že vláda bude znižovať schodok verejných financií a že jeho vývoj sa nebude výrazne odlišovať od prognózy inštitútu finančnej politiky.³

Správanie fiškálnej politiky bude popísané ekonometrickým modelom. Tradičné ekonometrické techniky predpokladajú, že jednotlivé časové rady sú stacionárne, čiže sa jedná o procesy, ktorých priemer a rozptyl nie sú premenlivé (sú konštantné) v čase. Pri stacionárnych časových radoch dôsledok šoku je len krátkodobý a po určitom čase sa premenná navráti k svojmu dlhodobému rovnovážnemu stavu. Avšak väčšina makroekonomických premenných majú trend a sú nestacionárne. V takomto prípade, ak dáta sú trendové, odhad parametrov modelu pomocou metódy najmenších štvorcov (OLS) môže viesť k nesprávnym záverom a vykázať vzájomnú závislosť medzi analyzovanými premennými, napriek tomu, že v skutočnosti spolu vôbec nesúvisia – dochádza k falošnej regresii.

Vývoj fiškálnej politiky bude analyzovaný pomocou chybu korigujúceho modelu (ECM – Error Correction Model), ktorý je založený na princípe kointegrácie časových radov. Kointegrácia predpokladá, že ak máme dva časové rady X a Y , ktoré sú nestacionárne (ale integrované rovnakého rádu), avšak navzájom súvisia tak existuje ich kombinácia, ktorá je stacionárna. V takomto prípade hovoríme, že skúmané premenné sú kointegrované. Z hľadiska teórie k takémuto prípadu dochádza, iba ak skutočne existuje vzťah medzi sledovanými premennými a preto kointegrácia reprezentuje dôležitý nástroj k určeniu prítomnosti vzájomnej väzby jednotlivých premenných. Ak pracujeme s časovými radmi, ktoré sú nestacionárne a nie sú navzájom kointegrované, dopúšťame sa falošnej regresie.

Uvažujme dve premenné X, Y , ktoré sú nestacionárne, avšak integrované rovnakého rádu napr. $(X, Y) \approx I(1)$ a ďalej predpokladajme, že existuje vektor (α_1, α_2) , ktorý dáva stacionárnu kombináciu X, Y . Nech:

$$\alpha_1 Y_t + \alpha_2 X_t = u_t^* \approx I(0) \quad (1)$$

Ak platí (1) potom premenné X, Y sú kointegrované a vektor (α_1, α_2) označujeme kointegrujúcim vektorom. V stave dlhodobej rovnováhy platí:

$$Y_t^* = \beta X_t \quad (2)$$

Vyjadrením Y zo vzťahu (1) získame:

$$Y_t = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} X_t + v_t \quad (3)$$

Pričom (3) môžeme chápať ako dlhodobú rovnováhu Y vzhľadom na X . Nakoľko uvažujeme o nestacionárnych premenných, ak by sme odhadli rovnicu v tvare:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \quad (4)$$

³ <http://www.finance.gov.sk/Default.aspx?CatID=9089>

môžeme sa dopustiť falošnej regresie. V prospech zabezpečenia stacionárneho radu diferencujeme použité premenné X, Y . Regresia s diferencovanými časovými radmi bude vyzeráť nasledovne:

$$\Delta Y_t = a_1 + a_2 \Delta X_t + \Delta u_t \quad (5)$$

V takomto prípade získavame korektný odhad parametrov \hat{a}_1, \hat{a}_2 , pričom problém falošnej regresie je odstránený. Nedostatkom vzťahu (5) je fakt, že poukazuje len na krátkodobú rovnováhu a nie na dlhodobú rovnováhu zo vzťahu (4). Nakoľko nás predovšetkým zaujíma dlhodobý vzťah, využijeme ECM model, ktorý kombinuje krátkodobý a dlhodobý stav v jednej rovnici. Povedali sme, že ak sú dve premenné kointegrované, potom existuje lineárna kombinácia medzi týmito premennými, ktorá je stacionárna. Predpokladajme, že vzťah (4) je týmto špeciálnym prípadom a teda sa nejedná viacej o falošnú regresiu, ale o dlhodobú rovnovážnu kombináciu, ktorú môžeme vyjadriť vzťahom:

$$u_t = Y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t, u_t \approx I(0) \quad (6)$$

Vzťah medzi X a Y teraz môžeme vyjadriť ako ECM špecifikáciu nasledovne:

$$\Delta Y_t = a_0 + b_1 \Delta X_t - \pi u_{t-1} + u_t^4 \quad (7)$$

$$\text{Pričom } u_{t-1} = Y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1} \quad (8)$$

Vzťah (7) reprezentuje ECM model, ktorý v sebe spája informáciu o dlhohodobej rovnováhe a krátkodobých výkyvoch od rovnováhy. Parameter b_1 reprezentuje okamžitý (krátkodobý) dopad zmeny X na Y a parameter π je korekčný člen, ktorý odpovedá na otázku, aká časť nerovnováhy z predchádzajúceho obdobia ($t-1$) je upravená v čase t . Čím bližšie je hodnota π jednej, tým väčšia časť nerovnováhy v čase t je korigovaná. Výraz (8) reprezentuje dlhodobý rovnovážny vzťah medzi nestacionárnymi premennými.

Modelovanie pomocou ECM má viacero pozitívnych stránok. Premenné sú vyjadrené ako prvé diferencie, čo vo väčšine prípadoch odstraňuje nestacionaritu časového radu a nedochádza tak k falošnej regresii. Korekčný člen, ktorý umožňuje prispôsobenie z nerovnovážneho stavu je tiež stacionárny a teda proces korekcie modelu k rovnovážnemu stavu zabraňuje rastu chyby z dlhodobého hľadiska.

3. DÁTA MODELU

Model je analyzovaný na štvrt'ročných dátach od roku 2000 prvý kvartál, až po rok 2012 štvrtý kvartál. Uvažujeme s logaritmi jednotlivých premenných. Ako kľúčový faktor, determinujúci vývoj fiškálnej politiky je exogénne stanovený deficit rozpočtu verejnej správy. Príjmy verejnej správy budú odhadnuté pomocou ECM metodológie a výdavky vyjadříme ako súčet príjmov a deficitu verejnej správy.

Východiskom ekonometrického modelu príjmov verejného rozpočtu bude ukazovateľ daňových príjmov vlády, vypočítaný ako súčet príjmov z nasledujúcich daní: príjmy z DPH, príjmy zo spotrebnej dane, príjmy z dane z príjmov fyzických osôb, príjmy z dane z príjmov právnických osôb.

⁴Pre viac pozri: ASTERIOU, D. - HALL, S. G.: Applied Econometrics (A Modern Approach using EViews and Microfit), Revised edition 2007.

ECM model bude odhadnutý v dvoch krokoch na základe algoritmu navrhnutého R. Engle a C. Granger (1987). V prvej fáze sa odhadne dlhodobá rovnováha medzi jednotlivými kointegrovanými premennými a v druhom kroku sa následne odhadnuté parametre dosadia do rovnice v tvare ECM, ktorá obsahuje diferencované a teda už stacionárne premenné. Pri odhade rovnice príjmov budeme vychádzať z nasledovných vzťahov:

1. *krok - vzťah dlhodobej rovnováhy pre príjmy štátneho rozpočtu:*

$$\text{LOG(SBR)} = C(11) + C(12)*\text{LOG}(\text{TVAT}+\text{TC}+\text{TW}+\text{TYZ}) + C(13)*@\text{TREND}+C(14)*\text{SEAS}(3)+C(15)*\text{SEAS}(4)$$

2. *krok - ECM model:*

$$\text{DLOG(SBR)} = C(21)*\text{DLOG}(\text{TVAT}+\text{TC}+\text{TW}+\text{TYZ}) + C(22)*\text{SEAS}(4)*(T>2009) + C(23)*U_{t-1}^1$$

$$U_{t-1}^1 = \text{LOG(SBR}(-1)) - C(12)*\text{LOG}(\text{TVAT}(-1)+\text{TC}(-1)+\text{TW}(-1)+\text{TYZ}(-1)) - C(13)*@\text{TREND}+C(14)*\text{SEAS}(3)-C(15)*\text{SEAS}(4)$$

Kde:

SBR – príjmy štátneho rozpočtu SR,

TVAT – príjmy z DPH,

TC – príjmy zo spotrebnej dane,

TW – príjmy z dane z príjmov fyzických osôb,

TYZ – príjmy z dane z príjmov právnických osôb,

TREND – umelá premenná reprezentujúca lineárny trend,

SEAS() – umelá premenná zachytávajúca sezónne výkyvy v danom kvartály.

4. VÝSLEDKY

Ako bolo spomenuté, v prvej fáze bol odhadnutý dlhodobý vzťah pre príjmy štátneho rozpočtu.

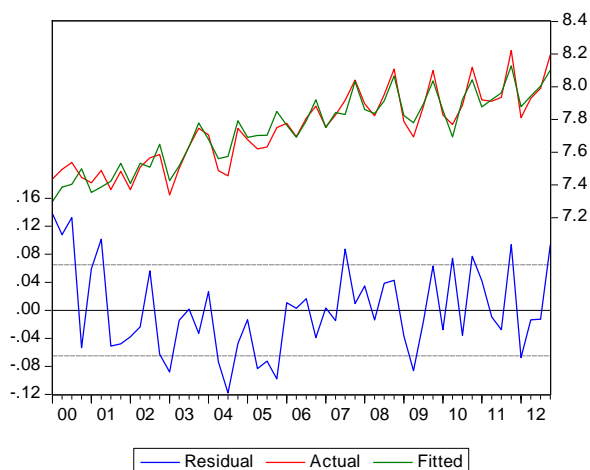
Dlhodobý vzťah⁵

$$\text{LOG(SBR)} = 3,145 + 0,566*\text{LOG}(\text{TVAT}+\text{TC}+\text{TW}+\text{TYZ}) + 0,006*@\text{TREND}+0,042*\text{SEAS}(3)+0,101*\text{SEAS}(4)$$

$$R^2=0,925 \quad \text{DW} = 1,47 \quad \text{SE}=0,065$$

Obrázok č.1 – dlhodobý vzťah (skutočné versus vyrovnané hodnoty)

⁵ Výstupy z odhadu parametrov sú uvedené v prílohe.



Zdroj: Vlastné vypracovanie

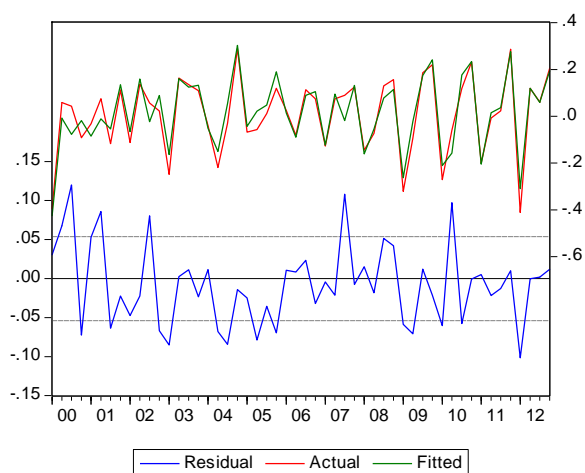
Z odhadu parametrov dlhodobého vzťahu je vidieť, že s rastom príjmov z daní vyjadrených ako kumulatívny súčet príjmov vyššie uvedených daní o 1 percento, príjmy štátneho rozpočtu v priemere vzrastú o 0,57 percenta. Nakoľko rovnica spĺňa kritéria štatistickej verifikácie modelu (jednotlivé parametre sú štatisticky významné, koeficient determinácie je dostatočne vysoký, reziduály z odhadu sú stacionárne⁶), môžeme použiť odhadnuté parametre vo vzťahu ECM modelu.

ECM model

$$DLOG(SBR) = 0,615 * DLOG(TVAT+TC+TW+TYZ) + 0,099 * SEAS(4) * (T > 2009) - 0,748 * U_{t-1}$$

$$R^2=0,89 \quad DW= 2,02 \quad SE=0,054$$

Obrázok č.2 – ECM model (skutočné versus vyrovnané hodnoty exportu)

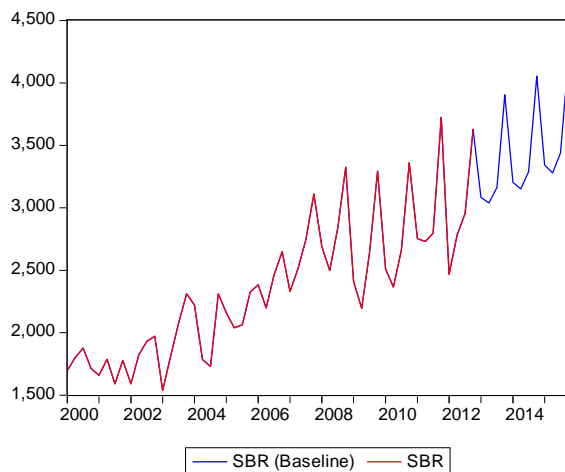


Zdroj: Vlastné vypracovanie

⁶ Bol použitý ADF test porovnaný s kritickými hodnotami Engleovej-Grangerovej procedúry pre testovanie rádu integrácie reziduálov upravené MacKinnonom.

Z ECM modelu vyplýva, že model v období t koriguje takmer 75 % nerovnováhy z predchádzajúceho obdobia. Očakávaný vývoj príjmov štátneho rozpočtu založený na odhade modelu ECM na roky 2014 a 2015 je zobrazený na nasledovnom obrázku:

Obrázok č.3 – prognóza vývoja príjmov štátneho rozpočtu (SBR) na roky 2013, 2014, 2015



Zdroj: Vlastné vypracovanie

Uvažujme s vývojom štátneho rozpočtu na najbližšie dva roky (2014,2015). Vláda si stanovila cieľovať schodok rozpočtu verejných financií na úrovni 2,83% HDP v roku 2014 a 2,57% HDP na rok 2015. Vláda odhaduje výšku HDP v bežných cenách na tieto roky na úrovni 75,8 mld. eur a 79,5 mld. eur. Pri odhade vývoja fiškálnej politiky budeme vychádzať z autorových predbežných prognóz uvedených v nasledujúcej tabuľke:

tabuľka č.3 – prognózované hodnoty deficitu štát. rozpočtu (DEF), príjmov vlády (SBE), HDP v bežných cenách.

obdobie	Prognóza autora				Prognóza MF		
	DEF v % HDP	DEF v mld. eur	SBR v mld. eur	HDP v b.c. mld. eur	DEF v % HDP	DEF v mld. eur	HDP v b.c. mld. eur
2014	0.029	2.161	13.699	75.572	2.83	2.144	75.772
2015	0.026	2.019	14.278	78.757	2.57	2.042	79.462

Zdroj: Vlastné vypracovanie

Pri prognóze HDP vychádzame z ekonometrického odhadu založenom na ECM modeli. Výška deficitu štátneho rozpočtu bola stanovená na základe prognóz MF, pričom sa použil trochu konzervatívnejší pohľad. Na základe uvedených hodnôt môžeme vypočítať predpokladané výdavky štátneho rozpočtu na roky 2014, 2015 ako súčet príjmov štátneho rozpočtu a deficitu prenasobeného HDP v b.c.

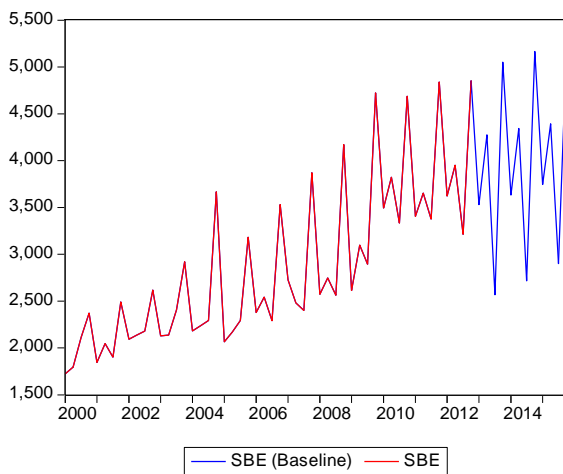
tabuľka č.4 – predpokladaný vývoj výdavkov štátneho rozpočtu (SBE) na roky 2014, 2015.

obdobie	SBE (mld.eur)
2014	15.86
2015	16.297

Zdroj: Vlastné vypracovanie

Odhadovaný priebeh výdavkov štátneho rozpočtu na roky 2013, 2014 a 2015 môžeme vidieť na nasledovnom grafe:

Obrázok č.3 - predpokladaný vývoj výdavkov štátneho rozpočtu (SBE) na roky 2013, 2014, 2015.



Zdroj: Vlastné vypracovanie

ZÁVER

V článku je analyzované správanie fiškálnej politiky ekonometrickým prístupom ECM. Skonstruovaný model umožňuje determinovať príjmy vlády SR, ako z dlhodobého horizontu tak i z krátkodobého hľadiska. Pomocou cielenej výšky deficitu štátneho rozpočtu a na základe prezentovaných výsledkov o príjmoch štátneho rozpočtu dokážeme odhadnúť výšku výdavkov vlády.⁷

Použitá literatúra

- [1] ASTERIOU, D. – HALL, S. G.: *Applied Econometrics (A Modern Approach using EViews and Microfit)*, Revised edition 2007.
- [2] ENGLE, R. F. – GRANGER, C. W. J. (1987): *Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing*. *Econometrica*, 55, č. 2, s. 251 – 276.
- [3] HALUŠKA, J.: *Spotrebná funkcia ako nástroj na rýchly odhad konečnej spotreby domácností*. *Ekonomický časopis* 59/2011, č.4, 2011. ISSN 0013-3035.
- [4] HALUŠKA, J. - OLEXA M. - JURIOVÁ J. - KLÚČIK M.: *Modelový aparát na rýchle odhady vývoja makroekonomických ukazovateľov slovenskej ekonomiky (Využitie konjunkturálnych a spotrebiteľských prieskumov)*. Bratislava, INFOSTAT, 2008. ISBN 978-80-89398-06-5.
- [5] RADVANSKÝ, M.: *Ekonometrický model SR s dôrazom na príjmy a výdavky štátneho rozpočtu*. INFOSTAT, CEVAVSTAT, 2008.
- [6] RADVANSKÝ, M. – KÖNIG, B. – HORVÁT, P.: *Strednodobá prognóza ekonomiky SR v rokoch 2013 - 2017*. In: *Pohľady na ekonomiku Slovenska 2013*, Bratislava: SŠDS, s. 112 – 122.

⁷ Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu VEGA č. 2/0172/12.

Adresa autora:

Ing. Brian König, PhD.,
 Ekonomický ústav SAV
 Oddelenie ekonomického modelovania a analýz
 Šancova 56, 811 05 Bratislava
 konigbrian@gmail.com

Prílohy

Príloha č.1 – dlhodobý vzťah pre model príjmov štátneho rozpočtu

Dependent Variable: LOG(SBR)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2000Q1 2012Q4
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.144634	0.556062	5.655185	0.0000
LOG(TVAT+TC+TW+TYZ)	0.566485	0.081396	6.959638	0.0000
@TREND	0.006187	0.001108	5.585918	0.0000
@SEAS(3)	0.041684	0.022086	1.887330	0.0653
@SEAS(4)	0.101272	0.024564	4.122692	0.0002
R-squared	0.924995	Mean dependent var	7.739901	
Adjusted R-squared	0.918611	S.D. dependent var	0.227655	
S.E. of regression	0.064947	Akaike info criterion	-2.539284	
Sum squared resid	0.198250	Schwarz criterion	-2.351664	
Log likelihood	71.02137	Hannan-Quinn criter.	-2.467355	
F-statistic	144.9059	Durbin-Watson stat	1.469659	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Príloha č.2 – ECM model

Dependent Variable: DLOG(SBR)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2000Q1 2012Q4
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLOG(TVAT+TC+TW+TYZ)	0.615203	0.059149	10.40088	0.0000
LOG(SBR(-1))-3.14463394653- 0.566485117668*LOG(TVAT(-1)+TC(- 1)+TW(-1)+TYZ(-1))- 0.00618691888101*@TREND- 0.0416839364043*@SEAS(3)- 0.101271779637*@SEAS(4) @SEAS(4)*(T>2009)	-0.748234	0.080587	-9.284802	0.0000
	0.098705	0.027956	3.530729	0.0009
R-squared	0.893914	Mean dependent var	0.007026	
Adjusted R-squared	0.889584	S.D. dependent var	0.162095	
S.E. of regression	0.053862	Akaike info criterion	-2.948812	
Sum squared resid	0.142156	Schwarz criterion	-2.836240	
Log likelihood	79.66910	Hannan-Quinn criter.	-2.905654	
Durbin-Watson stat	2.020154			

ANALÝZA NEZAMESTNANOSTI A JEJ MAKROEKONOMICKÝCH DOPADOV ¹

ANALYSIS OF UNEMPLOYMENT AND ITS MACROECONOMIC IMPACTS

Brian König

Abstrakt

Článok sa zoberá analýzou nezamestnanosti v SR založenej na ekonometrickom prístupe ECM. Ako kľúčové determinanty vývoja zamestnanosti sú použité endogénne stanovená reálna mzda vyjadrená ako podiel nominálnej mzdy a indexu cien priemyselných výrobcov a reálny HDP. V prvej časti je uvedený prehľad vývoja miery nezamestnanosti v kontexte s pohybmi HDP a kľúčové dopady rastu nezamestnanosti na fiškálnu politiku. Druhá časť sa zameriava na popis skonštruovaného modelu zamestnanosti a nominálnej mzdy. Záverečná časť obsahuje prognózované hodnoty miery nezamestnanosti, zamestnanosti, nominálnej mzdy a očakávaný vývoj použitých exogénnych premenných.

Kľúčové slová: *Chybu korigujúci model (ECM), miera nezamestnanosti, miera zamestnanosti, mzda.*

Abstrakt

The article deals with the analysis of unemployment in the Slovak Republic based on the ECM econometric approach. As a key determinant of unemployment were exogenously set real GDP and endogenously set real wage. In the first part the review of unemployment development and its main effects on fiscal policy are presented. The second part focuses on the description of employment and wage models. The final section describes the forecasts of particular variables.

Key words: *Error Correction model, unemployment rate, employment rate, wage.*

ÚVOD

V súčasnosti ekonomiky takmer všetkých štátov sú konfrontované s nepriaznivým hospodárskym vývojom spôsobeným viacerými aspektmi. Na jednej strane vlády jednotlivých krajín dosahujú deficit verejných financií a sú nútené tento deficit pokryť z požičaných zdrojov, na druhej strane hospodárska kríza a s ňou spojený pokles agregátneho dopytu majú za následok nárast miery nezamestnanosti vo väčšine krajín európskej únie. Zámerom tohto príspevku je analýza miery nezamestnanosti v SR a jej makroekonomických dopadov na fiškálnu politiku.

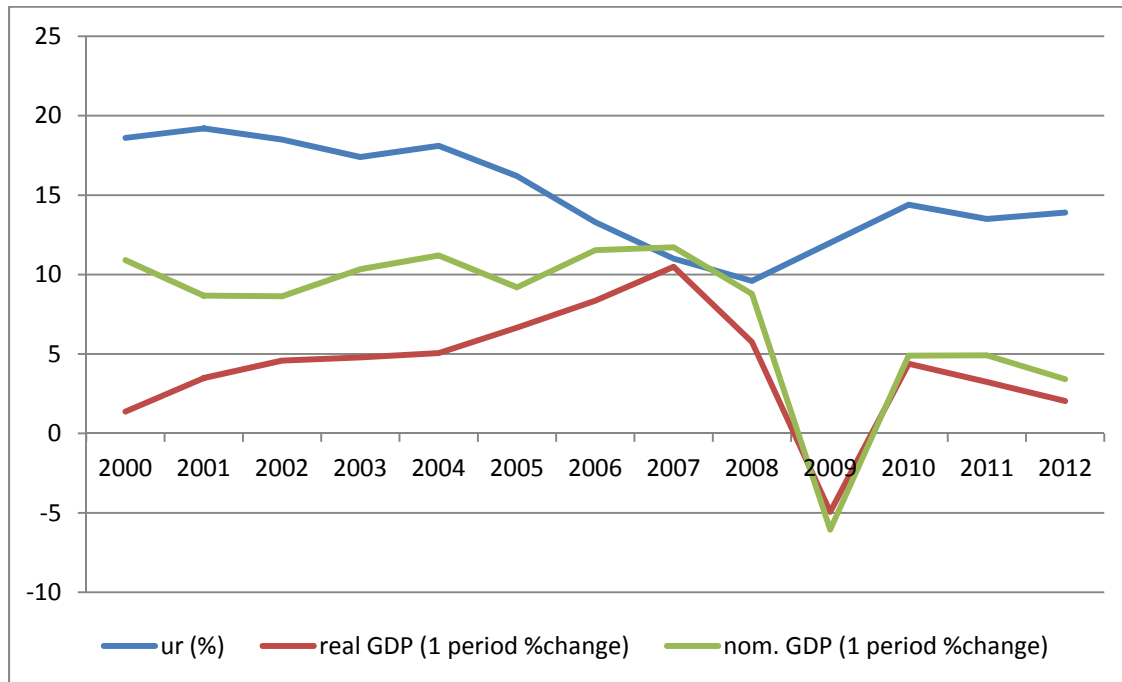
1. PREHĽAD MIERY NEZAMESTNANOSTI V SR

Miera nezamestnanosti posledné roky rastie, čo je spôsobené poklesom HDP a menším objemom výroby, ktorá je v SR závislá najmä od vývoja externého prostredia, predovšetkým

¹ Príspevok bol vypracovaný vedúcim riešiteľom v rámci riešenia projektu I-13-107-00

zahraničného dopytu. Na grafe č.1 môžeme vidieť vývoj miery nezamestnanosti a jej pohybov s vývojom rastu HDP.

Graf č.1- vývoj miery nezamestnanosti, reálneho rastu HDP (oproti roku 2005), nominálneho rastu HDP.



Zdroj: Autor, spracované na základe dát Štatistického úradu

Od roku 2009 SR zaznamenala výrazný pokles HDP a od tohto obdobia sa rast spomalil. Miera nezamestnanosti dosiahla svoje dno v roku 2008 odkedy zaznamenávame jej nárast. Nezamestnanosť a HDP sú úzko späté premenné, pretože s rastom miery nezamestnanosti, pokiaľ nedošlo k technologickému pokroku, pri danej produktivite práce HDP klesá. Pokles miery nezamestnanosti má viacero negatívnych makroekonomických dopadov. Jeden z kľúčových reprezentuje pokles príjmov a nárast výdavkov vlády. Dodatočná miera nezamestnanosti priamo znižuje príjmy vlády vo forme nižších tokov priamych daní, menších odvodov do sociálnej a zdravotnej poisťovne a zvyšuje vládne výdavky vo forme vyplácania podpory v nezamestnanosti a platenia odvodov. Nezamestnanosť má aj nepriame dôsledky ako zníženie spotreby nezamestnanej osoby a rôzne sociálne aspekty, ktoré sa podieľajú na nižšej možnosti opätovného zaradenia sa na trh práce. Strata spotreby sa prejaví v nižšom HDP a teda aj nižšom výbere štátu na spotrebných daniach.

2. METODOLÓGIA

Pri analýze miery nezamestnanosti budeme vychádzať z predpokladu, že ekonomicky aktívne obyvateľstvo je reprezentované počtom zamestnaných a nezamestnaných.

Vývoj zamestnanosti bude popísaný a analyzovaný ekonometrickým modelom, pričom bude použitý chybu korigujúci model (ECM – Error Correction Model), ktorý je

založený na princípe kointegrácie časových radov² a ktorý kombinuje krátkodobý a dlhodobý stav v jednej rovnici.³

Vzťah medzi X a Y teraz môžeme vyjadriť ako ECM špecifikáciu nasledovne:

$$\Delta Y_t = a_0 + b_1 \Delta X_t - \pi u_{t-1} + u_t \quad (1)$$

$$\text{Pričom } u_{t-1} = Y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1} \quad (2)$$

Vzťah (1) reprezentuje ECM model, ktorý v sebe spája informáciu o dlhodobej rovnováhe a krátkodobých výkyvoch od rovnováhy. Parameter b_1 reprezentuje okamžitý (krátkodobý) dopad zmeny X na Y a parameter π je korekčný člen, ktorý odpovedá na otázku, aká časť nerovnováhy z predchádzajúceho obdobia ($t-1$) je upravená v čase t . Čím bližšie je hodnota π jednej, tým väčšia časť nerovnováhy v čase t je korigovaná. Výraz (2) reprezentuje dlhodobý rovnovážny vzťah medzi nestacionárnymi premennými.

Modelovanie pomocou ECM má viacero pozitívnych stránok. Premenné sú vyjadrené ako prvé diferencie, čo vo väčšine prípadoch odstraňuje nestacionaritu časového radu a nedochádza tak k falošnej regresii. Korekčný člen, ktorý umožňuje prispôsobenie z nerovnovážneho stavu je tiež stacionárny a teda proces korekcie modelu k rovnovážnemu stavu zabraňuje rastu chyby z dlhodobého hľadiska.

3. DÁTA MODELU

Model je analyzovaný na štvrt'ročných dátach od roku 2000 prvý kvartál, až po rok 2012 štvrtý kvartál. Uvažujeme s logaritmi jednotlivých premenných. Za kľúčové faktory, determinujúce vývoj zamestnanosti sú endogénne stanovená reálna mzda vyjadrená ako podiel nominálnej mzdy a indexu cien priemyselných výrobcov (W/PPI05) a reálny HDP (Y). Počet zamestnaných bude odhadnutý pomocou ECM metodológie a počet nezamestnaných vyjadríme ako rozdiel ekonomicky aktívneho obyvateľstva a počtu zamestnaných.

Východiskom ekonometrického modelu priemernej mesačnej nominálnej mzdy bude ukazovateľ reálnej produktivity práce vyjadrený ako podiel reálneho HDP a počtu zamestnaných (Y/L1), ďalej cenový vývoj meraný pomocou indexu spotrebiteľských cien (CPI05) a počet zamestnaných (L1). Hodnoty exogénnych premenných modelov (CPI05, PPI05, Y) získame na základe našich predbežných odhadov.

4. VÝSLEDKY

V nasledujúcej časti uvedieme výsledky odhadov a predbežné prognózy jednotlivých premenných.

tabuľka č.1 – prognózované hodnoty endog. premenných a predpokladané použité hodnoty exog. premenných.

² Kointegrácia predpokladá, že ak máme dva časové rady X a Y , ktoré sú nestacionárne (ale integrované rovnakého rádu), avšak navzájom súvisia, tak existuje ich kombinácia, ktorá je stacionárna. V takomto prípade hovoríme, že skúmané premenné sú kointegrované.

³ Pre viac o ECM pozri [2].

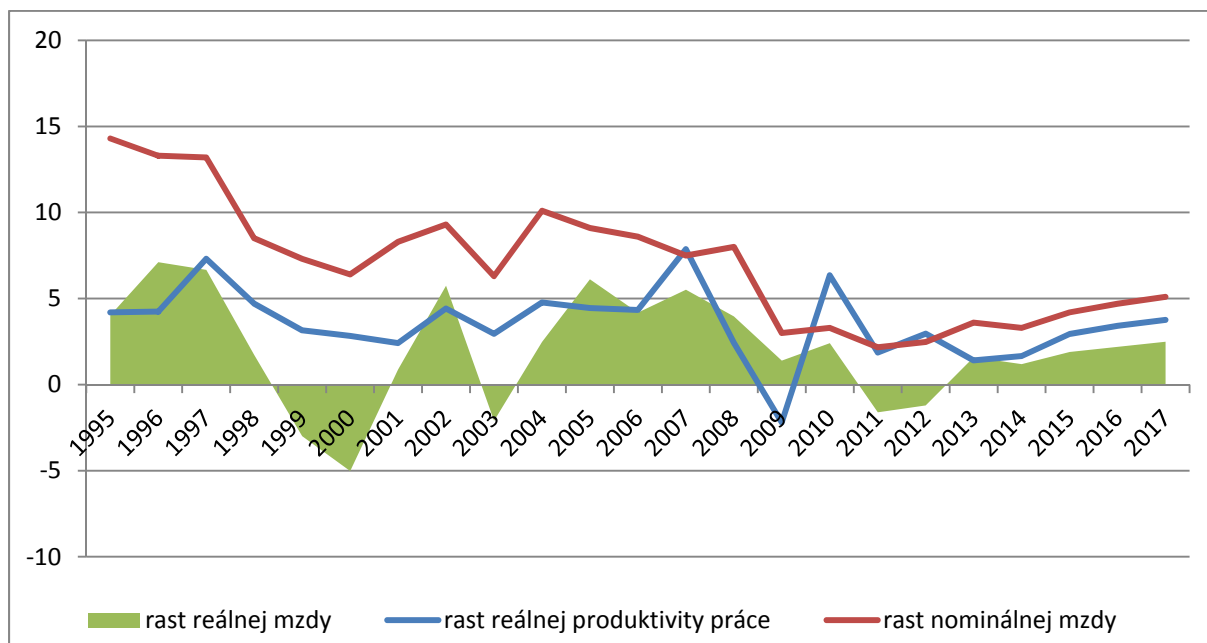
⁴ Pre viac pozri: ASTERIOU, D. - HALL, S. G.: Applied Econometrics (A Modern Approach using EViews and Microfit), Revised edition 2007.

Trh práce		2012		2013	2014	2015
Ekonomicky aktívne obyvateľstvo, tisíc osôb		2706.5	(-12,8 tis.)	2713.8	2706.8	2688.4
Zamestnaní, tisíc osôb		2329	(-22,4 tis.)	2318.1	2333.5	2350.3
Nezamestnaní, tisíc osôb		377.5	(+9,6 tis.)	395.7	373.3	338.1
Nezamestnanosť, %		14.00%	(+0,5%)	14.58%	13.79%	12.58%
Mzdy		2012		2013	2014	2015
Priemerná mesačná nominálna mzda, Eur		805.0	2.42%	3.6%	3.3%	4.2%
Rast reálnej mzdy, %		-1.20%		1.60%	1.20%	1.90%
Rast reálnej produktivity práce, %		3.70%		1.41%	1.66%	2.94%

Zdroj: Autor

Na základe uvedených výsledkov konštantujeme, že v budúcnosti sa dá očakávať mierne zlepšenie situácie na trhu práce a to ako vo forme vyššej miery zamestnanosti tak i pozvoľnému nárastu reálnej mzdy.

Graf č.2 - vývoj prognózovanej mzdy a predpokladanej produktivity práce.



Zdroj: Autor

ZÁVER

V článku je analyzované správanie trhu práce ekonometrickým prístupom ECM a jeho dopady na vývoj fiškálnej politiky. Skonstruovaný model umožňuje determinovať úroveň zamestnanosti, ako z dlhodobého horizontu tak i z krátkodobého hľadiska. Na základe predbežných hodnôt exogénnych premenných a skonstruovaného modelu dokážeme stanoviť odhadovanú výšku endogénnych premenných na najbližšie roky.

Použitá literatúra

- [1] ASTERIOU, D. – HALL, S. G.: *Applied Econometrics (A Modern Approach using EViews and Microfit)*, Revised edition 2007.
- [2] ENGLE, R. F. – GRANGER, C. W. J. (1987): *Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing*. *Econometrica*, 55, č. 2, s. 251 – 276.
- [3] HALUŠKA, J.: *Spotrebná funkcia ako nástroj na rýchly odhad konečnej spotreby domácností*. *Ekonomický časopis* 59/2011, č.4, 2011. ISSN 0013-3035.
- [4] HALUŠKA, J. - OLEXA M. - JURIOVÁ J. - KLÚČIK M.: *Modelový aparát na rýchle odhady vývoja makroekonomických ukazovateľov slovenskej ekonomiky (Využitie konjunkturálnych a spotrebiteľských prieskumov)*. Bratislava, INFOSTAT, 2008. ISBN 978-80-89398-06-5.
- [5] RADVANSKÝ, M.: *Ekonometrický model SR s dôrazom na príjmy a výdavky štátneho rozpočtu*. INFOSTAT, CEVAVSTAT, 2008.
- [6] RADVANSKÝ, M. – KÖNIG, B. – HORVÁT, P.: *Strednodobá prognóza ekonomiky SR v rokoch 2013 - 2017*. In: *Pohľady na ekonomiku Slovenska 2013*, Bratislava: SŠDS, s. 112 – 122.

Adresa autora:

Ing. Brian König, PhD.,
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava,
Tel: (421 2) 67 295 826
email: konigbrian@gmail.com

Prílohy

Príloha č.1 – dlhodobý vzťah pre model zamestnanosti

Dependent Variable: LOG(L1)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2000Q1 2012Q4
Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.459962	0.119865	45.55111	0.0000
LOG(W/PPI05)	-0.036192	0.036982	-0.978620	0.3326
LOG(Y)	0.263146	0.027160	9.688591	0.0000
R-squared	0.880490	Mean dependent var		7.721235
Adjusted R-squared	0.875612	S.D. dependent var		0.049199
S.E. of regression	0.017352	Akaike info criterion		-5.214282
Sum squared resid	0.014753	Schwarz criterion		-5.101710
Log likelihood	138.5713	Hannan-Quinn criter.		-5.171125
F-statistic	180.5035	Durbin-Watson stat		0.510305

Prob(F-statistic) 0.000000

Príloha č.2 – ECM model pre zamestnanosť

Dependent Variable: DLOG(L1)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2000Q1 2012Q4
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DLOG(Y)	0.112631	0.015846	7.107665	0.0000
LOG(L1(-1))- 5.45996234172+0.0361915739648*LOG(W(- 1)/PPI05(-1))-0.263146271532*LOG(Y(-1))	-0.216505	0.064435	-3.360066	0.0016
U08Q3	0.020292	0.007533	2.693886	0.0098
(T>=2011)*@TREND	-7.70E-05	3.52E-05	-2.184953	0.0339
@SEAS(3)	0.003930	0.002255	1.743269	0.0878
R-squared	0.665202	Mean dependent var		0.001702
Adjusted R-squared	0.636709	S.D. dependent var		0.011755
S.E. of regression	0.007085	Akaike info criterion		-6.970412
Sum squared resid	0.002359	Schwarz criterion		-6.782793
Log likelihood	186.2307	Hannan-Quinn criter.		-6.898483
Durbin-Watson stat	1.100782			

Príloha č.3 – dlhodobý vzťah pre model mzdy

Dependent Variable: LOG(W)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2000Q1 2012Q4
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG(Y/L1)	0.507021	0.070231	7.219291	0.0000
LOG(CPI05)	0.950647	0.060679	15.66693	0.0000
LOG(L1)	0.707945	0.015597	45.39094	0.0000
@SEAS(4)	0.097424	0.007558	12.88949	0.0000
@SEAS(3)	-0.036564	0.008329	-4.390114	0.0001
(T>=2008.75)*(T<=2010.75)	0.036881	0.007972	4.626363	0.0000
R-squared	0.994833	Mean dependent var		6.380739
Adjusted R-squared	0.994271	S.D. dependent var		0.264432
S.E. of regression	0.020015	Akaike info criterion		-4.876546
Sum squared resid	0.018427	Schwarz criterion		-4.651402
Log likelihood	132.7902	Hannan-Quinn criter.		-4.790231
Durbin-Watson stat	1.527663			

Príloha č.2 – ECM model pre zamestnanosť

Dependent Variable: DLOG(W)
 Method: Least Squares
 Sample (adjusted): 2000Q1 2012Q4
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
----------	-------------	------------	-------------	-------

C	0.011400	0.002295	4.968401	0.0000
DLOG(Y/L1)	0.381184	0.047539	8.018284	0.0000
DLOG(L1)	0.857286	0.241121	3.555418	0.0009
LOG(W(-1))-0.507021285653*LOG(Y(-1)/L1(-1))-0.950646624918*LOG(CPI05(-1))-0.707944800483*LOG(L1(-1))-0.097423788452*@SEAS(4)+0.0365640450296*@SEAS(3)-0.0368814600532*(T>=2008.75)*(T<=2010.75)	-0.930516	0.025014	-37.19934	0.0000
R-squared	0.972667	Mean dependent var	0.015091	
Adjusted R-squared	0.970958	S.D. dependent var	0.095535	
S.E. of regression	0.016281	Akaike info criterion	-5.323869	
Sum squared resid	0.012723	Schwarz criterion	-5.173774	
Log likelihood	142.4206	Hannan-Quinn criter.	-5.266326	
F-statistic	569.3630	Durbin-Watson stat	1.581265	
Prob(F-statistic)	0.000000			

VOLBA DODAVATELE ELEKTRINY POMOCÍ SIMULAČNÍHO MODELU

THE CHOICE OF THE ENERGY SUPPLIER VIA SIMULATION MODEL

Martina Kuncová, Veronika Rejmanová

Abstrakt

Po liberalizaci trhu s elektrickou energií v ČR vzniklo mnoho firem, které se zařadily mezi dodavatele elektřiny. Domácnosti si tak postupně zvykají, že lze ušetřit peníze volbou jiného dodavatele. Kalkulátory dostupné na různých internetových stránkách však pro určení nejvhodnějšího dodavatele uvažují pevně danou roční spotřebu elektřiny. V tomto článku ukážeme, že simulace Monte Carlo může lépe odpovídat realitě a vystihnout i výkyvy ve spotřebě. Volba dodavatele na základě celkových nákladů na elektřinu je provedena pro vybranou domácnost a Pardubický kraj.

***Klíčová slova:** dodavatelé elektřiny, cena elektřiny, simulace*

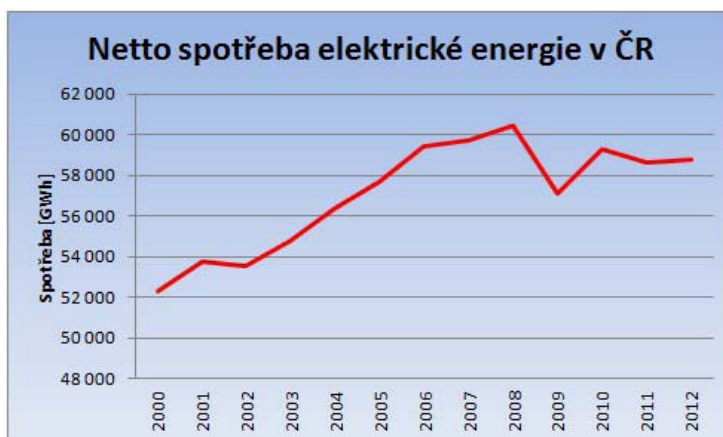
Abstract

After the Czech Republic energy market deregulation a lot of new firms grew up and started to be the energy suppliers. Families are going to adapt to the fact that it is possible to save their money by choosing different supplier. The calculators available on various web pages use only fixed annual energy consumption to assess the best supplier. In this article we show that Monte Carlo simulation can better correspond to reality and hit also the fluctuations in consumption. The choice of the energy supplier is made for the selected family and Pardubice region.

***Keywords:** energy suppliers, energy price, simulation*

1 ÚVOD

Moderní doba je charakteristická nárůstem moderních technologií, příklonem k využití více a více elektronických zařízení umožňujících především usnadnění práce. Ačkoli stále slyšíme, že novější přístroje jsou úspornější, díky nárůstu jejich používání a zavedení nových, dříve neužívaných, strojů a přístrojů dochází k nárůstu spotřeby elektrické energie. V České republice je tento nárůst patrný zejména v letech 2000-2008, poté díky hospodářské krizi došlo k menšímu poklesu a následný růst je již spíše mírný (obrázek 1). Na spotřebě se nejvíce podílejí velké firmy následované domácnostmi. Díky liberalizaci trhu si může každá domácnost od roku 2006 vybírat dodavatele elektřiny sama. Poslední dobou se díky rozšíření dodavatelů stala změna dodavatele velkým trendem. Na internetu lze nalézt mnoho kalkulátorů pro určení nejvhodnějšího dodavatele. Jejich slabinou však je nemožnost nastavení variabilní spotřeby elektřiny. V tomto článku se tedy podíváme na možnost využití simulačního modelu pro zjištění vhodného dodavatele ve vybraném regionu ČR.



Obrázek 1: Vývoj spotřeby elektřiny netto v ČR od roku 2000 (www. eru.cz)

2 MATERIÁL A METODY

Pro výběr dodavatele elektrické energie potřebujeme nejdříve definovat oblast, ve které se budeme pohybovat a dále metodu, kterou budeme dodavatele vybírat. Na základě znalosti předchozí spotřeby byla zvolena domácnost na Pardubicku (Rejmanová, 2013) a pro srovnání dodavatelů a jimi nabízených cen pak simulace Monte Carlo.

2.1 Charakteristika trhu s elektrickou energií

Elektrickou energii je možné odebírat prostřednictvím distributorů a dodavatelů, jejichž počet se neustále zvyšuje a jejich praktiky (pro získání nových zákazníků), se mnohdy pohybují na hraně zákona resp. za hranou férového a slušného jednání. Celkový přehled dodavatelů elektrické energie spolu se všemi nabízenými tarify a cenami je dosti nepřehledný, závisí na území, ve kterém dodavatele vybíráme, ale i tak je někdy obtížné dopátrat se přesných cenových podmínek odběru.

Podle Českého statistického úřadu (www.czso.cz) připadá asi 5 % z výdajů domácností právě na elektřinu. Její cena je určena jednak výší spotřeby, platí se však také za distribuci. Obecně můžeme cenu rozdělit na 2 složky, a to regulovanou platbu za dopravu elektřiny, kterou každoročně stanoví Energetický regulační úřad (www. eru.cz) a dále cenu silové elektřiny, kterou nastavuje obchodník s elektřinou. Regulovaná platba za dopravu elektřiny zahrnuje:

- měsíční platbu za příkon podle jmenovité proudové hodnoty hlavního jističe před elektroměrem (nájem za jistič),
- platbu za distribuované množství elektřiny ve vysokém tarifu (dále jen VT) – cena za dopravenou megawatthodinu (MWh) nebo kilowatthodinu (kWh),
- platbu za distribuované množství elektřiny v nízkém tarifu (dále jen NT) – cena za dopravenou MWh nebo kWh,
- cenu systémových služeb (plynulé zajištění rovnováhy mezi výrobou a spotřebou elektřiny),
- cenu za podporu výkupu elektřiny z obnovitelných zdrojů a kombinované výroby elektřiny a tepla,
- cenu za činnost zúčtování Operátora trhu s elektřinou, a.s.,
- daň z přidané hodnoty (21 %), před započtením DPH je k ceně připočtena daň z elektřiny ve výši 28,30 Kč (cena bez DPH) za 1 MWh.

Nízký tarif (známý také pod názvem „noční proud“), nelze čerpat ve všech sazbách, případně lze čerpat jen omezený počet hodin denně. Rozvržení NT během dne pak záleží na distributorovi v dané oblasti a nemusí být pro všechny domácnosti stejné.

V České republice jsou celkem tři distributoři, kteří mají rozdělené oblasti a starají se například o rozbité elektroměry, veškerý servis, nebo i odpojení neplatičů. Distributora si tedy lidé nemohou volit sami. V Praze zajišťuje distribuci Pražská energetika, v jižním pásmu, tj. na Vysočině, v Jihočeském, Jihomoravském a Zlínském kraji je distributorem společnost E.ON a v ostatních krajích se o distribuci stará společnost ČEZ.

Druhou složkou platby je cena silové elektřiny, kterou účtuje obchodník s elektřinou. Jedná se o cenu za odebranou elektřinu a zahrnuje:

- pevnou měsíční cenu, která je odlišná pro každou produktovou řadu,
- cenu elektřiny ve VT,
- cenu elektřiny v NT,
- daň z elektřiny – tzv. ekologická daň vyplývající ze závazků vůči Evropské unii, výše daně závisí na množství odebrané elektřiny, sazba daně z elektřiny je jednotná, a to 34,24 Kč/MWh (cena s DPH).

Domácnosti je přiřazena konkrétní sazba podle podmínek dodavatele. Většina všech domácností využívá sazbu D25, pro zařazení stačí používat bojler na ohřev teplé vody. Pak je možné využít jak nízký, tak vysoký tarif. Cena v nízkém tarifu je výrazně nižší, než ve vysokém tarifu, využít ho lze jen po omezenou dobu (např. 8 hodin denně). Kromě této sazby jsou standardně využívány např. sazba D01, která využívá pouze vysokého tarifu, je určena především pro nižší spotřebu či sazba D02 pro domácnosti se střední spotřebou (pouze vysoký tarif), cena za 1 MWh je nižší než u sazby D01.

Počet dodavatelů elektřiny neustále stoupá, v současné době je na území České republiky evidováno 26 dodavatelů elektrické energie, z nichž někteří působí jen v určitých krajích (www.dodavatelelektriny.cz).

Jako vstupní data budou použity údaje z tabulky 1 (Rejmanová, 2013). Jedná se o celkové ceny jednotlivých dodavatelů elektrické energie platné pro rok 2013, sazbu D25 a distribuční oblast Východní Čechy, popřípadě Pardubický kraj nebo okres Chrudim. Jsou uvedeny ceny za spotřebu 1 MWh ve vysokém tarifu (VT) a v nízkém tarifu (NT), dále stálá měsíční platba, která se platí při jakékoliv výši spotřeby. Posledním údajem je výše měsíčního nájmu za příkon o jmenovité proudové hodnotě jističe, v tomto případě nad 3x20A do 3x25A včetně. Tato hodnota je u všech dodavatelů stejná, protože je určena distributorem v dané oblasti a dodavatel elektřiny nemá na její výši vliv. Všechny uvedené ceny byly získány z ceníků jednotlivých dodavatelů elektřiny uvedených na jejich internetových stránkách (v některých případech bylo nutné celkovou cenu dopočítat, protože dodavatel uvedl pouze stálou platbu za měsíc a cenu za silovou elektřinu, kterou bylo nutné navýšit o regulovanou cenu a daň z elektřiny). Regulovaná cena je určena ceníkem společnosti ČEZ, která je v této oblasti distributorem elektřiny, výše měsíčního nájmu je stanovena na 145,20 Kč.

Při vyhledávání dat bylo zjištěno, že v dané sazbě a oblasti působí jen 24 dodavatelů, srovnávaných tarifů však bude 25, protože společnost Corasta nabízí dva různé dostupné produkty, které by mohly domácnosti vyhovovat.

Tabulka 1: Základní data

	dodavatel	Cena ve VT (Kč/MWh)	Cena v NT (Kč/MWh)	Stálá měsíční platba
1	3E - Europe Easy Energy	5344,61	2019,99	42,35
2	Amper Market	5251,08	2117,74	30,25
3	Armex Energy	5109,87	2283,77	58,08
4	Bicorn	5402,68	2161,55	66,5
5	Bohemia Energy	5255,07	2042,98	60,5
6	Central Energy	5426,53	2190,24	54,45
7	Centropol Energy	5405,11	2162,77	60,5
8	České energetické centrum	5423,26	2216,01	240,79
9	ČEZ Prodej	5470,45	2228,11	60,5
10	Comfort Energy	5275,64	2055,08	60,5
11	Corasta - Comfort	5438,99	2282,56	56,87
12	Corasta - Exclusive	5196,99	2339,43	87,12
13	ČM Energetika	5158,27	2024,83	48,4
14	E.ON Energie	5320,41	2138,57	58
15	Elimon	5374,86	2162,77	50,82
16	Global Energy	5497,07	2248,68	54,45
17	Lama Investments	5460,77	2212,38	60,5
18	Lumen Energy	5461,98	2211,17	54,45
19	Nano Energies Trade	5144,24	2315,72	47,19
20	Optimum Trading	5130,44	2272,88	60,5
21	Pražská energetika	5222,39	2350,28	95,59
22	RWE Energie	5426,89	2201,49	60,5
23	ST Energy	5230,51	2323,34	47,19
24	Vemex Energie (RSP)	5339,77	2168,82	78,65
25	X Energie	5336,14	2093,8	54,45

2.2 Simulace Monte Carlo

Simulace Monte Carlo patří mezi techniky využívající znalosti z oblasti matematiky a statistiky. Jedná se o napodobení reality pomocí opakovaných náhodných pokusů realizovaných na počítači, díky čemuž napodobuje náhodné kolísání reálných veličin (Turban, Meredith 1994).

Problémem většiny ekonomických modelů je nedostatek informací, resp. nemožnost přesně předpovědět budoucí vývoj. V takovéto situaci je velmi obtížné použití běžných matematických či statistických modelů, právě vzhledem k nedostatku reálných pozorování a dat. Nicméně model založený na simulaci Monte Carlo lze vytvořit i za těchto podmínek a často bývá lepším zobrazením reality, než by to dokázal běžný statický výpočet. Zahrnutí jisté dynamiky, náhody či nejistoty činí model vhodnější pro analýzu ekonomické reality.

Pro využití simulačního modelu je nutné předem zvolit typy pravděpodobnostních rozdělení, ze kterých budou potřebné veličiny generovány. Mezi nejběžnější patří především normální, rovnoměrné, trojúhelníkové, Poissonovo, exponenciální či lognormální rozdělení (Dlouhý a kol. 2011). Hodnoty z většiny uvedených rozdělení lze generovat v prostředí MS Excel, nicméně pro složitější typy rozdělení je vhodnější využít některý z doplňků programu MS Excel, např. Crystal Ball (Kuncová 2006, Oracle 2012). V tomto článku si vystačíme s rovnoměrným rozdělením a MS Excelem. Pro generování hodnot z rovnoměrného rozdělení $R(a,b)$ je použita funkce $=\text{NÁHČÍSLO}()*(b-a)+a$.

3 VÝSLEDKY

Výše roční spotřeby pro simulační model byla určena z předchozích tří let vybrané domácnosti (rodinný dům s prodejnou), přičemž každému měsíci byla spotřeba přiřazena na

základě odhadnutých vah pro spotřebu energie v daném měsíci (např. nejvyšší váha připadá na měsíc únor, nejnižší pak na srpen – spojeno s vytápěním). Z předchozích let bylo také zjištěno, že vysoký tarif je využíván na 45 %, na nízký tarif připadá 55 % měsíční spotřeby. Pro každý měsíc jsme pak stanovili širší intervalu a meze pro generování spotřeby z rovnoměrného rozdělení. Nejvyšší variabilita je v zimních měsících, kdy je spotřeba energie závislá především na venkovní teplotě. Šíře intervalu, dolní i horní meze výsledných intervalů pro generování náhodných spotřeb jsou uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2: Intervaly pro generování náhodné měsíční spotřeby

měsíc	průměrná spotřeba (kWh)	Interval	
		dolní mez spotřeby	horní mez spotřeby
leden	933	883	983
únor	973	923	1023
březen	900	855	945
duben	819	779	859
květen	771	731	811
červen	730	695	765
červenec	689	659	719
srpen	665	635	695
září	730	695	765
říjen	795	755	835
listopad	835	795	875
prosinec	892	847	937
Celkem	9732	9252	10212

Celková měsíční platba u daného dodavatele se vypočítá jako součet nájmu za jistič + stálá měsíční platba + cena VT*0,454*měsíční spotřeba + cena NT*0,546*měsíční spotřeba, kde se počítá s platnými cenami příslušného dodavatele. Simulace byla provedena na 10 období (10 let) a následně byly vypočítány průměrné roční náklady při volbě jednotlivých dodavatelů.

Tabulka 3: Výsledné pořadí dodavatelů

pořadí	dodavatel	průměrná roční cena v Kč
1	ČM Energetika	36028,45
2	Bohemia Energy	36699,04
3	Amper Market	36721,90
4	3E - Europe Easy Energy	36752,55
5	Comfort Energy	36855,18
6	X Energie	37258,70
7	Armex Energy	37328,38
8	Optimum Trading	37389,48
9	E.ON Energie	37473,46
10	Nano Energies Trade	37521,90
11	Elimon	37758,34
12	ST Energy	37943,97
13	Vemex Energie (RSP)	37970,01
14	Centropol Energy	38008,08
15	Bicorn	38062,76
16	Central Energy	38178,31
17	RWE Energie	38313,22
18	Corasta - Exclusive	38361,95
19	Lumen Energy	38447,81
20	Lama Investments	38521,60
21	Pražská energetika	38634,30
22	ČEZ Prodej	38649,23
23	Corasta - Comfort	38760,62
24	Global Energy	38805,20
25	České energetické centrum	40539,03

Z tabulky 3 plyne, že mezi nejvýhodnější dodavatele s náklady mezi 36-37 tisíci korunami ročně se řadí společnosti ČM Energetika, Bohemia Energy, Amper Market, 3E-Europe Easy Energy a Comfort Energy. Vítězná ČM Energetika nemá v žádném kritériu nejnižší cenu, ale kombinace poměrně nízkých cen vede k jejímu vítězství. Naopak zcela vzadu s cenou převyšující 40 tisíc korun (tj. o více než 10 % vyšší) se umístila společnost České energetické centrum, zejména díky vysoké pevné měsíční sazbě. Výsledné pořadí se nezměnilo ani po více náhodných pokusech. Stávající dodavatel ČEZ Prodej se umístil na 22. příčce s průměrnými ročními náklady 38 650 Kč. Oproti první příčce jsou ceny společnosti ČEZ v jednom průměrném roce zhruba o 2600 korun vyšší.

4 ZÁVĚR

Změny na trhu elektrické energie nás každodenně přesvědčují, že je vhodné zvážit volbu dodavatele zejména z hlediska celkové zaplacené ceny. Jednou z možností provedení analýzy je simulace Monte Carlo, kde lze na základě odhadu variabilní spotřeby elektřiny určit celkové náklady dle každého dodavatele a poté vybrat toho, který má celkovou cenu nižší. Samozřejmě je vhodné uvažovat i jiné faktory, např. blízkost pobočky či možnost sjednání smlouvy na neurčitou dobu. I tak uvedený postup jasně oddělí vhodné a nevhodné dodavatele.

Použitá literatura

1. DLOUHÝ, M.--FÁBRY, J.--KUNCOVÁ M.--HLADÍK T.: Simulace ekonomických procesů. 2. vyd. Brno: Computer Press 2011. 206 s. ISBN 978-80-251-3449-8.
2. KUNCOVÁ, M., 2006. Practical Application of Monte Carlo Simulation in MS Excel and its Add-ons – The Optimal Mobile Phone Tariffs for Various Types of Consumers in the Czech Republic. In: Proceedings of Mathematical Methods in Economics 2006 Conference, pp. 323-332. 13.-15.září, Plzeň
3. Roční zpráva o provozu ES ČR za rok 2012. Energetický regulační úřad [online]. [cit. 2013-11-15]. Dostupné z: http://www.eru.cz/user_data/files/statistika_elektro/rocn_i_zprava/2012/RZ_elektro_2_012_v1.pdf.
4. REJMANOVÁ, V. 2013. Volba dodavatele elektřiny pro domácnost s využitím metod operačního výzkumu. VŠE Praha, diplomová práce.
5. Seznam dodavatelů elektřiny. [online]. [cit. 2013-11-12]. Dostupné z: <http://www.dodavateleelektriny.cz/>.
6. Spotřební koš pro výpočet indexu spotřebitelských cen od ledna 2013. Český statistický úřad [online]. [cit. 2013-11-15]. Dostupné z: http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mira_inflace.
7. TURBAN, E., MEREDITH, J., R., 1994. Fundamentals of Management science. 6th ed. USA, Richard D.Irwin Inc.

Kontaktní údaje

Ing. Martina Kuncová, PhD.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3, ČR

Tel: +420 224 095 449

email: martina.kuncova@vse.cz

Článek vznikl za podpory grantu GAČR č. 13-07350S a projektu interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické F4/19/2013 (IG403033).

MODELOVANIE DELITEĽNEJ A NEDELITEĽNEJ PRÁCE – RBC PRÍSTUP

MODELLING OF DIVISIBLE AND INDIVISIBLE LABOR – RBC APPROACH

Patrik Kupkovič, Martin Benkovič

Abstrakt

V tomto príspevku sme porovnávali dva prístupy k modelovaniu celkových odpracovaných hodín v RBC modeloch. V prvom prípade sme celkové odpracované hodiny modelovali pomocou deliteľnej práce, to znamená že zmeny v celkových odpracovaných hodinách sú spôsobené len zmenami v odpracovaných hodinách jednotlivca. V druhom prípade sme zmeny v celkových odpracovaných hodinách modelovali pomocou nedeliteľnej práce, čo znamená, že zmeny v celkových odpracovaných hodinách sú spôsobené len zmenami v zamestnanosti. Z takto koncipovaných ekonomík sme extrahovali obchodné cykly a ich charakteristiky sme porovnávali s obchodnými cyklami z pozorovaných dát. Zistili sme, že modely vzhľadom na svoju jednoduchosť produkujú uspokojivé výsledky. Model s nedeliteľnou pracou je o niečo volatilnejší v porovnaní s modelom s deliteľnou pracou.

Kľúčové slová: RBC model, deliteľná práca, nedeliteľná práca

Abstract

In this paper, we compared two approaches in modeling the amount of total hours worked in RBC models. In the first case, we modeled the amount of total hours worked using the divisible labor which means that changes in the total amount of hours worked are caused only by changes in one's individual hours worked. In the second case, we modeled changes in the amount of total hours worked using the indivisible labor, which means that changes in the amount of total hours worked are caused only by changes in employment. For this kind of economies we extracted business cycles and compared their characteristics with the business cycles of the observed data. We found that models despite their simplicity produce satisfactory results. Models with indivisible labor are somewhat more volatile compared to model with divisible labor.

Keywords: RBC model, divisible labor, indivisible labor

ÚVOD

Základný RBC model bol často kritizovaný za to, že nezahŕňal dôležité prvky trhu práce. V modeli neexistovali nezamestnaní pracovníci ani fluktuácie v nezamestnanosti. Azda najviac sú rovnovážne modely kritizované za to, že veľmi závisia na ochote jednotlivcov substituovať voľný čas za prácu v závislosti od zmeny mzdy (prípadne úrokovej miery). Táto kritika vychádza predovšetkým z mikroekonomických štúdií využívajúcich panelové dáta odpracovaných hodín jednotlivcov. Tieto štúdie nezistili potrebnú medzičasovú substitúciu (substitúciu medzi obdobiami) na úrovni jednotlivcov, ktorá by bola schopná vysvetliť agregované fluktuácie v celkových odpracovaných hodinách na makroekonomickej úrovni.

1 RBC MODEL S DELITEĽNOU PRÁCOU

Štandardný RBC model autorov Ganga a Semmlera (2004) predpokladá reprezentatívneho agenta, ktorý maximalizuje svoju funkciu užitočnosti, vzhľadom na svoje rozpočtové obmedzenie na báze dynamickej optimalizácie v nekonečnom horizonte. Stockey, Lucas a Prescott (1989) dodávajú, že riešenie takéhoto typu plánovacieho problému pod príslušnými podmienkami, môžeme chápať ako správanie sa moderných trhových ekonomík. Reprezentatívna domácnosť maximalizuje svoju funkciu užitočnosti vzhľadom na svoje rozpočtové ohraničenie, čo môžeme riešiť pomocou Lagrangeovej funkcie v tvare:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log(c_t) + \theta \log(1-h_t)) - \sum_{t=0}^{\infty} E_t \left\{ \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \left[k_{t+1} - \frac{1}{1+\gamma} \left((1-\delta)k_t + e^{z_t} k_t^{1-\alpha} h_t^\alpha - c_t \right) \right] \right\} \quad (1.1)$$

deriváciou Lagrangeovej funkcie podľa c_t, h_t, k_t a λ_t a položením derivácií rovných nule získame podmienky prvého rádu. Ich vhodnou kombináciou získame Eulerove rovnice pre spotrebu a prácu:

$$\frac{(1+\gamma) \frac{1}{c_t}}{\beta \frac{1}{c_{t+1}}} = (1+r_{t+1} - \delta) \quad (1.2)$$

$$\theta \frac{c_t}{1-h_t} = w_t \quad (1.3)$$

Podmienky prvého rádu pre firmu sú odvodené z maximalizácie funkcie zisku vzhľadom na jej výrobné možnosti a sú v tvare:

$$r_t = (1-\alpha) \frac{y_t}{k_t} \quad (1.4)$$

$$w_t = \alpha \frac{y_t}{h_t} \quad (1.5)$$

Firma je ďalej charakterizovaná produkčnou funkciou a technologickým šokom, ktorý je autoregresným procesom prvého rádu:

$$y_t = e^{z_t} (k_t)^{1-\alpha} (h_t)^\alpha \quad (1.6)$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + e_t \quad (1.7)$$

kde e_t má nulovú strednú hodnotu a určitý zadaný rozptyl. Model ešte skompletizujeme bilančnými vzťahmi pre výstup a tvorbu kapitálu:

$$y_t = c_t + i_t \quad (1.8)$$

$$(1+\gamma)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \quad (1.9)$$

Model je teda tvorený rovnicami (1.2) až (1.9).

2 RBC MODEL S NEDELITEĽNOU PRÁCOU

Pri modelovaní nedeliteľnej práce budeme vychádzať z práce Hansena (1985). Modelovanie nedeliteľnej práce je postavená na predpoklade, že jednotlivci odpracujú určitý presne stanovený počet hodín alebo na druhej strane nepracujú vôbec. Môžeme si to vysvetliť zavedením nekonvexnosti do technológie alebo preferencií. Napr. z technológie vyplýva, že hraničná produktivita jednotlivca je rastúca začiatkom pracovného dňa (týždňa) a neskôr

začne byť klesajúca. Jednotlivec teda čelí produkčnej funkcii, ktorá je najprv konvexná a neskôr je konkávna. Môžeme si to vysvetliť tak, že jednotlivec potrebuje určitý čas na zahriatie, aby bol plne produktívny. Preto jednotlivec pracuje celý pracovný čas alebo vôbec. Ďalšou možnosťou je, že nekonvexnosť je vlastnosťou preferencií. Vo funkcii užitočnosti to znamená klesajúcu hraničnú užitočnosť voľného času v nízkych úrovniach voľného času a rastúcu hraničnú užitočnosť vo vysokých úrovniach. Jednotlivci si budú vyberať nízke úrovne voľného času (pracovať budú viac) alebo celý svoj čas využijú ako voľný čas (nebudú pracovať vôbec). Jednoducho by sme si to mohli vysvetliť tak, že jednotlivcovi sa oplatí nepracovať vôbec napr. z dôvodu dlhej cesty do práce alebo sa mu oplatí pracovať celú pracovnú dobu.

Fluktuácie v odpracovaných hodinách v modeli sú výsledkom zamestnanosti resp. nezamestnanosti jednotlivca a nie zmenami v odpracovaných hodinách ako je zvykom v týchto typoch modelov. Rovnovážne teórie hospodárskych cyklov silne závisia na medzičasovej substitúcii voľného času za prácu vyúsťujúcej do agregovaných fluktuácií v odpracovaných hodinách. Substitúcia je meraná elasticitou substitúcie medzi voľným časom v rôznych časových periódach a vkladá sa do funkcie užitočnosti. Hansen (1985) rozpracoval teóriu v ktorej je možné produkovať dostatočne silné fluktuácie na makroekonomickej úrovni a nevyžadujú silnú elasticitu substitúcie na mikroekonomickej úrovni.

Keď sa pozrieme na dáta, tak zmeny v celkových odpracovaných hodinách sú spôsobené na jednej strane zmenami v počte odpracovaných hodín jednotlivca a na druhej strane zmenami v zamestnanosti jednotlivcov. Aby sme kvantitatívne vyčíslili tieto zmeny, môžeme si variabilitu v celkových odpracovaných hodinách rozložiť nasledovne:

$$\text{var}(\log H_t) = \text{var}(\log h_t) + \text{var}(\log EMP_t) + 2 \text{cov}(\log h_t, \log EMP_t)$$

kde H_t sú celkové odpracované hodiny, h_t odpracované hodiny jednotlivca a EMP_t počet zamestnaných jednotlivcov. Všetky premenné sú logaritmované a detrendované HP filtrom. Použitím tejto dekompozície zistíme, že až 78% zmien v celkových odpracovaných hodinách je spôsobených zmenami v zamestnanosti. Ďalších 16% je spôsobených zmenami v počte odpracovaných hodín jednotlivca. Zvyšných 6% prislúcha kovariančnému členu. Z tohto vidíme, že je veľmi dôležité modelovať variabilitu v celkových odpracovaných hodinách práve zmenami v zamestnanosti¹.

Nedeliteľnosť v práci budeme modelovať obmedzením možností domácností pracovať ľubovoľný počet hodín. Domácnosť bude pracovať určitý počet hodín h_0 alebo nebude pracovať vôbec. Je potrebné, aby bol dynamický optimalizačný problém domácnosti konvexný. Vložením nedeliteľnosti práce sa, ale stáva nekonvexným. Aby sme odstránili tento problém predpokladajme, že domácnosti si určujú (resp. je im určená) pravdepodobnosť s akou budú pracovať. Lotéria nakoniec určuje, či domácnosť bude pracovať ($empl_t$) alebo nie ($1 - empl_t$). Preto namiesto toho, aby sa domácnosť rozhodovala koľko bude pracovať, rozhoduje sa s akou pravdepodobnosťou bude pracovať. Domácnosť má kontrakt s firmou a pracuje stanovený čas h_0 s pravdepodobnosťou $empl_t$. Tento kontrakt zabezpečuje, že domácnosť dostane zaplatené či pracuje alebo nie. Firma poskytuje domácnostiam kompletne poistenie v nezamestnanosti². Je to preto, aby si aj nezamestnaná domácnosť mohla dovoliť určitý stupeň spotreby. Tieto prvky zapracujeme do modelu cez funkciu užitočnosti v tvare (3.17). Celkovú funkciu užitočnosti zapíšeme nasledovne:

¹Pre ilustráciu, autor danú dekompozíciu robil na dátach USA a zistil, že zmeny v celkových odpracovaných hodinách sú spôsobené z 55% zmenami v zamestnanosti, z 20% zmenami v počte odpracovaných hodín a zvyšných 25% prislúcha kovariančnému členu.

²Autor toto tvrdenie dokazuje vo svojej práci, a preto odporúčame čitateľa práve na Hansen (1985).

$$U(c_t, h_t) = empl_t [\log(c_t) + \theta \log(1 - h_0)] + (1 - empl_t)(\log c_t + \theta \log 1) \quad (2.1)$$

Túto funkciu si roznásobíme a dostaneme:

$$U(c_t, h_t) = \log c_t + \theta empl_t \log(1 - h_0) \quad (2.2)$$

Domácnosť odpracuje $h_t = empl_t h_0$ hodín, odkiaľ dostaneme $empl_t = \frac{h_t}{h_0}$ a dosadíme do (2.2).

Funkciu užitočnosti potom môžeme prepísať ako:

$$U(c_t, h_t) = \log c_t - \frac{\theta \log(1 - h_0)}{h_0} (1 - h_t) \quad (2.3)$$

Označme si $B = -\frac{\theta \log(1 - h_0)}{h_0}$ a roznásobme si druhý člen výrazu (2.3). Dostaneme funkciu užitočnosti v tvare:

$$U(c_t, h_t) = \log c_t - Bh_t \quad (2.4)$$

Vidíme, že funkcia užitočnosti (2.4) je lineárna v h_t . Kľúčové zistenie je, že medzičasová substitúcia na agregátnej úrovni je veľmi veľká (2.4), oproti situácii na úrovni jednotlivca, kedy je táto elasticita menšia v spojení s logaritmickou funkciou užitočnosti (2.2). Preto namiesto logaritmickkej funkcie užitočnosti použijeme funkciu užitočnosti v tvare (2.4). Model sa bude od predchádzajúceho modelu odlišovať len v Eulerovej rovnici pre prácu, ktorá bude v tvare:

$$\frac{B}{1/c_t} = w_t \quad (2.5)$$

3 KALIBRÁCIA A SIMULÁCIA MODELOV

Hodnoty kalibrovaných parametrov sme prevzali buď z odborných štúdií (SENAJ, VÝŠKRABKA a ZEMAN (2010)) alebo sme si ich dopočítali. Všetky parametre sú uvedené v Tab. č. 1.

Tabuľka č. 1: Kalibrované hodnoty parametrov

α	Podiel odmien zamestnancov na pridanej hodnote	0,7
β	Diskontný faktor	0,998
δ	Miera opotrebenia	0,2
θ	Inverzná hodnota Frischovej elasticity	2
γ	Tempo rovnovážneho rastu	0,005
h_0	Časť celkového času domácnosti vyhradeného na prácu	0,34
ρ_z	Autoregresný koeficient technologického šoku	0,714
σ_{z_div}	Št. odchýlka technologického šoku	0,0118
σ_{z_indiv}	Št. odchýlka technologického šoku	0,0073

Zdroj: Senaj, Výškrabka a Zeman (2010) a vlastné výpočty.

Model sme simulovali pomocou softvéru MATLAB – Dynare. Snažili sme sa modelovať št. odchýlky premenných (výstupu, spotreby, investícií, kapitálu a celkových odpracovaných hodín (A)) a ich koreláciu s výstupom (B). Model sme simulovali na 5900 období z ktorých sme prvých 500 odstránili a až následne sme vypočítali číselné charakteristiky. Tieto hodnoty budeme porovnávať s obdobnými charakteristikami vypočítanými z pozorovaných dát. Použili sme štvrťročné dáta od 1998Q1 po 2012Q3 v stálych cenách roku 2005 z EUROSTATU. Spomínané premenné sme prepočítali na jedného obyvateľa, sezónne očistili, logaritmovali a filtrovali hodrickovým-prescottovým filtrom.

4 ANALÝZA VÝSLEDKOV

Výsledky simulovaných modelov uvádzame v Tab. č. 2. Sú tu charakteristiky vypočítané z pozorovaných dát, z modelovej ekonomiky s deliteľnou prácou a z modelovej ekonomiky s nedeliteľnou prácou.

Tab. č. 2: Charakteristiky časových radov skutočnej a modelovaných ekonomík

	Pozorované hodnoty		Ekonomika s deliteľnou prácou		Ekonomika s nedeliteľnou prácou	
	(A)	(B)	(A)	(B)	(A)	(B)
Výstup	2,37	1,00	2,37	1,00	2,37	1,00
Spotreba	2,03	0,53	0,31	0,60	0,29	0,60
Investície	11,52	0,63	8,08	0,99	8,14	0,99
Kapitál	1,07	0,06	0,52	0,33	0,52	0,33
Celk. odprac. hod.	1,64	0,69	1,48	0,99	2,22	0,99

Zdroj: EUROSTAT a vlastné výpočty.

Ako prvé by sme si mali všimnúť (Tab. č. 1), že v modeli s nedeliteľnou prácou potrebujeme oveľa menšiu št. odchýlku na dosiahnutie pozorovanej fluktuácie v dátach. To znamená, že nedeliteľná práca zvyšuje volatilitu outputu. A keďže je to jediný šok v ekonomike, tak vidíme že nedeliteľná práca nám zvýšila fluktuácie aj ostatných premenných³. Pri pohľade na št. odchýlku spotreby vidíme, že v pozorovanej ekonomike je oveľa vyššia ako v modelových ekonomikách. Hansen (1985) ako aj iní autori to pripisujú tomu, že v modeli sa nenachádza nič čo by modelovalo dopyt po tovaroch dlhodobej spotreby. Pritom je to súčasť spotreby v pozorovanej ekonomike. Vieme, že tento dopyt je oveľa viacej volatilný ako výstup a tým pádom je ovplyvnená aj spotreba v pozorovaných dátach. Investície v oboch modeloch majú vysokú variabilitu, aj keď nie takú ako v pozorovaných dátach. Z ekonomickej teórie vieme, že kapitál je z krátkodobého hľadiska málo volatilný. To sa nám potvrdilo aj v modeli. Pri pohľade na odpracované hodiny vidíme, že v modeli s nedeliteľnou prácou sa nám zvýšila volatilita odpracovaných hodín. Zvýšila až tak, že presahuje volatilitu v pozorovaných dátach. Deliteľná a nedeliteľná práca predstavujú dva extrémne prípady. V prvom prípade sú zmeny v celkových odpracovaných hodinách spôsobené len zmenou v odpracovaných hodinách,

³ Zvýšila v tom zmysle, že potrebujeme menšiu št. odchýlku na dosiahnutie požadovanej volatility výstupu a tým pádom aj ostatných premenných.

v druhom prípade sú spôsobené len zmenami v zamestnanosti. Z pozorovaných dát vidíme, že variabilita v celkových odpracovaných hodinách sa nachádza niekde medzi týmito dvomi extrémnymi prípadmi.

ZÁVER

V tomto príspevku sme konštruovali model s nedeliteľnou prácou s cieľom modelovať št. odchýlku makroekonomických premenných a ich koreláciu s výstupom. Subjekty v tejto ekonomike vstupujú a vystupujú z pracovnej sily v závislosti od technologického šoku. Na rozdiel od ekonomiky s deliteľnou prácou kde jednoducho prispôbujú odpracované hodiny technologickému šoku, pričom sú stále zamestnaní. Zistili sme, že zmeny v celkových odpracovaných hodinách sú predovšetkým spôsobované zmenami v zamestnanosti ako v zmenami v odpracovaných hodinách jednotlivca. Takisto sme zistili, že v takto zostrojenej ekonomike sa nám znížila štandardná odchýlka technologického šoku potrebná na produkovanie volatility výstupu ako v pozorovaných dátach. Z toho nám vyplynulo, že zavedením nedeliteľnej práce sa nám zvýšila fluktuácia takmer všetkých modelovaných makroekonomických premenných. Modelovanie deliteľnej a nedeliteľnej práce sú dva extrémne prípady a závery vyplývajúce z dát sú niekde uprostred. Preto ďalšiu oblasť výskumu vidíme práve v kombinácii týchto dvoch pohľadov.

Použitá literatúra

1. GANG, G. – SEMMLER, W. 2004. *Stochastic Dynamic Macroeconomics: Theory and Empirical Evidence*. New York : Oxford University Press, 2004. 200 s. ISBN 0195301625.
2. HANSEN, G. H. 1985. Indivisible Labor and Business Cycles. In *Journal of Monetary Economics* [online]. 1985, vol. 16, no. 3 [cit. 2013-12-1]. Dostupné na internete: <http://pareto.uab.es/mcreel/econometrics/SMM%20Hansen/Hansen1985.pdf>
3. SENAJ, M. – VÝŠKRABKA, M. – ZEMAN, J. 2010. *MUSE: Monetary Union and Slovak Economy Model: Working Paper* , no. 1/2010. [cit. 2013-12-1]. Dostupné na internete: http://www.nbs.sk/_img/Documents/PUBLIK/WP_1-2010.pdf
4. ZEMAN, J. – SENAJ, M. 2008. *DSGE Model - Slovakia: Working Paper* , no. 3/2009. [cit. 2013-12-1]. Dostupné na internete: http://www.nbs.sk/_img/Documents/PUBLIK/WP_3-2009%20DSGE%20Slovakia.pdf

Kontaktné údaje

Ing. Patrik Kupkovič, Ing. Martin Benkovič
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 826 – sekretariát KOVE
email: patrik.kupkovic@gmail.com benkovic.m@gmail.com

PARAMETRE PRODUKČNEJ FUNKCIE EKONOMIKY¹

PARAMETERS OF PRODUCTION FUNCTION OF ECONOMY

Martin Lukáčik

Abstrakt

Produkčné funkcie predstavujú základné funkcie používané nielen v mikroekonomických ale najmä v makroekonomických modeloch. Najskôr sa v teórii začali využívať dvojfaktorové produkčné funkcie, v ktorých sú vstupmi kapitál a práca. V trojfaktorových produkčných funkciách sa k pôvodným faktorom pridáva ľudský kapitál, prípadne sa práca uvažuje zvlášť ako počet zamestnancov a počet hodín na zamestnanca. Parametre produkčných funkcií ekonomík sa využívajú v modeloch vychádzajúcich z mikroekonomických východísk, preto ich odhad získaný priamo alebo dekompozíciou rastu je zaujímavý pre každého analytika.

Keľúčovú slová: *Cobbova-Douglasova produkčná funkcia, CES funkcia, konštantné výnosy z rozsahu, dekompozícia rastu, Solowov reziduál, podiely platieb faktorom*

Abstract

Production functions describe technical relations of the use of factor inputs to produce output are basic functions in microeconomic and macroeconomic models. First, theory implements two-factor production function with the inputs of capital and labour, than, human capital or decomposition labour into the number of workers and hours per worker appear in three-factor functions of different forms. The parameters of production function of the economy as a whole are used in macroeconomic models based on microeconomic assumptions; ergo their estimate obtained directly or by growth accounting is interesting for each analyst.

Keywords: *Cobb-Douglas production function, CES production function, constant returns to scale, growth accounting, Solow residual, factor shares*

1 PRODUKČNÉ FUNKCIE

Produkčná funkcia opisuje vzťah, ako sa využívajú vstupujúce faktory na tvorbu produkcie. Predstavuje základnú funkciu firiem rovnako ako ekonomiky ako celku, preto je kľúčom k budovaniu mikroekonomických aj makroekonomických modelov. Ak predpokladáme dva vstupy: kapitál K a prácu L , produkcia Q je popísaná všeobecnou funkciou:

$$Q = f(K, L) \quad (1)$$

pre ktorú predpokladáme tieto vlastnosti:

- viac vstupujúcich faktorov vyprodukuje väčšiu produkciu $\Rightarrow Q$ je rastúcou funkciou K aj L bez ohľadu na to, či rastie iba jeden faktor alebo oba súčasne $\rightarrow f_K > 0, f_L > 0$;
- ak rastie jeden faktor a druhý ostáva nemenný, produkcia rastie, ale jej prírastok klesá každým ďalším krokom zvyšujúcim množstvo premenlivého faktora = *zákon klesajúcich marginálnych výnosov* $\rightarrow f_K, f_L$ sú klesajúce.

¹ Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA 1/0595/11 "Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód"

Ak rastú všetky vstupy simultánne, ich vplyv na produkciu skúmame pomocou *výnosov z rozsahu*, teda akú percentuálnu zmenu produkcie vyvolá 1 % zmena všetkých vstupov. Ak sa elasticita produkcie vzhľadom na j -tý vstup vypočíta podľa vzťahu:

$$\varepsilon_j = \frac{x_j}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \quad (2)$$

potom výnosy z rozsahu sú súčtom všetkých elasticít produkcie podľa vstupu:

$$\varepsilon = \sum_j \varepsilon_j \quad (3)$$

V praktických situáciách sa výnosy z rozsahu menia pre rozličné rozsahy produkcie. Bežne sa pri firmách uvažuje, že pre nízku úroveň produkcie sú výnosy z rozsahu rastúce, teda $\varepsilon > 1$; následne sú v istom rozsahu konštantné, teda platí $\varepsilon = 1$ a pre vysoké úrovne produkcie sú výnosy z rozsahu klesajúce, teda $\varepsilon < 1$. Na úrovni odvetvia alebo celej ekonomiky väčšina makroekonómov považuje konštantné výnosy z rozsahu za vhodný predpoklad.

2 COBBOVA-DOUGLASOVA PRODUKČNÁ FUNKCIA S KONŠTANTOU ÚROVŇOU TECHNOLOGIE

Cobb s Douglasom si všimli pravidelnosť na amerických údajoch, keď podiely platieb faktorom na produkcii vykazovali stabilné hodnoty. Zohľadnili klesajúce hraničné výnosy a konštantné podiely faktorov a navrhli produkčnú funkciu v známom tvare:

$$Q = \gamma L^\alpha K^\beta, \quad 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1 \quad (4)$$

kde γ nazvali parameter efektívnosti (ak dve firmy používajú rovnaké vstupy a majú rozdielnu produkciu – rozdielom je efektívnosť a vyššia hodnota parametra = väčšia produkcia). Pre hospodárstvo ako celok reprezentuje γ technologické inovácie. Cobb a Douglas tento parameter uvažovali ako fixný.

Pre prvé a druhé parciálne derivácie funkcie (4) platí:

$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial \gamma K^\beta L^\alpha}{\partial K} = \beta \gamma K^{\beta-1} L^\alpha = \frac{\beta \gamma K^\beta L^\alpha}{K} = \beta \frac{Q}{K} \quad (5)$$

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial \gamma K^\beta L^\alpha}{\partial L} = \alpha \gamma K^\beta L^{\alpha-1} = \frac{\alpha \gamma K^\beta L^\alpha}{L} = \alpha \frac{Q}{L} \quad (6)$$

$$f_{KK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = \frac{\partial f_K}{\partial K} = \frac{\partial \beta \gamma K^{\beta-1} L^\alpha}{\partial K} = \beta(\beta-1) \gamma K^{\beta-2} L^\alpha = \frac{\beta(\beta-1) \gamma K^\beta L^\alpha}{K^2} = \beta(\beta-1) \frac{Q}{K^2} \quad (7)$$

$$f_{LL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\partial f_L}{\partial L} = \frac{\partial \alpha \gamma K^\beta L^{\alpha-1}}{\partial L} = \alpha(\alpha-1) \gamma K^\beta L^{\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha-1) \gamma K^\beta L^\alpha}{L^2} = \alpha(\alpha-1) \frac{Q}{L^2} \quad (8)$$

Parametre α a β by mali byť kladné, lebo produkcia by mala s rastom kapitálu a práce rásť. Parametre α a β by mali byť menšie ako jedna, kvôli klesajúcim marginálnym výnosom. Z prvých parciálnych derivácií je zrejmé, že tieto sú kladné, len ak $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ a z druhých parciálnych derivácií je zrejmé, že tieto sú záporné, len ak $\alpha < 1$ a $\beta < 1$.

Pre elasticitu produkcie vzhľadom na kapitál a prácu platí:

$$\varepsilon_K = \frac{K}{Q} \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q} \beta \frac{Q}{K} = \beta \quad \text{a} \quad \varepsilon_L = \frac{L}{Q} \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{Q} \alpha \frac{Q}{L} = \alpha \quad (9) \text{ a } (10)$$

a ich súčet predstavuje výnosy z rozsahu: $\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L = \beta + \alpha$.

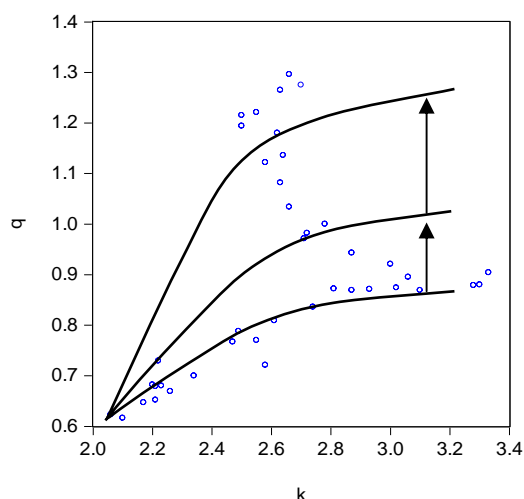
Cobb a Douglas predpokladali konštantné výnosy z rozsahu pre USA a odhadovali produkčnú funkciu v pracovno-intenzívnom tvare:

$$q = \gamma k^\beta, \quad q = \frac{Q}{L}, \quad k = \frac{K}{L} \quad (11)$$

a zistili, že $\hat{\beta} = 0,254$, teda že približne štvrtina hodnoty produkcie sa platí ako výnos kapitálu a zvyšné tri štvrtiny hodnoty produkcie sa platia faktoru práca. Douglasovo pozorovanie, že platby faktorov sú približne konštantné, platí podľa Stewarta (2005) dodnes. Pre Kanadu, Veľkú Britániu a USA je podiel kapitálu okolo 1/3.

3 COBBOVA-DOUGLASOVA PRODUKČNÁ FUNKCIA S KONŠTANTNÝM RASTOM TECHNOLOGIE

V päťdesiatych rokoch 20. storočia sa problematikou zaoberal Solow (1957). Solowove dáta boli dvojnásobne dlhšie ako údaje Cobba a Douglasa. Podiel kapitálu bol počas celého obdobia relatívne stabilný s priemerom okolo 0,34. Podiel produkcie na pracovníka q a kapitálu na pracovníka k vo vzájomnom vzťahu však nezodpovedal Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcii. Hodnota q neustále rástla, ale k najskôr rástlo, počas krízy kleslo a v 40. rokoch zostalo nízke.



Obr. 1: Rozptylový diagram produkcie na zamestnanca a kapitálu na zamestnanca

Pri odhade produkčnej funkcie, rovnako ako to urobili Cobb a Douglas, získal hodnotu $\hat{\beta} = 0,845$, teda že približne 85 % hodnoty produkcie sa platí ako výnos kapitálu a zvyšných 15 % hodnoty produkcie sa platí faktoru práca, čo je v protiklade s podielom 0,34 pre kapitál.

Solow navrhol riešenie – nameraný kapitál nereprezentuje skutočnú produktivitu kapitálu. Technický pokrok zvýšil produktivitu, čo sa nepremietlo do údajov o kapitále. Kvôli technológii sa zvyšuje aj kvalita práce. Priamy vplyv technológie na kvalitu vstupov sa nedá merať, ale Solow navrhol uvažovať čas ako dôležitý faktor: $Q = f(K, L, t)$. Predpokladal, že produkčná funkcia sa v čase posúva na vyššiu úroveň (na obr. 1 je $q = F(k, t)$). To znamená, že neuvažovanie zmeny technológie nadhodnotilo a skreslilo odhad β .

Solow navrhol korekciu produkčnej funkcie v Hicksovom neutrálnom tvare:

$$Q = A(t)f(K, L) \quad (12)$$

čo znamená, že A nevplyva na pomer K/L . Člen $A(t)$ predstavuje viacfaktorovú produktivitu resp. celkovú produktivitu faktorov a v čase sa mení.

4 DEKOMPOZÍCIA RASTU (GROWTH ACCOUNTING)

Deriváciou produkčnej funkcie (12) podľa času (všetky premenné A , K , L aj Q sa menia v čase, teda sú funkciami času) dostaneme:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} f(K, L) + A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \frac{dK(t)}{dt} + A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \frac{dL(t)}{dt} \quad (13)$$

Ak vydělíme obe strany (13) produkciou Q , dostaneme ten istý vzťah pre miery rastu:

$$\frac{dQ(t)}{dt} / Q = f(K, L) \frac{dA(t)}{dt} / Q + A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \frac{dK(t)}{dt} / Q + A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \frac{dL(t)}{dt} / Q$$

resp. zapísané úspornejším zápisom:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \frac{\dot{K}}{Q} + A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \frac{\dot{L}}{Q} \quad (14)$$

a využitím vzťahov (9) a (10) pre produkčnú funkciu v Hicksovom neutrálnom tvare (12):

$$\varepsilon_K = \frac{K}{Q} \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q} A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \quad \text{a} \quad \varepsilon_L = \frac{L}{Q} \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{L}{Q} A(t) \frac{\partial f(K, L)}{\partial L}$$

dostaneme základnú rovnicu *Growth Accounting*, ktorá je hľadanou dekompozíciou.

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + \varepsilon_K \frac{\dot{K}}{K} + \varepsilon_L \frac{\dot{L}}{L} \quad (15)$$

Následne ju môžeme zapísať pre konkrétne produkčné funkcie. Pre pôvodnú produkčnú funkciu Cobba a Douglasa resp. Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu s meniacou sa technológiou dostaneme:

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \beta \frac{\dot{K}}{K} + \alpha \frac{\dot{L}}{L} \quad \text{resp.} \quad \frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{K}}{K} + \alpha \frac{\dot{L}}{L} \quad (16) \text{ a } (17)$$

Pomocou neho môžeme vypočítať $A(t)$. Najskôr upravíme vzťah na tzv. *Solowov reziduál*:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Q}}{Q} - \beta \frac{\dot{K}}{K} - \alpha \frac{\dot{L}}{L} \quad (18)$$

z ktorého vieme po prijatí predpokladu $A_0 = 1$ dopočítať rad hodnôt $A(t)$. Vzťah (18) sa dá použiť aj pre pracovno-intenzívnu verziu produkčnej funkcie, čo urobil Solow:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{q}}{q} - \beta \frac{\dot{k}}{k}$$

Predelením produkčnej funkcie získaným $A(t)$ získal vzťah:

$$q/A(t) = f(k) \quad (19)$$

pomocou ktorého odhadol produkčnú funkciu a získal hodnotu $\hat{\beta} = 0,353$. Zároveň konštatoval, že produktivita práce q môže byť zvýšená dvoma faktormi: rastom kapitálu na pracovníka k (posunutie pozdĺž produkčnej funkcie) alebo nárastom úrovne technológie (posunutie produkčnej funkcie na vyššiu úroveň). Jeho záver získaný dekompozíciou rastu bol na svoju dobu prekvapujúci, až 86 % priemerného rastu HDP o hodnote 1,79 % je spôsobených technologickými zmenami a iba 14 % akumuláciou kapitálu.

5 PRODUKČNÁ FUNKCIA S KONŠTANTNOU ELASTICITOU SUBSTITÚCIE (CES PRODUČNÁ FUNKCIA)

Niekedy testovaním zistíme, že napriek svojim výborným vlastnostiam niektoré ohraničenie Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie nezodpovedá realite. Obvykle sa predpokladá, že problematickým je substituovateľnosť faktorov. Tú skúmame pomerom K/L k pomeru cien týchto faktorov w/r a miera, ktorá ju opisuje, je elasticita substitúcie:

$$\sigma = \frac{(w/r) \frac{d(K/L)}{d(w/r)}}{(K/L) \frac{d(K/L)}{d(f_L/f_K)}} = \frac{(f_L/f_K) \frac{d(K/L)}{d(f_L/f_K)}}{(K/L) \frac{d(K/L)}{d(f_L/f_K)}} \text{ resp. } \sigma = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(w/r)} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(f_L/f_K)} \quad (20)$$

Pre Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu sa elasticita substitúcie rovná 1, teda 1 % pokles jedného faktora môže byť nahradený 1 % nárastom druhého.

Arrow, Chenery, Minhas a Solow (1961) použili vo svojej analýze produkčnú funkciu s konštantnou elasticitou substitúcie. CES produkčná funkcia má tvar:

$$Q = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right]^{-\nu/\rho} \quad \gamma > 0, \nu > 0, 0 < \delta < 1, -1 < \rho < \infty, \rho \neq 0 \quad (21)$$

CES produkčná funkcia je inherentne nelineárna – nedá sa transformovať na lineárnu funkciu. Zlogaritmuje ju a dostaneme výraz:

$$\ln Q = \ln \gamma - \nu/\rho \ln \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right] \quad (22)$$

ktorý môžeme odhadovať ako nelineárnu funkciu alebo pomocou Taylorovho rozvoja v bode (napr. $\rho = 0$, Arrowove výsledky ukázali hodnoty ρ od 0 po 0,4), pričom sa neuvažujú členy tretieho a vyšších rádov:

$$\ln Q = \ln \gamma + \nu \delta \ln K + \nu(1-\delta) \ln L - (1/2) \rho \nu \delta (1-\delta) [\ln K + \ln L]^2$$

Aproximáciu môžeme rozdeliť na dve časti: jedna zodpovedá Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcii a druhá reprezentuje korekciu odchýlky ρ od 0.

Pre konštantné výnosy z rozsahu platí $\nu = 1$ a potom marginálne produkty kapitálu a práce sú:

$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right]^{-(1+\rho)/\rho} \delta K^{-\rho-1} = \delta \left(\frac{Q}{K} \right)^{1+\rho} \quad (23)$$

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \gamma \left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right]^{-(1+\rho)/\rho} (1-\delta) L^{-\rho-1} = (1-\delta) \left(\frac{Q}{L} \right)^{1+\rho} \quad (24)$$

6 TESTOVANIE PODMIENOK MARGINÁLNEHO PRODUKTU

Pre marginálny produkt práce pri Cobbovej-Douglasovej funkcii platí vzťah (6):

$$f_L = \alpha \frac{Q}{L} = \alpha APL$$

a ak sa za prenájom kapitálu platí úrok r a prenájom práce mzda w , náklady na produkciu sú:

$$C = rK + wL$$

Cena výrobku nech je p a vyprodukuje sa ho Q , zisk firmy bude:

$$pQ - C = pf(K,L) - rK - wL \quad (25)$$

Deriváciou zisku podľa vstupov dostaneme:

$$r = pf_K \text{ a } w = pf_L$$

čo zodpovedá teórii marginálneho produktu – faktory sa prenajímajú, keď sa hodnota marginálneho produktu každého faktora rovná cene faktora a teda:

$$f_L = \frac{w}{p} \quad (26)$$

Spojením oboch vzťahov pre marginálny produkt práce dostaneme vzťah:

$$\frac{w}{p} = \alpha \frac{Q}{L}$$

Ak ho vyjadríme pomocou nominálnych miezd a produkcie $Y = pQ$, dostaneme:

$$\frac{1}{\alpha} w = \frac{pQ}{L} = \frac{Y}{L} \quad (27)$$

a po zlogaritmovaní a pridaním stochastického člena získame rovnicu:

$$\ln(Y/L)_t = -\ln \alpha + \ln w_t + u_t \quad (28)$$

v ktorej pomocou dvoch ľahko dostupných premenných: produkcia na zamestnanca a nominálnych miezd môžeme testovať uvedenú teóriu. Parameter pri logaritme miezd by sa mal rovnať 1.

Pre marginálny produkt práce CES funkcie a konštantné výnosy z rozsahu platí vzťah (24):

$$f_L = (1 - \delta) \left(\frac{Q}{L} \right)^{1+\rho} = (1 - \delta) (APL)^{1+\rho}$$

a jeho spojením so vzťahom z teórie marginálneho produktu (26) dostaneme:

$$\frac{w}{p} = (1 - \delta) \left(\frac{Q}{L} \right)^{1+\rho}$$

Ak ho vyjadríme pomocou nominálnych miezd a produkcie $Y = pQ$, dostaneme:

$$\left(\frac{1}{1 - \delta} w \right)^{1/(1+\rho)} = \frac{Y}{L} \quad (29)$$

a po zlogaritmovaní a pridaním stochastického člena získame rovnicu:

$$\ln(Y/L)_t = -\left(\frac{1}{1+\rho} \right) \ln(1 - \delta) + \left(\frac{1}{1+\rho} \right) \ln w_t + u_t \quad (30)$$

v ktorej opäť môžeme testovať uvedenú teóriu. Špecifikácia je rovnaká ako v prípade funkcie Cobba a Douglasa. Odhadnutý parameter pri logaritme miezd je elasticita substitúcie.

7 ODHAD PARAMETROV PRODUKČNEJ FUNKCIE

Szomolányi so spoluautormi (2013) pri odhade parametrov produkčnej funkcie krajín V4 uvažujú vzťah (29), pričom nevyjadrujú produkciu zamestnanca, ale nominálnu mzdu, pričom v CES funkcii uvažujú konštantný rast parametra produktivity g .

Odhadovaná funkcia má tvar:

$$\ln w_t = \beta_0 + \beta_1 \ln(Y/L)_t + \beta_2 t + u_t \quad (31)$$

a pre parametre platí:

$$\beta_0 = \log(1 - \delta) + \rho \log(A_0), \quad \beta_1 = 1 - \rho, \quad \beta_2 = \rho g$$

Ak nezamietnu hypotézu, že $\rho = 0$, uvažujú Cobbovu-Doglasovu produkčnú funkciu.

Pre Cobbovu-Doglasovu funkciu uvažujú vzťah (27), pričom opäť nevyjadrujú produkciu zamestnanca, ale nominálnu mzdu s odhadovanou funkciou:

$$\ln w_t = \beta_0 + \beta_1 \ln(Y/L)_t + u_t$$

kde parameter β_0 sa rovná 0, β_1 je podiel faktoru práca a $1 - \beta_1$ je podiel faktoru kapitál.

ZÁVER

O význame produkčnej funkcie vo väčšine makroekonomických modelov nepochybuje nik. Predstavuje základný vzťah, okolo ktorého je obvykle vybudovaná ďalšia štruktúra modelu. Častá kalibrácia hodnôt jej parametrov pre ďalšie výpočty a simulácie je síce bežným postupom analýz, ale zároveň nikto nepochybuje, že pre rôzne typy ekonomík by sa mali uvažovať rozdielne hodnoty parametrov či typy produkčných funkcií. Odhad parametrov a ich testovanie klasickými postupmi by malo vždy predchádzať tvorbe takýchto modelov.

Použitá literatúra

1. ARROW, K.J., CHENERY, H.B., MINHAS, B.S., SOLOW, R.M. 1961. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 43, No. 3, 1961, s. 225-250.
2. HUSÁR, J., SZOMOLÁNYI, K. 2005. *Modelovanie ekonomických procesov I*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2005.
3. LUKÁČIKOVÁ, A. 2004. Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. In *Participácia doktorandov na vedeckovýskumnej činnosti*. Bratislava: Fakulta hospodárskej informatiky EU, 2004, s. 329-334.
4. LUKÁČIKOVÁ, A. 2005. Simulácie zmien parametrov v modeli všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. In *AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach*, Bratislava: Fakulta hospodárskej informatiky EU, 2005.
5. SOLOW, R.M. 1957. Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, No. 3, 1957, s. 312-320.
6. STEWART, K. G. 2005. *Introduction to Applied Econometrics*. Thomson, Brooks/Cole, 2005.
7. SZOMOLÁNYI, K. 2011. Odhad miery opotrebenia v ekonomike SR. In *AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2011.
8. SZOMOLÁNYI, K., LUKÁČIKOVÁ, A. 2007. Tobinov model. In *Mladá věda '06 : sborník studentů doktorského studia*, Praha: Nakladatelství Oeconomica, 2007, s. 435-440.
9. SZOMOLÁNYI, K., LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Estimation of the production function parameters in V4 economies. In *Mathematical methods in economics 2013*, Jihlava: College of Polytechnics Jihlava, 2013, s. 898-902.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: lukacik@euba.sk

β - KONVERGENCIA V KRAJINÁCH EURÓPSKEJ ÚNIE¹

EUROPEAN UNION COUNTRIES β - CONVERGENCE

Adriana Lukáčiková

Abstrakt

Konvergencia ekonomík je predmetom analýz ekonómov už dlhé obdobie. Klasický prístup zahŕňajúci σ konvergenciu a β konvergenciu popísal napríklad Robert Barro. V príspevku je jeho prístup ku konvergencii aplikovaný v kontexte Európskej únie, pričom je porovnávané obdobie, ktoré zahŕňalo krízu a obdobie, do ktorého posledná kríza zahrnutá nebola. Porovnaním sa pokúsime poukázať na dôsledky krízy aj v tejto oblasti.

KLúčové slová: β -konvergencia, Európska únia, semi-logaritmický model

Abstract

Convergence of economies has been the subject of economists' analysis long term. Classical approach involving σ convergence and β convergence has been described, for example by Robert Barro. The paper applies this approach to convergence in the context of the European Union, within the period, which includes a period of crisis and the period without last crisis. By comparing we will try to point out the consequences of the crisis in this area.

Keywords: β -convergence, European Union, semilog model

1 ÚVOD

Na základe teórie rastu je v krajinách, ktoré konvergujú, priemerný medziročný rast reálneho HDP na jedného obyvateľa za dané obdobie y_i negatívne korelovaný s logaritmom reálneho HDP na jedného obyvateľa počiatočného obdobia x_i .

Skúmaním ekonomickej konvergenzie overujeme predpoklad, či je ekonomický rast v „chudobnejších krajinách“ rýchlejší ako v „bohatých krajinách“ alebo či „bohaté krajiny“ majú tendenciu byť ešte bohatšie.

Model konvergenzie možno špecifikovať semi-logaritmickou (lin-log) rovnicou:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i \quad (1)$$

kde y_i je medziročný priemerný rast reálneho HDP na obyvateľa v krajine i v danom období, x_i je reálny HDP na obyvateľa v začiatkovom období.

Predpoklady o parametroch:

Parameter β_1 predstavuje priemerné zrýchlenie (spomalenie) medziročného rastu reálneho HDP na obyvateľa v ekonomike EÚ, ak reálne HDP na obyvateľa v začiatkovom období je vyššie (nižšie) o jedno percento, ceteris paribus. Keďže pre relatívne vysoké reálne HDP v začiatkovom období predpovedáme relatívne pomalý priemerný medziročný rast reálneho HDP, predpovedáme, že hodnota parametra bude záporná, $\beta_1 < 0$.

¹ Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA 1/0595/11 "Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód"

2 ANALÝZA KONVERGENCIE KRAJÍN EÚ V PROGRAME EVIEWS

Na odhad použijeme údaje o reálnom HDP v miliónoch eur a o počte obyvateľov POP pre 26 krajín v dvoch rôznych obdobiach - v roku 1996 (počiatočné obdobie) a v roku 2012 (konečné obdobie) – Model 2. V druhom odhade budeme skúmať obdobia 1996 (počiatočné obdobie) a 2007 (konečné obdobie) – Model 1, aby sme vyhodnotili vplyv krízy.

V modeli využívame premenné, ktoré nie sú súčasťou údajov, ale pomocou premenných HDP a POP sa dajú vypočítať. Vytvoríme si nasledujúce premenné:

HDPpc96 – reálne HDP v eurách na obyvateľa v počiatočnom období:

$$\text{HDPpc96} = 1000000 * \text{HDP96} / \text{POP96} \quad (2)$$

HDPpc07 – reálne HDP v eurách na obyvateľa v roku 2007 (konečné obdobie v prvom experimente)

$$\text{HDPpc07} = 1000000 * \text{HDP07} / \text{POP07} \quad (3)$$

HDPpc12 - reálne HDP v eurách na obyvateľa v roku 2012 (konečné obdobie v druhom experimente)

$$\text{HDPpc12} = 1000000 * \text{HDP12} / \text{POP12} \quad (4)$$

Ďalej vytvoríme premennú y1 pre Model 1, teda priemerný medziročný rast reálneho HDP na obyvateľa v 1996-2007 resp. y2 pre Model 2 v 1996-2012.

$$y1 = (\text{HDPpc07} / \text{HDPpc96})^{(1/12)} - 1 \quad (5)$$

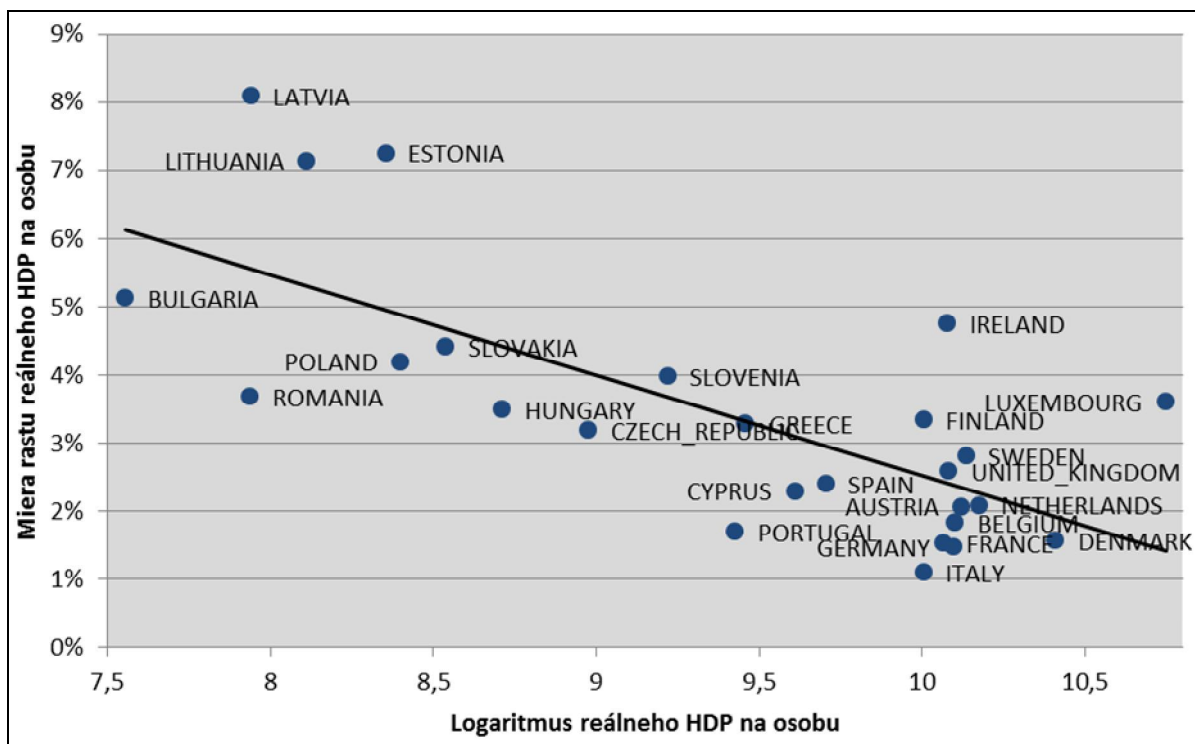
$$y2 = (\text{HDPpc12} / \text{HDPpc96})^{(1/17)} - 1 \quad (6)$$

Model 1:

Dependent Variable: Y1				
Method: Least Squares				
Sample: 1 26				
Included observations: 26				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.172648	0.027089	6.373415	0.0000
LOG(HDPPC1996)	-0.014750	0.002874	-5.132604	0.0000
R-squared	0.523276	Mean dependent var	0.034232	
Adjusted R-squared	0.503413	S.D. dependent var	0.018491	
S.E. of regression	0.013030	Akaike info criterion	-5.769268	
Sum squared resid	0.004075	Schwarz criterion	-5.672491	
Log likelihood	77.00048	F-statistic	26.34362	
Durbin-Watson stat	1.639193	Prob(F-statistic)	0.000030	

Obrázok 1 Odhad parametrov Modelu 1

Odhad parametra β_1 je záporný a štatisticky významný, preto môžeme konštatovať, že ekonomiky EÚ v období rokov 1996 až 2007 konvergovali. Ak je reálne HDP na obyvateľa v začiatkovom období o jedno percento vyššie, *ceteris paribus*, medziročný rast reálneho HDP na obyvateľa ekonomiky v rámci EÚ je priemerne o 0,01475 jednotiek (1,475 základných bodov) pomalší.



Obrázok 2 Graf regresnej priamky modelu konvergenzie za roky 1996 -2007 pre EÚ

Model 2:

V druhom modeli bude konečné obdobie rok 2012, kde je zohľadnené aj obdobie krízy.

Dependent Variable: Y2				
Method: Least Squares				
Sample: 1 26				
Included observations: 26				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.143988	0.018399	7.825804	0.0000
LOG(HDPPC1996)	-0.012985	0.001952	-6.652550	0.0000
R-squared	0.648385	Mean dependent var		0.022133
Adjusted R-squared	0.633734	S.D. dependent var		0.014624
S.E. of regression	0.008850	Akaike info criterion		-6.542904
Sum squared resid	0.001880	Schwarz criterion		-6.446127
Log likelihood	87.05775	F-statistic		44.25642
Durbin-Watson stat	1.711990	Prob(F-statistic)		0.000001

Obrázok 3 Odhad parametrov Modelu 2

Na základe výsledkov odhadu môžeme konštatovať, že odhad parametra β_1 je záporný a štatisticky významný, a teda ekonomiky EÚ v období rokov 1996 až 2012 tiež konvergovali. Pri porovnaní hodnoty odhadnutého koeficienta vidíme, že v Modeli 2 je väčší, teda miera konvergenzie je nižšia.

6. SZOMOLÁNYI, K., LUKÁČIK, M. 2013. *Makroekonomická analýza: zbierka príkladov*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013, 266 s.
7. SZOMOLÁNYI, K., LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2011. The β -convergence of the EU27 Countries. In: *Mathematical methods in Economics 2011: proceedings: 29th international conference, September 6-9, 2011, Janská Dolina, Slovakia, Praha: Professional Publishing, s. 287-291.*

Kontaktné údaje

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 829

email: adriana.lukacikova@euba.sk

OPTIMÁLNA LOKALIZÁCIA ZBERNÝCH MIEST V BRATISLAVSKOM KRAJI PRI STANOVENEJ MAXIMÁLNEJ VZDIALENOSTI

THE OPTIMAL LOCALIZATION OF COLLECTION POINTS IN THE BRATISLAVA REGION WITH SPECIFIED MAXIMUM DISTANCE

Lucia Mieresová

Abstrakt

Cieľom príspevku je spracovať danú problematiku a poskytnúť model, ako zatriktívniť možnosť zberu a tým prispieť k zvýšeniu využívania recyklácie odpadov. Model je aplikovaný na Bratislavský kraj, úlohou umiestnenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti.

Príspevok pozostáva z troch kapitol, prvá sa venuje optimálnemu rozmiestňovaniu zberných miest vo všeobecnosti, ako aj postupu optimálnej lokalizácie. Druhá kapitola definuje lokačné modely a metódu zvolenú pre riešenie stanovenej úlohy. Tretia kapitola prezentuje riešenie a výsledok úlohy.

***Kľúčové slová:** Optimalizácia, Zberné miesto, Recyklácia*

Abstract

The article aims to handle this issue and provide a model how to make the collection possibility more attractive and thereby contribute to increase of waste recycling usage. The model is applied to the Bratislava region, the task is the placing of the minimum number of the collection points at the maximum distance given.

The article consists of three chapters, the first is devoted to the objects' optimal deployment and collection points in general, as well as the optimal localization process. The second chapter defines the locational patterns and the method chosen for solving the set task. The third chapter presents the solution and the result of the task.

***Keywords:** Optimization, Collection Point, Recycling*

Úvod

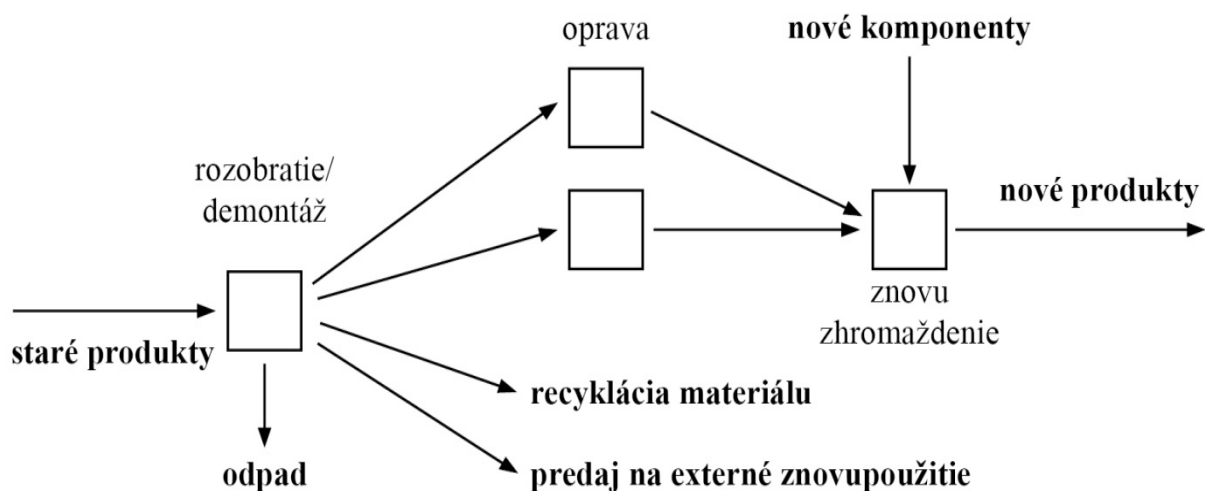
Téma zberu a recyklácie sú oblasti, ktoré sa v súčasnosti dostávajú do popredia najmä vzhľadom na aktuálnu situáciu znečisťovania životného prostredia a hromadenia odpadu. Spomínané témy pomáhajú rozširovať záujem spoločnosti nielen na ekonomické ciele, ale aj na ekologické.

Negatívny vplyv na životné prostredie je spôsobený najmä odpadom. Produkcia odpadu a vlastnosti odpadu súvisia s rozvojom spoločnosti a sú sprievodným javom existencie človeka. Vývojom ľudských činností a zvyšovaním ich náročnosti produkcia odpadu stále rastie. Preto je pri súčasnom zaťažení environmentálneho prostredia dôležité zabezpečenie zberu odpadov, recyklovateľných materiálov a ich presun na miesto opätovného spracovania.

Cieľom príspevku bolo preto spracovať danú problematiku a ponúknuť model ako zatraktívniť možnosť zberu a tým prispieť k zvýšeniu využívania recyklácie odpadov. Práca vyzdvihuje, že pri optimálnom umiestnení zberného miesta je nutné zohľadniť, aby bolo jednoducho prístupné občanom a aby navrhnutý systém bol pre ľudí pohodlný, jednoduchý a časovo nenáročný, čo môže do značnej miery ovplyvňovať ich záujem o recyklovanie.

1 Optimálne umiestňovanie zberných miest vo všeobecnosti

Podstatná oblasť zberu odpadu, materiálov a „end of life“ výrobkov je zameraná na návrat v rámci opätovného využitia, (redistribúcia k spotrebiteľom, opätovný predaj - *Re-Distribution, Re-Sale*), alebo vrátenie sa výrobku späť k výrobcovi z dôvodu jeho opravy, zmeny obalu, inovácie (*Networks for Remanufacturing, Re-Design*). V súčasnosti sa však najväčší dôraz kladie na zber so zámerom recyklácie, s cieľom využiť suroviny na opätovnú výrobu a ohľadom na životné prostredie (*Networks for Recycling*). Proces tokov návratu výrobku v rámci jeho opätovného použitia znázorňuje Obrázok č. 1.



Obrázok č. 1 Schéma plánovania procesov s návratom

Zdroj: FLEISCHMANN, M. at al., *Quantitative models for reverse logistics: A review*

1.1 Postup optimálnej lokalizácie

Celý postup optimálnej lokalizácie¹ zberných miest by sme mohli zhrnúť do nasledovných krokov:

- Rozhodnutie o výstavbe nových priestorov, získanie a overenie vstupných údajov. Analýza vstupných údajov.
- Určenie východiskového uzla, od ktorého sa budú odvíjať ďalšie kroky. Tento bod možno nájsť pomocou metód na určenie lokality s najkratšími vzdušnými vzdialenosťami a ťažiska medzi jednotlivými obchodnými miestami (lokalizácia v euklidovskej rovine).

¹ BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – GEŽÍK, P. – PEKÁR, J. 2009: *Modelovanie reverznej logistiky optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadov*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2009, ISBN 978-80-225-2825-2

- Lokalizácia v uzloch siete (minimalizácia prepravných nákladov zo skladu do odberných miest) pomocou heuristických metód (napr. add a drop).
- Určenie najvhodnejšej lokality na základe nájdenia najkratších rozvozov. Možnosť použitia optimalizačných metód (metódy celočíselného, resp. dynamického programovania), respektíve heuristických metód (napr. Clarkova-Wrightova metóda).
- Ak sú vstupné údaje postačujúce na efektívne využitie metód viackriteriálneho vyhodnocovania variantov, použitie metód PROMETHEE, ELECTRE, alebo DEA. Ak nie, rozhodnutie na základe predchádzajúcich krokov.
- Rozhodnutie o výbere lokality na vybudovanie nových zberných miest.

2 Modelovanie rozmiestňovania zberných miest – Lokačné modely

Pri rozhodovaní o umiestňovaní zberných miest možno použiť rôzne typy modelov matematického programovania. V literatúre sú tieto modely známe ako lokačné modely.

V súčasnosti sa v literatúre najväčšia pozornosť venuje problematike optimálneho umiestňovania obslužných centier. Cieľom je ich umiestnenie pri stanovenom počte obslužných centier ale aj umiestnenie vzhľadom na maximálnu vzdialenosť uzlov od obslužného centra. Všeobecne sú známe dve základné koncepcie, prvá si za cieľ kladie pokryť všetkých obyvateľov minimálnym počtom obslužných centier, druhým zámerom je pri obmedzenom počte obslužných centier maximalizovať pokrytie obyvateľov. Vo všeobecnosti môže ísť v praxi aj o umiestňovanie skladov, recyklačných centier, centier zdravotnej pomoci, požiarnickej pohotovosti a pod. V našom prípade sa bude jednať o zberné miesta.

Do prvej skupiny zaraďujeme aj problém, ktorému sa budeme v príspevku ďalej venovať a to úloha určenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti. Túto vzdialenosť môže predstavovať napríklad vzdialenosť v kilometroch, alebo časová náročnosť prechodu medzi nimi. V našom prípade budeme teda lokalizovať zberné miesta pri danej maximálnej vzdialenosti 10 minút. Cieľom modelu je lokalizovať zberné miesta tak, aby bola dodržaná vyžadovaná dostupnosť všetkých uzlov pri minimálnom počte zberných miest.

Pri maximalizácii efektu využitia recyklovateľných surovín je najdôležitejšia dostupnosť zberných miest pre všetkých obyvateľov, či už z hľadiska času, alebo vzdialenosti. Ak je zberné miesto pre obyvateľa dostupné, je oveľa väčšia pravdepodobnosť, že túto možnosť využije a odovzdá použité výrobky, súčiastky a iný znovu použiteľný materiál na následné opätovné spracovanie.

Základom modelu *úlohy umiestnenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti*² je stanovenie maximálnej hodnoty vzdialenosti každého mesta/obce od zberného centra. Efektívnosť vybudovania zberného miesta závisí od počtu obyvateľov mesta, ale aj od charakteru zberaného tovaru, respektíve materiálu, ktorý je zhromažďovaný. Vstupné údaje pri výpočtoch sú teda: počet obyvateľov, matica minimálnych vzdialeností medzi mestami/obcami, maximálna vzdialenosť mesta/obce od najbližšieho zberného miesta. Úlohu je možné modifikovať na základe konkrétnych požiadaviek, ako napríklad nutnosť umiestnenia zberného miesta v krajskom meste, ktoré je aj administratívne centrum regiónu, alebo umiestnenie pri zohľadnení počtu obyvateľov.

Okrem nami zvoleného modelu poznáme tiež *úlohu nájdenia minimálnej vzdialenosti pri stanovenom maximálnom počte zberných miest*. Cieľom je teda určenie minimálnej novej

² PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2012: *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012, ISBN 978- 80-225-3349-2

vzdialenosti pri vopred danom počte zberných miest. Vstupnými údajmi sú: počet miest/obcí, matica minimálnych vzdialeností medzi nimi, maximálny počet zberných miest.

Ďalej model úlohy *celkovej minimálnej vzdialenosti pri stanovenom maximálnom počte zberných miest*. Od predchádzajúceho modelu sa líši tým, že je potrebné určiť celkovú prejdenú vzdialenosť všetkými dodávateľmi recyklovaného materiálu do daných centier, nie minimálnu možnú vzdialenosť každého obyvateľa.

Posledným, štvrtým modelom je úloha *maximálneho pokrytia pri stanovenom počte zberných miest a maximálnej vzdialenosti*. Pomocou tohto modelu vieme pri zadanom počte zberných miest a maximálnej vzdialenosti, ktorú je nutné obyvateľmi absolvovať, stanoviť miesta, v ktorých budú zberné miesta lokalizované, pri maximálnom pokrytí obyvateľov. Vo všeobecnosti možno použiť všetky doteraz uvedené modely na rozhodovanie o umiestnení zberných miest.

2.2 Úloha umiestnenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti

Model umožňuje lokalizovať zberné miesta tak, aby bola dodržaná požadovaná dostupnosť (časová vzdialenosť) všetkých uzlov pri minimálnom počte zberných miest.

Cieľ je založený na myšlienke dostupnosti zberných miest pre každý uzol dopytu. Stanovujeme si teda maximálnu hodnotu vzdialenosti K každého uzla od uvedeného zberného miesta.

Úlohu formulujeme ako úlohu bivalentného programovania, kde máme premenné $x_j \in \{0,1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, n – počet uzlov, kde ak nadobudne hodnotu 0, v danom uzle sa zberne centrum neotvorí a ak hodnotu 1 v uzle ma byť zberné centrum zriadené. Vzhľadom na skutočnosť, že cieľom je minimalizovať počet zberných miest, možno účelovú funkciu zapísať ako³:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

Pri tomto prvotnom probléme chceme zabezpečiť dostupnosť všetkých uzlov, čo možno zapísať štruktúrnymi ohraničeniami:

$$\min_{j \in J} \{d_{ij} \cdot x_j\} \leq K, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad J = \{j | x_j = 1\}$$

Ohraničení je n , pričom pre každý uzol musí byť splnená podmienka, že vzdialenosť od najbližšieho zberného miesta je maximálne K . Parametre d_{ij} sú hodnoty vzdialeností medzi uzlami i a j , t. j. matica D je matica minimálnych vzdialeností medzi uzlami. Ďalšou podmienkou je existencia aspoň jedného zberného miesta $\sum_{j=1}^n x_j \geq 1$.

Na záver uvedená formulácia musí obsahovať definičný obor premenných, t. j. ich bivalentný charakter:

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

³ PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2012: *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012, ISBN 978- 80-225-3349-2

Matematická formulácia úlohy⁴:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

$$\min_{j \in J} \{d_{ij} \cdot x_j\} \leq K, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad J = \{j \mid x_j = 1\}$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \geq 1$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kde d_{ij} – najkratšia vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom,

K – maximálna možná vzdialenosť.

Problém je možné formulovať aj ako úlohu bivalentného programovania, v ktorej vystupujú premenné $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, kde n je počet uzlov. Pritom ak premenná nadobudne hodnotu 0, zberné miesto nebude v uzle zriadené, ak hodnotu 1, zberné miesto sa zriadi. Na základe cieľa, ktorým je minimalizovať počet zberných miest, možno účelovú funkciu zapísať takto:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$

Ohraničenia musia zabezpečiť, aby pre každý uzol bola splnená podmienka, že vzdialenosť od najbližšieho, zberného miesta je maximálne K . Parametre d_{ij} sú hodnoty vzdialeností medzi uzlami i a j , t. j. matica D (s rozmerom $n \times n$) je matica minimálnych vzdialeností medzi všetkými uzlami. Na základe uvedenej matice D možno zostrojiť maticu A (s rozmerom $n \times n$), ktorej prvky a_{ij} nadobúdajú hodnoty 0, ak vzdialenosť medzi i -tým a j -tým uzlom je väčšia ako K , alebo 1, ak vzdialenosť je menšia alebo sa rovná K :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & d_{ij} > K \\ 1, & d_{ij} \leq K \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Ohraničeniami treba zabezpečiť dostupnosť uzla aspoň od jedného zberného miesta na maximálnu vzdialenosť K , čo možno zapísať štruktúrnymi ohraničeniami:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Uvedená formulácia musí obsahovať definičný obor premenných, ich bivalentný charakter:

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

⁴ BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – GEŽÍK, P. – PEKÁR, J. 2009: *Modelovanie reverznej logistiky optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadov*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2009, ISBN 978-80-225-2825-2

Formulácia úlohy:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$
$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & d_{ij} > K \\ 1, & d_{ij} \leq K \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kde a_{ij} – dostupnosť i -tého uzla od j -tého uzla do vzdialenosti K ,
 K – maximálna možná vzdialenosť.

3 Zadanie a predpoklady modelu

Problematika bola riešená v rámci Bratislavského kraja, na základe reálnych údajov, zobrazujúcich skutočný a aktuálny stav.

Ako už bolo spomenuté, otázka recyklácie, zberu a zberných miest je v súčasnosti veľmi aktuálna. Aby však obyvateľstvo bolo k zberu recyklovateľných výrobkov motivované, musí byť systém navrhnutý tak, aby bol pre ľudí pohodlný, jednoduchý a časovo nenáročný. Z tohto dôvodu práca navrhuje riešenie lokalizácie zberných miest s časovou dostupnosťou 10 minút z každej obce Bratislavského kraja.

K riešeniu úlohy bolo preto nutné poznať už existujúce, zberné miesta v Bratislavskom kraji vychádzajúc zo zdroja⁵, ktorý uvádza nasledujúce zberné miesta slúžiace na zber elektroodpadu, ktoré sú pre riešenie danej lokačnej úlohy považované za univerzálne zberné miesta:

Báhoň - Mlynská ulica
Blatné - Šarfická
Bratislava - OLO, Ivanská
Bratislava - Areál Miestneho podniku verejnoprospešných služieb, Čapajevova
Bratislava - Zberný dvor - Stará Vajnorská
Dunajská Lužná - Marius Pedersen, Jánošíková ulica
Jakubov - Pod kostolom
Kostolište - ANEO Trnava
Malacky - Zberný dvor odpadov Hlboká ul.
Malacky - Zberný dvor odpadov Partizánska
Modra - ASA Trnava, Dolná
Pezinok - PETMAS, Šenkvičná
Senec - ANEO, Réčska cesta
Stupava - Skládka Žabáre na Mierovej ulici
Stupava - Mestský podnik technických služieb Dlhá ul.
Svätý Jur - JUPAKOD, Krajinska cesta
Veľké Leváre - ANEO, Štefánikova

⁵ http://www.envidom.sk/ed_obce.php

3.1 Riešenie lokačnej úlohy

V nasledujúcej podkapitole je opísaná problematika lokačného prístupu riešenia úlohy umiestnenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti pomocou programu GAMS.

Model si kladie za cieľ lokalizovať zberné miesta tak, aby bola dodržaná požadovaná dostupnosť všetkých uzlov pri minimálnom počte zberných miest a zohľadnení už existujúcich centier. V našom prípade boli lokalizované zberné miesta pri danej maximálnej vzdialenosti 10 minút. Cieľom bolo spomedzi osemdesiatsedem potencionálnych obcí pre umiestnenie zberného miesta nájsť obce pre optimálne vybudovanie zberných miest na základe stanovených podmienok.

Pre riešenie úlohy bolo nutné získať maticu časových vzdialeností medzi obcami Bratislavského kraja (87x87 kde každej obci bolo priradené číslo 1 až 87). Z nej sme následne na základe určenej podmienky požadovanej časovej hranice 10 minút získali Maticu A, kam boli vygenerované hodnoty 1 alebo 0, v závislosti od toho, či bola daná podmienka splnená alebo nie. V prípade, že platí požadovaný vzťah a daná hodnota je menšia ako hodnota podmienky, bude na tomto mieste v druhej matici zobrazená jednotka, v opačnom prípade, pri nesplnení podmienky, bude na tomto mieste zobrazená nula.

Na základe spomenutého vieme určiť, kde máme zriadiť zberné miesto vzhľadom na splnenie danej podmienky vzdialenosti. S touto maticou pokračujeme vo výpočte v systéme GAMS a hľadáme riešenie, pri zohľadnení aktuálne vybudovaných zberných miest.

Maticu A použijeme ako Table a(i,j) pre zadanie do systému GAMS a následne po zadaní zdrojového kódu a jeho spustení môžeme pomocou výstupu systému určiť optimálne umiestnenie zberných miest. Keďže úlohu riešime na základe reálnych údajov je pri hľadaní nových lokalít pre vybudovanie zberného miesta je nutné akceptovať už existujúce centra, ktoré sú vybudované v uzloch:

6: Bratislava – Nové mesto,
8: Bratislava - Dúbravka,
15: Bratislava – Petržalka,
21: Jakubov,
22: Kostolište,
26: Malacky,
36: Stupava,
37: Veľké Leváre,
44: Báhoň,
50: Pezinok,
51: Modra,
55: Svätý Jur,
62: Blatné,
64: Dunajská Lužná,
82: Senec

Zápis kódu v programe GAMS pre riešenie úlohy umiestnenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti vytvorený na základe matematického zápisu v kapitole 2:


```

Sets i /1 * 87/
alias (i,j);
Table a(i,j)
matica A - priloha;
Variables z;
Positive variable x;
Equations zberne_miesta
ohr(j)
exist_miesta1
exist_miesta2
exist_miesta3
exist_miesta4
exist_miesta5
exist_miesta6
exist_miesta7
exist_miesta8
exist_miesta9
exist_miesta10
exist_miesta11
exist_miesta12
exist_miesta13
exist_miesta14
exist_miesta15;
zberne_miesta.. z=e=sum(i,x(i));
ohr(j).. sum(i,a(i,j)*x(i))=g=1;
exist_miesta1.. x('6')=e=1;
exist_miesta2.. x('8')=e=1;
exist_miesta3.. x('15')=e=1;
exist_miesta4.. x('21')=e=1;
exist_miesta5.. x('22')=e=1;
exist_miesta6.. x('26')=e=1;
exist_miesta7.. x('36')=e=1;
exist_miesta8.. x('37')=e=1;
exist_miesta9.. x('44')=e=1;
exist_miesta10.. x('50')=e=1;
exist_miesta11.. x('51')=e=1;
exist_miesta12.. x('55')=e=1;
exist_miesta13.. x('62')=e=1;
exist_miesta14.. x('64')=e=1;
exist_miesta15.. x('82')=e=1;
Model vzdial /all/;
Solve vzdial using mip minimizing z;
Display x.l;

```

Časť výstup z programu GAMS, podľa ktorého vieme určiť v ktorých uzloch siete majú byť lokalizované zberné miesta.

```

General Algebraic Modeling System
Execution
---- 137 VARIABLE x.L

6 1.000,    8 1.000,    9 1.000,    15 1.000,    21 1.000,    22 1.000
26 1.000,    29 1.000,    34 1.000,    35 1.000,    36 1.000,    37 1.000
39 1.000,    41 1.000,    43 1.000,    44 1.000,    47 1.000,    50 1.000
51 1.000,    55 1.000,    62 1.000,    64 1.000,    69 1.000,    74 1.000
82 1.000,    83 1.000

```

Na základe výstupu zo systému GAMS vieme určiť, že na splnenie cieľa, aby zberné miesto bolo dostupné obyvateľom obcí maximálne do 10 minút je nutné dobudovať k existujúcim 15 centrom zberné miesta v nasledujúcich 11 uzloch:

9: Bratislava – Devín
29: Pernek
34: Sološnica
35: Studienka
39: Vysoká pri Morave
41: Zohor
43: Budmerice
47: Dubová
69: Chorvátsky Grob
74: Kostolná pri Dunaji
83: Tomášov

Záver

Prostredníctvom riešenia úlohy umiestnenia minimálneho počtu zberných miest pri danej maximálnej vzdialenosti v programe GAMS bola vyriešená oblasť lokalizácie zberného miesta v rámci Bratislavského kraja. Tým bol splnený cieľ spracovať danú problematiku a ponúknuť model ako zatriktívniť možnosť zberu a tak prispieť k zvýšeniu využívania recyklácie odpadov. Na základe výstupov z programu GAMS sme určili, že aby bolo zberné miesto dostupné na v rámci daného obmedzenia musí k existujúcim zberným miestam Bratislava – Nové mesto, Bratislava - Dúbravka, Bratislava – Petržalka, Jakubov, Kostolište, Malacky, Stupava, Veľké Leváre, Báhoň, Pezinok, Modra, Svätý Jur, Blatné, Dunajská Lužná, Senec pribudnúť 11 nových zberných miest a to Bratislava – Devín, Pernek, Sološnica, Studienka, Vysoká pri Morave, Zohor, Budmerice, Dubová, Chorvátsky Grob, Kostolná pri Dunaji, Tomášov. Týchto 26 zberných miest umožní zber recyklovateľného odpadu tak, aby bolo vyhovené požadovanej podmienke a zberné miesto dostupné bolo dostupne rámci 10 minút z každej obce.

Prínosom je poskytnutie komplexného pohľadu, ktorý zohľadňuje aktuálny stav zaťaženia životného prostredia odpadom a navrhuje možnosť zlepšenia situácie. Vytvorený spôsob optimalizácie, poskytuje univerzálny prístup k riešeniu problému umiestnenia zberných miest. Práve tento prístup a jeho výsledky sú aplikovateľné v praxi. Takisto môže byť využitý aj pre iné oblasti optimalizácie rozmiestňovania, či už rozmiestňovanie obslužných centier, predajni a pod., kedy po zmene vstupných údajov vieme získať požadované výsledky, na základe ktorých je takisto možné znížiť negatívne dopady na životné prostredie.

Prínosom je aj skutočnosť, že na základe takto navrhnutých optimalizačných metód je možné nie len minimalizovať náklady spojené s recykláciou a so zberom odpadu ale aj pozitívne vplyvať na životné prostredie a tým uspokojovať ekonomické i ekologické ciele spoločnosti.

Použitá literatúra

BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – GEŽÍK, P. – PEKÁR, J. 2009: *Modelovanie reverznej logistiky optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadov*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2009, ISBN 978-80-225-2825-2

PEKÁR, J. – BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2012: *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012, ISBN 978- 80-225-3349-2

FLEISCHMANN, M. at al., *Quantitative models for reverse logistics: A review*

http://www.envidom.sk/ed_obce.php

Kontaktné údaje

Ing. Lucia Mieresová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

email: lucia.mieresova@gmail.com

MATICA SPOLOČENSKÉHO ÚČTOVNÍCTVA A SYSTÉM NÁRODNÝCH ÚČTOV

SOCIAL ACCOUNTING MATRIX AND THE SYSTEM OF NATIONAL ACCOUNTS

Veronika Mit'ková

Abstrakt

Predložený článok sa v krátkosti zaoberá konštrukciou štruktúry matice spoločenského účtovníctva, ako aj samotnou maticou za rok 2011 pre ekonomiku Slovenskej republiky. Je tu graficky znázornený kolobeh transakcií a tokov a v stručnosti opísaný vzťah medzi maticou spoločenského účtovníctva a input – output tabuľkami.

Kľúčové slová: *matica spoločenského účtovníctva, input - output tabuľka, kolobeh*

Abstract

This paper deals in short with the social accounting matrix structure construction, as well as with the matrix itself for 2011, economy of Slovak Republic. One can find there the transactions and flows cycle and the relationship among the social accounting matrix and the input – output table.

Keywords: *social accounting matrix, input – output table, cycle*

1 ÚVOD

Tento článok vznikol v rámci riešenia projektu VEGA s názvom *Ekonometrický odhad parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy s dezagregáciou verejného sektora* číslo 1/0197/13 a inšpiráciou bola práca Susany Santos z roku 2005 prezentovaná na Medzinárodnej input - output konferencii s názvom *Social Accounting Matrix and the System of National Accounts: An Application*. Cieľom bolo ukázať využitie systému národných účtov a tabuliek dodávok a použitia pri konštrukcii matice spoločenského účtovníctva pre portugalskú ekonomiku. V práci bola matica spoločenského účtovníctva prezentovaná ako nástroj na kvantifikáciu tokov v ekonomike. V krátkosti analyzuje vzťah medzi maticou spoločenského účtovníctva a tabuľkami dodávok a použitia.

V prekladanej práci skonštruujeme maticu spoločenského účtovníctva Slovenskej republiky v roku 2011, poukážeme na problémy v jej konštrukcii a jej využitie v makroekonomickej analýze.

2 SYSTÉM NÁRODNÝCH ÚČTOV

Zo systému národných účtov Slovenskej republiky (Štatistický úrad SR) sme zoskupili údaje potrebné pre konštrukciu matice spoločenského účtovníctva. Nasledovná časť uvádza hodnoty jednotlivých agregátov jednak na strane zdrojov a jednak na strane použitia (ak sú dostupné, resp. majú zmysel).

agregát	transakcia	zdroje	použitie
P.1	Produkcia	163 966,799	
P.2	Medziprodukcia		101 436,418
P.4	Skutočná konečná spotreba		52 132,539
P.4:S.13	- vlády		12 417,998
P.4:S.14	- domácností		39 714,541
P.6	Vývoz výrobkov a služieb		62 024,341
P.7	Dovoz výrobkov a služieb	61 587,211	
D.1	Odmeny zamestnancov	27 171,790	27 171,790
D.1:S1	- v NH	26 976,495	25 796,065
D.1:S.2	- v zahraničí	195,295	1375,725
D.2-D.3	Čisté dane z produkcie a dovozu	7 481,789	7 481,789
D.21-D.31	Čisté dane z produktov	6 577,900	
D.29-D.39	Čisté ostatné dane z produkcie	5 816,876	
D.5	Bežné dane z dôchodkov, majetku,...	3 819,530	
D.5:S.1	- v NH	3 761,688	
D5:S.2	- v zahraničí	57,842	
B.1g	Hrubá pridaná hodnota / HDP		69 108,281
B.2n	Čistý prevádzkový prebytok	9 262,177	9 262,177
B.3n	Čisté zmiešané dôchodky	14 803,320	14 803,320
B.6n	Čistý disponibilný dôchodok	53 876,556	53 876,556
B.8n	Čisté úspory		3 448,405
B.8n:S 11+S 12	- korporácie		3 090,255
B.8n:S.14	- domácnosti		2 049,522
B.8n:S.13	- vlády		-3 393,982
B.8n:S2	- zahraničie		1 745,795
B.12	Saldo bežných transakcií so zahraničím	1 745,795	1 702,610
K.1	Spotreba fixného kapitálu		13 090,207

Tabuľka 1 uvádza štruktúru agregovanej matice spoločenského účtovníctva. Táto sa skladá z aktivít, komodít a faktorov, inštitúcií, daní a zvyšku sveta. Hlavné zmeny oproti predchádzajúcim rokom boli hlavne v zahrnutí čistých agregátov úspor a dôchodkov, nie hrubých. Ďalej pribudla bunka úspory – faktory, ktorá zvlášť zachytáva úspory korporácií. K hrubému domácejmu produktu bolo potrebné pripočítať agregát D.5(S.1) bežné dane z dôchodkov, majetku,... K celkovej spotrebe sa pripočíta spotreba fixného kapitálu.

Tabuľka 1: Štruktúra agregovanej matice spoločenského účtovníctva

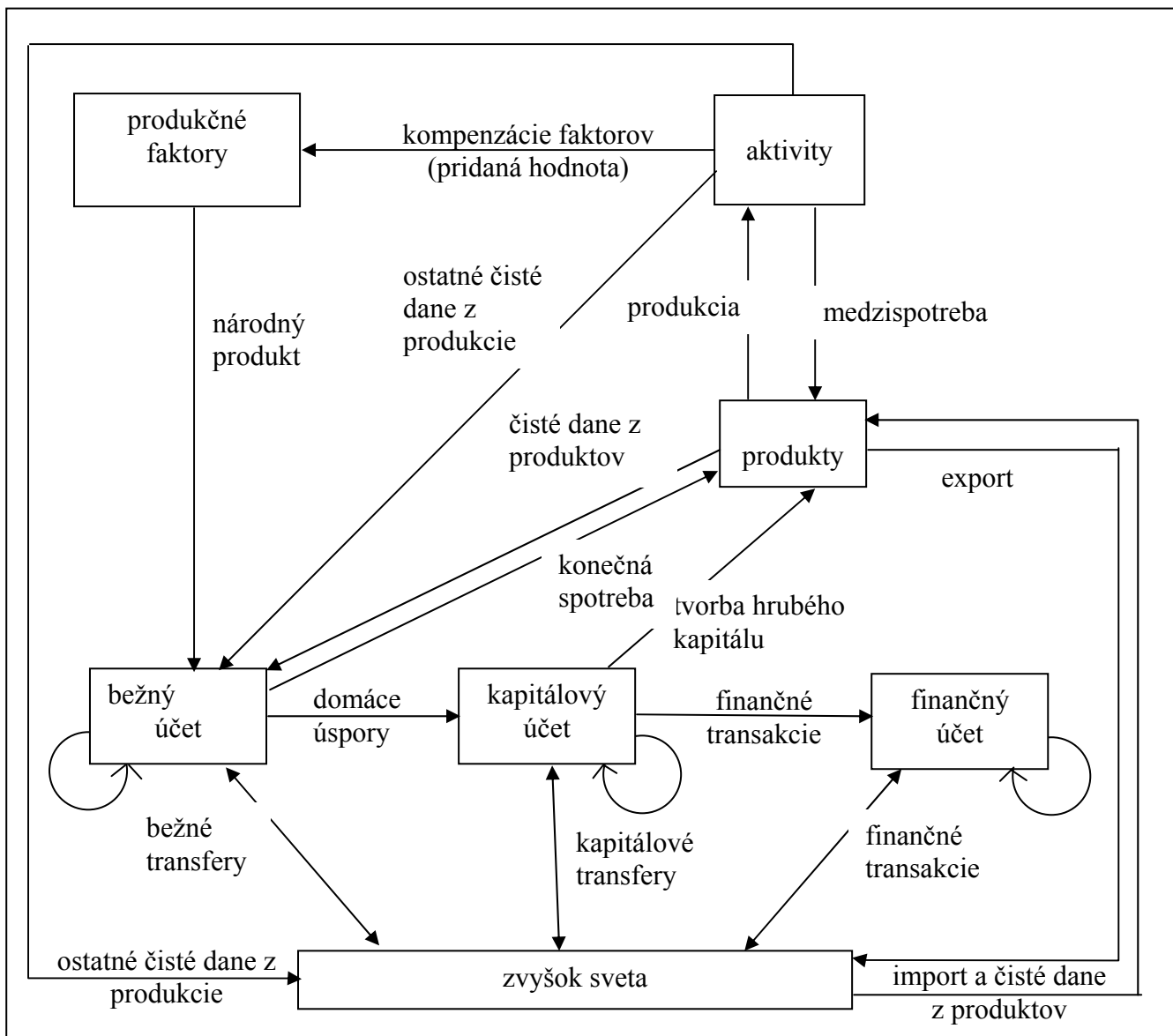
	aktivity	komodity	faktory	domácnosti	vláda	investície	daň z príjmu	spotrebná daň	zvyšok sveta
aktivity		produkcia <i>P.1</i>							
komodity	medzispotreba <i>P.2</i>			$C =$ $P.4(S.14) +$ $K.1$	$G =$ $P.4(S.13)$	$I =$ $B.8n$			$X = P.6$
faktory	$Y =$ $B.1n - (D.21-$ $D.31)$								
domácnosti			$Y =$ $D.1(S.1) + B.2n +$ $B.3n + (D.29 -$ $D.39) + D.5(S.1)$		$TR =$ výpočet				odmeny zo zahranicia $D.1 (S.2)$
vláda							$T_I =$ $D.5 (S.1)$	$T_S =$ $D.21-D.31$	TR_F výpočet
úspory			$S_k =$ $B.8n(S.11+S.12)$	$S_P =$ $B.8n(S.14)$	$S_G =$ $B.8n(S.13)$				$S_F =$ $B.8n (S.2)$
daň z príjmu				$T_I =$ $D.5 (S.1)$					
spotrebná daň		$T_S =$ $D.21-D.31$							
zvyšok sveta		$M = P.7$							

Tabuľka 2 uvádza hodnoty jednotlivých agregátov matice spoločenského účtovníctva. Agregát hrubý domáci produkt získame sčítaním spotreby domácností $P.4(S.14) + K.1$, vládnych nákupov $P.4(S.13)$, investícií $B.8n$, exportu $P.6$ a odpočítaním importu $P.7$. Výsledkom dostávame hodnotu 69 108,281 mil. €, čo zodpovedá agregátu $B.1g$, Hrubá pridaná hodnota.

Tabuľka 2: Agregovaná matica spoločenského účtovníctva pre Slovenskú republiku, rok 2011 (v bežných cenách, v mil. €)

	aktivity	komodity	faktory	domácnosti	vláda	investície	daň z príjmu	spotrebná daň	zvyšok sveta	spolu
aktivity		163 967								163 967
komodity	101 436			52 805	12 418	3 448			62 024	232 132
faktory	62 530									62 530
domácnosti			59 440		-2 142				1 376	58 674
vláda							3 820	6 578	-3 515	6 882
investície			3 090	2 050	-3 394				1 703	3 448
daň z príjmu				3 820						3 820
spotrebná daň		6 578								6 578
zvyšok sveta		61 587								61 587
spolu	163 967	232 132	62 530	58 674	6 882	3 448	3 820	6 578	61 587	

Obrázok 1 znázorňuje všetky transakcie v matici spoločenského účtovníctva v domácej krajine aj vo vzťahu k zahraničiu. Vidno z neho, že SAM je reprezentáciou kolobehu „výroba – príjem – výdavok“.



Obrázok 1: Toky v základnej matici spoločenského účtovníctva

3 MATICA SPOLOČENSKÉHO ÚČTOVNÍCTVA A INPUT-OUTPUT TABUĽKY

Na jednej strane input-output tabuľky (IO) nepracujú s inštitúciami, kým matica spoločenského účtovníctva (SAM) áno. Na druhej strane, IO tabuľky aj SAM pracujú s aktivitami, avšak pri medzispotrebe IO tabuľky rozlišujú, čo je vyrobené v domácej ekonomike a čo je importované, SAM nie. Podstatou IO tabuliek je zachytenie transakcií medzi aktivitami, štruktúry produkcie, ktorá je podmienená týmito prepojeniami. Podstatou SAM je zachytiť transakcie a transfery medzi inštitúciami s distribúciou príjmov, ktoré sú nimi podmienené (Pyatt, 1999). Aj keď boli do IO tabuliek zavedené aj inštitúcie, časť SAM ostáva stále nepokrytá. Hewings (2003) uvádza, že systém sociálneho účtovníctva pokrýva širšiu oblasť transakcií a tokov, zahŕňa viac položiek primárnych vstupov a komponentov finálneho dopytu IO tabuliek a, čo je najdôležitejšie, umožňuje účtovať zarobené aj nezarobené príjmy (príjmy z rent, dividend a podobne). To znamená, že SAM nemôže byť

vnímaná ako rozšírenie IO tabuľky, aj keď SAM môže byť použitá k štúdiu vzájomnej závislosti distribúcie príjmov a štruktúry produkcie (Pyatt, 1999).

Použitá literatúra

1. HEWINGS, G. (2003) New Developments in Input-Output Modelling: a short course, session 4, Summer School – 5th edition, Department of Economics - Institute of Economics and Business, Lisbon.
2. PYATT, G. 1999. Some Relationships between *T*-Accounts, Input-Output Tables and Social Accounting Matrices. *Economic Systems Research*, 11, pp. 365-387.
3. SANTOS, S. (2005) Social Accounting Matrix and the System of National Accounts: An Application. Presented to the 15th International Input-Output Conference, held at the Renmin University of China, Beijing.

Kontaktné údaje

Ing. Veronika Miťková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied, Ústav verejnej politiky a ekonómie

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

ROZVINUTÉ SCHÉMY DEKOMPOZÍCIE VÝNOSOV PORTFÓLIA

ADVANCED SCHEMES PORTFOLIO PERFORMANCE ATTRIBUTION

Vladimír Mlynarovič

Abstrakt

Príspevok analyzuje rozvinuté schémy dekompozície výkonnosti portfólia zamerané na dynamické aspekty aritmetickej atribúcie výkonnosti portfólia a geometrický a exponenciálny prístup k tejto problematike.

Kľúčové slová: *výkonnosť portfólia, dekompozícia výnosu, aritmetická, geometrická a exponenciálna dekompozícia výnosov portfólia*

Abstract

The paper analyses advanced schemes portfolio performance attribution its assets classes and the decomposition is compared with the performance of benchmark assets classes. As a result we have the arithmetic, geometric and exponential performance attribution

Keywords: *portfolio performance, return decomposition, arithmetic, geometric, and exponential attribution*

1 ÚVOD

Tento príspevok v nadväznosti na analýzu výkonnosti a rizika portfólia (Mlynarovič, 2013) ponúka určitú syntézu rozvinutých schém metodiky dekompozície výkonnosti portfólia v ich konfrontácii s výnosom stanoveného benchmarku.

2 DEKOMPOZÍCIA VÝKONNOSTI PORTFÓLIA

V posledných desaťročiach bolo navrhnutých niekoľko metodológií, ktoré opisujú výkonnosť portfólia a identifikujú efekty aktivity manažerov. Najjednoduchšou z týchto metód je výnosovo založená regresná analýza, ktorá konštruje predikcie na báze trojfaktorového modelu navrhnutého v prácach *Fama a French* (1992, 1993). Výlučne na základe informácií o výnosoch táto regresná analýza môže identifikovať štýlové zručnosti a odhadovať rizikovo očistenú *alfu* zručnosti manažerov. Hoci regresná analýza vyžaduje niekoľko vstupov, poskytuje tiež len limitovaný prienik do zdrojov zručnosti manažera.

Atribúcia založená na pozíciách môže poskytnúť detailnejšiu analýzu výkonnosti manažera, ale na vstupe vyžaduje podstatne viac informácií v porovnaní s tými, ktoré požaduje štandardná regresná analýza. Pôvodne navrhnutá *Brinsonom a Fachlerom* (1985), v ich štúdiu zručnosti manažera vzhľadom k rôznym odvetviám, bola táto analýza založená na pozíciách rozšírená na skúmanie alokačných zručností v oblastiach iných faktorov, takých ako sú hodnota, veľkosť, momentum a volatilita. Odvetvový štandard, nazývaný *Brinsonová analýza*, poskytuje priamočiary spôsob dekompozície hodnoty pridanej manažerom v takých dimenziách ako superiórne faktory/odvetvia pre alokáciu a výber cenných papierov.

Klasická *Brinsonova* analýza bola navrhnutá na analýzu výnosov manažéra za jedno obdobie za predpokladu statických pozícií. Bola ale rozšírená aj v smere zohľadnenia viacerých období pri meniacich sa váhach. Všeobecne používaná analýza pre viaceré obdobia však nemeria explicitne schopnosti manažéra týkajúce sa jeho dynamickej alokácie vo sfére faktorov. Táto jej nefukčnosť je pritom obmedzujúca z mnohých hľadísk.

2.1 Aritmetická atribúcia výkonnosti portfólia a jej dynamické aspekty

Elegantná a intuitívna *Brinsonova* metodológia atribúcie predstavuje štandard pre akékoľvek meranie aritmetickej výkonnosti. Ak uvažujeme jedno obdobie t , potom hodnota pridaná manažérom v porovnaní s benchmarkom môže byť dekomponovaná aritmetický komponent alokácie a aritmetický komponent výberu aktív. Pridanú hodnotu možno formálne rozložiť na takýto alokačný efekt a efekt výberu aktív nasledovne

$$\sum_{i=1}^N (w_{it}^P r_{it}^P - w_{it}^B r_{it}^B) = \sum_{i=1}^N (w_{it}^P - w_{it}^B) (r_{it}^B - r_t^B) + \sum_{i=1}^N w_{it}^P (r_{it}^P - r_{it}^B) \quad (2.1)$$

kde r_t^P je výnos portfólia, r_t^B výnos benchmarku, $t = 1, 2, \dots, T$, a w_{it}^P a w_{it}^B sú váhy a r_{it}^P a r_{it}^B sú výnosy v sektore i pre portfólio a benchmark v priebehu obdobia t , kde N je počet sektorov.

Aritmetickú relatívnu výkonnosť v období t možno dekomponovať na zložku výberu cenných papierov a alokačnú zložku cez

$$A_t^P = A_{tS}^P + A_{tA}^P$$

kde

$$A_{tS}^P = \sum_{i=1}^N A_{i,S}^P$$

je agregovaná aritmetická zložka výkonnosti prostredníctvom výberu cenných papierov opísaná cez zložky výkonnosti výberu individuálnych cenných papierov

$$A_{i,S}^P = w_{it}^P (r_{it}^P - r_{it}^B)$$

a

$$A_{tA}^P = \sum_{i=1}^N A_{i,A}^P$$

je agregovaná výkonnosť prostredníctvom sektorovej alokácie, pričom

$$A_{i,A}^P = (w_{it}^P - w_{it}^B) (r_{it}^B - r_t^B)$$

je aritmetická výkonnosť alokáciou do individuálneho sektora. Poznamenajme, že

$$A_{tS}^P = r_t^P - r_t^{PB}$$

a

$$A_{tA}^P = r_t^{PB} - r_t^B$$

kde zložka

$$r_t^{PB} = \sum_{i=1}^N w_{it}^P r_t^B$$

predstavuje *semi-hypotetický* výnos.

V pôvodnej *Brinsonovej* analýze predstavuje alokačný efekt mieru manažérovej zručnosti pri alokácií v priestore sektorov (odvetví). Všeobecnejšie, možno merať zručnosť manažéra pri alokácií medzi hodnotou, veľkosťou, momentom a inými faktormi. Efekt výberu aktív je miera zručnosti manažéra prevážiť sa do vysoko výnosových aktív v týchto sektoroch (odvetviach).

Táto klasická analýza bola navrhnutá pre analýzu týkajúcu sa jedného obdobia, ktorá predpokladá statické pozície portfólia a priamo neumožňuje analýzu pre viaceré obdobia, v ktorých sa váhy aktívne menia. Metodológie pre atribučnú analýzu v prípade viacerých období boli navrhnuté pre adekvátnejšie zohľadňovanie dynamického rozhodovania. Jednou z najčastejšie používaných techník je opakovanie štandardnej *Brinsonovej* analýzy pre T období a použitie metodológie jednoduchého priemeru. Potom možno priemernú pridanú hodnotu dekomponovať na súčet priemerneho alokačného efektu a priemerneho efektu výberu aktív:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (w_{it}^P r_{it}^P - w_{it}^B r_{it}^B) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (w_{it}^P - w_{it}^B) (r_{it}^B - r_t^B) + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N w_{it}^P (r_{it}^P - r_{it}^B) \quad (2.2)$$

resp.

$$A^P = A_A^P + A_S^P$$

Avšak pridaná hodnota meraná cez obdobia aritmeticky sa odlišuje od geometricky alebo exponenciálne meranej pridanej hodnoty. Modifikáciám tejto metodológie, ktoré umožňujú iné typy atribúcií zohľadňujúce viacero období, a ktoré poskytujú v porovnaní s analýzou jedného obdobia kompletnejší obraz toho, ako aktívny portfolio manažér generuje *alfu*, sa budeme venovať neskôr.

Ani *Brinsonová* analýza pre jedno obdobie, ani jej uvedená modifikácia pre viacero období, nie je schopná vysvetliť efekt dynamickej alokácie manažéra, alebo jeho fázovanie trhu. *Hsu et al* (2010) však navrhli jednoduchú a priamočiaru metódu pre ocenenie dynamických zručností manažéra prostredníctvom identity typu

$$E(w_{it} r_{it}) = E(w_{it}) E(r_{it}) + \text{cov}(w_{it}, r_{it}) \quad (2.3)$$

V tejto rovnici je priemerný výnos aktíva $E(w_{it} r_{it})$, ktoré je v portfóliu nejakého manažéra, dekomponovaný do dvoch zložiek. Prvá zložka na pravej strane rovnice (2.3), $E(w_{it}) E(r_{it})$, meria efekt statickej alokácie. Táto zložka vysvetľuje tú časť výnosu, ktorá je výsledkom statickej alokácie na trhu akív. Pre každú kladnú váhu aktíva, ktoré má kladný očakávaný výnos, možno očakávať, že bude generovať kladný výnos. Druhá zložka na pravej strane rovnice (2.3), $\text{cov}(w_{it}, r_{it})$, meria efekt dynamickej alokácie. Táto zložka vysvetľuje tú časť výnosu, ktorú možno pripísať schopnosti manažéra fázovať trh aktív. Ak je váha vysoká vtedy, keď je trhový výnos vysoký, potom $\text{cov}(w_{it}, r_{it}) > 0$. Ak pozorujeme, že

$\text{cov}(w_{it}, r_{it}) = 0$, mohli by sme konštatovať, že zdrojom výkonnosti manažéra je len kladná statická pozícia na trhu aktív, a že táto nedemonštruje žiadnu schopnosť taktickej alokácie váhy aktíva. Ak $\text{cov}(w_{it}, r_{it}) < 0$, potom manažér môže svojou aktivitou znižovať hodnotu portfólia. Ak manažér kupoval v obdobiach kladných výnosov a bol v krátkej pozícii v obdobiach záporných výnosov, $E(w_{it}) = 0$, potom jeho pridanú hodnotu možno vysvetliť úplne jeho schopnosťou dynamickej alokačnej zručnosti. Tradičná atribučná analýza meria a identifikuje len zručnosti faktorovej alokácie a nerozlišuje medzi statickým a dynamickým komponentom

Rovnicu (2.3) možno zovšeobecniť pre pridanú hodnotu faktora (sektora) i a následne separovať alokačný efekt do jeho statickej a dynamickej zložky prostredníctvom vzťahu

$$E\left[(w_{it}^P - w_{it}^B)(r_{it}^B - r_t^B)\right] = E(w_{it}^R - w_{it}^B)E(r_{it}^B - r_t^B) + \text{cov}\left[(w_{it}^P - w_{it}^B)(r_{it}^B - r_t^B)\right] \quad (2.4)$$

Ľavá strana rovnice (2.4) predstavuje priemerný efekt alokácie zo štandardného modelu alokácie a jej pravá strana dekomponuje tento efekt na statickú a dynamickú zložku. V analýze kde sú faktory kategorizované do N sektorov (odvetví) a merané pre T období možno rovnicu (2.4) sumovať cez všetky faktory, aby sme z efektu alokácie pridanej hodnoty

$$A_A^P = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (w_{it}^P - w_{it}^R)(r_{it}^B - r_t^B) \quad (2.5)$$

vyčlenili efekt statickej alokácie pridanej hodnoty v tvare

$$A_{AS}^P = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (w_{it}^P - w_{it}^B) \right] \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it}^B - r_t^B) \right] \quad (2.5a)$$

a vypočítali, napríklad ako doplnok, efekt dynamickej alokácie pridanej hodnoty

$$A_{AD}^P = A_A^P - A_{AS}^P \quad (2.5b)$$

pričom efekt výberu aktív odmeriame ako v kalsickej *Brinsonovej* anlyze hodnotou

$$A_S^P = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N w_{it}^P (r_{it}^P - r_{it}^B) \quad (2.6)$$

Treba pripomenúť, že táto metodológia, rovnako ako klasická *Brinsonova* analýza, je typu *ex post*, Napríklad hodnoty výrazu vo vťahu (2.5a) možno vypočítať, len ak poznáme všetky potrebné váhy a výnosy, ktoré nemúžu byť známe pred koncom skúmaného obdobia.

2.2 Geometrický prístup a výber sektorov pre atribúciu výkonnosti

Dekompozícia aritmetickej relatívnej výkonnosti na alokačnú zložku a zložku výberu cenných papierov umožňuje separátne ocenenie výberu portfólio manažéra vzhľadom na výber váh pre každý sektor ako aj výber aktív v každom sektore. Hoci separácia výkonnosti na alokáciu a výber cenných papierov napomáha oceneniu celkovej výkonnosti portfólia, neexistuje priamočiary spôsob akým prepojiť takúto separáciu cez viacero období. To motivuje

geometrický prístup k atribúcii výkonnosti, ktorého výhodou je priamočiare spojenie s analýzou atribúcie vykonnosti pre viacere obdobia.

Táto časť preto obsahuje prehľad plne geometrického prístupu k atribúcii výkonnosti portfólia prezentovaného *Mencherom* (2001), ktorý je doplnený o formalizačné rozšírenia, ktoré vyvinul *Forgy* (2002).

Geometrickú relatívnu výkonnosť G_t^P portfólia P v priebehu obdobia t možno vyjadriť ako podiel

$$G_t^P = \frac{1+r_t^P}{1+r_t^B} \quad (2.7)$$

Významnou výhodou geometrickej relatívnej výkonnosti v porovnaní s aritmeticou relatívnu výkonnosťou je jej triviálne spojenie s výkonnosťou portfólia za viaceré obdobia. Celková geometrická relatívna výkonnosť G_T^P za T období je totiž súčinom geometrických relatívnych výkonností za jednotlivé obdobia, t.j.

$$G_T^P = \prod_{t=1}^T G_t^P \quad (2.8)$$

čo vyplýva zo skutočností, že

$$1+r_T^P = \prod_{t=1}^T (1+r_t^P) \quad (2.9)$$

a

$$1+r_T^B = \prod_{t=1}^T (1+r_t^B) \quad (2.10)$$

kde r_T^P a r_T^B sú celkové výnosy portfólia a benchmarku a z faktu, že

$$G_T^P = \frac{1+r_T^P}{1+r_T^B} \quad (2.11)$$

Analogicky ako pri atribúcii aritmetickej výkonnosti je teraz žiaduce rozdeliť geometrickú relatívnu výkonnosť na geometrickú výkonnosť alokácie a geometrickú výkonnosť výberu cenných papierov, aby

$$G_T^P = (1+G_{TA}^P)(1+G_{TS}^P) \quad (2.12)$$

kde

$$1+G_{TA}^P = \frac{1+r_T^{PB}}{1+r_T^B} \quad (2.13)$$

je geometrický agregovaný efekt alokácie,

$$1 + G_{TS}^P = \frac{1 + r_T^P}{1 + r_T^{PB}} \quad (2.14)$$

je geometrický agregovaný efekt výberu cenných papierov a

$$1 + r_T^{PB} = \prod_{t=1}^T (1 + r_t^{PB}) \quad (2.15)$$

je agregovaný *semi - hypotetický* výnos.

Ďalej je tiež žiaduca ďalšia faktorizácia geometrického efektu alokácie a geometrického efektu výberu cenných papierov do individuálnych sektorov prostredníctvom

$$1 + G_{TA}^P = \prod_{t=1}^T (1 + G_{t,A}^P) = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N (1 + G_{it,A}^P) \quad (2.16)$$

a

$$1 + G_{TS}^P = \prod_{t=1}^T (1 + G_{t,S}^P) = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N (1 + G_{it,S}^P) \quad (2.17)$$

Ak by bolo možné vykonať takúto faktorizáciu, potom by sa celková relatívna geometrická výkonnosť za T období mohla zapísať v tvare

$$G_T^P = (1 + G_{TA}^P)(1 + G_{TS}^P) = \prod_{t=1}^T (1 + G_{t,A}^P)(1 + G_{t,S}^P) = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N (1 + G_{it,A}^P)(1 + G_{it,S}^P) \quad (2.18)$$

ktorý by poskytol geometrické prepojenie ako podľa času tak aj podľa sektorov. Poznamenajme tiež, že takýto výsledok by implikoval aj lokalizovanú geometrickú výkonnosť G_{it}^P priradenú sektoru i v priebehu obdobia t , t.j.

$$G_T^P = \prod_{t=1}^T G_t^P = \prod_{t=1}^T \prod_{i=1}^N G_{it}^P$$

kde

$$G_{it}^P = (1 + G_{it,A}^P)(1 + G_{it,S}^P) \quad (2.19)$$

Rovnica (2.18) vyjadruje plne geometrickú relatívnu výkonnosť v tom zmysle, že je geometrická ako cez obdobia tak aj cez sektory. Aby sme ilustrovali obsah takéhoto plne geometrického prístupu, tak si všimnime, že poradie násobenia v rovnici (2.18) možno vymeniť, takže možno definovať geometrickú relatívnu výkonnosť G_{iT}^P pre sektor i za celé obdobie T ako

$$G_{iT}^P = \prod_{t=1}^T G_{it}^P \quad (2.20)$$

takže

$$G_T^P = \prod_{t=1}^T G_t^P = \prod_{i=1}^N G_{iT}^P \quad (2.21)$$

To znamená, že možno najskôr determinovať geometrickú relatívnu výkonnosť G_i^P portfólia pre každé obdobie a potom determinovať celkovú geometrickú výkonnosť G_T^P ich vynásobením, alebo možno najskôr determinovať geometrickú relatívnu výkonnosť G_{iT}^P pre každý individuálny sektor za T období a potom nájsť relatívnu geometrickú výkonnosť G_T^P ich vynásobením. Inými slovami výsledná atribúcia plne geometrickej výkonnosti je geometrická ako cez sektory tak aj v čase.

Details explicitného vyjadrenia pre nájde čitateľ v práci *Menchera* (2001). Výsledkom je explicitné vyjadrenie pre plne geometrickú relatívnu výkonnosť pre sektor i a obdobie t . Na jeho základe možno potom analyzovať efekt alokácia a efekt výberu cenných papierov pre celé portfólio v danom období, alebo pre individuálny sektor za všetky obdobia. Je to táto variabilita, ktorá robí plne geometricky prístup k atribúcii výkonnosti portfólia takým atraktívnym.

Hoci je táto metóda geometricky prepojitelná ako cez sektory tak aj cez obdobia, výsledné vzťahy sú ďaleko od ich intuitívneho chápania. Okrem toho tento typ geometrickej atribúcie trpí anomáliou, ktorá môže zapríčiniť jemné defekty. Alternatíva tohto prístupu, ktorá takéto defekty eliminuje a zároveň poskytuje výsledok paralelnejší so správaním aritmetického efektu alokácie navrhol *Forgy* (2002). Hoci je tento prístup určite jasnejší než vzťahy odvodené *Mencherom*, stále mu chýba jasný intuitívny rámec pre obsah miery výkonnosti, ktorá je použitá. Preto v nasledujúcej časti uvádzame prístup, ktorého výhodou je jednoduchá zrozumiteľnosť a taktiež transparentná paralela aritmetickým prístupom k atribúcii výkonnosti.

2.3 Exponenciálny prístup

Bližšou paralelou k aritmetickému prístupu, ktorú možno považovať za určitý variant exponenciálneho prístupu k atribúcii výkonnosti portfólia navrhol *Forgy* (2002) ako modifikáciu prístupu navrhnutého *Carinom* (1999).

Pripomeňme, že v rámci koncepcie prechodu z aritmetickej na geometrickú atribúciu je spočítavanie nahradené násobením a odpočítavanie delením. Ak sa vezme koncepcia aritmetickej atribúcie a konvertuje sa na geometrickú atribúciu, *Mencherov* prístup začína rozvojom súčinov. Potom je každá zložka X v rozvoji nahradená výrazom $(1 + X)$, spočítavanie je nahradené súčinom a odpočítavanie je nahradené podielom. Napríklad, algebrický výraz

$$f^A = W + X - Y - Z$$

je preložený do geometrického výrazu

$$f^G = \frac{(1+W)(1+X)}{(1+Y)(1+Z)}$$

Existuje teda prirodzený spôsob ako ten istý výsledok dosiahnuť prostredníctvom exponenciálnej funkcie. Preto, nech exponenciálny efekt výberu cenných papierov a exponenciálny efekt alokácie sú opísané vzťahmi

$$1 + N_{it,S}^P = \exp(A_{it,S}^P) \Gamma_{it,S}^{NP} \quad (2.22)$$

a

$$1 + N_{it,A}^P = \exp(A_{it,A}^P) \Gamma_{tA}^{NP} \quad (2.23)$$

pričom tzv. faktory korekcie Γ_{tS}^{NP} a Γ_{tA}^{NP} možno vypočítať riešením rovníc

$$\prod_{i=1}^N (1 + N_{it,S}^P) = (\Gamma_{tS}^{NP})^N \exp(A_{it,S}^P) = \frac{1 + r_t^P}{1 + r_t^{PB}} \quad (2.24)$$

a

$$\prod_{i=1}^N (1 + N_{it,A}^P) = (\Gamma_{tA}^{NP})^N \exp(A_{it,A}^P) = \frac{1 + r_t^{PB}}{1 + r_t^B} \quad (2.25)$$

aby sme dostali

$$\Gamma_{tS}^{NP} = \left[\frac{1 + r_t^P}{1 + r_t^{PB}} \right]^{\frac{1}{N}} \exp\left(-\overline{A_{tS}^P}\right) \quad (2.26)$$

kde

$$\overline{A_{tS}^P} = \frac{A_{tS}^P}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_{it,S}^P \quad (2.27)$$

je stredná hodnota aritmetického efektu výberu cenných papierov a

$$\Gamma_{tA}^{NP} = \left[\frac{1 + r_t^{PB}}{1 + r_t^B} \right]^{\frac{1}{N}} \exp\left(-\overline{A_{tA}^P}\right) \quad (2.28)$$

kde

$$\overline{A_{tA}^P} = \frac{A_{tA}^P}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_{it,A}^P \quad (2.29)$$

je stredná hodnota aritmetického efektu alokácie. To znamená že efekt výberu cenných papierov a efekt alokácie možno zapísať v tvare

$$1 + N_{it,S}^P = \left[\frac{1 + r_t^P}{1 + r_t^{PB}} \right]^{\frac{1}{N}} \exp\left(A_{it,S}^P - \overline{A_{tS}^P}\right) \quad (2.30)$$

a

$$1 + N_{it,A}^P = \left[\frac{1 + r_t^{PB}}{1 + r_t^B} \right]^{\frac{1}{N}} \exp\left(A_{it,A}^P - \overline{A_{tA}^P}\right) \quad (2.32)$$

Geometrickú relatívnu výkonnosť sektora i tohto modifikovaného exponenciálneho prístupu v období t možno teraz jednoducho zapísať ako

$$N_{it}^P = (1 + N_{it,S}^P)(1 + N_{it,A}^P) = \left[\frac{1 + r_t^P}{1 + r_t^B} \right]^{\frac{1}{N}} \exp(A_{it}^P - \overline{A}_t^P) \quad (2.33)$$

kde

$$\overline{A}_t^P = \frac{A_t^P}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_{it}^P \quad (2.34)$$

je stredná hodnota lokalizovanej aritmetickej atribúcie

$$A_{it}^P = A_{it,S}^P + A_{it,A}^P \quad (2.35)$$

podľa sektorov.

Jednoduchosť výsledných vyjadrení tento prístup jednoznačne preferuje ako v potrovaní s *Mencherovým*, tak aj *Carinovým* prístupom ku geometrickej atribúcií. Výrazy neobsahujú žiadne záhadné faktory korekcie. Všetko čo potrebujeme sú práve tieto výsledné výjadrenia. Okrem toho, ide o intuitívne chápatel'né výsledky. Aby to bolo zrejmé, najskôr si všimnime, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X^{\frac{1}{N}} = 1 \quad (2.36)$$

pre akékoľvek konečné kladné reálne číslo X . Čím je X bližšie k 1, tým rýchlejšie táto limita konverguje. Taktiež poznamenajme, že žiaden z výrazov

$$\frac{1 + r_t^P}{1 + r_t^{PB}}, \frac{1 + r_t^{PB}}{1 + r_t^B}, \frac{1 + r_t^P}{1 + r_t^B} \quad (2.37)$$

sa výrazne nelíši o 1 vo väčšine situácií. To znamená, že

$$1 + N_{it,S}^P \approx \exp(A_{it,S}^P - \overline{A}_{tS}^P) \quad (2.38)$$

$$1 + N_{it,A}^P \approx \exp(A_{it,A}^P - \overline{A}_{tA}^P) \quad (2.39)$$

$$1 + N_{it}^P \approx \exp(A_{it}^P - \overline{A}_t^P) \quad (2.40)$$

čo kompletizuje výsledok a pozorný čitateľ určite eviduje, že výraz (2.39) možno ďalej rozčleniť tak, aby explicitne opísal dynamickú a statickú zložku efektu alokácie v analógii s výrazmi (2.5a) a (2.5b).

Použitá literatúra

1. BRINSON, G.P., L.R. HOOD, G.I., BEEBOWER, 1986: Determinants of portfolio Performance. *Financial Analysis Journal*. (July-August).
2. BRINSON, G.P., N. FACHLER (1985): Measuring Non-US Equity Portfolio Performance: *Journal of Portfolio Management*, vol. 11 no.3 (Spring), 73 - 75
3. CARINO, D., 1999: Combinig attribution effects over time. *Journal of Performance Measurement*. Summer, 5 - 14.
4. CLARKE, R., H., De SILVA, S. THORLEY, 2005: Performance Attribution and the Fundamental Low. *Financial Analysis Journal*, vol. 61, no. 5 (September-October), 70 - 83.

5. FAMA, E., 1972: Components of Investment Performance. *Journal of Finance*, vol. 17, no. 3 (June), 551 – 567.
6. FAMA, E., K. R. FRENCH, 1992: The Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Finance*, vol. 47, no.2 (June), 427 465
7. FAMA, E., K. R. FRENCH, 1993: Common Risk Factors in the Returns on the Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*. vol. 33, no. 1 (February), 3 - 56
8. FONG, C., O.A. VASICEK, 1997: A Multidimensional Framework for Risk Analysis. *Financial Analysis Journal*, vol. 7, no. 8 (July-August), 51 - 57.
9. FORGY, E.A, 2002, Geometric Issue and Sector Selection for Performance Attribution. <http://ssrn.com/abstract=1420229> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1420229>
10. GREGRIE, P., H. van OPPENS: Risk Attribution <http://www.orfival.be/medias/Gregoire%20and%20van%20Oppens,%20risk%20attribution.pdf>.
11. HORNIÁČEK, M., 1996: The approximation of a strong perfect equilibrium in a discounted supergame. *Journal of Mathematical Economics*, 1996, roč. 25, č. 1, s. 85-107. ISSN 0304-4068.
12. HORNIÁČEK, M., 2008: Negotiation, preferences over agreements, and the core. *International Journal of Game Theory*, 2008, roč. 37, č. 2, s. 235-249. ISSN 0020-7276..
13. HSU, J.C., V. KOLESNIK, B., W. MYERS, 2010: Performance Attribution: Measuring Dynamic Allocation Skill. *Financial Analysis Journal*. Volume 66, Number 6
14. KARNOSKY, D.S., B.D. SINGER, 1994: Global Asset Management and Performance Attribution. *Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts*.
15. MENCHERO, J. C., 2001: A Fully Geometric Approach to Performance Attribution. *Journal of Performance Measurement*, vol. 5, no. 2, 36 – 42.
16. MENCHERO, J. C., 2004: Multiperiod Arithmetic Attribution. *Financial Analysis Journal*. Volume 60, Number 4, 76 - 91
17. MLYNAROVÍČ, V, 2001: Finančné investovanie. IURA Edition, Bratislava
18. MLYNAROVÍČ, V, 2013: Dekompozícia výnosov a rizika portfólia.
19. MUROMACHI, Y: Decomposing total risk of a portfolio into the contributions of individual assets.
www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Helsinki/Papers/S5_19_Muromachi.pdf

Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.
 Univerzita Komenského v Bratislave, FSEV
 Mlynské luhy 4, Bratislava
 email: vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY SE STOCHASTICKOU DOMINANCÍ DRUHÉHO ŘÁDU V OMEZENÍCH - APLIKACE NA ÚLOHU OPTIMALIZACE PORTFOLIA

STOCHASTIC PROGRAMS WITH SECOND ORDER DOMINANCE CONSTRAINTS - APPLICATION ON PORTFOLIO OPTIMIZATION

Mgr. Kirill Odintsov

Abstrakt

V tomto článku se budeme zabývat optimalizačními úlohami s náhodným prvkem, které budeme řešit úlohou se stochastickou dominancí druhého řádu v omezeních. Ukážeme stabilitu výsledné úlohy vzhledem k úloze s empirickou distribuční funkcí. Vyjdeme přitom z článku [5], kde byla tato stabilita dokázána navíc i s rychlostí konvergence množiny optimálních řešení původní úlohy k množině optimálních řešení empirické úlohy. V tomto článku je stabilita dokázána za obecnějších předpokladů (konkrétněji i pro úlohy s těžkými chvosty) pomocí vět z [5] a [9]. Neřeší se zde však rychlost konvergence původní množiny optimálních řešení k nové množině optimálních řešení. Nakonec je teorie demonstrována na úloze optimalizace portfolia.

***Klíčová slova:** Stochastická dominance druhého řádu, Optimalizace portfolia, Empirická distribuční funkce*

Abstract

In this paper we will focus on optimization problems with a random element. We will solve these problems using programs with second order stochastic dominance constants. We will show the stability of the given program with respect to program with empirical distribution function. This paper was mainly inspired by paper [5], where the said stability was shown along with convergence rate of the set of optimal solution of former problem to the set of optimal solutions of the empirical problem. In this paper we show the stability under more general conditions (concretely for heavy tailed distributions) using theorems from [5] and [9]. However we do not address the convergence rate of the set of optimal solution of former problem to the set of optimal solutions of the empirical problem. Finally the theory is applied to portfolio optimization problem.

***Keywords:** Second order stochastic dominance, Portfolio optimization, Empirical distribution function*

1 ÚVOD

Často se stává, že je třeba učinit nějaké rozhodnutí dříve, než máme všechny relevantní informace k rozhodování. Tyto úlohy řeší stochastická optimalizace. Ve většině případů se tyto úlohy snažíme převést na jim ekvivalentní nebo blízké deterministické úlohy, jejich deterministický ekvivalent. Nejjednodušší způsob je nahrazení všech náhodných prvků jejich střední hodnotou. Tímto způsobem, ale využíváme jen minimálně informaci o rozdělení neznámých prvků (nebereme tak v například v potaz vzájemné korelace těchto náhodných prvků ani jejich rozptyly). Navíc v některých případech ani informací o střední hodnotě nemáme.

V tomto článku se budeme zabývat případem, kde se náhodný prvek vyskytuje jak v účelové funkci, tak i v omezeních. Původní úlohu budeme na deterministickou převádět v účelové funkci pomocí Bayesova E-kriteria (nahrazení neznámé funkce její střední hodnotou viz [3]) a v podmínkách pomocí stochastické dominance druhého řádu. Jelikož předpokládáme, že rozdělení náhodných prvků znát nebudeme, bude třeba nahrazovat teoretickou distribuční funkci empirickou distribuční funkcí. Nejprve si tedy zopakujeme definici pojmu stochastické dominance k -tého řádu tak, jak je uvedena třeba v [9].

Definice 1. *Náhodná veličina V dominuje v prvním řádu náhodné veličině W , pokud*

$$F_V(\eta) \leq F_W(\eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R},$$

kde F_V a F_W jsou distribuční funkce V , W . Značíme $V \succeq_{(1)} W$, kde $\succeq_{(1)}$ je stochastická dominance prvního řádu.

Označme $F_V^{(1)}(\eta) = F_V(\eta)$ a pro náhodné veličiny s konečným $(k-1)$ -ním momentem ($k \geq 1$)

$$F_V^{(k)}(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_V^{(k-1)}(t) dt.$$

Těmito funkcím říkáme distribuční funkce k -tého řádu. Dále předpokládejme, že $k \geq 1$.

Definice 2. *Necht' náhodné veličiny (vektory) V, W mají konečné $(k-1)$ -ní momenty. Řekneme, že V dominuje v k -tém řádu W pokud*

$$F_V^{(k)}(\eta) \leq F_W^{(k)}(\eta), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

kde $F_V^{(k)}$ a $F_W^{(k)}$ jsou distribuční funkce V , W k -tého řádu. Značíme $V \succeq_{(k)} W$, kde $\succeq_{(k)}$ je stochastická dominance k -tého řádu.

Nyní si zavedeme obecnou úlohu se stochastickou dominancí k -tého řádu tak jak byla představena v [1]

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} E f(x, \xi) \\ & \text{za podmínek} \\ & F_{g(x, \xi)}^{(k)}(\eta) \leq F_W^{(k)}(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ je l rozměrný náhodný vektor s rozdělením P_ξ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{B}, P_\xi)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $f, g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ pro $i = 1, \dots, m$ jsou reálné funkce pro $m, n, k \in \mathbb{N}$, $f, g_i(x, *) : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jsou náhodné veličiny pro všechna x z X a $i = 1, \dots, m$ ¹, rozdělení P_ξ nezávisí na x , W je předem zvolená náhodná veličina s konečnými $(k-1)$ -ními momenty, $g(x, \xi)$ má konečné $(k-1)$ -ní momenty pro všechna $x \in X$ a $f(x, \xi)$ má konečnou střední hodnotu pro všechna $x \in X$.

Význam pojmu stochastické dominance se dá jednoduše vysvětlit na stochastické dominanci prvního řádu. Chceme vlastně, aby se naše náhodná veličina $g(x, \xi)$ chovala v jistém smyslu lépe než námi zvolená náhodná veličina W . Pokud by například W byla diskrétní veličina s konečnou

¹to je ekvivalentní s tím, že jsou funkce f, g_i měřitelné vzhledem k (Ω, \mathcal{B}) pro $\forall x \in X, i = 1, \dots, m$

množinou hodnot Q (počet prvků Q je p), potom by stochastická dominance prvního řádu byla ekvivalentní s p pravděpodobnostními omezeními $P[g(x, \xi) \leq \eta] \leq \alpha_\eta$ pro $\forall \eta \in Q$.

V dalším textu se omezíme jen na úlohu se stochastickou dominancí druhého řádu, která díky zřejmé vlastnosti $F_V^{(2)}(\eta) = E[(\eta - V)_+]$ vypadá následovně

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} E f(x, \xi) \\ & \text{za podmínek} \\ & E[(\eta - g(x, \xi))_+] \leq E[(\eta - W)_+] \quad \forall \eta \in [a, b]. \end{aligned} \quad (2)$$

Všimněme si, že v této úloze jsme η omezili na interval $[a, b]$. Toto je již navrženo v [1] a je to důležitý předpoklad pro splnění Slaterovy podmínky. Náznakem volby a, b se více zabývá [7].

Modely se stochastickou dominancí jsou alternativou klasickým mean-risk modelům (Markowitzův model, modely s VAR nebo CVAR, atd.). Jejich výhodou oproti těmto modelům je, že není potřeba subjektivní volba jakou míru rizika použít. Navíc se nemůže stát, že by optimální řešení bylo dominováno jiným řešením. Model se stochastickou dominancí druhého řádu tedy lépe zachycuje výběr racionálního, riziko averzního rozhodovatele (dle [8] a [2]).

2 Nahrazení teoretické distribuční funkce za empirickou distribuční funkci

Pokud bychom v úloze (2) znali rozdělení ξ , neměli bychom v této úloze již žádnou náhodu a mohli bychom ji řešit standardními postupy deterministické optimalizace. Jak jsme se však již zmínili v praxi tuto informaci většinou nemáme. Máme pouze N historických pozorování našich náhodných veličin. Historická pozorování v čase i označme ξ^i pro $i = 1, \dots, N$. Z původní úlohy musíme tedy přejít na úlohu s empirickou distribuční funkcí F^N .

$$F^N(t) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{(-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_k]}(\xi^i). \quad (3)$$

Označme

$$\begin{aligned} \hat{h}_N(x) &:= N^{-1} \sum_{i=1}^N f(x, \xi^i), \\ H(x, \eta, \xi) &:= (\eta - g(x, \xi))_+ - (\eta - W(\xi))_+ \end{aligned}$$

a

$$\hat{H}_N(x, \eta) := E_{F^N} H(x, \eta, \xi) = N^{-1} \sum_{i=1}^N H(x, \eta, \xi^i).$$

Empirický ekvivalent k úloze (2) tedy je

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} \hat{h}_N(x) \\ & \text{za podmínek} \\ & \hat{H}_N(x, \eta) \leq 0 \quad \forall \eta \in [a, b], \end{aligned} \quad (4)$$

Označme S^* množinu optimálních řešení (2) a S_N^* množinu optimálních řešení (4).

Nyní dokážeme blízkost množin S_N^* a S^* . Toto je dokázáno v [5] mimo jiné za podmínky, že náhodné veličiny $H(x, \eta, \xi) - E H(x, \eta, \xi)$ a $f(x, \xi) - E f(x, \xi)$ nemají těžké chvosty. My tuto blízkost

dokážeme i bez této podmínky. Na druhou stranu narozdíl od [5] nedokážeme rychlost konvergence.

Blížkost těchto úloh je však obecně velmi těžké dokázat. Obě úlohy tedy převedeme na úlohy s exaktní penalizací. Dokážeme, že obě úlohy jsou blízké svým úlohám s exaktní penalizací. Dále dokážeme, že jsou k sobě blízké úlohy s exaktní penalizací. Tím dokážeme i blízkost původních úloh.

Úloha s exaktní penalizací získaná z úlohy (2) je

$$\min_{x \in X} (\Psi(x, \rho) := E[f(x, \xi)] + \varphi(x)) \quad (5)$$

kde $\varphi(x) = \rho \max_{\eta \in [a, b]} (E[H(x, \eta, \xi)])_+$ a ρ je parametr penalizace.

Množinu optimálních řešení (5) označíme S' .

Úloha s exaktní penalizací pro úlohu (2) je

$$\min_x (\Psi_N(x, \rho_N) := \widehat{h}_N(x) + \varphi_N(x)), \quad (6)$$

kde $\varphi_N(x) = \rho_N \max_{\eta \in [a, b]} (\widehat{H}_N(x, \eta))_+$ a ρ_N jsou parametry penalizace. Množinu optimálních řešení (6) označíme S'_N .

Nyní si uvedeme dvě věty z [5], které nám říkají, že S' je blízké S^* a S'_N je blízké S_N^* .

Věta 1. *Necht' jsou funkce $f(x, \xi)$ a $g(x, \xi)$ Lipschitzovsky spojitě vzhledem k x vzhledem k Euklidově normě, úloha (2) splňuje Slaterovu podmínku a $L_2(f)$, $L_2(g)$ (Lipschitzovské konstanty funkcí f, g) jsou omezeny nějakou integrovatelnou funkcí $\wp(\xi) > 0$ potom existuje $\bar{\rho}$ takové, že pro každé $\rho > \bar{\rho}$ se množiny S^* a S' shodují.*

Věta 2. *Necht' jsou funkce $f(x, \xi)$ a $g(x, \xi)$ Lipschitzovsky spojitě vzhledem k x vzhledem k Euklidově normě, úloha (2) splňuje Slaterovu podmínku a $L_2(f)$, $L_2(g)$ (Lipschitzovské konstanty funkcí f, g) jsou omezeny nějakou integrovatelnou funkcí $\wp(\xi) > 0$ potom existuje ρ^* a N^* takové, že pro každé $\rho > \rho^*$ a $N > N^*$ platí S_N^* a S'_N se shodují skoro jistě.*

Pro úplnost si uved' me i Slaterovu podmínku.

Definice 3. *Úloha (2) splňuje Slaterovu podmínku, pokud existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ a $\bar{x} \in X$ takové, že*

$$\max_{\eta \in [a, b]} E[H(\bar{x}, \eta, \xi)] \leq -\delta$$

Nyní nám stačí dokázat, že S'_N je blízké k S' . Budeme potřebovat tvrzení z [5].

Tvrzení 1. *Necht' jsou funkce $f(x, \xi)$ a $g(x, \xi)$ Lipschitzovsky spojitě vzhledem k x vzhledem k Euklidově normě, X je kompaktní množina, $\rho_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho$ a $L_2(f)$, $L_2(g)$ (Lipschitzovské konstanty funkcí f, g) jsou omezeny nějakou integrovatelnou funkcí $\wp(\xi) > 0$ potom platí*

1. $\Psi(x, \rho)$ a $\Psi_N(x, \rho_N)$ jsou Lipschitzovsky spojitě vzhledem k Euklidově normě pro $N = 1, 2, \dots$
2. $\Psi_N(x, \rho_N)$ konverguje stejnoměrně k $\Psi(x, \rho)$ pro N jdoucí k nekonečnu skoro jistě.

Dále budeme rovněž potřebovat větu z [9].

Věta 3. *Mejme úlohu*

$$\min_{x \in X_0} (h_0(x) := E f_0(x, x_i)),$$

množinu optimálních řešení této úlohy označíme S a její empirický ekvivalent

$$\min_{x \in X_0} (\widehat{h}_{0N}(x) := N^{-1} \sum_{i=1}^N f_0(x, \xi^i))$$

s množinou optimálních řešení S_N . Necht' X_0 je uzavřená množina, $f_0(x, \xi)$ je spojitá v x , měřitelná v ξ a má konečnou střední hodnotu pro všechna $x \in X_0$, ξ^1, \dots, ξ^N jsou i.i.d a existuje kompaktní množina $C \subset \mathbb{R}^k$ taková, že

1. *Množina S je neprázdná a je podmnožinou C .*
2. *S_N je neprázdná a je podmnožina C s pravděpodobností 1 pro dostatečně velké N .*
3. *$h(x)$ je spojitá a konečná na C .*
4. *$\widehat{h}_{0N}(x)$ stejnoměrně konverguje k $h_0(x)$ s.j. na množině C pro N jdoucí k nekonečnu.*

Potom $\mathbb{D}(S_N, S)$ konverguje k 0 s.j. pro N jdoucí k nekonečnu.

Nyní můžeme vyslovit a naznačit důkaz hlavní teoretické věty článku.

Věta 4. *Necht' jsou funkce $f(x, \xi)$ a $g(x, \xi)$ Lipschitzovsky spojitě vzhledem k x vzhledem k Euklidově normě, X je kompaktní množina, $\rho_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho$ a $L_2(f)$, $L_2(g)$ (Lipschitzovské konstanty funkcí f, g) jsou omezeny nějakou integrovatelnou funkcí $\varphi(\xi) > 0$ potom platí*

$$\mathbb{D}(S', S'_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{s.j.}$$

Důkaz. Nejprve je třeba si uvědomit, že úloha (5) je ekvivalentní s úlohou (3) při volbě

$$f_0(x, \xi) = f(x, \xi) + \varphi(x)$$

a že úloha (6) je ekvivalentní s úlohou (3) při volbě

$$f_0(x, \xi) = f(x, \xi) + \varphi_N(x).$$

Dále si uvědomme, že platí

$$h_0(x) = \Psi(x, \rho)$$

a

$$\widehat{h}_{0N}(x) = \Psi_N(x, \rho_N)$$

Z předpokladů a z tvrzení 1 tedy ihned plyne, že jsou splněny předpoklady věty 3. Tato věta nám dává požadované tvrzení. \square

Dokázali jsme tedy, že pokud jsou splněny předpoklady vět 4, 1 a 2, platí

$$\mathbb{D}(S^*, S'_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{s.j.,}$$

což byl náš cíl.

3 Aplikace na optimalizaci akciového portfolia

Nyní aplikujeme dokázanou teorii na jednoduchý příklad řízení portfolia. Mějme k cenných papírů. Označíme x_i podíl i -té akcie v portfoliu a její nám neznámý budoucí měsíční jednotkový výnos označíme R_i pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Naším úkolem je zjistit správné složení akciových titulů x_1, \dots, x_k tak, abychom minimalizovali ztrátu portfolia za měsíc za podmínky, že výnos portfolia stochasticky dominuje ve druhém řádu referenční portfolio, ve kterém jsou všechny cenné papíry zastoupeny ve stejném poměru. Samozřejmě můžeme referenční portfolio zvolit i jinak. V postupu ani složitosti výpočtu to nehraje žádnou roli. Úloha 2 má tedy tvar

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, \dots, x_k} E[-\sum_{i=1}^k x_i R_i] \\ & \text{za podmínek} \\ & E[(\eta - \sum_{i=1}^k x_i R_i)_+] \leq E[(\eta - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i)_+] \quad \forall \eta \in [a, b] \\ & \sum_{i=1}^k x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Upozorníme, že omezení se na nezáporné x_1, \dots, x_k je zákaz smluv o budoucím prodeji (short sales).

Nyní označme r_i^j historický jednotkový měsíční výnos i -té akcie v j -tém období pro $j = 1, \dots, N$, kde N je počet pozorovaných období. Platí

$$r_i^j = \frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j-1}} \quad j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, k$$

kde S_j je cena daného cenného papíru v období j . Dle teoretické části nám tedy k řešení (7) stačí vyřešit úlohu

$$\begin{aligned} & \min_{x_1, \dots, x_k} -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k x_i r_i^j \\ & \text{za podmínek} \\ & \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\eta - \sum_{i=1}^k x_i r_i^j)_+ \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\eta - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i^j)_+ \quad \forall \eta \in [a, b] \\ & \sum_{i=1}^k x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ulehčeme si úlohu tím, že místo $\eta \in [a, b]$ si vezmeme $\eta \in \mathcal{S}$, kde $\mathcal{S} \subset [a, b]$ je nějaká síť s konečně mnoha prvky. Dále využijeme triku z [4] pro linearizaci členů $(\eta - \sum_{i=1}^k x_i r_i^j)_+$, při kterém zavedeme pomocné proměnné $y_{j\eta}$ a dodáme do úlohy další podmínky. Dostáváme tedy problém lineárního programování

$$\begin{aligned} & \min_{x_i, y_{j\eta}, \forall i, j, \eta} -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^k x_i r_i^j \\ & \text{za podmínek} \\ & y_{j\eta} \geq \eta - \sum_{i=1}^k x_i r_i^j, \quad y_{j\eta} \geq 0 \quad j \in \{1, \dots, N\}, \forall \eta \in \mathcal{S} \\ & \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_{j\eta} \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\eta - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i^j)_+ \quad \forall \eta \in \mathcal{S} \\ & \sum_{i=1}^k x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Tato úloha má $k + N * \#^2 S$ proměnných a $N * \#S + \#S + 1$ rovnic. Vidíme, že složitost úlohy hlavně závisí na jemnosti sítě S a na počtu měsíčních pozorování, které zahrneme do historie a jen slabě závisí na počtu cenných papírů k .

Aplikujme nyní tento postup na reálných datech. Z <http://finance.yahoo.com/> jsme si stáhli data o měsíčních vývojích cen akcií těžařské, energetické a chemické společnosti China Petroleum & Chemical Corp, letecké společnosti Delta Air Lines Inc., zábavní společnosti The Walt Disney Company, technologické společnosti International Business Machines Corporation, softwarové společnosti Microsoft Corporation a potravinářské společnosti Unilever. Při volbě těchto cenných papírů jsme se snažili diversifikovat zaměření jednotlivých společností. Bez většího úsilí jsme mohli zvolit akcie většího počtu než 6 společností, protože všechny skripty použité k výpočtu byly napsány pro obecný počet akcií a tak pro přidání akcií stačí přidat jejich historická data do příslušných csv souborů. Jak již bylo řečeno složitost ani charakter úlohy příliš nezávisí na počtu vybraných společností. Cílem této práce není primární výběr akcií, takže se pro přehlednost spokojíme s vybranými akciemi 6 firem.

Budeme používat měsíční ceny akcií v období mezi 1.1.2008 a 1.1.2013 ($N = 59$). Tedy úkolem je zjistit optimální složení portfolia na začátku ledna 2013, po kterém požadujeme jisté chování k začátku února 2013. Řekli jsme si, že informace o cenách akcií před rokem 2008 jsou již irrelevantní.

Vzhledem k tomu, že maximální absolutní hodnota z měsíčního výnosu akcií za celou námi zkoumanou historii je přibližně 0.5 a že největší směrodatná odchylka ze všech akcií je menší než 0.2, zdá se jasné, že je dostačující se omezit na $\eta \in [-0.7, 0.7]$ (jiná η jsou příliš vzdálená od našich pozorovaných dat). Optimální řešení a délka výpočtu pro jednotlivé šířky a jemnosti mřížky máme v tabulce 1.

interval	hrubost	opt řešení (%)	délka výpočtu
$[-0.7, 0.7]$	0.05	(4.3, 15.2, 0.0, 80.3, 0.0, 0.0)	6s
$[-1, 1]$	0.05	(4.3, 15.2, 0.0, 80.3, 0.0, 0.0)	9s
$[-0.5, 0.5]$	0.05	(4.3, 15.2, 0.0, 80.3, 0.0, 0.0)	5s
$[-0.5, 0.5]$	0.01	(9.6, 13.4, 3.8, 73.0, 0.0, 0.0)	30s

Tabulka 1: Výsledky

Závěrem si uvedeme odkazy na zdroje, kde se daný problém řeší sofistikovanějšími metodami. V [4] je aplikovaná metoda cutting plane, která byla zavedena v [8]. V [6] je optimalizace portfolia pomocí stochastické dominance druhého řádu řešená nejprve nahrazením původní úlohy (7) úlohou s exaktní penalizací, jak jsme to popsali v teoretické části a dále je počítáno pomocí metody Stochastické aproximace (stochastic approximation method) nebo metody v angličtině nazvané „Level function method“.

Článek vznikl za podpory grantu IGA-F4/19/2013 interní grantové agentury VŠE.

²# značí počet prvků, množiny.

Použitá literatura

1. D. DENTCHEVA, A. RUSZCZYNSKI. *Optimization with stochastic dominance constraints*: SIAM Journal on Optimization. 2003, Vol.14, pp.548-566
2. D. DENTCHEVA, A. RUSZCZYNSKI. *Portfolio optimization with stochastic dominance constraints*: Journal of Banking and Finance. 2006, Vol.30, pp.433-451
3. J. DUPAČOVÁ. *Stochastické programování*, dočasná vysokoškolská učebnice, ministerstvo školství ČR, Praha: 1986.
4. C. FÁBIÁN, G. MITRA, D. ROMAN. *Processing second-order stochastic dominance models using cutting plane representation*: Mathematical programming. 2011, Vol. 130, pp 33-57
5. Y. LIU, H.XU. *Stability and sensitivity analysis of stochastic programs with second order dominance constraint*: The Journal of Finance, Stochastic Programming E-Print series, 2010
6. R. MESKARIAN, H. XU , J. FLIEGE. *Numerical methods for stochastic programs with second order dominance constraints with application to portfolio optimization*: European Journal of Operational Research. 2012, Vol. 216, pp 376-385
7. K. ODINTSOV. *Rozhodovací úlohy a empirická data; aplikace na nové typy úloh*, Praha MFF UK 2013. Diplomová práce, MFF UK, KPMS
8. D. ROMAN, K. DOWMAN, G. MITRA. *Portfolio construction based on stochastic dominance and target return distribution*: Mathematical programming. 2006, Vol. 108, pp 541-569
9. A. SHAPIRO, D. DENTCHEVA, A. RUSZCZYŃSKI. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*: Philadelphia: Siam, 2009. ISBN: 978-0898716870

Kontaktní údaje

Mgr. Kirill Odintsov

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3 – Žižkov

Tel: (+420) 732 528 649

email: kodintsov@hotmail.com

PODIEL PRÍJMU Z ÚROKOV A PODNIKANIA NA DISPONIBILNOM PRÍJME DOMÁCNOSTÍ SR¹

THE PROPORTION OF THE INCOME FROM INTEREST AND ENTREPRENEURIAL ACTIVITY ON THE HOUSEHOLDS' DISPOSABLE INCOME IN SLOVAKIA

Filip Ostrihoň

Abstrakt

V predloženom príspevku je prezentovaný výpočet disponibilného príjmu domácností SR, ako aj jeho základných zložiek, prostredníctvom mikrodát výberového zisťovania EU-SILC a prierezových váh, spolu z výsledkami. Na základe takto odhadnutého disponibilného príjmu, spolu z jeho zložkami, tvorili príjmy domácnosti z úrokov len zanedbateľnú čiastku celkového disponibilného príjmu domácnosti v roku 2009.

KLúčové slová: disponibilný príjem, domácnosti, mikrodáta

Abstract

Presented paper introduces calculation of households' disposable income in Slovakia, along with its basic components calculated through the microdata of EU-SILC representative surveys and cross-sectional weights, with particular results. Based on the described estimates of disposable income, along with its components, the income from the interest formed only a negligible fraction of the total disposable income of households in 2009.

Keywords: disposable income, households, microdata

1 ÚVOD

Disponibilný príjem domácností predstavuje dôležitý makroekonomický agregát s radou využití, predovšetkým však pri overovaní ekonomickej teórie. V predloženom príspevku sa budeme zaoberať jeho delením, najmä z hľadiska jeho tvorby. Takéto delenie nám dáva ucelenú predstavu o činnostiach, ktoré domácnosti vykonávajú v záujme dosiahnutia požadovaného dôchodku pre uspokojovanie svojich potrieb. V príspevku je preto odhadnutá výška disponibilného príjmu ako aj jeho jednotlivých častí, ktoré na základe Baumgartner et al. (2005) budeme rozlišovať na časti pochádzajúce z podnikania, z úrokov a z úsilia vynaloženom na pracovnom trhu.

1.1 Disponibilný príjem domácností

Na základe systému národných účtov (OSN, 2008) je možné zadefinovať disponibilný príjem príslušnej inštitucionálnej jednotky ako bilančnú položku, ktorá vzniká úpravou bilancie prvotného rozdelenia príjmov inštitucionálnej jednotky o všetky zaplatené transfery (okrem naturálnych spoločenských transferov) a prijaté transfery (okrem naturálnych spoločenských transferov).

¹ Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu APVV-0371-11

Vzhľadom k tomu, že je možné vypočítať disponibilný príjem pre ktorúkoľvek inštitucionálnu jednotku je prirodzene možné vypočítať disponibilný príjem domácností. Napriek tomu, že v prípade domácností sa vyskytujú isté komplikácie pri výpočte disponibilného príjmu², jeho ekonomická interpretácia mu predurčuje výnimočné miesto v rámci makroekonomických ukazovateľov. Disponibilný príjem sa totiž často krát prirovnáva ku „príjmu“, v zmysle ekonomickej teórie. Predstavuje teda príjem, ktoré domácnosti môžu spotrebovať bez toho aby boli nútené odpredať niektoré zo svojich aktív alebo sa zadlžiť (OSN, 2008).

1.2 Delenie disponibilného príjmu domácností

Na základe štandardov OSN (2008) je možné deliť disponibilný príjem podľa jednotlivých položiek jeho tvorby. Je teda možné zistiť akou mierou sa podieľajú na tvorbe disponibilného príjmu domácností jednotlivé položky rozdelenia prvotných príjmov, prípadne jednotlivé transfery. V prípade nedostatočnej desagregácie výstupov systému národných účtov je veľmi komplikované presne určiť podiel jednotlivých položiek.

Z hľadiska ekonomického modelovania Baumgartner et al. (2005) využívajú delenie disponibilného príjmu domácností na zložku tvorenú príjmami z podnikania, zložku tvorenú príjmami z úrokov a na zložku, ktorú súvisy s ekonomickou aktivitou domácnosti. Uvedené delenie slúži autorom pre lepšie modelovanie spotreby, keďže im umožňuje preniesť štruktúru disponibilného príjmu do modelu stáleho dôchodku.

2 ODHAD ZLOŽIEK DISPONIBILNÉHO PRÍJMU

Ako bolo uvedené v úvode, zámerom príspevku je odhadnúť celkovú výšku disponibilného príjmu domácností na základe mikrodát, ako aj odhadnúť podiel jednotlivých základných zložiek disponibilného príjmu domácností. Skúmanými zložkami budú disponibilný príjem vyplývajúci z podnikania a podnikateľskej aktivity, a disponibilný príjem domácností prameniacy z úrokov. Za bilančnú položku budeme považovať príjem pochádzajúci a súvisiaci s ekonomickou aktivitou na trhu práce.³

2.1 Dáta

Ako zdroj mikrodát je použité Zisťovanie o príjme a životných podmienkach domácnosti, alebo v pôvodnom jazyky „EU Statistics on Income and Living Conditions“ (EU-SILC), ktoré je integrovaným systémom štatistických zisťovaní v rámci jednotlivých krajín EU. Samotný prieskum v jednotlivých krajinách predstavuje výberové zisťovanie vykonané na členoch reprezentatívnych domácností, starších ako 16 rokov. Pre platnosť výberovej vzorky je z hľadiska systému potrebné, aby na Slovensku bolo dopytovaných minimálne 4 250 domácností alebo 11 000 jednotlivcov. (Eurostat, 2010)

V príspevku boli konkrétne použité údaje pre Slovensko, počas obdobia 2004 – 2009⁴. Pričom boli použité údaje pre domácnosti, kde sa vzorka počas skúmaného obdobia pohybovala okolo 4 500 – 5 500 pozorovaní, ako aj údaje za jednotlivcov, ktorých počet bol v jednotlivých rokoch medzi 12 500 – 14 200 osôb. Z množstva dostupných premenných boli

² Niektoré transfery domácnosti proste musia spotrebovať, bez ohľadu na to že sa započítavajú do ich disponibilného príjmu (napr. medzinárodné transfery jedla, oblečenia a liekov) a naopak z inými nemôžu voľne disponovať napriek tomu že sú súčasťou disponibilného príjmu (napr. investované prostriedky vo fondoch a poisťkách) [pre viac informácií vid' OSN (2008), str. 159].

³ Predpokladáme tiež, že v opísanej reziduálnej zložke sú zachytené aj možné výdavky, ktoré reálne znižujú disponibilný príjem ako napríklad priame dane a odvody.

⁴ Použité dáta za Slovensko boli síce publikované v období 2005 – 2010, ale ich obsah sa v každom z období vzťahuje k príjmom a životným podmienkam predchádzajúceho roka.

ako relevantné zvolené „Celkový disponibilný príjem domácností“, „Úroky, dividendy, zisky z podnikateľských aktivít subjektov mimo právnických osôb“ a „Peňažné príjmy alebo straty zo samostatnej zárobkovej činnosti“. Použité premenné sú vyjadrené v národných menách, čiže Slovenských korunách (SKK), respektíve eurách (EUR) pre Slovensko. Údaje v SKK boli dodatočne prepočítané na EUR prostredníctvom fixného konverzného kurzu 1 EUR = 30,126 EUR. Spolu s uvedenými premennými boli v príspevku použité aj prierezové váhy pre jednotlivcov a domácnosti, ktoré sú publikované v rámci EU – SILC.

2.2 Metodika

Pre odhad celkovej výšky disponibilného príjmu domácnosti ako aj jednotlivých jeho zložiek využijeme prierezové váhy, ktoré sú publikované spolu s ostatnými premennými obsiahnutými v EU-SILC. Pri predpoklade, že kalibrované váhy prierezových jednotiek predstavujú neskreslenú početnosť, koľkokrát sa reprezentatívna prierezová jednotka vyskytuje v skutočnosti je možné vypočítať celkovú sumu disponibilného príjmu domácnosti, celkovú sumu disponibilného príjmu z úrokov a celkovú sumu disponibilného príjmu z podnikania. Pre samotnú agregáciu sa použije suma súčinov skúmanej premennej s prislúchajúcou váhou prierezovej jednotky. Obdobný prístup využíva aj Eurostat pre výpočet hrubých miezd a plátov, a odmien zamestnancov. V prípade Slovenska tak boli získané odhady hrubých miezd a plátov, ktoré boli na úrovni 86,3% hodnoty získanej zo systému národných účtov a v prípade odmien zamestnancov 89,1% hodnoty získanej prostredníctvom národných účtov (Eurostat, 2010).

3 ODHAD VÝŠKY DISPONIBILNÉHO PRÍJMU A JEHO ROZDELENIA

V nasledujúcej časti sú zverejnené výsledky odhadu disponibilného príjmu domácností a jednotlivých jeho zložiek (investície, podnikanie a prevažne práca).

3.1 Celková výška disponibilného príjmu domácností

Na základe metodiky opísanej v časti 2.2 sme získali odhady pre časový rad celkového disponibilného príjmu domácnosti Slovenska v období 2004 – 2009. Opísané odhady sú uvedené v tabuľke 3.1, spolu s porovnaním vypočítaných hodnôt s hodnotami disponibilného príjmu domácností publikovaných Štatistickým úradom SR (Slovstat), využívajúcim metodiku ESNU95.

Tabuľka 3.1: Odhadnuté hodnoty disponibilného príjmu domácnosti na základe EU-SILC a jeho porovnanie s Systémom národných účtov (ESNU95)

Rok	EU-SILC	Národné účty (ESNU95)	Porovnanie (EU-SILC/ESNU95)
2004	14 250 332 275.17	26 916 900 000.00	52.94%
2005	16 670 878 955.04	29 440 890 000.00	56.62%
2006	18 479 748 356.21	32 032 570 000.00	57.69%
2007	19 160 635 194.02	35 834 240 000.00	53.47%
2008	21 607 509 847.91	39 321 260 000.00	54.95%
2009	23 033 733 634.60	39 841 450 000.00	57.81%

Zdroj: Slovstat, EU-SILC a vlastné prepočty autorov

Na základe porovnania v tabuľke 3.1 je očividné, že hodnoty získané na základe kalibrovaných váh EU-SILC výrazne podhodnocujú Disponibilný príjem domácnosti

v porovnaní s publikovanými hodnotami Slovstatu. V priemere sa totiž podiel Disponibilného príjmu domácnosti pohybuje okolo 55,58% hodnoty disponibilného príjmu obdržaného prostredníctvom metodiky ESNU95. Bolo by preto možné sa domnievať, že prierezové váhy sú kalibrované aby v menšej miere zachytávali skutočne hodnoty disponibilného príjmu, než je tomu v prípade hrubých miezd a plátov, a kompenzácií zamestnancov (Eurostat, 2010). Samozrejme za predpokladu, že metodika ESNU95 verne zachytáva skutočnú hodnotu disponibilného príjmu.

3.2 Podiel jednotlivých zložiek na celkovej výške disponibilného príjmu

Obdobným spôsobom ako bol prepočítaný celkový disponibilný príjem domácnosti na základe mikrodát EU-SILC sme získali odhady pre časť disponibilného príjmu pochádzajúcu z úrokov z majetku a pre časť pochádzajúcu z podnikania. Pre príjmy z podnikania bola použitá už opísaná premenná „Peňažné príjmy alebo straty zo samostatnej zárobkovej činnosti“ a pre príjmy z úrokov „Úroky, dividendy, zisky z podnikateľských aktivít subjektov mimo právnických osôb“. Pre rovnosť celkového disponibilného príjmu bola dorátaná reziduálna položka, ktorej atribútom je že súvisí primárne s aktivitou na trhu práce. Výsledné hodnoty sú zobrazené v tabuľke 3.2.

Tabuľka 3.2: Odhadnuté hodnoty príjmu domácností z úrokov a z podnikania a dopočítaná hodnota disponibilného príjmu súvisiaceho s aktivitou na trhu práce (ATP).

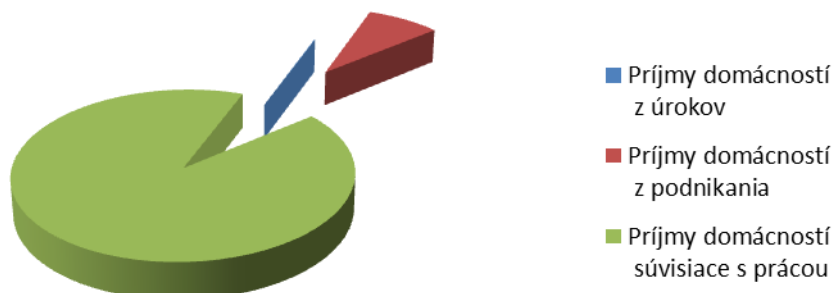
Rok	Príjmy domácností z úrokov	Príjmy domácností z podnikania	Príjmy domácností súvisiace s ATP
2004	11 406 517.62	729 486 004.02	13 509 439 753.53
2005	4 640 988.68	1 413 715 159.62	15 252 522 806.73
2006	20 120 946.45	1 662 401 255.27	16 797 226 154.50
2007	18 445 399.44	1 943 973 903.44	17 198 215 891.13
2008	34 352 821.50	2 181 312 785.42	19 391 844 240.99
2009	21 223 668.53	1 906 609 504.18	21 105 900 461.89

Zdroj: EU-SILC a vlastné prepočty autorov

Na základe vypočítaných údajov v tabuľke 3.2 je očividné, že príjem z úrokov prispieva v najnižšej miere k tvorbe celkového disponibilného príjmu domácnosti. Naopak najväčšiu zložku disponibilného príjmu tvoria príjmy súvisiace s aktivitou na trhu práce. Uvedené rozdiely medzi zložkami tvoriacimi disponibilný príjem domácnosti sú najvýraznejšie viditeľné na obrázku 3.1.

Obrázok 3.1: Odhad tvorby celkového disponibilného príjmu v SR na základe EU-SILC

2009



Zdroj: EU-SILC a vlastné prepočty autorov

4 ZÁVER

Na základe odhadnutých údajov, prezentovaných na obrázku 3.1 je možné usudzovať, že prevažná časť celkového disponibilného príjmu domácností v roku 2009 pochádzala z participácie na pracovnom trhu. Ďalšia významná časť je príjem pochádzajúci z podnikania a len nepatrnú časť tvoria príjmy pochádzajúce z úspor. Pri porovnaní príjmov z úspor ku príjmom pochádzajúcim z participácie na pracovnom trhu zistíme, že v roku 2009 boli príjmy z úspor len približne 0,1% príjmov domácností z participácie na pracovnom trhu. V ostatných obdobiach sa podiel výrazne neodlišuje od roku 2009 (okrem období 2005, kedy bol podiel len 0,03% a 2008, kedy bol podiel takmer 0.2%). Každopádne je potrebné byť obozretný pri odvolávaní sa na odhadnuté dáta vzhľadom k tomu, že prierezové váhy použité pre odhad jednotlivých zložiek nemuseli byť kalibrované pre presné zachytenie disponibilného príjmu, čo naznačujú aj výsledky v tabuľke 3.1. Bolo by preto vhodné overiť ich platnosť povedzme porovnaním s údajmi pochádzajúcimi z národných účtov. Bez ohľadu na relevantnosť kalibrácie váh je zrejmé, že vo výberovej vzorke, akokoľvek reprezentatívnej, predstavujú príjmy z úspor najmenšiu zložku disponibilného príjmu domácností.

Použitá literatúra

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. BAUMGARTNER, J. et al. 2005. A Long-run Macroeconomic Model of the Austrian Economy (A-LMM): Model Documentation and Simulations. In: Proceedings of OeNB Workshops, 2005, No. 5, p. 170-275.
2. Eurostat. 2010. Income and living conditions in Europe. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2010. ISBN 978-92-79-16351-7
3. OSN. 2008. System of National Accounts 2008. New York: United Nations, 2008. ISBN 978-92-1-161522-7

Kontaktné údaje

Ing. Filip Ostrihoň
Ekonomický ústav SAV
Šancová č. 56, 811 05 Bratislava
email: filip.ostrihon@savba.sk

ROVNOVÁŽNE STRATÉGIE V DVOJSTUPŇOVOM DODÁVATEĽSKOM REŤAZCI¹

EQUILIBRIUM STRATEGIES IN THE TWO-STAGE SUPPLY CHAIN

Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková

Abstrakt

V príspevku je prezentovaná analýza dodávateľského reťazca, v ktorom na jeho začiatku uvažujeme s viacerými výrobcami s ponukou jedného navzájom substituovateľného výrobku, na konci s konečným spotrebiteľom s agregovaným dopytom, pričom v dodávateľskom reťazci vystupuje aj medzičlánok, ktorí reprezentujú dodávateľov sprostredkujúci dodávku výrobku od výrobcov k agregovanému spotrebiteľovi. Cieľom dodávateľov (medzičlánku) je pritom, na rozdiel od klasických prístupov uvažujúcich maximalizovaný zisk, udržanie trhového podielu v segmente predaja výrobku konečnému spotrebiteľovi. Analýza je založená na rovnováhe lineárnych ponukových, resp. dopytových funkcií na oboch stupňoch dodávateľského reťazca. Výsledkom je prezentácia rovnovážnych stratégií subjektov na oboch stupňoch dodávateľského reťazca a analýza, ako majú jednotlivé subjekty prispôsobiť svoju cenovú stratégiu v rámci uvažovaného dodávateľského reťazca.

Kľúčové slová: dodávateľský reťazec, rovnovážna stratégia

Abstract

This paper presents an analysis of the supply chain, if on its beginning we assume several producers with a substitutable product and also we assume the final consumer with aggregate demand, while the supply chain also acts with an intermediary represented by suppliers, which supplying the product from producers to aggregated consumer. The aim of suppliers is to maintain market share in the segment sales of the product to the final consumer in opposite to traditional approaches that maximized profit. The analysis is based on equilibrium of linear bidding, respectively demand functions at both levels of the supply chain. The result is a presentation of the equilibrium strategies of actors at both levels of the supply chain and the analysis how different actors have to adapt their pricing strategy within the considered supply chain.

Keywords: supply chain, strategy equilibrium

Úvod

Manažment dodávateľského reťazca sa v ostatných rokoch orientuje na operatívne rozhodnutia decentralizovaných subjektov. Je orientovaný predovšetkým na ovplyvňovanie tých faktorov, ktoré majú vplyv na zisk v celom dodávateľskom reťazci a teda aj na všetky subjekty dodávateľského reťazca. Klasické prístupy k analýze efektívnosti dodávateľského reťazca sú zamerané na analyzovanie situácie, keď sa celkový zisk dodávateľského reťazca diverzifikuje medzi jeho jednotlivé subjekty, pričom sa predpokladá, že aspoň jeden z nich má relevantný vplyv na dopyt po tovare (Fiala, 2002). Aj keď sa novšie tendencie sa

¹ This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0104/12 „Modeling supply chain pricing policy in a competitive environment“.

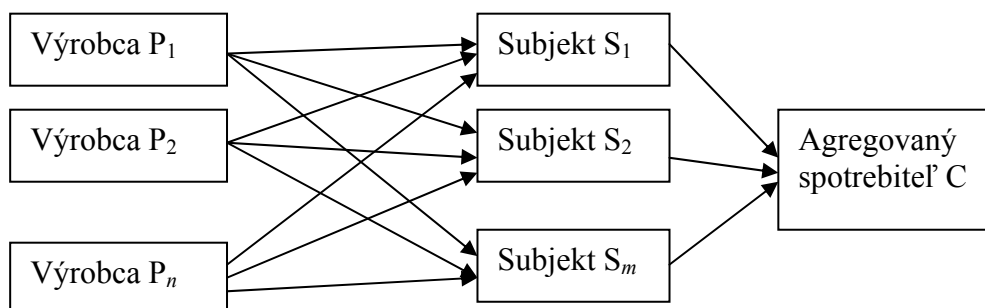
zameriavajú na využívanie prirodzeného nástroja pri maximalizácii vlastnej užitočnosti na trhu s ohľadom na správanie ostatných subjektov na trhu (Fiala, 2002), (Su, Zhang, 2008), (Zouhar, 2009). Efektívne však môže byť aj využitie mikroekonomickej analýzy (Fendek, Fendeková, 2008), (Pekár, Brezina, 2012).

1 ROVNOVÁŽNE CENY V DVOJSTUPŇOVOM DODÁVATEĽSKOM REŤAZCI

Predpokladajme, že v uvažovanom dvojstupňovom dodávateľskom reťazci s viacerými výrobcami s ponukou jedného navzájom substituovateľného výrobku a na konci s konečným spotrebiteľom s agregovaným dopytom existuje aj medzičlánok, ktorí predstavujú sprostredkovatelia. Začiatok reťazca teda reprezentuje n výrobcov, koniec reťazca jeden odberateľ s agregovaným dopytom po výrobku. Ako sprostredkovateľov budeme uvažovať v strednej časti s existenciou m subjektov. Cieľom je získanie, resp. udržanie trhového podielu v segmente predaja výrobku prechádzajúcim dodávateľským reťazcom (na rozdiel od klasických prístupov maximalizujúcich zisk jednotlivých subjektov).

Z cieľa vyplýva aj spôsob realizovanej analýzy, v ktorej budeme uvažovať na jednotlivých úrovniach s ponukovými, resp. dopytovými funkciami, pričom určujeme rovnovážny stav v jednotlivých článkoch dodávateľského reťazca. Následne vyhodnotením rovnovážnych stratégií možno analyzovať, ktorý subjekt a akým spôsobom musí prispôsobiť svoju stratégiu tak, aby si udržal podiel v rámci uvažovaného dodávateľského reťazca.

Predpokladajme, že existuje dodávateľský reťazec (Obrázok 1), v ktorom uvažujeme s n výrobcami výrobku a na druhej úrovni existuje m subjektov, ktoré sú sprostredkujúcimi subjektmi uvedeného výrobku ku konečnému spotrebiteľovi s agregovaným dopytom. Pri analýze budeme uvažovať s ponukovými a dopytovými funkciami v lineárnom tvare.



Obrázok 1

Nech ponuka i -tého výrobcu v závislosti od predajnej ceny je charakterizovaná lineárnou ponukovou funkciou

$$s_{pi}(p_p) = c_{pi} + d_{pi}p_p \quad (1)$$

kde c_{pi} je minimálna úroveň ponuky i -tého výrobcu,

d_{pi} je koeficient nárastu ponuky i -tého výrobcu pri jednotkovej zmene ceny produkcie výrobku,

p_p je cena jednotky výrobku na prvom stupni dodávateľského reťazca.

Na základe uvedeného možno zostrojiť funkciu agregovanej ponuky, ktorá má nasledujúci tvar:

$$s_p(p_p) = \sum_{i=1}^n s_{pi}(p_p) = \sum_{i=1}^n c_{pi} + d_{pi}p_p = \sum_{i=1}^n c_{pi} + p_p \sum_{i=1}^n d_{pi} \quad (2)$$

Na druhom stupni existuje m subjektov, ktorých dopytové funkcie po danom výrobku v závislosti od jeho ceny na prvom stupni sú:

Pre j -ty subjekt:

$$d_{vj}(p_p) = a_{vj} - b_{vj}p_p \quad (3)$$

kde a_{vj} je úroveň saturovaného dopytu j -teho subjektu,

b_{vj} je koeficient poklesu dopytu j -teho subjektu pri jednotkovej zmene ceny produkcie výrobku,

p_p je cena jednotky výrobku na prvom stupni dodávateľského reťazca.

Na základe uvedeného možno zostrojiť funkciu agregovaného dopytu, ktorá má nasledujúci tvar:

$$d_v(p_p) = \sum_{j=1}^m d_{vj}(p_p) = \sum_{j=1}^m a_{vj} - b_{vj}p_p = \sum_{j=1}^m a_{vj} - p_p \sum_{j=1}^m b_{vj} \quad (4)$$

Pretože uvedených m subjektov realizuje vzťah s poslednou úrovňou, ktorú predstavuje ponuka pre konečného spotrebiteľa s agregovaným dopytom, ktorá je reprezentovaná jednotlivými ponukovými funkciami, pričom pre j -ty subjekt platí:

$$s_{vj}(p_c) = c_{vj} + d_{vj}p_c \quad (5)$$

kde c_{vj} je úroveň minimálnej ponuky j -teho subjektu,

d_{vj} je koeficient nárastu ponuky j -teho subjektu pri jednotkovej zmene ceny produkcie výrobku,

p_c je cena jednotky produkcie na druhom stupni dodávateľského reťazca.

Na základe uvedeného možno zostrojiť funkciu agregovanej ponuky, ktorá má nasledujúci tvar:

$$s_v(p_c) = \sum_{j=1}^m s_{vj}(p_c) = \sum_{j=1}^m c_{vj} + d_{vj}p_c = \sum_{j=1}^m c_{vj} + p_c \sum_{j=1}^m d_{vj} \quad (6)$$

Na poslednom stupni uvažujme so spotrebiteľom, ktorého reprezentuje agregovaná dopytová funkcia:

$$d_c(p_c) = a_c - b_cp_c \quad (7)$$

kde a_c je úroveň saturovaného dopytu spotrebiteľa,

b_c je koeficient poklesu dopytu spotrebiteľa pri jednotkovej zmene ceny produkcie výrobku,

p_c je cena jednotky produkcie na druhom stupni dodávateľského reťazca.

Na základe uvedených predpokladov možno stanoviť rovnováhu na jednotlivých úrovniach:

1. úroveň, rovnovážna stratégia medzi výrobcami a subjektmi, ktoré reprezentujú medzičlánok v dodávateľskom reťazci, za predpokladu rovnakej nákupnej ceny pre všetky subjekty:

$$s_p(p_p) = d_v(p_p)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{pi} + p_p \sum_{i=1}^n d_{pi} = \sum_{j=1}^m a_{vj} - p_p \sum_{j=1}^m b_{vj} \quad (8)$$

$$p_p = \frac{\sum_{j=1}^m a_{vj} - \sum_{i=1}^n c_{pi}}{\sum_{i=1}^n d_{pi} + \sum_{j=1}^m b_{vj}}$$

Pre prvý stupeň uvažovaného dodávateľského reťazca rastie rovnovážna cena (p_p) pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu všetkých m subjektov ($\sum_{j=1}^m a_{vj}$) a poklese

parametrov minimálnej úrovne ponuky všetkých n výrobcov ($\sum_{i=1}^n c_{pi}$), koeficientu nárastu ponuky ($\sum_{i=1}^n d_{pi}$) a úrovne koeficientu poklesu dopytu subjektov ($\sum_{j=1}^m b_{vj}$). Pokles rovnovážnej ceny pre prvý stupeň dodávateľského reťazca nastane pri opačných zmenách hodnôt uvedených koeficientov.

2. úroveň, rovnovážna stratégia medzi subjektmi, ktoré reprezentujú medzičlánok v dodávateľskom reťazci a konečným agregovaným spotrebiteľom, za predpokladu rovnakej nákupnej ceny pre obidva subjekty:

$$s_v(p_c) = d_c(p_c)$$

$$\sum_{j=1}^m c_{vj} + p_c \sum_{j=1}^m d_{vj} = a_c - b_c p_c \quad (9)$$

$$p_c = \frac{-\sum_{j=1}^m c_{vj} + a_c}{\sum_{j=1}^m d_{vj} + b_c}$$

Pre druhý stupeň dodávateľského reťazca rastie rovnovážna cena (p_c) pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu agregovaného spotrebiteľa (a_c) a poklese parametrov minimálnej úrovne ponuky všetkých m subjektov ($\sum_{j=1}^m c_{vj}$), koeficientu nárastu ponuky subjektov ($\sum_{j=1}^m d_{vj}$) a úrovne koeficientu poklesu dopytu agregovaného spotrebiteľa (b_c).

Pokles rovnovážnej ceny pre druhý stupeň dodávateľského reťazca nastane pri opačných zmenách hodnôt uvedených koeficientov nastane.

Záver

Prezentované úvahy umožňujú analyzovať rovnovážne ceny p_p a p_c uvažovaného dvojstupňového dodávateľského reťazca s n výrobcami, m sprostredkovateľmi a jedným spotrebiteľom s agregovaným dopytom. V prípade, ak platí $p_p < p_c$, rozdiel $p_c - p_p$ reprezentuje maržu medzičlánku v dodávateľskom reťazci, teda sprostredkujúcich subjektov. S prezentovanou situáciou možno však uvažovať len pri rovnakom objeme realizovaného obchodu tak na prvom, ako aj na druhom stupni uvažovaného dvojstupňového dodávateľského reťazca.

Ak by sme uvažovali s nižšou úrovňou realizovanej ponuky na prvom stupni dvojstupňového dodávateľského reťazca, n sprostredkovateľských subjektov, ktoré predstavujú medzičlánok v dodávateľskom reťazci, by sa muselo rozhodnúť, či zrealizujú zvýšenie dopytu po výrobku od n výrobcov. To však môžu realizovať len zvýšením ceny, ktorú im za výrobok zaplatia. Druhú možnosť s rovnakým efektom predstavuje zvýšenie ceny pre agregovaného spotrebiteľa. To však prirodzene vedie k poklesu dopytu po výrobku. Ak by sme uvažovali s možnosťou vyššieho objemu realizovaného obchodu na prvom stupni dvojstupňového dodávateľského reťazca, sprostredkovateľské subjekty reprezentujúce jeho medzičlánok stoja pre úlohou riešiť uvažovanú situáciu opačným spôsobom.

Selekcia vhodnej cenovej stratégie v dvojstupňovom (ale vo všeobecnosti v každom) dodávateľskom reťazci je determinovaná viacerými ukazovateľmi. Sprostredkovateľské subjekty, ktoré predstavujú medzičlánok v dvojstupňovom dodávateľskom reťazci, majú

v uvažovanom prípade za cieľ nielen maximalizáciu zisku, ale aj cieľ udržania si svojho postavenia na trhu. To vytvára dobrý základ na realizáciu aj ďalších analýz, napr. analýzu založenú na teórii hier (Čičková, Čemická, 2011), (Chobot a kol., 1991), ktorá poskytuje vhodné nástroje na nájdenie spôsobu vyrovnania rovnovážnych cenových stratégií na prvom a druhom stupni dodávateľského reťazca.

Použitá literatúra

1. ČIČKOVÁ, Z., ČEMICKÁ, K. 2011. Teória hier a aukcie na Slovensku a ich porovnanie s ostatnými vo svete. In *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 13.-15. december / prosinec 2011* Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2011.
2. FENDEK, M. – FENDEKOVÁ, E. 2008. *Mikroekonomická analýza*. IURA Edition Bratislava 2008.
3. FIALA, P. 2002. *Modelování a analýza produkčních systémů*. Professional Publishing, Praha 2002.
4. CHOBOT, M. – TURNOVEC, F. – ULAŠÍN, V. 1991. *Teória hier*. Alfa, Bratislava 1991.
5. PEKÁR, J. – BREZINA, I. 2012. Analýza rovnovážnej stratégie v dvojstupňovom dodávateľskom reťazci s cieľom udržania trhového podielu v segmente predaja výrobku. In *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 10.-12. december / prosinec 2012*. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2012.
6. SU, X., ZHANG, F. 2008. Strategic Customer Behavior, Commitment, and Supply Chain Performance. In *MANAGEMENT SCIENCE*, Vol. 54, No. 10, October 2008, pp. 1759–1773.
7. ZOUHAR, J. 2009. *Vícenásobní marginalizace a její dopad na efektivnost dodavatelských řetězců*. Dizertační práce VŠE v Praze, Fakulta informatiky a statistiky 2009.

Kontaktné údaje

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 829

email: juraj.pekar@euba.sk

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 821

email: ivan.brezina@euba.sk

Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: zuzana.cickova@euba.sk

ANALÝZA MALOOBCHODNÉHO TRHU Z POHLĀDU LOKALIZÁCIE ZÁKAZNÍKOV

ANALYSIS OF RETAIL MARKET IN TERMS OF CUSTOMERS LOCALIZATION

Marian Reiff, Andrea Furková, Kvetoslava Surmanová

Abstrakt

V tomto príspevku sa zaoberáme analýzou maloobchodného trhu z pohľadu lokalizácie zákazníkov vo vzťahu k existujúcej prevádzke alebo potenciálne novootvorenej obchodnej prevádzke. Pod analýzou maloobchodného trhu si možno predstaviť analýzu geografickej oblasti v ktorej maloobchodná prevádzka pôsobí alebo bude pôsobiť, teda analýzu jednotlivých zón na trhu.

KLúčové slová: Huffov mode, podiel na trhu

Abstract

In this paper we present the analysis of the retail market in terms of localization of customers in relation to location of existing or potential retail facilities. Under the analysis of the retail market we can imagine analysis of the geographical area in which retail facility operates or will operate, namely the analysis of trade zones on the market.

Keywords: Huff model, market share

(Bennett, 1995) definuje trhovú zónu maloobchodnej prevádzky ako geografickú oblasť zahŕňajúca zákazníkov určitej firmy alebo skupiny firiem ponúkajúcich špecifický produkt alebo službu. Pri výbere lokalizácie obchodnej prevádzky je cieľom vybrať lokalitu, tak aby poloha prevádzky priláka čo najviac zákazníkov, teda dosiahla čo najväčší podiel na danom trhu, na geograficky špecifikovanom maloobchodnom trhu. Podľa (Krause-Traudes et al., 2008) pri výbere umiestnenia prevádzky je najdôležitejšie kritérium návratnosť investície a preto je potrebné odhadnúť potenciálne tržby novej prevádzky v danej lokalite. V prípade plánovania otvorenia novej prevádzky, analýza rôznych geografických oblastí a potenciálnych umiestnení prevádzky môže poukázať na možný trhovú potenciál už v existujúcom konkurenčnom prostredí. V prípade už otvorených prevádzok môžeme popri analýze trhových potenciálov vyhodnotiť aj ich výkonnosť, identifikovať oblasti cielených promočných aktivít, identifikovať slabé stránky trhu a plánovať budúci rast a rozvoj (Berman, Evans, 2001).

Medzi prvé priestorové interakčné modely možno zaradiť práce (Reilly, 1931) a (Converse, 1949). Podľa Relleyho gravitačného zákona (Reilly, 1931) dve mestá priťahujú dopyt zákazníkov z tretieho mesta nachádzajúcom sa medzi týmito dvomi mestami, priamo úmerne počtu obyvateľov týchto dvoch miest a nepriamo úmerne ich vzdialeností od tretieho mesta. Relleyho gravitačný zákon možno využiť iba v prípade ak analyzujeme rozdelenie trhu medzi dvoma prevádzkami. (Carrothers, 1956) a (Huff, 1962) poukazujú na limity Relleyho gravitačného zákona a tvrdia, že premenné ako veľkosť obyvateľstva a cestná vzdialenosť medzi mestami nie vždy vystihujú realitu, nakoľko nie vždy je možné rozdeliť jednotlivé oblasti trhu na dva samostatné body. Huffov model (Huff, 1963), (Huff, 1964) sa zaoberá vymedzením oblasti trhu medzi viacerými prevádzkami a možno ho teda považovať za viac všeobecnejší a teda aplikovateľnejší gravitačný model. Podľa (Hernandez, Bennison, 2000), Huffov model patrí v maloobchodnej praxi medzi často využívané modely nakoľko je ľahko aplikovateľný (Park et al., 2006) a pomerne presný (Drezner, Dressner, 2002).

Základom Huffovho modelu je predpoklad, že pravdepodobnosť, že si zákazník vyberie prevádzku j z pomedzi ostatných predajní n , je daná zákazníkom vnímanou funkciou užitočnosti danej prevádzky a ostatných prevádzok, čo možno vyjadriť vzťahom 1.1,

$$P_{ij} = \frac{U_j}{\sum_{j=1}^n U_j} \quad (1.1)$$

kde P_{ij} predstavuje pravdepodobnosť, že zákazník i si vyberie prevádzku j a U_j predstavuje zákazníkom i vnímanú funkciu užitočnosti prevádzky j . V praxi možno funkciu užitočnosti vyjadriť pomocou gravitačného modelu, kde zákazníci si priamo úmerne priťahovaný k jednotlivým prevádzkam ich atraktívnosťou a nepriamo úmerne vzdialeností medzi lokalitou zákazníka a prevádzky.

$$P_{ij} = \frac{\frac{a_j^\alpha}{d_{ij}^\beta}}{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^\alpha}{d_{ij}^\beta}} \quad (1.2)$$

Vo vzťahu 1.2 a_j predstavuje atraktívnosť predajne j (napríklad veľkosť predajnej plochy), d_{ij} predstavuje vzdialenosť alebo čas potrebný na prepravu zákazníka z lokality i do lokality j , ekonometricky odhadnuté parametre α a β zachytávajú vplyv atraktívnosti a vzdialenosti na nákupy zákazníkov a n predstavuje počet predajní na danom trhu. Parameter α je exponent atraktívnosti

a umožňuje modelovať nelineárnu závislosť. Parameter β simuluje ako rýchlo klesá vplyv obchodnej prevádzky na vzdialených zákazníkov, čím má β vyššiu hodnotu, tým vplyv na vzdialených zákazníkov klesá. Podiel $\frac{a_j^\alpha}{d_{ij}^\beta}$ interpretuje-

me ako funkciu užitočnosti (atraktívnosti), kde atraktívnosť predajne j vnímaná zákazníkom z lokality i je priamo úmerná veľkosti predajne a nepriamo úmerná mocnine vzdialenosti medzi zákazníkovi v lokalite i a predajne v lokalite j .

Koeficient β je dôležitým parametrom Huffovho modelu, ovplyvňujúci hodnotu analyzovanej premennej podiel na trhu. Hodnota parametru β je špecifická pre každý región a mení sa v čase, jeho hodnotu možno ekonometricky odhadnúť na základe zozbieraných dát v analyzovanom regióne (Wang, 2006). Podľa (Kotschedoff, 1976) parametre α a β sú rôzne nie len pre skupiny komodít ale aj rôzne geografické regióny a preto je ich potrebné odhadnúť pre každý preskúmaný región zvlášť.

V ekonometrickom modeli slúžiacom na odhad parametru β vystupujú nasledujúce premenné, premenná T_{ij} predstavuje počet jász (nákupov) medzi oblasťou i (oblasť lokalizácie zákazníkov) a j (miesto lokalizácie predajne), premenná O_i charakterizujúca veľkosť oblasti i (napríklad počet obyvateľov v danej lokalite), premenná D_j charakterizuje veľkosť destinácie j (napríklad rozloha predajnej plochy), d_{ij} predstavuje vzdialenosť medzi lokalitami i a j , parameter β zachytávajúci vplyv vzdialenosti na nákupy zákazníkov a a predstavuje konštantu. Gravitačný model zachytávajúci vzťah medzi lokalitami i a j možno vyjadriť nasledovne (Jin et al., 2004):

$$T_{ij} = aO_iD_jd_{ij}^{-\beta} \quad (1.3)$$

$$\ln\left(\frac{T_{ij}}{O_iD_j}\right) = \ln a - \beta \ln d_{ij} \quad (1.4)$$

respektíve rozšírením o parameter α

$$T_{ij} = aO_i^{\alpha_1}D_j^{\alpha_2}d_{ij}^{-\beta} \quad (1.5)$$

$$\ln T_{ij} = \ln a - \alpha_1 \ln O_i + \alpha_2 \ln D_j - \beta \ln d_{ij} \quad (1.6)$$

Po odhade parametrov α a β a výpočte P_{ij} , očakávanú hodnotu nákupov z lokality i v obchodnej prevádzke j možno určiť na základe nasledujúceho vzťahu:

$$E_{ij} = P_{ij}B_{ik} \quad (1.7)$$

Kde B_{ik} predstavuje rozpočet zákazníkov z lokality i na komoditu k (Huff, 2003).

Rellyho model možno považovať za špeciálny prípad Huffovho modelu. Ak v rovnici 1.7 uvažujeme, že atraktivnosť je vyjadrená plochou predajne S , $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $n = 2$ a $P_{ij} = 0,5$, teda uvažujeme s dvoma prevádzkami, elasticita dopytu zákazníkov vo vzťahu k rozlohe predajne je rovná jednej a zákazníci v bode zlomu si indiferentný pri výbere prevádzky, potom platí pre vzťah:

$$0,5 = \frac{\frac{S_1}{d_{1x}^\beta}}{\frac{S_1}{d_{1x}^\beta} + \frac{S_2}{d_{2x}^\beta}} \quad (1.8)$$

Vzťah 1.8 je zhodný so vzťahom pre Rellyho model ak $\beta = 2$. Pre rôzne hodnoty β možno Rellyho model zapísať nasledovne:

$$d_{1x} = \frac{d_{12}}{\left(1 + \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)} \quad (1.9)$$

$$d_{2x} = \frac{d_{12}}{\left(1 + \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)} \quad (1.10)$$

Na základe rovníc 1.9 a 1.10 možno konštatovať, ak prevádzka s indexom 1 zväčší svoju predajnú plochu rýchlejšie ako prevádzky s indexom 2 (podiel $\frac{S_1}{S_2}$ sa zväčší) hodnota d_{1x} narastie a hodnota d_{2x} sa zmenší, to znamená že bod

zlomu sa presunie bližšie k prevádzke označovanej indexom 2, teda prevádzka označená indexom 1 zväčší svoj podiel na trhu, teda expanduje.

Vplyv koeficientu β ma taktiež vplyv na podiel na trhu. Ak sa hodnota koeficientu β znižuje, napríklad z dôvodu lepšej infraštruktúry (lepšia cestná sieť, hromadná doprava atď.), čiže vzdialenosť vplýva v menšej miere na podiel trhu. Ako príklad možno uviesť úspešné veľké obchodné centrá v okrajových častiach miest, blízko rýchlostných ciest. Vplyv poklesu hodnoty koeficientu β možno z dôvodu jednoduchosti preskúmať taktiež na Rellyho modely. Ak hodnota koeficientu β klesá, posun bodu zlomu v Rellyho modely závisí od veľko-

sti predajnej plochy prevádzky. Ak $S_1 > S_2$ potom $\frac{S_2}{S_1} < 1$, teda hodnota

$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ klesá, a teda hodnota d_{1x} rastie a d_{2x} klesá, čo znamená, že väčšia pre-

vádzka expanduje na trhu. A naopak ak $S_1 < S_2$ potom $\frac{S_2}{S_1} > 1$, a teda hodnota

$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ rastie a teda hodnota d_{1x} klesá a d_{2x} rastie, čo znamená, že malá pre-
vádzka stráca podiel na trhu.

V pôvodnom Huffovom modeli vo funkcii atraktívnosti vystupuje len premenná veľkosť predajnej plochy. (Nakanishi, Cooper, 1974) navrhli viac všeobecnejšiu verziu Huffovho modelu pod názvom Model multiplikatívnych konkurenčných vzťahov. V tomto modeli vo funkcii atraktívnosti vystupuje okrem premennej veľkosť predajnej plochy premenné ako imidž predajne, geografická dostupnosť a podobne. Model multiplikatívnych konkurenčných vzťahov meria pravdepodobnosť, že zákazník z rezidenčnej lokality i bude nakupovať v prevádzke j , teda:

$$P_{ij} = \frac{\prod_{l=1}^L a_{lj}^{\alpha}}{d_{ij}^{\beta}} \bigg/ \sum_{j=1}^n \frac{\prod_{l=1}^L a_{lj}^{\alpha}}{d_{ij}^{\beta}} \quad (1.11)$$

kde a_{lj} predstavuje l -tú charakteristiku atraktívnosti prevádzky j , ostatné označenia sú zhodné s označeniami Huffovho modelu vyjadreného vzťahom 1.2.

(Weisbrod et al., 1984) vo svojom modeli uvažujú, že vstupnými údajmi modelu sú disagregované dáta o počte individuálnych nákupov, namiesto agregovania údajov o počte nákupných výjazdov z lokality i .

$$P_{ij} = \frac{\prod_{l=1}^L e^{\alpha_{lj} a_{lj}}}{\sum_{j=1}^n \frac{\prod_{l=1}^L e^{\alpha_{lj} a_{lj}}}{e^{\beta_{lj} d_{lj}}}} \quad (1.18)$$

Použitá literatura:

- BENNETT, P. 1995. Dictionary of marketing terms. In: *S. Edition*. Chicago, IL: American Marketing Association, 1995.
- BERMAN, B. – EVANS, J. R. 2001. Retail Management: A Strategic Approach. In: *8th*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- CARROTHERS, G. 1956. An historical review of the gravity and potential concepts of human interaction. In: *Journal of the American Institute of Planners*, č. 22, s. 94 - 102.
- CONVERSE, P. D. 1949. New laws of retail gravitation. In: *Journal of Marketing*, č. 14, s. 379 - 384.
- DREZNER, T. – DRESSNER, Z. 2002. Validating the gravity-based competitive location model using inferred attractiveness. In: *Annals of Operations Research*, č. 111, s. 227–241.
- HERNANDEZ, T. – BENNISON, D. 2000. The art and science of retail location decisions. In: *International Journal of Retail & Distribution Management*, roč. 28, č. 8, s. 357–367.
- HUFF, D. L. 1962. A note on the limitation of interurban gravity models. . In: *Land Economics*, roč. 38, č. 1, s. 64 - 66.
- HUFF, D. L. 1963. A probabilistic analysis of shopping center trade areas. In: *Land Economics*, roč. 39, č. 1, s. 81 - 90.
- HUFF, D. L. 1964. Defining and Estimating a Trade Area. In: *Journal of Marketing*, roč. 28, s. 34–38.
- HUFF, D. L. 2003. *Parameter estimation in Huff model*. www.esri.com/news/arcuser/1003/files/huff.pdf, 2003.
- JIN, F. et al. 2004. Geographic patterns of air passenger transport in China 1980–98: imprints of economic growth, regional inequality and network development. In: *Professional Geographer*, č. 56, s. 471–487.
- KOTSCHEDOFF, M. 1976. Sozialphysikalische Modelle in der regionalen Handelsforschung : e. Beitr. zur Standortplanung von Gewerbezentren. In: *Dynamische Okonomie*, 16. Berlin: Berlin Verlag, 1976.

- KRAUSE-TRAUDES, M. et al. 2008. *Spatial data mining for retail sales forecasting*. AGILE International Conference on Geographic Information Science 2008. University of Girona, Spain, 2008.
- NAKANISHI, M. – COOPER, L. G. 1974. Parameter estimation for a multiplicative competitive interaction model-least square approach. In: *Journal of Marketing Research*, č. 11, s. 303 - 311.
- PARK, C. J. et al. 2006. Prediction of Estimated Sales Amount through New Open of Department Store. In: *Journal of Distribution Science*, roč. 4, č. 2, s. 5-20.
- REILLY, W. J. 1931. The law of retail gravitation. In. New York: Knickerbocker Press, 1931.
- WANG, F. 2006. Quantitative Methods and Applications in GIS. In: CRC Press 2006.
- WEISBROD, G. E. et al. 1984. A disaggregate model for predicting shopping area market attraction. In: *Journal of Marketing*, č. 60, s. 65–83.

Kontaktné údaje

Ing. Marián Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska cesta 1/a, 852 35 Bratislava

Tel.: (421 2) 67 295 823

email: reiff@euba.sk

Ing. Andrea Furková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska cesta 1/a, 852 35 Bratislava

Tel.: (421 2) 67 295 832

email: furkova@euba.sk

Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska cesta 1/a, 852 35 Bratislava

Tel.: (421 2) 67 295 823

email: surmanova@yahoo.com

STUDY OF ECONOMIC EPIDEMIOLOGY MODELS

VÝZKUM MODELŮ ECONOMICKÉ EPIDEMIOLOGIE

Nataliya Soldatyuk

Abstract

The exogenous shock to population size provides a unique opportunity to examine the impact of a large population decline on subsequent economic growth. The cause of these shocks could be epidemics. The union of epidemiology and economics gives us a field for various scientific researches. The epidemic is positively correlated with subsequent economic growth. In this article there are presented several approaches for modeling and prediction of epidemics and the results of research of influenza epidemics in Ukraine.

Keywords: epidemiology, deterministic model, stochastic model

Abstrakt

Exogenní šok počtu obyvatel poskytuje jedinečnou příležitost prozkoumat dopad velkého poklesu počtu obyvatel na následný hospodářský růst. Příčinou těchto šoků by mohla být epidemie. Spojení epidemiologie a ekonomie nám dává pole pro různé vědecké výzkumy. Epidemie se pozitivně koreluje s následným ekonomickým růstem. V tomto článku je prezentováno několik přístupů pro modelování a predikci epidemie a výsledky výzkumu chřipkové epidemie na Ukrajině.

Klíčová slova: epidemiologie, deterministický model, stochastický model

1 Introduction

The main scope of mathematical modeling in epidemiology is clearly stated in the second edition of Bailey book [1]: “we need to develop models that will assist the decision-making process by helping to evaluate the consequences of choosing one of the alternative strategies available. Thus, mathematical models of the dynamics of a communicable disease can have a direct bearing on the choice of an immunization program, the optimal allocation of scarce resources, or the best combination of control or eradication techniques”.

The death toll exacted by the 1918-1919 influenza epidemic in USA was one of the highest ever recorded during a health crisis in world history. The epidemic disproportionately claimed young adults, and, although fueled by the troop movements that accompanied the end of World War I, the geographic distribution of influenza mortality appears to have been largely random. Controlling for numerous factors including initial income, density, human capital, climate, the sectoral composition of output, geography, and the legacy of slavery, the results indicate a large and robust positive effect of the influenza epidemic on per capita income growth across states during the 1920s. Results of research, conducted by Brainerd, E. and Siegler, M. [3] suggest that one more death per thousand resulted in an average annual increase in the rate of economic growth over the next ten years of at least 0.2 percent per year, which shows large effect.

2 EPIDEMIOLOGY MODELS

2.1 Deterministic model

Let us first look at an example of an epidemic where the infectious people are not isolated. This approximation can be useful in the first stages of some respiratory disease infections, since it can take a long time for the source of the infection to disappear from the population. Let us then suppose that one infected individual (source of infection) gets into a group of n individuals who are receptive to a given infection. So there is the homogeneously mixed group, which has $n + 1$ individuals. Consider at the time t in this group there are x receptive individuals and y sources of infection, that gives us $x + y = n + 1$. The average amount of new infections in the period of time Δt , will be proportional to the number of the sources of infection as well as to the number of receptive individuals. If the frequency of contacts among the members of the group equals β , then the average number of new infections in the time interval Δt , equals $\beta xy \Delta t$, that is

$$\Delta x = -\beta xy \Delta t$$

Let us change the time scale: $\tau = \beta t$; so the equation for this process is the following:

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(n - x + 1)$$

with the initial condition of

$$x = n, \quad \tau = 0.$$

In practice, during epidemics it is recorded a number of diseases which occurred per day or week. It is needed to reflect these numbers of receptive individuals at any period of time by the function which is presented below:

$$-\frac{dx}{d\tau} = x(n - x + 1) = \frac{n(n + 1)^2 e^{(n+1)\tau}}{(n + e^{(n+1)\tau})^2},$$

where the variable x reflects the number of receptive individuals in the group at any time:

$$x = \frac{n(n + 1)}{n + e^{(n+1)\tau}}.$$

On the right side of the equation is symmetric single-humped curve.

Let us find when the speed of the epidemic spread will be maximum. Then if variable t is used for time scale, we consider the function

$$t = \frac{\ln n}{\beta(n + 1)}$$

- the time when the speed of the epidemic spread is the highest and equals

$$\frac{\beta(n + 1)^2}{4}.$$

Thus, we have found characteristic properties of epidemics: the number of new infections is increasing rapidly at the beginning, reaches a maximum at some point and then decreases to zero. Lets find also the duration of the entire epidemic: the time when $x < 1$ we assume as duration of the epidemic, i.e. when all individuals became infected (if $t \rightarrow, \infty \quad x \rightarrow 0$):

$$\frac{n(n+1)}{n + e^{(n+1)\beta t}} < 1.$$

then

$$e^{(n+1)\beta t} > n^2, \quad t > \frac{2 \ln n}{\beta(n+1)}$$

2.2 The stochastic model

Denote by $X(t)$ random variable that characterizes the amount of receptive individuals at time t . Probability of new infection proportional to the number of receptive individuals and to the number of sources of infection.

The actual probability of transition for interval Δt can be defined as $\beta X(n - X + 1)\Delta t$. Let us change the time scale: $\tau = \beta t$.

The differential equation with partial derivatives for the creation of the probability equation is the following:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = (1 - x) \left(n \frac{\partial P}{\partial x} - x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)$$

with the initial condition of

$$P(x, 0) = x^n.$$

Lets say that $p_r(\tau)$ is the probability, that at the moment of time τ there are r individuals who are receptive to the epidemic. We can then create a system of equations:

$$\frac{dp_r}{d\tau} = (r+1)(n-r)p_{r+1} - r(n-r+1)p_r, \quad 0 \leq r \leq n-1,$$

$$\frac{dp_n}{d\tau} = -np_n$$

with the initial condition of

$$p_n(0) = 1.$$

These equations show the probability of a new infection in any infinitely small amount of time.

Lets find the duration of the epidemic - the time needed for the whole group of receptive individuals to become infected. If there is j sources of infection and $n - j + 1$ receptive individuals, the probability of new infection in the range of $\Delta \tau$ is equal $j(n - j + 1)\Delta \tau$, and duration of period of time until the appearance of this new source of infection has exponential distribution:

$$f(\tau_j) = j(n - j + 1)e^{-j(n-j+1)\tau_j}.$$

The duration of the epidemic T equals the sum of the values τ_j :

$$T = \sum_{j=1}^n \tau_j.$$

2.3 The general case of the epidemic

Now consider a generalization of the simple epidemic model when an infected individual may leave the group. Denote by z the number of isolated individuals (who have recovered, died or became immune to infection after the disease) and Variable γ - the frequency of isolating of individuals. γ describes the speed with which infected individuals become isolated, immune or die. So $x + y + z = n$ - the total number of individuals in the group; $\beta xy \Delta t$ - average number of infections during the time period of Δt ; $\gamma y \Delta t$ - average number of isolations during the time period of Δt . The system of equations for this process looks as the following:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y, \end{cases}$$

with the initial condition of $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, ($z_0 = n - x_0 - y_0$) at time $t = 0$.

From the second equation of the system follows that the epidemic can not begin unless the condition $x_0 > \gamma/\beta$. Denote by $\rho = \gamma/\beta$ *relative frequency of isolation* of infected individuals. The threshold value of this parameter will be the value $\rho = x_0 \approx n$, which means, that with density of receptive individuals that is below this value, the initial cases of disease disappear before the infection moves to the other of individuals. But if the density is above this threshold, the epidemic will arise even in the case where the initial number of sources of infection is very low.

With the help of mathematical transformations of this system of equations we can derive the following formula:

$$x = x_0 e^{-z/\rho},$$

$$z(t) = \tilde{C}\rho + \frac{(z_0 - \tilde{C}\rho)be^{bt}}{1 - (z_0 - \tilde{C}\rho)ae^{bt}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(\frac{x_0}{\rho} e^{\frac{z_0}{\rho}} e^{-\frac{z}{\rho}} - 1)(z_0 - \tilde{C}\rho)b^2 e^{bt}}{(1 - (z_0 - \tilde{C}\rho)ae^{bt})^2},$$

where

$$\tilde{C} = \frac{\sqrt{(A - \rho)^2 - 2A(n - A)} - A + \rho}{A}$$

$$y = n - x - z$$

Let us then find the total value of the epidemic z_∞ :

$$z_{\infty} \approx 2\rho\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)$$

- full size of the epidemic. If $\rho > n$, epidemic does not occur.

2.4 Repeated epidemics

The simplest modification that we need to put in the deterministic model, discussed earlier, is that the number of receptive individuals continuously growing with the speed μ . This means that after any single epidemic eruption, which causes that the density of receptive individuals falls below a critical value, follows a relative pause. This pause continues until the population reaches again the critical value and the epidemic breaks out again. In the interval Δt amount of receptive individuals on the group on the one hand, decreases by $\beta xy \Delta t$ by the fact that some of them infected, on the other hand - is increased by $\mu \Delta t$.

The system of equations for this process looks as the following:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy + \mu, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y. \end{cases}$$

2.5 Research of influenza epidemics in Ukraine

Let us use deterministic model described in chapter 2.1 for study of dynamics of epidemics in Ukraine. The data used for research is taken from weekly records of new cases (ie, by the model definition, input data is $y(t)$, Δt - one week). In practice we have faced with additional difficulties: we do not know exactly when an epidemic has occurred, because there is continuously some level of infection. Because of this we can not use the assumption $x(0) = n$. We have worked this issue around by two different ways: when there is statistical data, it is possible for two neighboring values of x (for example, $x(t)$ i $x(t + 1)$) to find the corresponding values of βt and $\beta(t + 1)$. Then the parameter β can be found as the difference $\beta(t + 1) - \beta t$.

Then, having β , we solve the equation $\Delta x = -\beta xy \Delta t$ relatively x under the assumption $x + y = n$. By substituting the numerical values of n and β in the solution the value x is found at the beginning of the epidemic. Now, with the initial number of receptive individuals and frequency of contact between individuals in group, it is possible to use a deterministic model to predict the epidemic.

Another option how to determine a moment of time, when epidemic has begun - to calculate epidemiological threshold and assign it the initial value of y at the beginning of the epidemic.

By substituting initial data into the equations of the model, we can determine the parameters such as the duration of the epidemic, the speed of spreading of the epidemic, the peak of the epidemic. The results showed a high efficiency model.

3 Conclusions

It is analyzed several models of epidemics in this article. In case of epidemics, when an infected individual is not isolated, it is found the duration of the epidemic, probability number of receptive individuals and other parameters. Also it is reviewed the general case when an infected individual is

isolated and the case of repeated epidemic. Researched models have been applied to statistics data of the Ministry of Health of Ukraine. Determined the frequency of contacts between individuals in group, epidemic threshold, and the time when it is gained. The results can be used to study the medical and biological problems.

References

1. BAILEY, N. 1967. The mathematical approach to biology and medicine. Published by John Wiley And Sons Ltd.,1967 ISBN: 0-471-04115-7
2. GROSSMAN, St, TURNER, J. 1974. Mathematics for the Biological Sciences. Published by Macmillan Publishing Co.-Inc.New York, 1974 ISBN: 0-02-348330-X
3. Brainerd, E.- Siegler,M. 2002. The Economic Effects of the 1918 Influenza Epidemic. Discussion paper 3791, Centre of economic policy research.
4. BOUCEKKINE, R. 2011. Epidemics from the economic theory viewpoint. Mathematical Population Studies 19, 1-3, 2012.
5. GURLAND, J. 1964, Stochastis Models in Medicine and Biology, University of Wisconsin, Madison, 1964.
6. ENSLEIM K. 1962. Data Acquisition and Processing in Biology and Medicine, Pergamon, Oxford, 1962.

Contact information

Mgr. Nataliya Soldatyuk,
University of Economics in Prague, Faculty of Informatics and Statistics
W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague
Tel: (420 7) 77 976 188
email: xsoln900@vse.cz

RIEŠENIE OPTIMALIZAČNÝCH ÚLOH NA LOKÁLNEJ ÚROVNI A V PROSTREDÍ INTERNETU

SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS AT THE LOCAL LEVEL AND IN THE INTERNET ENVIRONMENT

Stanislav Sopko

Abstrakt

Softvérové možnosti pre riešenie optimalizačných úloh sú v súčasnosti rozmanité. Cieľom príspevku je priniesť ucelený pohľad na softvérové produkty riešiace úlohy lineárneho programovania. Tieto produkty sú kategorizované do dvoch hlavných skupín a to na lokálne programy a webové aplikácie/servery. V každej skupine je spomenutý kľúčový softvér, spoločne s jeho stručným popisom. V závere článku sú spomenuté výhody tak lokálnych programov, ako aj webových aplikácií a načrtnutý možný trend vývoja v oblasti optimalizačných produktov.

***Kľúčové slová:** lineárne programovanie, NEOS, optimalizačný softvér, modelovací jazyk*

Abstract

Software for solving optimization problems are diverse. The aim of this paper is to bring a holistic view of software products solving the linear programming problems. These products are categorized into two main groups, namely local programs and web applications/servers. In each group there are mentioned key software, together with its brief description. There are mentioned advantages of local programs, as well as web applications and also possible trend in the field of optimization products at the end of the article.

***Keywords:** linear programming, NEOS, optimization software, modeling language*

1 ÚVOD

Predmetom záujmu v tomto príspevku sú optimalizačné úlohy a optimalizačný softvér, ktorý nám umožňuje ich riešenie. Zameriame sa primárne na úlohy lineárneho programovania, ktoré patria v praxi medzi tie najfrekventovanejšie. V súčasnosti existuje na trhu veľký počet aplikácií, ktoré si dokážu s optimalizačnými úlohami poradiť. Jedná sa čisto o aplikácie cielené na úlohy lineárneho programovania, alebo sú to komplexné nástroje, ktoré dokážu riešiť spomínané úlohy ako jednu zo svojich viacerých funkcionalít. Pozornosť zacielime len na najznámejšie a v tejto oblasti najvyužívanejšie. Hlavných rozdielov medzi produktmi, ktoré riešia úlohy lineárneho programovania, by sme mohli nájsť dozaista viacero. Napríklad použitý výpočtový algoritmus, modelovací jazyk alebo druh prístupu k riešiteľovi. Práve druh prístupu k riešiteľovi je kľúčovou témou tohto príspevku – zaujíma nás, či riešiteľ spúšťame ako lokálnu aplikáciu alebo pristupujeme k nemu pomocou webového rozhrania.

2 SÚČASNÉ SYSTÉMY NA RIEŠENIE ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Vymedzili sme si pôsobisko v rámci optimalizačných úloh na úlohy lineárneho programovania. Úlohu lineárneho programovania môžeme maticovo zapísať v nasledujúcom tvare:

maximalizovať (minimalizovať)

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

pri obmedzujúcich podmienkach:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Maticy a vektory pri zavedenom označení v predchádzajúcom zápise: z – účelová funkcia, ktorej extrém hľadáme, \mathbf{c} – vektor cenových koeficientov o n zložkách, \mathbf{x} – vektor štruktúrnych premenných o n zložkách, \mathbf{A} – matica štruktúrnych koeficientov o rozmere $m \times n$, \mathbf{b} – vektor hodnôt pravej strany o m zložkách, $\mathbf{0}$ – nulový vektor o n zložkách.

Za posledných 20 rokov zaznamenala výpočtová technika výrazný progres. S jej rozvojom sa rozvíjali aj vedné disciplíny, ktoré priamo so svetom počítačov súviseli. Rovnako to bolo aj s operačným výskumom. Niekedy bolo riešenie úloh lineárneho programovania o stovkách premenných a stovkách obmedzujúcich podmienok nepredstaviteľnou záležitosťou. V ranom štádiu rozvoja tejto disciplíny boli výpočty buď veľmi zdĺhavé alebo sa dokonca nedali ani uskutočniť. V súčasnosti už ale existuje mnoho softwarových prostriedkov, ktoré zvládajú aj úlohy o tisíckach premenných v relatívne krátkom čase. Získanie výsledkov priamo úmerne závisí na charaktere a zložitosti skúmanej úlohy. Manuálny ručný výpočet úloh lineárneho programovania je možný snáď iba pri úlohách s pár premennými, ktoré ale prevažnú väčšinu reálnych problémov nedokážu zachytiť. Preto je pre riešenie úloh lineárneho programovania nutný aj kvalitný počítačový aparát, ktorý nám dané úlohy umožní riešiť efektívne. V súčasnosti existuje veľká škála počítačových programov, ktoré si dokážu s úlohami operačného výskumu poradiť. Líšia sa samozrejme možnosťou a nastaveniami riešenia, rýchlosťou výpočtu a v neposlednom rade aj cenou. Na trhu existujú programy, ktoré si poradia so stredne veľkými úlohami v relatívne dobrom čase a ich cena sa pohybuje v rozmedzí niekoľkých desiatok eur. Rovnako ale existujú aj komplexné multifunkčné programové nástroje, ktoré prakticky nemajú problém skoro so žiadnou úlohou. Ich cena sa už ale môže pohybovať rádovo v stovkách, ale aj tisícoch eur. V ďalšej časti podáme krátky prehľad o dostupných programoch schopných riešiť úlohy lineárneho programovania.

Začneme produktmi, ktoré fungujú na lokálnej úrovni. Inými slovami, užívateľ má daný produkt nainštalovaný na svojom počítači, odkiaľ ho aj spúšťa a pri samotnom výpočte je využívaná pamäť a procesor daného stroja. Samotná rýchlosť výpočtu teda dosť výrazne závisí aj na kvalite použitého hardvéru. Tieto produkty ešte v rámci vymenovávania rozdelíme na programy a modelovacie jazyky. Najprv sa zameriame na softvérové programy.

I. *MS Excel* - prvý nástroj z tejto skupiny, ktorý si dokáže poradiť so stredne veľkými úlohami operačného výskumu, je bežne dostupná súčasť kancelárskeho balíka od Microsoftu, a to Microsoft Excel. Tento tabuľkový kalkulátor obsahuje svoju optimalizačnú súčasť schopnú riešiť úlohy maximálne o veľkosti 200 premenných a 200 obmedzujúcich podmienok. Tým poskytuje relatívne pohodlný nástroj pre stredne veľké úlohy, avšak tento limit nemôže byť žiadnym spôsobom prekročený, preto je pre niektoré úlohy nepoužiteľný. Optimalizačný balík sa v MS Excel nachádza pod názvom Solver (v českej verzii pod názvom Řešitel). Tento balík obsahuje základnú možnosť nastavenia výpočtu, ako je napríklad maximálny čas behu programu, maximálny počet iterácií a podobne. MS Excel je teda ľahko dostupným prostriedkom a práca v ňom je pre väčšinu užívateľov známa, takže pre nich odpadá prvotné zoznamovanie sa s programom. Ako však vieme, MS Excel je širokospektrálny tabuľkový nástroj, ktorého hlavnou funkciou nie je optimalizácia úloh lineárneho programovania. Ako základný nástroj riešenia je preto určite vhodný, no pre väčšie úlohy existujú viac špecializované programy.

II. *DS for Windows* - do inej kategórie môžeme zaradiť program DS for Windows. Tento program má dizajn klasických aplikácií bežiacich pod operačným systémom Windows a jeho funkčnosť a využiteľnosť je pomerne široká. Poskytuje výber viacerých modulov a práca s ním je intuitívna. Táto aplikácia je výrazne podobná zastaralému programu STORM, avšak dizajnom a architektonickým prevedením spadá už do modernej tvorby softwaru.

III. *ILOG CPLEX Optimization Studio* - ďalším optimalizačným programom, ktorým sa budeme zaoberať, je program s názvom ILOG CPLEX Optimization Studio. Tento produkt je vytvorený firmou IBM a ako je z názvu zrejmé, jeho hlavné jadro tvorí riešiteľ s názvom CPLEX. Je pomenovaný po simplexovej metóde v jazyku C. CPLEX si dokáže poradiť s úlohami celočíselného programovania, veľmi rozsiahlymi úlohami lineárneho programovania a pred pár rokmi bola pridaná funkcionálna s možnosťou riešenia úloh s kvadratickými obmedzeniami. CPLEX obsahuje modelovaciu vrstvu Concert, ktorá je podporovaná vo viacerých svetovo rozšírených modelovacích systémoch, ako sú AIMMS, AMPL alebo GAMS.

IV. *Knihovne programovacích jazykov* - ako špeciálny druh optimalizačných programov uvedieme špecifické knihovne rôznych programovacích jazykov. Početnosť ich nadstavieb a rozšírení je v súčasnosti veľká. Prakticky pre každý známy programovací jazyk existuje optimalizačná knihovňa vyvinutá buď profesionálnymi developermi a firmami, alebo vedcami pohybujúcimi sa v oblasti operačného výskumu. Z týchto knihovní spomenieme napríklad CBC, SCIP, SolvOpt, BPMPD, HSL a Zipl.

V. *LINDO* - plynule sa dostávame ku komplexnej aplikácii riešiacej optimalizačné úlohy s názvom LINDO. Názov programu vznikol z anglických slov Linear Interactive and Discrete Optimizer – LINDO. Dokáže riešiť úlohy až s desaťtisícami premenných a obmedzujúcich podmienok, čo je jeho hlavnou výhodou oproti ostatným nespoplatneným optimalizačným aplikáciám. Tento systém je priamo cielený na úlohy lineárneho programovania s možnosťou doplnenia o celočíselné podmienky. Veľkým benefitom programu LINDO je rozlíšenie zadávania úloh s malým a veľkým rozsahom. Pri malých úlohách má užívateľ štandardnú

možnosť zadávania číselných hodnôt priamo do okna aplikácie, pri väčších úlohách LINDO spolupracuje s externými procedúrami a funkciami, ktoré vygenerujú požadovaný dátový súbor s potrebným formátom. Pri zadávaní vstupných hodnôt je nutné dodržiavať syntaktické pravidlá, ktoré sú ale intuitívne a nenáročné aj pre nového užívateľa. Rovnako tento program obsahuje aj špeciálne modelovacie príkazy, ako napríklad FREE, SLB, SUB, ktoré prevažne určujú charakter premenných, vyskytujúcich sa v modeli. Riešenie, kompilovanie a ďalšie hlavné príkazy sú umiestnené a koncipované veľmi podobne ako v iných bežných aplikáciách rôzneho charakteru. Ďalšou zaujímavou funkcionalitou tohto programu je tvorba rôznych reportov a práca s výstupmi.

VI. *Ostatné* - patrí tu program MOSEK, ktorý sa vysporiada s lineárnymi, kvadratickými, konvexnými, ale aj celočíselne zmiešanými optimalizačnými úlohami. S celočíselnými úlohami si poradí aj aplikácia s názvom Symphony, ktorá je navyše pod licenciou voľne šíriteľná. Podobným produktom je aj WHIZARD, ktorý je často označovaný aj ako C-WHIZ. Rozšíreným optimalizačným balíkom je aj program FICO, ktorý tiež rieši úlohy lineárneho a celočíselného programovania. Do tejto skupiny by sme mohli zaradiť ešte množstvo ďalších produktov, z nášho pohľadu ale prinášame prehľad tých najpoužívanejších.

Ďalšími nástrojmi, ktorými sa budeme zaoberať, už nie sú softwarové optimalizačné balíky, ale samostatné modelovacie jazyky. Tieto modelovacie jazyky poskytujú podporu pre riešenie optimalizačných úloh a pomocou svojej syntaxe dokážu namodelovať štruktúru riešeného problému. Početnosť jazykov, ktoré dokážu štrukturovane modelovať úlohy lineárneho programovania, je v súčasnosti už relatívne vysoká. Líšia sa prevažne v používanej hierarchii jazyka, ale aj rozsahom využitia. Prvé zoznámenie s každým jazykom je pre každého užívateľa určite náročnejšie ako používať hotový softwarový produkt, no jeho využívanie so sebou zase prináša väčšiu flexibilitu.

I. *AIMMS* - veľmi populárnym modelovacím systémom je systém AIMMS. Umožňuje vytvoriť komplexné rozhodnutia veľmi rýchlo a spoľahlivo tým, že nájde optimálne riešenie úlohy, ktoré následne porovná so všetkými inými možnými variantami. Obsahuje svoj vlastný jazyk, ktorým sa dajú jednotlivé súčasti aplikácie naprogramovať. Tento program tak poskytuje širokú škálu možností riešenia a je vhodným optimalizačným nástrojom pre firmy, ale aj súkromné osoby, pohybujúce sa v oblasti disciplíny lineárneho programovania.

II. *GAMS* - ďalším zástupcom, ktorého z tejto skupiny spomenieme, je systém GAMS, ktorý predstavuje obecný algebraický modelovací systém. Tento systém so svojim jazykom predstavuje všeobecný algebraický nástroj, ktorý si poradí so širokým záberom problémov z oblasti viacerých vedných disciplín a je veľmi frekventovane využívaný aj pri úlohách spojených s optimalizáciou.

III. *LINGO* - v istom zmysle podobným produktom aplikácie LINDO je modelovací jazyk LINGO. Má tých istých tvorcov a jeho hlavným účelom je tiež riešenie lineárnych rovníc a nerovnic. Avšak všetka práca prebieha pomocou vlastného modelovacieho jazyka, čo samozrejme so sebou prináša svoje výhody aj nevýhody. Bežný užívateľ sa tak musí so vstupnými formátmi programu a aj jeho celým princípom zoznamovať o niečo dlhšie, ale zároveň mu to prináša so sebou väčšie možnosti ovplyvnenia samotného výpočtu.

IV. *Ostatné* - používanými modelovacími jazykmi v oblasti lineárneho programovania sú aj AMPL, APMonitor, MOSEL, MPL alebo PLAM. Každý z nich je istým spôsobom špecifický, no pre klasické optimalizačné úlohy sú využiteľné všetky. Pre problémy spojené s rozhodovacími procesmi je užitočné modelovacie prostredie s názvom EZMOD.

Všetky spomenuté aplikácie, spolu s modelovacími jazykmi, boli založené na lokálnom využití a bežali samostatne na osobnom počítači užívateľa. Internetové pripojenie využívajú tieto programy iba na svoje aktualizácie a prístup k niektorým programovým novinkám. Existujú však aplikácie, ktoré sú dostupné prostredníctvom webového rozhrania kdekoľvek na svete a k ich používaniu stačí iba internetový prehliadač. Počet týchto aplikácií je rádovo niekoľkokrát nižší ako pri desktopových aplikáciách, určite však majú na poli riešiteľov úloh lineárneho programovania svoje miesto. Ich stručný prehľad prinesieme v nasledujúcej časti.

3 RIEŠITELE OPTIMALIZAČNÝCH ÚLOH V PROSTREDÍ INTERNETU

Počet aplikácií, ktoré by boli voľne dostupné na internete a riešili problémy lineárneho programovania priamo v prostredí internetového prehliadača pomocou webových programovacích jazykov, je veľmi nízky. Hlavnými príčinami tohto malého výskytu sú zložitejšie procedúry tvorby samotného plne funkčného programu vo webových programovacích jazykoch a spoplatnenie týchto programov. Rovnako nemôžu dosiahnuť programy vytvorené pre online aplikáciu porovnateľné výsledky s bežnými desktopovými programami. Neumožňuje to totiž charakter samotných programovacích jazykov, vlastnosti vytvorenej aplikácie a ani internetová sieť a kapacity servera. Spoločnosti, ktoré daný software vyvíjajú, ho rovnako nesprístupňujú vo väčšine prípadov zadarmo a forma spoplatnenia priamo na internetovej sieti by bola veľmi zložitá. Aj napriek všetkým spomínaným nevýhodám majú webové riešiteľé úloh lineárneho programovania aj svoje výhody. Hlavnou výhodou týchto aplikácií je ich dostupnosť. Pripojenie k internetu a funkčný internetový prehliadač je dnes vo vyspelých krajinách sveta skoro samozrejmosťou, takže webové aplikácie poskytujú jednoduchú možnosť priameho riešenia bez ďalšej práce. Spomenieme si iba svetovo známe webové riešiteľé úloh lineárneho programovania. Existujú aj ďalšie webové systémy využívané v rôznych krajinách, avšak v týchto prípadoch ide o prostredia vytvorené prevažne pre univerzitné alebo vedecké účely.

I. *AP Software* - ako prvého zástupcu tejto skupiny uvedieme program, ktorý je schopný riešiť dvojrozmerný optimalizačný problém. Názov tejto aplikácie je uvádzaný ako AP Software a je dostupný na internetovej adrese <http://www.applicationprogram.net/>. Tento program má viacero výpočtových modulov. Patrí tu napríklad problém rezania surovín a okružný dopravný problém. Kvalita a rýchlosť výpočtu určite nemôže konkurovať iným profesionálnym aplikáciám lineárneho programovania. Jeho využívanie je však bezplatné a voľne dostupné. Preto je toto prostredie určite vhodné pre úlohy malého charakteru, alebo ako učebná pomôcka.

II. *Simplex Method Tool* - ďalšou skupinou programov, ktoré spomenieme, sú riešiteľé využívajúce simplexovú metódu. Tieto riešiteľé si dokážu poradiť s menšími úlohami

lineárneho programovania a boli vytvorené prevažne pre vzdelávacie účely. Prvým z nich je Simplex Method Tool, ktorý požaduje zadanie vstupov vo forme vlastného miniatúrneho modelovacieho jazyka. Rovnako obsahuje pár riešených príkladov, návod a vykresľovanie simplexových tabuliek. Na adrese <http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html> je dostupný zdarma.

III. *Simplex Applet* - na veľmi podobnom princípe funguje aj Simplex Applet dostupný na internetových stránkach <http://vinci.inesc.pt/lp/>. Používa tiež veľmi podobný modelovací jazyk a poskytuje podobnú možnosť riešenia.

IV. *PHPSimplex* - najprepracovanejšou zo skupiny simplexových riešiteľov je aplikácia s názvom PHPSimplex. Tento nástroj poskytuje najkomplexnejšiu možnosť riešenia úloh simplexovou metódou, má najprehľadnejšie rozhranie a rovnako dokáže riešiť miniatúrne úlohy aj grafickou metódou. Obsahuje aj užívateľský manuál a vedecké texty k tejto problematike. Je dostupný na stránke <http://www.phpsimplex.com>.

V. *NEOS* - na záver spomenieme multifunkčné optimalizačné rozhranie, ktoré v sebe zahŕňa veľký počet riešiteľov úloh lineárneho a nelineárneho programovania. Názov tohto rozhrania je NEOS a je dostupné na internetových stránkach <http://neos-server.org/neos/>. Užívateľ na tomto rozhraní definuje problém a všetky ďalšie informácie požadované riešiteľom sú doplnené automaticky. Tieto riešiteľe nie je možné zo serveru sťahovať, avšak na webovom rozhraní je ich možno použiť a získať požadované výstupy. Vkladané úlohy musia byť ale zadávané v presne stanovených formátoch, ktoré sú rôzneho charakteru v závislosti na autorovi daného riešiteľa. Hlavné ťažisko teda stojí na správnej formulácii problému a následnej úprave do správneho formátu vstupných dát. Väčšina riešiteľov obsahuje odkazy na stránky autorov programov, kde je možné sa o daných formátoch dozvedieť viac. Následne po zadaní vstupných dát v správnom formáte je táto požiadavka odoslaná na NEOS server, kde je spracovaná a výsledky sú doručené prevažne vo forme emailu, alebo v zobrazovacom okne priamo na rozhraní. Do prostredia môže užívateľ zadať viacero úloh naraz, avšak tieto úlohy sú pre daného užívateľa spracovávané postupne. Niektoré riešiteľe majú fixne stanovený maximálny počet výpočtových iterácií, v iných prípadoch je na tomto serveri nastavený maximálny čas výpočtu úlohy na 8 hodín pre lineárne a nelineárne úlohy a 48 hodín pre celočíselné úlohy. Riešiteľe sú rozdelené do skupín podľa charakteru úloh, ktoré dokážu riešiť. Toto rozhranie si tak dokáže poradiť s úlohami známymi ako úlohy kombinatorickej optimalizácie a celočíselného programovania, rovnako dokáže riešiť doplnňovacie úlohy, úlohy globálnej optimalizácie, úlohy lineárneho programovania, úlohy zmiešaného celočíselného programovania a mnoho ďalších. Niektoré problémy môžu byť riešené viacerými rôznymi riešiteľmi využívajúcimi pre svoje výpočty iné algoritmy a metódy, niektoré poskytujú zasa iba výber jedného riešiteľa. Rozdiel v týchto riešiteľoch spočíva pre užívateľa prakticky iba vo formáte vstupných dát. Tých je značné množstvo a siahajú od formátov AMPL, cez formáty TSP, GAMS, MPS, QPS až po SDPA. Ich pochopenie niekedy vyžaduje dôkladné štúdium stránok týchto produktov a riešiteľov, avšak výsledky získané ich správnym použitím a celkovo serverom NEOS sú spoľahlivé a úplne zdarma. Preto je server NEOS určite vhodnou voľbou tak pre firmy, ako aj súkromné osoby zaoberajúce sa problémami lineárneho, ale aj nelineárneho programovania.

4 ZÁVER

Uviedli sme najpoužívanejšie a najznámejšie aplikácie, ktoré riešia úlohy lineárneho programovania. Týchto programov je relatívne veľký počet a ich hlavný rozdiel spočíva hlavne na lokálnej alebo webovej architektúre. Lokálne aplikácie majú určite lepšiu výkonnosť a developerské firmy ich jednoznačne v tomto odvetví uprednostňujú. Naopak webové aplikácie sú zriedkavejšie a sú tvorené prevažne ako výukový prostriedok. Za jednotné prostredie pre riešenie úloh lineárneho programovania (a nielen ich), dostupné na internete, môžeme považovať iba server NEOS. Ak by sme si chceli zodpovedať otázku, ktorý zo spomenutých produktov je najlepší, tak túto otázku nie je možné zodpovedať ani partikulárne v rámci lokálnych aplikácií, nie to už globálne. V rámci online riešení jednoznačne vyhráva NEOS (Network-Enable Optimization Server), ktorý so svojim serverovým vybavením poskytuje pohodlnú možnosť riešenia optimalizačných úloh bez nutnosti inštalácie akéhokoľvek softvéru a bez vyt'azovania vlastnej výpočtovej kapacity počítača. Avšak v segmente „real-time“ webových riešení, ktoré by boli schopné bezprostredne riešiť optimalizačné úlohy, existuje podľa môjho názoru ešte stále veľká medzera, ktorá by mohla byť v budúcnosti vhodným spôsobom doplnená. Či a akým spôsobom sa to niekomu podarí sa možno dozvieme už v najbližších rokoch.

Použitá literatúra

- [1] Jablonský, J. *Operační výzkum - kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. Třetí vydání. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
- [2] More, J. J., Wright, J. S. *Optimization Software Guide*. 1st Edition. Philadelphia: SIAM Publications, 1993. ISBN 0-89871-322-6.
- [3] NEOS - <http://neos-server.org/neos/>.

Kontaktní údaje

Ing. Stanislav Sopko

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: stanislav.sopko@vse.cz

MODEL SLOVENSKEHO HOSPODÁRSKEHO CYKLU

SLOVAK BUSINESS CYCLE MODEL¹

Karol Szomolányi

Abstrakt

V tejto práci kalibrujeme parametre jednoduchého modelu reálneho hospodárskeho cyklu malej otvorenej ekonomiky vzhľadom na pozorovania o slovenské ekonomické fluktuácie. Druhé momenty cyklických zložiek slovenských agregátov viac vyhovujú teoretickému modelu, ak uvažujeme produkčnú funkciu v tvare CES.

KLúčové slová: dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy, model reálneho hospodárskeho cyklu malej otvorenej ekonomiky, slovenská ekonomika

Abstract

In the paper we calibrate the simple closed real business cycle open economy model parameters with respect on the observed Slovak economic fluctuations. The second moments of the Slovak aggregates better fit the theoretical model, if we consider the CES production function.

Keywords: dynamic stochastic general equilibrium model, small open economy real business cycle model, Slovak economy

1 ÚVOD

V našom nedávnom výskume sme uviedli, že napriek tomu, že slovenská ekonomika je rozvíjajúca, charakteristika jej pozorovaného hospodárskeho cyklu zodpovedá viac malej otvorenej rozvinutej ekonomike: spotreba je menej volatilná, obchodná bilancia a bežný účet platobnej bilancie sú slabo proticyklické (pozri Szomolányi; 2013) a vládne nákupy sú proticyklické. Tiež sme zamietli dopad úrokových šokov a nedôveryhodnosti hospodárskej politiky na slovenský krátkodobý ekonomický prejav, ktorý podľa Uribeho (2013) má významný dopad na hospodárske cykly v rozvíjajúcich a chudobných ekonomikách (pozri Szomolányi, Lukáčik a Lukáčiková, 2013b).

Preto pre analýzu slovenského krátkodobého ekonomického prejavu v tejto práci využívame Mendozov (1991) model reálneho hospodárskeho cyklu malej otvorenej ekonomiky, ktorý upravili Schmittová-Gorhéová a Uribe (2003) a Uribe (2013). Ak sme uvažovali Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu v pôvodnom modelovom rámci s priemerným slovenským podielom práce na HDP, ktorý sme odhadli využitím údajov Szomolányiho Lukáčika a Lukáčikovej (2013a) sme nedokázali uspokojivo vysvetliť druhé momenty cyklických zložiek vybraných slovenských premenných. Preto sme sa rozhodli model zmeniť a namiesto Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie uvažujeme CES produkčnú funkciu.

V analýze využívame dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy. Smer analogického ekonomického skúmania vymedzili Kydland a Prescott (1982). Na Slovensku sa

¹ Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA 1/0595/11 "Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód".

modelmi všeobecnej rovnováhy zaoberala napríklad Lukáčiková (2004) a (2005), v Čechách Školuda (2013). Dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy skonštruovali a kvantifikovali aj Horvát, König a Ostrihoň (2013a,b). Lukáčik (2011) a Lukáčik a Lukáčiková (2009) sa zaoberali hospodárskymi cyklami.

2 MODEL REÁLNEHO HOSPODÁRSKEHO CYKLU MALEJ OTVORENEJ EKONOMIKY

Uvedieme modelový rámec všeobecnej rovnováhy, opisujúci dynamické interakcie reprezentatívnej domácnosti a firmy. Model vychádza z prác Mendozu (1991), Schmittovej-Gorhéovej a Uribeho (2003) a Uribeho (2013). Náš prínos spočíva v nahradení Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie CES funkciou. Táto úprava zlepšila vypovedaciu schopnosť modelu v slovenských reáliách.

2.1 Model

Uvažujeme nekonečno identických domácností s GHH preferenciami², ktoré opisuje funkcia užitočnosti v tvare

$$U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{G(c_t, h_t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0 \quad (1)$$

Pritom symbolom E_0 označujeme operátor očakávaní domácnosti vzhľadom na informačnú množinu v období 0 a

$$G(c, h) = c - \frac{h^\omega}{\omega}, \quad \omega > 1$$

kde h je počet odpracovaných hodín, c je spotreba a parameter ω opisuje mzdovú elasticitu ponuky práce.

Rozpočtové ohraňenie reprezentatívnej domácnosti má tvar:

$$d_t = (1 + r_{t-1})d_{t-1} - y_t + c_t + i_t + \frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2 \quad (2)$$

Symbolom d_t označujeme dlhovú pozíciu domácností v období t , úroková miera dlhu je r_{t-1} . Symbolom i_t označujeme hrubé investície, t. j. nákup kapitálovej produkcie. Množstvo kapitálu, ktoré domácnosti vlastnia v období t je k_t . Investovanie je v skutočnosti nákladné. Hovoríme o nákladoch zo zvyšovania kapitálu, ktoré v sebe zahŕňa posledný člen ohraňenia (2) $\frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2$ a platí $\phi > 0$. Náklady zo zvyšovania kapitálu opisujú obmedzenia na svetových finančných trhoch.

Zápis (2) zodpovedá centralizovanému prostrediu, v ktorom uvažujeme, že domácnosti majú príjem z realizácie produkcie firmami, ktoré vlastnia. V každom období $t = 0, 1, \dots$ produkciu y_t vysvetľuje produkčná funkcia v CES tvare:

$$y_t = A_t \left[\alpha (\kappa k_t)^\gamma + \eta (v h_t)^\gamma \right]^\frac{1}{\gamma} \quad (3)$$

Parameter γ opisuje elasticita substitúcie medzi kapitálom a prácou, podiel kapitálu na HDP je α a podiel práce na HDP je η . Parametre κ a v normalizujú vstupy do porovnateľných jednotiek a sú pre analýzu nepodstatné.

² pozri Greenwood, Hercowitz a Huffman (1988) a Mendoza (1991)

Predpokladáme, že výrobné šoky A_t v každom období $t = 1, 2, \dots$ podliehajú autoregresnému procesu v tvare:

$$\ln A_{t+1} = \rho \ln A_t + \zeta \varepsilon_{t+1} \quad (4)$$

Pritom parameter $\rho \in (-1, 1)$ opisujúci autokoreláciu výrobného šoku je nezávislá a náhodne rozdelená premenná (i.i.d.) s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou štandardnou odchýlkou. Čím bližšie je ρ k jednej, tým trvalejší je výrobný šok. Parameter ζ zahrnuje informáciu o štandardnej odchýlke inovácií v technológii. V prostredí malej otvorenej ekonomiky možno náhodné zmeny produktivity interpretovať tiež ako obchodné šoky, ktoré majú podobný dopad ako šoky produktivity.

Pribeh kapitálu opisuje diferenčná rovnica prvého rádu v tvare:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t; \quad \forall t \in \{0, 1, \dots\} \quad (5)$$

kde δ je konštantná miera znehodnotenia kapitálu.

Ak si domácnosť smie požičať nelimitovanú čiastku pri úrokovej miere r_t , čelí tendencii spustiť pyramídovú hru. Domácnosť si môže na financovanie súčasnej spotreby požičať a na financovanie budúcich splátok zvyšovať budúce pôžičky. V takom prípade v každom období $t = 0, 1, \dots$ narastie dlh domácnosti mierou r_t . Aby sme vylúčili možnosti pyramídových hier, predpokladáme, že v rámci pravidiel vstupu na dlhopisové svetové trhy existuje ohraňenie množstva pôžičiek, podľa ktorého súčasná hodnota dlhov musí byť asymptoticky nezáporná, t. j. platí:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t \frac{d_{t+j}}{\prod_{s=0}^j (1 + r_s)} \leq 0 \quad (6)$$

Uribe (2013) ukázal, že rovnovážne riešenie malej otvorenej ekonomiky s jedným medzinárodne obchodovateľným dlhopisom a konštantnou úrokovou mierou, generuje v ustálenom stave nestacionárne premenné: spotrebu, čistý dlh a obchodnú bilanciu.

Dostupná aproximačná metodológia vyžaduje stacionaritu stavových premenných. Preto Schmittová-Gorhéová a Uribe (2003) upravili model o predpoklad dlhovej elasticity úrokovej miery. Uribe (2013) ukázal mnoho ďalších spôsobov, ako vyriešiť problém nestacionárnych stavových premenných. Zároveň ukázal, že rôzne spôsoby úpravy modelu nemenia aproximačné schopnosti modelu, preto sme využili iba predpoklad dlhovej elasticity úrokovej miery.

Predpokladáme, že úroková miera, s ktorou sa stretávajú domácnosti r_t v každom období $t = 0, 1, \dots$, sa zvyšuje so zvyšovaním priemernej úrovne zadlženosti medzi sektormi v krajine. Konkrétne, úroková miera je daná rovnicou v tvare:

$$r_t = r^* + \psi \left(e^{d_t - \bar{d}} - 1 \right) \quad (7)$$

Pritom, symbolom r^* označujeme konštantnú svetovú úrokovú mieru, $\psi > 0$ a \bar{d} sú parametre. Z tvaru (7) vyplýva, že prémie úrokovej miery danej krajiny je rastúcou funkciou čistého dlhu.

2.2 Konkurenčná rovnováha

Pri danej realizácii výrobných šokov (4), množine $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$, začiatočných hodnotách celkovej produktivity faktorov A_0 , dlhu, d_{-1} , kapitálu k_0 a danej svetovej úrokovej miere r^* je konkurenčná rovnováha alokácia $\{d_t, k_{t+1}, c_t, h_t, A_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$, pri ktorej domácnosť maximalizuje svoju funkciu užitočnosti (1) vzhľadom na rozpočtové ohraničenie (2), produkčnú funkciu (3) priebeh kapitálu (5) a podmienku eliminovania pyramídových hier (6) v každom období $t = 0, 1, \dots$

Podmienky prvého rádu sú (2), (6) a

$$\begin{aligned} \left(c_t - \frac{h_t^\omega}{\omega}\right)^{-\sigma} &= \beta \left[1 + r^* + \psi \left(e^{d_{t-1} - \bar{d}} - 1\right)\right] E_t \left[\left(c_{t+1} - \frac{h_{t+1}^\omega}{\omega}\right)^{-\sigma}\right]; \forall t \in \{0, 1, \dots\} \\ h_t^{\omega-1} &= A_t \mu \left[\mu + \lambda \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^\gamma\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}; \forall t \in \{0, 1, \dots\} \\ \left(c_t - \frac{h_t^\omega}{\omega}\right)^{-\sigma} [1 + \phi(k_{t+1} - k_t)] &= \\ &= \beta E_t \left[\left(c_{t+1} - \frac{h_{t+1}^\omega}{\omega}\right)^{-\sigma}\right] \left\{ A_{t+1} \lambda \left[\lambda + \mu \left(\frac{k_{t+1}}{h_{t+1}}\right)^\gamma\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + 1 - \delta + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \right\}; \forall t \in \{0, 1, \dots\} \end{aligned} \quad (8)$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha \kappa^\gamma \\ \mu &= \eta \nu^\gamma \end{aligned}$$

Pri danej konkurenčnej rovnováhe možno rovnovážnu produkciu získať využitím produkčnej funkcie (3), investície využitím (5) a úrokovú mieru využitím predpokladu dlhovej elasticity úrokovej miery (7). Rovnovážnu obchodnú bilanciu možno opísať rovnicou:

$$tb_t = y_t - c_t - i_t - \frac{\phi}{2} (k_{t+1} - k_t)^2; \forall t \in \{0, 1, \dots\} \quad (9)$$

Pritom tb_t je obchodná bilancia v každom období $t = 0, 1, \dots$

Rovnovážny bežný účet platobnej bilancie je

$$ca_t = -r_{t-1} d_{t-1} + tb_t; \forall t \in \{0, 1, \dots\} \quad (10)$$

Alternatívny výraz rovnovážneho bežného účtu platobnej bilancie je

$$ca_t = d_{t-1} - d_t; \forall t \in \{0, 1, \dots\} \quad (11)$$

2.3 Ustálený stav

Pre možnosti kalibrovania modelu potrebujeme definovať deterministický ustálený stav, ktorý opisuje priemernú pozíciu stochastického modelu ekonomiky. Štrukturálne parametre sa kalibrujú vzhľadom na cieľové hodnoty priemerných charakteristík modelu ako podiel práce na HDP, podiel spotreby na HDP alebo podiel obchodnej bilancie na HDP. Navyše sa predpokladá, že v hospodárskom cykle premenné fluktuujú okolo ustáleného stavu.

Deterministický ustálený stav definujeme predpokladom, že štandardná odchýlka výrobného šoku ζ sa rovná 0, normalizujeme hodnotu produkcie stanovením jednotkového celkovej produktivity faktorov, $A = 1$, a všetky endogénne premenné sú v čase konštantné. Keďže premenné v ustálenom stave nezávisia od času, budeme ich označovať bez dolného indexu pre obdobie t . Ustálený stav opisujú rovnice:

$$\begin{aligned}
 1 &= \beta(1+r^*) \\
 \frac{k}{h} &= \left\{ \mu \left\{ \left[\frac{1}{\beta} - (1-\delta) \right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} - \lambda \right\}^{-1} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \\
 h &= \left[\mu \left(\lambda \theta^\gamma + \mu \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{\omega-1}} \\
 y &= \left[\lambda k^\gamma + \mu h^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} \\
 c &= -r^* d + y - \delta k \\
 i &= \delta k \\
 tb &= y - c - i \\
 ca &= -rd + tb
 \end{aligned} \tag{12}$$

Model sme využili na kalibráciu parametrov, ktorými možno vysvetliť cyklické vlastnosti slovenských agregátov.

3 METODOLÓGIA

Porovnaním teoretických predpokladov vyplývajúcich z modelu opísaného v druhej časti s pozorovanými hodnotami druhých momentov cyklických zložiek vybraných slovenských agregátov sme kalibrovali parametre modelu. Ich odhad sme uvádzame v práci Szomolányiho (2013).

Konkurenčná rovnováha opísaná v časti 2.2 je vyjadrená systémom nelineárnych stochastických diferencných rovníc. Analytické riešenie uvedeného systému je nedostupné. Preto sme na výpočet teoretických druhých momentov odchýlok produkcie, spotreby, investícií od ich hodnôt v ustálenom stave a podielov obchodnej bilancie a bežného účtu na produkcii číselne aproximovali dynamickú rovnováhu modelu.

Využili sme algoritmy perturbácie (linearizácie) prvého rádu, ktoré vytvorili a upravili Klein (2000) a Schmittová-Grohéová a Uribe (2003) a (2004). Uribe (2013) vysvetlil princíp metódy. Algoritmy sme upravili o podmienky prvého rádu (8) a rovnice ustáleného stavu (12), ktoré využívajú produkčnú funkciu v tvare CES (3).

Kvantifikácia parametrov dynamického stochastického modelu všeobecnej rovnováhy sa môže realizovať viacerými technikami. My sme využili jednoduchý spôsob – kalibráciu. Úlohou je nájsť také hodnoty parametrov σ , δ , r^* , λ , μ , γ , \bar{d} , ω , \square , ψ , ρ a ζ , aby vypočítané druhé momenty relatívnych odchýlok produkcie, spotreby investícií od ich hodnôt v ustálenom stave a podielov obchodnej bilancie a bežného účtu na produkcii, zodpovedali čo najviac skutočným nameraným hodnotám z tab. 3.4. Parametre sme rozdelili na tri skupiny.

V prvej skupine sú parametre, ktorých hodnoty poznáme z iných odhadov. Sú nimi δ , r^* , γ , a ω .

Hodnotu miery znehodnotenia kapitálu $\delta = 6,63 \%$ sme odhadli podobným spôsobom, ako uvádzame v práci Szomolányiho (2011). Za svetovú úrokovú mieru sme dosadili Mendozov (1991) údaj; $r^* = 4 \%$. Odhad parametra opisujúceho elasticitu substitúcie vstupov $\gamma = 1,423$ sme realizovali v práci Szomolányiho Lukáčika a Lukáčikovej (2013a). Z uvedenej práce tiež vyplýva, že medzi priemerným produktom práce a mzdovou sadzbou je len jeden kointegračný vzťah, ktorým sme vysvetlili dlhodobé správanie miezd a odhadli parametre produkčnej funkcie. Preto predpokladáme, že dopad zmeny mzdovej sadzby na ponuku práce je krátkodobý. Argument pre tento predpoklad je, že vzťah dopadu zmeny miezd na ponuku práce vyplýva z teórie krátkodobého hospodárskeho cyklu. Využitím údajov od Szomolányiho Lukáčika a Lukáčikovej (2013a) sme metódou najmenších štvorcov odhadli krátkodobý vzťah, ktorý vysvetľuje prvé diferencie množstva práce prvými diferenciami priemerných miezd. Z odhadu sme vypočítali hodnotu odhadu parametra $\omega = 28,5$.

V druhej skupine sú parametre, ktoré možno dopočítať z hodnôt iných parametrov. Takým parametrom je rovnovážny čistý dlh \bar{d} . Na jeho výpočet sme využili kombináciu (2) a prvej rovnice z (8), z ktorej vyplýva

$$tb = r^* \bar{d}$$

Vyjadrením \bar{d} získame

$$\bar{d} = \frac{tb}{r^*}$$

Podiel obchodnej bilancie na produkcii poznáme (pozri Szomolányi; 2013), $tb/y = -0,016$. Produkcii v ustálenom stave vypočítame pomocou (12).

V tretej skupine sú zvyšné parametre, ktoré sme kalibrovali. Stanovili sme ich hodnoty, vypočítali sme teoretické druhé momenty a výsledné hodnoty sme porovnali s nameranými hodnotami v tab. 3.4. Následne sme znova stanovili hodnoty parametrov z tretej skupiny a porovnali teoretické hodnoty druhých momentov s nameranými. Tento postup sme opakovali, až kým teoretické druhé momenty čo najviac nezodpovedali skutočným.

4 VÝSLEDKY

Kalibrované hodnoty parametrov sú v tab. 1

Tabuľka 1: Kalibrované hodnoty parametrov

parameter	σ	Δ	r^*	λ	μ	γ
hodnota	1,5	0,0663	0,04	1,7	0,1	-0,426

parameter	\bar{d}	Ω	\square	ψ	ρ	ζ
hodnota	-3,7476	28,5	0,0013	0,000742	0,42	0,027

Zdroj: vlastné výpočty

Vypočítané hodnoty druhých momentov odchýlok produkcie, spotreby, investícií počtu odpracovaných hodín od hodnôt v ustálenom stave a podielov obchodnej bilancie a bežného účtu na produkcii sú v tab. 2. V tabuľke sú tiež empiricky namerané hodnoty od Szomolányiho (2013) využitím údajov z portálu SLOVSTAT (Slovs.) a Svetovej banky (S. b.).

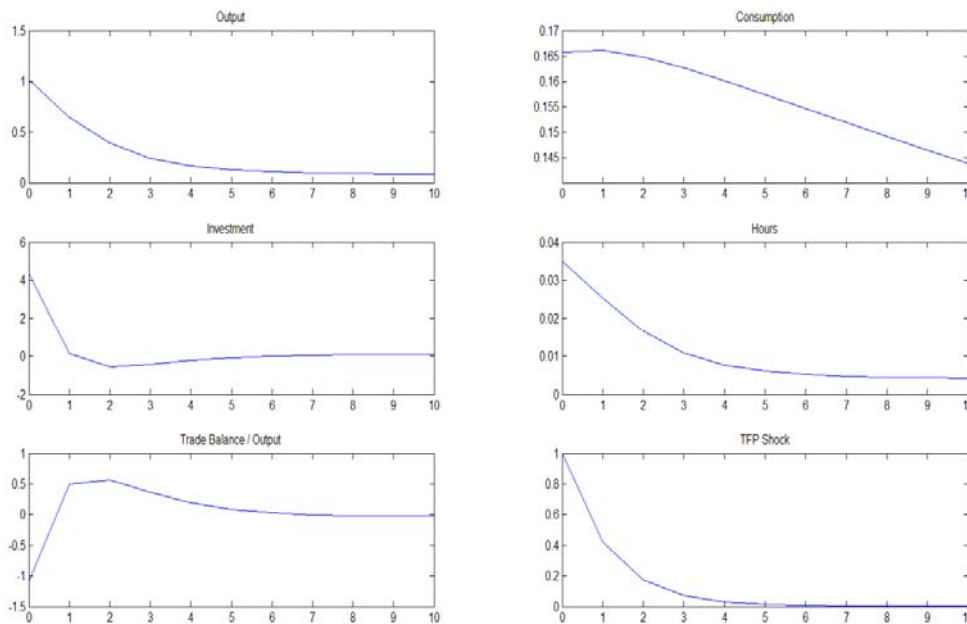
Tabuľka 2: Namerané a vypočítané hodnoty druhých momentov vybr. premenných

premenná	σ_{zt}		$\rho_{zt,zt-1}$		$\rho_{zt,yt}$		σ_{zt}	$\rho_{zt,zt-1}$	$\rho_{zt,yt}$
	S. b.	Slovs.	S. b.	Slovs.	S. b.	Slovs.			
z							model		
y	3,55	3,81	0,46	0,62	1,00	1,00	3,73	0,67	1,00
c	2,43	3,24	0,31	0,68	0,71	0,84	2,45	0,98	0,65
i	13,97	11,88	0,36	0,23	0,66	0,78	11,98	0,06	0,70
tb/y	3,04	2,04	0,22	0,06	-0,20	-0,20	3,76	0,04	-0,26
ca/y		1,76		0,17		-0,36	3,693	0,02	-0,27

Zdroj: vlastné výpočty a Szomolányi (2013)

Z modelových výsledkov vyplýva, že produkcia je volatilnejšia ako spotreba a menej volatilná ako investície. Všetky tieto tri zložky agregovaného dopytu sú procyklické a obchodná bilancia aj bežný účet sú mierne proticyklické. tieto výsledky zodpovedajú nameraným pravidlám. Odhady volatility obchodnej bilancie a bežného účtu sú však mierne nadhodnotené. Vysoká je teoretická hodnota koeficientu autokorelácie spotreby, kým teoretická hodnota koeficientu autokorelácie investícií je nízka.

Na obr. 1 sú funkcie odozvy skúmaných premenných na jednopercenčný šok celkovej produktivity faktorov. Reálny šok vyvolá okamžité zvýšenie procyklickej produkcie, spotreby, investícií a počtu odpracovaných hodín. Proticyklická obchodná bilancia zas reaguje okamžitým poklesom.



Obr. 1: Funkcie odozvy na jednopercenčný šok celkovej produktivity faktorov

5 ZÁVER

Slovenská ekonomika je malá rozvíjajúca a otvorená. Z výsledkov práce Szomolányiho (2013) sme usúdili, že model opísaný v druhej časti najlepšie opíše slovenský hospodársky cyklus. Model ponúkol uspokojivejšie výsledky, ak sme využili produkčnú funkciu v tvare CES (3). Jediným znakom kategorizujúcim ekonomiku SR medzi rozvíjajúce ekonomiky z hľadiska krátkodobého ekonomického prejavu je vysoká ekonomická volatilita a doba trvania oživenia. Vládne nákupy sú nízko volatilné a proticyklické, spotreba je menej

volatilná ako produkcia. Uribe (2013) prisúdil odlišnosti krátkodobého ekonomického prejavu rozvíjajúcich krajín úrokovým šokom, obchodným šokom a nedôveryhodnosti dlhovej politiky. Úrokové šoky sme v období 2001 – 2011 v ekonomike SR vylúčili (pozri Szomolányi, Lukáčik a Lukáčiková, 2013b). Podľa teórie dôveryhodnosti dlhovej politiky má domáca fiškálna politika dopad na rizikovú prémii. Túto teóriu tiež možno vylúčiť v danom období.

Domnievame sa, že podstatnú časť slovenského hospodárskeho cyklu možno vysvetliť obchodnými šokmi. Náhodné zmeny obchodných podmienok majú podobný dopad ako reálne šoky. Veľkú časť šokov celkovej produktivity faktorov v modeli reálneho hospodárskeho cyklu malej otvorenej ekonomiky možno interpretovať ako obchodné šoky. Ďalšou indíciou je, že model reálneho hospodárskeho cyklu malej otvorenej ekonomiky neuspokojivo vysvetlil koeficienty autokorelácie premenných. Je známe, že šoky celkovej produktivity faktorov sú trvalejšie ako obchodné šoky. Uvažujeme, že ak by sa nám podarilo rozlíšiť medzi reálnymi a obchodnými šokmi, model by lepšie vystihol zotrvačnosť daných premenných. Mendoza (1995) prezentoval model, ktorý usiloval o kvantifikáciu významu obchodných šokov, avšak Uribe (2013) sponchybnil časť Mendozovej metodológie. Preto sme Mendozov model nevyužili ani my.

Treba poznamenať, že vypovedacia schopnosť dynamických stochastických modelov všeobecnej rovnováhy, ktoré využívajú aproximáciu ekonomiky v ustálenom stave sa znižuje tým viac, čím je analyzovaná ekonomika nižšie pod ustáleným stavom. Z nášho výskumu (pozri Szomolányi, Lukáčik a Lukáčiková; 2011) však vyplýva, že ekonomika SR je pomerne hlboko pod svojim ustáleným stavom. To je ďalšie možné vysvetlenie neschopnosti modelu reálneho hospodárskeho cyklu správne vysvetliť zotrvačnosť vybraných premenných.

Použitá literatúra

1. GREENWOOD, J. – HERCOWITZ, Z. – HUFFMAN, G. 1988. Investment, Capacity Utilization and the Real Business Cycle. In: American Economic Review, roč. 78, 1988, december, s. 1088-97.
2. HORVÁT, P. – KÖNIG, B. – OSTRIHOŇ, F. 2013a. The impact of the technological progress on the development of the Slovak economy - neoclassical approach. In: Mathematical methods in economics 2013: proceedings of the 31st international conference, Jihlava, 2013.
3. HORVÁT, P. – KÖNIG, B. – OSTRIHOŇ, F. 2013b. The basis for modelling the fiscal shocks' impact on the business environment of Slovakia. In: Trendy v podnikaní = Business trends, Plzeň, 2013.
4. KLEIN, P. 2000. Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. In: Journal of Economic Dynamics and Control, roč. 24, 2000, s. 1405-1423.
5. KYDLAND, F.E. – PRESCOTT, E.C. 1982. Time to Build and Aggregate Fluctuations. In: Econometrica, roč. 50, 1982, č. 6, s. 1345-70.
6. LUKÁČIK, M. 2011. Porovnanie reakcií krajín EMÚ na dopytové šoky s využitím SVAR modelov. In: AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: zborník 14. medzinárodnej vedecká konferencie, Bratislava, 2011, s. 1-5.
7. LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. 2009. Teória obchodných cyklov a prognózovanie. [elektronický zdroj] <http://www.fhi.sk/files/katedry/kove/veda-vyskum/prace/2009/Lukacik-Lukacikova-2009.pdf> [Máj 2013].
8. LUKÁČIKOVÁ, A. 2004. Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. In: Participácia doktorandov na vedeckovýskumnej činnosti: IV. medzinárodná vedecká konferencia doktorandov. Bratislava, 2004, s. 329-334.

9. LUKÁČIKOVÁ, A. 2005. Simulácie zmien parametrov v modeli všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. In: AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: 10. medzinárodná vedecká konferencia, Bratislava, 2005.
10. MENDOZA, E. 1991. Real Business cycles in a small-open economy. In: American Economic Review, roč. 81, 1991, č. 4, s. 797-818.
11. MENDOZA, E. 1995. The Terms of Trade, the Real Exchange Rate, and Economic Fluctuations. In: International Economic Review, roč. 36, 1995, február, s. 101-137.
12. SCHMITTOVÁ-GROHÉOVÁ, S. – URIBE, M. 2003. Closing Small Open Economy Models. In: Journal of International Economics, roč. 61, 2003, október, s. 163-185.
13. SCHMITTOVÁ-GROHÉOVÁ, S. – URIBE, M. 2004. Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-Order Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*. roč. 28, 2004, január, s. 755-75.
14. SURMANOVÁ, K. 2012. Modelling and forecasting of wages: evidence from the Slovak Republic In: Quantitative methods in economics: multiple criteria decision making XVI: proceedings of the international scientific conference, Bratislava, 2012.
15. SZOMOLÁNYI, K. 2011. Odhad miery opotrebenia v ekonomike SR. In: AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach, zborník 14. medzinárodnej vedeckej konferencie, Bratislava, 2011.
16. SZOMOLÁNYI, K. 2013. Hospodárske cykly v slovenskej ekonomike. In: AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach, zborník 15. medzinárodnej vedeckej konferencie, Bratislava, 2013.
17. SZOMOLÁNYI, K. – LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. 2011. The β -convergence of the EU27 countries. In: Mathematical methods in Economics 2011: proceedings of the 29th international conference, Janská Dolina, 2011.
18. SZOMOLÁNYI, K. – LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. 2013a. The Production Function of the Transitive Economy - Case of Slovakia. In: Book of abstracts: 26th European conference on operational research, Roma, 2013.
19. SZOMOLÁNYI, K. – LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. 2013b. Obmedzenia na svetových finančných trhoch a slovenská ekonomika. In: Inproforum 2011: sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference, České Budějovice, 2013.
20. ŠKOLUDA, V. 2013. Comparison of V4 economies using CGE model. In: Mathematical methods in Economics 2011: proceedings of the 31st international conference, Jihlava, 2013.
21. URIBE, M. 2013. Open Economy Macroeconomics. [Online], dostupné: <http://www.columbia.edu/~mu2166> (17. 7. 2013).

Kontaktné údaje

Ing. Karol Szomolányi, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: novak@euba.sk

VÍCEKRITERIÁLNÍ HRA

MULTICRITERIA GAME

Michaela Tichá

Abstrakt

Teorie her nestačí na všechny reálné situace. Nastávají případy, kdy hráči mají více výplatních funkcí a chtějí maximalizovat všechny zároveň. Proto začala být zkoumána teorie vícekriteriálních her. V příspěvku je nastíněn problém jejího řešení. Dále je rozebrán příklad s aplikací, jeho interpretace a možná řešení. Poté je experimentálně řešen příslušným softwarem. Na závěr jsou shrnuty výsledky a jejich využití.

Klíčová slova: teorie her, vícekriteriální hra

Abstract

The game theory is often not sufficient for solving real situations. There are cases when the players have more payoff functions and they want to maximize all of them at the same time. That is why the theory of multicriteria games is studied. In the paper the problem of its solution is presented. Next the example with application is analysed, its interpretation and possible solution. Subsequently it is experimentally solved by software. Finally the results are summarized.

Keywords: Game theory, Multicriteria game

1 ÚVOD

Teorie her se zabývá řadou rozhodovacích situací, v nichž proti sobě stojí dva či více hráčů a každý se snaží maximalizovat svůj zisk. Kromě známých konfliktů, kdy hráči maximalizují jednu výplatní funkci, se také setkáváme se situacemi, kdy hráči rozhodují na základě více kritérií, která chtějí maximalizovat zároveň. Někdy lze výplatní funkce jednoduše sečíst (např. prodává-li firma dva produkty a chce maximalizovat zisk z nich, lze vytvořit jediné kritérium jako součet zisků z jednotlivých produktů), ale někdy to nelze. Proto zde byla aplikována teorie vícekriteriální optimalizace do teorie her a vznikla tak teorie vícekriteriálních her. Ta se zabývá hledáním v určitém smyslu rovnovážných bodů her, kdy alespoň jeden hráč má více než jednu výplatní funkci. Z tohoto důvodu se vícekriteriálním hrám také často říká hry s vektorovou výplatní funkcí.

2 PROBLÉM

Vícekriteriální teorie her se obdobně jako teorie her používá často v mikroekonomii. Mezi nejčastější reálné aplikace patří různý typ konfliktu dvou firem. Více kritérií může vzniknout například díky sporu dvou vedení podniku – jednak managementu a jednak majitelů. Manažeři se snaží o co nejvyšší obraty a prestiž firem, čímž stoupá i jejich prestiž. Naopak majitelé chtějí jen a pouze nejvyšší zisk.

Máme dvě firmy - A a B. Každá vyrábí automobily, ale pouze kvůli subdodávkám pouze v určitém diskrétním množství. Firma A může vyrábět 10 ks, 20 ks, 30 ks nebo 40 ks nového typu vozu. Firma B může vyrábět 5 ks, 10 ks, 20 ks nebo 50 ks. Obě firmy tedy mají

4 strategie. Jedná se o velké firmy, a tak se snaží maximalizovat zároveň obrat i zisk. Manažeři by chtěli co největší obrat, zatímco majitelé chtějí hlavně největší zisk. Obě firmy tedy mají dvě kritéria.

Jde o neantagonistický konflikt, tedy o vícerozměrnou bimaticovou hru. Její zadání je dané dvěma dvourozměrnými maticema, pro jednoduchost uděláme čtyři matice. A_1 představuje zisk první firmy, A_2 představuje obrat první firmy, B_1 představuje zisk druhé firmy a B_2 představuje obrat druhé firmy.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 15 & 2 \\ 11 & 2 & 7 & 14 \\ 4 & 12 & 16 & 1 \\ 7 & 13 & 2 & 13 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 20 & 8 \\ 25 & 10 & 25 & 21 \\ 10 & 20 & 41 & 5 \\ 15 & 37 & 27 & 22 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 & 20 \\ 5 & 22 & 8 & 7 \\ 17 & 12 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 18 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 31 & 38 & 10 & 70 \\ 45 & 70 & 30 & 15 \\ 50 & 30 & 20 & 47 \\ 20 & 28 & 52 & 12 \end{pmatrix}$$

Tato vícekritériální hra se dá řešit několika způsoby, ale najít veškeré rovnovážné body je zatím nevyřešený úkol. Zaměříme se na nejjednodušší způsob, který je snadný jak z hlediska řešení, tak z hlediska interpretace. Jediná nevýhoda je, že požaduje další informaci od hráčů. Řešení je založeno na tom, že hráči přiřadí váhy svým kritériím. Předpokládejme, že v první firmě mají manažeři větší slovo a dohodli se s majiteli, na preferencích obratu a zisku 1:1, tedy každé kritérium má váhu $\frac{1}{2}$. V druhé firmě manažeři takové slovo nemají a zisk má větší váhu $\frac{3}{4}$, zatímco obrat pouze $\frac{1}{4}$.

Nyní tedy pomocí těchto vah jednoduše hru převedeme na jednokritériální tak, že uděláme vážený součet matice obratu a matice zisku jednotlivých firem. Tím sice nezískáme všechny rovnovážné body, ale za předpokladu, že firmy skutečně chtějí přiřadit daným kritériím tuto důležitost, získáme rovnovážný bod odpovídající preferencím hráčů. Máme tedy standardní bimaticovou hru s maticemi $A = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$ a $B = \frac{3}{4}B_1 + \frac{1}{4}B_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 24,5 & 20 & 17,5 & 5 \\ 18 & 6 & 16 & 17,5 \\ 7 & 16 & 28,5 & 3 \\ 11 & 25 & 14,5 & 17,5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 13,75 & 14 & 3,25 & 17,5 \\ 15 & 34 & 13,5 & 3,75 \\ 25,25 & 16,5 & 12,5 & 11,75 \\ 12,5 & 14,5 & 26,5 & 3 \end{pmatrix}$$

Jednoduchá dvouhrací hra lze snadno řešit pomocí nelineárního programu:

$$\max p^T (A + B)q - e^T p - f^T q$$

za podmínek

$$Aq \leq e$$

$$B^T p \leq f$$

$$p \geq 0$$

$$q \geq 0,$$

kde e a f jsou jedničkové vektory příslušných dimenzí, p a q jsou pak vektory pseudopravděpodobností jednotlivých strategií. Pro skutečné pravděpodobnosti je pak ještě třeba je vynormovat, aby jejich součet byl 1.

Takto zadanou úlohu nyní vyřešíme pomocí programu What's best.

3 ŘEŠENÍ

Pomocí doplňku do Excelu What's best od společnosti Lindo byla řešena zadaná nelineární úloha. V primárním nastavení řeší program nelineární program pomocí redukované gradientní metody, což především znamená, že nalezne pouze lokální optimum. Pokud se tedy spustí řešitel na prázdnou úlohu, nalezne nulové řešení, které je lokálním optimem úlohy. To by mimojiné znamenalo, že hra nemá řešení. Víme však, že každá hra má rovnovážný bod ve smíšených strategiích.

Postupným řešením se dospělo k optimu s nulovými proměnnými p_2, p_3, q_4 :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
11	11	25	14,5	17,5							12,5	14,5	26,5	3						17,5	3,75	11,75	3		
12																									
13																									
14																									
15																									
16			38,25	34	20,75	5																			
17			33	40	29,5	17,5																			
18			32,25	32,5	41	3																			
19			23,5	39,5	41	17,5																			
20																									
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									
26																									
27																									
28																									
29																									
30																									
31																									
32																									
33																									
34																									
35																									

Obrazek 1: řešení hry

Tedy

$$p = \begin{pmatrix} 0,0371 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0332 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 0,0057 \\ 0,0266 \\ 0,0187 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dále je znormujeme, abychom měli pravděpodobnosti:

$$p = \begin{pmatrix} 0,5275 \\ 0 \\ 0 \\ 0,4725 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 0,1115 \\ 0,5214 \\ 0,3671 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy máme řešení, a to pravděpodobnosti jednotlivých strategií.

Firma A bude vyrábět 10 ks automobilů s pravděpodobností 52,8% a 40 ks automobilů s pravděpodobností 47,2%. 20 ks ani 30 ks nebude vyrábět.

Zatímco firma B bude vyrábět 5 ks automobilů s pravděpodobností 11,2%, 10 ks s pravděpodobností 52,1% a 20 ks s pravděpodobností 36,7%. 50 ks nebude vyrábět.

Řešení pravděpodobností lze snadno vyřešit generováním náhodného čísla z $U(0,1)$. Podle toho, do kterého intervalu náhodné číslo padne, zvolí jednotlivé firmy své strategie – volbu počtu vyrobených automobilů.

4 ZÁVĚR

Vícekritériální teorie her má rozsáhlé využití. Zejména v mikroekonomii mnohé subjekty často sledují více kritérií. Nejjednodušší a nejpraktičtější řešení je získat dodatečné informace od hráčů, které se týkají vah kritérií. V takovém případě provedeme vážený součet matic a vznikne snadno řešitelná bimaticová hra. Tento problém se následně převede na nelineární program a vyřeší v příslušném softwaru.

Použitá literatura

1. TICHÁ, M.2012. Vícekriteriální hry. Diplomová práce MFF UK.
2. LINDO SYSTEMS. 2011. Formulating SP\Stochastic Programming\Scenario Planning Models in What's Best!.

Kontaktní údaje

RNDr. Ing. Michaela Tichá

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 445

email: xticm11@vse.cz

Článek vznikl s podporou interní grantové agentury, grant č. F4/19/2013.