

Katedra ekonometrie  
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie  
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



**MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ**  
**NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII**  
**A OPERAČNÍM VÝZKUMU**

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

ZBORNÍK

26. – 28. november 2014

26. – 28. listopad 2014

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha  
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava  
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., EU Bratislava  
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha  
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava  
prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., VŠE Praha  
doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

Ing. Jan Fábry, PhD.  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.  
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.  
Ing. Marian Reiff, PhD.  
Ing. Brian König, PhD.

Náklad: 50 ks  
AH 11,51

Kontakt: jablon@vse.cz, brian.konig@euba.sk

Editor: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc. , Ing. Brian König, PhD.  
Web editor: doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,  
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,  
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2014

ISBN: 978-80-225-3985-2

# Obsah

|                                       |                                                                                                                      |     |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Adam Borovička:                       | <a href="#"><u>Mlhavá omezení v modelech vícekritériálního programování</u></a>                                      | 5   |
| Ondřej Čížek:                         | <a href="#"><u>Ekonometrický model nezaměstnanosti v Eurozóně</u></a>                                                | 12  |
| Anastasiya Fesenko:                   | <a href="#"><u>Přehled a analýza optimalizačních systémů a jazyků pro matematické programování</u></a>               | 19  |
| Petr Fiala:                           | <a href="#"><u>Modelování konkurence v revenue managementu</u></a>                                                   | 25  |
| Lenka Fiřtová:                        | <a href="#"><u>Harmonizace testů při malém počtu kotvících položek</u></a>                                           | 31  |
| Lukáš Frýd:                           | <a href="#"><u>Modely dynamické korelace a jejich asymetrické chování</u></a>                                        | 40  |
| Pavel Gežík:                          | <a href="#"><u>Modifikovaný EOQ přístup v cenotvorbe produktů s možností využitia recyklovaného materiálu</u></a>    | 48  |
| Vladimír Holý:                        | <a href="#"><u>Metoda Lasso v časových řadách</u></a>                                                                | 55  |
| Eduard Hozlár:                        | <a href="#"><u>Modelovanie parametrov faktoringu</u></a>                                                             | 67  |
| Michaela Chocholatá:                  | <a href="#"><u>Viacrozmerné modely volatility: prípadová štúdia pre výmenné kurzy EUR/USD, GBP/USD a JPY/USD</u></a> | 73  |
| Lucie Janiczková,<br>Martina Kuncová: | <a href="#"><u>Srovnání výuky projektového řízení na VŠ s ohledem na certifikaci IPMA</u></a>                        | 80  |
| Maria Kobzareva:                      | <a href="#"><u>Analýza vztahů mezi vývojem indexu S&amp;P 500 a makroekonomickými ukazateli</u></a>                  | 86  |
| Brian König:                          | <a href="#"><u>Analýza čistých příjmů krajín V4 v porovnání s krajinami EU</u></a>                                   | 92  |
| Elena Kuchina,<br>Michaela Tichá:     | <a href="#"><u>Analýza vztahu amerického a singapurského dolaru</u></a>                                              | 98  |
| Patrik Kupkovič,<br>Martin Benkovič:  | <a href="#"><u>Teoretický vývoj DSGE modelovania</u></a>                                                             | 116 |
| Martin Lukáčik:                       | <a href="#"><u>Ekonometrická metodológia od všeobecného modelu ku konkrétnemu</u></a>                                | 121 |
| Adriana Lukáčiková:                   | <a href="#"><u>Syntéza ekonometrického a optimalizačného prístupu pri výučbe kvantitatívnych metód</u></a>           | 130 |
| Andrej Mišovič,<br>Ivan Brezina, jr.: | <a href="#"><u>Predikcia odchodu zákazníkov pomocou metód analýzy prežitia</u></a>                                   | 135 |

|                                                  |                                                                                                                                         |     |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Veronika Miřková:                                | <a href="#"><u>Ekonometrický odhad niektorých parametrov CGE modelu</u></a>                                                             | 141 |
| Vladimír Mlynarovič:                             | <a href="#"><u>Analytické systémy pre podporu výberu portfólia</u></a>                                                                  | 146 |
| Juraj Pekár,<br>Ivan Brezina,<br>Zuzana Čičková: | <a href="#"><u>Rovnovážne stratégie účastníkov dodávateľského reťazca</u></a>                                                           | 150 |
| Lenka Přebilová:                                 | <a href="#"><u>Heuristiky pro kapacitní úlohy kurýrní služby</u></a>                                                                    | 160 |
| Marian Reiff:                                    | <a href="#"><u>Modelovanie zásob pomocou Markovových reťazcov</u></a>                                                                   | 169 |
| Nataliya Soldatyuk:                              | <a href="#"><u>Řešení úloh optimalizace v prostředí Matlabu</u></a>                                                                     | 175 |
| Stanislav Sopko:                                 | <a href="#"><u>Optimalizácia stratégie športového stávkovania s využitím algoritmu najbližšieho suseda a genetických algoritmov</u></a> | 181 |
| Kvetoslava Surmanová:                            | <a href="#"><u>Priame zahraničné investície: prehľad hlavných teoretických prístupov</u></a>                                            | 187 |
| Karol Szomolányi:                                | <a href="#"><u>Normalizovaná produkčná funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie vstupov</u></a>                                    | 192 |

# MLHAVÁ OMEZENÍ V MODELECH VÍCEKRITERIÁLNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

## VAGUE CONSTRAINTS IN MULTIPLE OBJECTIVE PROGRAMMING MODELS

*Adam Borovička*

### Abstrakt

Článek pojednává o vyjádření přibližných, mlhavých (fuzzy) omezení, respektive o řešení modelů vícekriteriálního programování s takto specifikovanými podmínkami. Mlhavá omezení jsou vyjádřena pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel, čímž je také umožněna transformace fuzzy modelu do striktní podoby. Koncept řešení fuzzy vícekriteriálního matematického modelu je založen na Bellmanově principu optimality. Problematika mlhavých omezení je ilustrována na zjednodušené rozhodovací situaci z oblasti kapitálového trhu.

**Klíčová slova:** *mlhavé (fuzzy) omezení, podílový fond, trojúhelníkové fuzzy číslo*

### Abstract

The article deals with an expression of approximate, vague (fuzzy) constraints, or a solution of multiple objective programming models with such specified conditions. Fuzzy constraints are presented via triangular fuzzy numbers, whereby the transformation of fuzzy model to a strict form is also enabled. The concept of a solution of fuzzy multiple objective mathematical model is based on Bellman's optimality principle. The questions of fuzzy constraints are illustrated at simplified decision making situation in the capital market.

**Keywords:** *triangular fuzzy number, unit trust, vague (fuzzy) constraint*

## 1 ÚVOD

V modelech vícekriteriálního programování se standardně setkáváme s omezeními (podmínkami) ve striktním tvaru, tedy podmínky jsou typu  $\leq$ ,  $\geq$  či  $=$ . Takto přesně zadaná „rovnicová“ a „nerovnicová“ omezení nemusí být schopna přesného vyjádření popisované situace. Reálný rozhodovací problém může vyžadovat pouze přibližná vyjádření alespoň některých omezení. Jinými slovy, levá strana omezující podmínky není ve striktním relačním vztahu se stranou pravou, podmínka platí s určitou tolerancí. Takovou podmínku můžeme nazvat *mlhavou* či *fuzzy*.

Cílem práce je představit formulaci matematického modelu vícekriteriálního programování s mlhavými podmínkami s následnou transformací do striktní podoby umožňující jeho řešení. K vyjádření mlhavých omezení je využit koncept trojúhelníkových fuzzy čísel. Model je řešen na základě Bellmanova principu optimality. Využitelnost konceptů je demonstrována na ilustrativním příkladu z prostředí kapitálového trhu.

## 2 MLHAVÁ OMEZENÍ

Nejdříve si vyjádříme „klasická“ omezení, která jsou uvedena ve striktní relaci. Můžeme zapsat

$$f(\mathbf{x}) R b,$$

kde  $f(\mathbf{x})$  je funkce  $n$  proměnných vektoru  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tvořící levou stranu omezení,  $b$  je pravá strana omezení a  $R$  je jedno z relačních znamének  $\leq, \geq, =$ . Všechna takto definovaná omezení tvoří striktní množinu přípustných řešení  $X$ .

Omezení modelu však mohou být vyjádřena i pouze přibližně, tedy jejich relace platí s určitou tolerancí. Formálně můžeme mlhavé (fuzzy) omezení zapsat

$$f(\mathbf{x}) \tilde{R} b,$$

kde  $\tilde{R}$  je jedno z relačních znamének  $\lesssim, \gtrsim, \cong$ , čímž je vyjádřena pouze přibližná platnost příslušného omezení. Vlastně můžeme říci, že počítáme s určitou tolerancí při splnění těchto omezení, což lze striktně vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\leq b + b^* \\ f(\mathbf{x}) &\geq b - b' \\ f(\mathbf{x}) &\geq b - b^d, \\ f(\mathbf{x}) &\leq b + b^h \end{aligned}$$

kde  $b^*$  je tolerance k fuzzy omezení typu „ $\lesssim$ “,  $b'$  vyjadřuje toleranci k mlhavému omezení typu „ $\gtrsim$ “ a  $b^d$ , resp.  $b^h$  vytyčují toleranční pásmo k přibližnému omezení typu „ $\cong$ “. Pokud takto vyjádříme omezení, je jedno, na jaké úrovni v rámci tolerančního pásma je relace splněna. Z praktického hlediska je ale mnohdy žádoucí, aby byla splněna podmínka s pravou stranou  $b$ , případně v rámci tolerančního pásma, a to čím dále od hodnoty  $b$  v rámci tolerančního intervalu, tím hůře. Tuto skutečnost lze vyjádřit převodem mlhavého omezení na fuzzy množinu, respektive na trojúhelníkové fuzzy číslo. Funkce příslušnosti  $\mu_o^*$ , resp.  $\mu_o'$  pravostranného, resp. levostranného trojúhelníkového fuzzy čísla pro omezení typu „ $\lesssim$ “, resp. „ $\gtrsim$ “ lze definovat jako

$$\mu_o^*(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & f(\mathbf{x}) \leq b \\ \frac{b+b^*-f(\mathbf{x})}{b^*} & b \leq f(\mathbf{x}) \leq b+b^* \\ 0 & f(\mathbf{x}) \geq b+b^* \end{cases} \quad \mu_o'(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & f(\mathbf{x}) \geq b \\ \frac{f(\mathbf{x})-b+b'}{b'} & b-b' \leq f(\mathbf{x}) \leq b \\ 0 & f(\mathbf{x}) \leq b-b' \end{cases}$$

Pro mlhavé omezení typu „ $\cong$ “ je definováno „klasické“ trojúhelníkové fuzzy číslo s následující funkcí příslušnosti  $\mu_o^{dh}$

$$\mu_o^{dh}(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & f(\mathbf{x}) \leq b-b^d \\ \frac{f(\mathbf{x})+b^d-b}{b^d} & b-b^d \leq f(\mathbf{x}) \leq b \\ \frac{b^h+b-f(\mathbf{x})}{b^h} & b \leq f(\mathbf{x}) \leq b+b^h \\ 0 & f(\mathbf{x}) \geq b+b^h \end{cases}$$

Pokud jsou mlhavá omezení vyjádřena prostřednictvím fuzzy množin, respektive fuzzy čísel, fuzzy matematický model můžeme řešit prostřednictvím Bellmanova principu optimality.

## 2.1 Bellmanův princip optimality

Nechť máme vícekritériální matematický model, kde je možné nalézt některá omezení pouze v „přibližném stavu“, tedy jejich relační znaménka neplatí striktně, spíše s nějakou tolerancí. K řešení takového problému využijeme Bellmanův princip optimality (Bellman a Zadeh, 1970).

Krom *fuzzy omezení*, které bylo specifikováno výše jakožto takové omezení, které je vyjádřeno pouze přibližně, tedy jeho relační znaménko platí pouze přibližně, s určitou tolerancí, musíme definovat ještě další pojem, a to fuzzy cíl.

*Fuzzy cíl* je vlastně účelová funkce vyjádřená jako fuzzy omezení, kde přibližnost relace vytyčují její extrémální hodnoty. Pak mlhavé omezení opisující nabývané hodnoty minimalizační  $f^{\min}(\mathbf{x})$ , resp. maximalizační účelové funkce  $f^{\max}(\mathbf{x})$  vyjádříme pomocí pravostranného, resp. levostranného trojúhelníkového fuzzy čísla s funkcí příslušnosti  $\mu_C^{\min}$ , resp.  $\mu_C^{\max}$

$$\mu_C^{\min}(f^{\min}(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & f^{\min}(\mathbf{x}) \leq f_{\min}^d \\ \frac{f_{\min}^h - f^{\min}(\mathbf{x})}{f_{\min}^h - f_{\min}^d} & f_{\min}^d \leq f^{\min}(\mathbf{x}) \leq f_{\min}^h \\ 0 & f^{\min}(\mathbf{x}) \geq f_{\min}^h \end{cases},$$

$$\mu_C^{\max}(f^{\max}(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & f^{\max}(\mathbf{x}) \geq f_{\max}^h \\ \frac{f^{\max}(\mathbf{x}) - f_{\max}^d}{f_{\max}^h - f_{\max}^d} & f_{\max}^d \leq f^{\max}(\mathbf{x}) \leq f_{\max}^h \\ 0 & f^{\max}(\mathbf{x}) \leq f_{\max}^d \end{cases},$$

kde  $f_{\min}^d$  a  $f_{\min}^h$ , resp.  $f_{\max}^d$  a  $f_{\max}^h$  je minimum a maximum minimalizační účelové funkce  $f^{\min}(\mathbf{x})$ , resp. maximalizační účelové funkce  $f^{\max}(\mathbf{x})$  na striktní omezené množně přípustných řešení  $X$ .

Obecně lze vyjádřit model s  $k$  fuzzy cíli popsané mlhavou množinou  $C_j$  ( $j=1,2,\dots,k$ ) a  $m$  fuzzy omezeními popsanými mlhavou množinou  $O_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ), striktně zadaná omezení vytyčující množinu  $X$ . Cíle a omezení se tímto způsobem vlastně dostávají na stejnou úroveň, plní v modelu stejnou úlohu. Každému  $j$ -tému fuzzy cíli odpovídá funkce příslušnosti  $\mu_{C_j}(\mathbf{x})$ , každému  $i$ -tému fuzzy omezení pak  $\mu_{O_i}(\mathbf{x})$ .

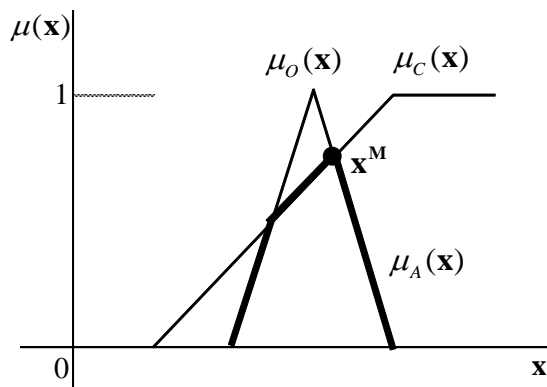
Fuzzy rozhodnutí je definováno jako fuzzy množina, která vznikne z průniku fuzzy cílů a fuzzy omezení. S přihlédnutím na vytyčenou přípustnost řešení striktní množinou  $X$  můžeme označit fuzzy rozhodnutí jako mlhavou množinu  $A$

$$A = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k \cap O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_m \cap X.$$

Mlhavá množina  $A$  pak bude mít funkci příslušnosti danou následující operací

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \mu_{C_1}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{C_2}(\mathbf{x}) \wedge \dots \wedge \mu_{C_k}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{O_1}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{O_2}(\mathbf{x}) \wedge \dots \wedge \mu_{O_m}(\mathbf{x}) = \min_{i,j} \{ \mu_{C_j}(\mathbf{x}), \mu_{O_i}(\mathbf{x}) \}.$$

Graficky lze zjednodušeně pro jeden fuzzy cíl a pro jedno fuzzy omezení znázornit fuzzy rozhodnutí následujícím způsobem (Obrázek 1).



**Obrázek 1:** Ilustrace geneze fuzzy rozhodnutí

Maximalizační rozhodnutí pak můžeme definovat jako

$$\mu_A(\mathbf{x}^M) = \begin{cases} \max \mu_A(\mathbf{x}) & x \in X \\ 0 & x \notin X \end{cases}.$$

Pokud má funkce  $\mu_A(\mathbf{x})$  jedno unikátní maximum  $\mathbf{x}^M$ , pak lze toto řešení (rozhodnutí) klasifikovat jako striktní, určité, které reprezentuje všechny cíle a omezení s největším možným stupněm příslušnosti. Z provedené analýzy je zřejmé, že výsledné řešení je získáno na základě operátoru *maximinu*.

Tedy nalézt maximum funkce příslušnosti  $\mu_A(\mathbf{x})$  v problému s fuzzy cíli a fuzzy omezeními lze prostřednictvím doprovodného striktního modelu (Zimmermann, 1978)

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \max \\ \mu_{C_j}(\mathbf{x}) &\geq \alpha \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \mu_{O_i}(\mathbf{x}) &\geq \alpha \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \mathbf{x} &\in X \\ \alpha &\in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

kde  $\mu_A(\mathbf{x}) = \min_{i,j} \{ \mu_{C_j}(\mathbf{x}), \mu_{O_i}(\mathbf{x}) \}$ .

Myšlenku Bellmanova přístupu lze vyjádřit i jinými formulacemi matematického modelu, o kterých se blíže dočteme v (Gupta a Bhattacharjee, 2010, Mohamed, 1997).

V případě lineárních vztahů lze Zimmermannův model řešit simplexovou metodou. V případě nelineárních vztahů musíme přejít k jiným metodám, například gradientním či metodám vnitřního bodu (Pánková, 2009). Pokud bychom model rozšířili o celočíselné proměnné, pak bychom mohli při řešení sáhnout například k metodě větvení a mezí či metodě rezných nadrovin (Lagová a Jablonský, 2009). Vždy tedy záleží na specifikaci proměnných, charakteru přítomných funkcí, hledaného extrému, pak jsme schopni nalézt globální či lokální optimum účelové funkce modelu.

### 3 PRAKTICKÁ APLIKACE

Představme si potenciálního investora, který chce vložit své volné finanční prostředky do otevřených podílových fondů Investiční společnosti České spořitelny. Vybírá fondy ze třech skupin – *smíšené, dluhopisové, akciové*. Všechny podílové fondy jsou hodnoceny z pohledu třech kritérií – *výnos, riziko, náklady*. Výnos je měřen jako průměrný měsíční v období od



roku 2010 do roku 2014. Riziko je stanoveno jako průměrná absolutní odchylka výnosů. Náklady jsou vyjádřeny procentuálně z investované částky, zahrnují poplatky související s investicí do otevřených podílových fondů. Na základě procedury využívající metodu vícekritériálního hodnocení variant byl z každé skupiny vybrán jeden zástupce, který se bude podílet na investičním portfoliu (více viz Borovička, 2014).

Investiční portfolio bude vytvořeno prostřednictvím metody vícekritériálního programování. Nejdříve uvedeme data o vybraných otevřených podílových fondech, Následující tabulka bude ale také obsahovat přiřazení proměnných jednotlivým fondům, které budou vyjadřovat v matematických modelech podíly fondů na investičním portfoliu (Tabulka 1).

**Tabulka 1:** Data o vybraných otevřených podílových fondech

| Proměnná | Podílový fond            | Výnos  | Riziko | Náklady |
|----------|--------------------------|--------|--------|---------|
| $x_1$    | Fond řízených výnosů OPF | 0,04 % | 0,23 % | 2,59 %  |
| $x_2$    | Sporoinvest              | 0,06 % | 0,18 % | 1,05 %  |
| $x_3$    | Global Stocks FF         | 0,90 % | 2,21 % | 6,33 %  |

Nyní si vyjádříme hodnoty všech tří sledovaných kritérií pro celé investiční portfolio. Specifikujeme funkci  $f_1$  vyjadřující výnos portfolia, funkci  $f_2$  pro riziko a konečně  $f_3$  stanovující náklady portfolia. Tedy platí

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 v_i x_i$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 r_i x_i ,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 n_i x_i$$

kde  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) je průměrný měsíční výnos,  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) je riziko a  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) označuje náklady  $i$ -tého podílového fondu,  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) pak vyjadřuje podíl  $i$ -tého podílového fondu na portfoliu.

Investor žádá takové složení portfolia, které mu bude přinášet co možná nejmenší riziko a náklady s tím, že požaduje přibližnou nejnižší hladinu výnosu. Stanovuje průměrný měsíční výnos na hladině 0,4 % s tím, že je ochoten tolerovat i hodnotu o 0,05 % menší. Z hlediska diverzifikace portfolia chce, aby všechny tři fondy na portfoliu participovaly, a to nejméně v podílu 20 % a maximálně 50 %. Popsanou situaci vyjádříme následujícím fuzzy modelem vícekritériálního programování

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 r_i x_i \rightarrow \min \\
& \sum_{i=1}^3 n_i x_i \rightarrow \min \\
& \sum_{i=1}^3 v_i x_i \lesssim 0,4 \\
& \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
& 0,2 \geq x_i \geq 0,5 \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

V duchu Bellmanova principu optimality identifikujeme dva fuzzy cíle týkající se rizika a nákladů portfolia, potažmo jedno mlhavé omezení vyjadřující požadovanou hodnotu výnosu. Pro stanovení funkce příslušnosti  $\mu_{\tilde{f}_2}$ , resp.  $\mu_{\tilde{f}_3}$  jednostranných trojúhelníkových fuzzy čísel opisujících fuzzy cíl rizika, resp. nákladů, jsme využili oba extrémy těchto funkcí nalezených na striktní množině přípustných řešení

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i = 1; 0,2 \leq x_i \leq 0,5, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Mlhavé omezení pro hodnotu výnosu je také popsáno trojúhelníkovým fuzzy číslem s funkcí příslušnosti  $\mu_{\tilde{f}_1}$ . Pak definujeme následující striktní matematický model

$$\begin{aligned}
& \alpha \rightarrow \max \\
& \mu_{\tilde{f}_i} \geq \alpha \quad i = 1, 2, 3 \\
& \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \\
& 0,2 \geq x_i \geq 0,5 \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Výsledné portfolio má následující složení: 20 % *Fond řízených výnosů OPF*, 42,5 % *Sporinvest* a 37,5 % *Global Stocks FF*. Průměrný měsíční výnos investičního portfolia je 0,37 %, riziko je ve výši 0,95 % a náklady 3,34 %.

## 4 ZÁVĚR

Práce pojednává o problematice mlhavých (fuzzy) omezení přítomných v modelech vícekritériálního programování. Je popsána možnost transformace těchto přibližných podmínek modelu do striktních, jednoznačných vyjádření, a s tím související princip řešení takto specifikovaných matematických modelů. Ilustrativní investiční rozhodovací situace dokládá využití a funkčnost popsaných principů v praxi.

### Použitá literatura

1. BELLMANN, R. E., ZADEH, L. A. Decision making in a fuzzy environment. *Management Science*, roč. 17, č. 4, 1970, s. 141-164.
2. BOROVIČKA, A. Fuzzy Multi-Criteria Evaluation Procedure for the Investment Decision Making under Uncertainty. In: *Hradec Economic Days 2014*. Hradec Králové: Gaudeamus, 2014, s. 51–57, ISBN 978-80-7435-369-7.

3. GUPTA, M., BHATTACHARJEE, D. Multi objective problem in fuzzy environment where resources are triangular fuzzy numbers. *European Journal of Scientific Research*, 2010, roč. 46, č. 1, s. 99-106.
4. LAGOVÁ, M., JABLONSKÝ, J. *Lineární modely*. 2. přeprac. vyd. Praha: Oeconomica, 2009, ISBN 978-80-245-1511-3.
5. MOHAMED, R. H. The relationship between goal programming and fuzzy programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, roč. 89, č. 2, s. 215-222.
6. PÁNKOVÁ, V. *Nelineární optimalizace pro ekonomy*. 2. roz. vyd. Praha: Professional Publishing, 2009, ISBN 978-80-86946-95-5.
7. ZIMMERMANN, H. J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, roč. 1, č. 1, s. 45-55.

### **Kontaktní údaje**

Ing. Adam Borovička

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra ekonometrie  
nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67

Tel.: +420 224 09 5447

E-mail: [adam.borovicka@vse.cz](mailto:adam.borovicka@vse.cz)

---

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/58/2014 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze a projektu č. 13-07350S Grantové agentury České republiky.

# EKONOMETRICKÝ MODEL NEZAMĚSTNANOSTI V EUROZÓNĚ

## ECONOMETRIC MODEL OF UNEMPLOYMENT IN THE EUROZONE

*Ondřej Čížek*

### **Abstrakt**

Cílem článku je formulace a ekonometrický odhad makroekonomického modelu, jehož úkolem je poskytnout pochopení základních vztahů v ekonomice Eurozóny. Úroková politika Evropské centrální banky je modelována pomocí Taylorova pravidla. Ekonometrický odhad ukázal, že tento běžný předpoklad není adekvátní, neboť rozhodovací proces centrálních bank je v realitě příliš komplexní na to, aby mohl být popsán jednoduchým (Taylorovým) pravidlem. Výsledek ekonometrického odhadu také ukázal, že úroková politika Evropské centrální banky má pouze velmi omezený vliv na míru nezaměstnanosti v Eurozóně.

***Klíčová slova:** makroekonomické modelování, měnová politika, Taylorovo pravidlo, Phillipsova křivka*

### **Abstract**

The aim of the article is formulation and econometric estimation of a small macroeconomic model, which is intended to provide an understanding of fundamental relationships in economy of the Eurozone. The European Central Bank is assumed to behave according to the Taylor rule. Econometric estimation showed that this common assumption in macroeconomic modeling is not adequate in this case, which raises a question whether or not it is adequate at all as decision making process in central banks is in reality too complex and complicated to be described by a simple (Taylor) rule. The results from econometric estimation also indicated that interest rate policy of the European Central Bank has only a very limited effect on unemployment in the Eurozone.

***Keywords:** macroeconometric modeling, monetary policy, Taylor rule, Phillips curve*

## **1 ÚVOD**

Použitý makroekonomický model jsem vytvořil modifikací modelu Balla (1999), který je všeobecně znám v literatuře zabývající se měnovou politikou. Pozornost je zde zaměřena především na zkoumání vztahu mezi úrokovou politikou centrální banky, reálnou a nominální ekonomikou. Model jsem modifikoval především endogenizací vybraných parametrů s cílem zvýšit schopnost modelu popsat velmi cyklický vývoj makroekonomických veličin pozorovaný ve skutečných datech. Po této modifikaci je tedy model nelineární, nicméně i přesto je možné vyjádřit jej v rámci stavově prostorových modelů, byť s parametry měnícími se v čase, což umožnilo aplikovat Kalmanův filtr koncipovaný pro lineární modely. Výstupy Kalmanova algoritmu jsem vyžil k sestavení věrohodnostní funkce, kterou jsem maximalizoval s cílem odhadu parametrů.

## 2 MODEL

### 2.1 Nezaměstnanost

Formulaci začnu popisem trhu práce, na kterém budu předpokládat pouze dva stavy, a to stav zaměstnaný a nezaměstnaný, přičemž pravděpodobnosti přechodu mezi těmito stavy označím takto:

$q$  ...pravděpodobnost, že zaměstnanec ztratí práci,  
 $p$  ...pravděpodobnost, že nezaměstnaný nalezne práci.

Počet zaměstnaných v následujícím období je určen počtem zaměstnaných ( $Z$ ) a počtem nezaměstnaných ( $N$ ) v předešlém období dle následující rovnice:

$$Z_t = (1 - q) \cdot Z_{t-1} + p \cdot N_{t-1}. \quad (1)$$

Budu-li předpokládat neměnnou velikost celkové pracovní síly  $\Omega$ , která je dána součtem zaměstnaných a nezaměstnaných, vyjádřím s využitím vztahu  $Z_t = \Omega - N_t$  rovnicí (1) pouze pomocí počtu nezaměstnaných  $N_t$ , resp. míry nezaměstnanosti  $u_t \equiv N_t / \Omega$ :

$$u_t = (1 - p - q) \cdot u_{t-1} + q. \quad (2)$$

Snadnými algebraickými úpravami lze odvodit vztah charakterizující stacionární míru nezaměstnanosti:

$$\bar{u} = \frac{q}{p + q}. \quad (3)$$

Odečtením tohoto vztahu od levé a pravé strany rovnice (2) získávám:

$$\hat{u}_t = (1 - p - q) \cdot \hat{u}_{t-1}. \quad (4)$$

přičemž  $\hat{u}_t \equiv u_t - \bar{u}_t$  značí cyklickou složku míry nezaměstnanosti.

Právě uvedený vztah (4) modifikuji tak, že připustím u pravděpodobností přechodu měnící se hodnoty v čase. Navíc provedu stochastickou specifikaci následujícím způsobem:

$$\hat{u}_t = (1 - p_{t-1} - q_{t-1}) \cdot \hat{u}_{t-1} + \eta_t, \quad (5)$$

přičemž symbolem  $\eta_t$  značím i.i.d. náhodnou chybu.

Veličiny  $p_t$ ,  $q_t$  nechám záviset na cyklických fázích nezaměstnanosti a na úrokové politice centrální banky:

$$p_t = p \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \left[ a_u \cdot (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}) + a_r \cdot \hat{r}_t \right] \right\}, \quad (6)$$

$$q_t = q \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \left[ a_u \cdot (u_t - u_{t-1}) + a_r \cdot \hat{r}_t \right] \right\}, \quad (7)$$

kde  $\hat{r}$  značí cyklickou odchylku krátkodobé reálné úrokové sazby.

Proměnné  $\hat{r}_t$ ,  $(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})$  fluktuují kolem nuly, díky čemuž budou pravděpodobnosti přechodu fluktuovat kolem svých průměrných hodnot  $p$ ,  $q$  a míra nezaměstnanosti bude cyklicky kolísat kolem své průměrné hodnoty dané jako  $\bar{u} = q / (p + q)$ . Pokud budu konstantu  $\bar{u}$  chápat jako známou hodnotu (spočtenou pomocí průměru měř nezaměstnanosti), není třeba potom odhadovat oba parametry  $p$  a  $q$ , ale pouze jeden z nich (např. koeficient  $p$ ) s tím, že druhý se poté dopočte ze vztahu  $q = p \cdot \bar{u} / (1 - \bar{u})$ . Druhou z výše uvedených rovnic vyjádřím tedy následovně:

$$q_t = p \cdot \frac{\bar{u}}{1 - \bar{u}} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \left[ a_u \cdot (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}) + a_r \cdot \hat{r}_t \right] \right\}. \quad (8)$$

## 2.2 Inlace

Nyní přejdu k popisu vazby mezi reálnou a nominální ekonomikou. Nahradím-li mezeru produktu odchylkou míry nezaměstnanosti od stacionární úrovně  $\bar{u}$  a budu-li hodnotu  $\bar{u}$  chápat jako přirozenou míru nezaměstnanosti neakcelerující inflaci (NAIRU, Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment), přejde akcelerující<sup>1</sup> Phillipsova křivka použitá Ballem do tvaru:

$$\hat{\pi}_t = \hat{\pi}_{t-1} - b \cdot \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (9)$$

přičemž  $\varepsilon_t$  značí i.i.d. náhodnou chybu a stejně jako Ball nahlížím na proměnnou  $\hat{\pi}_t$  jako na cyklickou odchylku míry inflace od průměrné hodnoty.

Ve svém modelu použiji Phillipsovu křivku ve tvaru:

$$\hat{\pi}_t = b_\pi \cdot \hat{\pi}_{t-1} - b_u \cdot \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (10)$$

přičemž předpokládám  $b_\pi \in [0,1]$ . Pro  $b_\pi = 1$  se uvedený vztah redukuje do podoby akcelerující Phillipsovy křivky (9).

## 2.3 Úroková sazba

Úrokovou politiku centrální banky popíši stejně jako Ball Taylorovým pravidlem. Podobně jako v kapitole o nezaměstnanosti nahradím mezeru produktu odchylkou míry nezaměstnanosti, čímž dostávám Taylorovo pravidlo ve tvaru:

<sup>1</sup> Tento tvar Phillipsovy křivky bývá označován jako „akcelerující“ z toho důvodu, že kdyby se centrální banka pokusila držet míru nezaměstnanosti trvale pod přirozenou úrovní, bylo by tempo růstu inflace dlouhodobě kladné, tj. inflace by v čase rostla.

$$\hat{r}_t = -c_u \cdot \hat{u}_t + c_\pi \cdot \hat{\pi}_t + v_t, \quad (11)$$

přičemž  $\hat{r}_t$  značí cyklickou složku reálné krátkodobé úrokové sazby, kterou definují vztahem  $\hat{r}_t = \hat{i}_t - \hat{\pi}_t$ , kde  $\hat{i}_t$  reprezentuje cyklickou složku čtvrtletní nominální úrokové sazby.

Na rozdíl od přístupu Balla, nebude nyní mým cílem stanovit koeficienty tak, aby byla minimalizována určitá pomocná funkce. Nebudu se tedy zabývat hledáním optimální měnové strategie, ale bude mým cílem zjistit hodnoty koeficientů  $c_u$ ,  $c_\pi$ , které odpovídají skutečné úrokové politice centrální autority.

### 3 DATA

Jedná se o agregovaná data 17-ti členských zemí Evropské unie, ve kterých je zavedeno euro.<sup>2</sup> Data mají charakter čtvrtletních časových řad, přičemž začátek je ve 2. čtvrtletí roku 1995 a konec ve 4. čtvrtletí roku 2008.<sup>3</sup>

Datový soubor se skládá z následujících položek:

- 1) Standardizovaná míra nezaměstnanosti vyjádřena v procentech v rámci seskupení EU17 publikovaná Evropskou centrální bankou, a to v tzv. pevném složení (fixed composition)<sup>4</sup>. Jedná se o čtvrtletní časovou řadu, která byla již sezónně očištěna. Data jsou k dispozici na internetové adrese:  
[http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES\\_KEY=132.STS.Q.I6.S.UNEH.RTT000.4.000](http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES_KEY=132.STS.Q.I6.S.UNEH.RTT000.4.000)
- 2) Míru inflace jsem spočetl jako  $100 \cdot (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}$ , přičemž  $P_t$  značí sezónně očištěnou čtvrtletní časovou řadu deflátoru HDP, který je počítán v rámci seskupení zemí EU17 dle standardu ESA95, a to opět v pevném složení. Protože data mají čtvrtletní periodicitu, jedná se o čtvrtletní míru inflace. Časovou řadu deflátorů HDP publikuje Evropská centrální banka na internetové adrese:  
[http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES\\_KEY=119.ESA.Q.I6.Y.0000.B1QG00.1000.TTTT.D.U.I](http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES_KEY=119.ESA.Q.I6.Y.0000.B1QG00.1000.TTTT.D.U.I)
- 3) Krátkodobá nominální úroková sazba je tříměsíční sazba Euribor vyjádřena v procentech, přičemž úrok není vyjádřen ročně (per annum), ale za 3 měsíce. Jedná se o průměrnou hodnotu úrokové sazby Euribor za dané období. Zdrojem této čtvrtletní časové řady byl systém ARAD České národní banky. Časová řada nebyla zatížena sezónností, nebylo tudíž třeba sezónní složku odstraňovat.

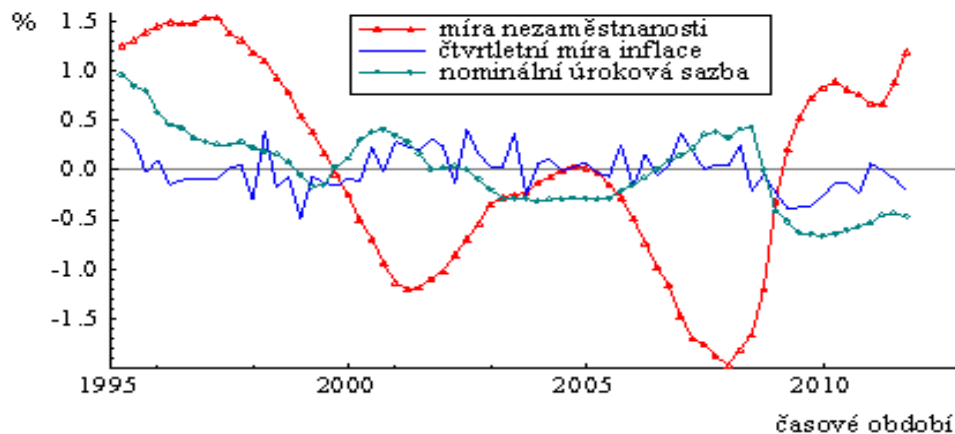
<sup>2</sup> Eurozóna vznikla 1. ledna 1999 a tvořilo ji nejprve 11 následujících zemí Evropské unie: Belgie, Finsko, Francie, Irsko, Itálie, Lucembursko, Německo, Nizozemsko, Portugalsko, Rakousko a Španělsko. Později k eurozóně přistoupily následující země: Řecko (2001), Slovinsko (2007), Kypr a Malta (2008), Slovensko (2009) a Estonsko (2011).

<sup>3</sup> Datový soubor z období let 2009 až 2014 má jiný charakter vlivem hospodářské krize, a proto byl datový soubor zkrácen.

<sup>4</sup> Pevné složení znamená, že celá časová řada obsahuje data za všech 17 zemí, které jsou v současnosti členy eurozóny, a to bez ohledu na to, že některé státy přijaly euro až později.

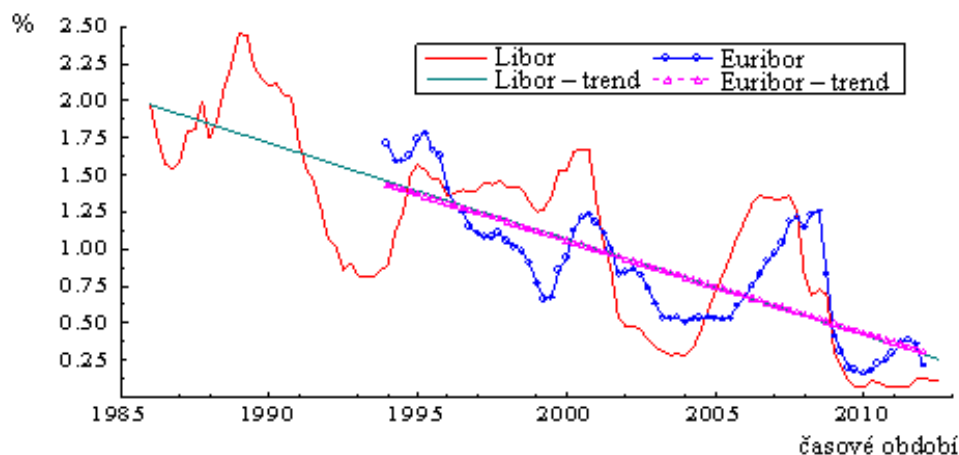
Z časových řad je třeba separovat cyklickou složku, neboť data mají být použita pro odhad parametrů modelu hospodářských cyklů. Časové řady míry nezaměstnanosti a čtvrtletní míry inflace ve sledovaném období cyklicky fluktovaly kolem konstantní hodnoty, ovšem časová řada nominální úrokové sazby nikoli. Uvedenou skutečnost dokumentuje obrázek 1 zobrazující dané veličiny v odchylkách od průměru, které jsou rovny  $\bar{u} = 9.31$ ,  $\bar{\pi} = 0.43$  a  $\bar{i} = 0.83$ .

Obrázek 1  
Časové řady proměnných měřených v odchylkách od průměru



Klesající trend nominální úrokové sazby  $i_t$  je ještě více patrný z obrázku 2, ve kterém kromě čtvrtletní nominální sazby Euribor uvádím také čtvrtletní nominální sazbu Libor<sup>5</sup>, která má delší časovou řadu.

Obrázek 2  
Porovnání sazeb Libor a Euribor a jejich trendové složky



Na obrázku 2 jsem taktéž zobrazil lineární trend obou úrokových sazeb, který jsem odhadl metodou nejmenších čtverců. Lineární trend nelze použít pro predikci do budoucna, neboť

<sup>5</sup> Taktéž v procentech a ve čtvrtletním vyjádření (namísto per annum). Zdrojem této časové řady je Evropská centrální banka, přičemž data jsou k dispozici na následující internetové adrese:  
[http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES\\_KEY=I43.FM.Q.GB.USD.RT.MM.USD3MFSR\\_HSTA](http://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES_KEY=I43.FM.Q.GB.USD.RT.MM.USD3MFSR_HSTA)



v současnosti jsou úrokové sazby tak nízké, že poklesnout dále již prakticky nemohou. Tato skutečnost nicméně ještě neznamená, že je lineární trend špatným popisem trendové složky za sledované období do roku 2011. Protože přímka na obrázku 2 prokládající vývoj sazby Libor od roku 1986 prakticky splývá s přímkou, jež prokládá sazbu Euribor, budu v následujícím textu počítat cyklickou složku nominální úrokové sazby jako odchylku od této přímky.

Hodnoty inflace za sledované období nenaznačují systematický pokles této ekonomické veličiny, a proto budu předpokládat, že systematický pokles nominálních úrokových sazeb pozorovaný na obrázku 2 je způsoben poklesem jejich reálných protějšků. Označím-li rezidua z lineární regrese  $NominálníEuribor_t = \beta_0 - \beta_1 \cdot t$  jako  $\hat{i}_t$ , spočetl jsem cyklickou složku reálné úrokové sazby dle vztahu  $\hat{r}_t = \hat{i}_t - \hat{\pi}_t$ , přičemž  $\hat{\pi}_t$  vyjadřuje cyklickou složku čtvrtletní míry inflace měřenou jakožto odchylku od průměru.

#### 4 EKONOMETRICKÝ ODHAD

Ekonometrický odhad byl proveden metodou maximální věrohodnosti. Technické detaily lze nalézt v učebnici Harvey (1989). Výsledek odhadu je uveden v následující tabulce 1:

Tabulka 1  
Odhad parametrů metodou maximální věrohodnosti

|              | Vývoj trhu práce |       |       | Phillipsova křivka |       | Taylorovo pravidlo |         | Směrodatné chyby |              |            |
|--------------|------------------|-------|-------|--------------------|-------|--------------------|---------|------------------|--------------|------------|
|              | $p$              | $a_u$ | $a_r$ | $b_\pi$            | $b_u$ | $c_u$              | $c_\pi$ | $\sigma^u$       | $\sigma^\pi$ | $\sigma^r$ |
| Bodový odhad | 0.04             | 2.26  | 0.18  | 0.09               | 0.07  | 0.09               | 0.00    | 0.10             | 0.19         | 0.28       |
| t-poměr      | 5.15             | 3.96  | 1.48  | 0.70               | 2.64  | 2.05               | 0.00    | 11.32            | 11.32        | 11.32      |

Hodnoty parametrů  $a_u = 2.26$  a  $a_r = 0.18$  ukazují, že vliv úrokové politiky na cyklický vývoj ekonomiky je výrazně slabší než efekt vyvolaný samotným hospodářským cyklem. Na základě t-poměru koeficientu  $a_r$  plyne důležitý závěr, kterým je, že Evropská centrální banka má pouze omezenou schopnost pomocí úrokové politiky ovlivnit vývoj míry nezaměstnanosti. Jiné empirické studie (Bierens, Broersma (1993)) nicméně docházejí k jinému závěru, a proto by bylo vhodné zkoumat danou problematiku ještě podrobněji.

Odhad parametru  $b_u = 0.07$  naznačuje, že vliv reálné ekonomiky na vývoj inflace je poměrně slabý, nicméně na základě t-poměru je statisticky významný.

Překvapující je nulová hodnota koeficientu  $c_\pi$ , která naznačuje, že Evropská centrální banka zcela opomíjí svůj prioritní cíl, kterým je stabilní inflace. Takováto interpretace by ovšem byla zavádějící. Přesnější interpretace skutečnosti  $c_\pi = 0$  je taková, že inflace nevstupuje do rozhodování Evropské centrální banky o úrokové sazbě. Takovéto tvrzení není ovšem ještě v rozporu s prioritním cílem, neboť faktory relevantní při rozhodování o úrokové sazbě nemusí být současně konečným cílem. Ke stejnému závěru dochází taktéž Aastrup (2010), a to i přesto, že použil zcela odlišnou ekonometrickou metodologii a místo míry

nezaměstnanosti použil v Taylorově pravidle mezeru produktu. Hlavním faktorem úrokových sazeb se tedy ukazuje být vývoj reálné ekonomiky (nezaměstnanosti).

## 5 ZÁVĚR

Cílem této práce byla v první řadě modifikace a ekonometrický odhad parametrů všeobecně známého makroekonomického modelu Balla, jehož předností je dle autora schopnost co nejjednodušším způsobem popsat nejpodstatnější rysy ekonomiky. Nevýhodou Ballova modelu je jeho linearita, která nedokáže popsat značně cyklický vývoj ekonomiky eurozóny. Přínosem mé práce je proto nelineární formulace v podobě endogenizace vybraných koeficientů. Dalším cílem tohoto článku byl popis úrokové politiky Evropské centrální banky za uplynulou dekádu existence této významné instituce. Důležitým zjištěním je, že Evropská centrální banka nereagovala systematicky na vývoj inflace, a to i přesto, že je stabilní inflace jejím primárním cílem, jehož plnění lze doposud hodnotit kladně. Ještě podstatnější je ovšem fakt, že Taylorovo pravidlo není uspokojivým popisem úrokové politiky Evropské centrální banky, což má zcela zásadní význam s ohledem na všeobecnou rozšířenost Taylorova pravidla, které si získalo svou oblibu jednak svou jednoduchostí a jednak schopností popsat velmi uspokojivě vývoj úrokových sazeb v USA.

### Použitá literatura

1. AASTRUP, M., JENSEN, H. 2010: What Drives the European Central Bank's Interest-Rate Changes? Přístup z internetu: <http://ssrn.com/abstract=1733546>.
2. BALL, L. 1999. Efficient Rules for Monetary Policy. *International Finance*, 1999, 2:1, 63-83.
3. BIERENS, H. J., BROERSMA, L. 1993. The Relation between Unemployment and Interest Rate: Some Empirical Evidence. *Econometric Reviews*, 12(2), 217-256.
4. HARVEY, A.C. 1989. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press.

### Kontaktné údaje

Ing. Ondřej Čížek, PhD.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4

130 67 Praha 3

email: [cizeko@vse.cz](mailto:cizeko@vse.cz)

# PŘEHLED A ANALÝZA OPTIMALIZAČNÍCH SYSTÉMŮ A JAZYKŮ PRO MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

## OVERVIEW AND ANALYSIS OF OPTIMIZING SYSTEMS AND LANGUAGES FOR MATHEMATICAL PROGRAMMING

*Anastasiya Fesenko*

### **Abstrakt**

Cílem článku je prozkoumat, jak lze modely, které vytváříme pro dosažení optimálního řešení, zadávat do různých programů. Zajímalo mě, jaké znalosti jsou potřebné pro bezproblémové využití těchto systémů, jejich kladné a záporné stránky z hlediska uživatele, který nemá dokonalé znalosti informačních technologií ale i přesto chce být úspěšný v dosažení výsledků při řešení optimalizačních úloh. Úkolem bylo zjistit, jestli lze některé systémy volně stáhnout, popř. jaké licence jsou k tomu potřeba zakoupit.

Náplní článku je přehled jazyků pro matematické programování a volně dostupného softwaru pro řešení optimalizačních úloh, stručný popis metod výpočtu a otestování některých z těchto programů.

***Klíčové slova:** modelovací jazyky, modelovací systémy, formáty dat.*

### **Abstract**

The aim of this article is to explore, how the models created for reaching optimal result can be solved by different programs. I was interested in exploring what computing skills are required for trouble-free using these systems, research of advantages and disadvantages from the user's side which doesn't have perfect knowledge of informatics technologies, but still wants to be successful in optimizing models solving. The objective was to find out if these systems and software can be free downloaded or what licenses are required to be bought in the other case. The content of this article is overview of mathematical programming languages and software, brief methods' description and different programs' testing.

***Keywords:** modelling languages, modelling systems, data formats.*

## **1 SOUČASNÉ MODELOVACÍ JAZYKY POUŽÍVANÉ PRO ŘEŠENÍ OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH**

Celá řada ekonomických modelů mají optimalizační charakter, tj. mají za úkol nalezení nejlepšího řešení problému při respektování různých omezení, které mají na chod systému určitý vliv. Takové optimalizační úlohy mohou být řešené pomocí rozvinutých systémů metod optimalizace. Matematické modelování ekonomických problému je časově náročný iterativní proces, který se skládá z následujících fází [1]:

- rozpoznání problému v rámci reálného systému a jeho definice;
- formulace ekonomického modelu;
- formulace matematického modelu;
- řešení matematického modelu a interpretace výsledků;
- implementace výsledků v rámci analyzovaného reálného systému.

První tři fáze jsou obzvlášť náročné a složité. V případě chybného formulování matematického modelu je vždycky třeba se vrátit zpátky do 1. nebo 2. fáze, upravit cíl úlohy a

konstruovat nový matematický model. Upravovat model několikrát a předělovat pokaždé kód programu je těžký a nepříjemný proces. Reálné ekonomické modely obvykle mají tisíce proměnných a omezení, což ještě více komplikuje sestavování správného modelu a následné jeho řešení.

Model může být zapsán a vyřešen na počítači několika způsoby:

- **na základě nestruturních přístupů**, kde pro zápis modelu se používá některý z programovacích jazyků: Delphi, Fortran, C/C++/C#. V tomto případě se konstruuje matice nebo nějaký jiný vstupní formát dat pro vyřešení modelu v optimalizačním systému. Tady musí být vytvořen speciální algoritmus řešení, který je třeba napsat a odladit. Pro jeho vytvoření kromě matematické modelovací báze uživatel musí disponovat rozsáhlými znalostmi programování a umět je správně a vhodně aplikovat.
- **na základě přístupů, které používají tabulkové kalkulátory** (například Excel), kde matematická struktura úlohy je zadána pomocí tabulkových šablon. Tento přístup byl hodně uplatňován v minulosti. Takto mohou být vyřešeny úlohy lineárního programování a některé nelineární úlohy s velmi specifickou strukturou. Hlavním nedostatkem tohoto přístupu je problém řízení dat, omezených rozsahem 2x2, jelikož tabulky klasicky předpokládají zejména tento rozsah dat. Druhým minusem je velký objem rutinní práce.
- **pomocí uplatnění jazyků matematického modelování**. Tento přístup je mnohem efektivnější, než již zmíněné postoje. Takové jazyky umožňují zapisovat optimalizační úlohy ve formě, velmi podobné klasickému matematickému zápisu, jsou velmi pružné a umožňují rychle měnit model.

Po programovací fázi následuje fáze vlastního řešení problému, ke kterému se obvykle používá řešitel. Jak již bylo zmíněno, je to systém operačního zabezpečení, který umožňuje řešit optimalizační úlohy. V ideálním případě řešitel nachází optimální řešení, ale nebývá to tak vždy. Často se stává, že v procesu řešení uživatel dostává upozornění od systému, že buď problém nemá přípustné řešení nebo model má nějakou formulační chybu. V takovém případě je důležité, aby systém podporoval taky možnost identifikace vzniklých problémů a nabízel možnosti jejího vyřešení. Modelovací jazyky, které jsou nejvíce používány v současné době a považovány za nejvýkonnější jsou: AMPL, MATLAB, O-Matrix, Sysquake, Scilab, Octave, FreeMat, Euler, Python, Sage, PHP, R, Microsoft Solver Foundation.

## 2 FORMÁTY VSTUPNÍCH ÚDAJŮ OPTIMALIZAČNÍCH ÚLOH

Tato kapitola obsahuje přehled formátů dat, pomocí kterých mohou být zadány vstupní údaje optimalizační úlohy.

- **Formát MPS** – textový formát, ve kterém se zapisují na každý řádek určité informace s tím, že na jednom řádku je k dispozici maximálně 80 znaků. Informace se přitom musí zapisovat do pevně daných pozic, jedná se tedy o formát s pevnou strukturou. Tento formát je docela složitý pro formulaci, více o formátu MPS lze dozvědět ze zdroje [2], [10] a [11].
- **Formát LP** – formát, který je v podstatě velmi shodný s klasickým matematickým zápisem. Tento formát je dobře čitelný a srozumitelný.
- **CPLEX LP** – další textový formát, jehož zápis je velmi podobný standardnímu matematickému zápisu. Každý řádek v tomto formátu může mít maximálně 255 znaků s tím, že mezery jsou ignorovány. Limit délky není omezující, protože potřebné informace mohou být rozděleny v případě potřeby do více řádků.
- **LINDO formát** – je formát dat, vytvořených pomocí LINDO řešitele, zápis je taky dobře pochopitelný a podobný vlastnímu matematickému modelu. Více lze dozvědět ze zdroje [2].

- **GNU MathProg** formát – tento formát používá GLPK solver, který je podrobněji popsán dále.
- **LPFML XML** formát – tento formát je docela nový, využívá pro formulaci XML layout. Nedostatkem tohoto modelu je složitost formulování a pochopení, jelikož zápis se výrazně liší od matematického zápisu modelu. Z druhé strany díky XML struktuře tento formát je flexibilní a jednoduše upravitelný.

### 3 VÝPOČETNÍ ALGORITMY PRO ŘEŠENÍ PROBLÉMU MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

Díky rychlému rozvoji počítačové techniky a rozpracování efektivních výpočetních metod úlohy lineárního programování s více než tisíci proměnných a omezení se považují za přiměřené. Modely, které mají desítky a stovky proměnných, mohou být docela rychle pomocí různých programovacích systémů.

Současné programovací systémy mohou být dvojího typu:

- **Algoritmické systémy**, kde jako vstupy se zadává seznam koeficientů, omezení a atributů, a výstupy v tomto případě jsou optimální hodnoty proměnných. Pro využití těchto systémů uživatel musí disponovat jistými programovacími znalostmi.
- **Modelovací systémy**, které umožňují formulovat úlohu lineárního programování v podobě, blízké klasickému matematickému zápisu, a dále umožňují srozumitelné zobrazení výsledků a jejich následnou analýzu. Zápis modelu se uskutečňuje pomocí modelovacích jazyků.

#### 3.1 Baličky používající simplexovou metodu pro nalezení OŘ

- **Lp\_solve** – je napsán v jazyce C++, řeší úlohy lineárního programování do rozsahu 30 tisíc proměnných a 50 tisíc omezení, řeší taky celočíselné úlohy. Současně nejnovější 5. verze vyžaduje Lesse GNU Public licenci. Existuje několik způsobů formulace modelu v Lp\_solve [12]:
  - načíst model z běžného textového (ASCII) souboru,
  - konstruovat model pomocí modelovacího jazyku,
  - konstruovat model pomocí programovacího jazyku.
- **LP-Optimizer** [13] – řeší úlohy lineárního a celočíselného programování, zdrojový kód řešitele je dostupný v jazyce Borland Pascal.
- **SoPlex** – založen na realizaci revidované simplexové metody, načítá data v MPS a LP formátech. Tento řešitel byl vytvořen Rolandem Wunderlingem v jeho disertační práci, vyžaduje tzv. ZIB Academic License. Na oficiálních stránkách tohoto softwaru [14] lze najít zdrojový kód programu a stáhnout zkušební verzi.
- **SPLP** – je součástí knihovny programů SLATEC, napsán v jazyce Fortran, řeší úlohy lineárního programování s několika tisíci proměnných a omezení. Více informací o knihovně matematických programů SLATEC lze dozvědět na stránkách tohoto softwaru [15].

#### 3.2 Baličky používající metodu vnitřního bodu pro nalezení OŘ

- **PCx** – byl vytvořen ve Spojených Státech Joe Czyzykem, pracovníkem optimalizačního technologického centra, ve spolupráci s Argonne National Laboratory a univerzitou Northwestern. Zdrojový kód řešitele je dostupný v jazyce Fortran a C, řešitel má grafické uživatelské rozhraní, napsané v Java [16]. Vstupní údaje musí být buď ve formátu MPS, nebo vytvořeny pomocí modelovacího jazyku AMPL.

- **HOPDM** – optimalizační balíček, který byl napsán v jazyce Fortran, řeší úlohy lineárního, kvadratického a nelineárního programování. Tento řešitel má některé zajímavé funkce, mezi které patří například tzv. „teplý start“, umožňující použít hotové řešení napsaných dříve modelů. Více informace o možnostech a charakteristikách řešitele lze najít na stránkách [17].
- Existují taky systémy, založené na metodě vnitřních bodů, které umožňují řešit optimalizační úlohy v on-line režimu, bez nutnosti stahování softwaru na počítač. **NEOS Server** [8] dovoluje spouštět v takovém režimu různé optimalizační systémy včetně komerčních. Tento server je dostupný zcela pro každého a kterýkoliv uživatel jej může plně používat. Nicméně využití tohoto serveru má jistá omezení: webová podpora umožňuje odeslání souborů o velikosti maximálně 1 MB, ale e-mailem lze odeslat soubor až do velikosti 16,8 MB. Požadované softwarové vybavení je minimální – pro komunikaci se serverem je třeba pouze webový prohlížeč, e-mail nebo případně jiné rozhraní.

### 3.3 Modelovací systémy

Modelovací systémy jsou nástroje, které umožňují zapisovat optimalizační úlohy ve formě, velmi podobné standardnímu matematickému zápisu, jsou velmi pružné a umožňují rychle měnit model. Většina modelovacích systémů mají taky příjemné grafické rozhraní, což je velkou výhodou pro uživatele nemajícího jistých programovacích poznatků. V různých zdrojích se lze taky setkat s označením modelovacích systémů jako **systémů na podporu modelování**. Snažila jsem se zmínit většinu modelovacích systémů, které jsou nejvýkonnější a jsou nejčastěji používány v současné době.

- **GAMS** – vysokoúrovňový modelovací systém pro řešení optimalizačních úloh. Systém řeší lineární, nelineární a smíšené celočíselné úlohy. Zkušební verze systému je dostupná na stránkách [18], umožňuje zadávat vstupní údaje o rozsahu 300 proměnných, 300 omezení a 50 celočíselných proměnných. Tento systém má svůj modelovací jazyk a svoje vlastní integrované prostředí, které může být spojené s různými optimalizačními řešiteli.
- **AMPL** - je sofistikovaný modelovací nástroj, který podporuje celý optimalizační proces. Tento systém má vlastní modelovací jazyk pro popis vstupních údajů, speciální příkazový jazyk pro prohlížení a analýzu výsledků a skriptový jazyk pro kódování algoritmů. Pro optimalizaci tento systém využívá několik řešitelů. Mezi lineární řešitele patří: CPLEX, Gurobi a Xpress, více o těchto systémech je popsáno dále. AMPL taky nabízí možnosti využití nelineárních řešitelů a umožňuje zdarma stáhnout demo verzi systému. Pro řešení úloh libovolného rozměru lze stáhnout 30denní licenci. Více informace na stránkách [13].
- **LINDO, LINGO** – tyto systémy byly podrobně probírané během studia, proto odkazují na zdroj [2] a internetové stránky [21].
- **LOQO** [3] – tento solver byl vytvořen Robertem Vanderbeiem na Princetonské univerzitě. Systém nemá vlastní uživatelské rozhraní, může být použit prostřednictvím systémů AMPL nebo GAMS, vyžaduje licenci. Lze zajistit dočasný přístup zažádáním o heslo, lze taky načítat data ve formátu MPS.
- **MOSEK** – je systém pro řešení lineárních, celočíselných, ale i kvadratických a konvexních optimalizačních úloh. Na stránkách [19] si lze stáhnout studentskou verzi, která se od plně liší pouze možností řešit kapacitně omezené úlohy.
- **Komplet nástrojů pro MATLAB** [9]. MATLAB je integrované prostředí pro vědeckotechnické výpočty, modelování, návrhy algoritmů, simulace, analýzu a prezentaci dat, měření a zpracování signálů, návrhy řídicích a komunikačních systémů. MATLAB je nástroj, jak pro pohodlnou interaktivní práci, tak pro vývoj

širokého spektra aplikací. Program existuje řadu let a prošel dlouhým vývojem. Vlastní MATLAB není jen v jedné linii základního programu, ale používá se spousta rozšíření (toolboxů) [9]:

- **Optimization Toolbox** – je jeden z nejvíce užitečných rozšíření MATLABu, zvětšuje výpočetní prostředí MATLAB o nástroje a široce používané algoritmy pro standardní a rozsáhlé optimalizační úlohy. Tyto algoritmy řeší podmíněné a nepodmíněné spojité a diskrétní problémy. Toolbox obsahuje funkce pro lineární a kvadratické programování, nelineární optimalizaci, nelineární metodu nejmenších čtverců, vícekritériální optimalizaci a binární celočíselné programování. Funkce Optimization Toolboxu jsou napsány v otevřeném jazyce MATLAB, což umožňuje uživateli kontrolovat průběh výpočtu, editovat kód výchozího algoritmu a taky vymyslet vlastní funkce a procedury.
- **Global Optimization Toolbox** - rozšiřuje optimalizační možnosti MATLABu a Optimization Toolboxu o nástroje pro hledání globálního řešení úloh, které obsahují několik lokálních maxim nebo minim.
- **MPL for Windows** – systém, který poskytuje jednotné prostředí pro formulaci modelu, manipulaci s daty, optimalizaci a prezentaci výsledků. Tento řešitel umožňuje spolupracovat se všemi optimalizačními řešiteli na trhu. Pokud má uživatel na svém počítači nějakého řešitele, může si pořídit MPL bez řešitele a používat svůj stávající. Standardně je MPL dodáván se systémem CPLEX. Demo verzi lze stáhnout ze stránek [4], která umožňuje řešit úlohy o rozsahu 300x300.
- **CPLEX** – jedná se o produkt firmy IBM. Z hlediska dosahovaných výkonů při řešení rozsáhlých lineárních nebo smíšeně celočíselných úloh patří k absolutní špičce v oboru. Jedná se pouze o řešitele, ke kterému není v základní podobě k dispozici žádné prostředí. Výpočty se spouštějí dávkovým režimem. Více informace je na stránkách [20].
- **XPRESS-MP** - je produktem firmy FICO Optimization. Podrobné informace o této firmě a jejich produktech lze nalézt na stránkách [22]. Systém XPRESS-MP je především součástí optimalizačního a modelovacího prostředí, které firma FICO Optimization poskytuje, i když může být nainstalován jako řešitel v jiných modelovacích systémech. Výkonem je srovnatelný se systémem CPLEX a je možné konstatovat, že uvedené dva systémy jsou v oblasti optimalizačních systémů zřejmě nejvýkonnější.
- **GLPK** – optimalizační balíček, který byl vyvíjen zejména pro úlohy lineárního programování. V současné době však umožňuje řešit i smíšené celočíselné úlohy. Tento systém má vlastní formát GNU MathProg pro zápis vstupních údajů. GLPK lze volně stáhnout ze stránek [7].
- **Gurobi** [6] – řešitel z roku 2009, vyvinutý týmem, který se podílel na vývoji CPLEXu a po prodeji firmy ILOG firmě IBM začal rozvíjet vlastní produkt. V mnoha ohledech dosahuje současná verze Gurobi lepších výsledků než IBM CPLEX. Řeší úlohy lineárního, kvadratického, smíšeně celočíselného programování. Lze načítat data ve formátu MPS.

---

Článek vznikl s podporou interní grantové agentury, grant č. F4/11/2013.

## Použitá literatura

1. LAGOVÁ, M., JABLONSKÝ, J. Lineární modely. Praha: Oeconomica, 2009.
2. JABLONSKÝ, J. Programy pro matematické modelování. Praha: Oeconomica, 2007.
3. *LOQO for Windows* [online]. 2007 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.princeton.edu/~rvdb/loqo/LOQO.html>
4. *Maximal Software - Optimization Modeling* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: [www.maximalsoftware.com](http://www.maximalsoftware.com)
5. *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www-03.ibm.com/software/products/en/ibmilogcpleoptistud>
6. *Gurobi Optimizer Product and Performance Overview* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: [www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/gurobi-overview](http://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/gurobi-overview)
7. *GLPK - GNU Project - Free Software Foundation* [online]. 2012 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <https://www.gnu.org/software/glpk/>
8. *NEOS Solvers - NEOS Server* [online]. 2013 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.neos-server.org/neos/solvers/index.html>
9. *Global Optimization Toolbox* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://matlab.ru/products/optimization-toolbox>
10. *MPS file format* [online]. 2010 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://lpsolve.sourceforge.net/5.0/mps-format.htm>
11. *MPS file format: industry standard* [online]. 2011 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: [http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/cosinfoc/v12r3/index.jsp?topic=%2Filog.odms.cplex.help%2FContent%2FOptimization%2FDocumentation%2FOptimization\\_Studio%2F\\_pubskel%2Fps\\_reffileformatscplex2162.html](http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/cosinfoc/v12r3/index.jsp?topic=%2Filog.odms.cplex.help%2FContent%2FOptimization%2FDocumentation%2FOptimization_Studio%2F_pubskel%2Fps_reffileformatscplex2162.html)
12. <http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/formulate.htm#Construct> the model from a Mathematical Programming Language
13. *All Solvers for AMPL | AMPL* [online]. 2013 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://ampl.com/products/solvers/all-solvers-for-ampl/>
14. *SoPlex* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://soplex.zib.de/>
15. *Guide to the SLATEC Common Mathematical Library* [online]. 1993 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.netlib.org/slatec/guide>
16. *Mathematics and Computer Science* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.mcs.anl.gov/research>
17. *Higher Order Primal Dual Method* [online]. 2011 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/software/hopdm.html>
18. *Download GAMS Distribution* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.gams.com/download/>
19. *MOSEK ApS* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.mosek.com/>
20. *IBM Software* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www-03.ibm.com/software/products/>
21. *LINDO SYSTEMS Inc.* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.lindo.com/>
22. *FICO Xpress Optimization Suite* [online]. 2014 [cit. 2014-11-10]. Dostupné z: <http://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization-suite/>

## Kontaktné údaje

Ing. Anastasiya Fesenko

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 4, 13067, Praha

email: [anastasiya.fesenko@vse.cz](mailto:anastasiya.fesenko@vse.cz)



# MODELOVÁNÍ KONKURENCE V REVENUE MANAGEMENTU

## COMPETITION MODELING IN REVENUE MANAGEMENTU

*Petr Fiala*

### **Abstrakt**

Modely revenue managementu, navzdory jejich úspěchu a popularitě, jsou stále poněkud zjednodušující. Mnoho důležité složky v revenue managementu byly rozsáhle studovány, konkurenci však nebyl věnován dostatek pozornosti. Příspěvek je věnován modelování konkurence v revenue managementu. Postup analyzuje lineární aproximaci společného problému konkurence a řízení kapacit v oblasti revenue managementu. Navržený model kombinuje model DLP pro síťový revenue management s modelem teorie her pro konkurenci.

*Klíčová slova: revenue management, konkurence, teorie her*

### **Abstract**

Revenue management models, despite their success and popularity, are still somewhat simplistic. Many important components of revenue management have been extensively studied, but the competition was not devoted enough attention. The paper is devoted to modeling competition in revenue management. The procedure analyzes the linear approximation of the common problem of competition and management capacities in the area of revenue management. The proposed model combines DLP model for network revenue management model of game theory for competition.

*Keywords: revenue management, competition, game theory*

## **1 ÚVOD**

V článku (Netessine a Shumsky, 2005), autoři uvažují horizontální konkurenci u jedno etapového letu a vertikální konkurenci pro sérii navazujících letů za předpokladu, že cestující s nízkými cenami letenek přilétají dříve než cestující s vysokými cenami letenek. Srovnávají centralizované a decentralizované konkurenční nastavení. V práci (Jiang a Pang, 2011) autoři studovali alokaci letových kapacit při konkurenci. S použitím konceptu přetečení poptávky, navrhli modely teorie her založené na známých aproximačních modelech pro přidělování síťové kapacity v monopolním prostředí. Zkoumali jak existenci, tak i jedinečnost Nashovy rovnováhy pro různé modely teorie her.

V příspěvku jsou síťové modely revenue managementu doplněny modely teorie her pro zachycení konkurence. Postup může být užitečný pro řešení praktických problémů se zahrnutím konkurence a existují určité možnosti rozšíření postupu a některé oblasti pro další výzkum. Tento postup může být přizpůsoben jiným síťovým aproximacím, jako jsou RLP, PNLP a další. Stejná formulace může být aplikována na různé způsoby síťové nabídky cen. I když je snadné dokázat existenci Nashovy nebo zobecněné Nashovy rovnováhy, zdá se obtížné zajistit obecně jedinečnost rovnováhy.

## **2 SÍŤOVÝ REVENUE MANAGEMENT**

Revenue management více propojených zdrojů se označuje jako síťový revenue management. Síťové modely revenue managementu se snaží maximalizovat revenue, když zákazníci kupují svazky více zdrojů. Vzájemná závislost zdrojů, obvykle označovaná jako síťové efekty,

vytváří problémy při řešení problému. Tato třída problémů vzniká například v letecké a železniční dopravě, v řízení kapacit hotelu atd. V případě letecké dopravy, problém je řízení kapacit souboru navazujících letů v tzv. hub-and-spoke síti.

Základní model problému síťového revenue managementu je formulován jako problém stochastického dynamického programování, jehož přesné řešení je výpočetně neřešitelné. Řešení jsou založena na aproximaci různých typů. Existují dvě důležitá kritéria při posuzování metody aproximace sítě: přesnost a rychlost.

Jedním z postupů je použít zjednodušený síťový model, například ve tvaru statického matematického programování. V našem modelu použijeme deterministický model lineárního programování DLP

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} \mathbf{r}^T \mathbf{x} \\ \text{při omezeních} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{x} \leq \mathbf{D}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

kde  $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \dots, D_p)$  je vektor poptávky v obdobích  $t, t+1, \dots, T$ , pro produkt  $k, k = 1, 2, \dots, p$ , a  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_p)$  je vektor výnosů spojených s  $p$  produkty. Rozhodovací vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  reprezentuje alokaci kapacit pro každý z  $p$  produktů. Aproximace efektivně bere poptávku jako by byla deterministická a rovna střední hodnotě  $E[D]$ .

Optimální duální proměnné  $\boldsymbol{\pi}^{\text{LP}}$ , spojené s omezeními  $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{c}$ , jsou používány jako nabídkové ceny. Hlavní výhodou tohoto DLP modelu je skutečnost, že je výpočetně velmi efektivně řešitelný. Díky své jednoduchosti a rychlosti je populární v praxi. Slabinou DLP aproximace je vlastnost, že uvažuje pouze průměrnou poptávku a ignoruje všechny ostatní distribuční informace. Efektivnost metody DLP závisí na typu sítě, pořadí v jakém přicházejí produkty a četnost re-optimalizace.

Významné omezení použitelnosti těchto klasických modelů je předpoklad nezávislé poptávky. V reakci na to, zájem se v posledních letech objevily snahy začlenit rozhodování zákazníků a konkurenci do těchto modelů, což dále zvyšuje jejich složitost. Tento vývoj urychluje současné snahy navrhnout výkonné a praktické heuristiky, které ještě mohou řešit problémy praktického rozsahu.

### 3 DLP MODEL KONKURENCE

Modelování konkurence mezi  $n$  firmami (s indexy  $i = 1, 2, \dots, n$ ) je založen na optimalizačních modelech typu DLP pro jednotlivé firmy. Dalším krokem je hledání rovnováhy pro konkurenční firmy.

Vycházíme z následujících standardních předpokladů (Jiang a Pang, 2011):

- Ceny všech produktů jsou pevné pro všechny firmy.
- Poptávka po jednom produktu je nezávislá na poptávce po dalším produktu.
- Poptávka po jednom produktu z jedné firmy koreluje s poptávkou po stejných produktech od jiných firem.
- Každý zákazník má zájem pouze o jeden konkrétní produkt.
- Každý zákazník podá objednávku u své preferované firmy a s určitou pravděpodobností podá objednávku stejného produktu u jiné firmy, pokud je jeho

první objednávka odmítnuta. Pokud je jeho druhá objednávka také zamítnuta, pak se stává ztraceným zákazníkem pro všechny firmy v daném čase.

Firmy prodávají  $p$  tříd produktů (s indexy  $k = 1, 2, \dots, p$ ), kombinovaných z  $m$  zdrojů (s indexy  $h = 1, 2, \dots, m$ ). Necht'  $\mathbf{r}^i$  je vektor jednotkových cen pro firmu  $i$ . Necht'  $\mathbf{c}^i$  je vektor zbývajících kapacit pro firmu  $i$ . Necht'  $\mathbf{A}^i$  je incidenční matice typu zdroj-produkt pro firmu  $i$ . Předpokládejme, že primární poptávka u firmy  $i$  je  $\mathbf{D}^i$ . Odmítnutý zákazník u firmy  $i$  udělá další nezávaznou objednávku téhož produktu u jiných firem. Předpokládejme, že  $d^{ji}$  označuje míru přetečení daného produktu od firmy  $j$  k firmě  $i$ . To znamená, že pokud zákazník, který dává přednost firmě  $j$ , byl odmítnut u firmy  $j$ , pak by měl podat objednávku produktu u firmy  $i$  s pravděpodobností  $d^{ji}$ . Celková potenciální poptávka u firmy  $i$  se skládá z vlastní primární poptávky a přetečenou poptávkou od jiných firem

$$\mathbf{D}^i + \sum_{j \neq i} d^{ji} [\mathbf{D}^j - \mathbf{x}^j]^+.$$

Předpokládejme, že rozdělené rezervační limity všech ostatních firem, různých od firmy  $i$ , jsou dány. Firma  $i$  se snaží určit optimální rozdělení rezervačních limitů  $\mathbf{x}^i$  řešením následujícího deterministického lineárního programu (DLP):

při omezeních

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}^i} (\mathbf{r}^i)^T \mathbf{x}^i \\ \mathbf{A}^i \mathbf{x}^i \leq \mathbf{c}^i, \\ \mathbf{x}^i \leq \mathbf{D}^i + \sum_{j \neq i} d^{ji} [\mathbf{D}^j - \mathbf{x}^j]^+, \\ \mathbf{x}^i \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Každá firma plní své primární poptávky a přijímá přetečené poptávky, které nemohou být uspokojeny konkurenčními firmami. Cílem je maximalizace celkového příjmu firmy  $i$ . První omezení stanoví, že kapacita jednotlivých zdrojů nesmí být překročena. Druhé omezení určuje, že alokace pro všechny firmy pro každý produkt nesmí překročit poptávku po tomto produktu. Poslední omezení ukazuje, že rezervační limity jsou nezáporné.

Dále je možné přeformulovat problém (2) na ekvivalentní nelineární a nehladký problém, jehož množina přípustných řešení však závisí pouze na děleném rezervačním limitu  $\mathbf{x}^i$  firmy  $i$ . Necht'  $\mathbf{s}^i > \mathbf{r}^i$  je konstantní vektor pro každé  $i$ .

při omezeních

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}^i} (\mathbf{r}^i)^T \mathbf{x}^i + (\mathbf{s}^i)^T \min \left( \mathbf{0}, \mathbf{D}^i + \sum_{j \neq i} d^{ji} [\mathbf{D}^j - \mathbf{x}^j]^+ - \mathbf{x}^i \right) \\ \mathbf{A}^i \mathbf{x}^i \leq \mathbf{c}^i, \\ \mathbf{x}^i \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3}$$

Vektor  $\mathbf{x}^i$  je optimální řešení problému (2) tehdy a jen tehdy, když  $\mathbf{x}^i$  je optimální řešení problému (3). Množina přípustných řešení problému (3) je jednodušší než u problému (2).

#### 4 MODELY TEORIE HER S KONKURENCÍ

V této části je uvedena zobecněná Nashova hra a zobecněné Nashovy rovnovážné body (Pang a Fukushima, 2005). Je analyzován vztah mezi modely konkurence a modely teorie her. Dále je analyzována existence a jednoznačnost zobecněných Nashových bodů rovnováhy. Také je uveden nástin algoritmu pro řešení modelů konkurence.

**Zobecněná Nashova hra** je nekooperativní hra, ve které množina přípustných strategií každého hráče závisí na strategiích ostatních hráčů. Předpokládejme, že existuje  $n$  hráčů a každý hráč  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , kontroluje proměnné  $\mathbf{x}^i$ . Ve skutečnosti je  $\mathbf{x}^i$  strategie hráče  $i$ .

Označme  $\mathbf{x}$  následující vektor  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n)$ . A necht'  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_n$ . Potom  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ . Označme  $\mathbf{x}^{-i}$  the vektor rozhodnutí všech hráčů s výjimkou rozhodnutí hráče  $i$ . Takže můžeme psát

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{-i}).$$

Strategie hráče  $i$  patří do množiny strategií, která závisí na rozhodnutí ostatních hráčů

$$\mathbf{x}^i \in X^i(\mathbf{x}^{-i}).$$

Necht'  $f^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{-i})$  je výplatní funkce pro hráče  $i$ , kde společná strategie je  $\mathbf{x}$ . Cílem hráče  $i$  je při dané strategii  $\mathbf{x}_0^{-i}$  vybrat strategii  $\mathbf{x}_0^i$ , která řeší následující optimalizační problém

$$\max_{\mathbf{x}^i} f^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}_0^{-i})$$

při omezení

$$\mathbf{x}^i \in X^i(\mathbf{x}^{-i}).$$

(4)

Pro danou strategii  $\mathbf{x}^{-i}$  konkurenčních hráčů, množina řešení problému (4) je označena  $S^i(\mathbf{x}^{-i})$ .

Tedy vektor  $\mathbf{x}_0$  je **zobecněná Nashova rovnováha**, pokud pro každé  $i$

$$\mathbf{x}_0^i \in S^i(\mathbf{x}_0^{-i}).$$

Jestliže množina strategií každého hráče nezávisí na volbě konkurenčních hráčů, to znamená, že pro každé  $i$ ,

$$X^i(\mathbf{x}^{-i}) = X^i$$

potom se nekooperativní hra redukuje na problém najít  $\mathbf{x}_0 \in \prod_i X^i$ , kde pro každé  $i$

$$f^i(\mathbf{x}_0^i, \mathbf{x}_0^{-i}) = \max_{\mathbf{x}^i} f^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}_0^{-i})$$

při omezení

$$\mathbf{x}_0^i \in X^i,$$

(5)

což je **Nashova hra**.

Pokud neexistují žádná společná omezení ve hře, pak zobecněná Nashova hra a zobecněná Nashova rovnováha se redukuje na tradiční Nashovu hru a Nashovu rovnováhu. Klíčový rozdíl mezi zobecněnou Nashovou hrou a tradiční Nashovou hrou je to, že prostor strategií pro hráče může záviset na strategiích ostatních hráčů v zobecněné, ale ne v tradiční Nashově hře, avšak výplatní funkce u obou typů her mohou být funkcemi strategií ostatních hráčů.

DLP problémy síťového revenue managementu (2) a (3) jsou modely konkurence. Množina přípustných řešení (množina strategií) problému (2) zahrnuje strategické proměnné  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{-i})$ , zatímco množina přípustných řešení (množina strategií) problému (3) zahrnuje pouze strategické proměnné  $\mathbf{x}^i$ . Je snadné zjistit, že hra založená na problému DLP (2) pro všechny firmy vede k zobecněné Nashově hře, zatímco hra založená na problému DLP (3) vede k tradiční Nashově hře s nehladkou a nelineární výplatní funkcí. Vlastnost nehladkosti může představovat problémy pro navrhování výpočetní metody pro řešení hry. DLP problémy (15.2) a (15.3) jsou ekvivalentní. Tudíž v rámci teorie her je zobecněná Nashova hra převedena na tradiční Nashovu hru.

## 5 ZÁVĚR

V příspěvku jsou doplněny modely síťového revenue managementu o modely teorie her. Tento přístup se zdá být užitečný a slibný pro další výzkum. Existují některá možná rozšíření přístupu a některé oblasti pro další výzkum. Tento přístup může být přizpůsoben jiným síťovým aproximacím (jako je RLP, PNLPa další) (viz Fiala, 2010). Stejná formulace může být použita pro různé síťové metody nabídky cen. I když je snadné dokázat existenci Nashovy nebo zobecněné Nashovy rovnováhy, zdá se obtížné obecně zajistit jedinečnost. Některé zvláštní případy by měly být analyzovány. Nalezení konvergujícího aproximačního algoritmu pro zobecněné Nashovy hry je výzvou pro budoucí výzkum.

### Poděkování

Výzkumný projekt byl podporován grantem č. 13-07350S 07/0166, uděleným Grantovou agenturou České republiky, a grantem IGA F4/19/2013, Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze.

### Použitá literatura

1. Facchinei, F., and Pang, J.: *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems I and II*. Springer, New York, 2003.
2. Fiala, P.: Approximations for solving network revenue management problems. *In: Mathematical Methods in Economics 2010*. University of South Bohemia, České Budějovice, 2010, 132–137.
3. Jiang, H., and Pang, Z.: Network capacity management under competition. *Computational Optimization and Applications* **50** (2011), 287–326.
4. Netessine, S., and Shumsky, R.: Revenue management games: horizontal and vertical competition. *Management Science* **51** (2005), 813–831.
5. Pang, J., and Fukushima, M.: Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games. *Computational Management Science* **1**: (2005), 21–56.
6. Phillips, R.: *Pricing and Revenue Optimization*. Stanford Business Books, Stanford, California, 2005.
7. Rosen, J.: Existence and uniqueness of the equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica* **33** (1965), 520–534.

8. Talluri, K. T., and van Ryzin, G. J.: *The Theory and Practice of Revenue Management*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.

**Kontaktní údaje**

Prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha, Česká republika

Tel: (420 2) 24 095 447

email: [pfiala@vse.cz](mailto:pfiala@vse.cz)

# HARMONIZACE TESTŮ PŘI MALÉM POČTU KOTVÍCÍCH POLOŽEK

## TEST EQUATING IN CASE OF A SMALL NUMBER OF ANCHOR ITEMS

*Lenka Fiřtová*

### **Abstrakt**

Při vývoji testů je často potřeba řešit otázku, jakým způsobem zajistit srovnatelnost skóre z různých variant testu. Řada harmonizačních metod vycházejících z teorie odpovědi na položku za tím účelem využívá tzv. kotvící položky. Problém však může nastat tehdy, pokud je kotvících položek příliš málo, neboť standardní metody v tomto případě nemusí poskytovat uspokojivé výsledky. Cílem tohoto článku je proto popsat alternativní metodu a představit výsledky simulace, v rámci které byla porovnána s jednou z běžně používaných metod.

***Klíčová slova:** teorie odpovědi na položku, harmonizace testů, odhad skóre*

### **Abstract**

When developing a test, it is often necessary to deal with the issue of how to ensure the comparability of test scores across different test administrations. There are various test-equating methods based on the item response theory, which enable us to link tests using so-called anchor items. However, a problem may arise if there are very few anchor items in the test, because in this case standard methods may not give satisfactory results. The aim of this paper is to describe an alternative method and to present the results of a simulation in which it was compared with one of the commonly used methods.

***Keywords:** Item Response Theory, test equating, test score estimation*

# 1 TEORIE ODPOVĚDI NA POLOŽKU (IRT)

Teorie odpovědi na položku (Item Response Theory, dále IRT) je skupina modelů, které se používají zejména v oblasti znalostních či psychologických testů k odhadu parametrů položek testu a úrovně testovaného rysu respondentů. Tyto modely umožňují odhadnout, s jakou pravděpodobností odpoví respondent s určitou úrovní testovaného rysu (dále IRT skóre) na danou položku určitým způsobem. Dichotomické modely pracují pouze se dvěma možnými odpověďmi: správně ( $U_{ij} = 1$ ) a špatně ( $U_{ij} = 0$ ), kde  $U_{ij}$  značí odpověď  $j$ -tého respondenta v  $i$ -té položce. Jedním z nejpoužívanějších dichotomických IRT modelů je tzv. dvouparametrický model, který u každé položky odhaduje dva parametry: obtížnost a diskriminační schopnost. Označme  $P_i(\theta_j)$  pravděpodobnost, že  $j$ -tý respondent s IRT skóre  $\theta_j$  správně odpoví na  $i$ -tou položku s obtížností  $b_i$  a diskriminační schopností  $a_i$ , tedy  $P_i(\theta_j) \equiv P(U_i = 1 | \theta_j, b_i, a_i)$ . Tato pravděpodobnost je dána vztahem (Partchev, 2004)

$$P_i(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}},$$

kde  $b_i$  = obtížnost  $i$ -té položky

$a_i$  = diskriminační schopnost  $i$ -té položky

$\theta_j$  = IRT skóre  $j$ -tého respondenta.

Obtížnost položky je definována jako taková úroveň IRT skóre, při které má respondent právě 50 % pravděpodobnost, že na položku odpoví správně. Diskriminace položky udává, jak dobře daná položka rozlišuje mezi respondenty s nižší a vyšší úrovní IRT skóre. IRT skóre je spojitá veličina, jejíž hodnoty se obvykle pohybují přibližně v intervalu  $(-4; 4)$  a která je na téže škále jako parametry obtížnosti položek. Parametry položek a IRT skóre respondentů se obvykle odhadují simultánně metodou maximální věrohodnosti, resp. některou z jejích modifikací.

## 1.1 Harmonizace testů s využitím IRT

Harmonizací testů se rozumí propojování testů za účelem převodu výsledků na jednotnou škálu, tak aby IRT skóre z různých variant testů bylo plně srovnatelné. Pokud by se testy neharmonizovaly, byly by výsledky respondentů ovlivněny obtížností konkrétního testu a dovednostmi skupiny, která test řeší, protože je jistě snazší získat nadprůměrný výsledek ve skupině horších osob než ve skupině lepších osob.

Testy se v rámci harmonizace obvykle propojují tak, že se do dvou různých testů vloží několik tzv. kotvících položek, jejichž parametry se nachází na referenční škále určené výchozím testem. Cílem je umístit parametry položek napojovaného testu na tutéž referenční škálu. Jakmile jsou totiž parametry položek v různých testech na jednotné škále, je i IRT skóre respondentů automaticky na jednotné škále, a tudíž plně srovnatelné (Pang, Madera, Radwan, Zhang, 2010).

Některé harmonizační metody postupují tak, že odhadnou průměr a směrodatnou odchylku IRT skóre ve skupině respondentů napojovaného testu pouze na kotvících položkách, a tím určí škálu pro odhad parametrů nekotvících položek. Problém nastává tehdy, když je kotvících položek příliš málo. To se může stát například tehdy, pokud se některé z kotvících položek chovají napříč testy nekonzistentně, tedy pokud se jejich parametry test od testu mění. Takové položky je pak potřeba z kotvení vyřadit. V případě malého počtu kotvících položek (dvě až tři) je však obtížné přesně odhadnout průměr a směrodatnou odchylku IRT skóre skupiny běžně používanými metodami, mimo jiné i proto, že velký počet respondentů bude mít všechny odpovědi na kotvící položky správně nebo všechny špatně. Proto může být vhodnější použít alternativní postup, kterému se bude věnovat tento článek dále.



## 1.2 Metody odhadu průměru a směrodatné odchylky IRT skóre skupiny

### *Odhad IRT skóre pomocí metody maximální věrohodnosti*

Metod pro odhad IRT skóre existuje celá řada, přičemž nejpoužívanější vychází z metody maximální věrohodnosti (Assessment Systems Corporation, 2009). Nyní uvažujme situaci, kdy máme k dispozici odhady parametrů kotvících položek a chceme odhadnout IRT skóre respondentů na těchto položkách. Individuální IRT skóre v takovém případě samozřejmě nemá velkou výpovědní hodnotu, avšak z individuálních skóre lze spočítat průměr a směrodatnou odchylku IRT skóre skupiny, kterou potřebujeme k určení škály pro odhad nekotvících položek. Hledáme tedy takovou úroveň IRT skóre, která je pro respondenta nejvíce pravděpodobná vzhledem k jeho napozorovanému vzorci odpovědí. Ten lze pro  $n$  položek zapsat jako  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , kde  $u_i$  se pro každou položku rovná 1 nebo 0 podle toho, zda ji respondent zodpověděl správně či nikoli.  $P_i(\theta_j)$  značí pravděpodobnost správné odpovědi pro  $j$ -tého respondenta s IRT skóre  $\theta_j$  v  $i$ -té položce s obtížností  $b_i$  a diskriminací  $a_i$ , tedy  $P_i(\theta_j) \equiv P(U_i = 1 \mid \theta_j, b_i, a_i)$ . Na každou úlohu může respondent odpovědět buď správně, nebo špatně, proto pravděpodobnost, že v  $i$ -té položce odpoví  $j$ -tý respondent špatně, lze vyjádřit jako  $Q_i(\theta_j) = 1 - P_i(\theta_j)$ . Věrohodnostní funkci lze tedy v případě  $j$ -tého respondenta s IRT skóre  $\theta_j$  a v případě pozorovaného vzorce odpovědí  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  zapsat jako

$$L(u_1 \dots u_n \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^n P_i(\theta_j)^{u_i} Q_i(\theta_j)^{1-u_i}$$

U respondentů se všemi odpověďmi správně či špatně, což je při malém počtu kotvících položek častý případ, však nelze maximum této funkce nalézt (nachází se v nekončenu). Modifikací je metoda *WLE* (*Warm Weighted Maximal Likelihood Estimator*), která kromě toho, že snižuje vychýlení odhadů oproti klasické metodě maximální věrohodnosti, umožňuje odhadnout skóre i pro respondenty se všemi odpověďmi správně nebo špatně (van den Sanden, 2005).

### *Odhad IRT skóre pomocí četností kombinace odpovědí*

Z výzkumné činnosti společnosti Scio vzešla alternativní metoda odhadu průměru a směrodatné odchylky IRT skóre skupiny při malém počtu kotvících položek (Hučín, 2013). Tato metoda pracuje s četnostmi různých kombinací odpovědí na kotvící položky a hledá takový průměr a směrodatnou odchylku IRT skóre skupiny, pro které jsou si teoretické a napozorované četnosti co nejblíže. Vychází přitom z předpokladu, že IRT skóre má v populaci normální rozdělení.

Nejprve je třeba spočítat napozorované relativní četnosti různých kombinací odpovědí. Při daných parametrech kotvících položek lze dále pro každou hodnotu průměru a směrodatné odchylky IRT skóre spočítat teoretické relativní četnosti všech kombinací odpovědí. Pro každou úroveň IRT skóre lze totiž u každé kotvící položky s danými parametry spočítat pravděpodobnost správné odpovědi. Pravděpodobnost správné odpovědi na všechny kotvící položky současně je pak součinem pravděpodobností správných odpovědí na jednotlivé položky, obdobně pro další kombinace odpovědí. Pokud bychom předpokládali, že IRT skóre skupiny pochází z rozdělení  $N \sim (\mu, \sigma^2)$ , pak teoretická relativní četnost určitého vzorce odpovědí je součin pravděpodobnosti příslušných odpovědí na jednotlivé položky podmíněný hodnotou IRT skóre a hustoty rozdělení IRT skóre integrovaný přes celý reálný obor vzhledem k IRT skóre. Pro  $n$  položek tedy získáme relativní četnost daného vzorce odpovědí  $p(u_1, u_2, \dots, u_n)$  v případě  $\theta \sim N(\mu, \sigma^2)$  jako

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int f(\theta) \cdot \prod_{i=1}^n P_i(\theta)^{u_i} Q_i(\theta)^{1-u_i} d\theta,$$

kde  $f(\theta)$  je hustota rozdělení  $N \sim (\mu, \sigma^2)$ .

Jakmile jsou známy napozorované četnosti a teoretické četnosti při rozložení  $N \sim (\mu, \sigma^2)$ , je možné porovnat, jak moc se od sebe liší. Tímto způsobem lze hledat takové parametry rozdělení IRT skóre, pro které jsou si napozorované a teoretické četnosti co nejbližší. K tomu lze použít například chí-kvadrát test dobré shody. Nyní je cílem zhodnotit použitelnost této metody a porovnat ji s výše uvedenou metodou *WLE*, což bylo provedeno pomocí níže popsané simulace.

## 2 POPIS SIMULACE

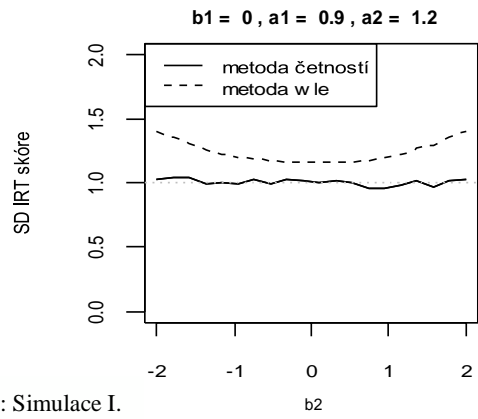
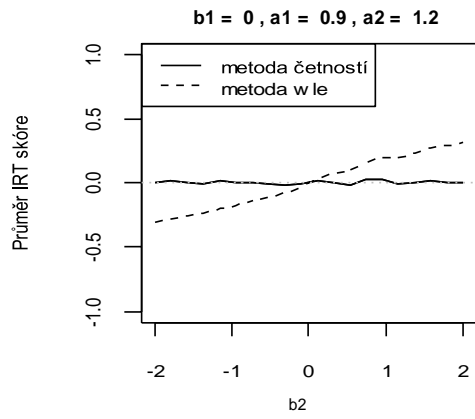
Simulace byla provedena v prostředí R. Celkem šlo o 8 různých simulací, čtyři se dvěma kotvícími položkami a čtyři se třemi kotvícími položkami, jak je uvedeno v následující tabulce ( $b_i$  značí obtížnosti  $i$ -té položky a  $a_i$  značí diskriminaci  $i$ -té položky). V každé z těchto osmi simulací se pracovalo s dvaceti různými kombinacemi parametrů položek, přičemž veškeré parametry byly vždy neměnné až na jeden, který nabýval postupně dvaceti hodnot ze zvoleného intervalu. Celkem byla tedy simulace provedena pro 160 různých kombinací parametrů položek, přičemž pro každou z těchto kombinací bylo provedeno 20 replikací.

| SIMULACE                           | $b_1$ | $b_2$          | $b_3$ | $a_1$ | $a_2$             | $a_3$ |
|------------------------------------|-------|----------------|-------|-------|-------------------|-------|
| I. přiměřená obtížná 1. úloha      | 0     | <b>-2 až 2</b> | -     | 0,9   | 1,2               | -     |
| II. velmi jednoduchá 1. úloha      | -2    | <b>-2 až 2</b> | -     | 0,9   | 1,2               | -     |
| III. dobře diskriminující 1. úloha | -0,5  | 0,5            | -     | 0,9   | <b>0,5 až 1,5</b> | -     |
| IV. málo diskriminující 1. úloha   | -0,5  | 0,5            | -     | 0,5   | <b>0,5 až 1,5</b> | -     |
| V. přiměřená obtížná 1. úloha      | 0     | <b>-2 až 2</b> | 0,25  | 0,9   | 1,2               | 1     |
| VI. velmi jednoduchá 1. úloha      | -2    | <b>-2 až 2</b> | 0,25  | 0,9   | 1,2               | 1     |
| VII. dobře diskriminující 1. úloha | -0,5  | 0,5            | 0,25  | 0,9   | <b>0,5 až 1,5</b> | 1     |
| VIII. málo diskriminující 1. úloha | -0,5  | 0,5            | 0,25  | 0,5   | <b>0,5 až 1,5</b> | 1     |

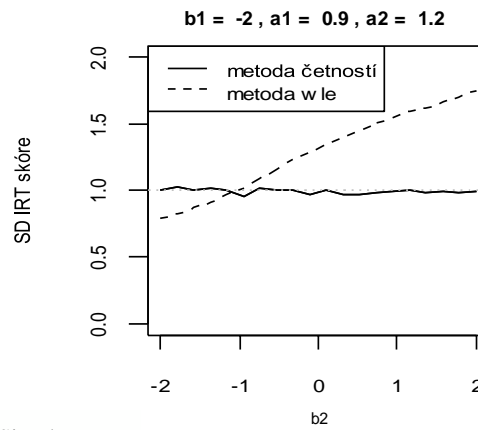
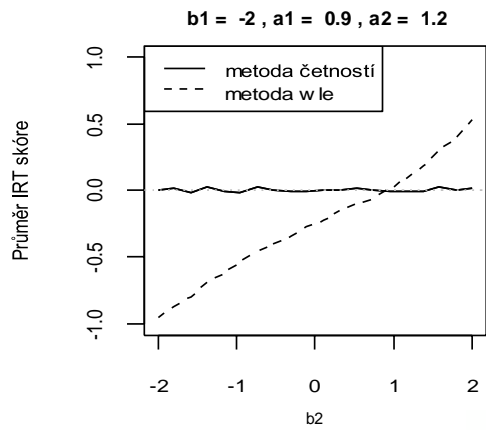
V každé replikaci se pro 1000 různých respondentů náhodně vygenerovalo IRT skóre z normálního rozdělení s průměrem 0 a směrodatnou odchylkou 1. Při použití dvouparametrického modelu by skupina respondentů neměla být nižší než 1000, jde tedy o jakýsi minimální přijatelný počet. Pak se vygenerovala náhodná matice odpovědí vzhledem k daným parametrům položek a tomuto skóre. Následně se spočítaly skutečné (napozorované) četnosti všech možných vzorců odpovědí. Dále se spočítaly teoretické četnosti vzorců odpovědí pro různé hodnoty průměru a směrodatné odchylky IRT skóre respondentů, konkrétně pro hodnoty průměru  $-1; -0,98; -0,96; \dots; 0,98; 1$  a pro hodnoty směrodatné odchylky  $0,5; 0,52; 0,54; \dots; 1,48; 1,5$ , což představuje celkem 5 151 různých kombinací. Pomocí chí-kvadrát testu dobré shody skutečných a teoretických četností vzorců odpovědí se nakonec vybrala taková hodnota průměru a směrodatné odchylky, pro kterou si byly teoretické a skutečné četnosti nejbližší (tj. statistika chí-kvadrát testu byla nejmenší). Následně se IRT skóre respondentů odhadlo metodou *WLE* a spočítal se jeho průměr a směrodatná odchylka za celou skupinu. Totéž se zopakovalo v každé replikaci a spočítala se průměrná hodnota průměru a průměrná hodnota směrodatné odchylky, které byly získány jednotlivými metodami, napříč všemi replikacemi. Stejně se postupovalo v případě všech 160 kombinací položek.

## 3 VÝSLEDKY

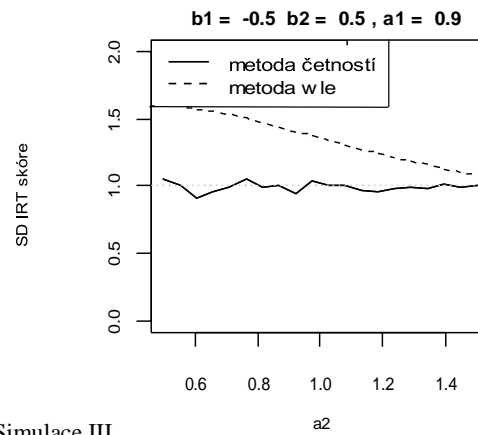
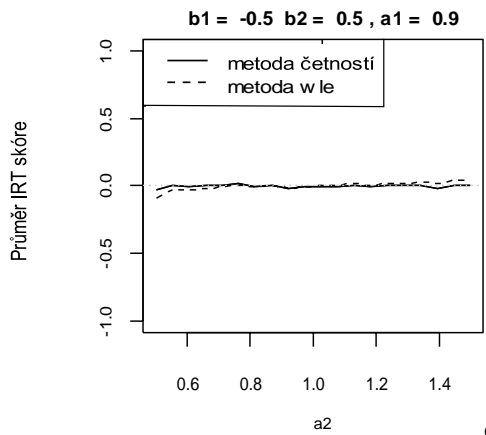
Výsledky budou prezentovány nejprve ve formě grafů zachycujících průměr z odhadnutého průměru a průměr z odhadnuté směrodatné odchylky napříč všemi replikacemi každou z uvedených dvou metod, a to pro každou z osmi simulací. Na horizontální ose je parametr položky, který se v příslušné simulaci měnil. Na vertikální ose je odpovídající průměrný odhad průměru, resp. směrodatné odchylky IRT skóre skupiny.



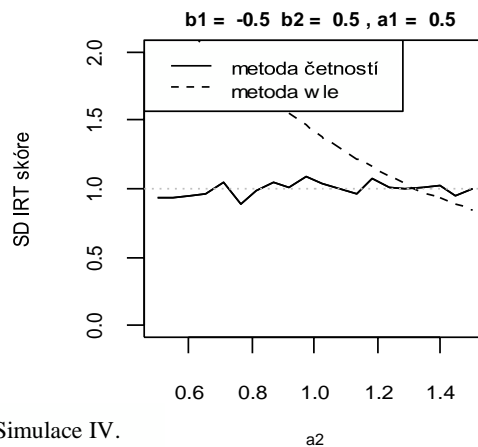
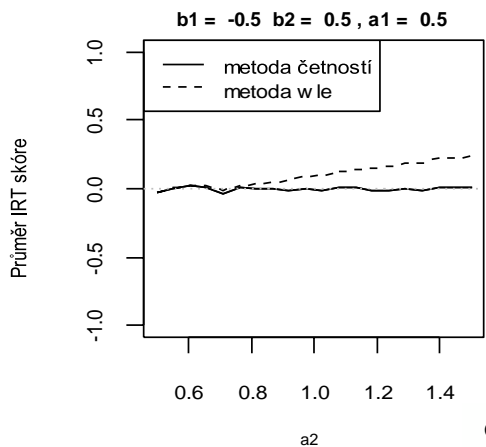
Obr. 1: Simulace I.



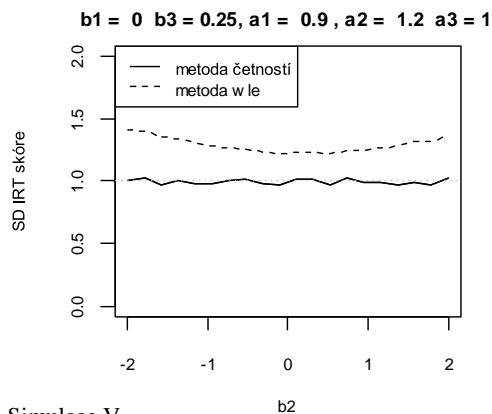
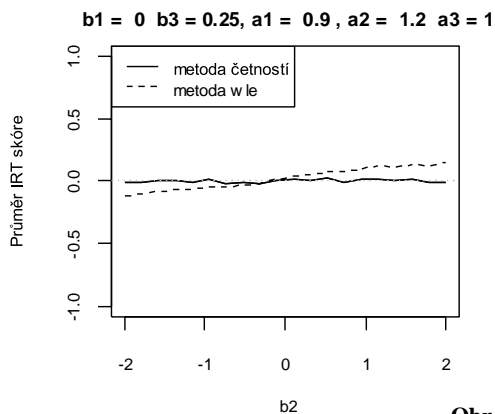
Obr. 2: Simulace II.



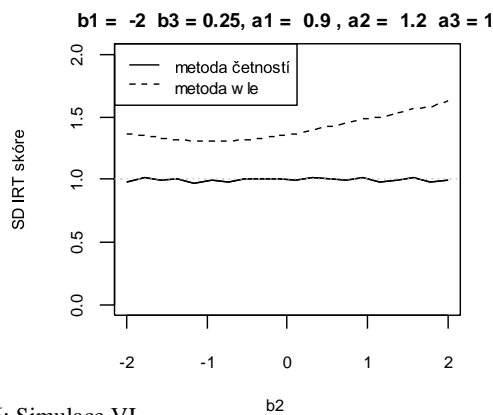
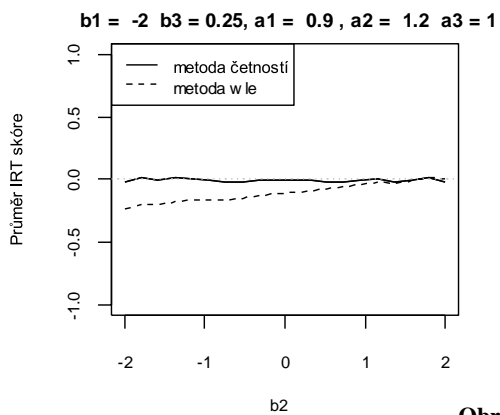
Obr. 3: Simulace III.



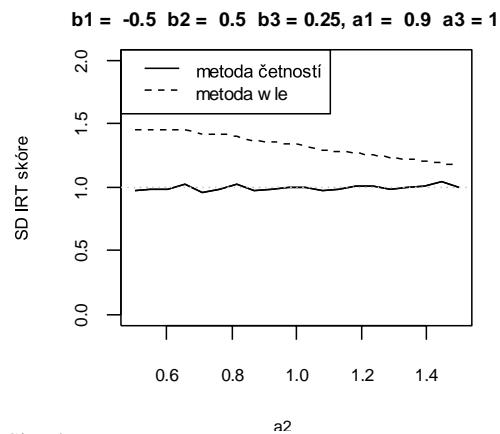
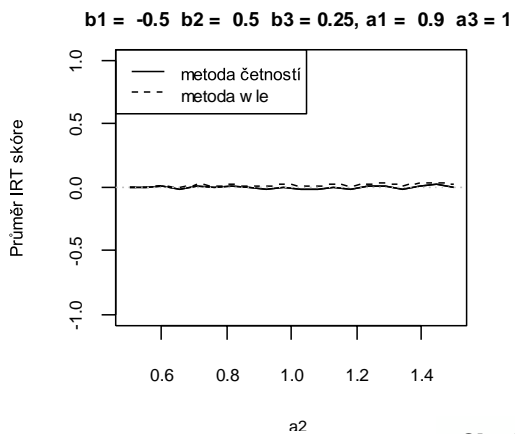
Obr. 4: Simulace IV.



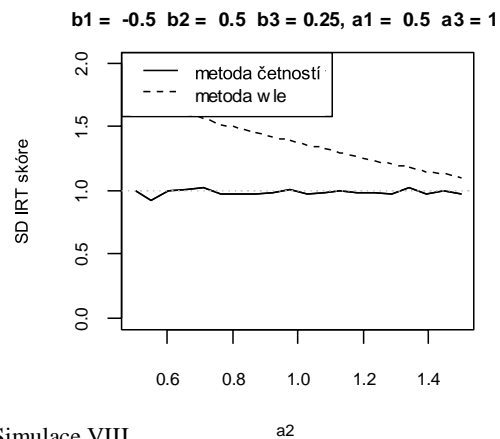
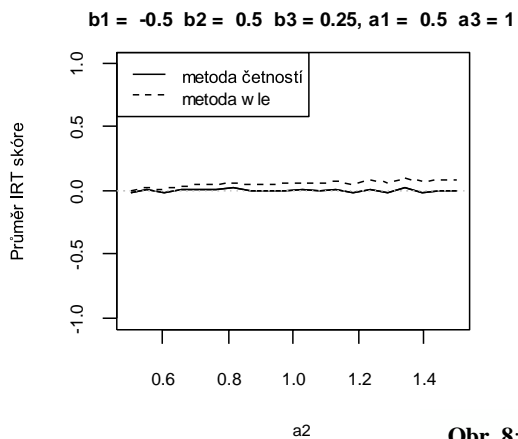
Obr. 5: Simulace V.



Obr. 6: Simulace VI.



Obr. 7: Simulace VII.



Obr. 8: Simulace VIII.

V simulaci I byly respondentům předloženy pouze 2 položky, přičemž obtížnost první položky byla přiměřená schopnostem testované skupiny ( $b_1 = 0$ ). Odhad průměru skupiny pomocí *WLE* byl v případě, že byla druhá položka jednodušší než první, podhodnocen, v opačném případě nadhodnocen (viz Obr. 1). Jsou-li v testu pouze 2 položky, mohou respondenti získat právě 4 možné hodnoty *WLE* skóre, neboť u dvouparametrického modelu se *IRT* skóre váží hodnotou diskriminace, takže zodpoví-li respondent správně lépe diskriminující položku, bude mít vyšší skóre, než když zodpoví správně hůře diskriminující položku. V případě jednoduché druhé položky byla hodnota imperfektního skóre, tzn. skóre při obou nesprávných odpovědích, velmi nízká. Tedy dovednosti respondenta, který nezodpověděl ani jednu z obou položek, sejevily jako velmi špatné, protože tyto položky byly relativně jednoduché, a on je přesto nedokázal zodpovědět. Zároveň při pouhých dvou položkách získalo toto nízké imperfektní skóre poměrně hodně respondentů, a byla jim tedy v mnoha případech přiřazena výrazně nižší hodnota *IRT* skóre, než by odpovídalo skutečnosti, což vedlo k podhodnocení průměru skupiny jako celku. Obdobně pro těžkou druhou položku se průměr nadhodnotil, protože mnoho respondentů bylo při pouhých dvou položkách schopno dosáhnout perfektního skóre (mít obě položky správně), které je v případě těžkých položek vysoké. Směrodatná odchylka *IRT* skóre byla při všech kombinacích nadhodnocena. Oproti tomu odhad pomocí četnosti kombinací byl již při pouhých dvou položkách poměrně přesný, a to jak průměr, tak směrodatná odchylka. V případě přidání třetí položky ( $b_3 = 0,25$ ), čemuž odpovídala simulace V, byl odhad průměru pomocí *WLE* také již relativně přesný, ale směrodatná odchylka byla stále ještě nadhodnocena (viz Obr. 5).

V simulaci II se test skládal ze dvou položek, přičemž první položka byla pro testovanou skupinu příliš jednoduchá ( $b_1 = -2$ ), což ještě zvýšilo chybu odhadu průměru pomocí *WLE* skóre (viz Obr. 2). Průměr byl odhadnut přesně jen v případě, kdy se obtížnost druhé položky pohybovala okolo 1. Obecně pro přesný odhad skóre potřebuje metoda *WLE* položky s obtížnostmi rozložené po celé škále skóre. Pro druhou položku obtížnější než 1 byl již odhad průměru opět nadhodnocen ze stejného důvodu jako při simulaci I (příliš vysoké perfektní skóre, kterého dosáhlo relativně hodně respondentů), k čemuž přispěl i fakt, že druhá (těžší) položka diskriminovala lépe než první ( $a_1 = 0,9$ ,  $a_2 = 1,2$ ). Směrodatná odchylka skóre byla nadhodnocena v případě, že obtížnost druhé položky překročila hodnotu  $-1$ . Oproti tomu odhady pomocí kombinace četností byly ve všech případech poměrně přesné. Po přidání třetí položky (simulace VI) byly výsledky podobné jako u simulace V (viz Obr. 6).

V simulaci III byla obtížnost obou položek, které tvořily test, přiměřená dovednostem skupiny ( $b_1 = -0,5$ ,  $b_2 = 0,5$ ). Diskriminace první položky byla 0,9, což je považováno za relativně vysokou hodnotu. Průměr skóre byl i metodou *WLE* odhadnut vcelku přesně, směrodatná odchylka skóre skupiny byla však v případě málo diskriminující druhé položky výrazně nadhodnocena (viz Obr. 3). Odhad rozptylu skupiny totiž souvisí s odhadem diskriminace: tyto hodnoty jsou nepřímo úměrné, protože parametry položek a osob jsou na jednotné škále, takže nižší hodnoty diskriminace všech položek obvykle vedou k nadhodnocení rozptylu a naopak, zejména je-li jich málo. Směrodatná odchylka zůstala nadhodnocena i v případě přidání třetí, dobře diskriminující položky (simulace VII, viz Obr. 7). Oproti tomu metoda využívající relativní četnosti odhadla směrodatnou odchylku *IRT* skóre výrazně přesněji.

Výsledky simulace IV, v níž byla druhá položka špatně diskriminující s hodnotou diskriminace rovnou 0,4, jsou obdobné simulaci III s tím rozdílem, že chyba odhadu byla u metody *WLE* ještě větší, zatímco metoda pracující s relativními četnostmi i zde poskytla dobré výsledky (viz Obr. 4). Stejně tak výsledky simulace VIII jsou podobné výsledkům simulace VII (viz Obr. 8).

## 4 ZÁVĚR

Je patrné, že odhad IRT skóre metodou pomocí četností kombinací odpovědí je přesnější ve srovnání s metodou *WLE*, a to téměř při jakkoli specifikovaných hodnotách parametrů položek. Je však potřeba upozornit na několik potenciálních problémů souvisejících s touto metodou.

Zprvé počet kombinací odpovědí exponenciálně roste s počtem položek, takže použít tuto metodu na větší počet položek by bylo značně výpočetně náročné. Zadruhé metoda nijak nepracuje s diskriminací položek, která dává správným odpovědím na jednotlivé položky různou váhu, zatímco dvouparametrický model ano. Zatřetí by problémem mohla být situace, kdy někteří respondenti na položku vůbec neodpovídali (tzn. jejich odpověď je označena jako *NA*). Odpověď *NA* se v některých případech přiřazuje respondentům, u kterých se dá očekávat, že položku ani nečetli, a tedy nevíme, jestli by ji uměli vyřešit nebo ne, protože kdyby se nečtená položka automaticky považovala za nesprávně vyřešenou, mohla by být její obtížnost nadhodnocená. Odpovědi *NA* jsou ale pravděpodobnější v případě slabších respondentů, a vyřazení jejich odpovědí by tedy mohlo dovednosti skupiny jako celku nadhodnocovat. V případě většího podílu *NA* by bylo potřeba postupovat jinou cestou. Začtvrté tato metoda vychází z předpokladu normálního rozdělení IRT skóre, což nemusí odpovídat skutečnosti.

Pokud by tedy došlo k situaci, kdy by kotvících položek v testu bylo velmi málo, bylo by potřeba pečlivě zvážit přínosy i rizika metody pracující s četností kombinací odpovědí na kotvící položky. Vzhledem k výrazně přesnějším výsledkům oproti metodě *WLE* by však mohlo jít i přes uvedená rizika o vhodné řešení.

## Použitá literatura

1. PARTCHEV, I. *A visual guide to the item response theory* [online]. Friedrich Schiller University at Jena, 2004 [cit. 26. 10. 2014]. Dostupné z: <https://www.metheval.uni-jena.de/irt/VisualIRT.pdf>
2. PANG, X., MADERA, E., RADWAN, N. a ZHANG, S. *A Comparison of Four Test Equating Methods*. Education Quality and Accountability Office [online]. 2010, str. 3, [cit. 26.10.2014]. Dostupné z: [http://www.eqao.com/Research/pdf/E/Equating\\_Crp\\_cftem\\_ne\\_0410.pdf](http://www.eqao.com/Research/pdf/E/Equating_Crp_cftem_ne_0410.pdf)
3. ASSESSMENT SYSTEMS CORPORATION. *Ability estimation with IRT*. [online]. 2009 [cit. 26. 10. 2014]. Dostupné z: [http://www.assess.com/docs/Thompson\\_\(2009\)\\_-Ability\\_estimation\\_with\\_IRT.pdf](http://www.assess.com/docs/Thompson_(2009)_-Ability_estimation_with_IRT.pdf)
4. VAN DE SANDEN, P.: *The Warm Weighted Maximal Likelihood* [online]. 2005 [cit. 26. 10. 2014]. Dostupné z: <http://members.ziggo.nl/peervandesanden/portfolio/docs/PaperCatAEM.pdf>
5. SCIO, s. r. o. Hučín, J.: *Metoda odhadu skóre pomocí četností kombinace odpovědí* [interní dokumentace]. 2013.

## Kontaktní údaje

Ing. Lenka Fířtová  
Vysoká škola ekonomická v Praze  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
tel: 739 840 803  
e-mail: [lenka.firtova@vse.cz](mailto:lenka.firtova@vse.cz)

Mgr. Jan Hučín  
www.scio.cz, s.r.o.  
Pobřežní 34, 186 00 Praha 8  
tel.: 234 705 555  
e-mail: [jhucin@scio.cz](mailto:jhucin@scio.cz)

# MODELY DYNAMICKÉ KORELACE A JEJICH ASYMETRICKÉ CHOVÁNÍ

## ASYMMETRIC BEHAVIOUR OF DYNAMIC CONDITIONAL CORRELATION MODEL

*Lukáš Frýd*

### **Abstrakt**

Práce se zabývá modelem podmíněné korelace Dynamic conditional correlation (DCC) a jeho dvěma přizpůsobením pro popis asymetrického chování na úrovni jednotlivých časových řad, tak pro popis vzájemného asymetrického vztahu. Modely jsou aplikovány na denní časové řady indexu Dow Jones a Crude Oil Futures, pro roky 2006-2013. V práci se podařilo zamítnout hypotézu o konstantním podmíněném rozptylu a naopak se nepodařilo prokázat asymetrické chování mezi uvedenými časovými řadami.

***Klíčová slova:** podmíněná korelace, asymetrické modely, vícerozměrné časové řady*

### **Abstract**

The paper investigate the relationship between Dow Jones index and Crude Oil Futures daily price from 2006 to 2013. Both time series are fitted by the Dynamic conditional correlation model and their asymmetric variants. The conclusion is that we can not accept the hypothesis about asymmetric behaviour in the time series but we are able to accept time dependent conditional correlation.

***Key words:** conditional correlation, asymetrické modely, vícerozměrné časové řady*

## **1 ÚVOD**

Již mnoho toho bylo napsáno na téma podmíněná volatilita finančních aktiv (podmíněný rozptyl). Víme, že kvadráty residuí jsou autokorelované Engle(1982), kdy nejběžnějším modelem popisu jejich chování je model GARCH Bollerslev(1986). Dále je známa asymetrická reakce volatility na nové informace, tzv. pákový (leverage) efekt GJR-GARCH Glosten, L., R. Jagannathan and D. Runkle (1992) . Důvody tohoto chování se pokusil vysvětlit Black (1976) a Christie (1982) pomocí změny ukazatele „debt-to-equity ratio“, dále



*Campbell a Hentschel (1992)*, kteří hledali příčiny v chování rizikově averních investorech, nebo *Bekaert a Wu (2000)*, kteří se přiklání k určité kombinaci efektů.

My v této práci využijeme výše uvedené poznatky, které však budeme aplikovat na podmíněnou kovarianci (korelaci). První modely pro popis podmíněné kovariance byly model *VECH Bollerslev, Engle a Wooldridge (1988)* a v současnosti nejpoužívanější *BEKK model Engle, Kroner, Baba a Kraft (1995)*.

Značná část literatury se pak zabývá pouze binárními vztahy a to z důvodu existence tzv. **curse of dimensionality**“ *Engle (2002)*., kdy při růstu počtu zkoumaných časových řad, jsou výše uvedené metody neadekvátní z důvodu velkého množství odhadovaných parametrů a následné problémy se zajištěním pozitivně definitní kovarianční matice *Engle (2009)*.

Z těchto důvodu byl vytvořen model Constant conditional correlation (CCC) *Bollerslev (1990)*, který pracuje s restrikcí, že korelace mezi aktivy je konstatní v čase. Dalším modelem, který již nepracuje s výše uvedenou restrikcí je **Dynamic conditional correlation (DCC)** *Engle (2002)*.

Například *Ragunathan a Mitchell (1997)*, kteří nepřijali hypotézu o konstatní korelace mezi MSCI indexech pomocí diagonálního *VECH* modelu a CCC modelu. O asymetrické chování vztahu mezi akciemi velkých a malých firem se zajímali *Kroner a Ng (1998)*. V této práci jsou využili modely *VECH*, *BEKK*, *CCC*, *DCC* a jejich asymetrické varianty. Stejně jako oni, i my v praktické části dospějeme k ne zcela jednoznačným výsledkům. Model *DCC* a jeho asymetrická verze *ADCC* byl využit i pro popsání vztahů mezi středoevropskými burzami *Gjika a Horváth (2012)*. Podařilo se jim potvrdit hypotézu o asymetrickém chování mezi jednotlivými burzami.

Pro účely risk managementu, můžeme nalézt rozsáhlé porovnání jednotlivých modelů zejména od *Engle a Shepparda*, *Engle (2002)*, *Engle a Sheppard (2001)*, *Cappiello a Sheppard (2006)*, kteří dospěli k závěrům, že se model **DCC** jeví jako nejvhodnější, jak z hlediska aplikace (nenáročnosti odhadu), tak jeho predikčních schopností.

V uvedené práci se zaměříme na vztah mezi indexem Dow Jones a cenou Crude Oil Futures. Budem zkoumat, zda-li mezi uvedenými řadami existuje asymetrický vztah a dále pokud můžeme zamítnout hypotézu o konstatní podmíněné korelaci.

## 2 ODHAD MODELU

Model DCC a jeho asymetrická verze ADCC, jsou postaveny na modelu GARCH. Jejich výhodou, kromě snažšího odhadu, než v případě VECH a BEKK modelů je také možnost odhadnout každou časovou řadu zvlášť a to ať jiným typem modelu GARCH, nebo i jiným modelem pro podmíněnou volatilitu, jakou jsou modely HAR *Corsi, (2009)*, nebo modely pro stochastickou volatilitu. V této práci však využijeme pouze modely ze skupiny GARCH.

Vyjděme z předpokladu, že vektor výnosů  $r_t$  má podmíněné rozdělení:

$$r_t | F_{t-1} \sim N(0, H_t) \quad (1)$$

Kde  $F_{t-1}$  představuje filtraci do času  $t-1$  a  $H_t$  je kovarianční matice. Kovarianční matici si můžeme zapsat jako:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (2)$$

Kde  $R_t$  je podmíněná korelační matice a  $D_t$  představuje diagonální matici podmíněných směrodatných odchylek. Tyto podmíněné směrodatné odchylky odhadneme pomocí vhodné zvoleného modelu GARCH. Po odhadu standardizujeme výnos  $r_t$ :

$$\eta_t = \widehat{D}_t^{-1} r_t \quad (3)$$

Prostřednictvím standardizovaných výnosů  $\eta_t$  odhadneme tzv. **kvazi-korelační matici  $Q_t$** . Nejedná se o nic jiného, než že budeme aplikovat modely kovariance, tentokrát však na standardizované výnosy. Z důvodu využití matlab kodu od *Kevina Shepparda*, který při odhadu kvazi-korelační matice využívá “korelační cílování”, si popíšeme tento proces odhadu:

$$Q_t = \pi + \alpha_1 \eta_{t-1} \eta'_{t-1} + \beta_1 Q_{t-1} \quad (4)$$

Kde  $\pi$  představuje úrovnovou konstantu. Tu odhadneme pomocí zmíněného korelačního cílování jako:

$$\bar{\pi} = (1 - \alpha_1 - \beta_1) \bar{R} \quad (5)$$

Kdy

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \eta_{t-1} \eta'_{t-1}$$

Jedná se tak o nepodmíněnou korelaci standardizovaných výnosů.

Po dosazení do rovnice 4 získáme:

$$Q_t = \bar{R} + \alpha_1(\eta_{t-1} \eta'_{t-1} - \bar{R}) + \beta_1(Q_{t-1} - \bar{R}) \quad (6)$$

Pro zobrazení podmíněné korelace, je třeba využít tzv. rescaling. Problém kvazi-korelační matice  $Q_t$  je ten, že může nabývat hodnot mimo interval  $< -1, 1 >$ . Podmíněnou korelaci  $R_t$  tak získáme následovně:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Asymetrický **DCC** model můžeme modelovat ve dvou verzích. První z nich je předpoklad asymetrického chování na úrovni jednotlivých volatilit (**DCCA**). To poté znamená, modelovat  $\hat{D}_t$  pomocí vhodného modelu, například GJR-GARCH(1,1), tvar rovnice 6 zůstává stejný. Druhou možností je zahrnout asymetrické chování i do podmíněné korelace (**ADCC**). V takovém případě se rovnice 6 upraví podle *Cappiello, Engle, Sheppard (2006)* do tvaru:

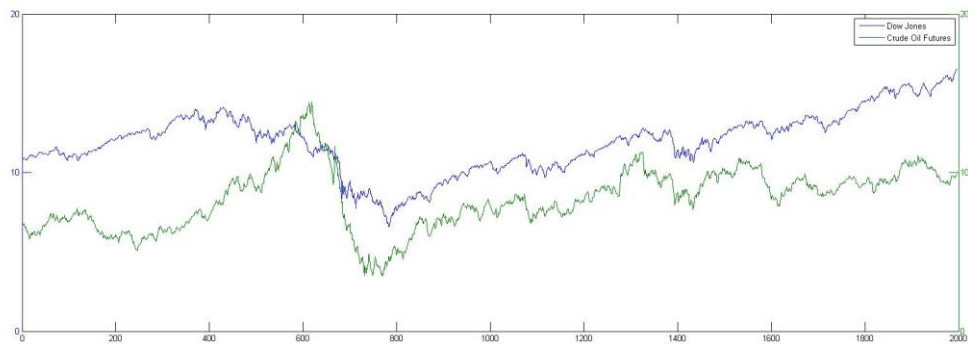
$$\begin{aligned} Q_t &= (1 - \alpha_1 - \beta_1)\bar{R} - \gamma_1\bar{N} + \alpha_1\eta_{t-1}\eta'_{t-1} + \gamma_1\Gamma_{t-1}\Gamma'_{t-1} + \beta_1Q_{t-1} \\ \Gamma_t &= I[\eta_t < 0] \odot \eta_t \\ \bar{N} &= E(\Gamma_{t-1}\Gamma'_{t-1}) \\ \bar{R} &= E(\eta_{t-1}\eta'_{t-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 EMPIRICKÁ ČÁST

V praktické části využijeme data dvou časových řad a to vývoje ceny indexu Dow Jones (DJ) (finance.yahoo.com) a ceny Crude Oil Futures (investing.com) od 26.1.2006 do 30.12.2013 na denní bázi. Vývoj cen časových řad, je zobrazen v grafu 1. Data jsme stacionarizovali pomocí logaritmické difference.

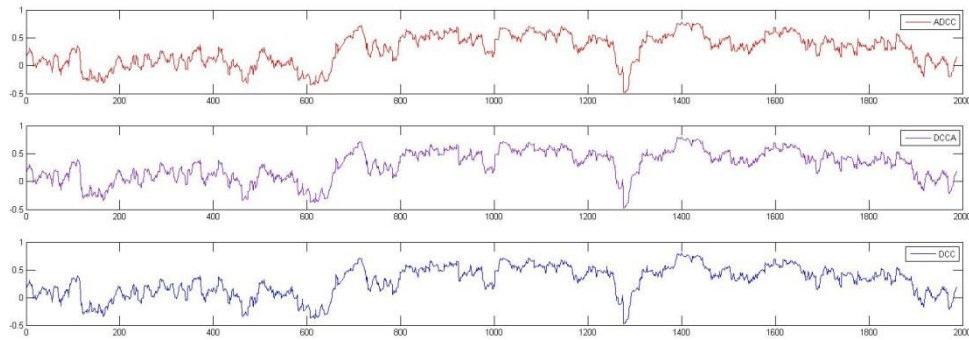
Postupně provedeme odhad modelu **DCC**, dále **DCCA**, ve kterém předpokládáme asymetrické chování na úrovni jednotlivých časových řad, ne však v rámci kovariance (korelace). Posledním modelem bude **ADCC**, kde předpokládáme i asymetrické chování mezi oběma časovými řadami. Vyhodnocení modelů bude založeno na hodnotě věrohodnostní funkce a t-statistiky.

Na grafu 2, můžeme vidět vývoj podmíněné korelace pro všechny tři uvedené modely. Pouhým pohledem je zřejmé, že všechny modely dosahují téměř identického popisu podmíněné korelace. To dokládají i hodnoty věrohodnostní funkce v tabulce 1 a hodnoty parametrů jednotlivých modelů (není v práci uvedeno). Všechny parametry jednotlivých modelů jsou signifikantní na hladině významnosti 5% a nižší, kromě parametru  $\gamma$  z rovnice 8. Nepodařilo se nám tak dokázat asymetrický vztah mezi vývojem výše zmíněných časových řad.



Graf 1. Vývoj cen Dow Jones a Crude Oil Futures od 26.1.2006 do 30.12.2013

Na grafu 1 můžeme pozorovat dopad krize na obě časové řady v jejich poklesu. Následně po odražení ode dna, vzrostl vzájemný lineární vztah mezi časovými řadami, jak dokládá graf 2. Ze samotného grafu 2 je také zřejmé, že korelace se mění v čase, tedy nemůžeme jí považovat za konstantní jako v případě CCC modelu.



Graf 2. Modely podmíněné korelace mezi Crude Oil Futures a indexem Dow Jones

|             | <b>Log-likelihood</b> |
|-------------|-----------------------|
| <b>DCC</b>  | 12652,42              |
| <b>DCCA</b> | 12652,42              |
| <b>ADCC</b> | 12720,24              |

Tabulka 1. Hodnoty věrohodnostních funkcí pro jednotlivé modely

## 4 ZÁVĚR

V uvedené práci jsme zkoumali vztah mezi výnosy z Dow Jones indexu a Crude Oil Futures. Nepodařilo se nám prokázat hypotézu a asymerickém chování, mezi uvedenými časovými řadami. Dále jsme zjistili, že korelace není v čase konstantní, ale vzájemný vztah se pohybuje mezi  $(-0,5; 0,8)$ . Z grafu 2 je také vidět, jak pokrizové období znamenalo „užší“ vztah mezi vývoji výnosů obou aktiv. Pokud bychom uvažovali index Dow Jones, jako aproximaci ekonomické aktivity, nemůžeme konstatovat, že cena ropy zásadně ovlivňuje ceny společností v indexu. Pro další zkoumání by bylo třeba zařadit zpoždění, kdy můžeme předpokládat, že díky hedgování firem, se cena ropy promítne v nákladech firem až s určitým zpožděním.

## REFERENCE

1. Bollerslev T., Engle F., Wooldridge J. M.. A capital-asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy* 96 (1988), 116-131
2. Bollerslev T. 1990. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH approach. *Review of Economic and Statistics*, 72, 498-505.
3. Bollerslev, T., 1986. Generalised autoregressive conditional heteroskedasticity: *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

4. Bollerslev, T. and J.M. Wooldridge,1992. Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances: *Econometric Reviews*, 11, 143-173.
5. Black, F. 1976. Studies of Stock Prices Volatility Changes: Proceeding from the American Statistical Association, Business and Economics Statistics Section 177–181.
6. Bekaert, G., and G. Wu.2000. Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets.’ *Review of Financial Studies* 13, 1–42.
7. Billio, M., Caporin, M. and Gobbo, M., 2006. Flexible dynamic conditional correlation multivariate GARCH for asset allocation: *Applied Financial Economics Letters*, 2, 123-130.
8. Billio, M., Caporin, M.2008. A generalized Dynamic Conditional Correlation model for portfolio risk evaluation: *Mathematics and Computers in Simulation* 79 (2009) 2566–2578
9. Brownless, T., C., and Engle, R. 2010. Volatility, Correlation and Tails for Systematic Risk Measurement: Department of Finance, Stern School of Business, New York University
10. Cappiello, L., Engle, R.F. and Sheppard, K. 2006. Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns: *Journal of Financial Econometrics*, 4(4), 537–572
11. Cappiello, L.2000. Do fixed income securities also show asymmetric effects in condition second moments?: European Central Bank (July 2000)
12. Campbell, John Y. and Ludger Hentschel, (1992). No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns,*Journal of Financial Economics* 31, 281–318
13. Christie, A. A., 1982. The Stochastic Behaviour of Common Stock Variances-Value, Leverage and Interest Rate Effects: *Journal of Financial Economics*, 3, 145-166
14. Chiang, C.,T., and Li, Jiandong 2009. The Dynamic Correlation Between Stock and Bond Returns: Evidence from the U.S. Market: Department of Finance, LeBow College of Business, Drexel University, Chinese Academy of Finance and Development (CAFD), Central University of Finance and Economics (CUFE)
15. Egert, B. and Kocenda, E. 2011. Time-Varying Synchronization of European Stock Markets: *Empirical Economics*, 40(2), 393–407.
16. Engle, R. F. *Anticipating Correlations, a New Paradigm for Risk Management*. Princeton: Princeton University Press, 2009. 151 pages. ISBN: 978-0-691-11641-9.
17. Engle, R.F. Dynamic conditional correlation-a simple class of multivariate GARCH models: NYU Working Paper No. S-DRP-02-01, 2002. 34 pages.
18. Engle R. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation: *Econometrica*, Vol.50, No.4 (Jul.1982), pp. 987 – 1007
19. Engle, R.2002. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339-350
20. Engle F., Sheppard K. 2001. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, NBER Working Paper No. 8554
21. Engle R. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol.50, No.4 (Jul.1982), pp. 987 – 1007
22. Engle R. F., Ng V. K. Measuring and Testing the Impact of News On Volatility. *Journal of Finance* 1993;48:1749-1778.

23. Engle, R. F., and K. F. Kroner 1995. Multivariate Simultaneous Generalized ARCH,.Econometric Theory, 11(01), 122.150.
24. Engle, R., & Riccardo C.2006. Testing and Valuing Dynamic Correlations for Asset Allocation: Journal of Business & Economic Statistics, 24:2, 238-253
25. Gjika, D., Horváth, R. 2013. Stock Market Comovements in Central Europe: Evidence from the Asymmetric DCC Model
26. Glosten, L., R. Jagannathan and D. Runkle,1992. On the relation between the expected value and volatility of nominal excess return on stocks: Journal of Finance, 46, 1779-1801.
27. Ragunathan, V., and Mitchell, H.1997. Modelling the Time-Varying Correlation Between National Stock Market Returns, Department of Economics and Finance Royal Melbourne Institute of Technology
28. Sheppard, K.2012. Financial Econometrics Notes. Oxford, 2012.  
[www.kevinsheppard.com](http://www.kevinsheppard.com)

### **Kontaktní údaje**

Ing. Lukáš Frýd

Vysoká škola ekonomická v Praze. Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4 130 67 Praha 3

email: [lukas.fryd@gmail.com](mailto:lukas.fryd@gmail.com)

# MODIFIKOVANÝ EOQ PRÍSTUP V CENOTVORBE PRODUKTOV S MOŽNOSŤOU VYUŽITIA RECYKLOVANÉHO MATERIÁLU

## MODIFIED EOQ APPROACH IN PRICING OF PRODUCTS WITH THE POSSIBILITY OF USING RECYCLED MATERIAL

*Pavel Gežík*

### Abstrakt

Tvorba ceny produktov je vždy úzko spätá s nákladmi a s istou predstavou výrobcu o zisku. Veľkosť zisku závisí hlavne od nákladov, a teda podnik ich musí minimalizovať. Pre podniky, ktoré majú najväčšie náklady spojené s nákupom materiálu potrebného pre výrobu môže byť využívanie recyklovaného, resp. opätovne prerobeného materiálu jeden zo spôsobov minimalizácie nákladov.

Predpokladá sa, že náklady spojené s nákupom recyklovaného a opätovne prerobeného materiálu sú nižšie ako náklady na nákup nového materiálu. Potom cieľom podniku môže byť určenie optimálneho množstva nákupu tak nového ako i recyklovaného materiálu. O tomto množstve hovorí EOQ prístup k nákup zásob.

**Kľúčové slová:** *Cenotvorba, Náklady, Zásoby, EOQ*

### Abstract

Pricing products is always closely related to the cost and to the certain idea of manufacturer's profit. The size of profit depends mainly on the costs and these costs have to be minimized by company. Using recycled or remanufactured materials can be one way to minimizing costs for companies that have the main part of costs associated with the purchase of materials for production.

It is assumed that the costs of purchase of recycled and remanufactured materials are not so expensive that the purchase cost of new material. Then, the aim of the company has to determine the optimum amount of purchase a new material and recycled material as well. About this quantity is EOQ approach to purchasing of inventory.

**Keywords:** *word, word, word*

## 1 ÚVOD

Využitie EOL (*End-of-Life*) produktov, teda produktov, ktoré sú po svojej životnosti na recykláciu resp. opätovné prerobenie môže byť zdrojom lacného materiálu, ktorý môže podnik využiť na svoju výrobu. Predpokladá sa, že druhotný materiál bude lacnejší ako nový materiál, a tak podnik môže ušetriť náklady spojené s nákupom materiálu potrebného pre výrobu. Prístupom využitia zásob z vrátených produktov (často označované ako „zásoby z návratu“) sa začali venovať rôzni autori začiatkom storočia. Hlavnými zástupcami boli *Drekker* (2004), *Fleischmann* (2000) alebo *Teuter* (2001), či *Tibben-Lembke* (2002). Práve ich práce sú založené na minimalizácii nákladov spojených so zásobami, a teda celkovej minimalizácii nákladov pre podnik s využitím recyklácie alebo iného opätovného zhodnotenia vrátených produktov.



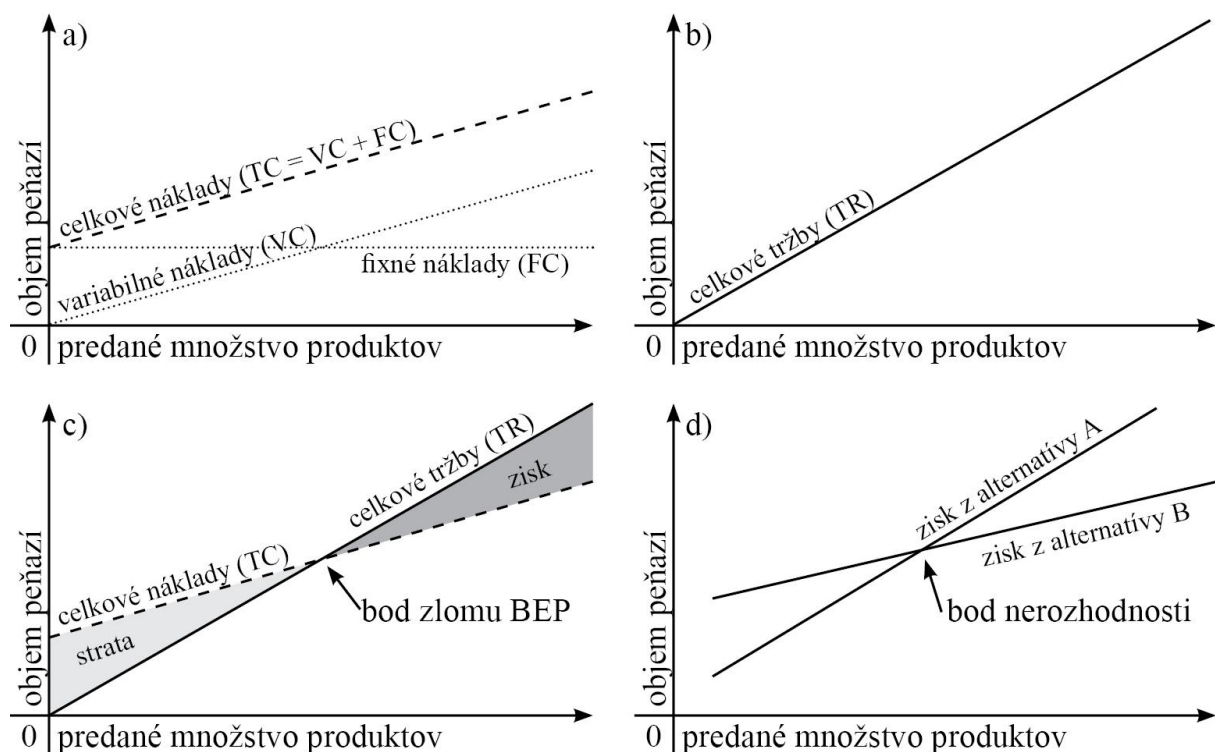
## 2 VZŤAH NÁKLADOV A TRŽIEB

Ako bolo už uvedené i pri recyklovateľnom tovare musí výrobca racionalizovať svoje správanie a nastaviť výrobu tak, aby dosahoval zisk. Vzťahy medzi nákladmi a tržbami tvoria základ pre každé rozhodovanie v podniku, ktorého cieľom je zisk a teda funguje na základe vzťahu „zisk = tržby – náklady“.

### 2.1 Základné vzťahy

Na obrázkoch nižšie sú načrtnuté základné vzťahy medzi nákladmi a tržbami, ako i bodmi zlomu, ktoré hovoria o produkovaných množstvách, od ktorých podnik dosahuje zisk<sup>1</sup>.

V časti obrázku a) sa jedná o určenie celkových nákladov (TC), na základe variabilných nákladov (VC) a fixných nákladov (FC), ktoré sa potom porovnávajú s celkovými tržbami (TR) z časti b) a na základe ich porovnania je možné určiť bod zlomu (BEP - *Break-Even-Point*) znázornený v časti c), ktorý označuje množstvo predaných produktov, za ktoré sa treba dostať, aby podnik dosahoval zisk. Časť d) hovorí o rôznych možnostiach zisku s rastúcim množstvom predaných produktov, čo predstavuje hlavný dôvod optimalizácie tohto množstva.

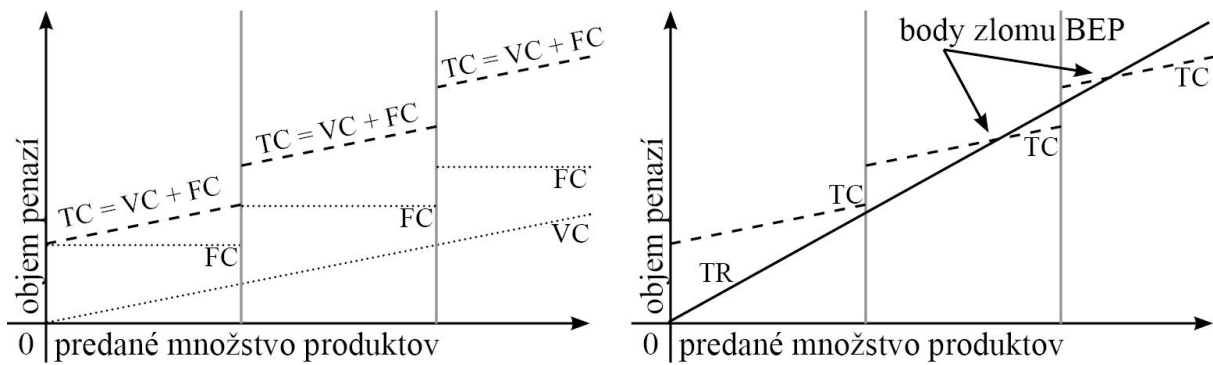


Obrázok 1 - Základné vzťahy medzi nákladmi a tržbami

### 2.2 Špecifiká v nákladoch

Na obrázkoch nižšie sú načrtnuté špecifiká, ktoré môžu nastať pri porovnávaní nákladov a tržieb. Jedná sa o určenie celkových nákladov (TC), na základe variabilných a fixných nákladov. Obrázky riešia problematiku fixných nákladov, keďže tie môžu rásť nielen lineárne podľa množstva predaných produktov ale i v intervaloch. Príkladom týchto intervalov sú najčastejšie priestory, keď k väčšiemu množstvu sa viažu väčšie výrobné miesta, sklady, alebo po istom množstve je nutné zabezpečiť napr. ďalší sklad, prepravný prostriedok, atď.

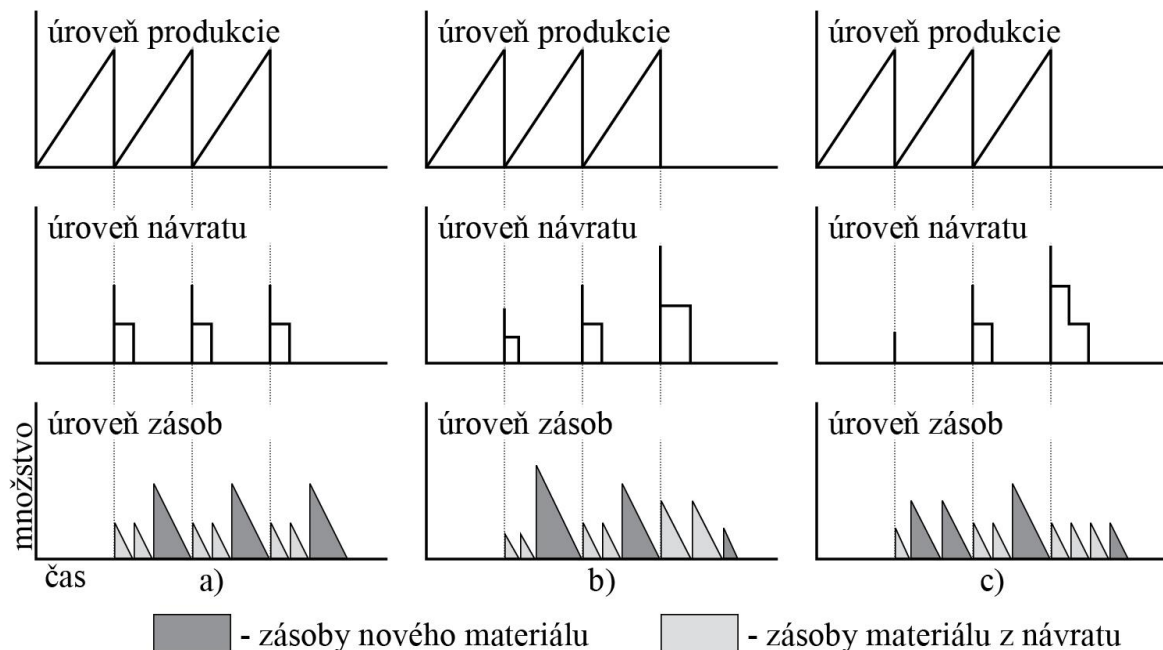
<sup>1</sup> Stevenson, w. J.: Operations Management. Irwin/McGraw Hill, 2009. ISBN: 0070091773



Obrázok 2 - Zlomovo rastúce fixné náklady

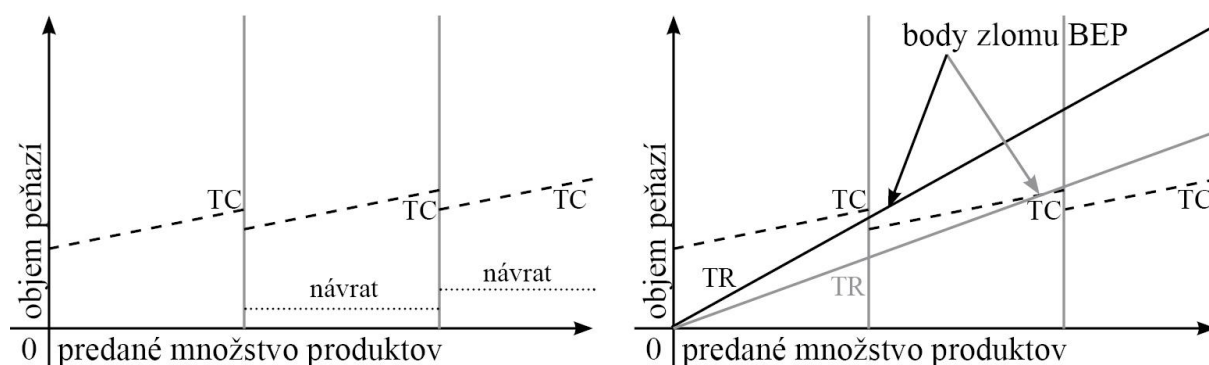
Vyššie uvedené špecifiká sú typické pre rozširujúcu sa výrobu alebo expanziu podniku. Pre výrobu, ktorá je spojená s opätovným prerobením alebo recykláciou sú typické „opačné“ špecifiká. Predpokladá sa, že priamo úmerne s časom od začiatku výroby sa zvyšuje i objem návratu EOL produktov za účelom ich opätovného prerobenia, recyklácie alebo iného použitia s cieľom minimalizovať náklady spojené s nákupom nových zásob potrebných na výrobu produktov.

Na obrázku nižšie je znázornená spomínaná situácia s narastajúcim návratom v závislosti od času. V časti a) je uvažované s rovnakým návratom po každom prechádzajúcom období v závislosti od predaného množstva v tomto období. Následne sa vychádza z predpokladu, že v priebehu niekoľkých období sa do spotreby dostane toľko produktov, že s odstupom času návrat začne narastať, resp. materiál získaný z vrátených produktov, bude vyšší ako nový materiál – predchádzajúci obrázok – časti b) a c). Rozdiel medzi časťami obrázku b) a c) spočíva v zmene buď výšky návratu, alebo intenzity návratu, avšak v konečnom dôsledku hovoria o rastúcom návrate v závislosti od času.



Obrázok 3 - Priebeh rastúceho návratu v čase

Vychádzajúc z týchto skutočností je možné znázorniť špecifiká v nákladoch s klesajúcimi nákladmi. Tieto klesajú s množstvom predaných produktov, a to v intervaloch ako rastie ich návrat po použití späť k výrobcovi. Výrobca nemusí objednávať už rovnaké množstvo nových zásob, ktoré sú drahšie ako využívanie recyklovaných, resp. opätovne prerobených zásob potrebných pre výrobu. V závislosti od návratu môže výrobca zvýšiť svoj zisk, ale i znížiť cenu tovaru, čím získa istú konkurenčnú výhodu. Tieto špecifiká v nákladoch sú znázornené zlomovo klesajúcimi nákladmi v obrázku.



Obrázok 4 - Zlomovo klesajúce náklady

### 3 VÝPOČET NÁKLADOV ZÁSOB

Funkcia celkových nákladov je pri produktoch, ktoré využívajú recykláciu, resp. opätovné prerobenie zväčša spojená so zásobami. Ostatné náklady spojené s produkciou sú často rovnaké bez ohľadu na materiál, ktorý je využitý. Napr. pri recyklácii sklenených fliaš sú náklady s plnením rovnaké bez ohľadu na to, či sa plní nová alebo recyklovaná fľaša. To isté platí pre recyklované tonery, atď.

#### 3.1 EOQ – Efektívna veľkosť objednávky

Optimalizácia nákladov spojených so zásobovacími procesmi je reprezentovaná práve minimalizáciou nákladovej funkcie. Tá je tvorená nákladmi spojenými s obstarávaním zásob ako i z ich skladovaním a základ optimalizácie spočíva v EOQ<sup>2</sup> prístupe. Tento prístup je možné modifikovať tak, že sa hľadá také množstvo, pri ktorom funkcia celkových nákladov zohľadňuje nielen náklady spojené s novými zásobami, ale už i náklady vyvolané návratom produktov. Množstvo, ktoré je potom určené na základe nájdenia lokálneho minima funkcie celkových nákladov je považované za optimálne množstvo, ktoré je potrebné objednať, resp. zaobstarat' z vrátených produktov aby bola zabezpečená výroba.

Jedná sa o modely s pevným objednávkovým množstvom a k objednaniu dochádza vtedy, keď hladina zásoby dosiahne svoju špecifickú úroveň, ktorá zodpovedá momentu objednania (*reorder point*,  $r_p$ ). Na objednanie je určená dávka, ktorá sa nazýva ekonomické objednávkové množstvo, resp. hospodárna veľkosť objednávky.

Ďalšou veličinou, ktorú sa tieto modely snažia optimalizovať je dodávkový cyklus, ktorý je pri nových zásobách charakterizovaný ako čas medzi príchodom objednávky na sklad a momentom vyčerpania zásob. V modifikácii možno za dodávkový cyklus považovať čas medzi príchodom vrátených a nových zásob do momentu vyčerpania všetkých zásob. Tento čas je závislý od čerpania zásob, teda od spotreby zásob a od už spomínanej veľkosti objednávky.

<sup>2</sup> *Economic Order Quantity*

### 3.2 Modelovanie EOQ prístupu pre nové zásoby i zásoby z návratu

Z klasických deterministických modelov zásob je najznámejší model hospodárnej veľkosti objednávok, ktorý určuje optimálnu veľkosť vyrábaných dávok (*batches*), resp. dodávok. K všeobecným predpokladom, ktoré sú platné patrí, že materiál je dodávateľmi produkovaný a dodávaný v určitých množstvách – dávkach špecifickej veľkosti (*lot size*).

Stanovenie veľkosti objednávky (*order size*) – objemu zásob  $Q$  (*quantity*) – je proces určujúci koľko materiálu treba objednať k určitému časovému okamihu, prípadne v stanovenom časovom intervale. Rovnaký predpoklad bude platiť o získaní zásob z návratu. Zásoby recyklovateľného alebo opätovne prerobeného materiálu si podnik zaobstará k tomuto istému časovému okamihu. Podnik môže takéto zásoby z návratu získavať vo vlastnej réžii alebo prostredníctvom tretích strán.

Model EOQ je vo všeobecnosti známy model a nie je nutné ho objasňovať, a tak isto popisovať jeho predpoklady. Tieto predpoklady sú napr. - objednávanie je v moci odberateľa, spotreba je spojitá a rovnomerná, model vylučuje deficit zásob, nekonečná skladovateľnosť tovaru, a ďalšie, pričom všetky predpoklady budú platiť i pre modifikované modely.

Modelovanie zásob v tomto prípade je spojitá a deterministická, teda každá veličina je deterministická a známa. Spotreba zásob – dopyt (*demand*) je  $d$  jednotiek za určité časové obdobie a dodacia lehota (*time of delivery*) je  $T_d$ . Cieľom riešenia je určiť výšku dodávky  $Q$  a okamih objednania  $r_p$ , závislý od hladiny objednania (*reordering*)  $r$ , pričom sa vychádza zo vzťahu, že pre dodávkový cyklus platí  $T = Q/d$ . Pri modelovaní zásob sú kritériálnymi funkciami náklady na zásoby v hodnotovom vyjadrení. Model teda minimalizuje celkové náklady, presnejšie účelovú funkciu celkových nákladov za sledované obdobie (*total cost*)

$$TC = c_p d + c_d \frac{d}{Q} + c_h \frac{Q}{2}, \text{ kde } c_p \text{ sú náklady na nákup zásob (cost of purchasing), } c_d \text{ sú}$$

náklady spojené s dodávkou (*cost of delivery*),  $c_h$  sú skladové náklady (*holding cost*),  $d$  predstavuje celkovú spotrebu,  $Q$  predstavuje nakupované množstvo,  $d/Q$  počet objednávok v sledovanom období a  $Q/2$  priemerné množstvo zásob na sklade.

Hľadanie voľného extrému - lokálneho minima funkcie celkových nákladov zvyčajne vedie k použitiu diferenciálneho počtu a potom  $Q^*$  je bod, v ktorom funkcia celkových nákladov nadobúda minimum, a práve v tomto jedinom bode sa funkcie nákladov na obstarávanie

a udržiavanie zásob rovnajú. Je známe, že  $Q^* = \sqrt{\frac{2dc_d}{c_h}}$  je vzorec určený na výpočet

optimálneho objednávkového množstva a je známy pod názvom *Wilsonov vzorec*.

Schrady (1967)<sup>3</sup> ako prvý rozšíril Wilsonov vzorec o možnosť návratu v súvislosti s prerobením vyrobených produktov. Rozdiel je v tom, že skladové náklady  $c_h$  sa viažu len na nové zásoby. Na vrátené zásoby, ktoré sú určené na opätovné prerobenie, sa viažu  $c_{hr}$  kvôli tomu, že  $c_h$  boli už raz vynaložené v súvislosti s ich prvotným skladovaním, pričom  $c_h \geq c_{hr}$ . Model analyzuje veľkosť nových zásob  $Q_n$ , ktorá je dopĺňaná o prerobené zásoby v pravidelných dávkach  $R$  a v rovnakej veľkosti  $Q_r$ . Vzťah medzi prerobením a novou produkciou položiek vyjadruje vzťah  $r_r(RQ_r + Q_n)/d = RQ_r$ .

Uvedené rozšírenie sa ale vzťahovalo len na prerobenie vyrobených produktov v podniku a nie na využitie návratu produktov EOL na recykláciu a opätovné prerobenie. Takéto využitie možno získať modifikáciou klasického modelu za určitých predpokladov.

<sup>3</sup> SCHRADY, D. A. 1967. *A deterministic inventory model for repairable items*. Naval Research Logistics Quarterly, 1967.

Model predpokladá, že nielen intenzita spotreby  $d$  bude konštantná, ale aj veľkosť vrátených produktov bude známa a bude ju určovať premenná (*return rate*)  $r_r$  za jednotku času. Táto hodnota pravdepodobne neprevýši intenzitu spotreby, keďže nie všetky vyrobené produkty sa vrátia k výrobcovi. Následne model rozlišuje množstvo dodávaných zásob  $Q$  medzi množstvo nových zásob (*new quantity*)  $Q_n$  a množstvo vrátených zásob (*quantity of return*)  $Q_r$ . Potom náklady na nákup  $c_p$  sú spojené len s  $Q_n$  a na  $Q_r$  sa viažu náklady spojené s návratom produktu  $c_r$ . Takisto náklady na dodávku sú spojené len s  $Q_n$ .

Potom funkcia celkových nákladov bude mať tvar:

$$TC = c_p d + c_d \frac{d - r_r}{Q_n} + c_r \frac{r_r}{Q_r} + c_h \frac{Q}{2}, \text{ resp. } TC = c_p d + c_d \frac{d - r_r}{Q_n} + c_r \frac{r_r}{Q_r} + c_h \frac{Q_n}{2} + c_h \frac{Q_r}{2}.$$

Tak, ako pri klasickom modeli, i tu na základe tých istých predpokladov je možné určiť  $Q^*$

$$\text{ako súčet } Q_n^* = \sqrt{\frac{2(d - r_r)c_d}{c_h}} \text{ a } Q_r^* = \sqrt{\frac{2r_r c_r}{c_{hr}}}.$$

Ako bolo vyššie uvedené, predpokladá sa, že návrat v čase začne narastať a tak ho možno určiť funkciou celkových nákladov novej výroby a výroby zo zásob z návratu. Tá vyjadruje súčet nákladov na dodávku, nákladov návratu produktov na prerobenie a nákladov na skladovanie, ktoré sú rozdelené na  $c_h$  a  $c_{hr}$ . Model predpokladá, že náklady nákupu sú obsiahnuté v nákladoch dodávky.

$$TC = c_d \frac{d - r_r}{Q_n} + c_r \frac{r_r}{Q_r} + \frac{c_h}{2} \left[ \left(1 - \frac{r_r}{d}\right) Q_n + \frac{r_r}{d} Q_r \right] + \frac{c_h}{2} \frac{r_r}{d} (Q_n + Q_r)$$

Následne je možné z funkcie celkových nákladov vyjadriť vzťah pre optimálnu veľkosť zásob

$$Q^*, \text{ ktoré tvorí } Q_n^* = \sqrt{\frac{2(d - r_r)c_d}{c_h \left(1 - \frac{r_r}{d}\right) + c_{hr} \frac{r_r}{d}}} \text{ a } Q_r^* = \sqrt{\frac{2r_r c_r}{c_h + c_{hr}}}.$$

Po úprave a dosadením predchádzajúcich vzťahov do vzťahu nákladovej funkcie možno určiť vzťah pre optimálne celkové náklady

$$TC^* = \frac{r_r}{d} \sqrt{2dc_d(c_h + c_{hr})} + \left(1 - \frac{r_r}{d}\right) \sqrt{2dc_d \left( c_h + \frac{d}{1 - \frac{r_r}{d}} c_{hr} \right)}$$

## 4 ZÁVER

Modelový prístup obsiahnutý v tomto príspevku je teoretický, keďže v praxi nie je časté, že návrat je možné určiť presne, a teda jedná sa o stochastickú veličinu. Z toho dôvodu bola upravená i funkcia celkových nákladov na vzťah  $r_r/d$ , ktorý vyjadruje podiel zásob z návratu na celkovej spotrebe zásob. Zároveň prístup k zníženiu nákladov spojených so zásobami, ktorý bol spomenutý predstavuje dôležitý nástroj cenovej politiky a samotnej cenotvorby.

Výpočet nákladov podľa uvedenej funkcie celkových nákladov umožňuje zistiť okamih, kedy začnú klesať náklady vďaka využívaniu recyklácie alebo opätovného prerobenia, a tak vhodne nastaviť cenu produktov v čase.

## **Použitá literatúra**

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. BREZINA, I. et al. 2009. *Modelovanie reverznej logistiky - optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2009. 220 s. ISBN 978-80-225-2825-2.
2. FLEISCHMANN, M. 2000. *Quantitative models for reverse logistics*. Rotterdam : 2000. online (<http://publishing.eur.nl/ir/repub/asset/1044/EPS-2000-002-LIS%2BFLEISCHMANN.pdf>)
3. SCHRADY, D. A. 1967. *A deterministic inventory model for repairable items*. Naval Research Logistics Quarterly, 1967.
4. STEVENSON, W. J. 2009. *Operations Management*. Los Angeles : Irwin/McGraw Hill, 2009. ISBN: 978-0-070-09177-1.

## **Kontaktné údaje**

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: pavel.gezik@euba.sk

# METODA LASSO V ČASOVÝCH ŘADÁCH

## THE LASSO METHOD IN TIME SERIES

*Mgr. Vladimír Holý*

### Abstrakt

V tomto textu se nejdříve popíše metoda Lasso a její základní teoretické vlastnosti. Hlavní náplní textu je pak aplikace metody Lasso na časové řady AR, MA a ARCH i na složené modely REGAR, REGMA a REGARCH. Odvodí se algoritmus adaptivní metody Lasso v obecnějším modelu časových řad, do kterého spadají všechny výše zmíněné modely i řady.

*Klíčová slova:* Lasso, adaptivní Lasso, časové řady

### Abstract

This text first describes the Lasso method and its basic theoretical properties. The main part of this text is application of the Lasso method to AR, MA and ARCH time series and to REGAR, REGMA and REGARCH models. An algorithm of the adaptive Lasso in a more general time series model, which includes all above mentioned models and series, is developed.

*Keywords:* Lasso, Adaptive Lasso, Time Series

## 1 METODA LASSO

Budeme se zabývat metodou Lasso (z anglického Least Absolute Shrinkage and Selection Operator), kterou v roce 1996 navrhl Tibshirani v článku [8]. Lasso je oblíbený nástroj, který slouží k odhadu koeficientů v regresním modelu a zároveň k výběru významných regresorů. Oproti běžně používané metodě nejmenších čtverců má metoda Lasso několik výhod, ale i nevýhod. Hlavním rysem metody Lasso je, že některé uvažované koeficienty položí přímo rovno 0 a ostatní v absolutní hodnotě zmenší. To může výrazně zvýšit přesnost předpovědí. Výběr relevantních regresorů také vede k lepší interpretaci modelu. Nedostatkem je, že odhady metodou Lasso jsou na rozdíl od nestranných odhadů metodou nejmenších čtverců vychýlené.

### 1.1 Základy metody

Nejdříve si přiblížíme metodu Lasso aplikovanou na klasický regresní model. Necht' máme závisle (vysvětlované) proměnné  $y_t$  a nezávisle (vysvětlující) proměnné  $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,m})'$  pro  $t = 1, \dots, n$ . Uvažujeme regresní model s koeficienty  $\alpha$  a  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)'$

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Klasický odhad metodou nejmenších čtverců  $\hat{\alpha}^{OLS}$  a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{OLS}$  získáme minimalizací výrazu

$$\sum_{t=1}^n (y_t - \alpha - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2. \quad (2)$$

Metoda Lasso byla původně představena v článku [8]. My se budeme zabývat její vylepšenou verzí tzv. adaptivní metodou Lasso zavedenou v článku [10]. Odhad adaptivní metodou Lasso

$\hat{\alpha}$  a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  získáme minimalizací výrazu

$$\sum_{t=1}^n (y_t - \alpha - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta})^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i |\beta_i|, \quad (3)$$

kde  $\lambda_i \geq 0$  jsou ladící parametry, které ovlivňují zmenšení odhadů  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ . Odhad  $\alpha$  je stejný jako při použití metody nejmenších čtverců, proto se jím nebudeme dále zabývat.

## 1.2 Asymptotické vlastnosti

Metoda Lasso kromě odhadu koeficientů také určuje, jaké regresory jsou významné a jaké ne. V článku [2] byl proto zaveden pojem předpovědácí vlastnost (anglicky Oracle property). Metoda, která má předpovědácí vlastnost, odhaduje koeficienty tak, jako by předem znala, které koeficienty jsou ve skutečnosti nulové a které ne. To znamená, že metoda správně identifikuje podmnožinu významných regresorů a správně pak příslušné koeficienty odhadne. Definice této vlastnosti je následující. Označme  $\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_1^*, \dots, \beta_m^*)'$  skutečné hodnoty hledaných parametrů. Dále označme  $\Sigma^*$  kovarianční matici skutečných nenulových regresorů. Nakonec definujme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^* &= \{1 \leq i \leq m : \beta_i^* \neq 0\}, \\ \hat{\mathcal{S}}^n &= \{1 \leq i \leq m : \hat{\beta}_i^n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Řekneme, že má metoda odhadu koeficientů předpovědácí vlastnost, pokud splňuje následující dvě podmínky:

(A) Konzistence výběru proměnných:  $P(\hat{\mathcal{S}}^n = \mathcal{S}^*) \rightarrow 1$  pro  $n \rightarrow \infty$ .

(B) Asymptotická normalita:  $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\hat{\mathcal{S}}^n}^n - \boldsymbol{\beta}_{\mathcal{S}^*}^*) \rightarrow_d N(\mathbf{0}, \Sigma^*)$  pro  $n \rightarrow \infty$ ,

kde  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\hat{\mathcal{S}}^n}^n$  je vektor obsahující prvky z vektoru  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^n$ , jejichž indexy jsou v množině  $\hat{\mathcal{S}}^n$ . Obdobně definujeme i  $\boldsymbol{\beta}_{\mathcal{S}^*}^*$ . V článku [10] je dokázáno, že metoda Lasso skutečně předpovědácí vlastnost má.

## 2 APLIKACE NA ČASOVÉ ŘADY

Zde si popíšeme základní modely časových řad a ukážeme, jak se v nich odhadují parametry metodou nejmenších čtverců a po úpravě i metodou Lasso.

### 2.1 Řada AR

Uvažujme autoregresní posloupnost řádu  $p$  značenou jako  $AR(p)$  s koeficienty  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  danou předpisem

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Dále předpokládáme, že kořeny polynomu  $1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i z^i$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, z čehož vyplývá, že proces  $AR(p)$  je stacionární. Jednoduchým přeznačením tohoto modelu se můžeme dostat k tvaru regresního modelu (1) a pro odhad koeficientů lze



tedy postupovat stejně jako v předchozí kapitole. Pro dané počáteční hodnoty  $y_1, \dots, y_p$  získáme odhad metodou Lasso  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  minimalizací výrazu

$$\sum_{t=p+1}^n \left( y_t - \mu - \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} \right)^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i |\phi_i|, \quad (5)$$

kde  $\gamma_i$  jsou ladící parametry.

## 2.2 Řada MA

Uvažujeme posloupnost klouzavých součtů řádu  $q$  značenou jako  $MA(q)$  s koeficienty  $\mathbf{v}$  a  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  danou předpisem

$$y_t = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (6)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Proces  $MA(q)$  je vždy stacionární. Protože jsou veličiny  $\varepsilon_t$  nepozorovatelné, nelze tento model jednoduše převést na regresní model jako v minulém případě. Pro zdůraznění závislosti veličin  $\varepsilon_t$  na parametru  $\boldsymbol{\theta}$  si je zapíšeme jako

$$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) = y_t - \mathbf{v} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}(\boldsymbol{\theta}).$$

Pro výpočet odhadů metodou nejmenších čtverců se používá Gauss-Newtonův algoritmus popsaný v [7]. Necht'  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$  je nějaký počáteční odhad. Taylorův rozvoj  $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta})$  prvního stupně je

$$\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) \approx \varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}) + \sum_{i=1}^q (\theta_i - \hat{\theta}_i^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)})}{\partial \theta_i}.$$

Za předpokladu  $\varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_{1-q} = 0$  získáme odhad metodou nejmenších čtverců  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{OLS}$  minimalizací výrazu

$$\sum_{t=1}^n \left( \varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}) + \sum_{i=1}^q (\theta_i - \hat{\theta}_i^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)})}{\partial \theta_i} \right)^2. \quad (7)$$

Pro dané  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$  již minimalizace tohoto výrazu odpovídá po přeznačení minimalizaci regresního modelu (2). Celá úloha se řeší numericky pomocí iterační metody. Odhad metodou Lasso  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  získáme přidáním penalizujícího výrazu k (7), tedy minimalizací výrazu

$$\sum_{t=1}^n \left( \varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}) + \sum_{i=1}^q (\theta_i - \hat{\theta}_i^{(0)}) \frac{\partial \varepsilon_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)})}{\partial \theta_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^q \eta_i |\theta_i|, \quad (8)$$

kde  $\eta_i$  jsou ladící parametry.

## 2.3 Řada ARCH

Uvažujeme posloupnost autoregresní podmíněné heteroskedasticity řádu  $r$  značenou jako  $ARCH(r)$  s koeficienty  $\boldsymbol{\omega}$  a  $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_r)'$  danou předpisem

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^r \psi_i y_{t-i}^2, \quad (9)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a rozptylem 1. Aby veličiny  $y_t$  měly konečný rozptyl, předpokládáme, že  $\omega > 0$  a  $\psi_1 \geq 0, \dots, \psi_r \geq 0$  (jedná se o postačující, nikoliv však nutnou podmínku). Dále předpokládáme, že kořeny polynomu  $1 - \sum_{i=1}^r \psi_i z^i$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, z čehož vyplývá, že proces ARCH( $r$ ) je stacionární. Při výpočtu odhadu metodou nejmenších čtverců postupujeme podobně jako v knize [3]. Vzorec (9) převedeme na autoregresní posloupnost

$$y_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \psi_i y_{t-i}^2 + u_t,$$

kde  $u_t = y_t^2 - \sigma_t^2 = (\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2$ . Ukážeme, že posloupnost  $(u_t, \mathcal{F}_t)_t$  představuje martingalové difference, když  $E y_t^2 = \sigma_t^2 < \infty$ , a kde  $\mathcal{F}_t$  značí  $\sigma$ -algebru generovanou  $\{y_s : s \leq t\}$

$$\begin{aligned} E|u_t| &= E|y_t^2 - \sigma_t^2| \leq E|y_t^2| + \sigma_t^2 = 2\sigma_t^2 < \infty, \\ E(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\varepsilon_t^2 - 1)\sigma_t^2 = 0\sigma_t^2 = 0. \end{aligned}$$

Máme tedy autoregresní model pro řadu  $y_t^2$ , kde  $u_t$  jsou nekorelované chyby s nulovou střední hodnotou. Pro dané počáteční hodnoty  $y_1, \dots, y_r$  získáme odhad metodou nejmenších čtverců  $\hat{\omega}^{OLS}$  a  $\hat{\psi}^{OLS}$  minimalizací výrazu

$$\sum_{t=r+1}^n \left( y_t^2 - \omega - \sum_{i=1}^r \psi_i y_{t-i}^2 \right)^2, \quad (10)$$

který po přeznačení odpovídá minimalizaci regresního modelu (2). Odhad metodou Lasso  $\hat{\psi}$  získáme přidáním penalizujícího výrazu k (10), tedy minimalizací výrazu

$$\sum_{t=r+1}^n \left( y_t^2 - \omega - \sum_{i=1}^r \psi_i y_{t-i}^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^r \kappa_i \psi_i, \quad (11)$$

kde  $\kappa_i$  jsou ladící parametry. Díky podmínkám nezápornosti  $\psi_i$  můžeme tuto minimalizační úlohu snadno řešit libovolnou metodou kvadratického programování.

## 2.4 Složené modely časových řad

Spojením regresního modelu a jednoduchých časových řad získáme složitější modely časových řad. Odhady složených modelů metodou Lasso počítáme numerickou metodou za použití poznatků z předchozí části. Modely zde proto jenom definujeme a algoritmus jejich řešení popíšeme až v další části. Spojením autoregresní posloupnosti řádu  $p$  a posloupnosti klouzavých součtů řádu  $q$  získáme řadu ARMA( $p, q$ )

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (12)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Jedním z dalších modelů je regresní model s autoregresními chybami řádu  $p$  značený jako REGAR( $m, p$ )

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad e_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i e_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (13)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Podobným modelem je autoregresní posloupnost řádu  $p$  s  $m$  exogenními proměnnými značená jako ARX( $p,m$ )

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (14)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Dalším modelem je regresní model s chybami ve tvaru posloupnosti klouzavých součtů řádu  $q$  značený jako REGMA( $m,q$ )

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad e_t = \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (15)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Mezi další často používané modely patří regresní model s ARMA( $p,q$ ) chybami značený jako REGARMA( $m,p,q$ )

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad e_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i e_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (16)$$

kde  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Posledním z modelů, který zde zmíníme, je regresní model s autoregresní podmíněnou heteroskedasticitou řádu  $r$  značený jako REGARCH( $m,r$ )

$$y_t = \alpha + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad e_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \psi_i e_{t-i}^2, \quad (17)$$

kde  $\omega > 0$ ,  $\psi_i \geq 0$  a  $\varepsilon_t$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou 0 a rozptylem 1.

### 3 ALGORITMY

Algoritmů pro řešení metody Lasso v jednoduchém regresním modelu je hned několik. V současnosti nejpoužívanější je algoritmus LARS (z anglického názvu Least Angle Regression) navržený v článku [1]. Mezi starší algoritmy patří např. lokální kvadratická aproximace v článku [2], metoda Shooting Algorithm v článku [4] a upravené kvadratické programování v článku [8]. Zde se ale budeme zabývat algoritmy pro odhady metodou Lasso v modelech časových řad. V předchozí části už jsme popsali, jak se dají základní časové řady převést na regresní model (1). V případě AR řady se jedná o jednoduché přeznačení a stačí přímo aplikovat algoritmy z předchozí části. Pro převedení řady MA na regresní model (1) už je třeba použít numerický algoritmus. Modely složených řad budeme také řešit iteračním algoritmem. Popíšeme jeho verze pro modely REGAR, REGMA a REGARCH. Nakonec spojíme všechny tyto poznatky dohromady a vytvoříme obecnou verzi algoritmu pro libovolný složený model časových řad. V následujících algoritmech uvažujeme, že ladící parametry jsou pevně dány. Obecnou úlohu pak řešíme na předem zvolené mřížce ladících parametrů, kde pro každou kombinaci ladících parametrů spočítáme optimální odhady koeficientů. Výsledné odhady pak vybereme pomocí nějakého kritéria, např. AIC nebo BIC.

### 3.1 Iterační metoda pro řadu MA

Převedení minimalizace výrazu (8) na úlohu (1) řešíme Gauss-Newtonovým iteračním algoritmem. Nejdříve ale musíme získat počáteční odhady  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ . Pro jejich výpočet použijeme metodu momentů popsanou např. v [6]. Autokorelační funkce řady MA(q) je rovna

$$R(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|k|} \theta_j \theta_{j+|k|} & \text{pro } |k| \leq q, \\ 0 & \text{pro } |k| > q, \end{cases}$$

kde jsme položili  $\theta_0 = 0$ . Výběrová autokorelační funkce řady MA(q) je rovna

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}),$$

kde  $\bar{y}$  je výběrový průměr  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$ . Položíme-li autokorelační funkce rovny výběrovým autokorelačním funkcím, dostaneme soustavu  $q + 1$  rovnic

$$\begin{aligned} \hat{R}(0) &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2), \\ \hat{R}(1) &= \sigma^2 (\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \cdots + \theta_{q-1} \theta_q), \\ &\vdots \\ \hat{R}(q) &= \sigma^2 \theta_q, \end{aligned}$$

ze kterých již vypočteme odhady  $\hat{\theta}_1^{(0)}, \dots, \hat{\theta}_q^{(0)}$ . Jedná se soustavu nelineárních rovnic, kterou je třeba řešit nějakým numerickým algoritmem. Nyní přistoupíme k iterativnímu procesu. V  $s$ -tém kroku nejdříve uvažujme pomocné funkce

$$\hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\boldsymbol{\theta}) = y_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^{(s)}(\boldsymbol{\theta})$$

a jejich parciální derivace podle  $\boldsymbol{\theta}$ . Úpravou vzorce (8) pak odhadneme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\theta}^{(s)}} \left\{ \sum_{t=1}^n \left( \hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)}) + \sum_{i=1}^q (\theta_i^{(s)} - \hat{\theta}_i^{(s-1)}) \frac{\partial \hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)})}{\partial \theta_i^{(s)}} \right)^2 + \sum_{i=1}^q \eta_i |\theta_i^{(s)}| \right\},$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)}$  odhadnuté z předchozího kroku  $s - 1$ . Tuto úlohu již můžeme řešit některým z algoritmů pro jednoduchý regresní model. Opakování výpočtů zastavíme, když je hodnota  $\sum_{i=1}^q |\theta_i^{(s)} - \theta_i^{(s-1)}|$  menší než předem daná hranice.

### 3.2 Iterační metoda pro model REGAR

Přistoupíme nyní ke složeným modelům časových řad. Začneme s modelem REGAR definovaným v (13). Ten už nelze převést na klasický regresní model, protože v něm dochází k interakci regresních a autoregresních koeficientů. V předpisu se tedy objevují součiny  $\beta_i \varphi_j$ . Tento problém v modelu REGAR byl řešen v článku [9] iterační metodou. Nejdříve je třeba získat konzistentní počáteční odhady. Za odhad  $\hat{\beta}$  zvolíme odhad metodou nejmenších čtverců

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}). \quad (18)$$

Dále spočteme rezidua

$$\hat{e}_t = y_t - \mathbf{x}'_t \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)} \quad (19)$$

a za odhad  $\boldsymbol{\varphi}$  zvolíme odhad metodou nejmenších čtverců

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(0)} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{W}'\mathbf{v}), \quad (20)$$

kde  $\mathbf{v} = (\hat{e}_{p+1}, \dots, \hat{e}_n)'$  a  $\mathbf{W}$  je matice o  $(n-p)$  řádcích a  $p$  sloupcích, jejíž  $i$ -tý řádek je definován jako  $\mathbf{w}_i = (\hat{e}_{i+p-1}, \dots, \hat{e}_i)'$ . V iterativním procesu potom v  $s$ -tém kroku nejdříve odhadneme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\beta}^{(s)}} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left( y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}^{(s)} - \sum_{i=1}^p \hat{\varphi}_i^{(s-1)} (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \boldsymbol{\beta}^{(s)}) \right)^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i |\beta_i^{(s)}| \right\}, \quad (21)$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(s-1)}$  odhadnuté z předchozího kroku  $s-1$ . Následně odhadneme  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\varphi}^{(s)}} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \left( y_t - \mathbf{x}'_t \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)} - \sum_{i=1}^p \varphi_i^{(s)} (y_{t-i} - \mathbf{x}'_{t-i} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}) \right)^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i |\varphi_i^{(s)}| \right\}, \quad (22)$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  odhadnuté v tomto kroku  $s$ . Obě tyto úlohy už se dají převést na model (1) a je tedy možné je řešit metodami pro odhad koeficientů v regresním modelu. Opakování výpočtů zastavíme, když je součet hodnot  $\sum_{i=1}^m |\beta_i^{(s)} - \beta_i^{(s-1)}|$  a  $\sum_{i=1}^p |\varphi_i^{(s)} - \varphi_i^{(s-1)}|$  menší než předem daná hranice.

### 3.3 Iterační metoda pro model REGMA

Nyní se podíváme na případ, kdy jsou chyby v regresním modelu považovány za MA řadu, což je model REGMA definovaný v (15). Budeme postupovat podobně jako v modelu REGAR. Protože se ale odhady metodou Lasso řady MA nepočítají tak přímočaře jako odhady řady AR, je i výpočet odhadů v modelu REGMA o něco komplikovanější. Začneme konzistentními počátečními odhady. Za odhad  $\boldsymbol{\beta}$  zvolíme odhad metodou nejmenších čtverců  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$  stejně jako ve vzorci (18) a spočítáme rezidua  $\hat{e}_t$  stejně jako ve vzorci (19). Koeficienty  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$  pak odhadneme algoritmem pro řadu MA, kde místo řady  $y_t$  uvažujeme řadu  $\hat{e}_t$  a za ladící parametry zvolíme  $\eta_i = 0$  (což vlastně odpovídá metodě nejmenších čtverců). Přistoupíme k iterativnímu procesu. V  $s$ -tém kroku nejdříve uvažujeme pomocné funkce

$$\hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = y_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} - \sum_{i=1}^q \theta_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^{(s)}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$$

a jejich parciální derivace podle  $\boldsymbol{\theta}$ . Dále odhadneme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\beta}^{(s)}} \sum_{t=1}^n \left( \hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\boldsymbol{\beta}^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)}) \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i |\beta_i^{(s)}|, \quad (23)$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)}$  odhadnuté v předchozím kroku  $s-1$ . Následně odhadneme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\theta}^{(s)}} \left\{ \sum_{t=1}^n \left( \hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)}) \right) + \sum_{i=1}^q (\theta_i^{(s)} - \hat{\theta}_i^{(s-1)}) \frac{\partial \hat{\varepsilon}_t^{(s)}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)})}{\partial \theta_i^{(s)}} \right)^2 + \sum_{i=1}^q \eta_i |\theta_i^{(s)}| \right\}, \quad (24)$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s-1)}$  odhadnuté v předchozím kroku  $s-1$  a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  odhadnuté v tomto kroku  $s$ . Ve vzorci (24) tak spojíme jednu iteraci z Gauss-Newtonova algoritmu a jednu iteraci odpovídající iteračnímu algoritmu pro řadu MA. Úlohy (23) a (24) pak řešíme metodami pro odhad koeficientů v regresním modelu. Opakování výpočtů zastavíme, když je součet hodnot  $\sum_{i=1}^m |\beta_i^{(s)} - \beta_i^{(s-1)}|$  a  $\sum_{i=1}^q |\theta_i^{(s)} - \theta_i^{(s-1)}|$  menší než předem daná hranice.

### 3.4 Iterační metoda pro model REGARCH

Budeme vyšetřovat případ, kdy jsou chyby v regresním modelu považovány za ARCH řadu, tedy model REGARCH. Opět budeme postupovat podobně jako u modelu REGAR. Začneme konzistentními počátečními odhady. Za odhad  $\boldsymbol{\beta}$  zvolíme odhad metodou nejmenších čtverců  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$  stejně jako ve vzorci (18) a spočítáme rezidua  $\hat{\epsilon}_t$  stejně jako ve vzorci (19). Odhady  $\hat{\omega}^{(0)}$  a  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(0)}$  získáme řešením úlohy kvadratického programování

$$\min_{\omega^{(0)}, \boldsymbol{\psi}^{(0)}} \sum_{t=r+1}^n \left( \hat{\epsilon}_t^2 - \omega^{(0)} - \sum_{i=1}^r \psi_i^{(0)} \hat{\epsilon}_{t-i}^2 \right)^2$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \omega^{(0)} &> 0, \\ \psi_i^{(0)} &\geq 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Dále spočítáme řadu

$$\hat{\sigma}_t^{(0)} = \sqrt{\hat{\omega}^{(0)} + \sum_{i=1}^r \hat{\psi}_i^{(0)} \hat{\epsilon}_{t-i}^2}.$$

V iterativním procesu potom v  $s$ -tém kroku nejdříve odhadneme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\beta}^{(s)}} \left\{ \sum_{t=r+1}^n \frac{1}{\hat{\sigma}_t^{(s-1)}} \left( y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta}^{(s)} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i |\beta_i^{(s)}| \right\}, \quad (25)$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(s-1)}$  odhadnuté z předchozího kroku  $s-1$ . Následně odhadneme  $\hat{\omega}^{(s)}$  a  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(s)}$  jako řešení úlohy

$$\min_{\omega^{(s)}, \boldsymbol{\psi}^{(s)}} \left\{ \sum_{t=r+1}^n \left( (y_t - \mathbf{x}_t' \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)})^2 - \omega^{(s)} - \sum_{i=1}^r \psi_i^{(s)} (y_{t-i} - \mathbf{x}_{t-i}' \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)})^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^r \kappa_i \psi_i^{(s)} \right\} \quad (26)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \omega^{(s)} &> 0, \\ \psi_i^{(s)} &\geq 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  odhadnuté v tomto kroku  $s$ . Nakonec spočítáme řadu

$$\hat{\sigma}_t^{(s)} = \sqrt{\hat{\omega}^{(s)} + \sum_{i=1}^r \hat{\psi}_i^{(s)} (y_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}' \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)})^2},$$

kde použijeme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s)}$  odhadnuté v tomto kroku  $s$  a  $\hat{\omega}^{(s)}$  a  $\hat{\boldsymbol{\psi}}^{(s)}$  odhadnuté v tomto kroku  $s$ . Dopustili jsme se zde ovšem určitého zjednodušení. Řada  $\hat{\sigma}_t$  je definovaná tak, že v  $s$ -tém kroku se ve

jmenovateli vzorce (21) používají odhady  $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(s-1)}$ , místo aby se použili současné proměnné  $\boldsymbol{\beta}^{(s)}$ , přes které se úloha minimalizuje. Pokud bychom opravdu ve jmenovateli uvažovali současné proměnné  $\boldsymbol{\beta}^{(s)}$ , úloha by byla značně komplikovaná a nedala by se převést na tvar (1). Proto jsme tedy tyto proměnné nahradili jejich odhady z předchozího kroku. Úlohu (25) pak řešíme metodami pro odhad koeficientů v regresním modelu a úlohu (26) řešíme metodami kvadratického programování. Opakování výpočtů zastavíme, když je součet hodnot  $\sum_{i=1}^m |\beta_i^{(s)} - \beta_i^{(s-1)}|$  a  $\sum_{i=1}^r |\psi_i^{(s)} - \psi_i^{(s-1)}|$  menší než předem daná hranice.

### 3.5 Zobecnění iterační metody

Představili jsme si už iterační algoritmy pro odhad koeficientů v základním regresním modelu, iterační algoritmus pro řadu MA a iterační algoritmy pro řešení složených modelů REGAR, REGMA a REGARCH. V této části spojíme všechny tyto poznatky dohromady a vytvoříme obecný algoritmus pro řešení odhadu koeficientů ve složených modelech časových řad. Tento zobecněný algoritmus využijeme hlavně při programování metody, ale také pro lepší pochopení předchozích iteračních metod. Předpokládáme, že každý model časových řad je složen z jednotlivých komponent. Komponentami budeme rozumět funkce, jejichž složením dostaneme jednotlivé předpisy modelů. Uvažujme řady  $a_t$  a  $b_t$ , mezi kterými existuje transformace  $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{b})$  a její inverze  $\mathbf{b} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{a})$ . Užitím tohoto značení definujeme jednotlivé komponenty. Komponenta REG je dána funkcí a její inverzí

$$\begin{aligned} f_t^{REG}(b_t) &= b_t + \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}, \\ f_t^{REG^{-1}}(a_t) &= a_t - \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Komponenta AR je dána funkcí a její inverzí

$$\begin{aligned} f_t^{AR}(b_1, \dots, b_t) &= b_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i f_{t-i}^{AR}(b_1, \dots, b_{t-i}), \\ f_t^{AR^{-1}}(a_{t-p}, \dots, a_t) &= a_t - \sum_{i=1}^p \varphi_i a_{t-i}. \end{aligned}$$

Komponenta MA je dána funkcí a její inverzí

$$\begin{aligned} f_t^{MA}(b_{t-q}, \dots, b_t) &= b_t + \sum_{i=1}^q \theta_i b_{t-i}, \\ f_t^{MA^{-1}}(a_1, \dots, a_t) &= a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i f_{t-i}^{MA^{-1}}(a_1, \dots, a_{t-i}). \end{aligned}$$

Komponenta ARCH je dána funkcí a její inverzí

$$\begin{aligned} f_t^{ARCH}(b_1, \dots, b_t) &= b_t \sqrt{\omega + \sum_{i=1}^r \psi_i [f_{t-i}^{ARCH}(b_1, \dots, b_{t-i})]^2}, \\ f_t^{ARCH^{-1}}(a_{t-r}, \dots, a_t) &= a_t \left( \omega + \sum_{i=1}^r \psi_i a_{t-i}^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Vidíme, že funkce AR a ARCH a inverzní funkce MA jsou zadány rekurentně. Pro jejich přímý předpis bychom mohli využít řešení příslušné diferenční rovnice, z hlediska náročnosti takového výpočtu je ale jednodušší počítat transformace rekurentně. Přiblížme si, co vlastně v námi

definovaných komponentách znamená značení  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Nejprve uvažujme jednoduchý regresní model

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t,$$

který ve značení komponent můžeme zapsat jako  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{REG}(\boldsymbol{\varepsilon})$ , čemuž odpovídá předpis

$$a_t^{REG} = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + b_t^{REG}.$$

Toto nové značení začne ale být užitečné až u složených modelů. Složením funkcí komponent totiž můžeme jednoduše získat jednotlivé modely časových řad. Uvažujme například model REGMA(m,q)

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + e_t, \quad e_t = \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t,$$

který ve značení komponent můžeme zapsat jako  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{REG}(\mathbf{f}^{MA}(\boldsymbol{\varepsilon}))$ , čemuž odpovídá předpis

$$a_t^{REG} = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} + b_t^{REG}, \quad b_t^{REG} = a_t^{MA} = \sum_{i=1}^q \theta_i b_{t-i}^{MA} + b_t^{MA}.$$

Značení pomocí  $a_t$  a  $b_t$  se může jevit jako méně přehledné, krásně ale ukazuje, jak jednotlivé komponenty na sebe navazují. Řada  $a_t$  vždy symbolizuje „vstup do komponenty“ a řada  $b_t$  vždy symbolizuje „výstup z komponenty“. V jednoduchém regresním modelu tedy řada  $a_t$  odpovídá vysvětlovaným proměnným  $y_t$  a řada  $b_t$  odpovídá reziduím  $\varepsilon_t$ . Vraťme se ještě k ostatním složeným modelům. Model REGARCH lze zapsat jako  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{REG}(\mathbf{f}^{ARCH}(\boldsymbol{\varepsilon}))$ , model REGARMA jako  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{REG}(\mathbf{f}^{AR}(\mathbf{f}^{MA}(\boldsymbol{\varepsilon})))$ . Na pořadí komponent samozřejmě záleží. Složení funkcí  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{REG}(\mathbf{f}^{AR}(\boldsymbol{\varepsilon}))$  značí předpis modelu REGAR, zatímco  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{AR}(\mathbf{f}^{REG}(\boldsymbol{\varepsilon}))$  značí předpis řady ARX. Vidíme tedy, že použitím komponent můžeme opravdu popsat všechny modely, které jsme si představili v úvodní části. Nyní můžeme přistoupit k samotnému algoritmu. Předpokládáme, že chceme odhadnout parametry  $\boldsymbol{\zeta}$  v modelu  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{[1]}(\mathbf{f}^{[2]}(\dots \mathbf{f}^{[k]}(\boldsymbol{\varepsilon})\dots))$ , který je složen z  $k$  komponent. Parametry  $\boldsymbol{\zeta}$  si rozdělíme podle jednotlivých komponent na  $\boldsymbol{\zeta}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\zeta}^{[k]}$ . Nejdříve musíme spočítat počáteční odhady. Odhady první komponenty  $\boldsymbol{\zeta}^{[1](0)}$  spočteme z modelu  $\mathbf{y} = \mathbf{f}^{[1]}(\boldsymbol{\varepsilon})$ , kde komponenty  $\mathbf{f}^{[2]}, \dots, \mathbf{f}^{[k]}$  zahrneme do náhodné složky  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Pro počáteční odhady druhé komponenty  $\boldsymbol{\zeta}^{[2](0)}$  použijeme model  $\mathbf{f}^{[1]-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}^{[2]}(\boldsymbol{\varepsilon})$ , kde ve funkci  $\mathbf{f}^{[1]-1}$  již použijeme známé odhady  $\boldsymbol{\zeta}^{[1](0)}$  a komponenty  $\mathbf{f}^{[3]}, \dots, \mathbf{f}^{[k]}$  opět zahrneme do náhodné složky  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . U dalších komponent postupujeme obdobně, získáme tedy odhady  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[1](0)}, \dots, \hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[k](0)}$ . Konkrétní metody výpočtu odhadů v jednotlivých komponentách jsme již zmínili dříve. Pro komponentu MA použijeme metodu momentů a následně aplikujeme Gauss-Newtonův algoritmus pro metodu nejmenších čtverců. Pro ostatní komponenty můžeme použít metodu nejmenších čtverců přímo. V případě modelu REGAR tento postup výpočtu počátečních odhadů odpovídá vzorcům (18) a (20), v modelech REGMA a REGARCH je tomu obdobně. Dále přistoupíme k iterační části algoritmu. Předpokládáme, že se nacházíme v  $s$ -tém kroku. Začneme s odhadem  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[1](s)}$  v první komponentě. Řešíme úlohu

$$\min_{\boldsymbol{\zeta}^{[1](s)}} \sum_{t=p+1}^n \left( g_t^{[k]-1}(\dots g_t^{[2]-1}(\mathbf{f}^{[1]-1}(\mathbf{y}))\dots) \right)^2 + \sum_{i=1}^{m^{[1]}} \lambda_i^{[1]} |\zeta_i^{[1]}|, \quad (28)$$

kde funkce  $\mathbf{g}^{[l]}$  jsou formálně upravené  $\mathbf{f}^{[l]}$  tak, aby zachovaly lineární strukturu

$$\mathbf{g}^{[l]}(c_0 + \sum_{i=1}^{m^{[l]}} \zeta_i^{[l]} c_i) = g_0^{[l]}(c_0) + \sum_{i=1}^{m^{[l]}} \zeta_i^{[l]} g_i^{[l]}(c_i).$$



Pro komponenty REG, AR a MA jsou funkce  $\mathbf{f}^{[1]}$  (i jejich inverze  $\mathbf{f}^{[1]-1}$ ) lineární v proměnných  $\mathbf{b}$  (případně  $\mathbf{a}$ ) a funkce  $\mathbf{g}^{[1]-1}$  tedy existují a dají se snadno odvodit. Komponenta ARCH již lineární není, a proto přejdeme ke zjednodušující úpravě stejně jako v algoritmu pro model REGARCH. Místo vzorce (27) tedy budeme uvažovat

$$f_t^{ARCH'-1}(a_t) = a_t \left( \hat{\sigma}_t^{(s-1)} \right)^{-1},$$

kde  $\hat{\sigma}_t^{(s-1)}$  je odhad odmocniny ze vzorce (27) z předchozího kroku. Pro tuto upravenou funkci  $f_t^{ARCH'-1}$  již hledané funkce  $\mathbf{g}^{ARCH'-1}$  existují. Již umíme pro libovolný typ komponenty vyjádřit funkci  $\mathbf{f}^{[1]-1}$  ve tvaru

$$f_t^{[1]-1}(\mathbf{a}) = d_{t,0}(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{m^{[1]}} \zeta_i^{[1]} d_{t,i}(\mathbf{a}),$$

kde  $d_{t,i}$  jsou nějaké funkce nezávislé na  $\boldsymbol{\zeta}^{[1]}$ . Ještě je třeba poznamenat, že v případě řešení úlohy v řadě ARCH jsme ale minimalizaci  $\boldsymbol{\varepsilon}$  nahradili minimalizací  $\mathbf{u}$ , a proto je možné komponentu ARCH umístit pouze na poslední  $k$ -té místo. Nejde ale o žádné omezení, protože z hlediska řady ARCH je toto umístění zcela přirozené. Složený model, ve kterém by za komponentou ARCH následovala ještě nějaká další, by nedával smysl. Úloha (28) je tedy ve tvaru

$$\min_{\boldsymbol{\zeta}^{[1](s)}} \sum_{t=p+1}^n \left( e_0 + \sum_{i=1}^{m^{[1]}} \zeta_i^{[1](s)} e_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{m^{[1]}} \lambda_i^{[1]} |\zeta_i^{[1](s)}|,$$

kde  $e_i$  jsou nějaké funkce závislé na  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[1](s-1)}, \dots, \hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[k](s-1)}$ . Tuto úlohu již umíme řešit. Pokračujeme odhadem  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[2](s)}$  v druhé komponentě. Řešíme úlohu

$$\min_{\boldsymbol{\zeta}^{[2](s)}} \sum_{t=p+1}^n \left( g_t^{[k]-1}(\dots f_t^{[2]-1}(f_t^{[1]-1}(\mathbf{y})) \dots) \right)^2 + \sum_{i=1}^{m^{[2]}} \lambda_i^{[2]} |\zeta_i^{[2]}|, \quad (29)$$

kde funkce  $f_t^{[1]-1}(\mathbf{y})$  je závislá na  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[1](s)}$ . Podobnými úvahami jako u první komponenty lze ukázat, že úloha (29) je v požadovaném tvaru, který umíme řešit. U dalších komponent postupujeme obdobně, v  $s$ -tém kroku tedy získáme odhady  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[1](s)}, \dots, \hat{\boldsymbol{\zeta}}^{[k](s)}$ . Jako obvykle iterace skončíme, když je hodnota součtu rozdílů v absolutní hodnotě všech parametrů menší než předem daná hranice. V případě modelu REGAR tento postup iterací odpovídá vzorcům (21) a (22), v modelech REGMA a REGARCH je tomu obdobně. Je třeba zmínit, že iterační metoda využívající rozklad na komponenty není pro všechny složené modely nutná. Například pro řadu ARMA lze aplikovat Gauss-Newtonův algoritmus a pro řadu ARX stačí přímo použít metody pro odhad koeficientů v regresním modelu. Tato sekce se tedy týkala hlavně modelů REGARMA, REGARCH a jim podobných.

## 4 ZÁVĚR

Popsali jsme adaptivní metodu Lasso a její asymptotické vlastnosti. Dále jsme pak hledali způsob, jak odhadnout koeficienty v modelech časových řad. Řady AR a ARCH stačilo pouze přeznačit a algoritmy pro regresní model (popsané v literatuře) se daly přímo aplikovat. U řady MA a u složených modelů již bylo třeba přistoupit ke komplikovanějším postupům. Použili

jsme zde iterační metody v kombinaci s algoritmy pro regresní model. Všechny tyto postupy jsme pak spojili dohromady a vytvořili jsme iterační algoritmus pro obecnější model časových řad, do kterého spadají všechny výše zmíněné modely. Analýzu vlastností iteračního algoritmu na simulovaných datech a praktické užití metody lze najít v diplomové práci [5].

### **Použitá literatura**

- [1] EFRON, B., HASTIE, T., JOHNSTONE, I. a TIBSHIRANI, R. (2004). Least Angle Regression. *Ann. Statist.*, **32**(2), 407–499. ISSN 0090-5364.
- [2] FAN, J. a LI, R. (2001). Variable Selection via Nonconcave Penalized Likelihood and Its Oracle Properties. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **96**(456), 1348–1360. ISSN 0162-1459.
- [3] FRANCO, C. a ZAKOIAN, J.-M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, Chichester. ISBN 978-0470683910.
- [4] FU, W. J. (1998). Penalized Regressions: The Bridge Versus the Lasso. *J. Comput. Graph. Statist.*, **7**(3), 397–416. ISSN 1061-8600.
- [5] HOLÝ, V. (2013). Metoda Lasso a její aplikace v časových řadách. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze.
- [6] PRÁŠKOVÁ, Z. (2004). *Základy náhodných procesů II*. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0971-1.
- [7] SHUMWAY, R. H. a STOFFER, D. S. (2011). *Time Series Analysis and Its Applications*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, third edition. ISBN 978-1-4419-7864-6.
- [8] TIBSHIRANI, R. (1996). Regression Shrinkage and Selection via the Lasso. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **58**(1), 267–288. ISSN 0035-9246.
- [9] WANG, H., LI, G. a TSAI, C.-L. (2007). Regression Coefficient and Autoregressive Order Shrinkage and Selection via the Lasso. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, **69**(1), 63–78. ISSN 1369-7412.
- [10] ZOU, H. (2006). The Adaptive Lasso and Its Oracle Properties. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **101**(476), 1418–1429. ISSN 0162-1459.

### **Kontaktní údaje**

Ing. Tomáš Novák, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421) 267 295 824  
email: novak@euba.sk

# MODELOVANIE PARAMETROV FAKTORINGU

## FACTORING PARAMETERS MODELING

*Eduard Hozlár*

### Abstrakt

Príspevok sa venuje modelovaniu a efektívnemu nastaveniu parametrov faktoringu pri financovaní podnikateľských aktivít. V príspevku sú odvodené niektoré vzťahy medzi parametrami poskytovateľa úveru a ekonomickými parametrami jeho klienta. Ukázaná je možnosť modelovania Pareto efektívnej hranice parametrov vo vzťahu faktor a klient .

*Kľúčové slová: faktoring, financovanie, Pareto efektívnosť*

### Abstract

The paper is devoted to the modeling and the efficient setting of the parameters of factoring for financing the business activities. The paper derived some relations between the parameters of the provider of the loan and the economic parameters of his client. The possibility of modeling the Pareto efficient frontier of the parameters in the relation between the factor and the client is shown.

*Keywords: factoring, funding, Pareto efficiency*

## 1 FAKTORING AKO ZDROJ FINANCOVANIA POTRIEB PODNIKU

Zdrojom získania krátkodobých finančných prostriedkov pre výrobný podnik môže byť určitá forma faktoringu, t.j. za odpredaj pohľadávok voči svojim obchodným partnerom (pred lehotou ich splatnosti) získa podnik do lehoty splatnosti faktoringový úver.

Factoring je vo všeobecnosti zmluvný vzťah medzi faktoringovou spoločnosťou (faktorom) a podnikom (klientom faktora) na základe ktorého faktor odkupuje nové pohľadávky svojho klienta (t.j. pred ich splatnosťou), pričom odplata za postúpenie sa realizuje po zaplatení pohľadávky odberateľom na účet faktora. Do doby zaplatenia postúpenej pohľadávky faktor v rámci zmluvného vzťahu poskytuje klientovi úver, a to v alikvotnej časti odkúpeného dlhu. Výška úveru sa aktuálne mení v závislosti od viacerých parametrov (výšky neuhradenej časti odkúpených pohľadávok - t. j. v závislosti od tzv. otvorených pohľadávok, od stanoveného limitu úverovania klienta, od nesplateného úroku a iných polatkov, atď.).

Pri bezregresnom faktoringu faktor odkupuje pohľadávky klienta s celým rizikom ich nezaplatenia. Ak je dohodnutý factoring s regresom, faktor riziko nezaplatenia odkúpenej pohľadávky nepreberá. Včas nezaplatené pohľadávky faktor klientovi vracia a požaduje okamžité splatenie tej časti úveru, ktorá je s takýmito pohľadávkami spojená. Preto faktor pri faktoringu s regresom si musí zabezpečiť u klienta aj túto časť rizika súvisiacu s návratnosťou danej časti úveru. Klient musí byť preto opatrný pri výbere svojich odberateľov.

V ďalšom budeme skúmať finančné vzťahy medzi faktorom a jeho klientom v rámci faktoringu s regresom.

Na základe posúdenia rizikovosti klienta a rizikovosti jeho pohľadávok, faktor navrhne klientovi (dodávateľovi tovaru odberateľom) hodnoty nasledovných parametrov:

1.  $p$  - faktoringový poplatok - v % z objemu odkúpených pohľadávok - za prevzatie správy pohľadávok, analýzu odberateľov a ďalšie služby spojené so správou pohľadávok;
2.  $L$  - úverový limit - v *EUR*, ktorý závisí od bonity klienta a bonity zábezpeky úveru;
3.  $\alpha$  - úroveň financovania – v % z objemu odkúpených pohľadávok v závislosti od bonity postúpených pohľadávok;
4.  $r$  - úroková sadzba - v % *p.a.* pre výpočet úroku zo skutočne čerpaných úverových prostriedkov.

Konkrétne hodnoty uvedených parametrov musia spĺňať individuálne kritériá efektívnosti každej zmluvnej strany, t.j. faktora a jeho klienta.

## 2 MODELOVANIE CIEĽOV KLIENTA PRI FAKTORINGU S REGRESOM

Vzhľadom k tomu, že zdrojom pre získanie dodatočných finančných prostriedkov pre chod podniku sú otvorené pohľadávky z obchodného styku, základným cieľom podniku je zosúladiť výrobu a predaj produkcie s nákladmi na získanie dodatočných finančných zdrojov tak, aby sa zvýšila efektívnosť výroby, prípadne aby podnik nemusel zastaviť výrobu z dôvodu prechodného nedostatku finančných zdrojov.

Pre jednoduchosť predpokladajme, že podnik – klient faktora – všetku vyrobenú produkciu počas jedného mesiaca odpredá svojim obchodným partnerom s dobou splatnosti pohľadávok za dodaný tovar  $t$  mesiacov (napr.  $t = 3$  mesiace). Tieto pohľadávky ihneď odpredá faktorovi, ktorý mu do doby splatnosti poskytne úver. Ak niektorá pohľadávka nebude do doby splatnosti zaplatená, faktor pohľadávku klientovi vráti a zosplatní príslušnú časť čerpaného úveru (faktor uplatní regres).

Nech klient postúpi faktorovi za mesiac  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  objem  $P_p(i)$  pohľadávok. Faktor v tom istom mesiaci zaťaží klienta faktoringovým poplatkom  $F_p(i)$  vo výške

$$F_p(i) = pP_p(i),$$

pretože faktor preberá v plnej miere aj aj správu a inkaso postúpených pohľadávok.

Predpokladajme pre jednoduchosť, že v mesiaci  $i$  zaplatia všetci odberatelia za tovar, ktorý im bol dodaný pred  $t$  mesiacmi, a to plnú výšku pohľadávky. To znamená, že na účty faktora príde  $P_p(i-t)$  z inkasa splatných pohľadávok. Týmto príjmom sa v mesiaci  $i$  splatí čerpaný a poskytnutý úver v čase  $i - t$ . Na konci mesiaca  $i$  je celkový objem otvorených pohľadávok  $O_p$  (tzv *financovateľných*) vo výške

$$O_p(i) = \sum_{k=0}^{i-t} P_p(i-k)$$

Keď faktor poskytne klientovi v tomto mesiaci úver vo výške  $\alpha P_p(i)$ , klient bude čerpať celkom úver vo výške

$$U(i) = \min(\alpha \sum_{k=0}^{t-1} P_p(i-k); L) = \min(\alpha O_p(i); L)$$

Predpokladajme, že klient čerpá celý poskytnutý úver, a teda za mesiac  $i$  zaplatí úrok  $R(i)$  vo výške

$$R(i) = \frac{r}{12} U(i)$$

Náklady klienta na čerpanie úveru v mesiaci  $i$  sú

$$N(i) = F_p(i) + R(i)$$

Za hospodársky rok môžeme zapísať v tvare

$$N = \sum_{i=1}^{12} N(i)$$

a po úprave pri zadanej dobe splatnosti pohľadávok  $t$  (spavidla 3 až 6 mesiacov) máme

$$N = p \sum_{i=1}^{12} P_p(i) + \frac{r}{12} \alpha \sum_{i=1}^{12} \sum_{k=0}^{t-1} P_p(i-k)$$

za predpokladu, že úver neprekročí limit  $L$ .

Z uvedeného vidieť, že klient môže túto výšku nákladov ovplyvniť buď zníženou dobou splatnosti pohľadávok (čo je v konkurenčnom prostredí ťažké, pretože pre odberateľa je výhodnejšia dlhšia doba splatnosti pohľadávok) alebo znížením výroby (čo nie je cieľom klienta) ďalej minimalizáciou čerpania poskytnutého úveru v rámci limitu, resp. zvýšením bonity svojich odberateľov, čo môže mať vplyv na úroveň parametrov  $\alpha$ ,  $p$  a  $L$ . Okrem toho klient musí zvážiť aj celkovú efektívnosť takto vynaložených nákladov. V podniku teda ide o zosúladenie plánu výroby a finančného plánu tak, aby ziskovosť bola čo najvyššia.

Na ilustráciu finančných tokov pri faktoringu uveďme nasledujúci modelový príklad:

Pre zadané parametre uvažujeme podnik, ktorý počas 24 mesiacov začal aj ukončil faktoringovú spoluprácu. Podnik ako klient faktora postupuje všetky novovytvorené pohľadávky na faktora (sú vlastne mesačné tržby podniku). Prvé 3 – 4 mesiace v príklade sú nábehové, štandardná spolupráca je po 18 mesiac, od ktorého klient už pohľadávky nepostupuje na faktora a ukončuje spoluprácu. Dobeňnú inkasá otvorených pohľadávok, ktorými sa splatí poskytnutý a čerpaný úver. Tu ešte pripomenieme, že poskytnutý úver vo výške  $\alpha\%$  z postúpenej pohľadávky sa z inkasa tejto pohľadávky splatí tiež iba vo výške  $\alpha\%$  a zostatok sa vráti klientovi ako doplatok na cenu postúpenej pohľadávky, ktorá je dohodnutá na 100% nominálnej hodnoty pohľadávky.

Údaje o tokoch pohľadávok, ich inkasa a čerpania úveru spolu s poplatkami a úrokom sú uvedené v *Tabuľke 1* a znázornené sú v *Grafe 1*.

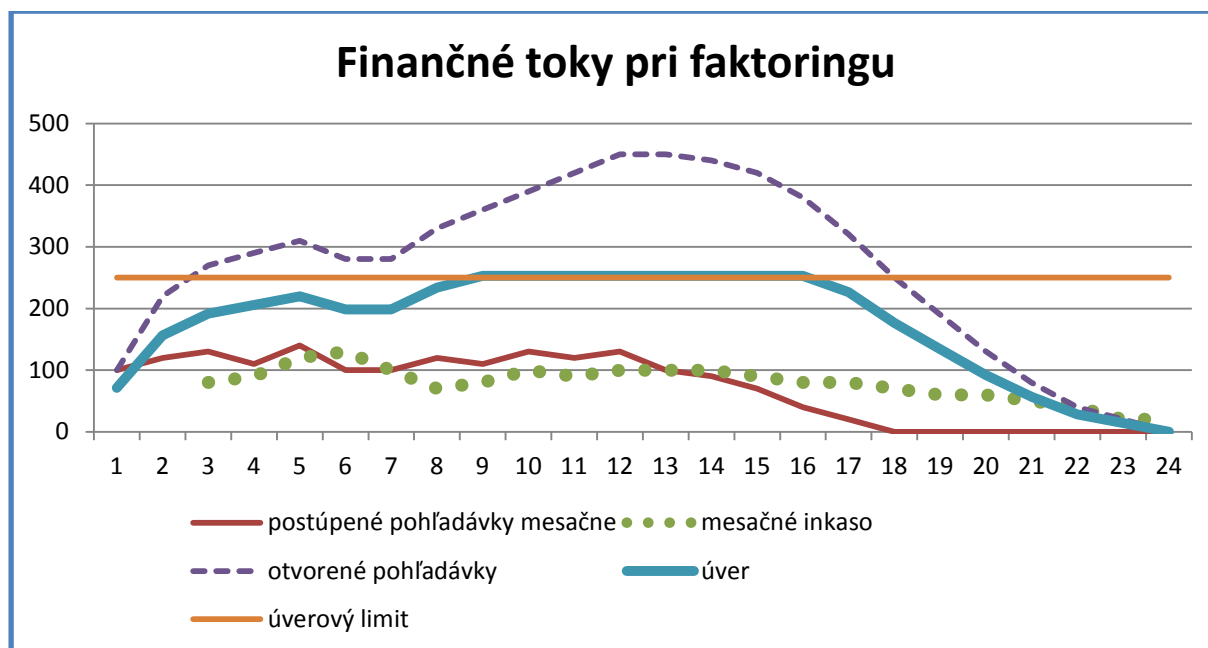
|                | $\alpha$                     | 0,7            | L                   | 250                   |               |              |
|----------------|------------------------------|----------------|---------------------|-----------------------|---------------|--------------|
|                | p                            | 0,005          | r                   | 0,12                  |               |              |
| mesiac         | postúpené pohľadávky mesačne | mesačné inkaso | otvorené pohľadávky | faktoringový poplatok | úver          | úrok         |
| 1              | 100                          |                | 100                 | 0,5                   | 71,20         | 0,70         |
| 2              | 120                          |                | 220                 | 0,6                   | 156,14        | 1,54         |
| 3              | 130                          | 80             | 270                 | 0,65                  | 191,54        | 1,89         |
| 4              | 110                          | 90             | 290                 | 0,55                  | 205,58        | 2,03         |
| 5              | 140                          | 120            | 310                 | 0,7                   | 219,87        | 2,17         |
| 6              | 100                          | 130            | 280                 | 0,5                   | 198,46        | 1,96         |
| 7              | 100                          | 100            | 280                 | 0,5                   | 198,46        | 1,96         |
| 8              | 120                          | 70             | 330                 | 0,6                   | 233,91        | 2,31         |
| 9              | 110                          | 80             | 360                 | 0,55                  | 253,05        | 2,50         |
| 10             | 130                          | 100            | 390                 | 0,65                  | 253,15        | 2,50         |
| 11             | 120                          | 90             | 420                 | 0,6                   | 253,10        | 2,50         |
| 12             | 130                          | 100            | 450                 | 0,65                  | 253,15        | 2,50         |
| <b>Spolu 1</b> | <b>1410</b>                  | <b>960</b>     |                     | <b>7,05</b>           | <b>207,30</b> | <b>24,56</b> |
| 13             | 100                          | 100            | 450                 | 0,5                   | 253,00        | 2,50         |
| 14             | 90                           | 100            | 440                 | 0,45                  | 252,95        | 2,50         |
| 15             | 70                           | 90             | 420                 | 0,35                  | 252,85        | 2,50         |
| 16             | 40                           | 80             | 380                 | 0,2                   | 252,70        | 2,50         |
| 17             | 20                           | 80             | 320                 | 0,1                   | 226,34        | 2,24         |
| 18             | 0                            | 70             | 250                 | 0                     | 176,75        | 1,75         |
| 19             | 0                            | 60             | 190                 | 0                     | 134,33        | 1,33         |
| 20             | 0                            | 60             | 130                 | 0                     | 91,91         | 0,91         |
| 21             | 0                            | 50             | 80                  | 0                     | 56,56         | 0,56         |
| 22             | 0                            | 40             | 40                  | 0                     | 28,28         | 0,28         |
| 23             | 0                            | 20             | 20                  | 0                     | 14,14         | 0,14         |
| 24             | 0                            | 21             | 0                   | 0                     | 0,00          | 0,00         |
| <b>Spolu 2</b> | <b>320</b>                   | <b>771</b>     |                     | <b>1,6</b>            | <b>144,98</b> | <b>17,21</b> |

*Tabuľka 1: Ilustrácia finančných tokov pri faktoringu*

Z uvedených ilustratívnych údajov možno odvodiť, že celkové náklady na získanie faktoringového úveru pri zadaných parametroch faktoringu sú v každom roku odlišné a v porovnaní s bankovým úverom sú náklady vyššie hlavne z dôvodu faktoringového poplatku. V *Tabuľke 2* je uvedený prepočet celkových nákladov na úver.

|                       | 1. rok | 2. rok |
|-----------------------|--------|--------|
| náklady spolu         | 31,61  | 18,81  |
| priemerná výška úveru | 207,30 | 144,98 |
| % nákladov na úver    | 15,25% | 12,97% |

Tabuľka 2: Výpočet nákladov na faktoringový úver



Graf 1: Finančné toky faktoringu

### 3 MODELOVANIE CIEĽOV FAKTORA PRI FAKTORINGU S REGRESOM

Podmienky faktora pre poskytovanie úveru na základe odkúpených pohľadávok od výrobného podniku musia byť také, aby mu zabezpečili zadanú výnosovosť vloženého kapitálu.

Pri faktoringu s regresom, kedy faktor nepreberá riziko z neplatenia odkúpených pohľadávok, výnosy faktora sú hlavne z faktoringového poplatku, ktorý sa nevracia ani v prípade uplatnenia regresu. Je to čistý príjem za poskytnuté služby správy pohľadávok. Úrokové príjmy závisia od výšky poskytnutého úveru klientom. Kapitál na tento účel musí mať faktor k dispozícii, pričom jeho návratnosť je spojená s rizikovosťou klienta. Faktor má teda náklady na kapitál plus rezervu na riziko a náklady na správu podkúpených pohľadávok.

Tržby faktora za rok  $T$  sú dané nákladmi každého klienta a ich výška závisí od parametrov faktoringu  $p$ ,  $\alpha$ ,  $r$  a  $L$ :

$$T = p \sum_{i=1}^{12} P_p(i) + \frac{r}{12} \alpha \sum_{i=1}^{12} \sum_{k=0}^{t-1} P_p(i-k)$$

Po odpočítaní nákladov faktora na kapitál a správu pohľadávok sa čistý výnos porovnáva s požadovaným výnosom.

Čistý výnos faktora závisí od tých istých parametrov ako náklady na faktoringový úver klienta. Preto je potrebné hľadať také nastavenia parametrov faktoringu, aby vzájomná spolupráca faktora a klienta bola efektívna pre oboch účastníkov vzťahu, ak priestor pre spoločné nastavenie týchto parametrov nie je prázdny.

V praxi sa faktoringový poplatok v priemere pohybuje na úrovni 0,5% až 1,5 %, priemerné percento financovania 70% až 90% pre typ faktoringu s regresom, kedy riziko z nezaplatenia pohľadávok zostáva na klientovi. Úverový limit a úroková sadzba sa spravidla určujú podľa podmienok financujúcej banky.

### **Použitá literatúra**

1. DANIEL, P., 2013: Správa a vymáhanie pohľadávok. IURA Edition, Bratislava
2. Elton, E. J., M. J. Gruber, Brown S. J., Goetzmann W. N.: Modern Portfolio Theory Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons Inc., New York, 2009.
3. HOZLÁR, E., 2014: Factoring Credit Risk and its Security Modelling. Quantitative methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XVII, Bratislava, Ekonóm. s. 79 - 81
4. HORNIAČEK, M., 2008: Negotiation, preferences over agreements, and the core. International Journal of Game Theory, roč. 37, č. 2, s. 235-249. ISSN 0020-7276..
5. MLYNAROVÍČ, V., 1998: Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania. Ekonóm, Bratislava.
6. MLYNAROVÍČ, V. – HOZLÁR, E., 1993: Viackriteriálne rozhodovanie. ES Ekonomická univerzita, Bratislava, pp. 210.

### **Kontaktné údaje**

doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.

Univerzita Komenského , Fakulta sociálnych a ekonomických vied,

Mlynské Luhy 4, Bratislava

email: eduard.hozlar@fses.uniba.sk



# VIACROZMERNÉ MODELY VOLATILITY: PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA PRE VÝMENNÉ KURZY EUR/USD, GBP/USD A JPY/USD\*

## MULTIVARIATE VOLATILITY MODELS: EMPIRICAL RESULTS FOR EXCHANGE RATES EUR/USD, GBP/USD AND JPY/USD

*Michaela Chocholatá*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá viacrozmernými modelmi volatility triedy ARCH s dôrazom na modely VECH a BEKK. Po úvode do problematiky a prehľade súčasného stavu problematiky sú súčasťou príspevku metodologické východiská vzťahujúce sa k uvedenej dvojici modelov. V empirickej časti príspevku sú prezentované výsledky odhadu trojrozmerného modelu BEKK(1,1) pre výmenné kurzy EUR/USD, GBP/USD a JPY/USD v softvéri EViews vrátane grafického znázornenia podmienených korelácií indikujúcich previazanosť medzi výnosmi analyzovaných výmenných kurzov.

**Kľúčové slová:** *volatilita, model BEKK, výmenný kurz*

### Abstract

This paper deals with multivariate ARCH-class models with concentration on models VECH and BEKK. The introduction to the problem is followed by the survey of present state of problem and methodological aspects dealing with the mentioned couple of models. In the empirical part of the paper can be found the estimation results of the trivariate BEKK(1,1) model for exchange rates EUR/USD, GBP/USD and JPY/USD received from the software EViews. The graphical illustration of conditional correlations indicating the linkages between analysed exchange rates returns is also included in the paper.

**Keywords:** *volatility, model BEKK, exchange rate*

## 1 ÚVOD

Jedným z prístupov skúmajúcim interakcie medzi výmennými kurzami je prístup vychádzajúci z analýzy volatility. Modelovanie volatility výnosov pomocou jednorozmerných modelov triedy ARCH nie je dostatočné pokiaľ chceme posúdiť interakciu viacerých výmenných kurzov. Znamená to, že popri vlastnostiach ako napr. zhlukovanie volatility či tlsté konce zohľadnených aj pri jednorozmernom modelovaní, je potrebné brať do úvahy tiež viacrozmernú analýzu pohybu kovariancií v čase, resp. v čase sa meniacich korelácií (Rachev et al. (2007)). Zovšeobecnenie jednorozmerných modelov triedy ARCH na ich viacrozmernú verziu MGARCH (Multivariate GARCH) zohráva preto významnú úlohu. V súčasnosti existuje pomerne značné množstvo druhov viacrozmerných modelov MGARCH, pričom prehľad niektorých z nich spolu s odvolávkami na ich autorov možno nájsť napr. v Bauwens, Laurent a Rombouts (2006). Medzi najznámejšie patria modely VECH (Vectorized GARCH), BEKK, CCC (Constant Conditional Correlation) a DCC (Dynamic Conditional Correlation).

---

\* Tento príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0285/14 „Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na modely priestorovej ekonometrie“.

Aplikácia modelov MGARCH je veľmi široká – z mnohých oblastí možno spomenúť oblasť výberu portfólia, alokáciu aktív, výpočet value-at-risk a analýzu prenosu volatility. Medzi pomerne časté aplikácie modelov MGARCH patrí analýza volatility výnosov burzových indexov, resp. overovanie vplyvu rôznych kríz na ich vývoj a posúdenie prenosu „nákaz“. Z tejto oblasti je známych množstvo aplikácií týchto modelov na burzové výnosy stredoeurópskych krajín s cieľom preskúmať integráciu stredoeurópskych trhov navzájom či s vyspelými európskymi trhmi (prehľad niektorých spolu s odvolávkami na autorov pozri napr. v Chocholatá (2013)).

Problematike spoločného pohybu volatilit a prenosu volatility medzi výmennými kurzami je však v literatúre venovaná značne menšia pozornosť. Štúdie analyzujúce prenos volatility medzi výmennými kurzami sa začínajú objavovať v 90. rokoch 20. storočia. Bollerslev (1990) aplikoval vyššie spomínaný CCC model na päťicu výmenných kurzov európskych mien (nemecká marka (DEM), francúzsky frank (FRF), talianska líra (ITL), švajčiarsky frank (CHF) a britská libra (GBP)) voči americkému doláru (USD), pričom odhalil spoločný pohyb volatilit týchto piatich výmenných kurzov. Kearney a Patton (2000) pri analýze prenosu volatility medzi výmennými kurzami DEM/USD, FRF/USD, ITL/USD, GBP/USD, ECU/USD v období apríl 1979 – marec 1997 použili model BEKK. Na základe výsledkov analýzy potvrdili existenciu prenosu volatility pre denné i mesačné hodnoty výmenných kurzov. Preukázali tiež dominantné postavenie DEM v procese prenosu volatility. Antonakakis (2008) analyzoval spoločné pohyby a prenos volatility medzi výmennými kurzami EUR/USD, GBP/USD, JPY/USD a CHF/USD v období 1990 – 2007, pričom na analýzu použil modely BEKK a DCC. Na základe výsledkov možno tvrdiť, že bol preukázaný spoločný pohyb volatility a prenos volatility medzi týmito štyrmi výmennými kurzami, ktorý však po zavedení EUR zoslabil.

Predmetom príspevku je predstavenie vybraných viacrozmerných modelov volatility MGARCH, a to modelov VECM a BEKK. Súčasťou príspevku je tiež prípadová štúdia týkajúca sa aplikácie modelu BEKK(1,1) na denné hodnoty výnosov výmenných kurzov EUR/USD, GBP/USD a JPY/USD v období 4.1.2010 – 31.12.2013 s využitím softvéru EViews.

## 2 METODOLOGICKÉ VÝCHODISKÁ

Uvažujme  $N$  časových radov výnosov výmenných kurzov a symbolom  $\mathbf{r}_t$  označme  $N \times 1$  rozmerný vektor výnosov výmenných kurzov v tvare

$$\mathbf{r}_t = E(\mathbf{r}_t | \Omega_{t-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (1)$$

kde vektor podmienenej strednej hodnoty  $E(\mathbf{r}_t | \Omega_{t-1})$  zvyčajne býva špecifikovaný pomocou modelu VARMA (Vector Autoregressive Moving Average), možné sú však aj iné špecifikácie (viac pozri Xekalaki a Degiannakis (2010)).  $N \times 1$  rozmerný vektor náhodných zložiek  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  možno zapísať v tvare

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t \quad (2)$$

kde  $\mathbf{H}_t$  je pozitívne definitná podmienená variančno-kovariančná matica rozmeru  $N \times N$  a  $\mathbf{z}_t$  rozmeru  $N \times 1$  označuje náhodný vektor, pričom platí  $E(\mathbf{z}_t) = \mathbf{0}$  a  $E(\mathbf{z}_t \mathbf{z}_t^T) = \mathbf{I}_N$ .

Existuje viacero možných špecifikácií matice  $\mathbf{H}_t$ , ktoré zodpovedajú rôznym variantom modelov MGARCH. V súvislosti so špecifikáciou modelov MGARCH si však treba uvedomiť, že so zvyšujúcim sa rozmerom vektora  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  narastá aj počet parametrov v modeli, čo môže byť značne problematické z hľadiska ich odhadu. Ďalším aspektom, ktorý treba pri špecifikácii modelov MGARCH brať do úvahy, je zabezpečenie pozitívnej definitnosti matice  $\mathbf{H}_t$ . Nižšie sa budeme venovať špecifikáciám modelov VECH a BEKK.

## 2.1 Model VECH (p,q)

Všeobecná formulácia matice  $\mathbf{H}_t$  bola navrhnutá trojicou autorov Bollerslev, Engle a Wooldridge (1988) a vychádza z priameho zovšeobecnenia jednorozmerného modelu GARCH. Vo všeobecnom VECH modeli je každý prvok matice  $\mathbf{H}_t$  lineárnou funkciou oneskorených štvorcových chýb, súčinov chýb a oneskorených hodnôt prvkov matice  $\mathbf{H}_t$ , t. j.

$$vech(\mathbf{H}_t) = \mathbf{c} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i vech(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j vech(\mathbf{H}_{t-j}) \quad (3)$$

Symbol  $vech(\cdot)$  označuje operátor, ktorý transformuje dolnotrojuholníkovú časť symetrickej variančno-kovariančnej matice rozmeru  $N \times N$  na stĺpcový vektor rozptylov a kovariancií rozmeru  $N(N+1)/2 \times 1$ ,  $\mathbf{c}$  je vektor rozmeru  $N(N+1)/2 \times 1$  a  $\mathbf{A}_i$  a  $\mathbf{B}_j$  sú matice parametrov rozmeru  $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ . Výhodou tejto všeobecnej VECH reprezentácie je vysoká flexibilita modelu, na druhej strane má však aj isté nevýhody. Negarantuje totiž pozitívnu definitnosť matice  $\mathbf{H}_t$  a ďalšou nevýhodou je veľký počet parametrov  $N(N+1)/2 + (p+q)(N^4 + 2N^3 + N^2)/4$ , odhad ktorých je značne výpočtovo náročný. Bollerslev, Engle a Wooldridge (1988) prezentovali tiež zjednodušenú verziu modelu (3), ktorá vychádza z toho, že matice  $\mathbf{A}_i$  a  $\mathbf{B}_j$  sú diagonálne. Pre takýto model sa v literatúre zvykne používať označenie diag-VECH(p,q).

Alternatívnou reprezentáciou modelu MGARCH je model BEKK definovaný v publikácii Engle a Kroner (1995).

## 2.2 BEKK(p,q)

Model BEKK možno chápať ako ohraničenú verziu VECH modelu, ktorá zabezpečuje pozitívnu definitnosť podmienenej variančno-kovariančnej matice. Matematická formulácia modelu BEKK(p,q) má tvar

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^T + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{ki}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^T \mathbf{A}_{ki} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_{kj}^T \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{B}_{kj} \quad (4)$$

kde  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_{ki}$  a  $\mathbf{B}_{kj}$  predstavujú matice parametrov rozmeru  $N \times N$ , pričom matica  $\mathbf{C}$  je dolnotrojuholníková. Takáto parametrizácia garantuje pozitívnu definitnosť matice  $\mathbf{H}_t$ , ak matica  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$  je pozitívne definitná (Xekalaki a Degiannakis (2010)). Sumačné ohraničenie po hodnotu  $K$  poukazuje na všeobecnosť procesu (Bauwens, Laurent a Rombouts (2006)). Pre hodnoty  $K > 1$  vzniká však problém identifikácie, pretože existujú viaceré parametrizácie,

ktoré poskytujú rovnakú reprezentáciu modelu (viac pozri napr. Silvennoinen a Teräsvita (2008), Engle a Kroner (1995)). Odhad parametrov modelu (4) je pomerne výpočtovo náročný, keďže vyžaduje výpočet mnohých inverzií matic a tiež počet odhadovaných parametrov  $N(N+1)/2 + N^2K(p+q)$  je pomerne vysoký. Ak uvažujeme, že  $K = p = q = 1$ , potom počet odhadovaných parametrov bude  $N(5N+1)/2$ . S cieľom redukovať ich počet, čím samozrejme príde aj ku strate všeobecnosti modelu, je možné uvažovať s diagonálnou verziou modelu BEKK (diag-BEKK).

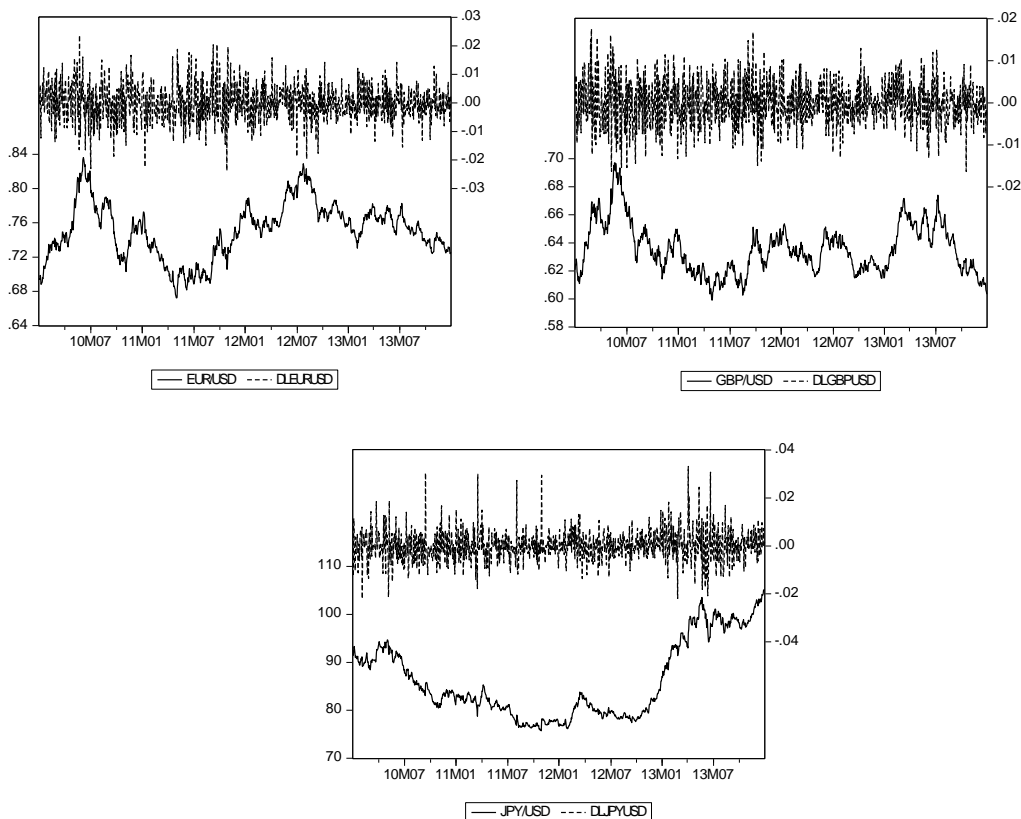
Vzhľadom na nutnosť odhadu vysokého počtu parametrov sú v jednotlivých aplikáciách modely VECH(p,q) a BEKK(p,q) veľmi zriedka používané pri skúmaní interakcií medzi viac ako tromi, resp. štyrmi časovými radmi.

### 3 EMPIRICKÉ VÝSLEDKY ANALÝZY

Príspevok je venovaný odhadu trojrozmerného modelu volatility BEKK(1,1) pre výmenné kurzy EUR/USD, GBP/USD a JPY/USD. Predmetom analýzy sú denné hodnoty uvedených výmenných kurzov v období 4.1.2010 – 31.12.2013, čo predstavovalo 1002 údajov. Údaje boli získané z internetovej stránky <http://fx.sauder.ubc.ca/data.html> a na analýzu bol využitý ekonometrický softvér EViews.

Priebeh vývoja jednotlivých výmenných kurzov a ich výnosov (ide o prvé diferencie logaritmov, preto v ďalšom texte budú analyzované časové rady označované predponou „DL“) je súčasťou obrázka č. 1. Volatilita časových radov výnosov bola v čase premenlivá, na obrázku č.1 je zreteľne pozorovateľné zhlukovanie volatility.

Obrázok č. 1 Priebeh vývoja analyzovaných výmenných kurzov a ich výnosov



Zdroj: Vlastné spracovanie v softvéri EViews s využitím dát z <http://fx.sauder.ubc.ca/data.html>.

Rovnice podmienenej strednej hodnoty pre jednotlivé časové rady výnosov boli odhadované nasledujúcim spôsobom (Brooks (2008), EViews 6 User's Guide II):

$$DLEURUSD_t = \log(EURUSD_t / EURUSD_{t-1}) = c_1 + \varepsilon_{1t}$$

$$DLGBPUSD_t = \log(GBPUSD_t / GBPUSD_{t-1}) = c_2 + \varepsilon_{2t},$$

$$DLJPYUSD_t = \log(JPYUSD_t / JPYUSD_{t-1}) = c_3 + \varepsilon_{3t}$$

pričom o  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t})^T$  sa predpokladá, že má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a variančno-kovariančnou maticou  $H_t$ . Podmienený rozptyl a podmienené kovariancie boli odhadnuté v softvéri EViews s využitím modelu BEKK(1,1). Špecifikácia tohto modelu z EViews je nasledovná (číslo 1 je označený časový rad DLEURUSD, číslom 2 časový rad DLGBPUSD a číslom 3 časový rad DLJPYUSD):

Variance-Covariance Representation:

$$\text{GARCH} = M + A1 * \text{RESID}(-1) * \text{RESID}(-1) * A1 + B1 * \text{GARCH}(-1) * B1$$

Variance and Covariance Equations:

$$\text{GARCH1} = M(1,1) + A1(1,1)^2 * \text{RESID1}(-1)^2 + B1(1,1)^2 * \text{GARCH1}(-1)$$

$$\text{GARCH2} = M(2,2) + A1(2,2)^2 * \text{RESID2}(-1)^2 + B1(2,2)^2 * \text{GARCH2}(-1)$$

$$\text{GARCH3} = M(3,3) + A1(3,3)^2 * \text{RESID3}(-1)^2 + B1(3,3)^2 * \text{GARCH3}(-1)$$

$$\text{COV1}_2 = M(1,2) + A1(1,1) * A1(2,2) * \text{RESID1}(-1) * \text{RESID2}(-1) * \text{RESID1}(-1) * \text{RESID2}(-1) + B1(1,1) * B1(2,2) * \text{COV1}_2(-1) * \text{COV1}_2(-1)$$

$$\text{COV1}_3 = M(1,3) + A1(1,1) * A1(3,3) * \text{RESID1}(-1) * \text{RESID3}(-1) + B1(1,1) * B1(3,3) * \text{COV1}_3(-1)$$

$$\text{COV2}_3 = M(2,3) * \text{RESID2}(-1) * \text{RESID3}(-1) + A1(2,2) * A1(3,3) * \text{RESID2}(-1) * \text{RESID3}(-1) * \text{COV2}_3(-1) + B1(2,2) * B1(3,3) * \text{COV2}_3(-1)$$

Odhady parametrov tohto modelu spolu s ostatnými štatistikami získanými z EViews sú v tabuľke č.1. S výnimkou jedného parametra boli všetky ostatné odhadnuté parametre štatisticky významné na hladine významnosti 10%.

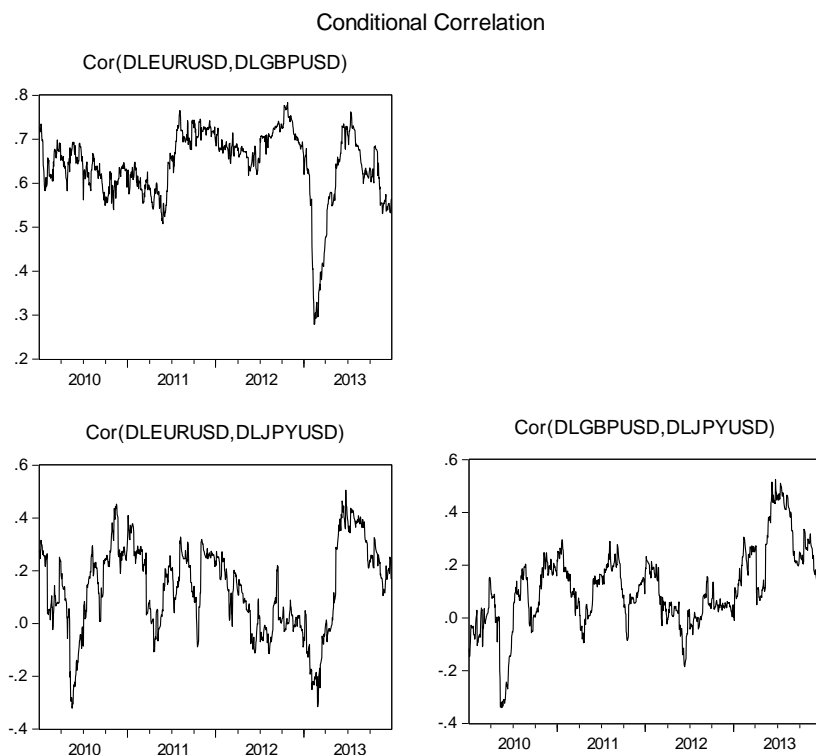
Tabuľka č.1 Odhad parametrov modelu BEKK

| Covariance specification: BEKK                          |             |            |             |        |
|---------------------------------------------------------|-------------|------------|-------------|--------|
| GARCH = M + A1*RESID(-1)*RESID(-1)*A1 + B1*GARCH(-1)*B1 |             |            |             |        |
| M is an indefinite matrix                               |             |            |             |        |
| A1 is diagonal matrix                                   |             |            |             |        |
| B1 is diagonal matrix                                   |             |            |             |        |
| Transformed Variance Coefficients                       |             |            |             |        |
|                                                         | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Prob.  |
| M(1,1)                                                  | 6.19E-07    | 2.30E-07   | 2.685065    | 0.0073 |
| M(1,2)                                                  | 2.34E-07    | 9.13E-08   | 2.558950    | 0.0105 |
| M(1,3)                                                  | 1.16E-07    | 6.17E-08   | 1.875927    | 0.0607 |
| M(2,2)                                                  | 1.66E-07    | 9.91E-08   | 1.677082    | 0.0935 |
| M(2,3)                                                  | 6.48E-08    | 4.21E-08   | 1.540229    | 0.1235 |
| M(3,3)                                                  | 1.30E-06    | 3.16E-07   | 4.092861    | 0.0000 |
| A1(1,1)                                                 | 0.178788    | 0.017918   | 9.978260    | 0.0000 |
| A1(2,2)                                                 | 0.143935    | 0.017710   | 8.127119    | 0.0000 |
| A1(3,3)                                                 | 0.183680    | 0.017278   | 10.63062    | 0.0000 |
| B1(1,1)                                                 | 0.975746    | 0.005228   | 186.6354    | 0.0000 |
| B1(2,2)                                                 | 0.986028    | 0.003605   | 273.5330    | 0.0000 |
| B1(3,3)                                                 | 0.965462    | 0.006200   | 155.7144    | 0.0000 |

Zdroj: Vlastné spracovanie v softvéri EViews s využitím dát z <http://fx.sauder.ubc.ca/data.html>.

Softvér EViews taktiež umožňuje odhad podmienených korelácií, ktorých grafický priebeh je znázornený na obrázku č.2, pričom je zrejmé, že sú v čase premenlivé. Kým hodnoty podmienených korelácií pre dvojicu DLEURUSD a DLGBPUSD sú pomerne vysoké – počas celého analyzovaného obdobia priemerná hodnota dosahovala 0,6414, priemerné hodnoty podmienených korelácií pre dvojice DLEURUSD a DLJPYUSD, resp. DLGBPUSD a DLJPYUSD boli značne nižšie – pohybovali sa na úrovni 0,1324, resp. 0,1116.

Obrázok č.2 Priebeh hodnôt podmienených korelácií



Zdroj: Vlastné spracovanie v softvéri EViews s využitím dát z <http://fx.sauder.ubc.ca/data.html>.

Okrem odhadu parametrov modelu BEKK je v softvéri EViews s využitím kontextovej ponuky menu možné odhadnúť tiež parametre modelov diag-VECH a CCC. Vyššie verzie EViews umožňujú takýmto spôsobom tiež odhad parametrov modelu DCC, v nižších verziách je odhad modelu DCC možný po napísaní programu na odhad jeho parametrov.

## 4 ZÁVER

Cieľom príspevku bolo poukázať na možnosti využitia viacrozmerných modelov triedy ARCH pri analýze previazanosti skúmaných časových radov. Po úvodnom prehľade súčasného stavu analyzovanej problematiky boli teoreticky z metodologického hľadiska popísané modely VECH a BEKK. Odhad modelu BEKK(1,1) bol využitý pri analýze trojice denných hodnôt výnosov výmenných kurzov EUR/USD, GBP/USD a JPY/USD počas štvorročného obdobia.

### Použitá literatúra

1. ANTONAKAKIS, N. 2008. Exchange Rate Volatility Comovements and Spillovers before and after the Introduction of Euro: A Multivariate GARCH Approach [online]. 41 p. [cit. 2013.08.20]. Dostupné na internete:

<http://www.econ.jku.at/members/Department/files/LunchTimeSeminar/NikolasAntonakakis.pdf>

2. BAUWENS, L. – LAURENT, S. – ROMBOUTS, J.V.K. 2006. Multivariate GARCH Models: A Survey. In: Journal of Applied Econometrics, 2006, vol. 21, p. 79-109.
3. BROOKS, CH. 2008. Introductory Econometrics for Finance. 2. edition, Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 648 p. ISBN 978-0-521-69468-1.
4. BOLLERSLEV, T. – ENGLE, R.F. – WOOLDRIDGE, J.M. 1988. A Capital-Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. In: Journal of Political Economy, 1988, vol. 96, No. 1, p. 116-131.
5. BOLLERSLEV, T. 1990. Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. In: Review of Economics and Statistics, 1990, vol. 72, p. 498-505.
6. ENGLE, R.F. – KRONER, K. F. 1995. Multivariate Simultaneous Generalised GARCH. In: Econometric Theory, 1995, vol. 11, p. 122-150.
7. CHOCHOLATÁ, M. 2013. Vybrané prístupy k analýze výmenných kurzov a ich interakcií. Habilitačná práca. FHI EU, Bratislava, 2013. 135 s.
8. KEARNEY, C. – PATTON, A.J. 2000. Multivariate GARCH Modeling of Exchange Rate Volatility Transmission in the European Monetary System. In: The Financial Review, 2000, vol. 41, p. 29-48.
9. RACHEV, S.T. et al. 2007. Financial Econometrics. From Basics to Advanced Modeling Techniques. Hoboken, New Jersey: John Wiley&Sons, 2007. 576 p. ISBN 978-0-471-78450-0.
10. SILVENNOINEN, A. – TERÄSVIRTA, T. 2008. Multivariate GARCH models. In: SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, 2008, January, No. 669, 25 p.
11. XEKALAKI, E. – DEGIANNAKIS, S. 2010. ARCH Models for Financial Applications. Padstow, Cornwall: John Wiley & Sons, 538 p. ISBN: 978-0-470-06630-0.
12. <http://fx.sauder.ubc.ca/data.html> [cit. 2014.04.16]
13. EViews 6 User's Guide II

### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: [michaela.chocholata@euba.sk](mailto:michaela.chocholata@euba.sk)

# SROVNÁNÍ VÝUKY PROJEKTOVÉHO ŘÍZENÍ NA VŠ S OHLEDEM NA CERTIFIKACI IPMA

## COMPARISON OF THE PROJECT MANAGEMENT TUITION AT UNIVERSITIES WITH RESPECT TO THE IPMA CERTIFICATION

*Lucie Janiczková, Martina Kuncová*

### **Abstrakt**

Metodologie řízení projektů vychází obvykle z předem definovaných standardů, mezi které patří především IMPA a PMI. Výuka projektového řízení na VŠ ne vždy kopíruje tyto standardy, ale je zaměřena i jiným směrem, především na obecnou problematiku projektů a techniky řízení projektů. Bývá také napojena na výuku operačního výzkumu či informační management. V této práci jsme se zaměřili na posouzení pokrytí požadavků na certifikaci IPMA stupně „D“ ve výuce projektového řízení na vybraných vysokých školách.

***Klíčové slová:** řízení projektů, certifikace, IPMA, výuka na VŠ*

### **Abstract**

Project management methodology is usually based on the pre-defined standards as IPMA or PMI. The tuition of project management at the universities does not copy always these standards but it is aimed at different things especially the projects itself and the project management techniques. It is also connected with the tuition of operational research or information management. In this paper we try to analyze the coverage of the requirements of IPMA-level D certification in the tuition of the project management at the selected universities.

***Keywords:** project management, certification, IPMA, tuition at universities*

## **1 ŘÍZENÍ PROJEKTŮ**

Problematika řízení projektů je poměrně široká a ačkoli jsou malé či velké projekty součástí lidského života odpradáвна a každý větší vyžaduje dobrou organizaci a řízení, o metodách a nástrojích pro řízení projektů se více začalo mluvit a psát až od minulého století. Projekt můžeme definovat např. jako „časově, nákladově a zdrojově omezený proces realizovaný za účelem vytvoření definovaných výstupů (rozsah naplnění projektových cílů) co do kvality, standardů a požadavků.“ (Doležal a ko. 2012). Zjednodušeně řečeno, jde o jednorázovou akci složenou z dílčích činností, které bude realizovat určený počet osob s využitím dalších omezených zdrojů. Cíl akce je přesně daný a obvykle existuje jak časové omezení projektu, tj. doba, kdy musí začít/skončit, tak nákladové omezení (kolik peněz lze max.vyčerpat). U některých projektů se tato omezení stanovují na základě předchozích analýz a výpočtů. Obecně se může se jednat o projekty investiční a neinvestiční – k prvnímu typu patří např. projekty technologické a stavební (výstavba dálnice, stavba domu, rekonstrukce bytu), či projekty tvorby nového informačního systému a jeho implementace v organizaci, k druhému pak např. projekty zaměřené na vzdělávání či rozšíření služeb.



Řízení projektů z odborného pohledu zahrnuje soubor ověřených nástrojů, technik a postupů, které vedou k realizaci všech činností a splnění cíle projektu s přiměřeným úsilím, v daném čase a s dostupnými zdroji. Rosenau (2007) definuje 5 kroků důležitých pro řízení projektů:

- definování projektových cílů
- plánování (časového plánu, rozpočtu projektu)
- vedení (manažerské řízení lidských zdrojů)
- sledování, monitorování (průběžná kontrola stavu, odchylky od plánů)
- ukončení (ověření naplnění cíle)

Pro každý projekt bývají zásadní první 3 kroky, přičemž druhý z nich lze podpořit matematickými metodami a technikami pro výpočet délky projektu (CPM, PERT, MPM), časovou a nákladovou analýzu (CPM/COST) či naplánování a analýzu zdrojů. Tyto metody a techniky bývají zahrnovány pod oblast operačního výzkumu (Fiala 2008), případně managementu (včetně informačního) či logistiky.

## **2 STANDARDY PROJEKTOVÉHO ŘÍZENÍ**

Standardy projektového řízení vznikly postupem času ze zkušeností manažerů projektů, a jedná se tedy z větší části o doporučené postupy, než o postupy přesně matematicky popsané. Mezi hlavní světové standardy patří IPMA, PMI, PRINCE2®, a do jisté míry i ISO 21500 (Janiczková 2014).

### **2.1 Standard IPMA**

Organizace International Project Management Association (IPMA) vytváří standard kompetenční. Standard se nezaměřuje na přesnost podoby definovaných procesů a konkrétní aplikace těchto procesů, nýbrž na schopnosti a dovednosti, neboli kompetence, projektových, programových a portfolio manažerů a členy týmů. IPMA je nejstarší mezi organizacemi daného charakteru. Základní filozofie je podobná ostatním standardům. Problematika projektového řízení je ve verzi 3.2 rozdělena do tří základních kompetenčních oblastí. Do první patří kompetence technické, do kterých patří metody, techniky a nástroje. Behaviorální kompetence jsou v podstatě měkké dovednosti (etika, asertivita, vyjednávání atd.) a do kontextových kompetencí zahrnuje integrační a systémové dovednosti a znalosti. Tyto oblasti jsou dále členěny na tzv. elementy kompetencí. IPMA je v České republice zastoupena prostřednictvím Společnosti pro projektové řízení, o.s. – SPŘ. V České republice byl tedy vydán Národní standard kompetencí projektového řízení, který je někdy zkráceně nazýván CzCB – Czech Competence Baseline. Nyní je tento standard aktualizován na verzi 3.2 (Pitaš a kol. 2012).

### **2.2 Standard PMI**

Standard PMI vytváří a udržuje Project Management Institute, profesní sdružení firem a projektových manažerů. PMBoK® vznikl v sedmdesátých letech 20. století na základě standardů US Army, které byly v oblasti projektů převzaty i do průmyslových standardů USA (PMBok 2008). Základním přístupem je v tomto případě procesní pojetí problematiky projektového řízení. Je definováno pět hlavních rodin procesů, devět oblastí znalostí, jednotlivé procesy a jejich vzájemné vazby. Veškeré procesní kroky mají definovány své vstupy, výstupy a nástroje transformace (úkony, metody, techniky). V České republice se s tímto standardem můžeme setkat především prostřednictvím IT a dalších firem, které jsou vlastněny americkou mateřskou společností a přinášejí si tento standard v kmenových směrnících.

## 2.3 PRINCE2®

PRINCE2® je britský standard, který udržuje a spravuje APM Group Ltd. (Doležal 2009). Metodologii vlastní OGC – Office of Government Commerce. Opět jde o procesní pojetí, které vzniklo na základě zadání britského ministerstva průmyslu a obchodu. V určité době potřebovala státní správa mnoho IT projektů, které však měly tendenci nedodržovat svůj harmonogram a rozpočet. OGC proto vyvinula metodiku, ze které se stal standard, manažer projektu musel být certifikován. V České republice se s tímto standardem můžeme setkat především u dceřiných firem britských společností.

## 2.4 ISO 21500

Mezinárodní organizace pro normalizaci (ISO) schválila v srpnu 2012 nový mezinárodní standard projektového řízení ISO 21 500 - Guidance on project management (ISO 2012). Nejedná se ani o samotnou normu jako takovou, ale o tzv. Směrnici jakosti v managementu projektu. Zatímco předcházející norma 10 006 se zabývala hlavně otázkou řízení kvality, nová směrnice poskytuje konkrétnější postupy a doporučení. Co se týče obsahu a procesního pojetí, je tato směrnice velmi podobná standardu PMBoK®. ISO 21 500 lze použít na jakýkoli typ organizace a pro každý typ projektu bez ohledu na složitost a délku trvání projektu. Tato norma není určena pro certifikaci.

## 3 CERTIFIKACE IPMA

Mezinárodní asociace pro projektové řízení IPMA byla založena v roce 1965 jako první organizace sdružující projektové manažery. Pobočkou pro tuto společnost v České republice je Společnost pro projektové řízení, o.s., (SPŘ), která byla ustanovena k realizaci certifikačního procesu dle IPMA®. Certifikační orgán je odborně nezávislou složkou na SPŘ a má na starosti zabezpečit, že certifikace splňují požadavky certifikačního schématu popsaného v IPMA® Certification Regulations Guidelines. Certifikace probíhá i v českém jazyce a je mezinárodně uznávaná.

**Tabulka 1:** Kompetence projektového manažera IPMA – D  
(Pitaš a kol. 2012, Janiczková 2014)

| Technické kompetence              | Behaviorální kompetence   | Kontextové kompetence                                    |
|-----------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------|
| Úspěšnost řízení projektu         | Vůdčovství                | Orientace na projekt                                     |
| Zainteresané strany               | Zainteresanost a motivace | Orientace na program                                     |
| Požadavky a cíle projektu         | Sebekontrola              | Orientace na portfolio                                   |
| Rizika a příležitosti             | Asertivita                | Implementace projektu, programu a portfolia              |
| Kvalita                           | Uvolnění                  | Trvalá organizace                                        |
| Organizace projektu               | Otevřenost                | Byznys                                                   |
| Týmová práce                      | Kreativita                | Systemy, produkty a technologie                          |
| Řešení problémů                   | Orientace na výsledky     | Personální management                                    |
| Struktury v projektu              | Výkonnost                 | Zdraví, bezpečnost, ochrana života a životního prostředí |
| Rozsah a výstupy (dodávky)        | Diskuse                   | Finance                                                  |
| Čas a fáze projektu               | Vyjednávání               | Právo                                                    |
| Zdroje                            | Konflikty a krize         |                                                          |
| Náklady a financování             | Spolehlivost              |                                                          |
| Obstarávání a smluvní vztahy      | Porozumění hodnotám       |                                                          |
| Změny                             | Etika                     |                                                          |
| Kontrola, řízení a podávání zpráv |                           |                                                          |

|                         |  |  |
|-------------------------|--|--|
| Informace a dokumentace |  |  |
| Komunikace              |  |  |
| Zahájení                |  |  |
| Ukončen                 |  |  |

Certifikační systém IPMA rozeznává čtyři certifikační stupně dle náročnosti:

- A – Certifikovaný ředitel projektů (IPMA Level A®, Certified Projects Director) – cíleno na schopnost řídit určitý program nebo portfolio a na použití adekvátních metod a nástrojů. Není však zaměřena na řízení jednotlivého projektu.
- B – Certifikovaný projektový senior manažer (IPMA Level B®, Certified Senior Project Manager) – zaměřeno na schopnost řídit komplexní projekt.
- C – Certifikovaný projektový manažer (IPMA Level C®, Certified Project Manager) – zde je nutné prokázat určitý stupeň znalostí a demonstrovat získané zkušenosti z proj.řízení
- D – Certifikovaný projektový praktikant (IPMA Level D®, Certified Project Management Associate) - určena především členům projektových týmů a také jako doklad teoretických znalostí v řízení projektů.

Poslední uvedený stupeň vyžaduje výhradně teoretické znalosti, které lze získat např. studiem na vysoké škole. Dle Národního standardu kompetencí projektového řízení (Pitaš a kol. 2012) jsou vymezeny 3 oblasti kompetencí: technické, behaviorální a kontextové. Procentuální poměr zařazení otázek do písemného testu pro certifikaci je tento: 70 % technické kompetence, 15 % behaviorální kompetence, 15 % kontextové kompetence. Zařazení elementů kompetencí do těchto tří oblastí zobrazuje Tabulka 1.

#### 4 VÝUKA PROJEKTOVÉHO ŘÍZENÍ NA VŠ A IPMA

S rostoucím zájmem o projektové manažery a členy projektových týmů se na vysokých školách rozvíjí i průprava projektového řízení, a to především na školách technického a ekonomického zaměření. Jak již bylo zmíněno výše, část metod (zejména z oblasti technických kompetencí) spadá pod oblast operačního výzkumu a bývá tak vyučována jako základ v předmětech Operační výzkum, Matematické modely, Kvantitativní management, Informační management apod. Specializované předměty věnované přímo projektovému řízení se pak liší podle toho, pro jaký studijní obor jsou určeny – a podle toho jsou více zaměřené na technické znalosti či manažerské znalosti nebo přímo na propojení znalostí směrem k možné certifikaci stupně D. Na základě sylabů předmětů z vybraných českých veřejných vysokých škol jsme se pokusili určit, nakolik je daný předmět vhodný pro následnou certifikaci IPMA stupně D, tj. určit, kolik procent požadovaných kompetencí by student po splnění předmětu mohl mít.

Aby bylo možné procentuálně vyjádřit překryv požadované látky pro certifikaci a požadavky na studenty vysokých škol, a aby byly zachovány poměry uvedených kompetencí, bylo zařazení jednotlivých elementů do výuky obodováno (viz Tabulka 2).

**Tabulka 2:** Bodování zařazení jednotlivých elementů do výuky (Janiczková 2014)

| Oblasti kompetencí | Zařazení oblastí kompetencí do testů v % | Počet elementů kompetencí | Bodování za oblasti kompetencí celkem | Body celkem |
|--------------------|------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|-------------|
| Technické          | 70                                       | 20                        | 77                                    | 2200        |
| Behaviorální       | 15                                       | 15                        | 22                                    |             |

|            |    |    |    |  |
|------------|----|----|----|--|
| Kontextové | 15 | 11 | 30 |  |
|------------|----|----|----|--|

Na základě informací dostupných ze sylabů předmětů uvedených na webových stránkách školy a osobních konzultací s přednášejícími byl každému z vybraných předmětů přiřazen určitý počet elementů ze tří výše zmíněných kompetencí (více viz Janiczková 2014). Zařazení předmětů bylo ovlivněno také osobními zkušenostmi s výukou projektového řízení (VŠE, VŠPJ), neobsahuje tedy výčet všech předmětů ze všech vysokých škol, ale pouze ukázkou pro srovnání, jaká je situace na vybraných školách a jak se liší obsahy předmětů zaměřených na řízení projektů. Tabulka 3 ukazuje seznam všech posuzovaných předmětů, počet kompetencí, kterým je věnována část výuky, celkový počet přidělených bodů a následně procentní skóre vzhledem k certifikaci IPMA stupně D, tj. hrubý odhad toho, kolik % z výše uvedených kompetencí lze získat po absolvování daného předmětu. Jelikož nebylo možné všechny předměty osobně absolvovat, jde pouze o odhad vytvořený na základě získaných informací.

**Tabulka 3:** Srovnání výuky na vybraných VŠ a certifikace IPMA (Janiczková 2014, sylaby uvedených předmětů, vlastní zpracování)

| škola  | předmět                              | počet kompetencí |              |            | body | % IPMA - D |
|--------|--------------------------------------|------------------|--------------|------------|------|------------|
|        |                                      | technické        | behaviorální | kontextové |      |            |
| VŠE    | Řízení projektů                      | 10               | 1            | 2          | 852  | 38,73      |
|        | Kompetence projektového manažera     | 4                | 7            | 0          | 462  | 21,00      |
|        | Metody a standardy proj. managementu | 20               | 15           | 11         | 2200 | 100,00     |
| ČVUT   | Projektové řízení                    | 20               | 4            | 0          | 1628 | 74,00      |
| VUT    | Řízení projektů                      | 17               | 4            | 3          | 1487 | 67,59      |
| UPOL   | Projektový management                | 13               | 1            | 1          | 1053 | 47,86      |
| VŠB-TU | Projektové řízení A                  | 12               | 1            | 4          | 1066 | 48,45      |
| VŠPJ   | Projektové řízení I                  | 8                | 2            | 1          | 690  | 31,36      |
|        | Projektové řízení II                 | 13               | 4            | 4          | 1209 | 54,95      |
|        | Techniky proj. managementu           | 10               | 2            | 1          | 844  | 38,36      |

Z tabulky je patrné, že ve většině předmětů je důraz ve výuce kladen na technické kompetence, což je v souladu s procentním nastavením certifikace IPMA stupně D, kde je také vysoké procento testových otázek zaměřeno právě na tyto kompetence. Nejméně jsou naopak zastoupeny kompetence kontextové, což je způsobeno především zařazením předmětů spíše do bakalářského stupně studia, kdy studenti nemají téměř žádné reálné zkušenosti ani rozhled v dané oblasti. Přesto jsme našli na VŠE jeden předmět, který je zaměřen přímo na certifikaci IPMA stupně D, takže zahrnuje vše, co certifikace vyžaduje. Každopádně lze konstatovat, že vystudováním předmětu zaměřeného na projektové řízení lze získat více než třetinu poznatků nutných pro splnění certifikace IPMA stupně D. Student vysoké školy tak může získat dostatečnou výhodu pro případný zájem certifikát získat.

## 5 ZÁVĚR

Řízení projektů je problematika velmi obsáhlá zahrnující jak technické znalosti, tak manažerské dovednosti a zkušenosti, včetně schopností vedení lidí, týmové práce a komunikace. Cílem tohto článku bylo nastínění problematiky standardizace v oblasti projektového řízení se zaměřením na standard IPMA a certifikaci dle IPMA a následné posouzení, zda lze na základě studia jednosemestrálního předmětu na vysoké škole získat dostatečné znalosti pro získání nejnižšího stupně této certifikace. Do srovnání byly zařazeny

jak technicky zaměřené, tak ekonomicky zaměřené české veřejné vysoké školy, a na nich pak předmět(y) spojené s řízením projektů. Posouzení obsahů předmětů a srovnání s kompetencemi dle IPMA nebylo jednoduché a mnohdy je založeno pouze na analýze sylabu daného předmětu. Nicméně výsledná analýza ukázala, že studenti, kteří absolvují některý z předmětů zaměřených na projektové řízení, mohou získat poměrně značné znalosti z požadovaných kompetencí. Na VŠE Praha existuje i předmět zaměřený přímo na získání všech kompetencí dle IMPA stupně D, tj. umožňuje studentům pokusit se poté certifikát získat.

### **Použitá literatura**

1. DOLEŽAL, J., MÁCHAL, P., LACKO, B., a kol. 2012. Projektový management podle IPMA. 2. vyd., Praha: Grada Publishing, 2012. ISBN 978-80-247-4275-5
2. FIALA, P. 2008. Řízení projektů. 2.vyd. Praha: Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1413-0.
3. ISO 2012. New ISO standard on project management [cit. 15.2.2014]. Dostupné z: [http://www.iso.org/iso/home/news\\_index/news\\_archive/news.htm?refid=Ref1662](http://www.iso.org/iso/home/news_index/news_archive/news.htm?refid=Ref1662)
4. JANICZKOVÁ, L. 2014. Řízení projektů – srovnání výuky na VŠ s ohledem na certifikaci IPMA. VŠE Praha, 2014, Bakalářská práce
5. PITÁŠ, J. a kol. 2012. Národní standard kompetencí projektového řízení (CzNCB) verze 3.2. Společnost pro projektové řízení, o.s., 2012 [cit. 5.3.2014]., Dostupný z: <http://www.ipma.cz/web/files/narodni-standard-kompetenci-projektoveho-rizeni.pdf>
6. PMBoK 2008. A guide to the project management body of knowledge (PMBOK Guide), 4 edice, Pennsylvania: Project Management Institute, Inc., 2008. ISBN 978-1-933890-51-7
7. ROSENAU, D. 2007. Řízení projektů, 3.vyd. Brno: Computer Press, 2007. ISBN 978-80-251-1506-0.
8. Webové stránky uvedených škol

### **Poděkování**

Článek vznikl za podpory projektu interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické F4/19/2013 (IG403033).

### **Kontaktní údaje**

Bc. Lucie Janiczková

Vysoká škola ekonomická v Praze, fakulta informatiky a statistiky

Nám.W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: [xjanl59@vse.cz](mailto:xjanl59@vse.cz)

Ing. Martina Kuncová, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická v Praze, fakulta informatiky a statistiky

Nám.W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 449

email: [martina.kuncova@vse.cz](mailto:martina.kuncova@vse.cz)

# ANALÝZA VZTAHŮ MEZI VÝVOJEM INDEXU S&P 500 A MAKROEKONOMICKÝMI UKAZATELI

## ANALYSIS OF RELATIONS BETWEEN THE S&P 500 INDEX AND MACROECONOMIC INDICATORS

*Maria Kobzareva*

### **Abstrakt**

Tato práce je zaměřena na zkoumání vlivů důležitých makroekonomických ukazatelů jako hrubý domácí produkt, míra inflace, míra nezaměstnanosti, světová cena ropy na vývoj cen akcií na trhu Spojených států, představených pomocí indexu S&P 500. Vzhledem k nestacionaritě časových řad makroekonomických veličin ekonometrická analýza byla provedena pomocí vektorového autoregresního modelu (VAR), kde maximální délka zpoždění byla zjištěná pomocí předběžného kroku ve formě regresního modelu. Po provedení diagnostiky modelu byla zkoumána Grangerova kauzalita mezi proměnnými modelu. Výpočty byly provedeny v ekonometrickém softwaru EViews 8.

***Klíčová slova:** Burzovní index, Grangerova kauzalita, portfolio, VAR model*

### **Abstract**

This paper presents a research which is focused on examination of influence of important macroeconomic indicators, such as Gross Domestic Product, inflation rate, unemployment rate, price of oil on the prices of shares at Untied States market, presented by S&P 500 index. Due to non-stationary character of time series of macroeconomic indicators the econometric analysis was performed by VAR model, where the maximum length of delay was obtained during preliminary step where the linear regression models were constructed. After diagnoses control Granger causality between the model variables had been tasted. Computations were performed in EViews 8 econometric software.

***Keywords:** Stock index, Granger causality, portfolio, VAR model*

## **1 ÚVOD**

Tento článek se zabývá charakterem vývoje akciového trhu Spojených států v posledních dvaceti letech a nastiňuje makroekonomické souvislosti vývoje cen akcií. Mezi nejdůležitější ekonomické faktory ovlivňující ceny akcií patří hrubý domácí produkt, míra inflace a míra nezaměstnanosti, světová cena ropy, dále lze vymezit řadu dalších faktorů, které ale v této práci nebudou zkoumány.

Ekonometrická analýza se zaměřuje na odhalení vztahů mezi vývojem základních makroekonomických veličin a vývojem indexu S&P 500, který se považuje za jeden ze základních akciových indexů, na který se orientují investoři po celém světě. Předpokladem je skutečnost, že akcie jsou volatilní a citlivě reagují na politická rozhodnutí a spekulace trhu. Schopnost akciového trhu předpovídat vývoj ekonomiky je omezená, přesto by makroekonomické veličiny mohly dobře sloužit jako jedny z předstihových ukazatelů.

Z indexů jsem vybrala index S&P 500, který se skládá z 500 akcií, které byly vybrané mimo jiné podle hodnotové váhy na trhu, likvidity a odvětvového členění. Tento index je vedoucím ukazatelem čisté hodnoty akciového trhu Spojených států a slouží k odrazení rizikově-výnosových charakteristik trhu.

## 2 VSTUPNÍ DATA

Pro účely této práce byla použita čtvrtletní data za období první čtvrtletí roku 1991 až první čtvrtletí roku 2014. Níže jsou uvedené zdroje, ze kterých byla čerpaná data.

HDP Spojených států v milionech EUR – data byla obdržena ze stránek Eurostatu v sekci Annual national accounts.

Míra nezaměstnanosti Spojených států v procentech byla získána ze stránek Bureau of Labor statistics <http://data.bls.gov/>.

Míra inflace Spojených států v procentech byla obdržena ze stránek <http://rateinflation.com/>.

Světová cena ropy v USD za barel byla získána ze stránek U.S. energy information administration <http://www.eia.gov/>.

Hodnoty indexu S&P500 v bodech jsem čerpala ze stránek [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com).

Kvůli výkyvům hodnot jednotlivých časových řad, potřebujeme udělat předběžný krok ve formě logaritmizace, abychom zmírnili jejich průběh. Při logaritmické transformaci se výkyvy v hodnotách jednotlivých pozorovaných veličin zmenšily, avšak nebyly úplně odstraněny.

## 3 METODIKA POSTUPU A KONSTRUKCE MODELŮ

V této kapitole nastíním postup, který byl aplikován v této práci při ekonometrické analýze. Výpočty jsem provedla v softwaru EViews 8, výsledky jednotlivých kroků analýzy jsou představeny v dalších kapitolách.

V prvním kroku potřebujeme informace o řádu integrace časové řady, který můžeme zjistit pomocí rozšířeného Dickey-Fullerova (ADF) testu [1,130], který nabízí EViews, kde se testuje hypotéza, zda časová řada je integrovaná řádu nula. Po provedení testů vyřadíme stacionární veličiny z modelu, jelikož dlouhodobý vztah může být prokázán pouze u nestacionárních veličin.

V dalším kroku otestujeme sezónnost [2], [3], jelikož pracujeme s čtvrtletními časovými řadami. U proměnných zatížených sezonností, použijeme vygenerovanou sezonně očištěnou časovou řadu.

Dále provedeme předběžný krok ve formě tvorby regresního modelu [1, 105] pro jednotlivé proměnné pro zjištění optimálního počtu zpoždění a potvrzení předpokladu, že se zkoumané veličiny navzájem ovlivňují.

V dalším kroku bude zkonstruován VAR model [1, 237] a poté bude provedena jeho diagnostika z hlediska autokorelace (LM test), normality a homoskedasticity (Whitův test). Odpovídající tvar vektorového autoregresního modelu lze vyjádřit následovně [1, 238]:

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= \beta_1 + \beta_2 Y_{2t-1} + \beta_3 Y_{1t-1} + u_{1t}, t = 1, 2, \dots, T, \\ Y_{2t} &= \beta_4 + \beta_5 Y_{1t-1} + \beta_6 Y_{2t-1} + u_{2t}, t = 1, 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (1)$$

kde  $Y_{1t}$  a  $Y_{2t}$  jsou zkoumané veličiny,  $\beta_n$  jsou parametry modelu a  $u_{nt}$  jsou náhodné složky modelu.

Dále bude provedeno testování Grangerové kauzality [1, 244], ve které ověříme hypotézu, zdá změny jedné proměnné předchází změnám jiné proměnné a závěrem bude zjištěno, zdá je vhodné hodnoty jednotlivých proměnných předpovídat pomocí modelu VAR anebo, pokud se Grangerova kauzalita neprokáže, je lepší použít jednoduchý lineární regresní model Box Jenkingse.

V další části zkonstruovaný VAR model bude použit pro simulační prognózování vývoje sledovaných veličin v období druhé čtvrtletí roku 2014 až čtvrté čtvrtletí roku 2016 [3].

### 3.1 Ověření stacionarity zkoumaných časových řad

V prvním kroku potřebujeme informace o stacionaritě časových řad, jelikož pro odvození vztahů pomocí ekonometrické analýzy je stacionarita časových řad důležitou podmínkou.

Za tímto účelem aplikujeme na jednotlivé logaritmované časové řady test jednotkového kořene. Eviews nabízí rozšířený Dickey-Fullerův (ADF) test, který postupně budeme aplikovat na logaritmované časové řady. Rozšířený Dickey-Fullerův test testuje nulovou hypotézu, zda časová řada je stacionární, neboli integrovaná řádu nula.

Testovaná hypotéza byla na pěti procentní hladině významnosti zamítnuta u všech časových řad kromě inflace a tímto byla prokázána přítomnost jednotkového kořene.

### 3.2 Sezónnost

K testování sezónnosti použijeme census X-13 test [3], sezónnost je přítomna na jednoprocenní hladině významnosti u časové řady Cena Ropy. U ostatních časových řad se sezónnost neprokázala. V dalších výpočtech budu používat sezonně očištěnou časovou řadu loil\_d11, která byla testem X-13 automaticky vygenerována.

### 3.3 Konstrukce lineárních regresních modelů

Pro ověření existence vztahů mezi časovými řadami a zjištění optimální délky zpoždění provedeme předběžný krok ve formě konstrukce lineárního regresního modelu pro zkoumané veličiny.

Z lineární regrese, kde index S&P 500 vystupuje jako endogenní proměnná  $\hat{S}_t$  a ostatní veličiny jsou exogenní, vplynula rovnice v následujícím tvaru:

$$\hat{S}_t = 0,946 S_{t-1} + 0,026 Y_{t-2} + 0,166 P_t - 0,166 P_{t-2},$$

kde  $S_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty indexu S&P 500 v čase  $t-1$ ,  $Y_{t-2}$  jsou logaritmované hodnoty hrubého domácího produktu v čase  $t-2$  a  $P_t$  a  $P_{t-2}$  jsou logaritmované sezonně očištěné hodnoty ceny ropy v čase  $t$  a v čase  $t-2$ .

Předložený model byl po aplikaci testu autokorelace, normality a homoskedasticity prohlášen za vhodný. Jako optimální se ukázala délka zpoždění  $t = 2$ .

Předpověď ceny ropy pomocí lineárního regresního modelu je představena pomocí následující rovnice, kde cena ropy závisí sama na sobě v minulém období a na hrubém domácím produktu a indexu S&P 500 ve sledovaném a minulém období.

$$\hat{P}_t = 0,957 P_{t-1} + 0,599 S_t - 0,512 S_{t-1} - 0,771 Y_t + 0,742 Y_{t-1},$$

kde  $P_{t-1}$  jsou logaritmované sezonně očištěné hodnoty ceny ropy v čase  $t-1$ ,  $S_t$ ,  $S_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty indexu S&P 500 v čase  $t$  a v čase  $t-1$ , a  $Y_t$  a  $Y_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty hrubého domácího produktu v čase  $t$  a  $t-1$ .

Rovnice pro předpověď hrubého domácího produktu  $\hat{Y}_t$  lze určit ve tvaru:



$$\hat{Y}_t = 1,582 + 0,874 Y_{t-1} + 0,097 S_{t-1} - 0,056 P_t + 0,059 P_{t-2},$$

kde  $Y_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty hrubého domácího produktu v čase  $t-1$ ,  $S_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty indexu S&P 500 v čase  $t-1$ , a  $P_t$  a  $P_{t-2}$  jsou logaritmované sezónně očištěné hodnoty ceny ropy v čase  $t$  a v čase  $t-2$ .

Pro nezaměstnanost nebyl touto metodou vytvořen žádný uspokojivý model, což naznačuje, že zkoumané veličiny nepřispívají ke zlepšení předpovědi míry nezaměstnanosti a bylo by lepší míru nezaměstnanosti z modelu vyřadit.

### 3.4 VAR model konečně rozdělených zpoždění

Optimální délka zpoždění byla stanovená na dvě období. V prvním kroku jsem se pokusila vytvořit VAR model se všemi čtyřmi proměnnými – index S&P 500, HDP, cena ropy, míra nezaměstnanosti. Jako vstupní endogenní proměnné použijeme logaritmy zkoumaných makroekonomických veličin a indexu. Při testování se ale model ukázal jako nekvalitní, jelikož se tam ukázala heteroskedsticita, autokorelace a nenormalita.

Jednou z možností zlepšení vlastností odhadovaného modelu je vynechání jedné z endogenních proměnných. Tento článek se zaměřuje na analýzu vztahu indexu S&P 500, takže tuto proměnnou v modelu necháme. Pokud budeme uvažovat logicky, která z proměnných HDP, míra nezaměstnanosti anebo světová cena ropy má menší vliv na vývoj indexu S&P 500, jako první přichází do úvahy odstranit z modelů proměnnou míra nezaměstnanosti, jelikož z předchozího výzkumu lze předpokládat, že tato veličina do modelu nepatří.

V dalším kroku proto udělám VAR model se třemi endogenními proměnnými a konstantou, délku zpoždění stanovím na dvě období. V tomto případě délka zpoždění byla odhadnuta správně a konstanta patří do modelu (statistická významnost parametrů byla ověřena pomocí Studentova t-rozdělení na pětiprocentní hladině významnosti).

VAR model lze podle (1) zkonstruovat ve tvaru:

$$\hat{Y}_t = 1,552 + 1,002 Y_{t-1} - 0,064 P_{t-1} + 0,071 P_{t-2} + 0,142 S_{t-1},$$

$$\hat{P}_t = 1,072 P_{t-1}$$

$$\hat{S}_t = 0,994 S_{t-1} + 0,147 P_{t-1} - 0,160 P_{t-2},$$

kde a  $S_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty indexu S&P 500 v čase  $t-1$ ,  $Y_{t-1}$  jsou logaritmované hodnoty hrubého domácího produktu v čase  $t-1$ , a  $P_{t-1}$  a  $P_{t-2}$  jsou logaritmované sezónně očištěné hodnoty ceny ropy v čase  $t-1$  a v čase  $t-2$ ,  $\hat{S}_t$ ,  $\hat{Y}_t$ ,  $\hat{P}_t$  jsou odhady.

V dalším kroku byla provedena diagnostická kontrola modelu, kde na rezidua modelu byly aplikované testy autokorelace, normality a heteroskedasticity a model byl považován za přijatelný.

V dalším kroku potřebujeme zjistit, jak časové řady spolu souvisí v čase  $t$ , k tomu použijeme matice korelačních koeficientů, která je představena v tabulce č. 1. Čísla mimo diagonálu představují sílu závislostí zkoumaných veličin v čase  $t$ .

|          | LHDP      | LOIL_D11  | LS&P 500  |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| LHDP     | 1.000000  | -0.199179 | -0.024927 |
| LOIL_D11 | -0.199179 | 1.000000  | 0.326985  |
| LS&P 500 | -0.024927 | 0.326985  | 1.000000  |

Tabulka č. 1 Korelační matice

V tabulce č. 1 mimo diagonálu vidíme sílu závislostí mezi dvojicí proměnných v čase  $t$ . Z tabulky je patrné, že závislosti v tomto modelu nejsou silné, například síla závislostí mezi indexem S&P 500 a cenou ropy v čase  $t$  je 32,6 procenta.

### 3.5 Testování Grangerovy kauzality

Pokud spolu dvě časové řady souvisí v Grangerově kauzálním smyslu, potom informace z jedné časové řady zahrnutá do modelu druhé časové řady statisticky významně zlepší předpovědi první časové řady.

Za nulovou hypotézu při testování Grangerovy kauzality se považuje tvrzení, že jedna proměnná nepodmiňuje jinou v pojetí Grangerovy kauzality, neboli že její změny nepředcházejí změně druhé proměnné. Výsledky testování Grangerovy kauzality lze zhrnout následovně: z výsledků plyne, že cena ropy a hodnota indexu S&P 500 kauzálně v Grangerově smyslu působí na vývoj HDP a přidáním těchto veličin do modelu dostaneme kvalitnější odhad. Obdobně pro hodnotu indexu S&P 500 platí, že cena ropy kauzálně v Grangerově smyslu působí na vývoj S&P 500 a přidáním této veličiny do modelu dostaneme kvalitnější odhad. Zpožděné hodnoty těchto veličin přispívají ke zvětšení přesnosti předpovědi S&P 500, což je v souladu s předloženým VAR modelem.

### 3.6 Simulační předpovědi

V tomto kroku se pokusím udělat simulační stochastické předpovědi zkoumaných veličin na základě VAR modelu, vytvořeného v předchozím kroku.

Rozšířím škálu pozorování do čtvrtého čtvrtletí roku 2016 včetně a pokusím se odhadnout logaritmované hodnoty sledovaných veličin pro období druhé čtvrtletí roku 2014 až čtvrté čtvrtletí roku 2016 pomocí simulačních stochastických předpovědí [3].

|        | HDP      | Cena Ropy | S&P 500  |
|--------|----------|-----------|----------|
| 2013Q1 | 14.95663 | 4.482283  | 7.322959 |
| 2013Q2 | 14.97516 | 4.572766  | 7.397384 |
| 2013Q3 | 14.97648 | 4.688919  | 7.399979 |
| 2013Q4 | 14.95947 | 4.597766  | 7.499174 |
| 2014Q1 | 14.95667 | 4.564309  | 7.527084 |
| 2014Q2 | 14.98772 | 4.534258  | 7.501771 |
| 2014Q3 | 15.01365 | 4.517289  | 7.472830 |
| 2014Q4 | 15.03193 | 4.507912  | 7.449680 |
| 2015Q1 | 15.04276 | 4.516475  | 7.435841 |
| 2015Q2 | 15.04694 | 4.521584  | 7.425162 |
| 2015Q3 | 15.04851 | 4.530076  | 7.418739 |
| 2015Q4 | 15.04932 | 4.541162  | 7.414008 |
| 2016Q1 | 15.05044 | 4.554270  | 7.411413 |
| 2016Q2 | 15.05068 | 4.565116  | 7.410320 |
| 2016Q3 | 15.05151 | 4.578033  | 7.411576 |
| 2016Q4 | 15.05238 | 4.599318  | 7.416202 |

Tabulka č. 2 Simulační předpovědi sledovaných veličin

Hodnoty předpovědi jednotlivých veličin jsou vidět v tabulce č. 2, pro lepší přehled jsem v tabulce nechala pozorování i za rok 2013.

## 4 ZÁVĚR

V této práci jsem zkoumala souvislosti mezi vývojem základních makroekonomických veličin, a to hrubého domácího produktu Spojených států, míry inflace, míry nezaměstnanosti a světové ceny ropy a vývojem hodnot indexu S&P 500. Index S&P 500 je spravován komisí

pro index S&P společnosti Standard and Poor's a je pozorně sledován investory na celém světě jako ukazatel amerických akcií velkých společností. Hlavními sektory indexu S&P 500 jsou informační a technologický sektor, finančníctví, energetický sektor, zdravotnictví a průmysl, z nichž každý představuje 11% až 18% indexu. Menší sektory zahrnují podniky veřejných služeb a zpracovatelské podniky, z nichž každý představuje méně než 4% indexu.

Analýza byla provedena v ekonometrickém softwaru EViews 8 a probíhala v několika krocích, cílem bylo ověřit hypotézu o existenci krátkodobých vztahů mezi sledovanými veličinami. Vzhledem k tomu, že k existenci vztahu mezi časovými řadami potřebujeme zamítnout hypotézu o stacionaritě časových řad makroekonomických veličin, v první řadě byl na vstupní data aplikován test jednotkového kořene. Po zjištění řádu integrace jednotlivých časových řad pomocí rozšířeného Dickey-Fullerova (ADF) testu byla z analýzy vyřazena proměnná míra inflace, jelikož se tato veličina ukázala ve zkoumaném období jako stacionární. Vzhledem k nestacionaritě časových řad makroekonomických veličin byla ekonometrická analýza provedena pomocí vektorového autoregresního modelu (VAR), kde maximální délka zpoždění byla zjištěna pomocí předběžného kroku ve formě lineární regrese. Po provedení diagnostiky modelu byl výchozí model považován za nekvalitní vzhledem k tomu, že se vyskytovala heteroskedasticita, a tak na základě uvažování autorky byla z modelu vyřazena míra nezaměstnanosti. Modifikovaný model se prokázal jako uspokojivý a v dalším kroku byla zkoumána Grangerova kauzalita mezi proměnnými modelu, kde bylo zjištěno, že cena ropy a hodnota indexu S&P 500 kauzálně v Grangerově smyslu působí na vývoj HDP a přidáním těchto veličin do modelu dostaneme kvalitnější odhad. Obdobně pro hodnotu indexu S&P 500 platí, že cena ropy kauzálně v Grangerově smyslu působí na vývoj S&P 500 a přidáním této veličiny do modelu zkvalitníme odhad. U ceny ropy nebyla zjištěna kauzalita ani s jednou proměnnou. Na základě toho jsem udělala závěr, že model je uspokojivý a lze podle něj předpovídat vývoj jednotlivých veličin v krátkém období, takže v dalším kroku byly nasimulované stochastické předpovědi do konce roku 2016.

Na závěr bych zmínila, že předložená analýza prokázala existenci krátkodobých vztahů mezi hodnotou indexu S&P 500 a hrubým domácím produktem a cenou ropy, existence dlouhodobých vztahů ale ověřena nebyla. Je zřejmé, že hodnota indexu S&P 500 nemůže být závislá pouze na makroekonomických veličinách a při dalším výzkumu je třeba brát v potaz další faktory.

### **Literatura**

1. R. HUŠEK Ekonometrická analýza, Oeconomica, Praha 2007, ISBN 978-80-245-1300-3
2. T. CÍPRÁ Finanční ekonometrie, Ekopress s.r.o., Praha 2008, ISBN 978-80-86929-43-9

### **Internetové zdroje**

3. [http://www.eviews.com/illustrated/EViews\\_Illustrated.pdf](http://www.eviews.com/illustrated/EViews_Illustrated.pdf) [online]. 21.05.2014
4. <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/> [online]. 25.05.2014
5. <http://finance.yahoo.com> [online]. 9.06.2014
6. <http://rateinflation.com/> [online]. 21.05.2014
7. <http://data.bls.gov/timeseries/LNS14000000> [online]. 21.05.2014
8. <http://www.eia.gov/> [online]. 10.06.2014

### **Kontaktné údaje**

Ing. Maria Kobzareva

University of economics, Prague, Faculty of informatics and statistics

W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague 3, Czech Republic

Tel: +420 224 095 444

email: mariakobzareva@vse.cz

# ANALÝZA ČISTÝCH PRÍJMOV KRAJÍN V4 V POROVNANÍ S KRAJINAMI EU

## ANALYSIS OF NET INCOME V4 COUNTRIES COMPARED TO THE EU COUNTRIES

*Brian König<sup>1</sup>*

### Abstrakt

Článok sa zaoberá disparitou životnej úrovne vyjadrenej prostredníctvom čistého ročného príjmu obyvateľa. Príjmové nerovnosti sú porovnávané v rámci krajín V4 a krajín Európskej únie. Príspevok tiež poukazuje na nevhodnosť použitia priemerných hodnôt, ktoré nevyjadrujú reprezentatívnu hodnotu príjmu jednotlivca, nakoľko kvôli extrémnym hodnotám majú tendenciu nadhodnocovať realitu. V rámci porovnania jednotlivých krajín je zohľadnená odlišná cenová hladina, ktorá je vyjadrená prostredníctvom parity kúpnej sily.

**Kľúčové slová:** *parita kúpnej sily, príjmová nerovnosť, Lorenzova krivka, čisté príjmy, medián*

### Abstract

The article deals with the disparity of living standards expressed as net annual income per capita. Income inequalities are compared within the V4 countries and the European Union. The contribution also emphasizes the inappropriateness of average values, which do not represent the representative value of the income of the individual, due to the extreme values tend to overestimate the reality. Within-country comparison is reflected different price level, which is expressed through purchasing power parity.

**Keywords:** *purchasing power parity, income disparity, Lorenz curve, net income, median*

## 1 ÚVOD

Životná úroveň takmer každého z nás závisí od určitých ukazovateľov. Jedným z kľúčových indikátorov vplývajúcich na blahobyt jednotlivca (resp. domácnosti) je jeho príjem, ktorý determinuje mnohé aspekty života, predovšetkým našu spotrebu a jej štruktúru. Cieľom tohto príspevku je porovnať čistý príjem krajín vyšehradskej štvorky (V4) s krajinami európskej únie (EU) resp. eurozóny (EZ) a poukázať na disparity životnej úrovne medzi nimi. K tomu, aby sme zohľadnili aj rozdiely v cenových hladinách v jednotlivých krajinách použijeme aj údaje prepočítané na základe parity kúpnej sily (PKS). Parita kúpnej sily reprezentuje akýsi teoretický výmenný kurz medzi dvoma krajinami, ktorý zohľadňuje aj cenovú hladinu porovnávaných krajín. Takto prepočítaný príjem nám poukáže na kúpyschopnosť obyvateľov v porovnaní s inými štátmi.

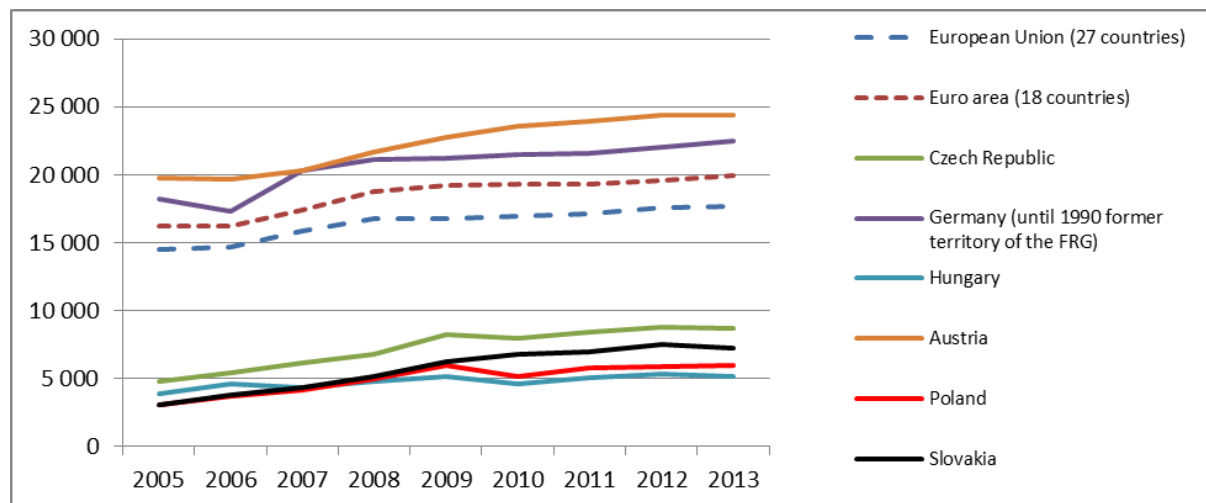
---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0285/14 "Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na metódy priestorovej ekonometrie"

## 2 KOMPARÁCIA KRAJÍN V4 S PRIEMEROM EU A EZ

Slovensko z pohľadu čistého ročného príjmu zaznamenáva od roku 2005 rastúce tendencie, okrem roku 2012 kedy došlo k miernemu poklesu. V roku 2005 bola SR v rámci krajín V4 v podstate na poslednej priečke spolu s Poľskom a počas nasledujúcich rokov predbehla Maďarsko a dostala sa na druhú priečku.

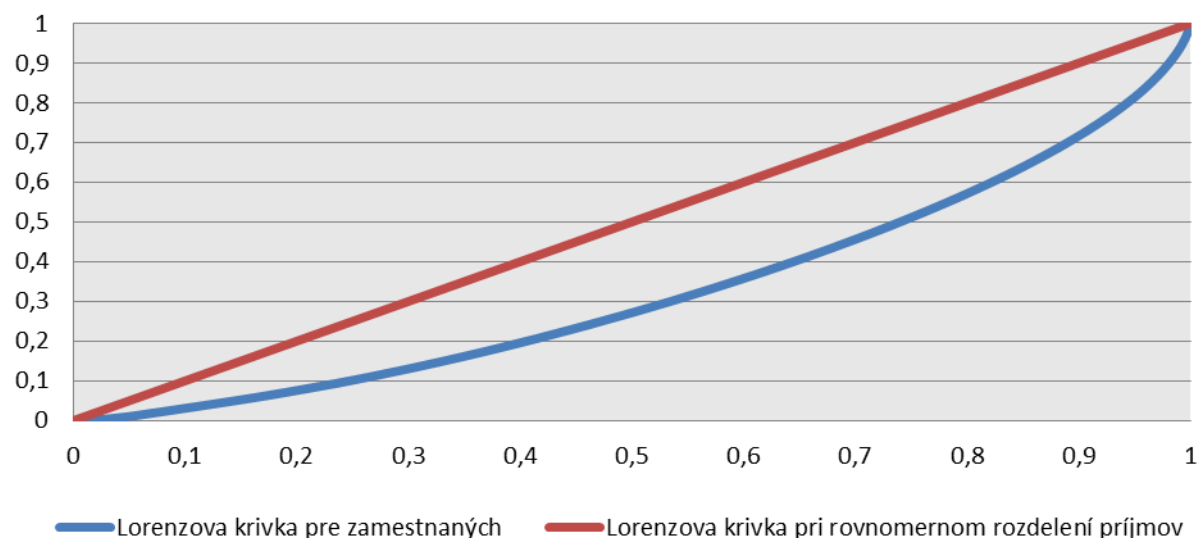
Obrázok č.1 – Rozdelenie priemerného čistého ročného príjmu podľa jednotlivých krajín, euro



Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe údajov z Eurostatu

Napriek tomu, že v rámci krajín V4 si SR v oblasti priemerného čistého ročného príjmu nevedie až tak zle, v porovnaní s priemerom EU resp. EZ nedosahuje ani polovicu priemeru krajín týchto zoskupení. V rámci krajín EU bol priemerný ročný čistý príjem v roku 2013 na úrovni zhruba 17 700 eur a v krajinách EZ 19 900 eur, avšak v SR iba necelých 7 300 eur, čo predstavuje približne 41% priemeru krajín EU a 36,5% priemeru krajín EZ. Treba si uvedomiť, že priemerný príjem jednotlivca by bol reprezentatívnym ukazovateľom v prípade, že príjmy obyvateľstva by boli rovnomerne rozdelené. K zisteniu rozdelenia príjmov slúži Lorenzova krivka.

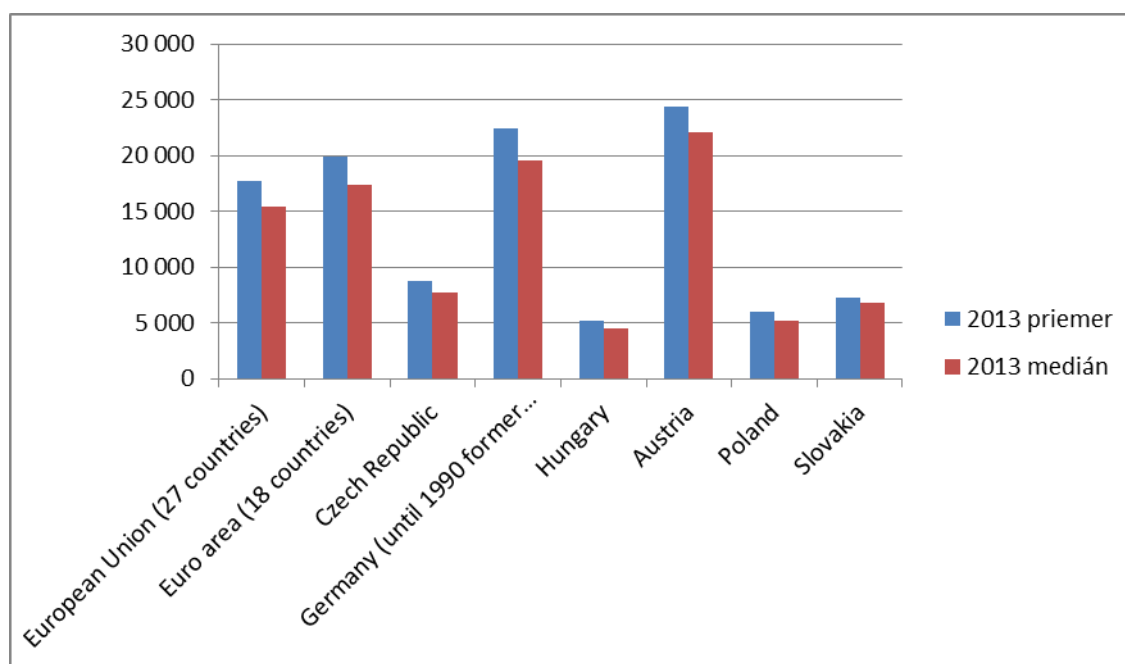
Obrázok č.2 – Lorenzova krivka za rok 2012, vymeriavacie základy zamestnancov v SR



Zdroj: Vlastné prepočty na základe údajov zo Sociálnej poisťovne SR.

Úsečka pod 45 stupňovým uhlom reprezentuje dokonale rovnomerné rozdelenie príjmov a Lorenzova krivka vyjadruje skutočné rozdelenie príjmov. Na nerovnomernosť príjmov poukazuje vzdialenosť medzi Lorenzovou krivkou a úsečkou pod 45 stupňovým uhlom. Čím je táto vzdialenosť väčšia, tým je rozdelenie príjmov v danej krajine nerovnomernejšie. Na obrázku č.2 horizontálna os vyjadruje kumulatívne percento pracujúcej populácie a vertikálna os kumulatívne percento príjmov, ktoré pracujúca sila vytvorila. Z grafu je zrejmé, že dolných 50% zamestnancov vytvára približne 28% celkových vytvorených príjmov a 50% celkových príjmov je vytvorených dolnými 75% pracujúcej populácie. Na základe tejto skutočnosti možno povedať, že rozdelenie príjmov v SR bolo v roku 2012 nerovnomerné (k podobným záverom vedú výsledky aj z ostatných rokov). Z uvedeného vyplýva, že medián mzda bude výrazne nižšia ako priemerná mzda. Preto sme za účelom analýzy a komparácie rozhodli porovnať medián ročného čistého príjmu.

Obrázok č.3 – Porovnanie priemeru a mediánu čistého ročného príjmu podľa jednotlivých krajín, euro, rok 2013



Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe údajov z Eurostatu

Z obrázku č.3 možno konštatovať, že najnižšie relatívne nerovnosti medzi priemernou a medián výškou čistého ročného príjmu sú v SR a v Rakúsku. Uvedené ilustruje aj nasledujúce tabuľka.

Tabuľka č.1 – podiel mediánu a priemeru čistého ročného príjmu v rokoch 2005, 2009, 2013

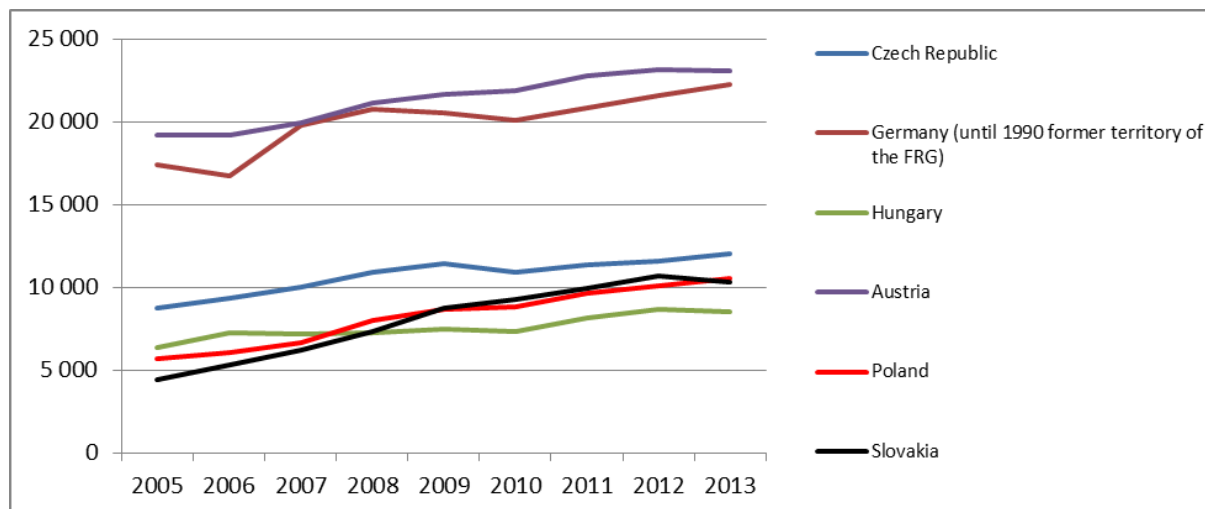
| Country/year                                     | 2005 | 2009 | 2013 |
|--------------------------------------------------|------|------|------|
| European Union (27 countries)                    | 0,87 | 0,87 | 0,87 |
| Euro area (18 countries)                         | 0,88 | 0,87 | 0,87 |
| Czech Republic                                   | 0,87 | 0,88 | 0,88 |
| Germany (until 1990 former territory of the FRG) | 0,90 | 0,88 | 0,87 |
| Hungary                                          | 0,88 | 0,91 | 0,88 |
| Austria                                          | 0,90 | 0,90 | 0,91 |
| Poland                                           | 0,83 | 0,85 | 0,86 |
| Slovakia                                         | 0,91 | 0,90 | 0,93 |

Zdroj: vlastné prepočty na základe údajov z Eurostatu

## 2.1 Komparácia krajín V4 s krajinami EU a EZ pri zohľadnení PKS

Treba si uvedomiť, že kúpyschopnosť obyvateľstva danej krajiny nie je determinovaná iba samotnou výškou príjmu, ale aj výškou cenovej hladiny v jednotlivých krajinách. Napriek tomu, že vyspelejšie západné krajiny majú výrazne vyšší čistý príjem na obyvateľa, prevažná väčšina z nich má vyššie ceny ako tovarov, tak i služieb. Tento fakt čiastočne znižuje disparity v kúpyschopnosti obyvateľstva jednotlivých krajín a tým aj v životnej úrovni.

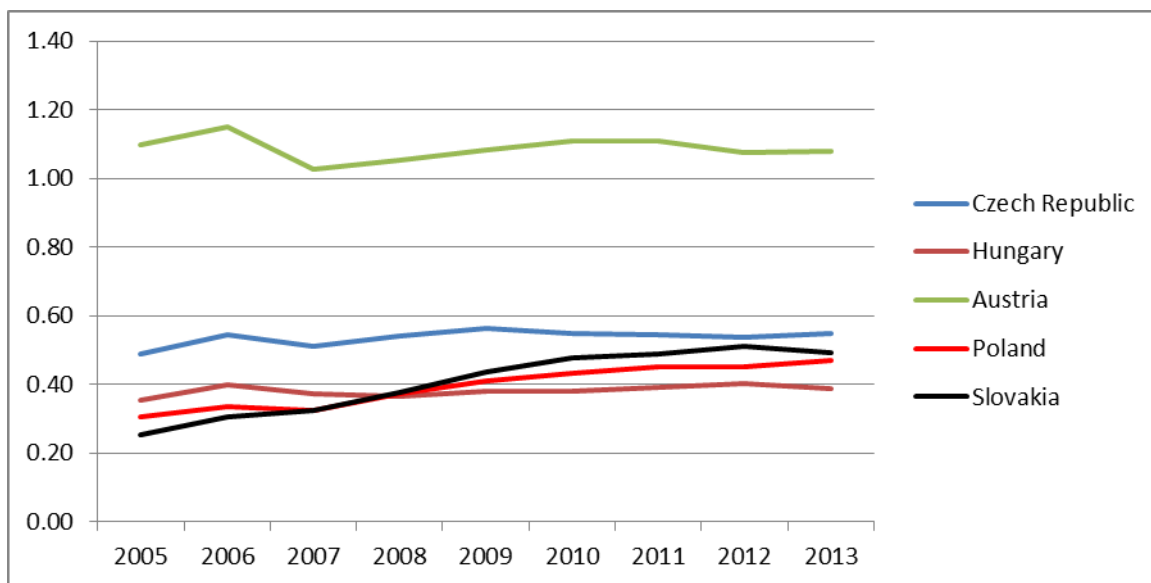
Obrázok č.4 – Rozdelenie priemerného čistého ročného príjmu podľa jednotlivých krajín, euro, zohľadnenie PKS



Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe údajov z Eurostatu

Obrázok č.4 nám dáva trochu iný pohľad na kúpyschopnosť obyvateľstva. V prípade porovnania iba výšky príjmu bola situácia v SR v roku 2013 výrazne lepšia ako v Poľsku. Avšak pri zohľadnení cenovej hladiny v jednotlivých krajinách prostredníctvom PKS vidíme, že kúpyschopnosť obyvateľstva je veľmi podobná. Uvedený fakt je v dôsledku nižšej cenovej hladiny v Poľsku ako v SR. Rovnako aj disparity medzi krajinami V4 a vyspelejšími západnými štátmi (Nemecko a Rakúsko) nadobúdajú menší stupeň nerovnosti v kúpyschopnosti príjmu, ako tomu bolo v prípade bez zohľadnenia PKS. Na túto skutočnosť poukazuje aj nasledujúci graf.

Obrázok č.5 – Podiel mediána čistých ročných príjmov krajín V4 a Rakúska vyjadreného v PKS na mediáne čistého príjmu Nemecka v PKS



Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe údajov z Eurostatu

Z obrázku č.5 je zrejmé, že životná úroveň vyjadrená výškou čistého príjmu zohľadňujúceho PKS v SR počas uplynulých rokov 2005 – 2013 zaznamenala rýchlejší rastúci trend v porovnaní s Nemeckom. To znamená, že rast mediánu čistých príjmov v SR bol čiastočne rýchlejší ako v prípade Nemecka. Mierne rastúci trend zaznamenalo aj Poľsko. Relatívne podobná úroveň rastu mediána čistých príjmov ako v Nemecku bola zaznamenaná v Maďarsku, Česku a v Rakúsku.

Tabuľka č.2 – Podiel mediánu čistých ročných príjmov krajín V4 a Rakúska vyjadreného v PKS na mediáne čistého príjmu Nemecka v PKS v rokoch 2005, 2009, 2013

| Country/year          | 2005 | 2005 - PKS | 2009 | 2009 - PKS | 2013 | 2013 - PKS |
|-----------------------|------|------------|------|------------|------|------------|
| <b>Czech Republic</b> | 0.26 | 0.49       | 0.39 | 0.56       | 0.39 | 0.55       |
| <b>Hungary</b>        | 0.21 | 0.36       | 0.25 | 0.38       | 0.23 | 0.39       |
| <b>Austria</b>        | 1.08 | 1.10       | 1.10 | 1.08       | 1.13 | 1.08       |
| <b>Poland</b>         | 0.15 | 0.30       | 0.27 | 0.41       | 0.26 | 0.47       |
| <b>Slovakia</b>       | 0.17 | 0.25       | 0.31 | 0.44       | 0.34 | 0.49       |

Zdroj: vlastné prepočty na základe údajov z Eurostatu

Z tabuľky č.2 vidieť, že v krajinách V4 medián čistého príjmu vyjadrený v PKS medzi rokmi 2005 a 2009 rástol rýchlejšie ako v Nemecku. Pravdepodobne to bolo v dôsledku rýchlejšieho rastu miezd ako inflácie v porovnaní s Nemeckom. Tiež je možno sledovať, že napr. v roku 2013 podiel mediánu čistého príjmu v SR na mediáne Nemecka bol zhruba na úrovni jednej tretiny (34%), avšak pri zohľadnení cenovej hladiny v oboch krajinách a vyjadrení pomocou PKS bola kúpyschopnosť obyvateľov Nemecka zhruba dvojnásobná (49%).

### 3 ZÁVER

Cieľom príspevku bolo poukázať na príjmové rozdiely krajín V4 a s krajinami EU resp. EZ. Z výsledkov možno konštatovať, že vyspelé západné krajiny dosahujú výrazne vyššiu príjmovú úroveň v porovnaní s krajinami V4. Nakoľko však cenová hladina v krajinách V4 je do značnej miery nižšia rozdiel v kúpyschopnosti obyvateľov krajín V4 a vyspelých krajín EU sa znižuje. Príkladom môže byť porovnanie príjmu obyvateľov SR a Nemecka, kde za rok



2013 bol medián čistého ročného príjmu približne tri krát vyšší ako v SR, avšak pri zohľadnení cenových hladín bol tento rozdiel „iba“ dvojnásobný.

### **Použitá literatúra**

1. KARMAŽIN, B. 2014. Ako sme na tom s kompenzáciami v porovnaní s okolitými krajinami? In: Národná banka Slovenska, BIATEC, roč. 17, 2014, č. 4.  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_PUBLIK\\_NBS\\_FSR/Biatec/Rok2014/08-2014/04\\_biatic\\_14-08\\_karmazin.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_PUBLIK_NBS_FSR/Biatec/Rok2014/08-2014/04_biatic_14-08_karmazin.pdf)
2. <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home/>
3. <http://www.socpoist.sk/>

### **Kontaktné údaje**

Ing. Brian König, PhD.,  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava,  
Tel: (421 2) 67 295 826  
[konigbrian@gmail.com](mailto:konigbrian@gmail.com)

# ANALÝZA VZTAHU AMERICKÉHO A SINGAPURSKÉHO DOLARU

## THE ANALYSIS OF THE RELATIONSHIP OF US DOLLAR AND SINGAPORE DOLLAR

*Elena Kuchina, Michaela Tichá*

### **Abstrakt:**

Předmětem článku je zkoumání vztahu měnových kurzů amerického dolaru vůči euru a singapurského dolaru vůči euru. Nejprve byla testována stacionarita. Z výsledků vyplynulo, že oba procesy jsou  $I(1)$ , byla testována kointegrace, která je zjevná z grafu křivek. Kointegrace byla prokázána a byl sestaven vektorový model korekce chyby. Na závěr bylo dokázáno, že americký dolar kauzálně působí v Grangeově smyslu na singapurský dolar.

***Klíčová slova:*** kointegrace, singapurský dolar, americký dolar, Grangeova kauzalita

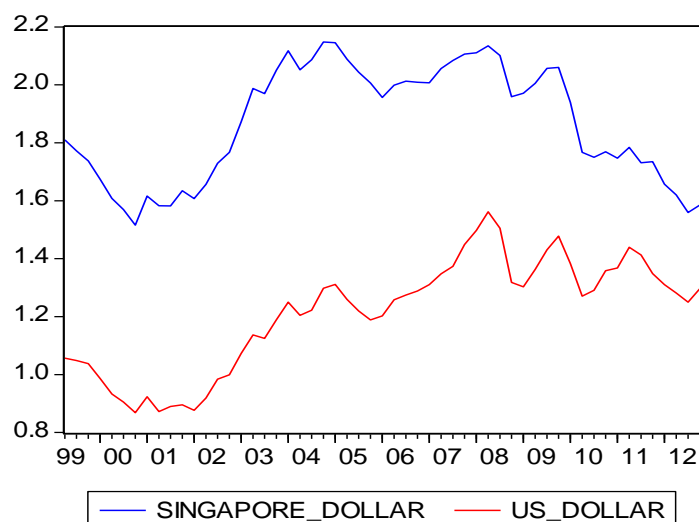
### **Abstract:**

This paper deals with the analysis of the relationship between the exchange rate of US dollar and the exchange rate of Singapore dollar. Firstly, the stationarity was tested and proved. Both exchange rates are  $I(1)$  and the cointegration was tested and proved. Subsequently, the vector error correction model was constructed. Finally, the Granger causality was confirmed.

***Keywords:*** cointegration, Singapore dollar, US dollar, Granger causality

## **1 ÚVOD**

Článek se zabývá časovými řadami měnových kurzů. Jedná se o kvartální data z let 1999Q2 až 2012Q4 a kurz singapurského dolaru vůči euru vs. kurz amerického dolaru vůči euru. Data jsou testovány pomocí software Eviews 5. Zajímáme se o to, jestli je mezi měnovými kurzy nějaký vztah, ať už krátkodobý či dlouhodobý. Podívejme se nejprve na graf.



Obrázek 1: graf měnových kurzů vůči EUR v letech 1999Q2-2012Q4

## 2 TYP DAT

Na obrázku vidíme, že řady přesně kopírují veškeré body zvratu a vše naznačuje tomu, že by mezi řadami mohl být nějaký vztah. Nejprve jsme pomocí ADF testu jednotkového kořenu zjišťovali, zda jsou řady stacionární. Výsledky lze nalézt v *Příloze 1*.

Pro singapurský dolar získáme testovou statistiku -1,21, která odpovídá  $p$ -hodnotě 0,66, výsledky viz *Příloha 1*. Nelze tedy zamítnout jednotkový kořen na 5% hladině významnosti. Předpokládáme, že řada kurzu singapurského dolaru není stacionární, dále jsme řadu zdiferencovali a znovu otestovali. Výsledky lze nalézt v *Příloze 2*.

Nyní dostaneme testovou statistiku -5,45 odpovídající  $p$ -hodnotě 0,00 a lze tedy bez pochybností zamítnout hypotézu o jednotkovém kořenu na 5% hladině významnosti. Pokud přejdeme k prvním diferencím, je již řada stacionární, jedná se tedy o integrovaný proces řádu 1:  $I(1)$ .

Dále provedeme ADF test pro americký dolar. Výstup lze nalézt v *Příloze 3*. Získáme testovou statistiku -1,63 odpovídající  $p$ -hodnotě 0,46 a nelze tedy zamítnout jednotkový kořen na 5% hladině významnosti. Předpokládáme nestacionaritu.

Řadu amerického dolaru opět diferencujeme a zopakujeme ADF test. Výsledky lze nalézt v *Příloze 4*. Nyní již dostaneme testovou statistiku -5,67, která odpovídá  $p$ -hodnotě 0,00 a lze zamítnout jednotkový kořen na uvažované hladině významnosti. Řada kurzů amerického dolaru je také  $I(1)$ .

### 3 MODEL

Dále nás zajímá, zda existuje mezi řadami nějaký kointegrační vektor, resp. chceme nalézt lineární kombinaci daných měnových kurzů tak, aby výsledkem byl stacionární proces.

Zjistíme, zda je mezi řadami kointegrace. Nejprve uděláme orientačně statickou regresi

$$Y_t = X_t + u_t,$$

kde jako  $Y_t$  použijeme americký dolar a  $X_t$  singapurský dolar. Potřebujeme, aby  $u_t \sim I(0)$ . Podíváme se tedy na korelogram reziduí, který lze nalézt v *Příloze 5*, a snadno poznáme řadu AR(1). Výběrová autokorelační funkce exponenciálně klesá a výběrová parciální autokorelační funkce je významná jen u prvního zpoždění. Jedná se tedy o stacionární proces. Tím jsme prokázali kointegraci mezi procesy.

Zkonstruujeme ještě Johansenův test kointegrace. Jeho výsledky lze nalézt v *Příloze 6*. Z testu rovněž vidíme, že na hladině významnosti 5% zamítáme, že mezi danými kurzy není žádný kointegrační vektor, ale nezamítáme, že je maximálně jeden (což v tomto případě dvou proměnných může být nejvýše jeden). Náš závěr je tedy správný, kurzy jsou kointegrované.

Můžeme tedy udělat příslušný vektorový model korekce chyby. Výsledky lze nalézt v *Příloze 7*.

Zkontrolujeme nejprve předpoklady modelu. Uděláme test heteroskedasticity. Výsledky lze nalézt v *Příloze 8*. Rezidua modelu jsou homoskedastická (nezamítáme homoskedasticitu).

Dále provedeme Portmanteau test autokorelace, jehož výsledky lze nalézt v *Příloze 9*. Rezidua modelu jsou nekorelovaná (nezamítáme nekorelovanost).

Nakonec uděláme Cholesky test normality, jeho výsledky lze nalézt v *Příloze 10*. Rezidua modelu mají normální rozdělení (nezamítáme normalitu).

Sestrojený model splňuje předpoklady.

### 4 VÝSLEDKY

Vytvořili jsme vektorový model korekce chyby. Označíme opět americký dolar jako  $Y_t$  a singapurský dolar jako  $X_t$ , dále první diferenci jako  $D_X_t$ , resp.  $D_Y_t$ . Zapišeme výsledný model korekce chyby:

$$\begin{bmatrix} D_Y_t \\ D_X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,006 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,599 \\ -0,561 \end{bmatrix} (-0,152 - 0,008 * T + Y_{t-1} - 0,440 X_{t-1}) + \begin{bmatrix} 0,853 & -0,472 \\ 0,556 & -0,176 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_Y_{t-1} \\ D_X_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

Označené hodnoty jsou nevýznamné, všechny zbylé neoznačené hodnoty jsou v modelu významné, což jsme zjistili na základě spočtené kritické hodnoty  $t$ -rozdělení.

Kointegrační vektor  $\begin{bmatrix} 1 \\ -0,440 \end{bmatrix}$  byl apriorně zkonstruován tak, aby jeho první složka byla jednotková.

Prokázali jsme tedy dlouhodobý vztah mezi kurzem singapurského dolaru a amerického dolaru a našli jsme kointegrační vektor. Zkonstruovali jsme model korekce chyby. Je zjevné, že singapurský dolar je navázán na americký dolar.

Na závěr ještě budeme zkoumat, zda na sebe měnové kurzy vzájemně kauzálně působí. Provedeme test Grangerovy kauzality, jehož výsledky můžeme najít v *Příloze 11*. Testová statistika pro hypotézu, že americký dolar kauzálně nepůsobí na singapurský dolar, je 5,75, což odpovídá  $p$ -hodnotě 0,02. Lze tedy zamítnout nulovou hypotézu na 5% hladině významnosti.

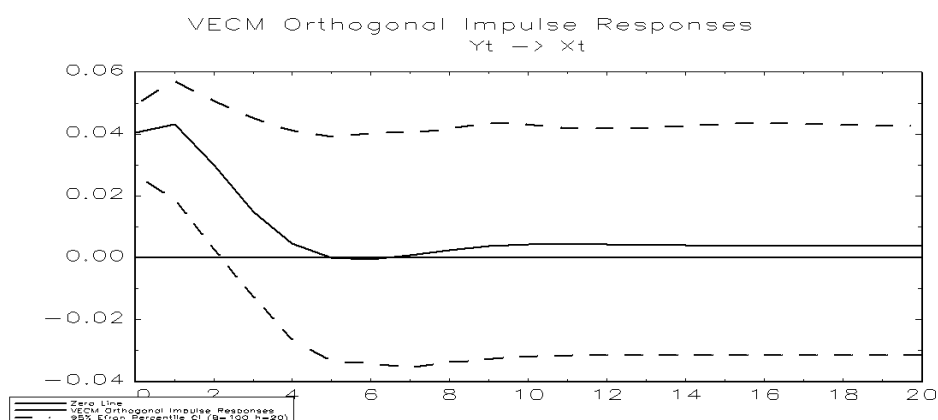
Testová statistika pro hypotézu, že singapurský dolar kauzálně nepůsobí na americký dolar, je 0,86, což odpovídá  $p$ -hodnotě 0,35. Nulovou hypotézu tedy nelze zamítnout na 5% hladině významnosti.

Mezi měnovými kurzy je jednosměrná kauzalita, a to, že americký dolar kauzálně působí v Grangeově smyslu na singapurský dolar. To tedy znamená, že americký dolar zlepšuje předpověď singapurského dolaru a působí tedy jako jakási předzvěst pohybu kurzu.

Po definování kauzální závislosti v Grangerově pojetí lze přejít k „Impulse-response“ analýze a prozkoumat, jakou reakci v jedné časové řadě vyvolává impuls v jiné časové řadě.

V rámci „Impulse-Response“ analýzy byla zkoumána reakce singapurského dolaru na jednotkový exogenní šok v případě amerického dolaru. Intervaly spolehlivosti pro VEC model byly konstruovány pomocí JmulTi<sup>1</sup> software umožňující využití bootstrappingu pro konstrukci intervalů spolehlivosti, kde bylo použito 10 000 replikací.

Z obrázku 1 je patrné, že proměnná  $X_t$  reaguje na šok v proměnné  $Y_t$  na úplném začátku poměrně silně, pak reakce klesá, po šestém období se blíží nule.



**Obrázek 2: Impulse-Response" analýza**

<sup>1</sup> <http://www.jmulti.de/> Time series analysis with Java

## 5 ZÁVĚR

Prozkoumali jsme vzájemné vztahy mezi americkým a singapurským dolarem. Prokázali jsme mezi kurzy dlouhodobý vztah a zkonstruovali jsme příslušný model. Závěrem jsme prokázali, že americký dolar působí kauzálně v Grangeově smyslu na singapurský dolar, což nám může pomoci při předpovědích měnového kurzu singapurského dolaru. Práce byla ukončena konstrukcí „Impulse-Response“ funkce.

### **Použitá literatura:**

[1] EViews 5 User's Guide,

[2] LÜTKEPOHL H., KRÄTZIG M.: Applied Time series Econometrics. Cambridge University Press 2004. [online]. [cit. 2014-05-10].

### **Kontaktní údaje**

RNDr. Ing. Michaela Tichá  
Vysoká škola ekonomická v Praze  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
email: xtcm11@vse.cz

Ing. Elena Kuchina  
Vysoká škola ekonomická v Praze  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
email: xkuce10@isis.vse.cz

## PŘÍLOHY

### Příloha č. 1

Null Hypothesis: SINGAPORE\_DOLLAR has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

|                                        | t-Statistic | Prob.* |
|----------------------------------------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -1.218428   | 0.6600 |
| Test critical values:                  |             |        |
| 1% level                               | -3.560019   |        |
| 5% level                               | -2.917650   |        |
| 10% level                              | -2.596689   |        |

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(SINGAPORE\_DOLLAR)

Method: Least Squares

Date: 11/12/13 Time: 18:38

Sample (adjusted): 1999Q4 2012Q4

Included observations: 53 after adjustments

| Variable                | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|-------------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| SINGAPORE_DOLLAR(-1)    | -0.050155   | 0.041164              | -1.218428   | 0.2288    |
| D(SINGAPORE_DOLLAR(-1)) | 0.329440    | 0.136855              | 2.407220    | 0.0198    |
| C                       | 0.092021    | 0.077682              | 1.184586    | 0.2418    |
| R-squared               | 0.111358    | Mean dependent var    |             | -0.003517 |
| Adjusted R-squared      | 0.075812    | S.D. dependent var    |             | 0.059516  |
| S.E. of regression      | 0.057215    | Akaike info criterion |             | -2.829060 |
| Sum squared resid       | 0.163678    | Schwarz criterion     |             | -2.717534 |
| Log likelihood          | 77.97009    | F-statistic           |             | 3.132813  |
| Durbin-Watson stat      | 2.019816    | Prob(F-statistic)     |             | 0.052260  |

## Příloha 2

Null Hypothesis: SINGAPORE has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

|                                        | t-Statistic | Prob.* |
|----------------------------------------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -5.449722   | 0.0000 |
| Test critical values:                  |             |        |
| 1% level                               | -3.557472   |        |
| 5% level                               | -2.916566   |        |
| 10% level                              | -2.596116   |        |

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(SINGAPORE)

Method: Least Squares

Date: 11/12/13 Time: 18:43

Sample (adjusted): 1999Q3 2012Q4

Included observations: 54 after adjustments

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| SINGAPORE(-1)      | -0.705496   | 0.129455              | -5.449722   | 0.0000    |
| C                  | -0.002241   | 0.007794              | -0.287502   | 0.7749    |
| R-squared          | 0.363521    | Mean dependent var    |             | 0.002346  |
| Adjusted R-squared | 0.351281    | S.D. dependent var    |             | 0.070692  |
| S.E. of regression | 0.056938    | Akaike info criterion |             | -2.857388 |
| Sum squared resid  | 0.168578    | Schwarz criterion     |             | -2.783722 |
| Log likelihood     | 79.14948    | F-statistic           |             | 29.69948  |
| Durbin-Watson stat | 1.992928    | Prob(F-statistic)     |             | 0.000001  |



### Příloha 3

Null Hypothesis: US\_DOLLAR has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 5 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

|                                        | t-Statistic | Prob.* |
|----------------------------------------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -1.631802   | 0.4590 |
| Test critical values:                  |             |        |
| 1% level                               | -3.571310   |        |
| 5% level                               | -2.922449   |        |
| 10% level                              | -2.599224   |        |

\*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation  
 Dependent Variable: D(US\_DOLLAR)  
 Method: Least Squares  
 Date: 11/12/13 Time: 18:44  
 Sample (adjusted): 2000Q4 2012Q4  
 Included observations: 49 after adjustments

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| US_DOLLAR(-1)      | -0.063268   | 0.038772              | -1.631802   | 0.1102    |
| D(US_DOLLAR(-1))   | 0.445782    | 0.144878              | 3.076944    | 0.0037    |
| D(US_DOLLAR(-2))   | -0.377291   | 0.152372              | -2.476118   | 0.0174    |
| D(US_DOLLAR(-3))   | 0.189035    | 0.160657              | 1.176634    | 0.2460    |
| D(US_DOLLAR(-4))   | -0.344648   | 0.150621              | -2.288177   | 0.0272    |
| D(US_DOLLAR(-5))   | 0.273297    | 0.146821              | 1.861429    | 0.0697    |
| C                  | 0.084287    | 0.047778              | 1.764124    | 0.0850    |
| R-squared          | 0.331539    | Mean dependent var    |             | 0.007990  |
| Adjusted R-squared | 0.236044    | S.D. dependent var    |             | 0.056105  |
| S.E. of regression | 0.049038    | Akaike info criterion |             | -3.060859 |
| Sum squared resid  | 0.101001    | Schwarz criterion     |             | -2.790599 |
| Log likelihood     | 81.99104    | F-statistic           |             | 3.471810  |
| Durbin-Watson stat | 2.161546    | Prob(F-statistic)     |             | 0.007075  |

Příloha 4

Null Hypothesis: US has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=10)

|                                        | t-Statistic | Prob.* |
|----------------------------------------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -5.668385   | 0.0000 |
| Test critical values: 1% level         | -3.560019   |        |
| 5% level                               | -2.917650   |        |
| 10% level                              | -2.596689   |        |

\*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(US)

Method: Least Squares

Date: 11/12/13 Time: 18:46

Sample (adjusted): 1999Q4 2012Q4

Included observations: 53 after adjustments

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| US(-1)             | -0.890141   | 0.157036              | -5.668385   | 0.0000    |
| D(US(-1))          | 0.305418    | 0.134504              | 2.270703    | 0.0275    |
| C                  | 0.004087    | 0.007034              | 0.581088    | 0.5638    |
| R-squared          | 0.401770    | Mean dependent var    |             | 0.001034  |
| Adjusted R-squared | 0.377841    | S.D. dependent var    |             | 0.064739  |
| S.E. of regression | 0.051064    | Akaike info criterion |             | -3.056533 |
| Sum squared resid  | 0.130377    | Schwarz criterion     |             | -2.945007 |
| Log likelihood     | 83.99812    | F-statistic           |             | 16.78996  |
| Durbin-Watson stat | 1.973089    | Prob(F-statistic)     |             | 0.000003  |

Příloha 5

Date: 11/12/13 Time: 17:33

Sample: 1999Q2 2012Q4

Included observations: 55

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC    | Q-Stat | Prob   |       |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| .  *****        | .  *****            | 1  | 0.840  | 0.840  | 40.978 | 0.000 |
| .  *****        | . .                 | 2  | 0.696  | -0.033 | 69.638 | 0.000 |
| .  ****         | . .                 | 3  | 0.567  | -0.033 | 88.994 | 0.000 |
| .  ***          | .* .                | 4  | 0.434  | -0.090 | 100.56 | 0.000 |
| .  **           | . .                 | 5  | 0.325  | -0.008 | 107.20 | 0.000 |
| .  **           | . .                 | 6  | 0.247  | 0.024  | 111.09 | 0.000 |
| .  **           | . * .               | 7  | 0.216  | 0.108  | 114.13 | 0.000 |
| .  * .          | . .                 | 8  | 0.184  | -0.027 | 116.38 | 0.000 |
| .  * .          | . .                 | 9  | 0.144  | -0.053 | 117.80 | 0.000 |
| .  * .          | . .                 | 10 | 0.107  | -0.036 | 118.60 | 0.000 |
| .  * .          | . .                 | 11 | 0.084  | 0.033  | 119.10 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 12 | 0.059  | -0.007 | 119.35 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 13 | 0.037  | 0.001  | 119.46 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 14 | 0.021  | -0.015 | 119.49 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 15 | 0.004  | -0.026 | 119.49 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 16 | -0.012 | -0.017 | 119.50 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 17 | -0.027 | -0.000 | 119.56 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 18 | -0.039 | -0.009 | 119.69 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 19 | -0.049 | -0.009 | 119.90 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 20 | -0.057 | -0.012 | 120.19 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 21 | -0.051 | 0.032  | 120.42 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 22 | -0.039 | 0.016  | 120.57 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 23 | -0.029 | 0.003  | 120.65 | 0.000 |
| . .             | . .                 | 24 | -0.019 | -0.003 | 120.69 | 0.000 |

## Příloha 6

Date: 11/12/13 Time: 19:33  
 Sample (adjusted): 1999Q4 2012Q4  
 Included observations: 53 after adjustments  
 Trend assumption: Linear deterministic trend (restricted)  
 Series: SINGAPORE\_DOLLAR US\_DOLLAR  
 Lags interval (in first differences): 1 to 1

### Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

| Hypothesized<br>No. of CE(s) | Eigenvalue | Trace<br>Statistic | 0.05<br>Critical Value | Prob.** |
|------------------------------|------------|--------------------|------------------------|---------|
| None *                       | 0.327394   | 26.38318           | 25.87211               | 0.0432  |
| At most 1                    | 0.096248   | 5.363609           | 12.51798               | 0.5450  |

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

\* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

\*\*MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

### Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

| Hypothesized<br>No. of CE(s) | Eigenvalue | Max-Eigen<br>Statistic | 0.05<br>Critical Value | Prob.** |
|------------------------------|------------|------------------------|------------------------|---------|
| None *                       | 0.327394   | 21.01957               | 19.38704               | 0.0288  |
| At most 1                    | 0.096248   | 5.363609               | 12.51798               | 0.5450  |

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

\* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

\*\*MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

### Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'S11\*b=l):

| SINGAPORE_<br>DOLLAR | US_DOLLAR | @TREND(99Q<br>3) |
|----------------------|-----------|------------------|
| 8.855633             | -20.13074 | 0.170574         |
| -3.229293            | 2.721230  | -0.080931        |

### Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):

|                         |          |          |
|-------------------------|----------|----------|
| D(SINGAPORE<br>_DOLLAR) | 0.027856 | 0.008773 |
| D(US_DOLLAR<br>)        | 0.029779 | 0.000150 |

1 Cointegrating Equation(s):      Log likelihood      206.5888

Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)

SINGAPORE\_    US\_DOLLAR    @TREND(99Q

|          |           |           |
|----------|-----------|-----------|
| DOLLAR   |           | 3)        |
| 1.000000 | -2.273213 | 0.019262  |
|          | (0.22859) | (0.00283) |

Adjustment coefficients (standard error in parentheses)

|             |           |
|-------------|-----------|
| D(SINGAPORE |           |
| _DOLLAR)    | 0.246685  |
|             | (0.06190) |
| D(US_DOLLAR |           |
| )           | 0.263709  |
|             | (0.05400) |

---

Příloha 7

Vector Error Correction Estimates  
 Date: 11/14/13 Time: 19:34  
 Sample (adjusted): 1999Q4 2012Q4  
 Included observations: 53 after adjustments  
 Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

| Cointegrating Eq:       | CointEq1                             |                                      |
|-------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| US_DOLLAR(-1)           | 1.000000                             |                                      |
| SINGAPORE_DOLLAR(-1)    | -0.439906<br>(0.05588)<br>[-7.87231] |                                      |
| @TREND(99Q2)            | -0.008473<br>(0.00073)<br>[-11.6746] |                                      |
| C                       | -0.151522                            |                                      |
| Error Correction:       | D(US_DOLLAR)                         | D(SINGAPORE_DOLLAR)                  |
| CointEq1                | -0.599466<br>(0.12276)<br>[-4.88343] | -0.560767<br>(0.14070)<br>[-3.98544] |
| D(US_DOLLAR(-1))        | 0.853693<br>(0.24658)<br>[ 3.46217]  | 0.556490<br>(0.28263)<br>[ 1.96896]  |
| D(SINGAPORE_DOLLAR(-1)) | -0.472404<br>(0.22534)<br>[-2.09645] | -0.175580<br>(0.25828)<br>[-0.67979] |
| C                       | -0.000665<br>(0.00639)<br>[-0.10411] | -0.006376<br>(0.00732)<br>[-0.87062] |
| R-squared               | 0.394372                             | 0.311188                             |
| Adj. R-squared          | 0.357293                             | 0.269016                             |
| Sum sq. resids          | 0.096567                             | 0.126872                             |
| S.E. equation           | 0.044393                             | 0.050884                             |
| F-statistic             | 10.63591                             | 7.378994                             |
| Log likelihood          | 91.95310                             | 84.72034                             |
| Akaike AIC              | -3.318985                            | -3.046050                            |
| Schwarz SC              | -3.170283                            | -2.897349                            |
| Mean dependent          | 0.004681                             | -0.003517                            |

|                                         |          |           |
|-----------------------------------------|----------|-----------|
| S.D. dependent                          | 0.055375 | 0.059516  |
| Determinant resid covariance (dof adj.) |          | 1.65E-06  |
| Determinant resid covariance            |          | 1.41E-06  |
| Log likelihood                          |          | 206.5888  |
| Akaike information criterion            |          | -7.380710 |
| Schwarz criterion                       |          | -6.971781 |

## Příloha 8

### VEC Residual Heteroskedasticity Tests: No Cross Terms (only levels and squares)

Date: 11/12/13 Time: 19:45

Sample: 1999Q2 2012Q4

Included observations: 53

#### Joint test:

| Chi-sq   | df | Prob.  |
|----------|----|--------|
| 18.29779 | 18 | 0.4362 |

#### Individual components:

| Dependent | R-squared | F(6,46)  | Prob.  | Chi-sq(6) | Prob.  |
|-----------|-----------|----------|--------|-----------|--------|
| res1*res1 | 0.086174  | 0.722968 | 0.6332 | 4.567221  | 0.6004 |
| res2*res2 | 0.128094  | 1.126326 | 0.3622 | 6.788958  | 0.3408 |
| res2*res1 | 0.087744  | 0.737406 | 0.6222 | 4.650427  | 0.5894 |



## Příloha 9

### VEC Residual Portmanteau Tests for Autocorrelations

**H0: no residual autocorrelations up to lag h**

Date: 11/12/13 Time: 19:45

Sample: 1999Q2 2012Q4

Included observations: 53

| Lags | Q-Stat   | Prob.  | Adj Q-Stat | Prob.  | df  |
|------|----------|--------|------------|--------|-----|
| 1    | 0.486269 | NA*    | 0.495621   | NA*    | NA* |
| 2    | 3.187057 | 0.5270 | 3.302322   | 0.5086 | 4   |
| 3    | 5.854724 | 0.6635 | 6.130049   | 0.6327 | 8   |
| 4    | 8.207495 | 0.7687 | 8.674882   | 0.7304 | 12  |
| 5    | 10.65930 | 0.8300 | 11.38208   | 0.7853 | 16  |
| 6    | 15.74979 | 0.7320 | 17.12242   | 0.6450 | 20  |
| 7    | 18.11742 | 0.7973 | 19.85034   | 0.7053 | 24  |
| 8    | 22.00711 | 0.7810 | 24.43153   | 0.6586 | 28  |
| 9    | 23.79353 | 0.8518 | 26.58336   | 0.7372 | 32  |
| 10   | 28.77930 | 0.7983 | 32.72861   | 0.6250 | 36  |
| 11   | 30.91458 | 0.8482 | 35.42314   | 0.6763 | 40  |
| 12   | 38.70350 | 0.6975 | 45.49173   | 0.4097 | 44  |

\*The test is valid only for lags larger than the VAR lag order.

df is degrees of freedom for (approximate) chi-square distribution

## Příloha 10

### VEC Residual Normality Tests

Orthogonalization: Cholesky (Lutkepohl)

H0: residuals are multivariate normal

Date: 11/12/13 Time: 19:45

Sample: 1999Q2 2012Q4

Included observations: 53

---

---

| Component | Skewness  | Chi-sq   | df | Prob.  |
|-----------|-----------|----------|----|--------|
| 1         | -0.186586 | 0.307526 | 1  | 0.5792 |
| 2         | -0.086289 | 0.065771 | 1  | 0.7976 |
| Joint     |           | 0.373298 | 2  | 0.8297 |

---

---

---

---

| Component | Kurtosis | Chi-sq   | df | Prob.  |
|-----------|----------|----------|----|--------|
| 1         | 2.621271 | 0.316754 | 1  | 0.5736 |
| 2         | 2.792147 | 0.095406 | 1  | 0.7574 |
| Joint     |          | 0.412160 | 2  | 0.8138 |

---

---

---

---

| Component | Jarque-Bera | df | Prob.  |
|-----------|-------------|----|--------|
| 1         | 0.624280    | 2  | 0.7319 |
| 2         | 0.161178    | 2  | 0.9226 |
| Joint     | 0.785458    | 4  | 0.9404 |

---

---

## Příloha 11

Pairwise Granger Causality Tests

Date: 11/14/13 Time: 19:16

Sample: 1999Q2 2012Q4

Lags: 1

---

---

| Null Hypothesis:                                     | Obs | F-Statistic | Probability |
|------------------------------------------------------|-----|-------------|-------------|
| US_DOLLAR does not Granger Cause<br>SINGAPORE_DOLLAR | 54  | 5.75069     | 0.02018     |
| SINGAPORE_DOLLAR does not Granger Cause<br>US_DOLLAR |     | 0.86845     | 0.35578     |

---

---

# TEORETICKÝ VÝVOJ DSGE MODELOVANIA

## THEORETICAL EVOLUTION OF DSGE MODELING<sup>1</sup>

*Patrik Kupkovič, Martin Benkovič*

### Abstrakt

Systematické štúdium obchodných cyklov zaznamenalo obrovskú popularitu v posledných tridsiatich až štyridsiatich rokoch. Začiatkom sedemdesiatych rokov minulého storočia sa metódy používané na štúdium obchodných cyklov rapídne zmenili. V novej klasickej revolúcii, ako nazývajú ekonómovia obdobie kedy Robert E. Lucas prišiel so svojou prácou, sa do popredia v štúdiu obchodných cyklov dostali nástroje teórie konkurenčnej rovnováhy. Začiatkom osemdesiatych rokov minulého storočia nastal ďalší dôležitý zlom v chápaní obchodných cyklov. Bol to nástup reálnych hospodárskych cyklov (RBC), ktoré prezentovali Kydland a Prescott. V období ďalších tridsiatych rokov, makro ekonómovia prešli od modelov racionálnych očakávaní a RBC modelov až ku komplexným dynamickým stochastickým modelom všeobecnej rovnováhy (DSGE).

*KLúčové slová: obchodné cykly, makroekonomické školy, DSGE modelovanie*

### Abstract

Systematic study of business cycles experienced huge popularity in last thirty to forty years. At the beginning of seventies of last century methods used for study of business cycles has changed. In the new classical revolution as economists call the period when Robert E. Lucas published his study to the forefront in the study of business cycles given the tools of competitive equilibrium theory. At the beginning of eighties have been the turning point in the business cycles. It was the beginning of real business cycles (RBC) which presented Kydland and Prescott. In the period of thirties macroeconomist move from rational expectations models and RBC models to the general complex dynamic stochastic general equilibrium models.

*Keywords: business cycle, macroeconomical schools, DSGE modelling*

## 1 VÝVOJOVÉ ETAPY DSGE MODELOVANIA

Obchodné cykly skúmajú príčiny a následky opakujúcich sa expanzií a kontrakcií v agregovanej ekonomickej aktivite, ktoré sa objavujú vo viacerých industrializovaných ekonomikách.

### 1.1 Dvadsiate roky 20. storočia

V dvadsiatych rokoch boli reálne teórie vedúcimi teóriami. Ekonómovia používali mikroekonomické nástroje, aby sa naučili o agregovaných pohyboch v dopyte a ponuke na trhoch tovarov a služieb a výrobných faktorov. Avšak v tridsiatych rokoch mala Veľká depresia dramatický efekt na výskum obchodných cyklov. Ekonómovia začali veriť, že mikroekonomická teória je neadekvátny prístup k chápaniu obchodných cyklov. Reálne

---

<sup>1</sup> Tento príspevok bol podporovaný projektom pre mladých učiteľov, vedeckých pracovníkov a doktorandov v dennej forme štúdia 1-14-103-00. Analýza previazanosti fiškálnych politik krajín Európskej únie.

faktory boli tým pádom menej preferované a väčšia váha sa prikladala monetárnym vplyvom a psychológii domácností a firiem. Riadenie ekonomiky vládou bolo nie len žiaduce, ale aj nevyhnutné.

## 1.2 Vzostup a pád keynesiánskeho prístupu

Vzostup keynesiánskeho prístupu do pozície ortodoxnej teórie v makroekonómii znamenal takmer polstoročné odmlčanie sa rovnovážnych teórií v modelovaní obchodných cyklov. Následné zlyhanie makroekonometrických modelov keynesovského typu v sedemdesiatych rokoch je späté s revolúciou, v podobe teórie racionálnych očakávaní, ktorú začal vo svojej práci Lucas (1976). Práve táto teória si logicky vyžadovala analýzu všeobecnej rovnováhy. Kydland a Prescott (1982) a Long a Plosser (1983) ako prví ilustrovali pozoruhodne tento prístup. Zostavili model obchodného cyklu s vyčistenými trhmi, so žiadnymi monetárnymi faktormi a žiadnym racionálnym postavením pre vládu. Ako Rebelo (2005) píše vo svojej práci Kydland a Prescott prišli hneď s tromi revolučnými myšlienkami. Prvá je myšlienka, že na obchodné cykly sa môžeme pozeráť cez dynamické modely všeobecnej rovnováhy. Tieto modely zahŕňajú agentov, ktorí fungujú na konkurenčných trhoch a formujú racionálne očakávania o budúcnosti. Druhá myšlienka je, že je možné spojiť dokopy teóriu obchodných cyklov a teóriu rastu. Obchodné cykly vo vyspelých ekonomikách musia byť konzistentné s vlastnosťami dlhodobého rastu (Tab. č.1). Tretia idea je, že môžeme ísť ďalej ako je len kvalitatívne porovnanie modelov s makroekonomickými faktami. Daný model môžeme kalibrovať s využitím informácií z mikroekonomických štúdií a dlhodobých vlastností ekonomiky. Tieto kalibrované modely môžeme použiť na generovanie modelových dát a porovnať ich s aktuálnymi dátami.

Tab. č.1

| Zmeny vo výstupe na osobu        | Ekonomický rast | Obchodný cyklus |
|----------------------------------|-----------------|-----------------|
| Vzhľadom na zmeny v kapitály     | 1/3             | 0               |
| Vzhľadom na zmeny v práci        | 0               | 2/3             |
| Vzhľadom na zmeny v produktivite | 2/3             | 1/3             |

Zdroj: Cooley(1995).

## 1.3 Osemdesiate roky 20. storočia

Koncom osemdesiatych rokov nastala kontroverzná situácia v oblasti RBC modelov ako poznamenali King a Rebelo (2000). Jednoduché rovnovážne modely, v ktorých hlavným zdrojom fluktuácií sú zmeny v celkovej produktivite faktorov generujú časové rady s podobnými vlastnosťami ako v skutočných ekonomikách, čo sa týka variability, korelácie s výstupom a perzistencie. Napriek tomu, v literatúre v tomto období chýbal dostatok uspokojivého materiálu, ktorý by vysvetlil základný RBC model a jeho fungovanie.

## 1.4 Deväťdesiate roky 20. Storočia

Celé deväťdesiate roky sa niesli presne v opačnom duchu. Počas tejto dekády vzniklo množstvo teoreticky i empiricky zameraných článkov. RBC metodológia sa stala základným kameňom makroekonómie. V tom istom čase mali ekonómovia obavy týkajúce sa mechanizmu, na ktorom štandardné RBC modely fungujú. Idea, že obchodný cyklus je spôsobený len veľkými a cyklickými zmenami v produktivite bola spochybnená. Problémom bolo, že typický odhadovaný Solowov reziduál predpokladá niekedy aj 40% pokles. To sa

zdá pre väčšinu ekonómov nepravdepodobné. Terajšie štúdie opravujú Solowov reziduál o chyby v meraní vstupov. Ide predovšetkým o zmeny vo využití pracovného nasadenia v práci a zmeny vo využití kapacít. Tieto nové merania produkujú technologické šoky s viac uveriteľnými vlastnosťami. Rast produktivity môže byť tým pádom aj negatívny. Výsledkom bolo, že sú tieto šoky slabšie a menej volatilné. Avšak, spolu so zabudovaním spomínaných elementov produkujú prijateľné výsledky, týkajúce sa ekonomickej aktivity. Je to mierny odklon od tradičných RBC modelov, ktoré vyžadujú veľké a volatilné šoky v produktivite.

## 1.5 Moderný prístup k DSGE modelovaniu

Prirodzený vývoj a prechod od RBC modelov k DSGE modelom zhrnul vo svojej práci Villaverde (2009). Nová generácia výskumníkov v oblasti obchodných cyklov bola dôverne oboznámená s nástrojmi zavedenými Kydlandom a Prescottom ako napr. s rekurzívnymi metódami a prirodzene začali oceňovať vysokú flexibilitu týchto nástrojov. Ak je známa hodnotová funkcia v modeli s vyčistenými trhmi a s plne flexibilnými cenami, zavedenie cenových alebo mzdových nepružností, prípadne iných trhových nedokonalostí je iba ďalší jednoduchý krok ďalej. Rigidity sme nespomenuli náhodne ako príklad modifikácie, ktorú môžeme zahrnúť do modelu. Veľa makroekonómov si myslí, že práve rigidity sú základným stavebným kameňom moderných DSGE modelov. Ďalším dôležitým prvkom v DSGE modeloch sú peniaze. Od čias Humeho ekonómia veria, že identifikovali monetárny transmisný mechanizmus spôsobujúci ekonomické fluktuácie z krátkodobého hľadiska za účasti cenovej alebo mzdovej nepružnosti. Práca Friedmana a Schwartzovej (1971) ako aj dvadsaťpäť rokov aplikácie VAR<sup>2</sup> modelov potvrdzuje, že tí čo vidia peniaze ako zdroj ekonomických fluktuácií majú silné empirické základy. Predchádzajúce argumenty potvrdzujúce potrebu peňazí viedli ekonómov k zapracovaniu peňazí aj do DSGE modelov. Výskumníci v tejto oblasti zistili, že na zapracovanie peňazí do DSGE modelu potrebujeme tri zložky. Za prvé potrebujeme monopolistickú konkurenciu. Bez trhovej sily, žiadna firma nemá záujem prispôbovať ceny, lebo pri danej úrovni cien predá všetko. Ak by ceny zvýšila, tak nepredá nič a naopak, ak zníži ceny, tak sa pripraví o časť tržieb. Monopolistická konkurencia môže byť zapracovaná rôznymi spôsobmi, ale najpopulárnejší spôsob je použiť Dixit-Stiglitz (1977). Toto prostredie sa ukázalo byť veľmi jednoduché na prácu a prekvapivo flexibilné. Za druhé, potrebujeme nejakým spôsobom zabezpečiť existenciu peňazí. Peniaze vo funkcii užitočnosti<sup>3</sup> alebo CIA<sup>4</sup> obmedzenie sú známe spôsoby ako tento cieľ dosiahnuť. A po tretie, potrebujeme monetárnu autoritu, ktorá bude spôsobovať nominálne šoky v ekonomike. Monetárne pravidlá ako proces rastu peňazí resp. Taylorovo pravidlo sú bežné spôsoby modelovania monetárnej autority. Existujú ešte dve ďalšie extra oblasti, v ktorých sa zvyšuje výpovedná hodnota modelu. Na spomalenie resp. zosilnenie reakcie ekonomiky na šok, makroekonómia vkladajú do modelov formovanie návykov v spotrebe, náklady prispôbovania investícií alebo zmeny vo využití kapitálu. Nakoniec sa do modelu pridávajú rôzne typy šokov: v investíciách, v preferenciách, v monetárnej alebo fiškálnej politike atď. Technologické šoky sú napriek tomu stále živé a stále sa vracajú do centra záujmu. Dokonca aj dnešné moderné DSGE modely stále vyžadujú dôležitú rolu pre technologické šoky. Stochastický neoklasický rastový model Kydlanda a Prescottta ukázal pozoruhodnú schopnosť absorbovať všetky tieto mechanizmy. Po prechodnej fáze v deväťdesiatych rokoch, v novom tisícročí, sa model rozšírený o nominálne a reálne rigidity stal základom aplikovanej práce. DSGE modely boli dostatočne flexibilné pri replikovaní dát a dostatočne bohaté na to, aby sa

---

<sup>2</sup> Vektorovo autoregresné modely.

<sup>3</sup> MIU – Money in utility function.

<sup>4</sup> CIA – Cash in advance.

stali laboratóriami, v ktorých sa môže skúmať hospodárska politika. Metódy DSGE výskumu sú dnes bežne aplikované v monetárnej ekonómii, medzinárodnej ekonómii, verejných financiách, ekonómii trhu práce a aktív. Preto DSGE modely začali používať aj tvorcovia hospodárskych politík v centrálnych bankách a stali sa ich bežným kvantitatívnym nástrojom.

### Použitá literatúra

1. COOLEY, T. F. 1995. *Frontiers of Business Cycle Research*. New Jersey : Princeton University Press, 1995. 419 s. ISBN 0-691-04323-X.
2. DIXIT, A. K. – STIGLITZ, E. S. 1977. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. In *The American Economic Review* [online]. 1977, vol. 67, no. 3 [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: <http://www.ntpu.edu.tw/ctd/eassy/paper/960108.pdf>
3. FRIEDMAN, M. – SCHWARTZ, A. J. 1971. *A Monetary History of United States, 1867-1960*. Princeton : Princeton University Press, 1971. 888 s. ISBN 9780691003542.
4. KING, R. G. – REBELO, S. T. 2000. *Resuscitating Real Business Cycles*: NBER Working Paper , no. 7534. [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: [http://www.nber.org/papers/w7534.pdf?new\\_window=1](http://www.nber.org/papers/w7534.pdf?new_window=1)
5. KYDLAND, F. – PRESCOTT, E. C. 1982. Time to Build and Aggregate Fluctuations. In *Econometrica* [online]. 1982, vol. 50, no. 6 [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: <http://www.minneapolisfed.org/research/prescott/papers/timetobuild.pdf>
6. LONG, J. B. – PLOSSER, C. I. 1983. Real Business Cycles. In *Journal of Political Economy* [online]. 1983, vol. 91, no. 1 [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: [http://www3.nd.edu/~nmark/gradmacro\\_files/Long-Plosser.pdf](http://www3.nd.edu/~nmark/gradmacro_files/Long-Plosser.pdf)
7. LUCAS, R. E. 1976. Econometric Policy Evaluation: A Critique. In *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* [online]. 1976, vol. 1, no. 1 [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: [http://pareto.uab.es/mcreel/reading\\_course\\_2006\\_2007/lucas1976.pdf](http://pareto.uab.es/mcreel/reading_course_2006_2007/lucas1976.pdf)
8. REBELO, S. T. 2005. *Real Business Cycle Models: Past, Present and Future*: NBER Working Paper, no. 11401. [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: [http://www.nber.org/papers/w11401.pdf?new\\_window=1](http://www.nber.org/papers/w11401.pdf?new_window=1)
9. VILLAVERDE, J. F. 2009. *The Econometrics of DSGE models*: NBER Working Paper , no. 14677. [cit. 2014-11-2]. Dostupné na internete: <http://www.nber.org/papers/w14677.pdf>

### Kontaktné údaje

Ing. Patrik Kupkovič

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826 – sekretariát KOVE

email: [patrik.kupkovic@gmail.com](mailto:patrik.kupkovic@gmail.com)

Ing. Martin Benkovič

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826 – sekretariát KOVE

email: [benkovic.m@gmail.com](mailto:benkovic.m@gmail.com)





# EKONOMETRICKÁ METODOLÓGIA OD VŠEOBECNÉHO MODELU KU KONKRÉTNEMU<sup>1</sup>

## GENERAL TO SPECIFIC ECONOMETRIC METHODOLOGY

*Martin Lukáčik*

### Abstrakt

Na tvorbu ekonometrického modelu ponúka súčasná ekonometria stratégie, ktoré sa odlišujú vo východiskách a spôsobe konštrukcie modelu. Vznikli ako reakcia na kritiku klasického prístupu, ktorý bol až do sedemdesiatych rokov dvadsiateho storočia konsenzom, čo sa týka teoretických východísk a empirickej špecifikácie. Predmetom nášho záujmu je prístup londýnskej ekonomickej školy známy ako postup od všeobecného modelu ku konkrétnemu.

**KLúčové slová:** chyby špecifikácie, neskreslenosť, konzistentnosť, metodológia od všeobecného ku konkrétnemu modelu, program EViews

### Abstract

The actual econometric modelling offers several modelling strategies, which differ in theoretical foundations and the way of construction models. All of them were arisen as the reaction for critics of the classical approach, which was consensus both the theoretical foundation and the empirical specification of econometric modelling up to the 1970s. The classical approach was then substituted by a number of prominent methods of empirical research as the London School of Economics approach known as general to specific approach.

**Keywords:** specification errors, unbiasedness, consistency, general to specific methodology, EViews software

## 1 TEORETICKÉ ODŮVODNENIE PRÍSTUPU

Na podporu prístupu od všeobecnej špecifikácie ku konkrétnej, ktorej zástancom je najmä Hendry (1995)<sup>2</sup> si pripomeňme dva typy chýb špecifikácie a ich rozdiely.

Najprv však odvodme vzťah medzi reziduálmi a hodnotami závislej premennej:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)\mathbf{y} = \mathbf{M}_X\mathbf{y} \quad (1)$$

a následne získame vzťah medzi reziduálmi a náhodnými zložkami:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T)(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{u} = \\ &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{u} = \mathbf{M}_X\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Z oboch prípadov je zrejmé, že reziduál je lineárnou kombináciou náhodných zložiek a rovnako je aj lineárnou kombináciou pozorovaní vysvetľovanej premennej

<sup>1</sup> Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA 1/0595/11 "Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód"

<sup>2</sup> HENDRY, D. F.: *Dynamic Econometrics*. Oxford University Press, 1995.

Vráťme sa k chybám špecifikácie a predpokladajme najskôr model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{u} \text{ a jeho odhad } \mathbf{y} = \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{e} \quad (2)$$

a následne model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u} \text{ a jeho odhad } \mathbf{y} = \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{e} \quad (3)$$

kde  $\mathbf{X}_1$  je matica s rozmermi  $n*(k_1+1)$  a  $\mathbf{X}_2$  je matica s rozmermi  $n*(k_2+1)$ . Analyzujeme postupne dve situácie:

1. Model (2) zodpovedá skutočnosti, ale odhadneme model (3),
2. Model (3) zodpovedá skutočnosti, ale odhadneme model (2).

Skôr ako to urobíme odvodíme si výrazy, ktoré sa nám zídu pri odvodzovaní oboch prípadov. Zapišme model (3) s oddelenými maticami:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{u} \quad (4)$$

ktorého estimátor MNS môžeme zapísať takto:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \left( (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2)^T (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2) \right)^{-1} (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2)^T \mathbf{y} \quad (5)$$

Na odvodenie výrazov pre jednotlivé subvektory, (3) vynásobme  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} = \mathbf{I} - \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^T$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{e} \quad (6)$$

Zohľadnením vlastností matice  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}$ , kde  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$  a  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{e} = \mathbf{e}$  dostaneme:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{y} = \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{e} \quad (7)$$

Vynásobme tento výraz maticou  $\mathbf{X}_2^T$ , pričom z vlastností MNS vieme, že  $\mathbf{X}_2^T\mathbf{e} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{X}_2^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{y} = \mathbf{X}_2^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + \mathbf{X}_2^T\mathbf{e} = \mathbf{X}_2^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \quad (8)$$

z tohto výrazu vyjadríme  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$  a následne analogický vzťah platí aj pre  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 &= (\mathbf{X}_2^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{y} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 &= (\mathbf{X}_1^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_2}\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T\mathbf{M}_{\mathbf{X}_2}\mathbf{y} \end{aligned} \quad (9)$$

Uvažujme prípad, keď model (3) zodpovedá skutočnosti, ale odhadneme model (2), čo sa môže stať v prípade metodológie od konkrétnej špecifikácie ku všeobecnejšej (pridávanie premenných do modelu). Pre estimátor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$  platí vzťah:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T\mathbf{y} = (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T (\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}) = \boldsymbol{\beta}_1 + (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T\mathbf{u}$$

Ak pre tento vzťah zapíšeme očakávanú hodnotu, dostaneme:

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) = \boldsymbol{\beta}_1 + (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2E(\boldsymbol{\beta}_2) + (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T E(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\beta}_1 + (\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2E(\boldsymbol{\beta}_2) \neq \boldsymbol{\beta}_1$$

0

že estimátor je skreslený a nekonzistentný, lebo skreslenie sa neredukuje s rastom výberu. Reziduály sú autokorelované, lebo premenná  $\mathbf{X}_2$  je súčasťou náhodnej zložky. Waldov test ani  $F$  test nemôžu byť použité (využíva sa odhad modelu bez ohraničení), naproti tomu  $LM$  test sa dá použiť (využíva sa odhad modelu s ohraničeniami), ale neposkytne žiadnu informáciu o jednotlivých premenných v špecifikácii. Nedajú sa konštatovať závery na základe odhadu.

Uvažujme druhý prípad, keď model (2) zodpovedá skutočnosti, ale odhadneme model (3), čo sa môže stať v prípade metodológie všeobecnej špecifikácie ku konkrétnej (vylučovanie premenných do modelu – vhodné pre dynamické modely).

Pre estimátor  $\hat{\beta}_1$  platí vzťah:

$$\hat{\beta}_1 = (\mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{y} = (\mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} (\mathbf{X}_1 \beta_1 + \mathbf{u}) = \beta_1 + (\mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{u}$$

Ak pre tento vzťah zapíšeme očakávanú hodnotu, dostaneme:

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 + (\mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} E(\mathbf{u}) = \beta_1 \quad (10)$$

Pre estimátor  $\hat{\beta}_2$  platí vzťah:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= (\mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{y} = (\mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} (\mathbf{X}_1 \beta_1 + \mathbf{u}) = \\ &= (\mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \underbrace{\mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_1}_{\mathbf{0}} \beta_1 + (\mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{u} = (\mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{u} \end{aligned}$$

Ak pre tento vzťah zapíšeme očakávanú hodnotu, dostaneme:

$$E(\hat{\beta}_2) = (\mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_1} E(\mathbf{u}) = \beta_2 \quad (11)$$

že oba estimátory sú neskreslené a konzistentné. Reziduály nie sú autokorelované. Waldov test aj  $F$  test môžu byť použité na nájdenie správneho modelu. Môžeme očakávať, že premenné nepatriace do modelu a aj ich štatistiky sú blízke 0.

Ak je v modeli viac premenných ako zodpovedá skutočnosti, odhady sú len menej efektívne:

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{M}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{X}_1)^{-1} \geq \sigma^2 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \quad (12)$$

## 2 MODEL A ÚDAJE – PRAKTICKÁ APLIKÁCIA METODOLÓGIE

Na skúmanie si zvolíme príklad, ktorý na webe uvádza Perman (Lab Exercise 1)<sup>3</sup>, v ktorom sa analyzuje spotreba vo Veľkej Británii. Ekonomická teória predpokladá dlhodobý vzťah:

$$c_t = \alpha_0 y_t^{\beta_1} w_t^{\beta_2} e^{u_t} \quad (13)$$

kde  $C$  sú reálne spotrebiteľské výdavky,  $Y$  predstavuje reálny personálny disponibilný príjem a  $W$  je reálna hodnota spotrebiteľského majetku. Po zlogaritmovaní dostaneme model:

$$\ln c_t = \ln \alpha_0 + \beta_1 \ln y_t + \beta_2 \ln w_t + u_t \quad (14)$$

v ktorom sú parametre elasticitami. Rovnica je statická a predstavuje zlý východiskový bod, lebo neobsahuje žiadnu informáciu o správaní spotrebiteľov mimo rovnováhy. A nerovnováha

<sup>3</sup> <http://personal.strath.ac.uk/r.perman/outline.htm> (online), 07.10.2014

je bežná vo väčšine ekonomických procesov. Preto sa odporúča začať autoregresným modelom s rozloženým oneskorením rádu  $p, q$  označovaným ARDL( $p, q$ ):

$$\ln c_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \gamma_i \ln c_{t-i} + \sum_{i=0}^{q_1} \delta_i \ln y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q_2} \lambda_i \ln w_{t-i} + u_t \quad (15)$$

kde postupnými reštrikciami môžeme vytvoriť širokú škálu modelov, napríklad aj model s korekčným členom ECM (popis modelu je v Lukáčiková a spol., 2013 a spôsob jeho odhadu je analyzovaný v Lukáčiková, 2013), kde z ARDL(1,1) modelu:

$$y_t = \beta_0 + \gamma_1 y_{t-1} + \delta_0 x_t + \delta_1 x_{t-1} + u_t \quad (16)$$

máme postupnými úpravami:

$$y_t - y_{t-1} + y_{t-1} = \beta_0 + \delta_0 x_t - \delta_0 x_{t-1} + \delta_0 x_{t-1} + \delta_1 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t + y_{t-1} = \beta_0 + \delta_0 \Delta x_t + \delta_0 x_{t-1} + \delta_1 x_{t-1} + \gamma_1 y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta y_t = \beta_0 + \delta_0 \Delta x_t + (\delta_0 + \delta_1) x_{t-1} + (\gamma_1 - 1) y_{t-1} + u_t \quad (17)$$

Postup metodológie od všeobecného ku konkrétnemu: nájdeme začiatkový ARDL model spĺňajúci štatistické kritériá a následne redukuje počet premenných (oneskorenia). Vhodné je model previesť na formát ECM, lebo má teoretické opodstatnenie a môžeme v ňom využívať  $t$  a  $F$  štatistiky na redukciiu.

Ako model (14) uvažujeme model so skutočnými premennými Spojeného kráľovstva v tvare:

$$\ln ce_t = \beta_0 + \beta_1 \ln y_t + \beta_2 \ln mw_t + u_t \quad (18)$$

kde CE predstavuje reálne spotrebiteľské výdavky,  $Y$  predstavuje reálny personálny disponibilný príjem a  $NW$  predstavuje čistý reálny majetok,  $NW = GFW + HW - DB$  (reálny hrubý finančný majetok + reálny majetok používaného bytového fondu – celkový dlh), pričom celkový dlh  $DB = GFW - NFW$  (reálny hrubý finančný majetok – reálny čistý finančný majetok). Všetky reálne premenné získame deflovaním deflátorom PC.

### 3 POSTUP V PROGRAME EViews

Perman odporúča pri každom modeli testovanie nasledovných štatistických predpokladov:

- či majú reziduály normálne rozdelenie, štatistika Jarqua a Bera,
- či v reziduáloch nie je prítomná autokorelácia, Godfrey-Breusch pre oneskorenia 1 až 5,
- či v reziduáloch nie je prítomná heteroskedasticita, časové rady – White resp. ARCH,
- testuje sa funkčný tvar rovnice, RESET test,
- či sú parametre stabilné, Chow Forecast test a Chow Breakpoint test.

Hoover s Perezom (1999)<sup>4</sup> odporúčajú vo svojom článku tieto testy:

- či majú reziduály normálne rozdelenie, štatistika Jarqua a Bera,
- či v reziduáloch nie je prítomná autokorelácia do druhého rádu, Godfrey-Breusch,
- či v reziduáloch nie je prítomná heteroskedasticita, ARCH do druhého rádu (Engle),
- či sú parametre stabilné v rámci ich výberu, Chow Breakpoint test (1. polovica oproti 2.),
- či sú parametre stabilné mimo výberu, Chow Forecast test (pre posledných 10 % údajov).

<sup>4</sup> HOOVER, K. D., PEREZ, S. J.: Data Mining Reconsidered: Encompassing and the General-to-Specific Approach to Specification Search. *Econometrics Journal*, vol. 2, 1999, pp.167-191.

Predstavitelia londýnskej ekonomickej školy vytvorili ekonometrický softvér PcGive, na ktorý nadviazal OxMetrics s programovacím jazykom Ox, do ktorého rodiny produktov teraz patrí aj pôvodný program PcGive. Jeho súčasťou je aj procedúra Autometrics slúžiaca na automatizovaný výber dynamického jednorovnicového modelu.

Postup redukcie analyzovaného problému predstavíme v programe EViews.

```
' vytvoríme si všetky rady potrebné na odhad modelu
series CE=100*VCE/PC
series Y=100*VPDI/PC
series GFW=100*VGFW/PC
series NFW=100*VNFW/PC
series HW=100*VHW/PC
series DB=GFW-NFW
series NW=GFW+HW-DB
series LCE=log(CE)
series LY=log(Y)
series LNFW=log(NFW)
series LNW=log(NW)
series DLCE=d(LCE)
series DLY=d(LY)
series DLNFW=d(LNFW)
series DLNW=d(LNW)
series DDLCE=d(DLCE)
series DDLY=d(DLY)
series DDLNW=d(DLNW)
series DDLNFW=d(DLNFW)
smpl 1970Q1 1990Q4
' štartovací model je ARDL(4,4)
equation rovo.ls LCE C LCE(-1 to -4) LY(0 to -4) LNW(0 to -4)
' vytvoríme umelé premenné pre obdobia, kde sú najväčšie hodnoty reziduálov
series UM79q2=@isperiod("1979q2")
series UM79q3=@isperiod("1979q3")
series UM80q4=@isperiod("1980q4")
series UM88q1=@isperiod("1988q1")
equation rov1.ls LCE C LCE(-1 to -4) LY(0 to -4) LNW(0 to -4) UM79q2 UM79q3 UM80q4 UM88q1
' ak sú reziduály rovnako veľké, môžeme ich spojiť - ukážka spojenia s opačnými znamienkami
series UM79q23=@isperiod("1979q2")-@isperiod("1979q3")
equation rov1.ls LCE C LCE(-1 to -4) LY(0 to -4) LNW(0 to -4) UM79q23 UM80q4 UM88q1
' prejdeme na tvar ECM - rovnice pre diferencované premenné a oneskorené úrovně
equation rov2.ls DLCE c DLCE(-1 to -3) DLY(0 to -3) DLNW(0 to -3) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1)
UM79q23 UM80q4 UM88q1
equation rov3.ls DLCE c DLCE(-1 to -2) DLY(0 to -2) DLNW(0 to -2) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1)
UM79q23 UM80q4 UM88q1
' spojíme všetky umelé premenné do jednej
series dum=UM79q23-UM80q4+UM88q1
' postupnou redukciou spresňujeme výsledný model
equation rov4.ls DLCE c DLCE(-1 to -2) DLY(0 to -2) DLNW(0 to -2) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1) DUM
equation rov5.ls DLCE c DLY(0 to -2) DLNW(0 to -2) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1) DUM
equation rov6.ls DLCE c DLY(0 to -2) DLNW(-1) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1) DUM
equation rov7.ls DLCE c DLY DDLY(-1) DLNW(-1) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1) DUM
```

Po vytvorení štartovacieho modelu ARDL(4,4) doplneného o umelé premenné riešiace výkyvy v najexponovanejších obdobiach (reziduál je v absolútnej hodnote  $> 0,02$ ), pričom sa držíme pravidla, že by ich nemalo byť viac ako 5 %, postupne testami eliminujeme premenné pri nevýznamných parametroch. Sú to parametre pri oneskorených premenných o 4 obdobia a následne o 3 obdobia. Pri 2 obdobiach ich nemôžeme vylúčiť naraz, preto sa zameriame na oneskorenia podľa premenných. Tak vyradíme oneskorené premenné pre DLCE, premennú DLNW a jej druhé oneskorenie. Rovnaké veľkosti parametrov spájame pod jednu premennú.

Súhrn testovacích postupov Permana alebo Pereza a Hoovera v jednej tabuľke EViews:

```

table(8,20) result
result(1,1)="Rovnica"
result(1,2)="JB-stat"
result(1,3)="Chisq(2)"
result(1,4)="GB-lag2"
result(1,5)="Chisq(2)"
result(1,6)="GB-lag1"
result(1,7)="Chisq(1)"
result(1,8)="White"
result(1,9)="Chisq(k)"
result(1,10)="ARCH-lag2"
result(1,11)="Chisq(2)"
result(1,12)="ARCH-lag1"
result(1,13)="Chisq(1)"
result(1,14)="CHOW-break"
result(1,15)="Fcrit"
result(1,16)="CHOW-forec"
result(1,17)="Fcrit"
result(1,18)="RESET"
result(1,19)="Fcrit"
result(1,20)="SC"
for !i=0 to 7
rov!i.makeregs reggroup
%name = reggroup.@seriesname(1)
reggroup.drop {%name}
reggroup.drop um??q*
result(!i+2,1)=rov!i.@name
result(!i+2,2)=rov!i.@regobs/6*(@skew(resid)*@skew(resid) + (@kurt(resid)-3)^2/4)
result(!i+2,3)=@qchisq(0.95,2)
freeze(auto2zrov!i) rov!i.auto(2)
result(!i+2,4)=@val(auto2zrov!i(4,2))
result(!i+2,5)=@qchisq(0.95,2)
freeze(auto1zrov!i) rov!i.auto(1)
result(!i+2,6)=@val(auto2zrov!i(4,2))
result(!i+2,7)=@qchisq(0.95,1)
freeze(hetero!i) rov!i.white
result(!i+2,8)=@val(hetero!i(4,2))
result(!i+2,9)=@qchisq(0.95,rov!i.@ncoef-1)
freeze(arch2zrov!i) rov!i.archtest(2)
result(!i+2,10)=@val(arch2zrov!i(4,2))
result(!i+2,11)=@qchisq(0.95,2)
freeze(arch1zrov!i) rov!i.archtest(1)
result(!i+2,12)=@val(arch1zrov!i(4,2))
result(!i+2,13)=@qchisq(0.95,1)
freeze(chowbreak!i) rov!i.chow 1980Q1 @ reggroup
result(!i+2,14)=@val(chowbreak!i(6,2))
result(!i+2,15)=@qfdist(0.95,rov!i.@ncoef,rov!i.@regobs-(2*rov!i.@ncoef))
freeze(chowforec!i) rov!i.chow(f) 1989Q1
if !i=0 then result(!i+2,16)=@val(chowforec!i(7,2)) else result(!i+2,16)=@val(chowforec!i(8,2))
endif
result(!i+2,17)=@qfdist(0.95,8,rov!i.@regobs-8-rov!i.@ncoef)
freeze(resetest!i) rov!i.reset(1)
result(!i+2,18)=@val(resetest!i(8,2))
result(!i+2,19)=@qfdist(0.95,1,rov!i.@regobs-rov!i.@ncoef-1)
result(!i+2,20)=rov!i.@sc
close reggroup
next
show result

```

Počas celého postupu je prítomna autoregresne podmienená heteroskedasticita, preto na záver by sme mali vyriešiť aj toto nespĺnenie klasického predpokladu lineárneho modelu. Po rýchlej analýze sa ako najvhodnejší javí model GARCH(0,2).

```
equation rov8.arch(0,2) DLCE C DLY DDLY(-1) DLNW(-1) LCE(-1) LY(-1) LNW(-1) DUM
freeze(rov8_JBstat) rov8.hist
freeze(rov8_arch2) rov8.arch(2)
show rov8
```

## ZÁVER

Postup od všeobecného modelu ku konkrétnemu navrhnutý predstaviteľmi londýnskej ekonomickej školy je v súčasnosti široko akceptovaným. Automatizovanie vyhľadávania ako ho ponúkajú niektoré ekonometrické programy uľahčuje hľadanie vhodnej špecifikácie dynamických modelov, ktoré majú rozsiahle uplatnenie pri ekonomických analýzach (Szomolányi, 2007 alebo Husár a Szomolányi, 2009). Prezentovaný postup využíva špecifikáciu modelu v tvare modelu s korekčným členom, ktorý ako jedna z reprezentácií autoregresného modelu s rozloženým oneskorením predstavuje dôležitý nástroj využívaný pri prognózach (Chajdiak a spol, 1998). Preto sú automatizované procedúry často preferované práve prognostikmi.

### Použitá literatúra

1. HENDRY, D. F. 1995. *Dynamic Econometrics*. Oxford University Press, 1995.
2. HOOVER, K. D., PEREZ, S. J. 1999. Data Mining Reconsidered: Encompassing and the General-to-Specific Approach to Specification Search. *Econometrics Journal*, vol. 2, 1999, s. 167-191.
3. HUSÁR, J., SZOMOLÁNYI, K. 2009. Dynamický model stability inflačného procesu na báze kvantitatívnej teórie peňazí. *Politická ekonomie: teorie, modelování, aplikace*, roč. 57, č. 1, 2009, s. 46-55.
4. CHAJDIAK, J., KOMORNÍKOVÁ, M., IŠTVÁNIKOVÁ, A. 1998. *Metódy prognózovania*. Bratislava: Statistika, 1998.
5. LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Englova-Grangerova procedúra a dynamická metóda najmenších štvorcov. In *AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach : zborník, 15. medzinárodná vedecká konferencia*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013.
6. LUKÁČIKOVÁ, A., LUKÁČIK, M., SZOMOLÁNYI, K. 2013. *Ekonometria 1*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013.
7. SZOMOLÁNYI, K. 2007. Dynamický model trhu práce. In *AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach, 11. medzinárodná vedecká konferencia*, Bratislava: Fakulta hospodárskej informatiky EU, 2007.
8. Perman, R. *Applied Econometrics: Outline & Teaching Materials*. 2006. [Online] Available from: <http://personal.strath.ac.uk/r.perman/outline.htm>. [07.10.2014]

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: lukacik@euba.sk

**Príloha: Údaje použité pri analýze**

|        | VCE   | VPDI  | VGFW   | VNFW   | VHW      | PC       | G     | WTI      |
|--------|-------|-------|--------|--------|----------|----------|-------|----------|
| 1968q1 | 6905  | 7421  | 83549  | 67211  | 37311,33 | 17,93087 | 14283 | 41,10063 |
| 1968q2 | 6769  | 7570  | 87932  | 71197  | 38376,21 | 18,27435 | 13833 | 38,43824 |
| 1968q3 | 6967  | 7510  | 91386  | 74152  | 39471,47 | 18,46639 | 13844 | 45,72370 |
| 1968q4 | 7110  | 7640  | 93464  | 76249  | 40598,00 | 18,76782 | 13918 | 42,86477 |
| 1969q1 | 7212  | 7893  | 95019  | 77546  | 41451,47 | 19,15487 | 14018 | 44,12732 |
| 1969q2 | 7306  | 7997  | 94009  | 76188  | 42322,87 | 19,20862 | 13468 | 45,23495 |
| 1969q3 | 7378  | 8036  | 93765  | 75608  | 43212,58 | 19,40405 | 13561 | 50,38489 |
| 1969q4 | 7570  | 8177  | 90846  | 72717  | 44121,00 | 19,72381 | 13807 | 47,59433 |
| 1970q1 | 7705  | 8358  | 92409  | 74057  | 45192,09 | 20,08498 | 13701 | 49,62952 |
| 1970q2 | 7911  | 8817  | 93592  | 74740  | 46289,21 | 20,28930 | 14106 | 49,45721 |
| 1970q3 | 8151  | 8965  | 93517  | 74139  | 47412,96 | 20,59269 | 13857 | 53,51957 |
| 1970q4 | 8347  | 9167  | 93568  | 73887  | 48564,00 | 21,08041 | 14097 | 51,58681 |
| 1971q1 | 8518  | 9164  | 99326  | 79345  | 50662,29 | 21,64676 | 14083 | 53,67464 |
| 1971q2 | 8915  | 9690  | 102849 | 82350  | 52851,25 | 22,19926 | 14350 | 52,48953 |
| 1971q3 | 9189  | 9876  | 108439 | 87150  | 55134,79 | 22,51323 | 14393 | 57,71894 |
| 1971q4 | 9388  | 10119 | 112457 | 90104  | 57517,00 | 22,75493 | 14589 | 53,66011 |
| 1972q1 | 9685  | 10490 | 115966 | 92382  | 63680,60 | 23,15158 | 14871 | 57,69114 |
| 1972q2 | 10002 | 11265 | 121554 | 96276  | 70504,67 | 23,40087 | 14701 | 56,79517 |
| 1972q3 | 10349 | 11304 | 125952 | 99430  | 78060,02 | 23,90235 | 14958 | 60,73103 |
| 1972q4 | 10714 | 11794 | 127062 | 99246  | 86425,00 | 24,44333 | 15312 | 62,58314 |
| 1973q1 | 11314 | 12262 | 122364 | 93031  | 92342,94 | 24,90096 | 15537 | 64,72395 |
| 1973q2 | 11434 | 12746 | 125264 | 94387  | 98666,10 | 25,40945 | 15534 | 64,63422 |
| 1973q3 | 11724 | 13084 | 127155 | 94701  | 105422,2 | 25,85112 | 15627 | 68,73960 |
| 1973q4 | 12117 | 13695 | 120668 | 88219  | 112641,0 | 26,89320 | 15732 | 68,06791 |
| 1974q1 | 12430 | 13922 | 116033 | 82912  | 113259,2 | 28,12535 | 15656 | 70,37369 |
| 1974q2 | 13083 | 14370 | 111610 | 77717  | 113880,7 | 29,52540 | 15777 | 69,86461 |
| 1974q3 | 13697 | 15487 | 107770 | 72954  | 114505,6 | 30,62972 | 15870 | 72,67534 |
| 1974q4 | 14481 | 16304 | 108491 | 73057  | 115134,0 | 32,18572 | 16295 | 69,49583 |
| 1975q1 | 15339 | 17730 | 120518 | 84107  | 118264,4 | 34,31160 | 16909 | 65,41688 |
| 1975q2 | 16420 | 18175 | 126518 | 88901  | 121480,1 | 36,74858 | 16587 | 64,41511 |
| 1975q3 | 16875 | 19118 | 133864 | 95389  | 124783,1 | 38,21937 | 16576 | 69,80784 |
| 1975q4 | 17491 | 19640 | 137839 | 96859  | 128176,0 | 39,78844 | 17075 | 68,83571 |
| 1976q1 | 18207 | 20589 | 143400 | 103300 | 131580,7 | 41,18485 | 16975 | 71,47392 |
| 1976q2 | 18788 | 20828 | 145300 | 103900 | 135075,8 | 42,29341 | 17141 | 73,17731 |
| 1976q3 | 19455 | 22131 | 146000 | 103000 | 138663,8 | 43,49819 | 16972 | 77,49970 |
| 1976q4 | 20431 | 22570 | 151400 | 107100 | 142347,0 | 45,48106 | 16889 | 77,82756 |
| 1977q1 | 20898 | 22911 | 164500 | 117700 | 146504,8 | 47,48143 | 16604 | 77,06888 |
| 1977q2 | 21576 | 23463 | 170000 | 121400 | 150784,0 | 49,25803 | 16814 | 76,34819 |
| 1977q3 | 22321 | 24459 | 182800 | 132400 | 155188,2 | 50,37577 | 16688 | 79,41070 |
| 1977q4 | 23080 | 25880 | 191600 | 139200 | 159721,0 | 50,88296 | 16749 | 79,52381 |
| 1978q1 | 24219 | 26449 | 197500 | 142500 | 169838,3 | 52,18825 | 16999 | 78,20299 |
| 1978q2 | 24763 | 27845 | 203800 | 146400 | 180596,3 | 53,30650 | 17055 | 80,85405 |
| 1978q3 | 25844 | 29201 | 210100 | 151000 | 192035,9 | 54,52666 | 17104 | 82,65494 |
| 1978q4 | 26418 | 30061 | 212700 | 152000 | 204200,0 | 55,90875 | 17242 | 85,24136 |
| 1979q1 | 27467 | 31218 | 235700 | 172200 | 219090,6 | 57,52613 | 17201 | 83,23575 |
| 1979q2 | 29863 | 32435 | 237600 | 171100 | 235067,1 | 59,22496 | 17533 | 85,19362 |
| 1979q3 | 30486 | 34696 | 245600 | 176000 | 252208,6 | 62,99021 | 17490 | 89,85133 |
| 1979q4 | 32173 | 37974 | 248700 | 176000 | 270600,0 | 65,53080 | 17552 | 90,50187 |
| 1980q1 | 33818 | 38071 | 262900 | 181200 | 279183,1 | 68,03332 | 17706 | 94,15550 |
| 1980q2 | 34368 | 39673 | 280000 | 195100 | 288038,2 | 70,75099 | 17563 | 90,09312 |



|        | VCE   | VPDI  | VGFW    | VNFW   | VHW      | PC       | G     | WTI      |
|--------|-------|-------|---------|--------|----------|----------|-------|----------|
| 1980q3 | 35452 | 41094 | 294000  | 205700 | 297174,2 | 72,11114 | 17744 | 91,23600 |
| 1980q4 | 35970 | 42198 | 306000  | 214700 | 306600,0 | 74,35198 | 17859 | 89,88014 |
| 1981q1 | 37340 | 43420 | 321400  | 226600 | 309872,1 | 76,33026 | 17785 | 89,30844 |
| 1981q2 | 38463 | 43749 | 333800  | 234400 | 313179,3 | 78,41111 | 17792 | 89,37254 |
| 1981q3 | 39287 | 44471 | 325300  | 221900 | 316521,8 | 80,07623 | 17875 | 91,46257 |
| 1981q4 | 40322 | 46080 | 347400  | 237800 | 319900,0 | 82,32844 | 17634 | 90,59659 |
| 1982q1 | 41146 | 46602 | 359800  | 248400 | 327126,5 | 84,30175 | 17953 | 87,67952 |
| 1982q2 | 41965 | 48118 | 370300  | 253500 | 334516,2 | 85,56253 | 17779 | 85,48013 |
| 1982q3 | 43118 | 48173 | 394600  | 271800 | 342072,7 | 86,56147 | 17855 | 87,19992 |
| 1982q4 | 44421 | 49361 | 414900  | 285900 | 349800,0 | 88,28755 | 18085 | 86,29876 |
| 1983q1 | 45389 | 50131 | 436100  | 301600 | 363988,2 | 88,91784 | 18162 | 85,03898 |
| 1983q2 | 46147 | 51603 | 464700  | 324000 | 378751,9 | 89,71034 | 18352 | 86,45690 |
| 1983q3 | 47489 | 52118 | 467600  | 320700 | 394114,4 | 90,93329 | 18210 | 91,78000 |
| 1983q4 | 48003 | 53076 | 487100  | 334400 | 410100,0 | 91,92103 | 18365 | 92,90564 |
| 1984q1 | 48502 | 54075 | 515200  | 357400 | 422363,7 | 93,03691 | 18299 | 95,77308 |
| 1984q2 | 49709 | 55192 | 501800  | 336400 | 434994,3 | 94,24579 | 18506 | 94,96895 |
| 1984q3 | 49943 | 56036 | 531500  | 359600 | 448002,7 | 95,47505 | 18491 | 99,01676 |
| 1984q4 | 51271 | 57515 | 568300  | 390200 | 461400,0 | 96,61378 | 18496 | 101,6040 |
| 1985q1 | 52641 | 57775 | 585500  | 401000 | 477037,2 | 98,05167 | 18638 | 98,54169 |
| 1985q2 | 53535 | 60256 | 588100  | 396000 | 493204,0 | 99,43166 | 18357 | 98,74217 |
| 1985q3 | 55165 | 60931 | 609600  | 409700 | 509918,8 | 100,6550 | 18436 | 100,5307 |
| 1985q4 | 56277 | 62410 | 645900  | 438500 | 527200,0 | 101,7962 | 18374 | 102,1856 |
| 1986q1 | 58047 | 63444 | 718900  | 505000 | 548698,5 | 102,8509 | 18837 | 98,15531 |
| 1986q2 | 60012 | 66060 | 730500  | 506300 | 571074,1 | 103,6620 | 18797 | 101,2327 |
| 1986q3 | 60936 | 66382 | 718300  | 485100 | 594362,3 | 104,8686 | 18747 | 103,6856 |
| 1986q4 | 62280 | 67708 | 775000  | 532100 | 618600,0 | 106,0356 | 18725 | 104,1654 |
| 1987q1 | 63605 | 68494 | 859500  | 607600 | 647836,4 | 107,5372 | 18729 | 103,1012 |
| 1987q2 | 64990 | 70337 | 943700  | 681100 | 678454,4 | 108,0232 | 18995 | 105,5666 |
| 1987q3 | 67207 | 71877 | 986000  | 711300 | 710519,4 | 109,2299 | 19184 | 111,2008 |
| 1987q4 | 69078 | 73900 | 859700  | 573300 | 744100,0 | 110,6292 | 19126 | 114,0408 |
| 1988q1 | 71787 | 74825 | 884500  | 586800 | 803163,6 | 111,7777 | 19132 | 112,0073 |
| 1988q2 | 73419 | 78444 | 932800  | 619500 | 866914,9 | 113,7503 | 19193 | 115,9855 |
| 1988q3 | 75909 | 80146 | 947000  | 616000 | 935726,4 | 115,1340 | 18999 | 119,4829 |
| 1988q4 | 77681 | 82568 | 984000  | 640900 | 1010000  | 116,5821 | 19162 | 124,3052 |
| 1989q1 | 79153 | 83971 | 1024800 | 669500 | 1031104  | 118,1617 | 19006 | 121,9880 |
| 1989q2 | 80958 | 87713 | 1052800 | 684000 | 1052649  | 119,5552 | 19108 | 125,4792 |
| 1989q3 | 82109 | 88824 | 1104200 | 720800 | 1074645  | 121,3481 | 19641 | 126,7104 |
| 1989q4 | 84269 | 90930 | 1178800 | 782700 | 1097100  | 123,5471 | 19427 | 129,1790 |
| 1990q1 | 85782 | 93426 | 1101500 | 699300 | 1102461  | 125,7192 | 19698 | 127,5526 |
| 1990q2 | 86907 | 93754 | 1140200 | 726200 | 1107847  | 126,3257 | 19841 | 127,4264 |
| 1990q3 | 87889 | 96758 | 1060100 | 634200 | 1113261  | 128,5792 | 19984 | 131,3243 |
| 1990q4 | 88843 | 99082 | 1160300 | 724100 | 1118700  | 130,8034 | 19848 | 136,6046 |

Zdroj: <http://personal.strath.ac.uk/r.perman/nic1.xls>

# SYNTÉZA EKONOMETRICKÉHO A OPTIMALIZAČNÉHO PRÍSTUPU PRI VÝUČBE KVANTITATÍVNYCH METÓD<sup>1</sup>

## SYNTHESIS OF ECONOMETRIC AND OPTIMIZATION APPROACH IN TEACHING QUANTITATIVE METHODS

*Adriana Lukáčiková*

### **Abstrakt**

Na modelovanie vzťahov medzi ekonomickými premennými ako na makroúrovni, tak aj na mikroúrovni sa ako štandardný nástroj využívajú ekonometrické metódy. Výsledkom odhadov je ekonometrický model, ktorý slúži ako báza na ďalšie analýzy. Veľmi častou aplikáciou ekonometrického modelu je prognóza, pri ktorej sa predpovedajú hodnoty endogénnych premenných na obdobie, o ktorom nie sú známe ani hodnoty exogénnych premenných. Na výpočet (určenie) hodnôt exogénnych premenných sa využívajú rôzne všeobecne známe prístupy (modely trendu, exponenciálneho vyrovnávania, demografické prognózy resp. sa určia variantne alebo expertne). Pri výučbe predmetov z oblasti kvantitatívnych metód je dôležité študentom ukázať, že teoretické poznatky z jednotlivých oblastí je možno pri riešení konkrétnych problémov syntetizovať. V článku je uvedená formulácia a riešenie reálneho problému, v ktorom sa spája ekonometrický a optimalizačný prístup.

***Kľúčové slová:** ekonometrický model, optimalizácia, cieľové programovanie*

### **Abstract**

For the modeling of relationships between economic variables such as macro-level as well as at the micro level as a standard tool using econometric methods. The result is the estimated econometric model, which is a base for further analysis. The most common application of econometric model is forecast at which predict the values of the endogenous variables for the period, which are not known values of exogenous variables. To determine the values of exogenous variables are used in a variety of well-known approaches (trend models, exponential smoothing, demographic forecasts or values are determined variations or experts). In teaching courses in the field of quantitative methods is important to show students the theoretical knowledge from different areas can be in solving specific problems synthesized. The article referred to the formulation and solution of the real problem, which combines econometric and optimization approach.

***Keywords:** econometric model, optimization, goal programming*

## **1 ÚVOD**

Optimalizačný prístup využíva modely a metódy cieľového programovania. Pri formulácii budeme vychádzať z ekonometrického modelu, ktorý opisuje vzťahy medzi ekonomickými premennými. Tvorca modelu sa výberom konkrétnych hodnôt exogénnych premenných

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA 1/0595/11 „Analýza hospodárskych cyklov v ekonomikách eurozóny (so zreteľom na špecifiká slovenskej ekonomiky) s využitím ekonometrických a optimalizačných metód“

usiluje o realizáciu viacerých ekonomických cieľov. Základnou úlohou je teda nájsť také hodnoty exogénnych premenných, ktoré podmieňujú splnenie vopred stanovených cieľov, pričom tvorca naráža na konflikty medzi jednotlivými cieľmi. Na makroúrovni môže ísť napríklad o výber nástrojov hospodárskej politiky (úroková miera, vládne nákupy, dane), pomocou ktorých budú splnené vopred stanovené ciele hospodárskej politiky (medziročné tempo prírastku hrubého domáceho produktu, miera nezamestnanosti, ...). Obdobne je možné tento prístup aplikovať aj na úrovni podniku pri optimalizácii podnikových procesov a cieľov.

## 2 MODEL

Jednotlivé fázy formulovania a riešenia problému môžeme opísať nasledujúcimi bodmi. V prvej etape sú vhodnou metódou odhadnuté parametre ekonometrického modelu, ktorý bude bázou pre špecifikáciu ohraničení úlohy cieľového programovania. Stanovíme ciele pre vybrané premenné, ktoré reprezentujú zámery tvorca (pri optimalizácii hospodárskej politiky stanovujeme ciele pre makroekonomické ukazovatele reprezentujúce zámery tvorca hospodárskej politiky). Taktiež musíme stanoviť dolné a horné hranice pre hodnoty exogénnych premenných v jednotlivých obdobiach prognózy.

Úloha cieľového programovania bude obsahovať archimedovskú kritériálnu funkciu minimalizujúcu súčet nežiadúcich odchýlkových premenných, ktoré vyjadrujú úroveň nesplnenia stanovených cieľov. Ohraničenia budú obsahovať 3 typy: ohraničenia vyplývajúce z ekonometrického modelu, cieľové ohraničenia vyjadrujúce zámery tvorca a dolné a horné hranice pre exogénne premenné modelu. Odchýlkovým premenným môžeme priradiť nezáporné váhy, ktoré vyjadrujú relatívnu významnosť jednotlivých odchýlkových premenných.

### 2.1 Formulácia úlohy cieľového programovania

V rámci výučby je vhodné pre lepšiu názornosť ukázať postup formulácie úlohy cieľového programovania na jednoduchom ilustratívnom príklade, ktorý bude vychádzať z malého ekonometrického modelu. Predpokladajme v ďalšom postupe malý ekonometrický model, ktorý obsahuje jednu stochastickú rovnicu a jednu identitu.

$$\begin{aligned}y_{t1} &= \beta_0 + \beta_1 y_{t2} + u_{t1} \\ y_{t2} &= y_{t1} + x_{t1} + x_{t2}\end{aligned}$$

V modeli vystupujú dve endogénne premenné a dve exogénne premenné. Model odhadnutý na základe štvrťročných údajov vhodnou metódou bude mať tvar

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t1} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 y_{t2} \\ y_{t2} &= y_{t1} + x_{t1} + x_{t2}\end{aligned}$$

a bude základom pre formuláciu úlohy. Cieľom bude medziročný rast premennej  $y_{t2}$  o  $r_1$  % v prvom roku prognózy respektíve o  $r_2$  %, pričom budeme prognózovať hodnoty exogénnych premenných na nasledujúcich osem štvrťrokov.

Formálny zápis úlohy lineárneho cieľového programovania bude

$$\min \sum_{i=1}^2 (d_i^- + d_i^+) = \min (d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+)$$

za podmienok zohľadňujúcich odhadnutý tvar modelu na osem štvrťrokov:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{p1} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 y_{p2} \\ y_{p2} &= y_{p1} + x_{p1} + x_{p2} \\ p &= 1, 2, \dots, 8\end{aligned}$$

za podmienok zohľadňujúcich stanovený cieľ pre prvý a následne druhý rok:

$$\begin{aligned}\left[1 + (r_1 / 100)\right] y_{T2} - \sum_{p=1}^4 y_{p2} + d_1^- - d_1^+ &= 0 \\ \left[1 + (r_2 / 100)\right] \sum_{p=1}^4 y_{p2} - \sum_{p=5}^8 y_{p2} + d_2^- - d_2^+ &= 0\end{aligned}$$

pričom  $y_{T2}$  vyjadruje hodnotu premennej v roku, ktorý predchádzal začiatku optimalizácie, za podmienok ohraničujúcich hodnoty exogénnych premenných na každé obdobie prognózy:

$$\begin{aligned}x_{p1} &\geq D_p \\ x_{p1} &\leq H_p \\ x_{p2} &\geq DD_p \\ x_{p2} &\geq HH_p\end{aligned}$$

za podmienok nezápornosti premenných:

$$y_{p1} \geq 0; y_{p2} \geq 0; d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

kde:  $p$  – index prognózovaného obdobia;  $p = 1, \dots, 8$ ;

$d_1^-, d_2^-$  – negatívne odchýlkové premenné od cieľových hodnôt;

$d_1^+, d_2^+$  – pozitívne odchýlkové premenné od cieľových hodnôt.

## 2.2 Počítačová realizácia

Vyššie opísaný problém, teda optimalizácia hodnôt ekonomických premenných (makroekonomických ukazovateľov a nástrojov hospodárskej politiky), môže byť realizovaný napríklad v programovom balíku GAMS. Z hľadiska dostupnosti softvéru je možné takto nadefinovanú úlohu riešiť aj v prostredí tabuľkového procesora Excel prostredníctvom využitia jeho doplnku Riešiteľ.

Najprv si pripravíme výstupné oblasti pre hodnoty endogénnych premenných, exogénnych premenných a odchýlkových premenných. Nulové hodnoty odchýlkových premenných po vyriešení úlohy znamenajú splnenie definovaných cieľov. V ďalších oblastiach sú postupne opísané rovnice správania, ciele, horné a dolné hranice pre hodnoty exogénnych premenných a účelová funkcia. Typ extremalizácie bude zadaný až pri samotnom výpočte v Riešiteli. Následne vyberieme z menu príkaz Riešiteľ a postupne zadávame nasledujúce parametre na základe sformulovanej úlohy.

- *Nastaviť cieľ* – adresa bunky s hodnotou účelovej funkcie (C25).
- *Zmenou premenných buniek* – výstupná oblasť pre hodnoty exogénnych premenných (B5:I6), endogénnych premenných (B11:I12) a odchýlkových premenných (C17:F17).
- *Obmedzenia* – postupne sú zadávané podmienky nezápornosti pre endogénne premenné (B11:I12), ohraničenia z ekonometrického modelu (B21:I22), hranice hodnôt exogénnych

premenných (B29:I30, B42:I43), podmienky nezápornosti pre odchýlkové premenné (C17:F17) a cieľové ohraničenia (C23:C24). Podmienky nezápornosti je možné zadať aj označením políčka pri *Vytvorte nezápornú hodnotu premenných, ktoré sú bez obmedzenia*

Po správnom zadaní parametrov vyberieme príkaz Riešiť.

Výsledné okno nastavenia parametrov v Riešiteľí môže vyzeráť nasledovne:

Ak systém nájde riešenie, používateľ si môže vybrať možnosť, že sa toto riešenie zapíše do excelovského listu. Môže sa však stať, že systém oznámi, že nenašiel vhodné riešenie. V takomto prípade je na používateľovi, aby rozhodol o tom, či chce uložiť toto neprípustné riešenie, alebo či sa rozhodne pre voľbu obnoviť pôvodné hodnoty.

Ak systém našiel prípustné riešenie, toto sa zobrazí vo výstupných oblastiach (zadali sme ich v políčku *Zmenou premenných buniek*). Systém zobrazí aj úroveň splnenia cieľov a hodnotu účelovej funkcie.

### 3 ZÁVER

Opísaný model slúži na ilustráciu implementácie ekonometrického modelu do úlohy cieľového programovania, pričom na podrobnejšie opísanie ekonomických vzťahov by bolo vhodné formulovať úlohu cieľového programovania na základe rozsiahlejšieho ekonometrického modelu simultánnych rovníc. Zároveň je treba pripomenúť, že modely získané postupmi klasickej ekonometrie nezohľadňujú Lucasovu kritiku a neberú do úvahy zmenu štruktúry vyvolanú zmenou politiky.

#### Použitá literatúra

1. FAVERO, C. A. 2001. Applied Macroeconometrics. New York: Oxford University Press, 2001

2. GREENE, W. H. 2003. *Econometric Analysis*. Prentice Hall New Jersey 2003
3. LUKÁČIK, M. 2004. Modelovanie ekonometrických systémov využívaných pre prognózy. In: *Štatistika a integrácia: 12. slovenská štatistická konferencia, zborník. Bratislava 2004 : Slovenská štatistická a demografická spoločnosť*, s. 205-253
4. LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. – SZOMOLÁNYI, K. 2005. Optimalizácia v ekonometrii – princíp estimátorov. In: *Teoretické aspekty prierezných ekonomík. Košice : Royal Unicorn, s.r.o. 2005*
5. SURMANOVÁ, K. 2009. *Úvod do ekonometrie: praktikum*. Bratislava: EKONÓM 2009
6. SZOMOLÁNYI, K. 2005. Povaha a podstata problému časovej konzistencie ekonomickej politiky. In: *Ekonomika a informatika: vedecký časopis FHI EU v Bratislave a SSHI, roč. 3, 2005, č. 2, s. 121-130.*
7. SZOMOLÁNYI, K. – LUKÁČIK, M. 2010. Model hospodárskych cyklov a reálne ekonomiky. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: zborník z medzinárodného vedeckého seminára Praha, s.[1-5]* Bratislava: EKONÓM 2010.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 829

email: [adriana.lukacikova@euba.sk](mailto:adriana.lukacikova@euba.sk)

# PREDIKCIA ODCHODU ZÁKAZNÍKOV POMOCOU METÓD ANALÝZY PREŽITIA

## CUSTOMER BASE CHURN PREDICTION BASED ON SURVIVAL ANALYSIS

*Andrej Mišovič, Ivan Brezina*

### **Abstrakt**

Autori v tomto príspevku uvažujú o možnosti použitia metód známych z oblasti analýzy prežitia, ktoré sa bežne aplikujú skôr v oblasti životného poistenia. Ich analogická úvaha smeruje k tomu, že v dobe, kedy majú firmy dostupné značné množstvo údajov o zákazníkoch môže byť zaujímavé použiť aj takýto prístup k identifikácii zákazníkov, ktorí môžu pravdepodobne odísť. Ďalej diskutujú možnosť využitia tohto prístupu nielen k samotnej zákazníckej báze, ale aj k tomu, za akých podmienok, resp. okolností zákazníci firmami vznikli a aké to má dopad na ich odchodovosť, teda „prežitie“.

**Kľúčové slová:** *analýza prežitia, odchod/odliv zákazníkov, Cox regresia, logistická regresia*

### **Abstract**

In this paper authors try to discuss possibilities of using survival analysis methods in customer's churn prediction. These methods are more often used in life insurance area rather than in customer base and relation management (CRM). Analogically they point out nowadays trend when companies have much more data about customers than any time before. Therefore it could be interesting and beneficial to use such approach to identifying churners. They think about identifying not only demographic and behavior factors which influence churn probability, but also time tenure of customer's acquisition. Churn of coherent customers could be also impacted by acquisition conditions earlier.

**Keywords:** *survival analysis, customers churn, Cox regression, logistic regression*

### **ÚVOD**

Dnešný podnikateľský svet má k dispozícii toľko dát o svojich zákazníkoch, ako nikdy predtým. Napriek tomu čelí stále tým istým výzvam:

- ako získať nových zákazníkov,
- ako zvýšiť hodnotu už existujúcich,
- a ako si svojich zákazníkov udržať.

Ak dokáže nájsť odpovede na tieto otázky, môžeme predpokladať, že v konkurenčnom prostredí dokáže prežiť, alebo dokonca svoj trhovú podiel a ziskovosť ďalej rozvíjať.

Keďže je praxou preukázateľné, že náklady na získanie nového zákazníka sú (aj rádovo) vyššie ako tie spojené s jeho udrzaním<sup>1</sup>, zameriame sa na poslednú „výzvu“, resp. poslednú fázu životného cyklu zákazníka, teda jeho udržanie. V ďalšom skúmaní nás však nebude zaujímať samotný jav, ale identifikácia týchto zákazníkov, ešte predtým, ako k uskutočneniu odchodu vôbec nastane.

Skĺbením dostupných zákazníckych dát a vhodných analytických metód môžeme tento problém s určitou pravdepodobnosťou vyriešiť.

Cieľom príspevku je rozvinúť diskusiu k riešeniu tohto problému aj pomocou metód analýzy prežitia. Autori priblížia možné riešenie cez využitie Cox regresie.

## 1 COX REGRESIA

Je regresná metóda patriaca do skupiny analýzy prežitia<sup>2</sup>. Analýza prežitia z pohľadu aplikácie na riešenie problematiky skúma, s akou pravdepodobnosťou nastane v čase  $t$  určitá sledovaná udalosť<sup>3</sup>. Predpokladáme jednoznačnosť tejto udalosti, súvisiace zlyhania budeme sledovať v osobitnej analýze. Analýza prežitia nám teda umožňuje zohľadniť parameter času, a teda určiť, kedy nastane sledovaná udalosť. Inak povedané, analýza prežitia nám umožňuje vysvetliť vzťah nezávislých premenných k času prežitia.

Nech  $T$  je náhodná premenná,  $t$  je ľubovoľne zvolený čas,  $d$  je binárna náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty z intervalu  $(0,1)$  v závislosti od nastania, či nenastania sledovanej udalosti,

$$\text{pričom } d = \begin{cases} 1 & \text{ak nastane} \\ 0 & \text{ak nenastane} \end{cases} \text{ sledovaná udalosť.} \quad (1)$$

Funkcia prežitia môže byť teda následne stanovená ako  $S(t) = P(T > t)$ , pričom predstavuje funkciu pravdepodobnosti, keď náhodná premenná  $T$  prekročí sledovaný čas  $t$  skúmanej udalosti.

Hazard funkciou  $h(t)$ , resp.  $\lambda(t)$ , označovanou aj ako podmienenou mierou zlyhania, je funkcia podmienenej pravdepodobnosti  $P$ , kde sledovaný čas zlyhania  $T$  leží v časovom intervale  $(t, t + \Delta t)$ , no až po nastaní času  $t$ :

$$h(t) = \lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \quad (2)$$

Kým funkcia prežitia  $S(t)$  nám vyjadruje pravdepodobnosť nastania udalosti a teda nadobúda hodnoty z intervalu  $(0, 1)$ , hazard funkcia je miera (podiel), ktorá vyjadruje podmienenú pravdepodobnosť zlyhania za určitý malý časový úsek, vyjadrený v meraných jednotkách (deň, mesiac, rok,..) a nadobúda hodnoty z intervalu  $(0, \infty)$ .

Funkcia  $h(t)$  je nenulová a zhora neohraničená.

---

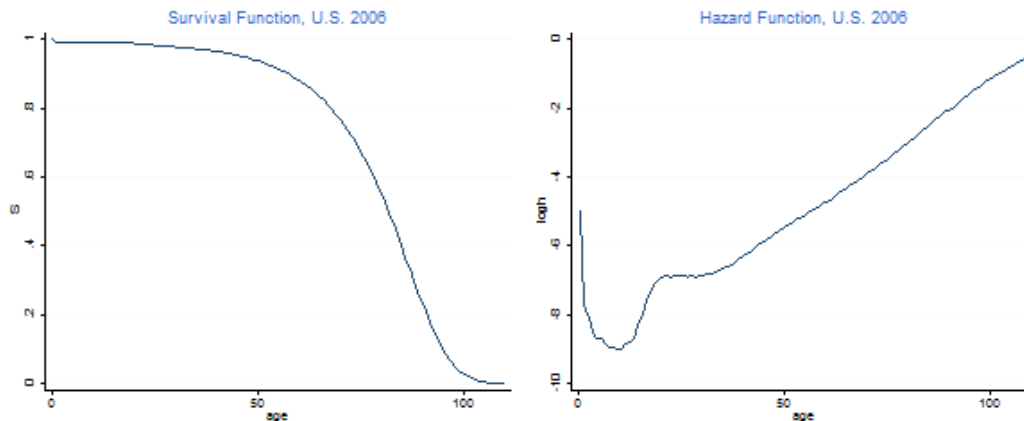
<sup>1</sup> Zdroj [2], [3]

<sup>2</sup> Zdroj [1]

<sup>3</sup> Udalosťou rozumieme jav súvisiaci s oblasťou skúmania, v prípade biológie/medicíny je to najmä nastanie smrti, v prípade rôznych technických aplikácií skúmame nastanie zlyhania určitého produktu, alebo jeho časti, v prípade sledovania zákazníckej bázy je sledovaným javom odchod zákazníka



**Obrázok č. 1:** Porovnanie grafu funkcie prežitia a hazard funkcie na populácii USA v závislosti od veku jednotlivcov v roku 2006



Zdroj: princeton.edu

### 1.1 Vzťah funkcie prežitia $S(t)$ a miery zlyhania $h(t)$

Medzi funkciou prežitia a hazard funkciou, zobrazených na obrázku č. 1 je jednoznačný vzťah, kde v ľavom grafe vidíme funkciu prežitia pre populáciu USA, horizontálna os zobrazuje vek populácie a vertikálna pravdepodobnosť prežitia. V grafe vpravo vidíme hazard funkciu, resp. funkciu zlyhania populácie USA, kde na horizontálnej osi je zobrazený vek populácie a na vertikálnej hodnoty hazard funkcie v závislosti od veku populácie.

Všeobecne na základe poznania funkcie prežitia, alebo funkcie zlyhania, môžeme odvodiť jednu z funkcií pomocou druhej z funkcií a naopak.

Vo všeobecnosti môžeme tento vzťah vyjadriť nasledovne:

$$S(t) = \exp \left[ - \int_0^t h(\tau) d\tau \right] \quad (3)$$

$$h(t) = - \left[ \frac{dS(t)/dt}{S(t)} \right] \quad (4)$$

V prípade, že hazard funkcia je konštantná, resp. rovná určitej konštante  $\lambda$ , platí aj nasledovný vzťah:

$$h(t) = \lambda \text{ vtedy a len vtedy } S(t) = e^{-\lambda t} \quad (5)$$

Pre použitie Cox regresie predpokladáme, že riziko zlyhania je v čase konštantné (alebo proporčné – Cox regresia sa často označuje aj ako „Cox proportional hazard regression“). V prípade, ak proporčnosť nie je zachovaná, môžeme dospieť k nesprávnym záverom.

Cox proporčný model môžeme chápať ako súčin hazard funkcie v čase  $t$ ,  $h_0(t)$  nazývanú aj ako „základnú hazard funkciu“ a exponenciálneho vyjadrenia sumy súčinu parametrov s vektorom vysvetľujúcich premenných vektora  $X$ ,  $\beta_k x_k$ , kde vektor  $X$  predstavuje súbor vysvetľujúcich sledovaných znakov (vek, pohlavie, etc.), a parameter  $k$  nadobúda hodnoty z intervalu  $(1, n)$  v závislosti od počtu vysvetľujúcich premenných:

$$h(t, X) = h_0(t) e^{\sum_{i=1}^k \beta_i X_i} \quad (6)$$

Táto konštrukcia má dôležitú vlastnosť súvisiacu s proporcionalitou, kedy základná hazard funkcia závisí len od času  $t$  a nie od vysvetľujúcich premenných  $X$  a naopak, exponenciálny výraz obsahuje premenné  $X$  a neobsahuje čas. Vektor  $X$  môžeme potom označiť ako „časovo nezávislý“. Ak je vektor  $X$  nulový, zo vzťahu dostaneme len základnú hazard funkciu.

Po delení oboch strán rovnice výrazom  $h_0(t)$  a logaritmovaní dostávame nasledujúci výraz:

$$\ln\left(\frac{h(t, X)}{h_0(t)}\right) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k \quad (7)$$

V prípade, ak vysvetľujúce premenné  $X$  závisia od času, nespĺňajú predpoklad proporcionality a v takomto prípade je na mieste použitie rozšíreného Cox modelu, ktorý sa s týmto problémom vysporiada.

## 2 POUŽITIE UVAŽOVANEJ METÓDY PRE ODHAD ODCHODU (ODLIVU) ZÁKAZNÍKOV

Postup pri použití uvažovanej metódy by mohol byť nasledovný<sup>4</sup>:

- vytvoriť segmenty zákazníkov na základe dostupných demografických a prevádzkových údajov, alebo zvoliť zjednodušený prístup a použiť celú zákaznícku bázu ako jeden segment, no v takom prípade bude vhodné vybrať dostatočne robustnú testovaciu a trénovaciu skupinu (tak, aby boli zachované zhodné pravdepodobnostné rozdelenia porovnateľných znakov/premenných medzi skupinami), v tejto úvahe by sme mohli ísť ešte ďalej a uvažovať o jednotlivých zákazníkoch,
- musíme uvažovať s tým, že s pribúdajúcim vekom zákazníkov sa nám postupne znižuje ich početnosť, takže v dlhodobom horizonte sa nám zvyšuje rozsah intervalu spoľahlivosti distribučnej funkcie prežitia,
- ďalej zvolíme jednotný dátum (resp. časové obdobie), voči ktorému porovnáme jednotlivé predpovede prežitia zákazníkov podľa času ich vzniku, resp. dĺžky ich životného cyklu, finálna predpoveď sa teda bude skladať zo súčtu „podmienенých“ funkcií prežitia,
- odhadneme teda jednotlivé funkcie prežitia skupiny/skupín, pričom zákazníkov, ktorí sú v spoločnosti dlho zlúčime do jednej skupiny (predpokladáme, že ako bolo zmienené vyššie, ich početnosť v čase klesá, môžeme skúsiť odhadnúť „bod zlomu“ a následne od tohto bodu uvažovať o rôznych zákazníkoch ako o jednej skupine),

<sup>4</sup> Zdroj [4]

- ak sa nám pre túto skupinu, resp. určitých zástupcov odhadnúť pravdepodobnosť prežitia s požadovanou spoľahlivosťou, môžeme použiť konštantu, ktorá bude vychádzať z hodnoty poslednej skupiny spoľahlivo odhadnutej, taktiež skupiny, ktoré vykazujú veľkú odchodovosť hneď v prvých dňoch svojho života môžu dospieť do situácie, resp. času, kedy do budúcnosti nebudeme vedieť odhadnúť ich pravdepodobnosť prežitia,
- následne pre vypočítanie predikcie vývoja bázy použijeme odhadnuté pravdepodobnosti prežitia jednotlivých skupín pre násobené počtom nových zákazníkov v jednotlivých skupinách.

## ZÁVER

Pridanou hodnotou využitia metód analýzy prežitia je možnosť vidieť hlbší detail problému odlivu zákazníkov, možnosť poukázať na určité faktory, ktoré môžu tento jav vysvetľovať. Analýza prežitia nám umožňuje opísať odliv z pohľadu individuálneho zákazníka (napr. vplyv socio-demografických a prevádzkových faktorov), ale tiež z pohľadu obdobia, kedy daní zákazníci vznikli (čo môže súvisieť s rôznymi akvizičnými prístupmi firiem). Zákazníci, ktorí vykazujú podobné správanie v súvislosti s ich odchodom budeme vedieť rozdeliť na tých, u ktorých sa prejavujú, resp. opakujú určité znaky správania, navyše, budeme môcť vysloviť predpoklad, že správanie skupiny zákazníkov, ktorí vznikli v určitom čase (nazvime ich kohortou) môže byť podobná, resp. ovplyvnená konkrétnym obdobím, ktoré môže vplývať na ich odchodovosť.

Určite zaujímavou témou bude porovnanie tohto prístupu v praxi s inými datamining-ovými metódami používanými na predikciu odlivu zákazníkov, ako je napr. široko využívané použitie Logistickej regresie a pod. To bude ďalším predmetom skúmania a diskusie autorov.

## POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] Kleinbaum D., Klein M.: Survival Analysis. Springer, NY, 2005.
- [2] Kotler P., Armstrong G.: Marketing. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1992.
- [3] Štarchoň P., Faltys J., Dzugasová J.: Priamy marketing. Direct Marketing Beta, Bratislava, 2004.
- [4] Berry M. J. A, Linoff S. G.: Customer Centric Forecasting Using Survival Analysis, SAS Institute, NC, 2009.

## Kontaktné údaje

Ivan Brezina, Ing., Ph.D.  
 Národohospodárska Fakulta (KET)  
 Ekonomická univerzita v Bratislave,  
 Dolnozemska cesta 1, 85235, Bratislava,  
 Tel.: +421267295826,  
 e-mail: ivan.brezina.nhf@euba.sk

Andrej Mišovič, Ing.,  
Fakulta hospodárskej informatiky (KŠ),  
Ekonomická univerzita v Bratislave,  
Dolnozemska cesta 1, 85235, Bratislava,  
Tel.: +421949020562  
e-mail: andrej.misovic@gmail.com

# EKONOMETRICKÝ ODHAD NIEKTORÝCH PARAMETROV CGE MODELU<sup>1</sup>

## THE ECONOMETRIC ESTIMATION OF SOME CGE MODEL PARAMETERS

*Veronika Mit'ková*

### Abstrakt

Článok sa zaoberá ekonometrickým odhadom parametrov produkčnej funkcie v modeli všeobecnej ekonometrickej rovnováhy. Model je skonštruovaný na dátach Slovenskej republiky so zameraním na verejný sektor. Poukazujeme na rozdiely v získaných hodnotách odhadov pomocou kalibrácie a ekonometrického odhadu. Článok tvorí východisko k ďalšiemu skúmaniu ekonometrického odhadu modelov všeobecnej ekonomickej rovnováhy.

**Kľúčové slová:** *CGE model, ekonometrický odhad parametrov, Slovenská republika*

### Abstract

The paper deals with the econometric estimation of the production function parameters in the computable general equilibrium model. The method used is based on the Slovak republic dataset with focus on the public sector. The differences between the calibration and econometric method results are shown and the sources of the differences are explained. The work is a base for the further work on the computable general equilibrium model with the econometric estimation of parameters.

**Keywords:** *CGE model, econometric estimation, Slovakia*

## 1 EKONOMETRICKÝ ODHAD VERSUS KALIBÁCIA

V tomto článku sa zaoberáme hodnotami parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy. Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy sa skladá z dvoch typov rovníc: Identity a rovnice opisujúce správanie sa subjektov. Identity vychádzajú z princípov národných účtov a zvyčajne sa s nimi nespájajú žiadne kontroverzie. Behaviorálne vzťahy v modeli nie sú pozorovateľné a sú dané parametrami modelu. Môžu byť buď kalibrované alebo odhadnuté ekonometrickými metódami. Niektorí autori dokonca uvádzajú tretiu možnosť – stanovenie ich hodnôt priamo užívateľom modelu (2).

Kalibrácia využíva empirické pozorovania, niektoré hodnoty sú dané arbitrárne a ostatné sú nastavené tak, aby replikovali benchmarkový rok. Tento prístup podrobili kritike okrem iných napríklad Jorgensen, Lau, Diewert and Lawrence and McKittrick (4).

Ekonometrický odhad je zvyčajne limitovaný nepozorovateľnými dátami, krátkymi časovými radmi a vyžadujú tiež jednoduchšie funkčné formy použité v modeli. Detailnejší prehľad ekonometrického odhadu a kalibrácie je možné nájsť v našej predchádzajúcej práci (6).

---

<sup>1</sup> Výskum bol podporený Ministerstvom školstva, vedy a športu Slovenskej republiky prostredníctvom grantu VEGA 1/0197/13: Ekonometrický odhad parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy s dezagregáciou verejného sektora.

## 2 DATABÁZA ÚDAJOV A MODELOVÁ ŠTRUKTÚRA

V tejto kapitole sa kvôli jednoduchosti následných odhadov venujeme jednoduchému modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy s medzispotrebou, pre ktorý konštruujeme databázu údajov.

### 2.1 Štruktúra modelu

Model bol inšpirovaný prácou Löfgrena (3) a pre začiatok nášho výskumu v CGE ekonometrii sme zvolili model s jednoduchou štruktúrou. Diskusie k nemu je možné nájsť v niektorých predchádzajúcich prácach, napr. Miťková (5). Model pozostáva z troch rovnovážnych podmienok a siedmich rovníc opisujúcich správanie. Pre účely tohto článku sa zaoberáme len produkčnou funkciou, ktorá nadobúda nasledovný tvar

$$QA_{\alpha} = ad_{\alpha} \cdot \prod_{f \in F} QF_{f\alpha}^{\alpha_{fa}} \quad \alpha \in A \quad (1)$$

kde:  $ad_{\alpha}$  parameter efektívnosti pre aktivitu  $a$  v produkčnej funkcii,  
 $\alpha_{fa}$  podiel pridanej hodnoty faktora  $f$  na aktivite  $a$ ,  
 $QA_{\alpha}$  úroveň aktivity  $a$ ,  
 $QF_{fa}$  dopyt aktivity  $a$  po výrobnom faktore  $f$ .

Označenie v modeli sme ponechali podľa notácií v pôvodnom IFPRI<sup>2</sup> modeli, a teda pre aktivity  $\alpha \in A = \{PS - A, R - A\}$ , pre faktory  $f \in F = \{lab, cap\}$ , kde  $PS-A$  znamená aktivity verejného sektora a  $R-A$  znamená aktivity ostatných sektorov v národnom hospodárstve,  $lab$  označuje výrobný faktor práca a  $cap$  označuje výrobný faktor kapitál.

### 2.2 Údajová základňa

Údajová základňa obsahuje štvrtročné dáta od roku 1995q1 po 2013q4. V tomto modeli boli využité nasledovné agregáty: P.1 Output, P.2 Medzispotreba, P.3 Výdavky na konečnú spotrebu, P.51 Tvorba hrubého fixného kapitálu, P.52 Zmena stavu zásob, D.1 Odmeny zamestnancov, D.2-D.3 Čisté dane z produktov a exportu, B.1g Hrubý domáci produkt, B.2g Hrubý prevádzkový prebytok, B.3g Hrubý zmiešané dôchodok, B.6g Hrubý disponibilný dôchodok a B.11 Saldo vývozu a dovozu výrobkov a služieb.

Na ekonometrický odhad parametrov modelu bolo využitých všetkých 76 štvrtročných pozorovaní a na kalibráciu priemerná hodnota každého agregátu, ktorá vstupuje do matice spoločenského účtovníctva (SAM – Social Accounting Matrix). SAM pre použitý model má štruktúru zobrazenú v Tabuľke 1, z ktorej ja zároveň zrejmy výpočet hodnoty hrubého domáceho produktu pomocou troch metód. Bolo skonštruovaných 76 matíc, aby bola zabezpečená rovnovážna podmienka pre každé štvrtročné obdobie.

|            | aktivity                             | komodity              | faktory                                          | domácnosti                                   |
|------------|--------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| aktivity   |                                      | P.1 – P.2 + (D.2-D.3) |                                                  |                                              |
| komodity   |                                      |                       |                                                  | Výdavková metóda<br>P.4 + P.51 + P.52 + B.8g |
| faktory    | Produkčná metóda<br>B.1g + (D.2-D.3) |                       |                                                  |                                              |
| domácnosti |                                      |                       | Príjmová metóda<br>D.1 + B.2g + B.3g + (D.2-D.3) |                                              |

Tabuľka 1 Štruktúra matice spoločenského účtovníctva

<sup>2</sup> International Food Policy Research Institute

V bunke riadka aktivít a stĺpca komodít je hodnota úrovne aktivity  $a$ :  $QA_a$ , ktorá je neskôr dezagregovaná na verejný sektor a sektor všetkých ostatných aktivít. Na priesečníku riadka faktorov a aktivít je zachytený dopyt aktivity  $a$  po faktore  $f$ :  $QF_{fa}$ , neskôr dezagregovaný na dopyt po práci vo verejnom sektore, dopyt po kapitáli vo verejnom sektore a podobne dopyt v agregovanom sektore ostatných sektorov národného hospodárstva. Bunka komodít a domácností uvádza spotrebu komodity  $c$  domácnosťou  $h$  (modelované sú dva typy - mestská a vidiecka domácnosť). V poslednej bunke domácností a faktorov je príjem domácnosti  $h$  z vlastníctva výrobného faktora  $f$ , znova dezagregovaný podľa typu domácnosti a výrobného faktora práca, resp. kapitál.

### 3 ODHAD PARAMETROV MODELU POMOCOU KALIBRÁCIE

V procedúre kalibrácie využívame priemerné hodnoty zo 76 štvrtročných pozorovaní agregátov spomenutých v Kapitole 2. V Tabuľke 2 je zobrazená dezagregovaná matica spoločenského účtovníctva. Hodnota priemerného hrubého domáceho produktu je 11 580 mil.€.

| priemery v<br>mil. € |          | A     |       | C     |       | F     |       | H       |          |
|----------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|----------|
|                      |          | PS    | R     | PS    | R     | lab   | cap   | mestská | vidiecka |
| A                    | PS       |       |       | 1 740 |       |       |       |         |          |
|                      | R        |       |       |       | 9 840 |       |       |         |          |
| C                    | PS       |       |       |       |       |       |       | 870     | 870      |
|                      | R        |       |       |       |       |       |       | 4 920   | 4 920    |
| F                    | lab      | 724   | 3 674 |       |       |       |       |         |          |
|                      | cap      | 1 016 | 6 166 |       |       |       |       |         |          |
| H                    | mestská  |       |       |       |       | 2 199 | 3 591 |         |          |
|                      | vidiecka |       |       |       |       | 2 199 | 3 591 |         |          |

**Tabuľka 2** Matica spoločenského účtovníctva obsahujúca priemerné hodnoty agregátov

Hodnoty všetkých parametrov boli kalibrované naraz, nakoľko procedúra kalibrácie tento postup vyžaduje, vid'. práca Jorgensona (1). Hodnoty kalibrovaných parametrov majú tú vlastnosť, že replikujú benchmarkový dataset.

$$ad_{PS} = 1,972$$

$$ad_R = 1,936$$

$$\alpha_{lab,PS} = 0,416$$

$$\alpha_{cap,PS} = 0,584$$

$$\alpha_{lab,O} = 0,373$$

$$\alpha_{cap,O} = 0,627$$

Produkčná funkcia teda nadobúda nasledovný tvar:

$$QA_{PS} = 1.972 \cdot QF_{lab,PS}^{0.416} \cdot QF_{cap,PS}^{0.584} \quad (2)$$

$$QA_R = 1.936 \cdot QF_{lab,R}^{0.373} \cdot QF_{cap,R}^{0.627} \quad (3)$$

## 4 EKONOMETRICKÝ ODHAD

Ekonometrickým odhadom parametrov produkčnej funkcie dostávame nasledovné hodnoty parametrov CGE modelu

$$ad_{PS} = 1,613$$

$$ad_R = 1,395$$

$$\alpha_{lab,PS} = 0$$

$$\alpha_{cap,PS} = 0,991$$

$$\alpha_{lab,O} = 0$$

$$\alpha_{cap,O} = 1,002$$

Takto odhadnutý ekonometrický model vysvetľuje 98,62% celkovej variability závislých premenných produkčnej funkcie, parametre efektívnosti sú o oboch funkciách štatisticky významné, podiel pridanej hodnoty pre výrobný faktor práca je pri oboch aktivitách nulový (štatisticky nevýznamná hodnota) a podiel pridanej hodnoty pre výrobný faktor kapitál je pri oboch aktivitách štatisticky vysoko významný.

Na základe ekonometrického odhadu dostávame nasledovné hodnoty odhadov produkčných funkcií pre sektor verejnej správy a agregovaný sektor všetkých ostatných sektorov:

$$QA_{PS} = 1.613 \cdot QF_{cap,PS}^{0.991} \quad (4)$$

$$QA_R = 1.359 \cdot QF_{cap,R}^{1.002} \quad (5)$$

## 5 ZÁVER

Hodnoty parametrov produkčných funkcií pre sektor verejnej správy a agregovaný sektor všetkých ostatných sektorov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy získané pomocou procedúry kalibrácie a ekonometrickým odhadom, sú značne odlišné. Túto skutočnosť môžeme vysvetliť nastavením hodnôt podielu mestskej a vidieckej domácnosti na využívaní oboch výrobných faktorov v procese kalibrácie, resp. voľbou iných hodnôt parametrov v tejto procedúre, ktoré sa netýkajú priamo produkčnej funkcie, ale nepriamo ju cez kalibráciu ovplyvňujú. V tomto bode výskumu môžeme tvrdiť, že parametre efektívnosti produkčných funkcií pre výrobné faktory práca a kapitál nadobúdajú pomocou oboch metód získania porovnateľné hodnoty a ich znamienka sú rovnaké.

V ďalšom výskume sa zameriame na hľadanie príčin nulovej hodnoty parametrov stojacich pri výrobnom faktore práca v produkčnej funkcii, ktoré sme získali ekonometrickým odhadom, ako aj na odhady ostatných behaviorálnych vzťahov prezentovaného modelu. Ďalším krokom bude rozšírenie modelu o sektor vlády a zvyšok sveta.

### Použitá literatúra

1. JORGENSON, D. W. (1984) "Econometric Methods for Applied General Equilibrium Modeling." In Scarf, H. E., Shoven, J. B. (eds.) *Applied General Equilibrium Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.



2. LEE, S., POLLITT, H., and UETA, K.: A Model- Based Econometric Assessment of Japanese Environmental Tax Reform, *The Scientific World Journal* (2012), 1-9.
3. LÖFGREN, H.: Exercises in General Equilibrium Modeling Using GAMS. *Microcomputers in Policy Research 4a*. International Food Policy Research Institute. 2003.
4. MCKITRICK, R.R.: The econometric critique of computable general equilibrium modeling: the role of functional forms. *Economic Modelling* **15** (1998), 543-573.
5. MIŤKOVÁ, V.: General equilibrium model of closed economy: case of Slovakia. Proceedings of the international workshop *Micro and Macro Models in Economics*. Bratislava, 2006, 102-110.
6. MIŤKOVÁ, V.: The Computable General Equilibrium Model Parameters Econometrics Estimation versus their Calibration. In: *Proceedings of the Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi X*, Bratislava, 2013.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Veronika Miťková, PhD.

Univerzita Komenského, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 820 05 Bratislava

Tel: (421 2) 20669863

email: [veronika.mitkova@fses.uniba.sk](mailto:veronika.mitkova@fses.uniba.sk)

# ANALYTICKÉ SYSTÉMY PRE PODPORU VÝBERU PORTFÓLIA

## ANALYTICAL SYSTEMS FOR PORTFOLIO SELECTION SUPPORT

*Vladimír Mlynarovič*

### **Abstrakt**

Príspevok prezentuje dva analytické systémy vo forme excelovských aplikácií pre podporu výberu portfólia. Prvý z nich analyzuje výkonnosť a riziko portfólia podľa tried jeho aktív a tento rozklad konfrontuje s výnosmi a rizikom zodpovedajúcich tried aktív benchamrku. Výsledkom je analýza aktívnych výnosov a aktívneho rizika portfólia a odporúčania pre manažment portfólia. Druhý analytický systém automatizuje aplikáciu fundamentálnej analýzy pre podporu výberu portfólia.

***KLúčové slová:** manažment portfólia ,dekompozícia výnosu, dekompozícia rizika, fundamentálna analýza*

### **Abstract**

The paper presents in the forms of excel applications two analytical systems for portfolio selection support. The first one analyzes the portfolio performance and risk according to its assets classes and the decomposition is compared with the performance and risk of benchmark assets classes. As a result we have the analysis of the active policy return and risk. The second one provides an automatic system for fundamental analysis approach to portfolio selection

***Keywords:** portfolio management, return decomposition, risk attribution, fundamental analysis*

## **1 ÚVOD**

Príspevok prezentuje dva analytické systémy vo forme excelovských aplikácií pre podporu výberu portfólia. Prvý z nich analyzuje výkonnosť a riziko portfólia podľa tried jeho aktív a tento rozklad konfrontuje s výnosmi a rizikom zodpovedajúcich tried aktív v benchamrku. Výsledkom je analýza aktívnych výnosov a aktívneho rizika portfólia a odporúčania pre manažment portfólia. Druhý analytický systém automatizuje aplikáciu fundamentálnej analýzy pre podporu výberu portfólia.

## **2 ANALYTICKÝ SYSTÉM PRE KONTRIBÚCIU RIZIKA A VÝNOSOV**

Existuje niekoľko prístupov, ktoré boli navrhnuté s cieľom vysvetliť alebo dekomponovať výnos, resp. dodatočný výnos portfólia. Analytický systém pre dekompozíciu výnosov a rizika portfólia podľa tried aktív a individuálnych aktív a ich komparáciu s analogickou štruktúrou benchmarku predstavuje excelovskú aplikáciu teoretických výsledkov prezentovaných v Mlynarovič (2014), Hsu et al. (2010) a Forgy (2002).

Excelovská aplikácia implementuje a automatizuje metodológiu dekompozície prostredníctvom VBA procedúr a makier a je využívaná pre analýzu rizika a výnosov niektorých slovenských penzijných fondov. Aplikácia má databázový charakter v tom zmysle, že spracúva denné účtovné údaje, ktoré zohľadňujú všetky finančné informácie týkajúce sa manažmentu a obchodovania aktív penzijných fondov a denné údaje o výnosoch aktív lebo tried aktív zahrnutých do skupín potenciálnych benchmarkov. Na základe týchto údajov sa vytvárajú databázy jednotlivých fondov s možnosťou ich aktualizácie v čase a využitia procedúr pre archiváciu, napríklad v situácii, keď mení analyzovaný fond.

Individuálne aktíva, ktoré sa nachádzajú v penzijnom fonde sú kategorizované podľa nasledujúcich 14 tried aktív: *Slovak Government Bonds, Sovereign Government Bonds, Banking Bonds, Corporate Bonds, Slovak Money Market, Sovereign Money Market, Municipal Bonds, Current Accounts, M\_B(HZL), Shares, Term Deposits, Mutual Funds, Forwards* a *Others*. Na takto štruktúrovanej databáze možno pre špecifikované obdobie možno z pohľadu vybraných aktív realizovať kontribučné analýzy pre:

- individuálne aktíva,
- portfólio vybraných tried aktív,
- portfólio vybraných individuálnych aktív.

Výkonnosť a riziko vybraného portfólia je konfrontované s benchmarkom, ktorý možno špecifikovať dvomi spôsobmi:

- predeterminovaný benchmark podľa vybranej štruktúry tried aktív
- benchmark individuálne poskladaný používateľom.

Tabuľka 1: Aritmetická a exponenciálne kontribúcia dodatočného výnosu

| Excess Return Contributions Effects |                    | Portfolio via Benchmark               |                |               |                |                 |
|-------------------------------------|--------------------|---------------------------------------|----------------|---------------|----------------|-----------------|
|                                     |                    | Equities                              | Bonds          | CA            | Forwards       | G_Portfolio     |
| Arithmetic<br>(Daily<br>Average)    | Allocation         | -0.001%                               | 0.000%         | 0.002%        | 0.000%         | 0.001%          |
|                                     | - static           | 0.002%                                | 0.000%         | 0.002%        | 0.000%         | 0.004%          |
|                                     | - dynamic          | -0.003%                               | 0.000%         | 0.000%        | 0.000%         | -0.003%         |
|                                     | Security Selection | -0.001%                               | 0.033%         | 0.001%        | 0.000%         | 0.034%          |
|                                     | <b>Together</b>    | <b>-0.001%</b>                        | <b>0.033%</b>  | <b>0.003%</b> | <b>0.000%</b>  | <b>0.035%</b>   |
|                                     | Average Excess Ret | -0.001%                               | 0.034%         | 0.002%        | 0.000%         | 0.035%          |
| Exponential<br>(Total)              | Allocation         | -0.186%                               | -0.068%        | 0.478%        | -0.004%        | 0.219%          |
|                                     | Security Selection | -0.129%                               | 8.548%         | 0.217%        | -0.006%        | 8.637%          |
|                                     | <b>Together</b>    | <b>-0.315%</b>                        | <b>8.474%</b>  | <b>0.696%</b> | <b>-0.010%</b> | <b>8.875%</b>   |
|                                     | Total Excess Ret   |                                       |                |               |                | <b>8.875%</b>   |
|                                     |                    | Portfolio via Benchmark (% Structure) |                |               |                |                 |
| Arithmetic<br>(Daily<br>Average)    | Allocation         | -2.129%                               | -0.748%        | 5.633%        | 0.000%         | 2.756%          |
|                                     | - static           | 5.241%                                | -0.723%        | 5.818%        | 0.000%         | 10.337%         |
|                                     | - dynamic          | -7.370%                               | -0.026%        | -0.185%       | 0.000%         | -7.581%         |
|                                     | Security Selection | -1.448%                               | 96.089%        | 2.603%        | 0.000%         | 97.244%         |
|                                     | <b>Together</b>    | <b>-3.577%</b>                        | <b>95.340%</b> | <b>8.236%</b> | <b>0.000%</b>  | <b>100.000%</b> |
|                                     | Average Excess Ret | -3.434%                               | 98.150%        | 5.284%        | 0.000%         | 100.000%        |
| Exponential<br>(Total)              | Allocation         | -2.095%                               | -0.768%        | 0.021%        | -0.048%        | 2.462%          |
|                                     | Security Selection | -1.455%                               | 96.319%        | 2.446%        | -0.062%        | 97.325%         |
|                                     | <b>Together</b>    | <b>-3.547%</b>                        | <b>95.485%</b> | <b>7.845%</b> | <b>-0.110%</b> | <b>100.000%</b> |
|                                     | Total Excess Ret   |                                       |                |               |                | <b>100.000%</b> |

Jadrom excelovskej aplikácie je analýza vývoja výnosov a zodpovedajúcich tokov hotovosti spojených s individuálnym aktívom v špecifikovanom časovom období a nasledujúca agregácia pre špecifikované portfólio podľa reálnych váh aktív v analyzovanom portfóliu. Analýza výnosov individuálneho aktíva je dekomponovaná do nasledujúcich efektov:

- efekt zmeny ceny aktíva,
- efekt kúpy alebo predaja (časti objemu) aktíva,
- efekt zmeny výmenného kurzu

a všetky tieto efekty sú zohľadňované v relatívnej úrovni a v úrovni zodpovedajúcich tokov hotovosti a taktiež ich vplyvu na čistú hodnotu aktíva v penzijnom fonde.

Aplikácia ponúka ako výsledok celé triedy štatistických charakteristík pre takú štruktúru aktív, ktorá bola špecifikovaná ako subjekt analýzy výkonnosti a rizika. Ako ilustráciu uvádzame v tabuľkách 1 a 2 výsledky takejto analýzy pre jeden z penzijných fondov za rok 2012 v jednej z možných úrovní agregácie, a to *Equities*, *Bonds*, *Current Accounts* a *Forwards* vo forme, ako ich priamo generuje excelovská aplikácia

Tabuľka 2: Kontribúcia výnosov a rizika

| Contributions        | Tracking Error |         |          |          |          |
|----------------------|----------------|---------|----------|----------|----------|
|                      | Equities       | Bonds   | CA       | Forwards | Total    |
| Return               | -0.320%        | 8.724%  | 0.474%   | 0.000%   | 8.878%   |
| Risk                 | 0.327%         | 2.878%  | 0.005%   | 0.000%   | 3.211%   |
| Return (% Structure) | -3.602%        | 98.261% | 5.341%   | 0.000%   | 100.000% |
| Risk (% Structure)   | 10.198%        | 89.652% | 0.150%   | 0.000%   | 100.000% |
| Contributions        | Pension Fund   |         |          |          |          |
|                      | Equities       | Bonds   | CA       | Forwards | Total    |
| Return               | 1.180%         | 9.860%  | 0.107%   | 0.000%   | 11.147%  |
| Risk                 | 1.826%         | 2.113%  | 0.057%   | 0.000%   | 3.996%   |
| Return (% Structure) | 10.587%        | 88.451% | 0.961%   | 0.000%   | 100.000% |
| Risk (% Structure)   | 45.687%        | 52.887% | 1.425%   | 0.000%   | 100.000% |
| Contributions        | Benchmark      |         |          |          |          |
|                      | Equities       | Bonds   | CA       | Forwards | Total    |
| Return               | 1.446%         | 0.999%  | -0.358%  | 0.000%   | 2.087%   |
| Risk                 | 2.156%         | 0.066%  | 0.002%   | 0.000%   | 2.224%   |
| Return (% Structure) | 69.282%        | 47.874% | -17.156% | 0.000%   | 100.000% |
| Risk (% Structure)   | 96.940%        | 2.958%  | 0.102%   | 0.000%   | 100.000% |

### 3 FUNDAMENTÁLNY PRÍSTUP K PODPORE VÝBERU PORTFÓLIA

Analytický systém pre aplikáciu fundamentálnej analýzy na podporu výberu portfólia využíva vývoj fundamentálnych charakteristík aktív v čase pre rozhodovanie o ich obchodovaní. Tieto spolu s pravidlami typu *stop loss* a *take profit* vytvárajú integrovaný systém pre manažment portfólia v čase. Kritéria pre rozhodovania o type obchodovania s aktívom (kúpa, predaj, resp. krátky predaj) sú odvodzované od nasledujúcich fundamentálnych charakteristík: *eps*, *ebitda*, *book value*, *number of shares*, *net income*, *cash flow*, *cash flow per share*, *current asset*, *current liability*, *total debt*, *working capital*, *roe*, *dividend yield*, *productivity* a *profit*

*margin*. O zaradení jednotlivých charakteristík, resp. ich požadovaných úrovniach, rozhoduje portfólio manažér.

Excelovská aplikácia implementuje a automatizuje aplikáciu fundamentálnej analýzy pre podporu výberu portfólia VBA procedúr a makier. Jej základnou charakteristikou je jej databázový charakter, pričom aplikácia automaticky identifikuje časové obdobie pre disponibilné údaje a poskytuje používateľov na tomto období možnosť špecifikovať časové obdobie pre realizáciu analýzy.

Základom aplikácie sú štyri makrá. Prvé z nich, *synchronize*, zosynchronizuje denné údaje o cenách aktív so štvrťročnými, resp. mesačnými časovými radmi údajov o fundamentálnych charakteristikách. Špecifikom je, že sa tu zohľadňuje časová informácia o tom, kedy bol zodpovedajúci údaj zverejnený a nie len obdobie, pre ktorý platí. Jadrom aplikácie je makro *signals*, ktoré pre špecifikované časové obdobie a vybrané fundamentálne charakteristiky dynamicky opisuje štruktúru portfólia v čase, teda generuje signály pre kúpu, predaj, resp. krátky predaj aktíva. Portfólio je pritom generované tak, že sa vybraným aktívam priradujú rovnaké váhy. Zároveň makro generuje celé triedy charakteristík týkajúcich sa vývoja výnosov a rizika aktív a ich portfólia v špecifikovanom období ako aj údaje o celkovom výnose a riziku portfólia za špecifikované obdobie. Makro *optimize* hľadá takú kombináciu, resp. taký výber charakteristík fundamentálnej analýzy, ktoré generujú v špecifikovanom období portfólio s maximálnym výnosom. Posledné makro, *asset selection*, umožňuje vylúčiť z analýzy aktíva, ktoré sú pre portfólio manažéra z nejakého dôvodu nezaujímavé.

#### **Použitá literatúra**

1. BRINSON, G.P., L.R. HOOD, G.I. BEEBOWER, 1986. Determinants of portfolio Performance. *Financial Analysis Journal*. (July-August).
2. FORGY, E.A., 2002, Geometric Issue and Sector Selection for Performance Attribution.  
<http://ssrn.com/abstract=1420229> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1420229>
3. HSU, J.C., V. KOLESNIK, B.W. M., 2010: Performance Attribution: Measuring Dynamic Allocation Skill. *Financial Analysis Journal*. Volume 66, Number 6
4. HORNIAČEK, M., 1996 The approximation of a strong perfect equilibrium in a discounted supergame. *Journal of Mathematical Economics*, roč. 25, č. 1, s. 85-107. ISSN 0304-4068.
5. HORNIAČEK, M., 2004: Folk theorem for bilateral bargaining with vector endowments. *Bulletin of Economic Research*, 2004, roč. 56, č. 3, s. 283-297. ISSN
6. MLYNAROVIC, V., 2014: The Analytical system for portfolio performance and risk distribution. *Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XVII*, Bratislava, Ekonóm, s. 182 - 187

#### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.  
Univerzita Komenského v Bratislave, FSEV  
Mlynské luhy 4, Bratislava  
email: vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

# ROVNOVÁŽNE STRATÉGIE ÚČASTNÍKOV DODÁVATEĽSKÉHO REŤAZCA<sup>1</sup>

## THE EQUILIBRIUM STRATEGY OF THE ELEMENTS IN THE SUPPLY CHAIN

*Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková*

### **Abstrakt**

Príspevok prezentuje analýzu dodávateľského reťazca v rôznych trhových štruktúrach, v rámci ktorých sa realizuje vyjednávanie cenovej stratégie pre navzájom substituovateľný výrobok medzi jednotlivými článkami dodávateľského reťazca. Dodávateľský reťazec pritom zjednodušene predstavujú dodávatelia a odberatelia, medzi ktorými pôsobí medzičlánok, ktorý reprezentujú subjekty sprostredkujúce dodávku uvažovaného výrobku od výrobcov k spotrebiteľom. Cieľom medzičlánku je pritom udržanie trhového podielu v segmente predaja uvažovaného výrobku konečným spotrebiteľom. Analýza vychádza z rovnováhy lineárnych ponukových a dopytových funkcií na oboch stupňoch dodávateľského reťazca, teda aj medzi dodávateľmi a medzičlánkom, ako aj medzi medzičlánkom a odberateľmi. Výsledok analýzy predstavujú rovnovážne stratégie všetkých uvažovaných subjektov dvojstupňového dodávateľského reťazca. Je zrejmé, že stratégia úzko súvisí s trhovou štruktúrou, v ktorej je predaj a nákup výrobku realizovaný. Trhovú štruktúru pritom možno úspešne charakterizovať pomocou nástrojov na meranie koncentrácie, predovšetkým pomocou Herfindahlovho-Hirschmanovho indexu.

***Kľúčové slová:** dodávateľský reťazec, rovnovážna stratégia*

### **Abstract**

The paper presents an analysis of the supply chain in different market structures, where the pricing strategies for substitutable product are implemented between individual subjects of the supply chain. The supply chain is simply represented by suppliers and customers, among which acts an intermediate element representing product moderators of supply line from producers to consumers. The aim of the intermediate element is maintaining market share in the product segment sales to final consumers. The analysis is based on the balance of linear supply and demand functions at both levels of the supply chain, thus between suppliers and intermediate element, as well as between the intermediate element and customers. The analysis enables to represent the equilibrium strategies of all subjects considered the two-stage supply chain. It is clear that the strategy is closely related to the market structure in which the sale and purchase of the product is realized. The market structure can be successfully characterized using instruments to measure the concentration, in particular by the Herfindahl-Hirschman Index.

***Keywords:** supply chain, strategy equilibrium*

## **ÚVOD**

Klasické prístupy k analýze efektívnosti jednotlivých článkov dodávateľského reťazca sa zameriavajú na analýzu diverzifikácie celkového zisku dodávateľského reťazca medzi jeho

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0104/12 „Modeling supply chain pricing policy in a competitive environment“.

jednotlivé články. Vychádza sa pritom z predpokladu, relevantného vplyvu aspoň jedného z článkov na dopyt po tovare (Fiala, 2002). Efektívnym sa však javí aj využitie mikroekonomickej analýzy (Fendek, Fendeková, 2008), (Pekár, Brezina, 2012), (Pekár, Brezina, Čičková, 2013) na analýzu správania sa jednotlivých článkov dodávateľského reťazca pri stanovení svojej cenovej stratégie. Cenová stratégia každého článku dodávateľského reťazca je pritom závislá od trhovej štruktúry a na postavení článku na relevantnom trhu. Na charakteristiku trhovej štruktúry možno použiť aj nástroje na meranie koncentrácie relevantného trhu.

## TRH A TRHOVÉ ŠTRUKTÚRY

Pod relevantným trhom možno rozumieť taký trh výrobkov, ktorý pozostáva zo všetkých výrobkov a/alebo služieb, ktoré sú považované za vzájomne zameniteľné alebo nahraditeľné z hľadiska spotrebiteľa, a to na základe ich vlastností, cien a zamýšľaného účelu použitia, resp. priestorový a časový súbeh ponuky a dopytu takých tovarov, ktoré sú na uspokojenie určitých potrieb užívateľov zhodné alebo vzájomne zastupiteľné (relevantný geografický trh pritom zahŕňa oblasť, v ktorej sú dotknuté subjekty zapojené do vzťahov dopytu a ponuky výrobkov alebo služieb, v ktorej sú súťažné podmienky dostatočne homogénne a ktorá sa od ostatných susedných oblastí výrazne odlišuje práve preto, že konkurenčné podmienky v nej sú zjavne odlišné od podmienok v týchto oblastiach).

Štruktúra odvetvia zásadným spôsobom ovplyvňuje správanie celého odvetvia predovšetkým pri určovaní cenovej stratégie. Konkurenčná štruktúra odvetvia sa môže meniť v čase a na tieto zmeny musí svojou cenovou stratégiou reagovať každý podnik pôsobiaci v tomto odvetví. V rámci trhovej štruktúry odvetvia možno charakterizovať rôzne formy od dokonalej konkurencie až po monopol. Medzi dokonalou konkurenciou a monopolom sa nachádzajú trhové štruktúry s rôznym stupňom nedokonalaj konkurencie (Obr. 1).

| ponuka/dopyt       | Veľa malých          | Niekoľko stredných   | Jeden veľký         |
|--------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| Veľa malých        | Dokonalá konkurencia | Oligopson            | Monopson            |
| Niekoľko stredných | Oligopol             | Bilaterálny oligopol | Obmedzený monopson  |
| Jeden veľký        | Monopol              | Obmedzený monopol    | Bilaterálny monopol |

Obr. 1

Konkurenčná štruktúra odvetvia môže nadobúdať rôzny charakter v závislosti od počtu a veľkosti subjektov pôsobiacich na príslušnom relevantnom trhu. Jedným z možných foriem konkurenčnej štruktúry odvetvia je koncentrované odvetvie.

## MERANIE KONCENTRÁCIE ODVETVIA

V literatúre je publikovaných množstvo metód, ktoré sa dajú úspešne využiť pri vyhodnocovaní stupňa a dôsledkov koncentrácie. Vo svojej podstate všetky vychádzajú z trhového podielu. Trhový podiel predstavuje podiel subjektu na danom relevantnom trhu. Ak  $n$  predstavuje počet subjektov na určitom relevantnom trhu a  $q_i$  indikuje objem  $i$ -tého subjektu ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), potom trhový podiel  $i$ -tého subjektu možno vypočítať ako

$$s_i = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Medzi najpoužívanejšie indexy na meranie koncentrácie v odvetví patrí Herfindahlov-Hirschmanov index koncentrácie (ďalej *HHI*), ktorý je od roku 1982 v USA<sup>2</sup> súčasťou smerníc o horizontálnych fúziách. *HHI* predstavuje konvexnú funkciu trhových podielov všetkých subjektov na relevantnom trhu. *HHI* možno definovať ako sumu štvorcov trhových podielov  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) všetkých subjektov:

$$HHI = \sum_{i=1}^n (s_i)^2 \quad (2)$$

Ak uvažujeme s prípadom, keď na relevantnom trhu pôsobí monopol (monopson) – subjekt, ktorý ovláda celú ponuku (dopyt) odvetvia ( $s_1 = 1$ ), tak hodnota indexu  $HHI = (1)^2 = 1$ .

Federálna obchodná komisia v USA od 14. júna 1982 používa Herfindahlov–Hirschmanov index ako základnú metódu na určenie úrovne koncentrácie:

- pre nekoncentrované odvetvie hodnota *HHI* menšia ako 0,1,
- pre stredne koncentrované odvetvie hodnota *HHI* v intervale  $\langle 0,1; 0,18 \rangle$ ,
- pre koncentrované odvetvie hodnota *HHI* vyššia ako 0,18.

Od roku 2010 používa Federálna obchodná komisia nové hodnoty *HHI* na meranie koncentrácie odvetvia<sup>3</sup>:

- pre nekoncentrované odvetvie hodnota *HHI* menšia ako 0,15,
- pre stredne koncentrované odvetvie hodnota *HHI* v intervale  $\langle 0,15; 0,25 \rangle$ ,
- pre koncentrované odvetvie hodnota *HHI* vyššia ako 0,25.

Na základe stupňa koncentrácie možno analyzovať dodávateľský reťazec, pričom v ďalšej časti rozoberieme rôzne prípady uvedenej situácie. Hlavným zameraním merania koncentrácie je analýza relevantného trhu, pričom slúži ako nástroj na rozhodovanie protimonopolných inštitúcií. V našich úvahách sú použité hodnoty stupňa koncentrácie na stanovenie trhovej štruktúry, pričom možno empiricky overiť hranice, v ktorých môže byť relevantný trh charakterizovaný podľa rozdelenia uvedeného v prvej časti. V prípade analýzy dodávateľského reťazca sú uvedené hodnoty stupňa koncentrácie použiteľné pre ďalšie analýzy, pričom v prvom rade budeme predpokladať jednostupňový dodávateľský reťazec medzi výrobcou a spotrebiteľom a následne rozoberieme dvojstupňový dodávateľský reťazec, pre ktorý budeme predpokladať existenciu medzičlánku (sprostredkovateľa). V poslednej časti predpokladáme, že na všetkých stupňoch existuje viac relevantných subjektov.

## JEDNOSTUPŇOVÝ DODÁVATEĽSKÝ REŤAZEC

Jednu z uvedených situácií na relevantnom trhu reprezentuje skutočnosť, že na relevantnom trhu s jedným homogénnym produktom pôsobí len jeden dodávateľ – výrobca (*P*) a jeden agregovaný spotrebiteľ (*C*), medzi ktorými existuje priamy dodávateľský vzťah. Uvažujeme teda taký dodávateľský reťazec, ktorý má len jeden stupeň medzi výrobcou a dodávateľom a neobsahuje žiadne medzičlánky.

Dodávateľ – výrobca (*P*) produkujúci jeden druh produktu je reprezentovaný lineárnou ponukovou funkciou:

$$s_p(p) = c_p + d_p p,$$

$c_p$  – minimálna úroveň ponuky výrobcu (*P*),

$d_p$  – koeficient nárastu ponuky výrobcu (*P*) pri jednotkovej zmene ceny produktu,

<sup>2</sup> Dostupné na: [http://www.usdoj.gov/atr/public/guidelines/horiz\\_book/15.html](http://www.usdoj.gov/atr/public/guidelines/horiz_book/15.html)

<sup>3</sup> Dostupné na: <http://www.justice.gov/atr/public/guidelines/hmg-2010.html>



$p$  – jednotková cena produktu.

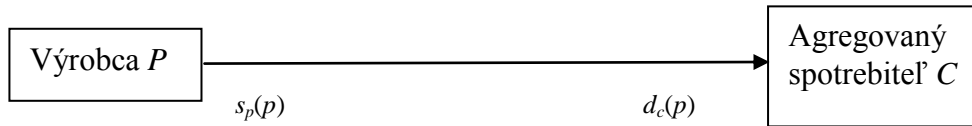
Agregovaného spotrebiteľa ( $C$ ) reprezentuje agregovaná lineárna dopytová funkcia:

$$d_c(p) = a_c - b_c p,$$

$a_c$  – úroveň saturovaného dopytu spotrebiteľa ( $C$ ),

$b_c$  – koeficient poklesu dopytu spotrebiteľa ( $C$ ) pri jednotkovej zmene ceny produktu.

Obr. 2 reprezentuje zodpovedajúci grafický model: jeden výrobca ( $P$ ) a jeden spotrebiteľ ( $C$ ):



Obr. 2

Na báze z mikroekonomickej analýzy možno na základe uvedených predpokladov určiť rovnovážnu cenovú stratégiu na relevantnom trhu pri cene určenej na základe rovnováhy ponukovej funkcie  $s_p(p)$  a dopytovej funkcie  $d_c(p)$ :

$$c_p + d_p p = a_c - b_c p$$

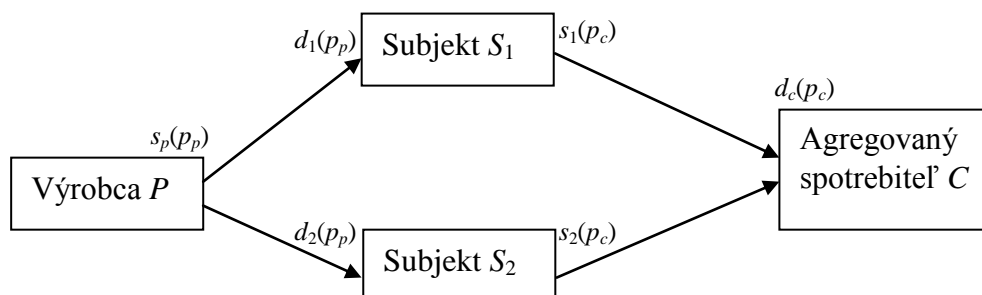
$$\frac{-c_p + a_c}{d_p + b_c} = p \tag{3}$$

Rovnovážna cena ( $p$ ) rastie pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu ( $a_c$ ) a poklese parametrov minimálnej úrovne ponuky dodávateľa ( $c_p$ ), koeficientu nárastu ponuky ( $d_p$ ) a úrovne koeficientu poklesu dopytu spotrebiteľa ( $b_c$ ). Pri opačných zmenách hodnôt uvedených koeficientov nastane pokles rovnovážnej ceny.

## DVOJSTUPŇOVÝ DODÁVATEĽSKÝ REŤAZEC

Uvažujeme ďalej, že v dodávateľskom reťazci existuje aj medzičlánok, pre ktorý možno zjednodušene predpokladať, že začiatok dodávateľského reťazca reprezentuje výrobca ( $P$ ), koniec reťazca agregovaný spotrebiteľ ( $C$ ) s agregovaným dopytom po produkte, prechod ktorého medzi nimi sprostredkúva medzičlánok v dodávateľskom reťazci, ktorý tvoria napr. dva subjekty (medzisklady) ( $S_1$ ) a ( $S_2$ ). Ďalej budeme uvažovať s cieľom získať, resp. udržať trhovú podiel v segmente predaja produktu prechádzajúceho dodávateľským reťazcom.

Realizovaná analýza uvažuje na jednotlivých stupňoch dodávateľského reťazca s ponukovými (na prvom stupni medzi výrobcom a medziskladmi), resp. dopytovými funkciami (na druhom stupni medzi medziskladmi a agregovaným spotrebiteľom). Cieľom je cenová rovnováha na jednotlivých stupňoch dodávateľského reťazca. Vyhodnotením rovnovážnych cenových stratégií možno analyzovať prispôbenie stratégií jednotlivých subjektov dodávateľského reťazca. Uvažovaný prípad reprezentuje grafický model na Obr. 3 s lineárnymi ponukovými a dopytovými funkciami.



Obr. 3

Ponuku výrobcu ( $P$ ) v závislosti od predajnej ceny pri zavedenom označení reprezentuje lineárna ponuková funkcia:

$$s_p(p_p) = c_p + d_p p_p$$

$p_p$  – jednotková cena produktu na prvom stupni dodávateľského reťazca.

Ak na druhom stupni dodávateľského reťazca pôsobia subjekty  $S_1$  a  $S_2$  (zodpovedajúca trhová štruktúra duopol), lineárne dopytové funkcie po uvažovanom produkte v závislosti od jeho ceny na prvom stupni sú:

- pre prvý subjekt ( $S_1$ ):  $d_1(p_p) = a_1 - b_1 p_p$

$a_1$  – úroveň saturovaného dopytu subjektu  $S_1$ ,

$b_1$  – koeficient poklesu dopytu prvého subjektu  $S_1$  pri jednotkovej zmene ceny produktu.

- pre druhý subjekt ( $S_2$ ):  $d_2(p_p) = a_2 - b_2 p_p$

$a_2$  – úroveň saturovaného dopytu druhého subjektu  $S_2$ ,

$b_2$  – koeficient poklesu dopytu druhého subjektu  $S_2$  pri jednotkovej zmene ceny produktu.

Na druhom stupni dodávateľského reťazca medzičlánky (subjekty  $S_1$  a  $S_2$ ) realizujú dodávateľský vzťah s ponukou pre agregovaného spotrebiteľa reprezentovaný lineárnymi ponukovými funkciami:

- pre prvý subjekt ( $S_1$ ):  $s_1(p_c) = c_1 + d_1 p_c$

$c_1$  – minimálna úroveň ponuky prvého subjektu  $S_1$ ,

$d_1$  – koeficient nárastu ponuky prvého subjektu  $S_1$  pri jednotkovej zmene ceny produktu,

$p_c$  – jednotková cena produktu na druhom stupni dodávateľského reťazca.

- pre druhý subjekt ( $S_2$ ):  $s_2(p_c) = c_2 + d_2 p_c$

$c_2$  – minimálna úroveň ponuky druhého subjektu  $S_2$ ,

$d_2$  – koeficient nárastu ponuky druhého subjektu  $S_2$  pri jednotkovej zmene ceny produktu.

Na druhom stupni dodávateľského reťazca je produkt dodávaný agregovanému spotrebiteľovi s agregovaným dopytom reprezentovaným agregovanou lineárnou dopytovou funkciou:

$$d_c(p_c) = a_c - b_c p_c$$

Cenovú rovnováhu na jednotlivých stupňoch dodávateľského reťazca možno potom stanoviť:

- rovnovážnu cenovú stratégiu medzi výrobcou ( $P$ ) a medzičlánkami  $S_1$  a  $S_2$  za predpokladu rovnakej nákupnej ceny  $p_c$  pre oba medzičlánky možno vypočítať:

$$(a_1 - b_1 p_p) + (a_2 - b_2 p_p) = c_p + d_p p_p$$

$$\frac{a_1 + a_2 - c_p}{b_1 + b_2 + d_p} = p_p \tag{4}$$

Rovnovážna cena  $p_p$  pre prvý stupeň dodávateľského reťazca rastie pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu oboch medzičlánkov ( $a_1$ ,  $a_2$ ) a poklese parametrov minimálnej úrovne ponuky dodávateľa  $c_p$ , koeficientu nárastu ponuky  $d_p$  a úrovne koeficientu poklesu dopytu oboch medzičlánkov ( $b_1$ ,  $b_2$ ). Pri opačných zmenách hodnôt koeficientov nastáva pokles rovnovážnej ceny pre prvý stupeň dodávateľského reťazca.

- rovnovážnu cenovú stratégiu medzi medzičlánkami  $S_1$  a  $S_2$  a konečným spotrebiteľom ( $C$ ) za predpokladu rovnakej nákupnej ceny  $p_c$  pre oba medzičlánky možno vypočítať:

$$(c_1 + d_1 p_c) + (c_2 + d_2 p_c) = a_c - b_c p_c$$

$$\frac{-c_1 - c_2 + a_c}{d_1 + d_2 + b_c} = p_c \tag{5}$$

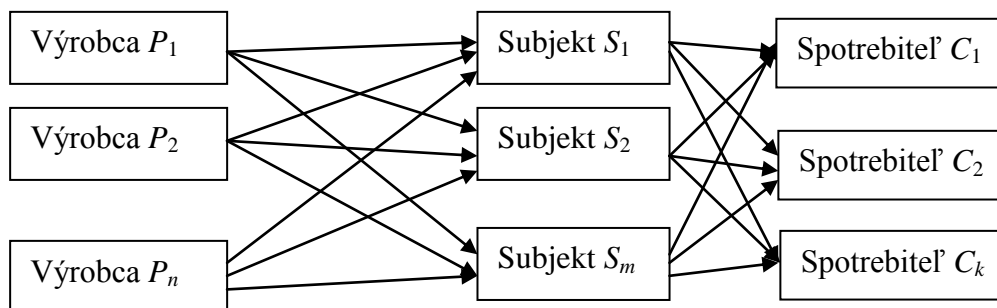
Rovnovážna cena  $p_c$  pre druhý stupeň dodávateľského reťazca rastie pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu agregovaného spotrebiteľa  $a_c$  a poklese parametrov minimálnej úrovne ponuky oboch medzičlánkov ( $c_1$  a  $c_2$ ), koeficientu nárastu ponuky oboch

subjektov ( $d_1, d_2$ ) a úrovně koeficientu poklesu dopytu agregovaného spotřebitele  $b_c$ . Při opačných zmenách hodnôt koeficientov nastáva pokles rovnovážnej ceny na druhom stupni dodávateľského reťazca.

## DVOJSTUPŇOVÝ DODÁVATEĽSKÝ REŤAZEC S VIACERÝMI SUBJEKTAMI

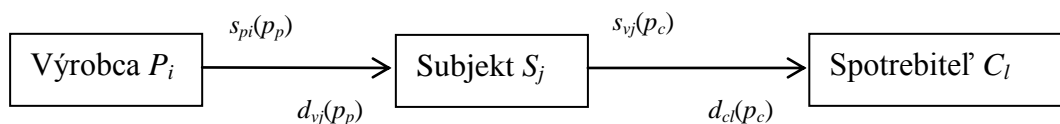
Predpokladajme, že v uvažovanom dvojstupňovom dodávateľskom reťazci s viacerými výrobcami s ponukou jedného produktu a na konci s viacerými spotrebiteľmi s dopytom po uvažovanom produkte vystupuje medzičlánok predstavujúci  $m$  subjektov dodávajúcich uvažovaný produkt od  $n$  výrobcov ku  $k$  spotrebiteľom (Obr. 4).

Vzťahy medzi prvkami dodávateľského reťazca reprezentujú lineárne ponukové a dopytové funkcie. Cieľom analýzy je získanie, resp. udržanie trhového podielu v segmente predaja produktu prechádzajúcim prvkom dodávateľského reťazca (na rozdiel od klasických prístupov maximalizujúcich zisk jednotlivých subjektov).



Obr. 4

Z cieľa analýzy je zrejmy aj spôsob jej realizácie na báze ponukových, resp. dopytových funkcií na jednotlivých úrovniach dodávateľského reťazca. Určuje sa pritom rovnovážny stav v jednotlivých článkoch dodávateľského reťazca, teda medzi výrobcami ( $P_1, P_2, \dots, P_n$ ), sprostredkovateľmi ( $S_1, S_2, \dots, S_m$ ) a medzi sprostredkovateľmi a odberateľmi ( $C_1, C_2, \dots, C_k$ ). Vyhodnotenie vypočítaných rovnovážnych stratégií vedie k analýze, ktorý subjekt dvojstupňového dodávateľského reťazca prispôbi svoju stratégiu na udržanie podielu v rámci dodávateľského reťazca a spôsob, akým to má dosiahnuť. Vzťahy medzi  $i$ -tým dodávateľom,  $j$ -tým medzičlánkom a  $l$ -tým spotrebiteľom je na Obr. 5.



Obr. 5

Ponuku  $i$ -tého výrobcu v závislosti od predajnej ceny na prvom stupni  $p_p$  reprezentuje lineárna ponuková funkcia

$$s_{pi}(p_p) = c_{pi} + d_{pi}p_p \quad (6)$$

$c_{pi}$  – minimálna úroveň ponuky  $i$ -tého výrobcu,

$d_{pi}$  – koeficient nárastu ponuky  $i$ -tého výrobcu pri jednotkovej zmene ceny produktu,

$p_p$  – cena jednotky produktu na prvom stupni dodávateľského reťazca.

Funkciu agregovanej ponuky výrobcov reprezentuje:

$$s_p(p_p) = \sum_{i=1}^n s_{pi}(p_p) = \sum_{i=1}^n (c_{pi} + d_{pi}p_p) = \sum_{i=1}^n c_{pi} + p_p \sum_{i=1}^n d_{pi} \quad (7)$$

Pre  $j$ -ty medzičlánok  $m$  sprostredkovateľských subjektov predstavujú dopytové funkcie po danom výrobku v závislosti od jeho ceny na prvom stupni  $p_p$ :

$$d_{vj}(p_p) = a_{vj} - b_{vj}p_p \quad (8)$$

$a_{vj}$  – úroveň saturovaného dopytu  $j$ -teho subjektu,

$b_{vj}$  – koeficient poklesu dopytu  $j$ -teho subjektu pri jednotkovej zmene ceny produktu.

Funkciu agregovaného dopytu sprostredkovateľov reprezentuje:

$$d_v(p_p) = \sum_{j=1}^m d_{vj}(p_p) = \sum_{j=1}^m (a_{vj} - b_{vj}p_p) = \sum_{j=1}^m a_{vj} - p_p \sum_{j=1}^m b_{vj} \quad (9)$$

Pretože  $m$  sprostredkovateľských subjektov na druhom stupni dodávateľského reťazca v závislosti od ceny výrobku  $p_c$  realizuje vzťah s poslednou spotrebiteľskou úrovňou reprezentovanou ponukovými funkciami pre každého konečného, pre  $j$ -ty subjekt platí:

$$s_{vj}(p_c) = c_{vj} + d_{vj}p_c \quad (10)$$

$c_{vj}$  – úroveň minimálnej ponuky  $j$ -teho subjektu,

$d_{vj}$  – koeficient nárastu ponuky  $j$ -teho subjektu pri jednotkovej zmene ceny výrobku.

Funkciu agregovanej ponuky sprostredkovateľov reprezentuje:

$$s_v(p_c) = \sum_{j=1}^m s_{vj}(p_c) = \sum_{j=1}^m (c_{vj} + d_{vj}p_c) = \sum_{j=1}^m c_{vj} + p_c \sum_{j=1}^m d_{vj} \quad (11)$$

Lineárna dopytová funkcia pre  $l$ -tého spotrebiteľa na druhom stupni dodávateľského reťazca:

$$d_{cl}(p_c) = a_{cl} - b_{cl}p_c \quad (12)$$

$a_{cl}$  – úroveň dopytu  $l$ -tého spotrebiteľa,

$b_{cl}$  – koeficient poklesu dopytu  $l$ -tého spotrebiteľa pri jednotkovej zmene ceny produktu.

Funkciu agregovaného dopytu spotrebiteľov na druhom stupni reprezentuje:

$$d_c(p_c) = \sum_{l=1}^k d_{cl}(p_c) = \sum_{l=1}^k (a_{cl} - b_{cl}p_c) = \sum_{l=1}^k a_{cl} - p_c \sum_{l=1}^k b_{cl} \quad (13)$$

## ROVNOVÁHU NA JEDNOTLIVÝCH ÚROVNIACH DODÁVATEĽSKÉHO REŤAZCA

Na základe predchádzajúcich úvah možno vo všeobecnosti určiť rovnováhu na jednotlivých úrovniach dodávateľského reťazca.

### 1. úroveň

Rovnovážna stratégia medzi výrobcami a sprostredkovateľskými medzičlánkami za predpokladu rovnakej nákupnej ceny pre všetky sprostredkovateľské medzičlánky:

$$s_p(p_p) = d_v(p_p)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{pi} + p_p \sum_{i=1}^n d_{pi} = \sum_{j=1}^m a_{vj} - p_p \sum_{j=1}^m b_{vj} \quad (14)$$

$$p_p = \frac{-\sum_{i=1}^n c_{pi} + \sum_{j=1}^m a_{vj}}{\sum_{i=1}^n d_{pi} + \sum_{j=1}^m b_{vj}}$$

Na prvom stupni dvojstupňového dodávateľského reťazca pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu  $m$  sprostredkovateľských medzičlánkov  $\sum_{j=1}^m a_{vj}$  a poklese parametrov minimálnej úrovne ponuky  $n$  výrobcov  $\sum_{i=1}^n c_{pi}$  **rovnovážna cena  $p_p$  rastie**. Zvýšenie koeficientu nárastu ponuky  $n$  výrobcov  $\sum_{i=1}^n d_{pi}$  a zvýšenie koeficientu poklesu dopytu  $m$  sprostredkovateľských medzičlánkov  $\sum_{j=1}^m b_{vj}$  spôsobí **pokles rovnovážnej ceny na prvom stupni dodávateľského reťazca**. Pokles rovnovážnej ceny pre prvý stupeň dodávateľského reťazca nastane pri opačných zmenách hodnôt uvedených koeficientov.

Ak rovnovážna cena na prvom stupni dodávateľského reťazca je  $p_p^*$ , potom je ponuka  $i$ -tého výrobcu pri rovnovážnej cene:

$$s_{pi}(p_p^*) = c_{pi} + d_{pi}p_p^* \quad (15)$$

Pri rovnovážnej cene  $p_p^*$  na prvom stupni dodávateľského reťazca je úroveň dopytu pre  $j$ -ty sprostredkovateľský medzičlánok po danom produkte:

$$d_{vj}(p_p^*) = a_{vj} - b_{vj}p_p^* \quad (16)$$

## 2. úroveň

Rovnovážna stratégia medzi sprostredkovateľskými medzičlánkami a konečnými spotrebiteľmi za predpokladu rovnakej nákupnej ceny pre všetkých spotrebiteľov:

$$s_v(p_c) = d_c(p_c)$$

$$\sum_{j=1}^m c_{vj} + p_c \sum_{j=1}^m d_{vj} = \sum_{l=1}^k a_{cl} - p_c \sum_{l=1}^k b_{cl} \quad (17)$$

$$p_c = \frac{-\sum_{j=1}^m c_{vj} + \sum_{l=1}^k a_{cl}}{\sum_{j=1}^m d_{vj} + \sum_{l=1}^k b_{cl}}$$

Na druhom stupni dodávateľského reťazca pri stúpajúcej úrovni saturovaného dopytu  $k$  spotrebiteľov  $\sum_{l=1}^k a_{cl}$  a poklese parametrov minimálnej úrovne ponuky  $m$  medzičlánkov

$\sum_{j=1}^m c_{vj}$  **rovnovážna cena  $p_c$  rastie**. Pokles rovnovážnej ceny na druhom stupni dodávateľského reťazca spôsobí zvýšenie koeficientu nárastu ponuky  $m$  medzičlánkov  $\sum_{j=1}^m d_{vj}$  a zvýšenie

koeficientu poklesu dopytu  $k$  spotrebiteľov  $\sum_{l=1}^k b_{cl}$ . Pokles rovnovážnej ceny pre druhý stupeň dodávateľského reťazca nastane pri opačných zmenách hodnôt uvedených koeficientov.

Pre rovnovážnu cenu na druhom stupni dodávateľského reťazca  $p_c^*$  je ponuka  $j$ -tého sprostredkovateľského medzičlánku pri rovnovážnej cene:

$$s_{vj}(p_c^*) = c_{vj} + d_{vj}p_c^* \quad (18)$$

Pri uvedenej rovnovážnej cene na druhom stupni dodávateľského reťazca  $p_c^*$  je dopyt  $k$ -teho spotrebiteľa po danom produkte:

$$d_{cl}(p_c^*) = a_{cl} - b_{cl}p_c^* \quad (19)$$

## Záver

Prezentované úvahy možno použiť pri analýze rovnovážnych cien  $p_p^*$  a  $p_c^*$  dvojstupňového dodávateľského reťazca s  $n$  výrobcami,  $m$  medzičlánkami a  $k$  spotrebiteľmi. Ak platí  $p_p^* < p_c^*$ , rozdiel  $p_c^* - p_p^*$  reprezentuje maržu sprostredkovateľského medzičlánku v dodávateľskom reťazci. Táto situácia je však reálna len pri rovnakom objeme realizovaného obchodu tak na prvom, ako aj na druhom stupni dvojstupňového dodávateľského reťazca.

Pri nižšej úrovni ponuky na prvom stupni dvojstupňového dodávateľského reťazca oproti úrovni dopytu na druhom stupni,  $n$  sprostredkovateľských medzičlánkov musí riešiť problém zvýšenia dopytu po danom produkte od  $m$  výrobcov. To však možno realizovať len zvýšením rovnovážnej ceny  $p_p^*$ . Druhú možnosť s rovnakým efektom predstavuje zvýšenie rovnovážnej ceny  $p_c^*$  pre  $k$  spotrebiteľov, ktorá prirodzene vedie k poklesu dopytu po produkte. V prípade vyššieho objemu realizovaného obchodu na prvom stupni dvojstupňového dodávateľského reťazca, sprostredkovateľské subjekty musia riešiť úlohu opačným spôsobom.

## Použitá literatúra

1. BREZINA, I., PEKÁR, J., REIFF, M. 2013. The Steady State Price Analysis of Two Stage Supply Chain. In: LOGIC 2013 : zborník : Belgrade, 28-30 November / 2013 1st Logistics International Conference, Belgrade, Serbia. Vydavateľstvo University of Belgrade, Faculty of Transport and Traffic Engineering, Belgrade, 2013, ISBN: 978-86-7395-321-2.
2. ČIČKOVÁ, Z., ČEMICKÁ, K. 2011. Teória hier a aukcie na Slovensku a ich porovnania s ostatnými vo svete. In Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 13.-15. december / prosinec 2011 Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2011.
3. FIALA, P. 2002. Modelování a analýza produkčních systémů. Professional Publishing, Praha 2002.
4. PEKÁR, J., BREZINA, I. 2012. Analýza rovnovážnej stratégie v dvojstupňovom dodávateľskom reťazci s cieľom udržania trhového podielu v segmente predaja výrobku. In Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 10.-12. december / prosinec 2012. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2012.
5. PEKÁR, J., BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z. 2013. Rovnovážne stratégie v dvojstupňovom dodávateľskom reťazci. In Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu: mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 10.-12. december / prosinec 2013. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2013.
6. SU, X., ZHANG, F. 2008. Strategic Customer Behavior, Commitment, and Supply Chain Performance. In MANAGEMENT SCIENCE, Vol. 54, No. 10, October 2008, pp. 1759–1773.

## Kontaktné údaje

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava; Tel: (421 2) 67 295 829, mail: [juraj.pekar@euba.sk](mailto:juraj.pekar@euba.sk)

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava; Tel: (421 2) 67 295 821, mail: [ivan.brezina@euba.sk](mailto:ivan.brezina@euba.sk)

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava; Tel: (421 2) 67 295 820, mail: [zuzana.cickova@euba.sk](mailto:zuzana.cickova@euba.sk)

# HEURISTIKY PRO KAPACITNÍ ÚLOHY KURÝRNÍ SLUŽBY

## HEURISTICS FOR CAPACITATED MESSENGER PROBLEM

*Lenka Příbylová*

### **Abstrakt**

Text se zabývá heuristickými algoritmy pro řešení statické kapacitní úlohy kurýrní služby s jedním nebo více kurýry, pro více kurýrů s jedním nebo více výchozími místy a se zahrnutím časového limitu k navštívení všech míst. K řešení jsou využity modifikace metody nejbližšího souseda, metody vkládací a metody výměn. Uvažované heuristické algoritmy popsanych typů statických úloh byly naprogramovány v jazyce VBA (Visual Basic for Applications) v prostředí MS Excel. Výsledky výpočetních experimentů značí, že ve statických úlohách kurýrní služby s více kurýry s jedním výchozím místem vykazuje lepší výsledky modifikovaná metoda nejbližšího souseda, zatímco ve statických úlohách s více kurýry s různými výchozími místy dosahuje značně nižších hodnot účelové funkce modifikovaná vkládací metoda. Modifikovaná metoda výměn vede ke zlepšení nalezených řešení.

***Klíčová slova:*** kapacitní úlohy kurýrní služby, heuristiky, nejbližší soused, vkládací metoda, metoda výměn

### **Abstract**

The text is focused on heuristic algorithms for solving static capacitated messenger problem with single or multiple messengers, with one or multiple depots in case of multiple messengers and with limited time for route realization. Modified nearest neighbour method, modified insertion method and modified exchange method were used to solve the problem. Considered heuristics for described types of messenger problem were programmed in VBA (Visual Basic for Applications) in MS Excel. The results of computational experiments indicate that modified nearest neighbour method leads to better outcomes in static multiple messenger problems with a single depot, while modified insertion method is associated with lower values of objective function in static multiple messenger problem with multiple depots. Modified exchange method improves original solutions.

**Keywords:** capacitated messenger problem, heuristics, nearest neighbour, insertion method, exchange method

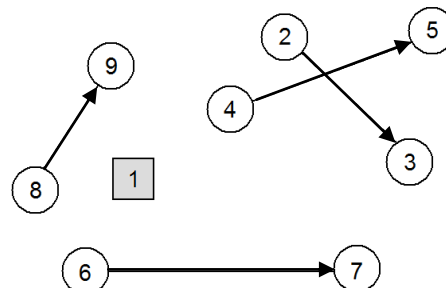
## **1 ÚLOHA KURÝRNÍ SLUŽBY**

Úloha kurýrní služby (v anglické literatuře známá jako messenger problem nebo pickup and delivery problem) vychází z úlohy obchodního cestujícího (travelling salesman problem, TSP). Cílem úlohy TSP je nalezení trasy obchodního cestujícího, který vyráží z počátečního místa, musí navštívit danou množinu míst (požadavků) a vrátit se zpět do výchozího místa, a to takovým způsobem, aby celkové náklady na trasu byly minimální. Rozdíly TSP a úlohy kurýrní služby spočívají především v jiné definici požadavků, a od ní se odvíjejících omezení. V úloze TSP existuje pouze jeden typ požadavku, a to místo, které musí být navštíveno.



Kurýrní služba má za úkol vyzvednout zákaznickou zásilku z jednoho místa a doručit ji do místa jiného, v úloze je tedy nutné rozlišovat, zda se jedná o místo vyzvednutí nebo doručení. Navíc je také důležité kontrolovat pořadí, v jakém jsou místa navštěvována, protože dané místo doručení nemůže být navštíveno dříve, než je navštíveno odpovídající místo vyzvednutí. Zásilku však není nutné doručit bezprostředně po jejím vyzvednutí.

V problému se tedy setkáváme s trojím typem míst, prvním typem je místo (popř. místa, pokud se jedná o úlohu s více kurýry) výchozí, do kterého se kurýr také musí vrátit, druhým typem jsou místa vyzvednutí a třetím typem místa doručení. Pokud přijmeme značení, které se v literatuře vyskytuje nejčastěji, tj. indexem 1 je označeno výchozí místo, sudé indexy mají místa vyzvednutí a liché indexy místa doručení, může úloha kurýrní služby vypadat například jako na následujícím obrázku. Orientované hrany znázorňují směr doručení zásilky, pro konkrétní zásilku má místo doručení vždy index o jedničku vyšší než index místa vyzvednutí.



Obrázek 1 Úloha kurýrní služby

Ve všech dále uvažovaných úlohách a jejich modelech je pro zjednodušení uvažováno, že žádné místo vyzvednutí nemůže být zároveň místem doručení a naopak. Dále budeme předpokládat, že každý zákazník bude požadovat z jednoho místa vyzvednutí doručení pouze jedné zásilky do jednoho místa doručení. Nenastane tedy situace, ve které by měl zákazník s jedním místem vyzvednutí dvě nebo více zásilek se dvěma nebo více různými místy doručení, nebo situace, ve které by jedno místo doručení bylo společné místo doručení pro dvě nebo více zásilek různých zákazníků.

Při hledání optimální trasy s minimálními náklady, ať už ve formě vzdálenosti nebo času stráveného na cestě, je důležitá skutečnost, zda je řešení omezeno časovými okny. Častěji se setkáváme se situacemi, ve kterých je předem omezeno, v jakém časovém rozmezí je nutné zásilku od zákazníka vyzvednout a v jakém musí být zásilka na dané místo doručena. V reálné praxi jsou časová okna uplatňována minimálně v podobě stanovení okamžiku, kdy nejdříve může být zásilka vyzvednuta, a nejpozději přípustného termínu, ve kterém může být zásilka doručena. Zahrnutím časových oken však dochází k výrazně složitějším modelům a metodám jejich řešení, a z tohoto důvodu nebyla časová okna v dalším textu uvažována. Nicméně uvažována byla časově omezená pracovní doba, ve které musí být zákazníci obslouženi, tedy veškeré zásilky vyzvednuty a doručeny. Jde tak o kompromis mezi reálnými požadavky zákazníků a složitostí výpočetních metod. V úloze kurýrní služby s omezenou pracovní dobou kurýrů označíme časový limit  $T_{max}$ .

Další důležitou skutečností při hledání optimálního řešení je uvažování kapacity kurýra. V následujících úlohách a modelech se zaměříme především na kurýry cyklisty s batohem. Je zřejmé, že pak musíme brát ohled alespoň na celkovou hmotnost naložených zásilek, která nesmí překročit maximální možnou kapacitu kurýra. Předpokladem pro zjednodušení algoritmů je fakt, že maximální kapacitu (nosnost) mají všichni kurýři stejnou, a označíme ji  $V$ . Hmotnost zásilky, jež má být vyzvednuta v místě  $2i$  označíme jako  $q_{2i}$ , a pro místo doručení bude platit, že  $q_{2i+1} = -q_{2i}$ . Každá zásilka může být vyzvednuta, tj.  $q_i \leq V$  pro všechna  $i$ .

V praxi se kurýrní služba snaží optimalizovat trasu kurýra nejen vzhledem k časovým oknům nebo kapacitě, ale ve většině případů s přihlédnutím k oběma podmínkám současně. Jeden kurýr často není schopen vyhovět požadavkům všech zákazníků, a tak je třeba brát v úvahu i možnost využití více kurýrů, a sestavení několika tras. V úloze pak bude hrát roli i fakt, zda všichni kurýři mají jediné společné výchozí místo, nebo zda má každý kurýr své zvláštní výchozí místo. Zahrnutí všech těchto skutečností do úlohy vede k výrazně složitějším modelům. Matematický model optimalizační úlohy kurýrní služby s časovými okny a kapacitním omezením pro více kurýrů, kteří mají jedno společné výchozí místo, uvádí např. (Fábry, 2008).

## 2 HEURISTIKY PRO STATICKE ÚLOHY

Cílem statických úloh je sestavení optimální trasy kurýra, který vyzvedává a doručuje zásilky na místech, která jsou známá jak před zahájením optimalizace, tak před momentem, ve kterém kurýr vyrazí z výchozího místa. V případě úloh s více kurýry jsou výsledkem trasy pro všechny jednotlivé kurýry.

Pro úlohu kurýrní služby byly vytvořeny různé modifikace heuristických metod nejbližšího souseda, vkládací a výměn. Principy jednotlivých heuristik byly upraveny pro úlohu kurýrní služby a modifikovány pro úlohy s jedním nebo více kurýry, s jedním nebo více výchozími místy (v případě více kurýrů), s ohledem na kapacitu kurýra a s ohledem na čas.

V případě, že je možné využít pro uspokojení všech požadavků více kurýrů, na výsledek úlohy má vliv skutečnost, že všichni kurýři vyjíždějí a vracejí se na jedno stejné výchozí místo, nebo že každý kurýr má vlastní výchozí místo, ze kterého vyjíždí a do kterého se vrací. Algoritmy byly proto modifikovány tak, aby bylo možné je použít i pro více kurýrů. Předpokladem vytvořených heuristických algoritmů je lichý celkový počet kurýrů, tedy  $K$  je liché číslo. Pro  $n$  požadavků a  $K$  kurýrů bude matice nákladů obsahovat v prvních  $K$  řádcích náklady na cestu z výchozích míst jednotlivých kurýrů do míst, jež musí být navštívena. Důvodem pro toto značení je možnost zachování označení míst vyzvednutí sudými indexy a míst doručení následujícími lichými indexy. Necht' požadavky zákazníků pak nesou označení  $K + 1, K + 2, \dots, K + 2n$ . Místa vyzvednutí budou tedy označena sudými indexy  $K + 1, K + 3, \dots, K + 2n - 1$ , a místa doručení budou značena lichými indexy  $K + 2, K + 4, \dots, K + 2n$ . V případě, že je možné využít sudý počet kurýrů, je řešením zařazení fiktivního kurýra, který nebude využit, tak, aby celkový počet kurýrů byl liché číslo. Pro úlohu s jedním kurýrem zůstane zachováno značení stejné jako v předchozí kapitole, tedy indexem 1 bude označeno místo výchozí a místa, která mají být navštívena, ponesou indexy  $2, 3, \dots, 2n + 1$ .

### 2.1 Modifikace metody nejbližšího souseda

Metoda nejbližšího souseda je založená na přidávání nejbližšího místa do trasy k poslednímu navštívenému místu. V úloze kurýrní služby musí být respektováno, že kurýr nejprve zásilku vyzvedne, a poté ji doručí. K doručení zásilky nemusí dojít bezprostředně po jejím vyzvednutí, pokud to dovoluje kapacita kurýra. Modifikace metody nejbližšího souseda pro úlohu kurýrní služby s  $n$  požadavky spočívá ve vybírání nejbližšího místa z množiny  $A$ , která je tvořena místy, které lze v dané chvíli navštívit. Po navštívení konkrétního místa vyzvednutí  $i$  je toto místo z množiny  $A$  odebráno a místo doručení zásilky  $i + 1$  naopak do množiny  $A$  přidáno. Metoda končí, když je množina  $A$  prázdná.

Pokud je obsluha zákazníků umožněna  $k$  kurýry, musí být ošetřeno, aby jednu zásilku vyzvedl i doručil stejný kurýr. Proto musí mít každý kurýr vlastní množinu  $A_k$  míst, která může

navštívit. Pro úlohu kurýrní služby s více kurýry, kteří mají navíc je algoritmus už o něco složitější. Cílem je naplánovat trasu pro každého kurýra zvlášť, přičemž délku trasy  $k$ -tého kurýra označíme  $z_k$  a celkovou délku tras všech kurýrů  $z$ . Posloupnost po sobě navštívených míst jednotlivých kurýrů označíme  $S_k$ .

V případě, že v úloze kurýrní služby omezíme pracovní dobu kurýrů časovým limitem  $T_{max}$ , potřebujeme znát nejen informace o vzdálenostech mezi místy, ale i o jednotlivých dobách přejezdu z místa  $i$  do místa  $j$ , které označíme  $d_{ij}$ . Nechť  $T_k$  označuje aktuálně strávený čas  $k$ -tého kurýra na trase, a pro trasu reprezentovanou posloupností míst  $S_k$  tedy platí  $T_k = \sum_{j=1}^{|S_k|-1} d_{u_j, u_{j+1}}$ , kde  $u_j$  je místo zařazené v trase na  $j$ -té pozici. Pro výchozí místo je  $u_1 = k$  a pro poslední místo v posloupnosti je  $u_{|S_k|} = i_k$ . Protože jednu zásilku musí vyzvednout a následně doručit stejný kurýr, je třeba v každém kroku kontrolovat, je-li po zařazení dalšího místa do trasy stále možné doručit všechny zbývající naložené zásilky v časovém limitu. Nechť  $B_k$  označuje množinu míst doručení, která je nutné před uzavřením cyklu navštívit kurýrem  $k$ . Níže je uveden algoritmus pro modifikovanou metodu nejbližšího souseda pro úlohu kurýrní služby s časovým limitem a s různými výchozími místy<sup>1</sup>, dle (Fábry, 2014).

### Algoritmus č. 1

**Krok 1:** Pro  $k = 1, 2, \dots, K$ :  $A_k = \{K+1, K+3, \dots, K+2n-1\}$ ,  $B_k = \emptyset$ .

**Krok 2:** Pro  $k = 1, 2, \dots, K$  opakovat:

$$c_{kr} = \min_{j \in A_k} c_{kj},$$

$$S_k = \{k, s\}, \quad z_k = c_{kr}, \quad T_k = d_{kr},$$

$$\text{pro } l = 1, 2, \dots, K: A_l = A_l - \{r\},$$

$$A_k = A_k + \{r+1\}, \quad B_k = \{r+1\}, \quad i_k = r.$$

**Krok 3:** Pro  $k = 1, 2, \dots, K$  opakovat:

pro všechna  $j \in A_k$  opakovat

$$A'_k = A_k, \text{ pokud } j \text{ je sudé, pak } A'_k = A'_k + \{j+1\},$$

$$B'_k = B_k, \text{ pokud } j \text{ je sudé, pak } B'_k = B'_k + \{j+1\},$$

$$T'_k = T_k,$$

$$s = j,$$

dokud  $B'_k \neq \emptyset$  opakovat:

$$d_{sv} = \min_{i \in B'_k} d_{si},$$

$$T'_k = T'_k + d_{sv}, \quad B'_k = B'_k - \{v\},$$

$$s = v,$$

<sup>1</sup> Metodu lze použít i pro více kurýrů se stejným výchozím místem, prvních  $K$  řádků matice vzdáleností pak bude identických.

$$T'_k = T'_k + d_{s_k},$$

pokud  $T'_k > T_{\max}$ , pak  $A'_k = A'_k + \{j\}$ ,

$$c_{i_m r} = \min_{k=1,2,\dots,K} \min_{j \in A'_k} c_{i_k j},$$

$$S_m = S_m + \{r\}, \quad z_m = z_m + c_{i_m r}, \quad T_m = T_m + d_{i_m r}, \quad i_m = r,$$

pokud  $r$  je sudé, pak

$$\text{pro } k = 1, 2, \dots, K: A_k = A_k - \{r\},$$

$$A_m = A_m + \{r+1\},$$

$$B_m = B_m + \{r+1\},$$

jinak

$$A_m = A_m - \{r\}.$$

**Krok 4:** Pokud  $A_k = \emptyset$  pro všechna  $k = 1, 2, \dots, K$ , potom pokračovat krokem 5, jinak opakovat krok 3.

**Krok 5:** Pro  $k = 1, 2, \dots, K$ :  $S_k = S_k + \{k\}$ ,  $z_k = z_k + c_{i_k k}$ ,

$$z = \sum_{k=1}^K z_k.$$

**Konec.**

Klíčová úprava algoritmu spočívá v kroku 3, ve kterém místo  $j \in A_k$  může být vybráno jako nejbližší soused pro  $k$ -tého kurýra, pouze pokud je i po jeho přidání možné dokončit trasu v časovém limitu  $T_{\max}$ . Pokud je vybráno místo vyzvednutí  $j$ , je nutné zahrnout do trasy také místo doručení zásilky  $j+1$ . Algoritmus není ošetřen pro případ, kdy žádný kurýr nemůže nějakou zásilku vyzvednout a doručit v časovém limitu. Proto je v rámci heuristického přístupu nutné odmítnout takového zákazníka, a jeho požadavek odložit na další den. Avšak ani optimalizační model nemůže zaručit, že budou uspokojeny všechny požadavky.

Algoritmus lze poměrně snadno upravit pro kapacitní úlohu kurýrní služby. Protože předpokládáme, že hmotnost všech jednotlivých zásilek je menší než kapacita kurýrů  $V$ , není nutné ověřovat, zda je možné naložit zásilku během přidávání prvního nejbližšího místa k výchozímu místu. Necht'  $W_k = \{w_1^k, w_2^k, \dots, w_{h_k-1}^k\}$  je posloupnost nákladů vyzvednutých, resp. vyložených, v po sobě navštívených místech  $k$ -tého kurýra, který navštíví  $h_k$  míst. Náklad ve výchozím místě je  $w_1^k = 0$  pro všechny kurýry  $k = 1, 2, \dots, K$ , protože všichni kurýři vyjíždějí na trasu bez nákladu. Při navštívení prvního nejbližšího souseda k výchozímu místu dochází v místě  $r$  k vyzvednutí první zásilky o hmotnosti  $q_r$ , a náklad se o tuto hmotnost zvyšuje. Pro posloupnost nákladů tedy platí  $w_i^k = w_{i-1}^k + q_{s_i^k}$ . Je-li  $i$  sudé, tj. při navštívení místa vyzvednutí, je  $q_{s_i^k}$  kladné a náklad se o tuto hodnotu zvyšuje; je-li  $i$  liché, tj. navštívení místa doručení, je  $q_{s_i^k}$  záporné a náklad se o tuto hodnotu snižuje. Kapacitu je tedy nutné kontrolovat pouze v kroku 3, a to pouze při přidávání místa vyzvednutí, ve kterém dochází ke

zvýšení nákladu. Místo vyzvednutí  $r$  může být přidáno do trasy  $k$ -tého kurýra na pozici  $i$ , pouze pokud nebude překročena kapacita kurýra, tedy pokud platí, že  $w_{i-1}^k + q_r \leq V$ .

## 2.2 Modifikace vkládací metody

Vkládací metoda je založená na principu rozšiřování uzavřené cesty vkládáním dalších míst, dokud trasa neobsahuje všechna místa, která je třeba navštívit. Při vkládání míst v úloze obchodního cestujícího není na rozdíl od úlohy kurýrní služby rozlišeno, zda se jedná o místo vyzvednutí nebo doručení. Modifikace metody pro úlohu kurýrní služby spočívá v respektování omezení, že místo doručení smí být navštíveno až po navštívení místa vyzvednutí. Neznamená to, že místo doručení nesmí být vloženo do trasy dříve než místo vyzvednutí, ale že místo vyzvednutí musí být v konečné naplánované trase před místem doručení.

Pro výchozí místo je  $u_1 = k$  a pro poslední místo v uzavřené cestě je  $u_{|S_k|} = k$ . Počet prvků v trase  $k$ -tého kurýra označme  $h_k$ , přičemž platí rovnost  $|S_k| = h_k$ . V prvním kroku modifikované metody je na rozdíl od metody nejbližšího souseda možné vybrat nejen místo vyzvednutí ale i místo doručení pro vytvoření počátečního cyklu. Protože jsou vždy vkládány obě místa jednoho požadavku najednou (místo vyzvednutí i doručení), není třeba v každém kroku kontrolovat, zda je možné trasu dokončit v časovém limitu, jako tomu bylo u modifikované metody nejbližšího souseda. Nyní postačí kontrola, zda hodnota  $T_k$  je po přidání dvojice míst menší nebo rovna časovému limitu  $T_{max}$ . Níže je uveden algoritmus pro modifikovanou vkládací metodu pro úlohu kurýrní služby s časovým limitem dle (Fábry, 2014).

### Algoritmus č. 2

**Krok 1:** Pro  $k = 1, 2, \dots, K$ :  $A_k = \{K + 1, K + 2, \dots, K + 2n\}$ ,

pro  $k = 1, 2, \dots, K$  opakovat

$$c_{\min} = -\infty, c_{\max} = +\infty,$$

pro všechna  $j \in A_k$  opakovat

pokud  $c_{kj} \leq \min_{\substack{l=1,2,\dots,K, \\ l \neq k}} c_{lj}$ , potom

pokud  $\min_{\substack{l=1,2,\dots,K, \\ l \neq k}} c_{lj} \geq c_{\min}$ , potom  $s_{\min} = j$ ,  $c_{\min} = \min_{\substack{l=1,2,\dots,K, \\ l \neq k}} c_{ls}$ ,

jinak pokud  $(c_{kj} - \min_{\substack{l=1,2,\dots,K, \\ l \neq k}} c_{lj}) < c_{\max}$ , potom

$$s_{\max} = j, c_{\max} = (c_{kj} - \min_{\substack{l=1,2,\dots,K, \\ l \neq k}} c_{lj}),$$

pokud  $c_{\min} > -\infty$ , potom  $s = s_{\min}$ , jinak  $s = s_{\max}$ ,

je-li  $s$  sudé, pak  $S_k = \{k, s, s + 1, k\}$ ,  $z_k = c_{k,s} + c_{s,s+1} + c_{s+1,k}$ ,

je-li  $s$  liché, pak  $S_k = \{k, s - 1, s, k\}$ ,  $z_k = c_{k,s-1} + c_{s-1,s} + c_{s,k}$ ,

$$h_k = 4,$$

pro  $l = 1, 2, \dots, K$ :

je-li  $s$  sudé, pak  $A_l = A_l - \{s, s+1\}$ ,

je-li  $s$  liché, pak  $A_l = A_l - \{s-1, s\}$ .

**Krok 2:**  $\Delta z = \infty$ ,

pro  $k = 1, 2, \dots, K$  opakovat

pro všechna sudá  $r \in A_k$  opakovat

$$\Delta z_{rj}^N = \min_{i=1, 2, \dots, h_k-1} (c_{u_i^k, r} + c_{r, r+1} + c_{r+1, u_{i+1}^k} - c_{u_i^k, u_{i+1}^k}),$$

$$\Delta t^N = d_{u_j^k, r} + d_{r, r+1} + d_{r+1, u_{j+1}^k} - d_{u_j^k, u_{j+1}^k},$$

$$\Delta z_{rfg}^R = \min_{\substack{i=1, 2, \dots, h_k-2 \\ m=i+1, i+2, \dots, h_k-1}} (c_{u_i^k, r} + c_{r, u_{i+1}^k} - c_{u_i^k, u_{i+1}^k} + c_{u_m^k, r+1} + c_{r+1, u_{m+1}^k} - c_{u_m^k, u_{m+1}^k}),$$

$$\Delta t^R = d_{u_i^k, r} + d_{r, u_{i+1}^k} - d_{u_i^k, u_{i+1}^k} + d_{u_m^k, r+1} + d_{r+1, u_{m+1}^k} - d_{u_m^k, u_{m+1}^k},$$

pokud  $T_k + \Delta t^N < T_{\max}$  a  $\Delta z_{rj}^N < \Delta z$ , potom

$$N = \text{PRAVDA}, \quad k^* = k, r^* = r, j^* = j, \Delta z = \Delta z_{rj}^N, \Delta T = \Delta t^N,$$

pokud  $T_k + \Delta t^R < T_{\max}$  a  $\Delta z_{rfg}^R < \Delta z$ , potom

$$N = \text{NEPRAVDA},$$

$$k^* = k, r^* = r, j^* = f, i^* = g, \Delta z = \Delta z_{rfg}^R, \Delta T = \Delta t^R,$$

pokud  $N = \text{PRAVDA}$  a  $\Delta z < \infty$ , potom

vložit místa  $r^*$  a  $r^* + 1$  do trasy  $S_{k^*}$  na pozice  $j^* + 1$  a  $j^* + 2$ ,

jinak pokud  $\Delta z < \infty$ , potom

vložit místa  $r^*$  a  $r^* + 1$  do trasy  $S_{k^*}$  na pozice  $j^* + 1$  a  $i^* + 2$ ,

pokud  $\Delta z < \infty$ , potom

$$h_{k^*} = h_{k^*} + 2, \quad z_{k^*} = z_{k^*} + \Delta z, \quad T_{k^*} = T_{k^*} + \Delta T,$$

pro  $k = 1, 2, \dots, K$  opakovat

$$A_k = A_k - \{r^*, r^* + 1\}$$

**Krok 3:** pokud  $A_k = \emptyset$  pro všechna  $k = 1, 2, \dots, K$ , potom pokračovat krokem 5, jinak opakovat krok 3.

**Krok 4:**  $z = \sum_{k=1}^K z_k$ .

**Konec.**

V kroku č. 2 jsou zkoušeny všechny možné pozice pro vložení dvojice míst, a to buď vložení míst na pozice následující bezprostředně po sobě, nebo vložení na různé pozice v trase. Pro každý způsob vložení je uložena hodnota minimálního prodloužení trasy, tj. pro vložení na pozice následující po sobě  $\Delta z_{rj}^N$  a pro vložení na různé pozice  $\Delta z_{rfg}^R$ . Při vkládání míst na pozice následující bezprostředně po sobě nabývá proměnná  $N$  hodnoty PRAVDA, při vkládání na různé pozice v trase nabývá hodnoty NEPRAVDA.

Výše uvedený algoritmus je možné upravit pro kapacitní úlohu kurýrní služby. Hmotnost nákladu ve výchozím místě je  $w_1^k = 0$  pro všechny kurýry  $k = 1, 2, \dots, K$ , protože všichni kurýři vyjíždějí na trasu bez nákladu. Místa  $r$  a  $r+1$  mohou být do trasy vložena na pozice bezprostředně po sobě za pozici  $j$ , pokud je platí, že  $w_j^k + q_r \leq V$ . V případě vložení na různá místa v trase je postup o něco složitější, kapacita nesmí být překročena v celé části trasy mezi nově přidanými místy. Musí tedy platit, že při vkládání na pozice  $i$  a  $m$  do trasy  $k$ -tého kurýra je splněno  $\max_{j=i+1, \dots, m} w_j^k + q_r \leq V$ .

### 2.3 Modifikace metody výměn

Metoda výměn je jednou z heuristických metod zlepšujících již nalezené řešení. Zlepšení je možné dosáhnout vynecháním dvou hran a jejich nahrazením dvěma jinými hranami (2-2 výměny), popřípadě je možné vynechat 3 nebo více hran. Metoda výměn by měla sloužit k nalezení lepšího řešení a přiblížit výsledek řešení optimálnímu.

V metodě výměn pro úlohu obchodního cestujícího jsou testovány výměny dvojic hran, které nemají společný vrchol. Modifikace metody výměn pro úlohu kurýrní služby spočívá ve výměně nikoli dvojice hran, ale dvou dvojic hran, přičemž jedna z dvojic má společný vrchol  $r$  a druhá vrchol  $r+1$ . V prvním kroku modifikované metody výměn vybereme dvojici míst vyzvednutí  $r$  a doručení  $r+1$ , pro kterou bude hodnota úspory vytvořené vyjmutím této dvojice míst maximální ze všech dvojic. Následně využijeme princip modifikovaného vkládacího algoritmu, a vyzkoušíme všechny možné pozice, na které bude v rámci jednotlivých tras možné dvojici míst vložit. Ze všech možných pozic vybereme ty, které budou spojené s minimálním prodloužením trasy. Pokud tato výměna bude výhodná, tj. pokud úspora bude větší než prodloužení, místa z původních pozic vyjmeme a vložíme na nové. První a druhý krok opakujeme, dokud změny přináší zlepšení účelové funkce.

Algoritmus lze modifikovat pro úlohu kurýrní služby s časovým a kapacitním omezením stejným způsobem jako algoritmus vkládací metody.

## 3 VÝPOČETNÍ EXPERIMENTY

Algoritmy byly naprogramovány v prostředí MS Excel v jazyce VBA (Visual Basic for Applications) s cílem provést experimenty a porovnat výsledky dosažené jednotlivými metodami. Testováno bylo celkem 40 různých matic, s rozměry 10 požadavků (celkem 20 míst) se 3 kurýry, 20 požadavků s 5 kurýry, 30 požadavků se 7 kurýry a 40 požadavků s 11 kurýry. Výsledky nebyly srovnány s optimálním řešením.

Efektivnost vyjadřuje procento úloh, ve kterých daná metoda vykazala nejnižší hodnotu výsledné účelové funkce porovnávaných metod. Následující tabulka shrnuje výsledky metod NN (algoritmus modifikované metody nejbližšího souseda) a IN (algoritmus modifikované vkládací metody).

| metoda | efektivnost (různá výchozí místa) | efektivnost (jedno výchozí místo) |
|--------|-----------------------------------|-----------------------------------|
|--------|-----------------------------------|-----------------------------------|

|    |        |       |
|----|--------|-------|
| NN | 23,75% | 75,0% |
| IN | 76,25% | 25,0% |

**Tabulka 3.1 Porovnání efektivnosti metod NN a IN**

Z výsledků je patrné, že modifikace metody nejbližšího souseda je efektivnější než modifikace vkládací metody v případě, že kurýři vyrážejí z jednoho společného místa. V opačném případě je efektivnější modifikovaná vkládací metoda.

Metoda výměn slouží ke zlepšení již dosaženého řešení, otestována byla řešení získaná všemi výše popsanými heuristikami pro statické úlohy. Efektivita tentokrát vyjadřuje, v kolika procentech případů byla hodnota účelové funkce nižší po aplikaci modifikované metody výměn. Pro jednotlivé výsledky byla spočítána i procentuální zlepšení hodnoty účelové funkce.

| metoda | efektivnost | průměrné zlepšení |
|--------|-------------|-------------------|
| NN     | 61,3%       | 2,4%              |
| IN     | 21,3%       | 0,6%              |

**Tabulka 3.2 Porovnání efektivnosti modifikované metody výměn**

## 4 ZÁVĚR

Z výsledků experimentů vyplývá, že při srovnání modifikací metody nejbližšího souseda a vkládací metody záleží na tom, zda se jedná o úlohy s jedním výchozím místem kurýřů nebo s různými výchozími místy. V případě jednoho společného výchozího místa byla efektivnější modifikace metody nejbližšího souseda, zatímco v případě více výchozích míst dosahovala lepších výsledků modifikace vkládací metody. Modifikovaná metoda výměn vedla ke zlepšení původních řešení. V dynamických úlohách s časovým omezením byla výrazně efektivnější modifikovaná vkládací metoda než modifikace metody nejbližšího souseda.

### Použitá literatura

- [1] Fábry, J., 2008. Capacited Messenger Problem. *In Mathematical Methods in Economics 2008 (CD-ROM), Liberec*, pp. 84-90.
- [2] Fábry, J., 2014. Heuristic Algorithms for Multiple Messenger Problem with Multiple Depots. *Mathematical Methods in Economics '14, Olomouc (dosud nepublikováno)*.
- [3] Gutin, G. & Punnen, A. P., 2002. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. místo neznámé: Kluwer Academic Publishers.
- [4] Kobzareva, M., 2012. *Heuristické algoritmy pro úlohu kurýrní služby, diplomová práce*. Praha: VŠE-FIS.

### Kontaktní údaje

Ing. Lenka Příbylová

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (+420) 608 481 054

email: [pribylova.lenka@gmail.com](mailto:pribylova.lenka@gmail.com)



# MODELOVANIE ZÁSOB POMOCOU MARKOVOVÝCH REŤAZCOV<sup>1</sup>

## INVENTORY MODELING VIA MARKOV CHAIN

*Marian Reiff*

### Abstrakt

Cieľom príspevku je prezentovať modelovanie zásobovacieho procesu pomocou Markovových reťazcov s cieľom určiť vhodnú stratégiu zásobovania. V príspevku sú prezentované základné teoretické poznatky Markovových reťazcov s aplikáciou na riadenie zásob.

*Kľúčové slová:* zásoby, Markovove reťazce

### Abstract

The aim of this paper is to present the modeling of the inventory process using Markov chains to determine the appropriate supply strategies. Paper presents basic theoretical knowledge of Markov chains with application to inventory management.

*Keywords:* Inventory, Markov chain

Náhodný proces môžeme definovať ako množinu náhodných veličín, závislých od určitého počtu parametrov. V ekonomických aplikáciách sa vyskytujú predovšetkým procesy s jedným parametrom, ktorý je čas. Takéto náhodné procesy sa nazývajú stochastické procesy. Nech  $X_t$  predstavuje náhodnú premennú (napríklad množstvo zásob na sklade, dopyt po tovare, atď.) ktorá charakterizuje stav systému v čase  $t \in T$ . Množina náhodných premenných  $\{X_t, t \in T\}$  predstavuje stochastický proces. V závislosti od charakteru množiny  $T$  sa stochastické procesy rozdeľujú na procesy s diskretným časom, v prípade ak  $T$  je spočítateľná množina a na stochastické procesy so spojitým časom, v prípade ak množina  $T$  je interval. Počet stavov v ktorých sa môže nachádzať stochastický proces môže byť konečný alebo nekonečný počet. Teda v určitom okamihu sa vyskytuje situácia z určitého súboru možností. Hovoríme o výskyte stavu  $i$  v okamžiku  $n$ , pričom ak je množina stavov sledovaného procesu spočítateľná množina hovoríme o stavovo diskretných procesoch a v opačnom prípade stavovo spojitých procesoch. Stochastický charakter procesu spočíva v tom, že v okamihu  $n$  sa vyskytuje jeden z možných stavov s určitou pravdepodobnosťou.

Na ilustráciu stochastických procesov uvádzame príklad s konečnou množinou stavov a diskretným časom z oblasti riadenia zásob.

Uvažujme nasledujúci problém zásobovania. Skladovaný tovar je možné objednať v týždňových intervaloch. Nech premenná  $D_t$  predstavuje dopyt po tovare v týždni  $t = 1, 2, 3, \dots, T$ . Predpokladáme, že dopyt po tovare  $D_t$  je náhodná premenná s Poissonovým rozdelením so strednou hodnotou  $\lambda = 2$ . Ďalej nech premenná  $X_0$  predstavuje stav zásob tovaru na začiatku sledovania procesu (v tomto prípade  $X_0 = 3$ ),  $X_1$  predstavuje stav zásob na

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0104/12 „Modeling supply chain pricing policy in a competitive environment“.

konci prvého týždňa,  $X_2$  stav zásob na konci druhého týždňa atď. Na konci týždňa je možné objednať tovar ktorý je následne doručený tesne pred začiatkom budúceho týždňa. Pri objednávaní platí nasledujúca stratégia. Firma objednaná tovar je v počte 3 ks, iba v prípade ak na konci týždňa je nulový stav zásob, pri inom počte stavu zásob na konci týždňa sa tovar neobjednáva. Modelovaný proces môže nadobúdať stav 0, 1, 2, 3, čo reprezentuje stav zásob tovaru na konci týždňa. Náhodnú premennú  $X_t$  stav zásob na konci týždňa  $t$  možno vyjadriť nasledujúcim vzťahom:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{ak } X_t = 0, \\ \max\{X_t - D_{t+1}, 0\}, & \text{ak } X_t \geq 0, \end{cases} \quad t = 1, 2, 3, \dots, T \quad (1.1)$$

Podľa uvedeného vzťahu pre  $X_{t+1}$  budúci stav premennej  $X_t$  závisí od súčasného stavu  $X_t$  a od  $D_{t+1}$  teda dopytu v nasledujúcom týždni. Nakoľko  $X_{t+1}$  nezávisí od predchádzajúcej histórie systému zásob môžeme ho modelovať ako Markovov reťazec. Maticu prechodov  $\mathbf{P}$  získame na základe predpokladu že  $D_{t+1}$  má Poissonove rozdelenie a použijeme vzťah pre výpočet pravdepodobnosti veľkosti dopytu reprezentovanej  $x$ .

$$P(D_{t+1} = d) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^d}{d!}, \quad d = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (1.2)$$

Na základe uvedeného vzťahu 1.2 vypočítame:

$$P(D_{t+1} = 0) = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} = 0,135$$

$$P(D_{t+1} = 1) = \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = 0,271$$

$$P(D_{t+1} = 2) = \frac{e^{-1} 1^2}{2!} = 0,271$$

$$P(D_{t+1} \geq 3) = 1 - P(D_{t+1} = 0) - P(D_{t+1} = 1) - P(D_{t+1} = 2) = 1 - 0,135 - 0,271 - 0,271 = 0,323$$

Pre prvý riadok matice  $\mathbf{P}$  ktorý obsahuje pravdepodobnosti prechodov zo stavu  $X_t = 0$  do jednotlivých možných stavov  $X_{t+1} = 0, 1, 2, 3$  použijeme prvý časť vzťahu 1.1  $X_{t+1} = \max\{3 - D_{t+1}, 0\}$  a teda:

$$p_{03} = P(D_{t+1} = 0) = 0,135$$

$$p_{02} = P(D_{t+1} = 1) = 0,271$$

$$p_{01} = P(D_{t+1} = 2) = 0,271$$

$$p_{00} = P(D_{t+1} \geq 3) = 0,323$$

Pre ďalšie riadky matice  $\mathbf{P}$  platí druhá časť vzťahu 1.9  $X_{t+1} = \max\{X_t - D_{t+1}, 0\}$ . Ak  $X_{t+1} \leq X_t$  potom platí  $p_{12} = 0, p_{13} = 0$  a  $p_{23} = 0$ . Ostatné pravdepodobnosti prechodov sú vypočítané nasledovne:

$$p_{11} = P(D_{t+1} = 0) = 0,135$$

$$p_{10} = P(D_{t+1} \geq 1) = 1 - P(D_{t+1} = 0) = 1 - 0,135 = 0,865$$

$$p_{22} = P(D_{t+1} = 0) = 0,135$$

$$p_{21} = P(D_{t+1} = 1) = 0,271$$

$$p_{20} = P(D_{t+1} \geq 2) = 1 - P(D_{t+1} = 0) - P(D_{t+1} = 1) = 1 - 0,135 - 0,271 = 0,594$$

Posledný riadok matice  $\mathbf{P}$  predstavuje stav keď sa začína nasledujúci týždeň s tromi kusmi zásob na sklade, teda pravdepodobnosti prechodov sú rovnaké ako v prvom riadku.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \\ 0,865 & 0,135 & 0 & 0 \\ 0,594 & 0,271 & 0,135 & 0 \\ 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Markovove reťazce môžeme popísať na základe znalosti vektoru absolútnych pravdepodobností stavov  $\mathbf{p}(n)$  a matice podmienených pravdepodobností prechodu  $\mathbf{P}$  pomocou vzťahu:

$$\mathbf{p}(n+1) = \mathbf{p}(n)\mathbf{P}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

To znamená, že ak poznáme pravdepodobnosti výskytu jednotlivých stavov v okamihu, keď proces začína, môžeme pomocou Markovovho reťazca popísať pravdepodobnosti výskytu stavov v každom ďalšom období. Začnime v stave  $j$ , v tomto stave poznáme vektor počiatkových pravdepodobností  $\mathbf{p}(0) = \{p_j(0)\}$  a maticu prechodov  $\mathbf{P}$ . Absolútne pravdepodobnosti  $\mathbf{p}(n) = \{p_j(n)\}$  vyjadrujúce pravdepodobnosť, že po  $n > 0$  časových okamihoch (prechodoch) sa systém bude nachádzať v stave  $j$ , vypočítame podľa vzťahu 1.3:

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P},$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1)\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2,$$

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2)\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^2\mathbf{P} = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^3.$$

Postupným dosadzovaním dôjdeme k vzťahu:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

Matica  $\mathbf{P}^n$  sa nazýva matica prechodov pre  $n$  časových okamihov.

Nech na začiatku sledovania procesu je počiatkový stav zásob rovný nula kusov (stav 0), teda vektor počiatkových pravdepodobností môžeme zapísať  $\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$ . Potom absolútne pravdepodobnosti jednotlivých stavov systému po 2 a 4 prechodoch (týždňoch) určíme nasledovne

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \\ 0,865 & 0,135 & 0 & 0 \\ 0,594 & 0,271 & 0,135 & 0 \\ 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \\ 0,865 & 0,135 & 0 & 0 \\ 0,594 & 0,271 & 0,135 & 0 \\ 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \\ 0,396 & 0,253 & 0,234 & 0,117 \\ 0,506 & 0,234 & 0,179 & 0,081 \\ 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}(2) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \\ 0,396 & 0,253 & 0,234 & 0,117 \\ 0,506 & 0,234 & 0,179 & 0,081 \\ 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \end{pmatrix} = (0,543 \ 0,234 \ 0,161 \ 0,062)$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \\ 0,396 & 0,253 & 0,234 & 0,117 \\ 0,506 & 0,234 & 0,179 & 0,081 \\ 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \\ 0,396 & 0,253 & 0,234 & 0,117 \\ 0,506 & 0,234 & 0,179 & 0,081 \\ 0,543 & 0,234 & 0,161 & 0,062 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0,503 & 0,238 & 0,181 & 0,078 \\ 0,498 & 0,239 & 0,184 & 0,081 \\ 0,502 & 0,238 & 0,181 & 0,078 \\ 0,503 & 0,238 & 0,181 & 0,078 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}(4) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0,503 & 0,238 & 0,181 & 0,078 \\ 0,498 & 0,239 & 0,184 & 0,081 \\ 0,502 & 0,238 & 0,181 & 0,078 \\ 0,503 & 0,238 & 0,181 & 0,078 \end{pmatrix} = (0,503 \ 0,238 \ 0,181 \ 0,078)$$

V ergodickom Markovovom reťazci si rovnovážne pravdepodobnosti definované ako

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) \quad j = 0,1,2,\dots,m \quad (1.5)$$

Rovnovážne pravdepodobnosti sú nezávislé od počiatocného stavu v ktorom sa proces nachádza na začiatku, teda počiatocného vektora pravdepodobností  $\mathbf{p}(0) = \{p_j(0)\}$  a získame ich riešením sústavy rovníc

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P} \quad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^m \pi_j = 1 \quad (1.7)$$

Dosadením matice  $\mathbf{P}$  do vzťahu 1.6 získame maticový zápis:

$$(\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4) = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4) \begin{pmatrix} 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \\ 0,865 & 0,135 & 0 & 0 \\ 0,594 & 0,271 & 0,135 & 0 \\ 0,323 & 0,271 & 0,271 & 0,135 \end{pmatrix}$$

Následne roznásobením a pridaním podmienky 1.7 získame sústavu rovníc.

$$\pi_1 = 0,323\pi_1 + 0,865\pi_2 + 0,594\pi_3 + 0,323\pi_4$$

$$\pi_2 = 0,271\pi_1 + 0,135\pi_2 + 0,271\pi_3 + 0,271\pi_4$$

$$\pi_3 = 0,271\pi_1 + 0,135\pi_3 + 0,271\pi_4$$

$$\pi_4 = 0,135\pi_1 + 0,135\pi_4$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

Riešenie pre danú sústavu je  $\pi_1 = 0,480$ ,  $\pi_2 = 0,271$ ,  $\pi_3 = 0,174$  a  $\pi_4 = 0,075$ . Na základe hodnôt vektora rovnovážnych pravdepodobností  $\pi$ , možno konštatovať, že z dlhodobého hľadiska bude stav zásob na začiatku týždňa v 48% prípadov rovný nula, v 27,1% prípadov rovný jednej, v 17,4% prípadov rovný dva a 7,5% prípadov rovný tri.

Vypočítané rovnovážne pravdepodobnosti môžeme ďalej využiť pri nákladovej analýze. Náklady na skladovanie závisia od stavu zásob na konci týždňa, teda od  $X_t$ , potom očakávané náklady na skladovanie možno vypočítavať podľa vzťahu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_t) \right) = \sum_{j=0}^m \pi_j C(j) \quad (1.8)$$

Nech vektor  $C^T = (0, 1, 2, 3)$  predstavuje náklady na skladovanie. Ak sa na sklade na konci týždňa nenachádzajú žiadne zásoby náklady na skladovanie sú nulové, ak je na sklade jedna jednotka zásob, náklady sú 1€ atď. Celková stredná hodnota očakávaných nákladov na skladovanie sa rovná 2,88€.

Náklady spojené s objednávaním závisia od koncového stavu zásob na konci predchádzajúceho týždňa, teda od  $X_{t-1}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n C(X_{t-1}) \right) = \sum_{j=0}^m \pi_j C(j) \quad (1.9)$$

pričom firma objednáva tovar iba ak stav zásob na sklade klesne na nula kusov, potom vektor nákladov na objednanie možno vyjadriť ako  $C^T = (10, 0, 0, 0)$ , uvažujeme, že náklady na objednanie sú 10€. Celková stredná hodnota očakávaných nákladov na objednávanie sa rovná 4,08€.

Náklady na deficit možno modelovať nasledovne:

$$C(D_t) = \begin{cases} 15 \max \{D_t - 3, 0\} & \text{ak } X_{t-1} = 0 \\ 15 \max \{D_t - X_{t-1}, 0\} & \text{ak } X_{t-1} \geq 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Tabuľka č.1: Poissonove rozdelenie pravdepodobností pre  $\lambda = 2$

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $D_t$    | 0        | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        |
| $P(D_t)$ | 0,135335 | 0,270671 | 0,270671 | 0,180447 | 0,090224 | 0,036089 | 0,012030 |

|          |          |          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $D_t$    | 7        | 8        | 9        | 10       | 11       | 12       | 13       |
| $P(D_t)$ | 0,003437 | 0,000859 | 0,000191 | 0,000038 | 0,000007 | 0,000001 | 0,000000 |

Strednú hodnotu nákladov na deficit vypočítame na základe tabuľky č. 1 a vzťahu 1.10.

$$C(0) = 15 E(\max \{D_t - 3, 0\}) = 15(P_D(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \dots) = 7,56€$$

$$C(1) = 15 E(\max \{D_t - 1, 0\}) = 15(P_D(2) + 2P_D(3) + 3P_D(4) + \dots) = 17,03\text{€}$$

$$C(2) = 15 E(\max \{D_t - 2, 0\}) = 15(P_D(3) + 2P_D(4) + 3P_D(5) + \dots) = 12,97\text{€}$$

$$C(3) = 15 E(\max \{D_t - 3, 0\}) = 15(P_D(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \dots) = 7,56\text{€}$$

Priemerné očakávané náklady na deficit určíme podľa vzťahu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(D_i)\right) = \sum_{j=0}^m \pi_j C(j) \quad (1.11)$$

Celková stredná hodnota očakávaných nákladov na deficit sa rovná 21,66€.

Modelovanie celkových očakávaných nákladov pomocou rovnovážnych pravdepodobností Markovových reťazcov možno použiť ako nástroj na podporu rozhodovania pri voľbe vhodnej stratégie zásobovania.

### Použitá literatúra

1. HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G.J: Introduction to Operations Research, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2009, ISBN-10 0077298349.
2. REIFF, M: Analýza lojality zákazníkov a podielu na trhu pomocou modelu Markovho reťazca In Možnosti využitia geografického informačného systému v maloobchode ako zdroja strategickej inovácie z hľadiska posilnenia konkurencieschopnosti podnikov : zborník vedeckých statí projektu VEGA 1/0039/11 / Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. - ISBN 978-80-225-3521-2. - S. 75-81.

### Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: [reiff@euba.sk](mailto:reiff@euba.sk)

# ŘEŠENÍ ÚLOH OPTIMALIZACE V PROSTŘEDÍ MATLABU

## SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS IN MATLAB

*Nataliya Soldatyuk*

### **Abstrakt**

Současné technologie nabízí široký výběr programu pro automatizované řešení optimalizačních úloh. Jedním z pozoruhodných programů je Matlab, optimalizační možnosti kterého zahrnují více než 80 přístupů pro řešení úloh kvadratického, lineárního a nelineárního programování, úloh s řídkými maticemi a strukturovaných rozsáhlých úloh. Cílem příspěvku je podrobná analýza těchto přístupů, mechanismů jejich fungování, specifikace jejich použití a alternativních možnosti jiných programů.

***Klíčová slova:** Optimalizace, Matlab, algoritmizace*

### **Abstract**

Current technologies offer wide range of programs for solving of optimization problems. Matlab is one of the most remarkable programs. Its optimization facilities contain more than 80 different approaches for solving of problems of quadratic, linear and non-linear programming, and problems with sparse matrixes. The aim of the article is detailed analysis of these approaches, function mechanisms, specification of its usage, and alternative capabilities of other programs.

***Keywords:** Optimization, Matlab, algorithm development*

## **1 ÚVOD**

Matlab - jeden z nejstarších, důkladně rozpracovaných a otestovaných časem systémů automatizace matematických výpočtů, který je postaven na rozšířeném zobrazení a použití maticových operací. Také Matlab je programovacím jazykem čtvrté generace, který místo vypisování jednotlivých příkazů dovolují komunikovat s počítačem pomocí obrázkových prostředků – nabídek, dialogů, obrázků. Uživatel tohoto prostředí tedy vůbec nemusí umět programovat, pouze interaktivně vytváří požadovaný výsledek co možná vizualizovaným způsobem. Matlab je vhodným nástrojem jak pro jednorázové výpočty, tak i pro automatizaci celého procesu.

Matlab má široký rozsah aplikací. Typické oblasti použití jsou:

- inženýrské výpočty
- vývoj algoritmů
- modelování, simulace a vývoj prototypů
- analýza dat a jejich vizualizace
- inženýrská grafika
- vývoj aplikací včetně tvorby grafického uživatelského rozhraní.

Možnosti Matlabu mohou být rozšířeny pomocí problémově orientovaných toolboxů. Tyto toolboxy využívají funkce jádra Matlabu a rozšiřují je o další funkce užitečné v oblasti, pro kterou daný toolbox je určen – například, optimalizace, ([6]).

Název Matlab pochází z anglického MATrix LABoratory. Základním datovým typem Matlabu je matice (orientované dvourozměrné pole bez nutnosti deklarovat rozměry). Nicméně, syntaxe programovacího jazyka systému je promyšlená velice pečlivě, což usnadňuje práci s Matlabem a také umožňuje používání Matlabu i pro uživatele, původním zájmem kterých nebyly maticové výpočty. Tato vlastnost spolu s množstvím zabudovaných funkcí umožňuje relativně snadný zápis a řešení mnoha technických problémů v kratším čase než řešení v klasických jazycích jako je “C/C++” nebo FORTRAN.

Matlab vytvořil na konci sedmdesátých let profesor Cleve Moler, který v té době působil na Univerzitě v Novém Mexiku na katedře informačních technologií. Navrhnul Matlab z důvodu, aby jeho studenti mohli využívat LINPACK (linear algebra package) a EISPACK (subroutines for eigenvalues, eigenvectors, matrix operations) bez nutnosti se učit programovací jazyk Fortran, který se mnoho let využíval jako hlavní jazyk pro matematické výpočty. Původně Matlab nebyl určen pro komerční účely, ale potenciál tohoto programu byl tak nadějný, že firma MathWorks, Inc v krátké době se zaujala jeho vývojem.

Od té doby Matlab se neustále vyvíjí, ve zlepšování systému se zúčastnily nejlepší světové školy v oboru matematiky a programování. Na cestě svého vývoje Matlab překonal řadu problémů (například, omezení operační paměti, které umožňovalo práci s maticemi jenom omezeného rozměru, a doba zpracování algoritmu trvala výrazně díl). Teď se objevila nejnovější verze systému — Matlab 6. Nyní více než deset populárních počítačových platforem může pracovat se systémem Matlab a počet uživatelů tohoto programu přesahuje jeden milion. Současné omezení Matlabu: pro operační systémy 64-bit Windows XP, Linux, Solaris a pozdější systémy celkový pracovní prostor v Matlabu je omezen na 8 TB a největší velikost matice nesmí přesahovat 8 TB, což je matice, která obsahuje  $2^{48} - 1$  prvků. Pro konkrétní instalace Matlabu informace o paměti lze zobrazit pomocí příkazu *memory*. Příkaz *memory* zobrazí informace o tom, kolik paměti je k dispozici a kolik paměti aktuálně používá Matlab.

## 2 MOŽNOSTI OPTIMIZAČNÍHO TOOLBOXU V MATLABU

Optimalizační toolbox je soubor funkcí, které rozšiřují možnosti prostředí numerických výpočtů Matlabu,([6]). Toolbox obsahuje podprogramy pro mnoho typů optimalizačních úloh:

- nepodmíněná nelineární minimalizace
- podmíněná nelineární optimalizace, úlohy s penalizacemi, úlohy minimaxu, semi-infinitní minimalizační úlohy
- kvadratické a lineární programování
- nelineární metody nejmenších čtverců a aproximace křivek
- řešení soustav nelineárních rovnic
- lineární metody nejmenších čtverců s vazbami
- úlohy s řídkými maticemi a strukturované rozsáhlé úlohy.

## 3 METODOLOGIE

Nejpodstatnější součástí numerického jádra Matlabu jsou algoritmy pro operace s maticemi reálných a komplexních čísel.

Optimalizační algoritmy lze rozdělit na:



- algoritmy "středního rozsahu", nebo "medium scale" algoritmy
- algoritmy "velkého rozsahu", nebo „large scale“ algoritmy

V závislosti na účelu a formulaci úlohy matlabové funkce používají pro výpočty "medium scale" nebo „large scale“ algoritmy. Algoritmy "velkého rozsahu" se používají v případech, kdy není třeba ukládat ani pracovat s plnými (hustými) maticemi. Všechny operace probíhají s použitím řídkých matic. Kromě toho, vnitřní algoritmy buď zachovávají vlastnosti řídkých matic, jako je například Choleského rozklad, nebo nevytvářejí nové matrice, jako je například metoda sdružených gradientů.

Oproti algoritmům "velkého rozsahu", algoritmy "středního rozsahu" pracují s plnými maticemi. Pokud problém je dostatečně rozsáhlý, plné matice zabírají značné množství paměti a zpracování tohoto algoritmu může probíhat delší dobu.

Název "Algoritmy velkého rozsahu" je trochu zavádějící, jelikož tyto algoritmy se mohou používat i pro řešení malých úloh. Kromě toho, není potřeba specifikovat žádné řídké matice pro použití algoritmu "velkého rozsahu". Algoritmy "středního rozsahu" nabízejí větší funkcionalitu, jako je například další typy vazeb, ale výběr efektivnějšího algoritmu závisí na formulaci problému a cílů. Optimalizační volby předávané podprogramům mění optimalizační parametry. Využívá se standardní nastavení optimalizačních parametrů, ale parametry mohou být též měněny strukturou voleb.

Prostředky optimalizačního toolboxu nabízejí výběr algoritmů metod spádových směrů, ([6]). Základní algoritmy pro minimalizaci bez omezení jsou Nelder-Meadova simplexová metoda a BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, a Shanno) kvazim Newtonovská metoda. Pro minimalizaci s omezením jsou použity metoda minimaxu, "goal attainment" metoda, semi - infinite minimalizace a sekvenční kvadratické programování (SQP). Nelineární problémy jako nelineární případ metody nejmenších čtverců používá Gaussovo-Newtonovu a Levenbergovo-Marquardtovu metodu. K řešení nelineárních rovnic se také užívá "trust-region" algoritmus. Pro minimalizaci bez omezení a nelineární úlohu nejmenších čtverců je možno použít metody typu "line-search". Tyto metody používají kubické a kvadratické interpolační a extrapolací metody.

Víceúčelové algoritmy (s výjimkou lineárního programování) jsou metody typu "trust-region". Úlohy s omezením jsou řešeny uvažovanými Newtonovými metodami. Úlohy s podmínkami ve tvaru rovností jsou řešeny "projective preconditioned conjugate gradient" iterací. Metoda lineárního programování je variantou algoritmu Mehrotra prediktoru-korektoru, "primal-dual interior-point" metody.

## 4 UŽIVATELSKE PROSTREDI MATLABU - SPECIFIKACE

Operace v Matlabu jsou navrženy tak, aby byli co nejvíc přirozené a snadno srozumitelné. Základem práce v Matlabu je zápis příkazů v textové podobě do příkazového řádku. Všechny operace je možné provádět v hlavním okně, kde napsaný příkaz se hned provede. Pro práci s rozsáhlými algoritmy existuje možnost vytvoření M-file (script file), který představuje sebou textový soubor obsahující Matlabové příkazy. Výhodou m-souboru je možnost snadného upravování a ukládání do systémové paměti, zatímco příkazy napsané v příkazové řádce se ukládají jenom do krátkodobé paměti a nebudou zobrazeny při dalším spuštění Matlabu. M-soubory se ukládají v textových souborech s příponou \*.m.

Základním datovým typem je komplexní matice s čísly ve dvojnásobné přesnosti. Proměnné není potřeba deklarovat – vytvoří se automaticky při prvním použití. Maticový přístup k práci s daty trochu se liší od přístupu běžných programovacích jazyků. Důsledkem je, že základní matematické operace se standardně aplikují jako maticové, což znamená, že např. není možné násobit libovolně dvě proměnné. Ale takový přístup má i své výhody. Zatímco jiné programovací jazyky pracují s čísly postupně, Matlab umožňuje rychle a snadno pracovat s celými maticemi. Například, pro změnu položek dat podle jejich hodnot v jiných jazycích je potřeba vytvořit *for* cyklus, zatímco maticový přístup Matlabu umožňuje provést tuto operaci jednoduše a efektivněji.

Operace s vektory a maticemi, které jsou vestavěné v Matlabu, jsou daleko rychlejší než operace vyžadující kompilaci a interpretaci. To znamená, že pokud je potřeba získat co nejvyšší rychlost zpracování M-souborů, algoritmy se musí vektorizovat. Vektorové nebo maticové operace by měly nahradit cykly *for* a *while*. Pokud není možné část kódu vektorizovat, existuje možnost jak té cykly *for* urychlit: je třeba provést předběžnou alokaci vektorů, do kterých se v cyklu ukládají výsledky.

Všechny příkazy a funkce, které mohou být použity v Matlabu jsou popsány v dokumentaci, která je k dispozici on-line na stránkách <http://www.mathworks.com/help/> (zatím online dokumentace je jenom v anglickém jazyce). Také podrobný návod k použití matlabových funkcí lze nalézt přímo v prostředí Matlabu v sekci "help" v nástrojové liště nebo zadáním do příkazového řádku příkaz "help *function name*". V odpovídajícím oznámení se objeví podrobný návod k použití funkce a také příklady použití této funkce v různých modifikacích. Formáty, které je potřeba používat pro vstupní proměnné a také interpretace těchto proměnných také popsány v návodu, což značně zjednodušuje práci pro uživatele.

Nápovědu se dá použít i v případě, kdy neznáme název funkce, kterou potřebujeme. Existuje užitečný příkaz *lookfor* následovaný řetězcem, který se bude vyskytovat v textové nápovědě hledané funkce. Výsledkem tohoto příkazu bude seznam funkcí, které obsahují zadaný řetězec ve své textové nápovědě. Například, po použití příkazu *help elfun* se objeví seznam příkazů ze skupiny základních matematických funkcí.

## 5 OPTIMALIZAČNÍ FUNKCE A JEJICH POUŽITÍ

### 5.1 Optimalizace bez vazeb

Pro řešení úlohy, která neobsahuje omezující podmínky a kterou se dá zapsat ve tvaru

$$\min_x f(x)$$

kde  $x$  – jednorozměrná anebo vícerozměrná proměnná.

se používá funkce *fminunc*. Omezení k použití této funkce: minimalizovaná funkce a omezení musí být spojitě. Funkce *fminunc* minimalizuje pouze reálná čísla, což znamená, že  $x$  se musí skládat pouze z reálné části a funkce  $f(x)$  musí vracet pouze reálná čísla. V případě, kdy  $x$  obsahuje komplexní proměnné, tato proměnná musí být rozdělena na reálnou a imaginární částí.

Funkce *fminunc* hledá minimum skalární funkce více proměnných. Pro nalezení řešení funkce používá kvazिनewtonovskou metodu a metodu spádových směrů. Existuje několik modifikací této funkce v závislosti na vstupujících a vystupujících parametrech. Například,  $x = \text{fminunc}(\text{fun}, x_0)$  začíná hledat optimální řešení od bodu  $x_0$  a nachází lokální minimum  $x$  pro popsanou funkce v sekci *fun*.

## 5.2 Lineární programování

Pro řešení problémů typu

$$\begin{aligned} \min_x f^T(x) \\ \text{za podmíněk} \quad A \cdot x \leq b, \\ \quad \quad \quad Aeq \cdot x = beq, \\ \quad \quad \quad lb \leq x \leq ub. \end{aligned}$$

kde  $f$ ,  $x$ ,  $b$ ,  $beq$ ,  $lb$ ,  $ub$  jsou vektory a  $A$ ,  $Aeq$  jsou matice,

se používá funkce *linprog* se syntaxí  $x = \text{linprog}(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)$ . Podle výchozího nastavení se používá algoritmus "velkého rozsahu", který je založen na LIPSOL (Linear programming Interior-Point SOLvers), způsobu současného řešení primární a duální úlohy metodou vnitřního bodu. Funkce *linprog* se dá používat v různých modifikacích, například zvolit použití simplexové metody při hledání optimálního bodu.

Pomocí syntaxe  $x = \text{linprog}(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)$  se nastavuje počáteční bod. Nicméně, tato možnost existuje pouze pro algoritmus typu "standardní algoritmy". Ve výchozím nastavení se používá algoritmus "velkého rozsahu", který ignoruje jakýkoliv počáteční bod.

## 5.3 Kvadratické programování

Funkce *quadprog* se používá pro řešení úloh typu

$$\begin{aligned} \min_x \frac{1}{2} x^T H x + f^T x \\ \text{za podmíněk} \\ \quad \quad \quad A \cdot x \leq b, \\ \quad \quad \quad Aeq \cdot x = beq, \\ \quad \quad \quad lb \leq x \leq ub. \end{aligned}$$

kde  $H$ ,  $A$  a  $Aeq$  jsou matice,  $f$ ,  $b$ ,  $beq$ ,  $lb$ ,  $ub$  a  $x$  vektory.

Pokud ve formulaci úlohy jsou definované omezení typu nerovnosti a také horní a dolní meze proměnné  $x$  ( $lb, ub$ ), automaticky se používá "medium-scale" algoritmus. Pro nalezení optimálního řešení algoritmus používá metodu projekci. Počáteční bod tento algoritmus nachází řešením úlohy lineárního programování. Pokud ve formulaci úlohy uvedené jenom omezení typu nerovnosti anebo jenom horní a dolní meze, funkce *quadprog* implicitně používá "large-scale" algoritmus, který je založen na Newtonově metodě. Kódy "large-scale" algoritmu neumožňují rovnosti horní a dolní mezí, v případě, kdy  $lb(x)=ub(x)$ , systém vrací chybu.

Řešení problémů s nekonečnem nebo mínus nekonečno je často problémem bez omezení (v tomto případě výsledek příkazu se vrátí s poznámkou, že optimum nebylo nalezeno). Nicméně pokud konečné řešení existuje, funkce *quadprog* může poskytnout pouze lokální minimum, protože problém může být nekonvexní. Všeobecně *quadprog* určuje lokální řešení, dokonce i v případě, kdy problém je striktně konvexní.

## 5.4 Minimax

Funkce *fminimax* se používá pro řešení problémů typu

$$\begin{aligned} \min_x \max_{\{F_i\}} \{F_i(x)\} \\ \text{za podmíněk} \quad c(x) \leq 0, \quad ceq(x) = 0, \end{aligned}$$

$$A \cdot x \leq b, \quad Aeq \cdot x = beq,$$

$$lb \leq x \leq ub.$$

kde  $x$ ,  $b$ ,  $beq$ ,  $lb$  a  $ub$  jsou vektory;  $A$  a  $Aeq$  jsou matice;  $c(x)$ ,  $ceq(x)$  a  $F(x)$  jsou funkce které vrací vektory.  $F(x)$ ,  $c(x)$  a  $ceq(x)$  mohou být nelineárními funkcemi. Minimalizované funkce a omezení musí být nepřetržitými. Algoritmus funkce *fminimax* používá sekvenční kvadratickou programovací metodu (SQP).

## 6 ZÁVĚR

Matlab je jedním z nejpopulárnějších programů pro řešení optimalizačních úloh. Jeho optimalizační možnosti zahrnují více než 80 přístupů. Kromě toho, Matlab se široce používá i v jinech oblastech. Nevýhodou Matlabu je jeho vysoká cena. Existuje několik volně dostupných alternativ Matlabu. Například, programy GNU Octave, Freemat, Scilab mají velmi podobné možnosti, pracovní prostředí a programovací jazyk. Navíc standardní instalace programu Scilab obsahuje nástroj, který umožňuje konverze dokumentů z Matlabu do Scilab. Dalším programem obsahujícím velké možnosti pro optimalizaci je ANSYS, který je velmi populární i když tento program je více zaměřen na specifické inženýrské výpočty. ANSYS obsahuje optimalizační komponentu a pro řešení využívá analytický nástroj metodu konečných prvků.

### Použitá literatura

1. The Matworks, autoři MATLABu a SIMULINKu. The Mathworks.[online], [září 2014]. Dostupné z WWW: <http://www.mathworks.com/>.
2. JABLONSKÝ, Operační výzkum – kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. Třetí vydání. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
3. GELETU, Solving Optimization Problems using the Matlab Optimization Toolbox - a Tutorial [online], TU-Ilmenau, 2007. Dostupný z WWW: <https://www.informs.org/content/download/267136/2527047/file/Matlab%20for%20Optimization.pdf>
4. KOZUBEK, BRZOBOHATÝ, JAROŠOVÁ, HAPLA, MARKOPOULOS, Lineární algebra s Matlabem[online], 2012. Dostupný z WWW: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni\\_algebra\\_s\\_matlabem.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra_s_matlabem.pdf)
5. NETRVALOVÁ, A. Použití MATLABu pro matematickou optimalizaci [online]. Plzeň: Západočeská univerzita. Dostupný z WWW: <http://www.kiv.zcu.cz/~netrvalo/phd/MATLABOptim.pdf>

### Kontaktné údaje

Mgr. Nataliya Soldatyuk

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420 2) 24 095 111

email: [xsoln900@vse.cz](mailto:xsoln900@vse.cz)

Článek vznikl s podporou interní grantové agentury, grant č.F4/11/2013.

# OPTIMALIZÁCIA STRATÉGIE ŠPORTOVÉHO STÁVKOVANIA S VYUŽITÍM ALGORITMU NAJBLIŽŠIEHO SUSEDA A GENETICKÝCH ALGORITMOV

## OPTIMIZATION OF STRATEGY OF SPORTS BETTING USING THE NEAREST NEIGHBOR ALGORITHM AND GENETIC ALGORITHMS

*Stanislav Sopko*

### Abstrakt

Cieľom športového stávkovania nie je len správne predpovedať výsledok zápasu, respektíve stávkovej udalosti, ale rovnako na stávke aj profitovať. Táto práca popisuje navrhnutý model športových stávok, ktorý používa pre vyhľadávanie možných riešení algoritmus najbližšieho suseda a genetické algoritmy. Model využíva informácie o hrajúcich tímoch, ich formáciách, rovnako používa dáta o jednotlivých hráčoch, výsledky predchádzajúcich hier, ale aj kurzy ponúkané stávkovými kancelármi. Tento model bude trénovaný na dátach zo sezón 2002/03 až 2008/09 z anglickej Premier League a model bude testovaný oproti odohraným zápasom zo sezón 2009/10 a 2010/11. Navrhnutý model by mal byť schopný optimalizovať dlhodobú stratégiu stávkovania, špeciálne pre oblasť anglického futbalu.

**Kľúčové slová:** športové stávky, algoritmus najbližšieho suseda, genetické algoritmy, optimalizácia, tréningová množina

### Abstract

The objective of sports betting is not only to correctly predict the outcome of the match (betting event) but also to make a profit. This paper describes designed model for sports betting, which is used for finding possible solutions using the nearest neighbor algorithm and genetic algorithms. The model uses information about playing teams, their formations, data on individual players, the results of previous games, but also courses offered by bookmakers. This model is trained using the data from seasons 2002/03 to 2008/09 of the English Premier League and the model is tested against games already played in seasons 2009/10 and 2010/11. The proposed model should be able to optimize long-term strategy of betting, especially in the area of English football.

**Keywords:** sports betting, nearest neighbor algorithm, genetic algorithms, optimization, training set

## 1 ÚVOD

Športové stávkovanie je stále viac a viac populárne, o čom svedčí rastúci počet registrovaných hráčov v stávkových kanceláriách. Záujem v oblasti stávok v poslednom období rastie tiež vo vedeckej komunite. Literatúra zaoberajúca sa prognózou výsledkov športových udalostí je pomerne obširna. V Európe je jedničkou medzi športmi futbal a tak postupom času vznikalo mnoho štúdií o predvídaní výsledkov v tejto športovej disciplíne, v tejto práci čerpáme hlavne z publikácií [4, 5, 6]. [6] predstavuje model, ktorý používa pre predpoveď výsledkov útočné a obranné sily jednotlivých hrajúcich tímov, doplnené údajmi o predchádzajúcich hráčoch. Model uvedený v [5] je postavený na teórii fuzzy logiky a je optimalizovaný genetickým algoritmom a neurónovými sieťami. Ako vstup slúžia výsledky posledných piatich výsledkov každého

týmu a dva posledné vzájomné zápasy medzi nimi, spolu teda 12 zápasov. Model predstavený v [4] je založený na Bayesových sieťach. Obsahuje historické údaje o predchádzajúcich hrách, ale ku konštrukcii predpovedí tiež využíva odborné znalosti.

Všetky spomenuté modely sa zameriavajú na správnu predikciu výsledku zápasu, pričom nekladú pozornosť na finančný profit zo stávk. To môže byť ale výrazne zavádzajúce, pretože výplata série „na prvý pohľad“ víťazných stávk môže byť ľahko negatívne vykompenzovaná pár nešťastnými prehranými stávkami. Model predstavený v tomto článku používa výrazne väčšie množstvo dát ako len historické výsledky. Na rozdiel od [6] v modeli nepoužívame žiadne odborné znalosti alebo subjektívne informácie. Hlavnou novinkou a inováciou tohto prístupu je, že sa snaží optimalizovať skutočné zisky zo stávkovania, a cieľom tak nie je iba správne predpovedať výsledky série zápasov.

## 2 DÁTA

Pri analýze šance tímu A vyhrať proti tímu B je dôležité, aby sa vzalo do úvahy veľa relevantných faktorov, ktoré môžu ovplyvniť výsledok, ak to situácia dovoľuje. Analýza výsledkov predchádzajúcich zápasov v tomto prípade nestačí. Uvedieme príklad, hráči relatívne často menia tímy a niekto, kto hral za tím A v roku 2005, môže hrať za tím B v roku 2014. Z tohto dôvodu by analýza mala obsahovať informácie o jednotlivých hráčoch. V rámci zahrnutia informácií o jednotlivých hráčoch do modelu je tiež dôležité zväžiť, ktorí hráči sa skutočne zúčastňujú na danom zápase, či už v základnej zostave, alebo na lavičke náhradníkov, samozrejme s dôrazom na tých v základnej zostave. Náhodné a neočakávané slabiny rôznych formácií nám tiež poskytujú cenné informácie o zápase, rovnako ako aj aktuálne dispozície celého tímu, ktoré je možno posúdiť z výsledkov zápasov, ktoré bezprostredne predchádzajú danému zápasu, alebo výsledky posledných duelov medzi oboma hrajúcimi tímami, atď. Stávkari berú do úvahy pred podaním stávky všetky druhy týchto spomenutých informácií. Naš navrhnutý algoritmus by mal byť teda schopný dané správanie zachytiť a dané informácie zohľadniť. V navrhnutom modeli je každý zápas reprezentovaný 134 parametrami. Pre otestovanie modelu je možné použiť všetky zápasy zo sezón 2002/03 až 2009/10 anglickej Premier League, celkovo teda 3040 zápasov.

## 3 VLASTNÝ MODEL

Hlavný strategický prístup v našom modeli je postavený na metóde najbližšieho suseda (KNN z anglického k-nearest neighbors). Pravdepodobnosť výhry stávky sa vypočíta na základe toho, ako veľa "podobných" stávk, nájdených KNN, v minulosti vyhralo. Cieľom nie je predpovedať výsledok zápasu, ale optimalizovať zisky z aktuálnej stávky.

Stávky, tak ako sú definované v našom modeli, môžeme z hľadiska možného výsledku zapísať nasledovne:

$p_1$  – výhra domáceho celku

$p_x$  – zápas skončí remízou

$p_2$  – výhra hosťujúceho celku

$p_{over}$  – celkový počet gólov nad 2,5

$p_{under}$  – celkový počet gólov pod 2,5

Model pozostáva zo 4 modulov, ktoré budú predstavené v nasledujúcich podkapitolách.

### 3.1 Modul predpovede

Tento modul vypočíta pravdepodobnosť výhry každej z uvažovaných stávok pri použití nasledujúceho zápisu:

$\underline{m} = [a_1, a_2, \dots, a_{134}]$  predstavuje hru, ktorej výsledok sa snažíme predikovať,  $a_i$  predstavujú vysvetľujúce premenné

$M = \{m : m = [a_1, a_2, \dots, a_{134}, y]\}$  je množina všetkých už uskutočnených zápasov,  $y$  predstavuje výsledok zápasu

$M_i$  –  $i$ -té atribúty zápasov z množiny  $M$

$n_i = \max(M_i) - \min(M_i)$

$w_i$  – váhy  $i$ -tého atribútu

$d_m$  – vzdialenosť  $\mathbf{m}$  od  $\underline{m}$

$$d_m = \sum_{i=1}^{134} \frac{|a_i^m - a_i^{\underline{m}}|}{n_i}$$

$d_m$  slúži ako metrika v KNN algoritme, s veľkosťou „susedstva“  $k$  nastaveného na 15.

### 3.2 Modul rozhodovania

Po výpočte pravdepodobnosti každého z piatich typov ( $p_1, p_x, p_2, p_{under}, p_{over}$ ) tento modul rozhodne, či má byť určitý typ stávky umiestnený na tiket alebo nie. Toto rozhodnutie závisí na tom, či tento typ stávky stojí za riziko, ktoré so sebou prináša. V rámci tohto modulu používame nasledujúci zápis:

$forecast_p$  - pravdepodobnosť výhry stávky  $p$  vyplývajúca z predpovede

$bookieOdd_p$  - kurzy na stávku  $p$  nastavené bookmakerom

$forecastOdd_p$  - kurzy na stávku  $p$  vyplývajúce z predpovede

$$forecastOdd_p = \frac{1}{forecast_p}$$

Za predpokladu, že sme správne predpovedali výsledok zápasu, stávka  $p$  je hodná rizika, ak platí:

$$bookieOdd_p \geq forecastOdd_p$$

Predpoveď nemusí byť za každých okolností vždy ideálna, preto si náš model necháva v tomto ohľade rezervu a stávka bude podaná iba ak bude platiť:

$$bookieOdd_p \geq 1,5 * forecastOdd_p$$

### 3.3 Modul vyhodnotenia

Tento modul je určený pre hodnotenie výkonnosti algoritmu v stanovený časový interval. Za týmto účelom sa vezmú a skúmajú zápasy spadajúce do daného časového intervalu. Navrhované typy sú porovnané so skutočnými výsledkami. Na tomto princípe sú vypočítané hodnoty výnos a maxstrata. Používame nasledujúce zápis:

$P$  – množina typov v rámci pevného časového intervalu

$P = [p_1, p_2, \dots]$ ,  $\text{time}(p_i) \leq \text{time}(p_{i+1})$

$\#P$  – počet typov v množine  $P$

$$\text{výhra}(p) = \begin{cases} \text{bookieOdd}_p & , \text{ ak je typ správny, } p \in P \\ 0 & , \text{ inak} \end{cases}$$

$$\text{výhra}(P) = \sum_{i=1}^{\#P} \text{výhra}(p_i)$$

$$\text{výnos}(P) = \frac{\text{win}(P) - \#P}{\#P}$$

$\text{maxstrata}(P)$  – dĺžka najdlhšieho podreťazca núl v sekvencii  $\text{výhra}(p_1), \text{výhra}(p_2), \dots, \text{výhra}(p_{\#P})$

Výkonnosť algoritmu je finálne posúdená na základe vzťahu:

$$f(P) = \left(1 + \frac{\text{výnos}(P)}{\text{maxstrata}(P) + 1}\right)^{\#T}$$

Vyhodnotenie algoritmu predvedieme na jednoduchom príklade, kde:

investujeme 100 eur,  $\#P = 20$ ,  $\text{maxstrata}(P) = 9$ ,  $\text{výnos}(P) = 0,2$ .

Vzhľadom k tomu, že  $\text{maxstrata} > 0$ , tak z toho vyplýva, že nemôžeme investovať všetok dostupný kapitál v každom type, lebo by sme nakoniec stratili všetko. Nemali by sme investovať ani 1/9 kapitálu, pretože touto stratégiou po stratách môžeme tiež skrachovať. Investujeme 1/10 dostupného kapitálu v každom type. Výnos ukazuje, že v priemere získame 20% investovaných finančných prostriedkov. Po dosadení do vzorca môžeme vidieť, že po investovaní do 20 typov, sme získali za uvedených predpokladov  $0,02^{20}$  násobok našej počiatočnej investície. Naš čistý zisk je teda 49 eur.

### 3.4 Modul optimalizácie

Optimalizácia je rozhodujúca pre dobrý výkon algoritmu, ktorý v práci popisujeme. Hlavným ťažiskom pri optimalizácii je vhodný výber použitých údajov pre výpočet vzdialenosti. Optimalizácia je založená na genetickom algoritme [5].

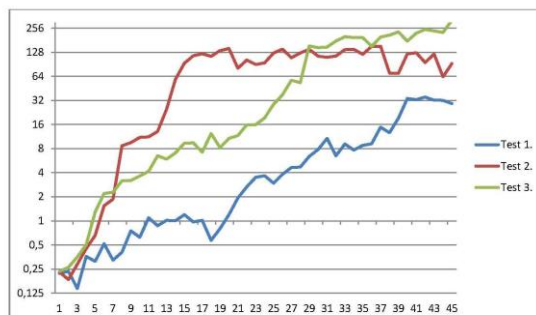
Pre náš model teda platí, že pri kódovaní sa chromozóm skladá zo 134 génov. Každý gén chromozómu nesie informácie o vysvetľujúcej premennej, ktorú reprezentuje a jeho váha –  $w$  je nastavená na 0 alebo 1. Váha  $w = 0$  znamená, že táto konkrétna vysvetľujúca premenná nie je použitá pri výpočte vzdialenosti. Selekcia pri genetickom algoritme je založená na metóde rulety. Kríženie nastane s pravdepodobnosťou 70%, a ak prebehne, tak na náhodne vybranom mieste. Pri procese mutácie sa váhy môžu náhodne zmeniť z 0 na 1 a naopak s pravdepodobnosťou 0,1%. Fitness funkcia je rovnaká ako už definovaná  $f(\mathbf{P})$ , ktorá bola použitá v module vyhodnocovania. Veľkosť každej generácie bola zvolená ako 10 a bolo použitých 45 generácií.

## 4 VÝSLEDKY

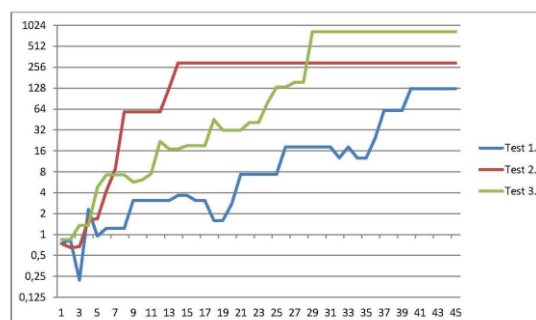
Tento model bol testovaný trikrát oproti výsledkom anglickej Premier League, špeciálne išlo o sezóny 2007/08 a 2008/09. Na obrázku 1 je znázornená priemerná „fitness“ každej zo 45 generácií v každom z troch testov. Obrázok 2 ukazuje „fitness“ najlepších chromozómov v každej generácii. Stratégia, ktorá prináša zisk bola nájdená už po štvrtej generácii genetického



algoritmu. Môžeme tiež vidieť, že algoritmus uviazne v lokálnom optime. Hodnota fitness funkcie pri najlepšej stratégii zistené počas testovaní bola rovná 843.



Obrázok 1: Priemerná hodnota fitness funkcie v generácií



Obrázok 2: Najvyššia hodnota fitness funkcie v generácií

Overenie veľmi sľubných výsledkov získaných v priebehu testu bolo vykonané oproti zápasom zo sezóny 2009/10, zahrnuli sme iba 7 najlepších stratégií. Tieto výsledky sú uvedené v tabuľke 1. Najlepšia stratégia zistená počas testov bola finálne tá najhoršia, ale niektoré stratégie stále prinášali zisky. Zdá sa, že v testovacej vzorke, alebo pri optimalizácii stratégie na základe výsledkov v sezónach 2007/08 a 2008/09 bude existovať pár vplyvov, ktoré nedokážu presne zachytiť stav ďalších sezón. Štyri stratégie, ktoré priniesli zisk pre sezónu 2009/10 boli ďalej overené oproti zápasom zo sezóny 2010/11. Výsledky sú uvedené v tabuľke 2. Tieto štyri stratégie priniesli zisk aj v sezóne 2010/11, takže je ich možno považovať za veľmi úspešné.

| Fitness 07/09 | Fitness 09/10 | výnos | výhry | straty | maxstrata |
|---------------|---------------|-------|-------|--------|-----------|
| 833,96        | 0,09          | -0,19 | 51    | 134    | 14        |
| 438,38        | 0,66          | -0,02 | 63    | 132    | 11        |
| 417,72        | 4,27          | 0,09  | 54    | 132    | 11        |
| 396,42        | 3,35          | 0,07  | 52    | 130    | 10        |
| 349,96        | 0,53          | -0,04 | 55    | 127    | 13        |
| 309,54        | 1,74          | 0,03  | 52    | 131    | 10        |
| 292,55        | 3,34          | 0,08  | 55    | 125    | 12        |

Tabuľka 1: Verifikácia na sezóne 2009/10

| Fitness 07/09 | Fitness 10/11 | výnos | výhry | straty | maxstrata |
|---------------|---------------|-------|-------|--------|-----------|
| 417,72        | 2,88          | 0,14  | 37    | 59     | 12        |
| 396,42        | 2,44          | 0,11  | 36    | 60     | 11        |
| 309,54        | 2,70          | 0,15  | 38    | 59     | 14        |
| 292,55        | 3,65          | 0,19  | 40    | 60     | 14        |

Tabuľka 2: Verifikácia na sezóne 2010/2011

## 5 ZÁVER

V tejto práci sme predložili algoritmus pre podporu investovania do športového stávkovania. Na rozdiel od väčšiny predchádzajúcich dostupných štúdií pracuje tento model výraznejšie s externými, verejne dostupnými, informáciami o futbalových zápasoch. Nezameriava sa na správnu predpoveď výsledkov zápasov, ale primárnym cieľom je profitovať z aktuálnych stávk. Ak sa stávka nezdá byť rentabilná, tak nie je podaná a hráč sa tak vyhne možným stratám. Predstavené výsledky ukazujú, že existuje istá možnosť vyvinúť ziskovú stratégiu v oblasti športových stávk. Existujú určite možnosti, ako zlepšiť náš model, napríklad zavedením neeuklidovskej metriky, samostatnými stratégiami pre rôzne typy stávk, alebo fuzzy logiky nad váhovými vektormi. Navrhnutý model je ale dobrým východiskom pre ďalší výskum, či už v oblasti futbalu alebo iných športov.

### PodĎakovanie

Tento príspevok vznikol za podpory grantu č. 11/2013, IG403023 internej grantovej agentúry.

### Použitá literatúra

1. BORYCKI D., A strategy in sports betting, *Annales UMCS Informatica AI XI*, 1 (2011) 7–13.
2. LAROSE D. T., *Discovering Knowledge in Data. An Introduction to DATA MINING*, Chapter 5.
3. LAROSE D. T., *Data mining methods and models*, Chapter 6.
4. MIN B., KIM J., CHOE C., EOM H., MCKAY R. I., A Compound Framework for Sports Prediction: The Case Study of Football, *Knowledge-Based Systems*, 21(7) (2008): 551.
5. ROTSHEIN A. P., POSNER M., RAKITYANSKAYA A. B., Football Predictions Based on a Fuzzy Model with Genetic and Neural Tuning, *Cybernetics and Systems Analysis* 41(4) (2005): 619.
6. RUE H., SALVESEN O., Prediction and retrospective analysis of soccer matches in a league, *The Statistician* 49(3) (2000): 399.

### Kontaktné údaje

Ing. Stanislav Sopko

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 00 Praha 3-Žižkov

email: [stanislav.sopko@vse.cz](mailto:stanislav.sopko@vse.cz)

# PRIAME ZAHRANIČNÉ INVESTÍCIE: PREHĽAD HLAVNÝCH TEORETICKÝCH PRÍSTUPOV<sup>1</sup>

## FOREIGN DIRECT INVESTMENT: AN OVERVIEW OF THE MAIN THEORIES

*Kvetoslava Surmanová*

### Abstrakt

Z historického hľadiska môžeme uviesť, že k prvým výrazným priamym zahraničným investíciám (ďalej len PZI) vo svete došlo koncom 50-tych rokov 20. storočia. Väčší rozmach nastal v 70. a 80. rokoch. V súčasnosti PZI patria k hlavným indikátorom národnej ekonomiky. Na problematiku PZI sa môžeme pozerieť z dvoch uhlov, z pohľadu makroekonomického a mikroekonomického. Z mikroekonomického hľadiska ide napr. o teóriu produkčného cyklu (Vernon, 1966), teóriu diverzifikovania rizika (Grubel, 1968), alebo „eclectic„ teóriu (Dunning, 1977). Na druhej strane makroekonomický prístup je reprezentovaný napr. dynamickou teóriou komparatívnych výhod (Kojima, 1973 a 1975) alebo teóriou hospodárskeho rozvoja (Dunning, 1981). Cieľom tohto príspevku je poskytnúť obraz o hlavných teoretických prístupoch PZI.

*KLúčové slová: PZI, ekonomický rast, cyklus, nezamestnanosť*

### Abstract

Historically, we can say that the first significant foreign direct investment ( FDI) in the world was the late 50s of the 20th century. The larger boom occurred in the 70s and 80s. FDI are the main indicator of the national economy currently. On the issue of FDI can be viewed from two points of view, from the perspective of macro and micro. From a microeconomic point of view it is for example the product-cycle theory, the risk-diversification theory, or "eclectic" theory. Second, a macroeconomic approach is represented e.g. dynamic theory of comparative advantage and the development-stage theory. The aim of this paper is to provide overview of the main theoretical approaches to FDI.

*Keywords: FDI, economic growth, cycle, unemployment*

## 1 ÚVOD

Existuje viacero foriem<sup>2</sup> získania kapitálu, jednou z nich sú PZI. PZI sú takou investíciou, pri ktorej dochádza k nákupu podielu spoločnosti, ktorý umožňuje kontrolu a významný vplyv<sup>3</sup> nad riadením spoločnosti, alebo investíciu na zelenej lúke. Rozhodujúce je, aby išlo o investíciu, pri ktorej nastáva kontrola nad majetkom získaným v zahraničí.

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0285/14 "Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na metódy priestorovej ekonometrie"

<sup>2</sup> Napr. pôžička kapitálu, licencia na zakúpenie technológie, zazmluvnenie príp. zakúpenie manažérskych alebo iných odborných služieb,...). Väčšinou ide no nákladnejší spôsob v porovnaní s PZI.

<sup>3</sup> Obvykle sa uvádza minimálne 10 % podiel na majetku spoločnosti a hlasovacích právach.

Mnohé vlády podnikajú kroky, aby získali PZI a poskytujú verejné subvencie na ich prilákanie. Pri týchto krokoch sa uvádzajú výhody ako zníženie miery nezamestnanosti, transfer vyspelejšej technológie, ktorá sa prenesie aj na domáce podniky, vyššia produktivita faktorov v ekonomike, rast celkovej ekonomickej výkonnosti<sup>4</sup> a zvýšenie domácej spotreby. Na druhej strane však stoja opatrenia, ktoré musí prijať hostiteľská krajina aby pritiahla zahraničný kapitál. Ide o opatrenia závislé od politických rozhodnutí a dohôd, pričom cenou za prílev zahraničného kapitálu a vytvorenie dodatočných pracovných miest sú často krát daňové prázdny. O takýchto investíciách by sme mohli povedať, že sú krátkodobé, lebo po uplynutí tohto obdobia sa firma môže presunúť na územie iného štátu, kde využíva opäť daňové úľavy.

Problematike PZI sa venuje množstvo prác nielen na teoretickej ale tiež empirickej úrovni. Hoci je ekonomickej literatúry o priamych zahraničných investíciách dostatok, tento jav je tak zložitý, že do dnešnej doby neposkytuje dostatočné vysvetlenie. Závěry v nich sú pozitívne ale majú tiež negatívny charakter. Uvedme aspoň niekoľko z nich.

Blomstrom (1994) našiel pozitívny vplyv v Mexiku a Indonézii, podľa neho PZI podporujú konkurencie schopnosť domácich firiem. Caves (1996) sa domnieva, že úsilie, ktoré vynakladajú krajiny so snahou získať PZI je v očakávaní možných potenciálnych pozitívnych vplyvov na ich ekonomiku. PZI by mali zvýšiť produktivitu práce, transfer technológií, manažérske poznatky, know-how, zníženie nezamestnanosti a prístup na externé trhy. Borensztein a kol. (1998) podporuje tieto myšlienky, uvažuje o PZI ako o spôsobe na dosiahnutie technologického spillovers s väčšou možnosťou na zabezpečenie rýchlejšieho ekonomického rastu v porovnaní s investíciami, ktoré musí preinvestovať hostiteľská krajina. Sridharan a spol. (2009) skúmali prostredníctvom VECM modelu reláciu PZI a ekonomického rastu. Výsledky ich štúdie poukazujú na obojsmerný vplyv oboch ukazovateľov v Brazílii, Rusku a Južnej Afrike. Jednosmerný vplyv PZI na ekonomický rast sa preukázal v prípade Indie a Číny.

Na druhej strane negatívne vplyv na rozvoj ekonomiky v PZI vidí Hanson (2001). Podľa Hirschmana (1958) výsledný efekt či už pozitívny alebo negatívny závisí do toho, do ktorého sektora národného hospodárstva PZI plynú.

### **1.1 Teória založená na produkčných cykloch**

Vernon (1966) rozvinul teóriu PZI založenú na produkčných cykloch. Zamerá sa na znižovanie nákladov umiestnením výroby v nízkonákladových krajinách. Táto teória bola použitá na vysvetlenie určitých typov PZI zo strany amerických spoločností v západnej Európe po druhej svetovej vojne vo výrobe. Zakladá sa na existencii štyroch fáz výrobného cyklu: inovácia, rast, zrelosť a úpadok. Po druhej svetovej vojne vzniká v Európe dopyt po produktoch vyrábaných v USA, preto Amerika začala exportovať, zaznamenala výhodu v medzinárodnej konkurencii.

V prvej fáze je nový produkt umiestnený na domáci trh a výroba prebieha taktiež v domácej krajine. Vo fáze rastu je produkt úspešný, domáci dopyt je nižší v porovnaní s vyprodukovaným množstvom a preto dochádza k exportu, pričom je výroba ešte stále v domácej krajine. Vo fáze zrelosti sa výroba presúva do zahraničia a tým už dochádza k vstupu na zahraničný trh priamo. V tejto fáze sa výrobca snaží dosiahnuť konkurenčné výhody – dochádza k PZI. Vo fáze poklesu dochádza k presunu výroby do ďalšej krajiny.

---

<sup>4</sup> Tento efekt – zvýšenie ekonomickej výkonnosti krajiny – sa nazýva „spillover“ a predstavuje celkovú ekonomickú externalitu, t. j. úžitok pre ekonomiku, ktorý sa realizuje nad rámec priamych efektov vyjadrených v trhových transakciách. (Fifeková)

## 1.2 Dunningova teória „eclectic“

Najčastejšie sa v literatúre uvádza ako základ štúdia Dunninga (1977), ktorá je známa ako „eclectic theory“. Celkový koncept býva označovaný ako „OLI“ koncept. Táto teória spája jednotlivé pohľady do uceleného celku. Vychádza z predpokladu, že multinacionálna korporácia má rovnaké informácie o trhu ako jej konkurenti. Hovorí, že PZI sú funkciou nasledovných výhod: vlastníctvo, umiestnenie a internalizácia. Pomocou týchto výhod vysvetľuje determinanty investičného rozhodovania firmy.

Analyticky môžeme funkciu PZI zapísať nasledovne:

$$PZI = f(O, L, I), \text{ kde}$$

*O* – vyjadruje vlastnícke výhody (ownership advantages), ktoré má investor oproti ostatným spoločnostiam pôsobiacich na rovnakom trhu,

*L* – výhody danej lokality (location advantages). Napr. infraštruktúra, dostupnosť pracovnej sily, kultúra národa, atď.

*I* – znamená vybudovanie dcérskej spoločnosti (alebo inú pobočku) v zahraničí (internalisation advantages), pričom je stále napojená na materskú spoločnosť, čo umožní znížiť transakčné náklady, náklady spojené s výskumom, výhody subdodávky od materskej spoločnosti, a iné. Táto výhoda znamená, že firma si ponechá know-how z materskej spoločnosti.

Podľa Dunninga musia byť splnené všetky tri uvedené podmienky, až to zabezpečí rozhodnutie firmy o zahraničnej investícii. Teórií o PZI je viacero, ale práve OLI koncept najlepšie vystihuje podstatu súčasných PZI.

## 1.3 Dunningova teória hospodárskeho rozvoja

Táto teória popisuje fázy pôsobenia PZI na ekonomiku. Rozoznáva 5 základných fáz, ktorými prechádza štát pri investovaní do zahraničia.

V prvej fáze daná krajina v cudzine neinvestuje, pretože kvôli svojej nízkej rozvojovej úrovni, nedokáže v špecifickej súťaži využiť svoje prednosti prostredníctvom priamych investícií. V druhej fáze dochádza k PZI - zahraničné podniky začnú investovať v tuzemsku, ale najprv iba v malom rozsahu, kvôli obmedzeným špecifickým podmienkam ako sú malý trh, nedostatočná kvalifikácia pracovných síl, nedostatočná infraštruktúra atď. Daný štát v zahraničí zatiaľ neinvestuje.

V tretej fáze už krajina vykazuje vyšší podiel priamych zahraničných investícií. Domáce podniky zbierajú skúsenosti z rozvinutého trhu, zo stykov so zahraničnými firmami, čo im pomôže lepšie preniknúť na zahraničné trhy. Krajina začína strácať výhodu lacnej pracovnej sily v dôsledku rastúcej úrovne miezd. Zahraničné investície už prichádzajú na základe iných výhod, ako sú vysoký dopyt, domáci technologický rozvoj, moderná infraštruktúra atď. Rozvoj vývozných investícií je však nižší než rozvoj dovozných, aj keď sa už postupne približujú.

Vo štvrtej fáze sa krajina stáva významným priamym investorom v cudzine.

V poslednej fáze sa rozvíja vnútroodvetvový medzinárodný obchod, ktorý sa opiera o vnútroodvetvovú deľbu práce. Rozhodnutia o mieste založenia novej pobočky už nie sú orientované na krajinné špecifiká, ale väčšmi sa prihliada na efekt z rozvoja medzinárodnej deľby práce. Dovozné priame investície začínajú rásť, ale z iných dôvodov ako v prvých fázach, napr. v dôsledku sprostrenia sortimentu.

#### 1.4 Teória založená na výmenných kurzoch

Je teória, ktorá sa snaží charakterizovať vzájomný vzťah PZI a výmenných kurzov. Itagaki (1981) a Cushman (1985) analyzovali vplyv kurzového rizika ako faktor PZI. Cushman na základe empirického výskumu ukázal, že len zvýšenie reálneho výmenného kurzu USD stimuluje americké PZI, zatiaľ čo znehodnotenie cudzej meny spôsobilo zníženie amerických PZI až o 25 %. PZI slúžia na zníženie kurzového rizika. Pri presune výroby do zahraničia sa podnik vyhne tomuto riziku tým, že už nedochádza k dovozu z domácej krajiny, čiže nevznikajú dodatočné náklady.

#### 1.5 Neoklasická teória

Na základe neoklasickej teórie možno tvrdiť, že faktory, ktoré ovplyvňujú umiestnenie medzinárodných investícií sú faktory danej prijímajúcej krajiny ako kapitála a pracovná sila a prírodné zdroje. Podľa Krugmanovej práce (1991) je dôležitá geografická poloha z pohľadu transportných nákladov a veľkosť krajiny. Ďalšia práca poukazuje na dôležitosť ľudského kapitálu (Lucas 1988).

## 2 ZÁVER

Z množstva štúdií môžeme konštatovať, že problematika PZI je skutočne bohatá a neexistuje jednotný teoretický výklad a zrejme je nepravdepodobné, aby bol aj v blízkej dobe vytvorený. Rovnako môžeme pozorovať odlišné metodické prístupy, ktoré boli pri skúmaní tejto problematiky použité. Zatiaľ čo jedna skupina využíva jednorovnicové ekonometrické modely na skúmanie možných determinant, existujú práce, v ktorých je využitá metodológia panelových dát (Lukáčik a Lukáčiková, 2011), kointegračná analýza, VECM (Shridharan a spol., 2009), atď. Dôležitú úlohu zohrávajú modely priestorovej ekonometrie, pretože regionálne rozdiely na ekonomickej úrovni bývajú zdrojom disparít, čo býva často krát neprehliadnuteľný problém pri analýzach. Na základe uvedeného môžeme len konštatovať, že ku skúmaniu a objasneniu PZI je potrebné pristupovať individuálne.

#### Použitá literatúra

1. BLOMSTROM, M. – LIPSEY, R. – ZEGAN, M. 1994. What explains Developing Country Growth? NBER Working Paper No. 4132, National Bureau for Economic Research, Cambridge, Massachusetts.
2. BORENSZTEIN, E. – DE GREGORIO, J. – LEE, J. W. 1998. How Does Foreign Direct Investment Affect Economic Growth? In Journal of International Economics 45, pp. 115-135
3. CAVES, R.E. 1996. Multinational Enterprise and Economic Analysis, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.
4. CUSHMAN, D.O. 1985. Real Exchange Rate Risk, Expectations and the Level of Direct Investment, In Review of Economics and Statistics, 67 (2), pp.297-308
5. DUNNING, J. H. 1977. Trade, Locaton of Economic Activity and the MNE: A Search for an Eclectic Approach, In The International Allocation of Economic Activity: Proceedings of a Nobel Symposium held at Stockholm, London, Macmillan, 395-418
6. DUNNING, J. H. 1981. Explaining the Inernational Direct Investment Position of Countries: Toward a Dynamic or Developmental Approach, In Weltwirtschaftliches Archiv 117, pp. 30-64
7. FIFEKOVÁ, M. 2007. Priame zahraničné investície a efekty spillovers. Dostupné na internete: < [http://alternativa.sk/uploads/tx\\_clanok/Fifekova\\_RP.pdf](http://alternativa.sk/uploads/tx_clanok/Fifekova_RP.pdf)>, dňa 18.11.2014.

8. GRUBEL, H.G. 1968. International Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows, In American Economic Review 58, pp. 1299-1314
9. HANSON, G. 2001. Should Countries Promote Foreign Direct Investment? G-24 Discussion Papers 9, United National Conference on Trade and Development
10. HIRSCHMAN, A.O. 1958. The Strategy of Economic Development, New Haven: Yale University Press
11. KOJIMA, K. 1973. A Macroeconomic Approach to Foreign Direct Investment, In Hitotsubashi Journal of Economics 14, pp. 1-21
12. KRUGMAN, P.R. 1991. Geography and Trade. Cambridge: MIT Press, 1991. 142 s. ISBN 0-262-11159-4
13. LUKÁČIK, M. - LUKÁČIKOVÁ, A. 2011. Vplyv PZI na vyrovnávanie ekonomických rozdielov medzi regiónmi. In Forum statisticum Slovaca: vedecký recenzovaný časopis Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti. - Bratislava: Slovenská štatistická a demografická spoločnosť, 2011. ISSN 1336-7420, 2011, roč. 7, č. 3, s. 142-147. Dostupné na internete: <<http://www.ssds.sk/casopis/archiv/2011/fss0311.pdf>>.
14. LUCAS, R.E. 1988. On the Mechanics of Economic Development. In Journal of Monetary Economics 22. February 1988. p. 3–42. Dostupné na internete: <<http://www.parisschoolofeconomics.eu/docs/darcillon-thibault/lucasmechanicseconomicgrowth.pdf>>, dňa 18.11.2014
15. SRIDHARAN, P. – VIJAYAKUMAR, N. – CHANDRA SEKHARA RAO, K. 2009. Causal Relationship between Foreign Direct Investment and Growth: Evidence from BRICS Countries. In International Business Research. Vol.2, No. 4. October 2009. p.198 – 203.
16. VERNON, R. 1966, International investment and international trade in the product cycle. In Quarterly Journal of Economics 80, pp. 190-207

### **Kontaktné údaje**

Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: [surmanova@yahoo.com](mailto:surmanova@yahoo.com)

# NORMALIZOVANÁ PRODUKČNÁ FUNKCIA S KONŠTANTNOU ELASTICITOU SUBSTITÚCIE VSTUPOV

## NORMALISED CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION PRODUCTION FUNCTION

*Karol Szomolányi*

### Abstrakt

Aktuálne prístupy opísania výroby využívajú normalizovanú CES produkčnú funkciu, ktorej parametre možno zmysluplne ekonomicky interpretovať. Konkrétny funkčný tvar možno odvodiť z definície elasticity substitúcie vstupov riešením diferenciálnej rovnice druhého rádu. Vo všeobecnom riešení potrebujeme ľubovoľné konštanty nahradiť tak, aby funkčný tvar zodpovedal ekonomickým pozorovaniam.

**KLúčové slová:** *normalizovaná produkčná funkcia s konštantnou elasticitou substitúcie vstupov, Harrodov Hicksov Solowov neutrálny technický pokrok*

### Abstract

Actual approaches describing production process use normalised CES production function. Its parameters may be meaningfully economically interpreted. The particular function form can be derived from the elasticity of the substitution definition solving second-order differential equation. The general equilibrium arbitrary constants need to be replaced, so that the functional form corresponds to economic observations.

**Keywords:** *normalised constant elasticity of substitution production function, Harrod Hicks Solow neutral technical progress*

## 1 ÚVOD

Produkčné funkcie sú dlhodobou predmetom intenzívneho skúmania. Vzťah medzi vstupnými faktormi výroby a produkciou si prví všimli Cobb a Douglas. Cobbov-Douglasov tvar produkčnej funkcie predpokladá konštantné podiely vstupov na HDP a ich jednotkovú elasticitu substitúcie, ktorú formálne definoval Allen (1938). Solow (1956) rozšíril produkčnú funkciu o dynamický technický pokrok.

Cobbov-Douglasov predpoklad jednotkovej elasticity substitúcie vstupov je problematický a spojený s mnohými empirickými aj teoretickými nejasnosťami. Arrow, Chenery, Minhas a Solow (1961) formulovali produkčnú funkciu s konštantnou elasticitou substitúcie vstupov (CES). Vlastný text príspevku. Uvedené formulácie produkčnej funkcie prezentoval Lukáčik (2013).

V období po Lucasovej (1976) kritike sa stali predmetom všeobecného ekonomického záujmu neoklasické modely rastu a modely opisujúce hospodársky cyklus ako model reálneho hospodárskeho cyklu, či súčasný keynesovský model. Sú to modely všeobecnej rovnováhy, ktorými sa tiež zaoberala Lukáčiková (2004 a 2005). V spomenutom modelovom rámci hrajú produkčné funkcie dôležitú rolu. Preto je funkčný vzťah medzi vstupmi a výstupom v súčasnosti veľmi podrobne skúmaný. Za posledných dvadsať rokov sme boli svedkami mnohých teoretických a empirických objavov. Zvláštne obrozenie si vyslúžil koncept



elasticity substitúcie vstupov. Klump McAdam a Willman (2012) ponúkajú prehľad aktuálnych svetových prác zaoberajúcich sa problematikou.

Existuje vzťah medzi hospodárskym rastom a elasticitou substitúcie vstupov. Solow (1956) ukázal, že ak je elasticita substitúcie vstupov vyššia ako jeden, dynamický ekonomický systém generuje trvalý rast. Keďže prácu možno dokonale nahradiť kapitálom, hraničný produkt kapitálu je dlhodobo dostatočne vysoký. Prípado elasticity substitúcie vstupov vyššej od jednej je však empiricky neoverený a teoreticky anomálny.<sup>1</sup>

Klump (2001) a Saam (2008) ukázali, že prípustný spôsob zvýšenia elasticity substitúcie vstupov v krajine je integrácia do medzinárodných svetových trhov. Na druhej strane podľa Kaasa a von Thaddena (2003) model rastu s agregovanou CES produkčnou funkciou s elasticitou substitúcie vstupov nižšou od jednej môže vykazovať viac rovnováh, pasce vývoja a neurčitost'.

Ďalšou oblasťou, v ktorej je substitúcia vstupov dôležitým parametrom je oblasť verejných financií. Chirinko (2002) ukázal, že pri nízkej elasticite substitúcie vstupov sú reakcie investícií na zmeny úrokovej miery spôsobené monetárnou alebo fiškálnou politikou. Rowthorn (1999) zdôraznil význam substitúcie vstupov v makroekonomickej analýze trhu práce. Náchylnosť k vysokým investíciám má významný vplyv na nezamestnanosť, ak je elasticita substitúcie rôzna od jednej.

Z empirických prác Chirinka so spoluautormi (1999), Klumpa McAdama a Willmana (2007) a Leóna-Ledesma McAdama a Willmana (2010) vyplýva silná indícia, že agregovanú výrobu viac charakterizuje nejednotková elasticita substitúcia vstupov. V aktuálnom výskume Chirinko (2008) odhaduje hodnotu americkej elasticity substitúcie vstupov v rozpätí 0,4–0,6. Okrem toho Jones (2003 a 2005) ukázal, že podiel kapitálu na reálnom HDP vykazuje v mnohých krajinách také výkyvy a trendy, ktoré sú nekonzistentné s Cobbovou-Douglasovou produkčnou funkciou alebo s CES produkčnou funkciou s Harrodovým-neutrálnym technickým pokrokom (inovujúcim využitie práce), pozri tiež McAdam a Willman (2013).

Z koexistencie technického pokroku inovujúceho využitie kapitálu aj práce vyplývajú rôzne teoretické možnosti vybilancovaného a nevybilancovaného rastu. Podľa konceptu vybilancovaného rastu – dôležitého predpokladu neoklasickej teórie rastu – premenné ako produkcia, spotreba, atď. konvergujú do ustáleného stavu so spoločnou konštantnou mierou rastu (ustáleného rastu), zatiaľ čo podstatné podielové parametre (ako podiely na príjme, podiel kapitálu a produkcie) ostávajú konštantné. Z neoklasickej teórie rastu vyplýva, že ekonomika vykazuje pozitívny ustálený rast s konštantnými podielmi vstupov na HDP, ak elasticita substitúcie vstupov je jednotková (t.j. produkčná funkcia je v Cobbovom-Douglasovom tvare), alebo technický pokrok je Harrodov-neutrálny.

Acemoglu (2009) (15. Kapitola) uvádza, že je málo dôvodov predpokladať, že technický pokrok nutne inovuje využitie práce. Modely Acemoglua (2003) a Sata (2006) s rozlične vplývajúcim technickým pokrokom na vstupy, ktorých ceny sú dostatočne flexibilné, vykazujú náchylnosti investovať do prislúchajúcich inovácií s účelom šetriť vstupy. Inými slovami, firmy znižujú svoje potreby vzácnych vstupov a zvyšujú potreby prebytočných. Acemoglu (2003) ďalej ukázal, že kým v ustálenom raste je technický pokrok nutne Harrodov-neutrálny, v prechodnom raste môže inovovať využitie kapitálu. Za predpokladu elasticity substitúcie vstupov nižšej od jednej tento koncept garantuje stabilitu podielov na HDP, aj keď zo strednodobého hľadiska môžu fluktuovať.

---

<sup>1</sup> Kritický je teoretický výsledok rastu spôsobeného vysokou elasticitou substitúcie vstupov, podľa ktorého práca rastie a miera sporenia klesá, pozri La Grandville (1989)

Analytický výskum významnosti nejednotkovej elasticity substitúcie vstupov a neneutralného technického pokroku v dynamických makroekonomických modeloch vyžaduje koncept „normalizácie“, aj keď tento všeobecne stále nie je dôkladne preskúmaný. La Grandville (1989) a Klump a La Grandville (2000) predstavili koncept normalizácie v snahe dokázať, že agregovanú elasticitu substitúcie práce za kapitál možno považovať za dôležitý a zmysluplný determinant rastu v neoklasickom modeli rastu. Klump (2001) a Klump a Irmen (2009) využili tento prístup v rôznych oblastiach.

Bez normalizácie nemožno parametre produkčnej funkcie ekonomicky interpretovať, lebo ich hodnoty závisia na normalizačnom bode premenných a na elasticite substitúcie vstupov. Táto vlastnosť znemožňuje (okrem iného) odhad parametrov a komparatívnu statiku. Klump a Saam (2008) uviedli konkrétny príklad, v ktorom zanedbanie normalizácie môže významne skresliť výsledky skúmania. Ukázali, ako pomocou normalizácie možno čeliť podobným skresleniam. Vplyv zvýšenia elasticity substitúcie vstupov môže byť až dvojnásobný, ak nahradíme nenormalizovanú (alebo implicitne normalizovanú) CES produkčnú funkciu funkciou, ktorá je správne a ekonomicky zmyselne normalizovaná.

Klump, McAdam a Willman (2007) ukázali, že normalizácia je tiež dôležitá pri odhade parametrov agregovaných CES produkčných funkcií, hlavne pri využití odhadu systému rovníc na ponukovej strane. Známe sú obmedzené možnosti simultánneho odhadu elasticity substitúcie a mier rastu technológií, ktoré inovujú využitie vstupov. Dostupnými poznatkami z teoretických aj empirických prác bola spoločná identifikácia hodnôt uvedených parametrov neprípustná. Viac než štvrtstoročie prevládal všeobecný názor ovplyvnený prácou Berndta (1976), že americkú ekonomiku charakterizovala Cobbova-Douglasova agregovaná produkčná funkcia s neutrálnym technickým pokrokom.

Implementácia konceptu normalizácie do postupov odhadu parametrov produkčnej funkcie umožňuje nastaviť hodnotu podielu kapitálu na HDP (alebo, pri odhade tohto podielu nastaviť primerané začiatkové hodnoty parametra). Normalizácia zosúladzuje empirické a teoretické interpretácie parametrov produkčnej funkcie a umožňuje validáciu odhadnutých parametrov ex-post. León-Ledesma, McAdam a Willman (2010) demonštrovali výhody odhadu a identifikácie normalizovaných technologicko-výrobných systémov. Využitím normalizovanej CES produkčnej funkcie s technológiou inovujúcou využitie oboch vstupov, odhad „súčasnej keynesovskej“ Phillipsovej krivky pomohol k lepšej identifikácii volatility riadiacich premenných (reálnych hraničných nákladov).

## 2 PRODUKČNÁ FUNKCIA S KONŠTANTNOU ELASTICITOU SUBSTITÚCIE (CES)

Cobb-Douglasova produkčná funkcia predpokladá, že elasticita substitúcie vstupov sa rovná 1, teda 1 % pokles jedného faktora môže byť pri nezmenenej výrobe nahradený 1 % nárastom druhého. V realite môže byť tento parameter rôzny od jednej. Elasticitu substitúcie vstupov definovali nezávisle od seba Hicks (1932) a Robinson (1933)<sup>2</sup> ako relatívnu zmenu podielu vstupov vyvolanú relatívne vyjadrenou zmenou hraničnej miery technickej substitúcie:

$$\sigma = \frac{d(K/N)/(K/N)}{d(F_N/F_K)/(F_N/F_K)} = \frac{d \ln(K/N)}{d \ln(F_N/F_K)} \quad (1)$$

Allen (1938) ukázal, že elasticitu substitúcie vstupov možno tiež definovať ako elasticitu príjmu na osobu y vzhľadom na hraničný produkt práce (resp. mzdovú sadzbu  $w$ ).

<sup>2</sup> Rozdiely oboch prístupov opísal Hicks (1970).

$$\sigma = \frac{dy}{dw} \frac{w}{y} \quad (2)$$

Ak príjem na osobu je lineárne homogénna funkcia kapitálu na osobu,  $y = f(k)$ , kde  $k = K/N$ , možno elasticitu substitúcie tiež zapísať v tvare:

$$\sigma = - \frac{f_k(k) [f(k) - kf_k(k)]}{kf'(k) f_{kk}(k)} \quad (3)$$

Arrow, Chenery, Minhas a Solow (1961) použili vo svojej analýze produkčnú funkciu s konštantnou elasticitou substitúcie (CES) v tvare:

$$Y = A [\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha) N^{-\rho}]^{-1/\rho} \quad A > 0, \nu > 0, 0 < \alpha < 1, -1 < \rho < \infty, \rho \neq 0 \quad (4)$$

Alternatívny zápis CES produkčnej funkcie, ktorý sa často používa (pozri Klump, McAdam a Willman; 2012) získame, ak uvažujeme konštantné výnosy z rozsahu a parameter rozsahu z výnosov:  $\nu = 1$ :

$$Y = A [\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha) N^{-\rho}]^{-1/\rho} \quad (5)$$

Pritom parameter  $\rho$  opisuje elasticitu substitúcie vstupov:

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$$

Produkčné funkcie (4) a (5) možno zapísať v Cobbovom-Douglasovom tvare s jednotkovou elasticitou substitúcie vstupov,  $\sigma \rightarrow 1$ , ak  $\rho \rightarrow 0$ , v Leontievovom tvare s nezameniteľnými vstupmi,  $\sigma = 0$ , ak  $\rho \rightarrow \infty$  a v lineárnom tvare s dokonale zameniteľnými vstupmi,  $\sigma \rightarrow \infty$ , ak  $\rho = -1$ .

### 3 NORMALIZOVANÁ CES PRODUKČNÁ FUNKCIA

Elasticita substitúcie vstupov je implicitne definovaná v konkrétnom bode, je spojená s jedným konkrétnym základným bodom na jednej konkrétnej izokvante (pozri obr. 1 a 2). V tomto bode je definovaný celý systém izokvánt, ktoré sa nepretínajú a spolu tvoria CES produkčnú funkciu. Ak uvažujeme konštantnú elasticitu substitúcie vstupov za danú, nemení sa prislúchajúca izokvanta ani celý systém izokvánt, ale zmena elasticity substitúcie vstupov by viedla k zmene celého systému izokvánt. Po zmene elasticity substitúcie vstupov sa staré a nové izokvanty nepretínajú iba v základnom bode  $K_0, N_0$ , v ktorom sa dotýkajú. Izokvanty by sa nemali pretínať, pretože pri danej definícii elasticity substitúcie vstupov (1) v danom konkrétnom bode, by stará a nová CES produkčná funkcia mala byť stále charakterizovaná rovnakým pomerom vstupov  $K/N$  a rovnakou mierou technickej substitúcie  $F_N/F_K$ . To je splnené iba ak využijeme základný bod  $K_0, N_0$  na normalizáciu CES produkčnej funkcie.

Existujú dve možné definície elasticity  $\sigma$  – 2 a (1.3) – rovnako existujú dva spôsoby odvodenia normalizovanej CES produkčnej funkcie. Uvedieme oba spôsoby odvodenia normalizovanej CES produkčnej funkcie.

#### 3.1 Odvodenie využitím exponenciálnej funkcie

Integrovaním oboch strán zápisu elasticity substitúcie vstupov (2) získame exponenciálnu funkciu:

$$y = cw^\sigma \quad (6)$$

Pritom  $c$  je ľubovoľná konštanta. Za predpokladu konštantných výnosov z rozsahu platí:  $Y = wN + rK$ , resp.  $y = w + rk$ , kde  $r$  je sadzba príjmu z jednotky kapitálu. Podmienkou prvého

rádu maximalizácie zisku je, že hraničný produkt kapitálu sa rovná sadzbe príjmu z jednotky kapitálu. Potom možno exponenciálnu funkciu (6) zapísať v tvare:

$$y = c \left( y - k \frac{dy}{dk} \right)^\sigma \quad (7)$$

La Grandville (2009, s. 83) ukázal, že integrovaním rovnice (6) a zjednodušením získame produkčnú funkciu s konštantnou elasticitou substitúcie vstupov:

$$y = \left[ \pi_1 k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \pi_2 \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (8)$$

resp.

$$Y = \left[ \pi_1 K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \pi_2 N^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (9)$$

Produkčná funkcia (8) je vyjadrená na jednu osobu (v intenzívnom tvare), kým produkčná funkcia (9) je agregovaná (v extenzívnom tvare). V oboch funkciách sú dve ľubovoľné konštanty,  $\pi_1$  a

$$\pi_2 = c^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Konštanta  $\pi_2$  závisí od elasticity substitúcie vstupov  $\sigma$ . Pre určenie týchto konštánt využijeme základné funkčné hodnoty (6) a (8) v danom základnom bode systému izokvánt. V dynamickom prostredí tento základný bod musí zodpovedať konkrétnemu bodu v čase  $t = t_0$ :

$$y_0 = c w_0^\sigma \quad (10)$$

$$y_0 = \left[ \pi_1 k_0^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \pi_2 \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (11)$$

Kombináciou s (8) získame normalizovanú CES produkčnú funkciu:

$$y = y_0 \left[ \alpha_0 \left( \frac{k}{k_0} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1 - \alpha_0) \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (12)$$

resp.

$$Y = Y_0 \left[ \alpha_0 \left( \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1 - \alpha_0) \left( \frac{N}{N_0} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (13)$$

Pritom parameter  $\alpha_0 = (y_0 - w_0)/y_0 = r_0 K_0 / Y_0$  označuje podiel kapitálu na celkovom príjme v bode normalizácie.

### 3.2 Odvodenie využitím homogénnej produkčnej funkcie

Paroush (1964) odvodil CES produkčnú funkciu priamo z pôvodnej Hicksovej definície elasticity substitúcie vstupov (1), ktorú možno opísať diferenciálnou rovnicou druhého rádu, ktorej všeobecné riešenie tiež obsahuje dve ľubovoľné konštanty.

Klump a Preissler (2000) a Klump, McAdam a Willman (2012) využili alternatívnu definíciu elasticity substitúcie vstupov opísanú diferenciálnou rovnicou druhého rádu (3) s nezávislou premennou  $k$ . Definícia využíva predpoklad lineárne homogénnej produkčnej funkcie  $Y_t = F(K_t, N_t) = N_t f(k_t)$ , kde  $k_t = K_t/N_t$  je kapitál na efektívnu jednotku práce pre všetky definované  $t$ . Jej všeobecné riešenie je všeobecný tvar CES produkčnej funkcie:

$$y_t = a \left[ k_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + b \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} ; t \in T \quad (14)$$

resp.

$$Y_t = a \left[ K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + b N_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} ; t \in T \quad (15)$$

Pritom  $a$ ,  $b$  sú ľubovoľné konštanty,  $T$  je definovaná množina období. Porovnaním produkčných funkcií (5) a (15) platí:

$$A = a(1+b)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

a

$$\alpha = \frac{1}{1+b}$$

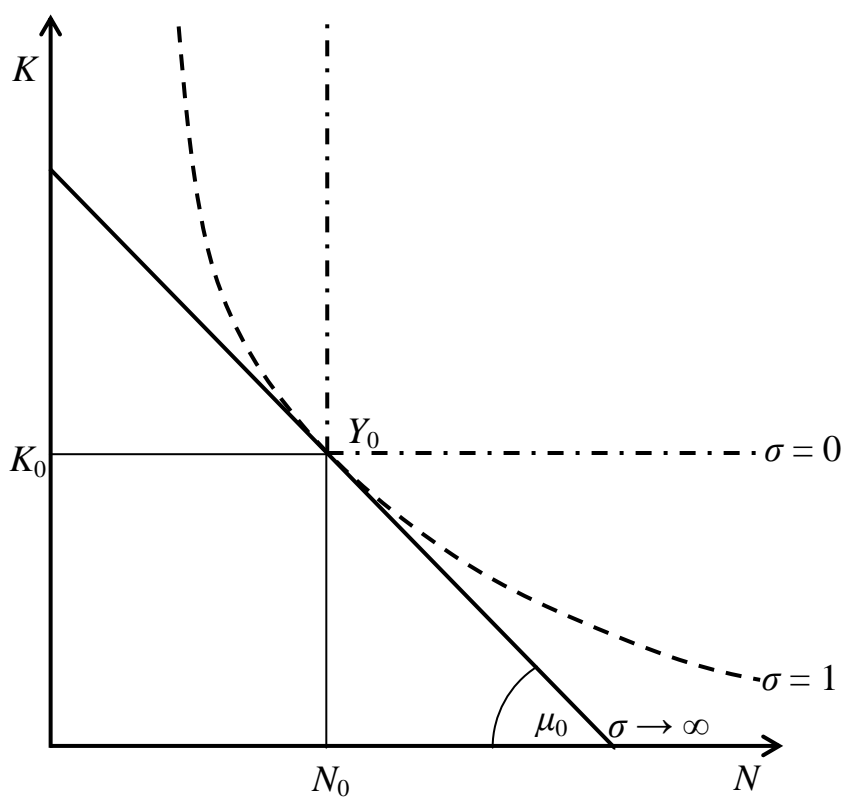
Pre určenie týchto konštánt využijeme skutočnosť, že elasticita substitúcie vstupov je definovaná v bode, ktorý zodpovedá danému kapitálu na efektívnu jednotku práce  $k_0 = K_0/N_0$ , danej hraničnej miere technickej substitúcie  $(F_N/F_K)_0 = w_0/r_0$  a danej produkcie na osobu  $y_0 = Y_0/N_0$ , t.j.

$$Y_t = Y_0 \left[ \alpha_0 \left( \frac{K_t}{K_0} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha_0) \left( \frac{N_t}{N_0} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} ; t \in T \quad (16)$$

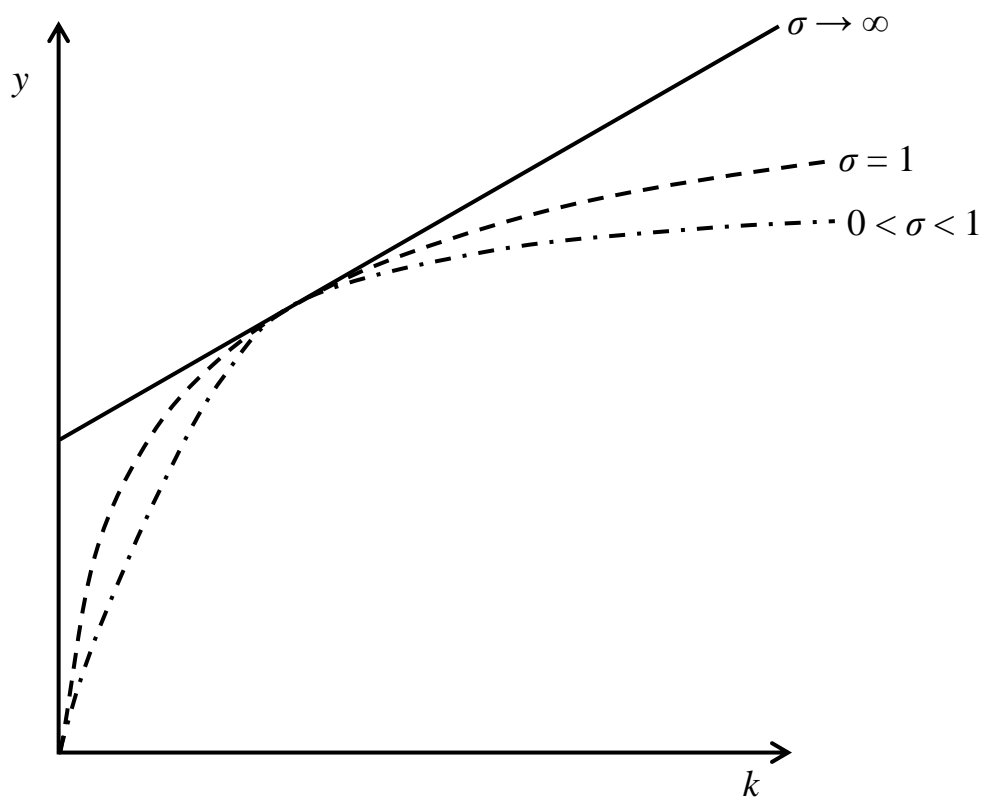
Pritom  $\alpha_0 = r_0 K_0 / (r_0 K_0 + w_0 N_0)$  je podiel kapitálu na príjme v bode normalizácie.

### 3.3 Grafická interpretácia

Podľa La Grandvillea (1989), Klumpa a La Grandvillea (2000), Klumpa a Preisslera (2000) a Klumpa, McAdama a Willmana (2012) je normalizácia vyjadrenie ľubovoľných konštánt primitívnych funkcií ekonomicky zmyselným spôsobom. V priestore  $[N, K]$  na obr. 1 je normalizácia zobrazená pomocou základného bodu (o ktorom možno uvažovať v období  $t = t_0$ ), ktorému zodpovedajú konkrétne hodnoty premenných  $N$ ,  $K$ ,  $Y$  a hraničnej miery technickej substitúcie  $\mu_0 = (F_N/F_K)_0$  a izokvanty CES produkčnej funkcie s rozdielnymi elasticitami substitúcie vstupov ale rovnakými ostatnými premennými sa dotýkajú.



Obr. 1 Izokvanty normalizovanej CES produkčnej funkcie



Obr. 2 Normalizovaná CES produkčná funkcia jednej osoby

Normalizáciou možno vysvetliť vzťah medzi elasticitou substitúcie vstupov a zakrivením izokvánt CES produkčnej funkcie (pozri La Grandvilleovu; 1989a diskusiu o správnom chápaní tohto vzťahu). Klump a Irmen (2009) zdôraznili, že v bode normalizácie (a iba v ňom) existuje inverzný vzťah medzi elasticitou substitúcie a zakrivenosťou izokvanty normalizovanej CES produkčnej funkcie. Tento vzťah tiež možno interpretovať vzhľadom na komplementárnosť oboch vstupných faktorov. V bode normalizácie je nepriamo úmerný vzťah medzi elasticitou substitúcie a stupňom komplementárnosti vstupov.

Základný bod normalizácie možno (v priestore  $[k,y]$ , pozri obr. 2) tiež opísať konkrétnymi hodnotami  $k,y$  a hraničným produktom kapitálu (alebo reálnou sadzbou príjmu z kapitálu). Tomuto bodu zodpovedá hodnota elasticity produkcie vzhľadom na kapitál rovnajúca sa podielu kapitálu na príjme (v podmienkach dokonalej konkurencie).

Normalizácia tvorí špecifické „rodiny“ CES produkčných funkcií, v rámci ktorých sa produkčné funkcie líšia iba elasticitou substitúcie vstupov.

### 3.4 Normalizovaná a nenormalizovaná CES produkčná funkcia.

Klump, McAdam a Willman ukázali, že známa CES produkčná funkcia Arrowa, Cheneryho, Minhasa a Solowa (5) je nekonzistentná s normalizovanou CES produkčnou funkciou (13). Funkcie (5) a (13) sú identické, iba ak parametre  $A$  a  $\alpha$  CES funkcie (5) závisia od elasticity substitúcie vstupov  $\sigma$  a od hodnôt základného bodu normalizácie  $K_0, N_0, \alpha_0, r_0, w_0$  a možno ich zapísať funkciami  $A(\sigma, K_0, N_0, \alpha_0, r_0, w_0)$  a  $\alpha(\sigma, K_0, N_0, \alpha_0, r_0, w_0)$ . Oba parametre nenormalizovaného tvaru (5) závisia od elasticity substitúcie vstupov, pokiaľ sa  $K_0$  a  $N_0$  nerovnajú, teda pokiaľ  $k_0 \neq 1$ . Nenormalizovaný tvar CES produkčnej funkcie nemožno využiť na komparatívnu statiku opisujúcu vplyv zmeny elasticity substitúcie  $\sigma$  na ekonomiku. Parametre  $A$  a  $\alpha$  nemožno ekonomicky interpretovať.

Klump, McAdam a Willman (2012) sa zaoberali tiež rôznymi tvarmi nenormalizovaných CES produkčných funkcií, ktoré sa v ekonomickej akademickej histórii využili a diskutovali možnosti ekonomicky interpretovať ich parametre. Poznamenajme, že Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu,  $\sigma = 1$ , netreba normalizovať.

## 4 NORMALIZOVANÁ CES PRODUKČNÁ FUNKCIA A TECHNICKÝ POKROK

Z dynamického hľadiska potrebujeme po vzore Solowa (1956) zahrnúť rast úrovne technológie, ktorý zvyšuje efekt využívania vstupov. Z hľadiska normalizácie produkčnej funkcie je dôležité špecifikovať, dynamiku podielov vstupov na príjme. Technický pokrok môže vplývať na rast efektu využívania kapitálu, práce alebo oboch. Podľa uvedeného konceptu sa môže meniť podiel vstupov na HDP, ak sa zvyšuje efekt využívania kapitálu, rastie aj podiel kapitálu na príjme na úkor práce, resp. v opačnom prípade sa zvyšuje podiel práce na príjme na úkor kapitálu. Jednou z ďalších hodnôt základného bodu normalizácie, ktoré potrebujeme poznať je rozloženie príjmu na vstupy k obdobiu normalizácie,  $t = t_0$ .

Klump, McAdam a Willman (2007, 2012) zapísali normalizovanú CES produkčnú funkciu s technickým pokrokom zvyšujúcim efekt využitia vstupov v tvare:

$$Y_t = \left[ \left( E_t^K K \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \left( E_t^N N \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} ; t \in T \quad (17)$$

Pritom  $E_t^K$  a  $E_t^N$  opisuje úroveň využitia oboch vstupov.

Arrow, Chenery, Minhas a Solow uvažovali Hicksov neutrálny technický pokrok. Tvar (17) je všeobecnejší, lebo technický pokrok môže rôzne vplyvať na efekt využitia oboch vstupov. Predpokladáme, že produktivita faktorov rastie:

$$E_t^i = E_0^i e^{\gamma_i(t-t_0)}; \quad t \in T; \quad i \in \{K, N\} \quad (18)$$

Pritom  $\gamma_i$  označuje technický pokrok zodpovedajúci  $i$ -temu faktoru, pre všetky  $i = K, N$ . Za predpokladu  $\gamma_K = \gamma_N > 0$ , hovoríme o Hicksovom neutrálnom technickom pokroku; za predpokladu  $\gamma_K > 0, \gamma_N = 0$  o Solowovom neutrálnom technickom pokroku; za predpokladu  $\gamma_K = 0, \gamma_N > 0$  o Harrodovom neutrálnom technickom pokroku a za predpokladu  $\gamma_K \neq \gamma_N$  a  $\gamma_K, \gamma_N > 0$  o všeobecnom technickom pokroku rozlične zvyšujúcom efekt oboch vstupov.

Symbolom  $E_0^i$  označujeme fixný bod úrovne produktivity faktora  $i$  v období základnej normalizácie,  $t = t_0$ , pre všetky  $i = K, N$ . Pripomeňme, že z princípu normalizácie existuje mnoho vyjadrení CES produkčnej funkcie s rovnakým základným bodom normalizácie, ktoré sa líšia iba elasticitou substitúcie vstupov. Aby táto vlastnosť ostala zachovaná aj v prípade technického pokroku, musí platiť:

$$E_0^K = \frac{Y_0}{K_0} \left( \frac{1}{\alpha_0} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (19)$$

$$E_0^N = \frac{Y_0}{N_0} \left( \frac{1}{1-\alpha_0} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

Poznamenejme, že v období  $t = t_0$ :

$$e^{\gamma_i(t-t_0)} = 1, \quad \text{ak } t = t_0; \quad i \in \{K, N\}$$

Vďaka tomu podiely vstupov na príjme nie sú skreslené technickým pokrokom v základnom bode normalizácie, ale rovnajú sa parametrom rozloženia  $\alpha_0$  a  $1-\alpha_0$ .

Dosadením (18) a normalizovaných hodnôt (19) do (17) možno normalizovanú CES produkčnú funkciu prepísať do tvaru:

$$Y_t = \left[ \alpha_0 \left( \frac{Y_0}{K_0} e^{\gamma_K(t-t_0)} K_t \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha_0) \left( \frac{Y_0}{N_0} e^{\gamma_N(t-t_0)} N_t \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}; \quad t \in T \quad (20)$$

resp.

$$Y_t = Y_0 \left[ \alpha_0 K_0^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left( K_t e^{\gamma_K(t-t_0)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha_0) N_0^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left( N_t e^{\gamma_N(t-t_0)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}; \quad t \in T \quad (21)$$

Klump, McAdam a Willman uvádzajú príklady, v ktorých sa uvedené tvary CES produkčných funkcií využili pre výskum.

Doteraz sme uvažovali konštantný rast produktivity faktorov. Klump, McAdam a Willman (2007, 2012) využitím postupov Boxa a Coxa (1964), upravili doteraz uvažované tvary CES produkčnej funkcie o parametre, vďaka ktorým môže byť rast produktivity vstupov rôzny v rôznom období.



## 5 ZÁVER

Normalizácia CES produkčnej funkcie umožňuje zmysluplne ekonomicky interpretovať jej parametre a korektne realizovať komparatívnu statiku. Korektne realizovaná analýza pomohla k množstvu aktuálnych objavov, ako je vzťah medzi elasticitou substitúcie vstupov a ekonomickým rastom, vzťah úrokovej miery a investíciami, alebo cyklické vlastnosti hraničných produktov a ďalších.

### Použitá literatúra

1. ACEMOGLU, D. 2003. Labor- and Capital-Augmenting Technical Change. In: *Journal of the European Economic Association*, roč. 1, s. 1-37.
2. ACEMOGLU, D. 2009. *Introduction to Modern Economic Growth*. MIT Press.
3. ALLEN R.G.D. 1938. *Mathematical Analysis for Economists*. MacMillian, London.
4. ARROW, K.J. – CHENERY, H.B. – MINHAS, B.S. – SOLOW, R.M. 1961. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. In: *Review of Economics and Statistics*, roč. 43, č. 3, s. 225–250.
5. BERNDT, E. R. 1976. Reconciling Alternative Estimates of the Elasticity of Substitution. In: *Review of Economics and Statistics*, roč. 58, č. 1, s. 59-68.
6. BOX, G. – COX, D. 1964. An analysis of transformations. In: *Journal of the Royal Statistical Society*, 26, Series B, s. 211-243.
7. CHIRINKO, R.S. 2002: Corporate Taxation, Capital Formation, and the Substitution Elasticity Between Labor and Capital. In: *National Tax Journal*, roč. 60, s. 339–355.
8. CHIRINKO, R.S. 2008. The Long and Short of It. In: *Journal of Macroeconomics*, roč. 30, č. 2, s. 671–686.
9. CHIRINKO, R.S. – FAZZARI, S.M. – MEYER, A.P. 1999. How Responsive is Business Capital Formation to its User Cost? In: *Journal of Public Economics*, roč. 74 č.1, s. 53–80.
10. COBB, C.W. – DOUGLAS, P.H. 1928. A Theory of Production. In: *American Review*, roč. 18, s. 139-156.
11. HICKS, J.R. 1932. *The Theory of Wages*. Macmillan, London.
12. HICKS, J.R. 1970. Elasticity of substitution again: Substitutes and Complements. In: *Oxford Economic Papers*, roč. 22, s. 289-296.
13. JONES, C.I. 2003. Growth, Capital Shares, and a New Perspective on Production Functions. In: Mimeo, University of California Berkeley.
14. JONES, C.I. 2005. The Shape of Production Functions and the Direction of Technical Change. In: *Quarterly Journal of Economics*, roč. 120, č. 2, s. 517-549.
15. KAAS, L. – von THADDEN, L. 2003. Unemployment, Factor Substitution, and Capital Formation. In: *German Economic Review*, roč. 4, s. 475–495.
16. KLUMP, R. 2001. Trade, Money and Employment in Intertemporal Optimizing Models of Growth. In: *Journal of International Trade and Economic Development*, roč. 10, č. 4, s. 411-428.
17. KLUMP, R. – IRMEN, A. 2009. Factor Substitution, Income Distribution and Growth in a Generalized Neoclassical Model. In: *German Economic Review*, roč. 10, č. 4, s. 464-479.
18. KLUMP, R. – LA GRANDVILLE, O. de 2000. Economic Growth and the Elasticity of Substitution: Two Theorems and Some Suggestions. In: *American Economic Review*, roč. 90, č. 1, s. 282-291.
19. KLUMP, R. – MCADAM, P. – WILLMAN, A. 2007. Factor Substitution and Factor Augmenting Technical Progress in the US. In: *Review of Economics and Statistics*, roč. 89 č. 1, s. 183-92.

20. KLUMP, R. – MCADAM, P. – WILLMAN, A. 2012. The Normalized CES Production Function: Theory and Empirics. In: *Journal of Economic Surveys*, roč. 26, s. 769-799.
21. KLUMP, R. – PREISLER, H. 2000. CES Production Functions and Economic Growth. In: *Scandinavian Journal of Economics*, roč. 102, č. 1, s. 41–56.
22. KLUMP, R. – SAAM, M. 2008. Calibration of Normalized CES Production Functions in Dynamic Models. In: *Economics Letters*, roč. 99, č. 2, s. 256-259.
23. LA GRANDVILLE, O. de 1989. In Quest of the Slutsky Diamond. In: *American Economic Review*, roč. 79, s. 468-481.
24. LA GRANDVILLE, O. de. 2009. *Economic Growth: A Unified Approach*. Cambridge University Press.
25. LEÓN-LEDESMA, M.A. – MCADAM, P. – WILLMAN, A. 2010. In Dubio pro CES: Supply Estimation with Mis-Specified Technical Change. European Central Bank, Working Paper No. 1175.
26. LUCAS, R.E. 1976. Econometric Policy Evaluation: A Critique. In: Brunner, K. – Meltzer, A.. *Stabilization of the Domestic and International Economy*. Amsterdam: North-Holland.
27. LUKÁČIK, M. 2013. Parametre produkčnej funkcie ekonomiky. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu : mezinárodní vědecký seminář: zborník príspevkov: Praha, 10.-12. december / prosinec - Bratislava: EKONÓM*.
28. LUKÁČIKOVÁ, A. 2004. Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. nIN: *Participácia doktorandov na vedeckovýskumnej činnosti: IV. medzinárodná vedecká konferencia doktorandov*. Bratislava: EU, 2004, s. 329-334.
29. LUKÁČIKOVÁ, A. 2005. Simulácie zmien parametrov v modeli všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. IN: *AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: 10. medzinárodná vedecká konferencia* Bratislava, 2005.
30. LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. 2008. *Ekonometrické modelovanie s aplikáciami*. Bratislava, EKONÓM.
31. MCADAM, P. – WILLMAN, A. 2013. Medium Run Redux. In: *Macroeconomic Dynamics*, roč. 17, č. 4, s. 695-927.
32. PAROUSH, J. 1964. A Note on the CES Production Function. In: *Econometrica*, roč. 32, s. 213-156.
33. ROBINSON, J. 1933. *The Economics of Imperfect Competition*. MacMillian, London.
34. ROWTHORN, R. 1999. Unemployment, Wage Bargaining and Capital-Labour Substitution. In: *Cambridge Journal of Economics*, roč. 23 č. 4, s. 413–425.
35. SAAM, M. 2008. Openness to Trade as a Determinant of the Macroeconomic Elasticity of Substitution. In: *Journal of Macroeconomics*, roč 30, s. 691-702.
36. SATO, R. 2006. *Biased Technical Change and Economic Conservation Laws*. Springer.
37. SOLOW, R.M. 1956. A Contribution to the Theory of economic growth. In: *Quarterly Journal of Economics*, roč. 70, č. 1, s. 65–94.

### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: [karol.szomolanyi@euba.sk](mailto:karol.szomolanyi@euba.sk)