

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum

MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ
NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII
A OPERAČNÍM VÝZKUMU

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Slovenskej spoločnosti pre operačný výskum

ZBORNÍK

2. – 4. december 2015

2. – 4. prosinec 2015

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., EU Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc., VŠE Praha
doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

doc. Ing. Jan Fábry, PhD.
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.
Ing. Marian Reiff, PhD.
Ing. Brian König, PhD.

Náklad: 50 ks
AH 12,67

Kontakt: jablon@vse.cz, brian.konig@euba.sk

Editori: prof. Ing. Josef Jablonský, CSc. , Ing. Brian König, PhD.
Web editor: doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2015

ISBN: 978-80-225-4181-7

Obsah

Andrej Babej, Pavel Gežík:	<u>Aplikácia modelu vzájomných zápočtov</u>	5
Martin Benkovič, Patrik Kupkovič:	<u>Finančná kríza a modelovanie finančných frikcií – DSGE prístup</u>	11
Adam Borovička:	<u>Dôležitosť kritérií vyjadrená jakožto lingvistická promenná</u>	16
Ivan Brezina ml.:	<u>Testovanie dynamického modelu výberu portfólia</u>	22
Ivan Brezina, Juraj Pekár:	<u>Od CVRP k EVRP – VC</u>	28
Zuzana Čičková, Tomáš Gál:	<u>Analýza niektorých faktorov ovplyvňujúcich racionalitu rozhodovania</u>	34
Tomáš Domonkos, Miroslava Jánošová, Filip Ostrihoň:	<u>Možnosti pre opis dôchodkového systému v rámci modelu dlhodobého rastu Slovenska</u>	41
Tomáš Domonkos, Brian König:	<u>Náklady nezamestnanosti a analýza nákladov a výnosov v podmienkach SR</u>	48
Marek Dvořák:	<u>Solving the Travelling Salesman Problem Using Artificial Neural Networks</u>	57
Lenka Fiřtová:	<u>Použití shlukové analýzy při identifikaci odlišně fungujících položek</u>	63
Lukáš Frýd:	<u>Testování kointegrace v dynamických panelových datech</u>	69
Vladimír Holý:	<u>Přítomnost mikrostrukturního šumu ve vysokofrekvenčních kurzech cizích měn: empirická studie</u>	79
Milan Horniaček:	<u>Modelovanie spolupráce firiem v inovačnom procese</u>	87
Michaela Chocholatá:	<u>Vzťah medzi počiatočnou úrovňou HDP a jeho rastom: priestorová analýza pre regióny Európskej únie</u>	92
Maria Kobzareva:	<u>Bounded Fuzzy Approach for Allocation Problem</u>	100
Martin Lukáčik:	<u>Test jednotkového koreňa a štrukturálne zmeny</u>	107

Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi:	<u>Bayesovské výpočty v ekonometrii</u>	113
Adriana Lukáčiková:	<u>Vplyv krízy na stabilitu štruktúry parametrov ekonometrického modelu</u>	118
Tomáš Majer, Stanislav Palúch:	<u>Entropický model odhadu OD matice v mestskej hromadnej doprave</u>	124
Michaela Mináriková:	<u>Simulácia Monte Carlo pre GARCH model</u>	129
Veronika Miťková:	<u>Vybrané techniky odhadu parametrov CGE modelov</u>	136
Vladimír Mlynarovič:	<u>Porovnanie historických výnosov slovenských penzijných fondov</u>	142
Kirill Odintsov, Elena Kuchina:	<u>Мěření délky dožití ruské populace</u>	146
Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková:	<u>Optimalizácia lokácie nabíjacích jednotiek pre elektroautá v SR</u>	155
Štefan Peško, Tomáš Majer:	<u>Problém redukcie dopravnej siete</u>	160
Tatiana Polonyankina:	<u>Srovnání přístupů k analýze migrace a jejího dopadu na ekonomiky cílové a zdrojové země</u>	165
Marian Reiff:	<u>Stochastický environmentálny model zásob</u>	173
Ondřej Sokol:	<u>Výpočet horní meze výběrového rozptylu nad intervalovými daty</u>	177
Nataliya Soldatyuk:	<u>Problém výběru predictorů regresních modelů. Genetický algoritmus vs klasický stepwise.</u>	183
Kvetoslava Surmanová:	<u>Regionálna komparácia Okunovho koeficientu</u>	188
Karol Szomolányi:	<u>Systémy dôchodkového zabezpečenia</u>	194
Michal Švarc:	<u>Metody kontrafaktuální evaluace</u>	199
Michaela Tichá:	<u>Aplikace vícekriteriální hry na konkurenční restaurace</u>	206

APLIKÁCIA MODELU VZÁJOMNÝCH ZÁPOČTOV¹

APPLICATION OF MODEL FOR MUTUAL DEBTS COMPENSATION¹

Andrej Babej, Pavel Gežík

Abstrakt

Problému vzájomných zápočtov sa venuje pozornosť najmä medzi jednotlivcami, ktorí si chcú rovnomerne rozdeliť úhrady, ktoré realizovali za celú skupinu. Existuje množstvo produktov, ktoré uľahčujú život svojim používateľom v oblasti započítania vzájomných dlhov. Aplikácie využívané na zápočet vzájomných dlhov ponúkajú jednoduché riešenie ako sa vyrovnáť so spoločnými výdavkami v rámci určitej skupiny osôb, prípadne subjektov.

Rovnaký princíp možno využiť pri vzájomnom započítavaní záväzkov a pohľadávok medzi podnikateľskými subjektmi. Vzťahy medzi subjektmi, ktoré sa dohodnú na vzájomných zápočtoch v rámci nimi vytvorenej skupiny možno zobrazit' prostredníctvom teórie grafov a následne vyriešiť úlohu vzájomného započítavania dlhov prostredníctvom lineárneho programovania.

KLúčové slová: kompenzácia, dlhy, lineárne programovanie, GAMS

Abstract

The problem of mutual debts compensation is typical between individuals which want to evenly divide the payments they have made as the whole group. There are many products that make life easier for its users to compensate mutual debts. Applications used for compensation of mutual debt offer a simple solution how to deal with common expenses within a group of persons or entities.

The same principle can be used to mutual debts compensation between companies. Relationships between those who agree to reciprocal compensation of debts within them formed groups can be displayed via graph theory and then be solved through linear programming.

Keywords: Compensation, Debts, Linear programming, GAMS

1 ÚVOD

Modely optimalizujúce vzájomný zápočet dlhov majú už pomerne dlhú históriu. V našich podmienkach ich navrhovali od roku 1993 viacerí autori, ktorí tento problém formulovali, či už ako úlohu lineárneho programovania, úlohu o maximálnej cirkulácii v hranovo ohodnotenom orientovanom grafe alebo problém maximálneho toku (napr. *Fecenko, 1994; Gazda, 2003*).

V príspevku je navrhnutý model na vykonávanie vzájomných zápočtov s možnosťou vytvárania nových dlžníckych vzťahov. Takto navrhnutý model umožňuje maximálne zníženie výšky celkového dlhu v rámci skupiny subjektov.

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantového projektu VEGA – číslo grantu 1/0245/15 „Plánovanie prepravy s cieľom znížovania emisií“

This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

2 MODEL VZÁJOMNÉHO ZÁPOČTU

Model vzájomného zápočtu predpokladá vznik nových dlžníckych vzťahov je jeho základným predpokladom je existencia úplného súvislého hranovo orientovaného grafu. Tento graf musí byť úplný a teda musí existovať vzťah (hrana) medzi každým subjektom (uzlom). Tieto hrany sú ohodnotené hodnotou, resp výškou c_{ij} , teda graf $G = (V, H, c)$.

Nech $G = (V, H, c)$. Z tejto dlžníckej siete vytvoríme úplnú súvislú sieť $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{H}, \tilde{c})$ s množinou vrcholov $\tilde{V} = V$ a množinou hrán \tilde{H} definovanou nasledovne

$$\tilde{H} = \{(i, j) | i, j \in \tilde{V}, i \neq j\} \quad (1)$$

Funkcia $\tilde{c} : \tilde{H} \rightarrow R_0^+$ je definovaná ako

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + M \text{ pre } (i, j) \in H \quad (2)$$

$$\tilde{c}_{ij} = M \text{ pre } (i, j) \notin H \quad (3)$$

kde M je veľké kladné reálne číslo ($M \gg \max_{(i,j) \in H} c_{ij}$). Množina vrcholov $\tilde{V}(i)^- = \{j | (j, i) \in \tilde{H}\}$ je vstupné okolie vrcholu i v sieti \tilde{G} .

Nech x_{ij} je podiel dlhu c_{ij} , ktorý bol započítaný medzi i -tou a j -tou firmou. Potom celková suma započítaných dlhov je daná vzťahom

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

Keďže x_{ij} predstavuje podiel započítaného (zníženého) dlhu c_{ij} , prevoditeľný na percentá a nemôže byť vyšší ako 100% a teda musí platiť

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (5)$$

Kompenzácia vzájomných dlhov nesmie zmeniť bilanciu záväzkov a pohľadávok žiadnej firmy z množiny firiem \tilde{V} , a preto musí platiť:

$$\sum_{j \in \tilde{V}(i)^-} c_{ij} = \sum_{j \in \tilde{V}(i)^+} c_{ji} \text{ pre } (i, j) \in \tilde{H} \quad (6)$$

čo znamená, že sa kompenzované záväzky u každej firmy musia rovnať kompenzovaným pohľadávkam. Bilancia záväzkov a pohľadávok každej firmy pred procesom eliminácie je daná vzťahom

$$b(i) = \sum_{j \in \tilde{V}(i)^+} d_{ij} - \sum_{j \in \tilde{V}(i)^-} d_{ji} \quad (7)$$

Bilancia sa teda nezmení vtedy a len vtedy, ak podmienka (6) platí pre každú firmu $i \in \tilde{V}$. Úlohu maximalizácie celkového zápočtu dlhov s možnosťou vytvárania nových dlžníckych vzťahov formulujeme nasledovne:

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - (n \cdot n - n) \cdot M \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n c_{ji} x_{ji} = 0 \text{ pre } i = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

3 APLIKÁCIA MODELU

V tejto časti je aplikovaný model vzájomného zápočtu s možnosťou vytvárania novej dlhovej štruktúry na dlžnícku sieť 21 prepojených subjektov, ktoré navzájom spolupracujú a rozhodli sa dobrovoľne zapojiť do systému vzájomných zápočtov. Motiváciou pre takéto rozhodnutie bolo najmä ich majetkové prepojenie a zníženie potreby kapitálu na úhradu svojich pohľadávok a záväzkov, a tým aj zníženie nákladov na prevod peňažných prostriedkov medzi jednotlivými subjektmi

3.1 Vstupné údaje

Údaje prezentované v matici vzájomných dlhov sme získali od majiteľov týchto subjektov, za čo im patrí naša vďaka. Zároveň je potrebné zdôrazniť, že z dôvodu zachovania obchodného tajomstva, nie je možné prezentovať názvy spoločností, ani ich majetkové prepojenie. Dlžnícka štruktúra je vynásobená koeficientom a zaokrúhľená na celé čísla v intervale od 1 do 10 peňažných jednotiek, tak aby bolo možné vhodne prezentovať výsledky bez rizika narušenia obchodného tajomstva.

Keďže v dnešnej dobe už neexistuje žiadna organizácia resp. inštitúcia, ktorá by účelovo a cielene zbierala údaje o ich zadlžení a výške dlhu voči iným osobám, tak ako to bolo ešte pred rokom 1993, kedy bolo vlastníctvo všetkých podnikov výlučne štátne. Po transformácii našej ekonomiky sa zber takýchto údajov zastavil a to najmä z dôvodu ochrany obchodného tajomstva a citlivosti informácií, z tohto dôvodu je získanie takýchto ucelených dát priam nemožné, bez toho aby ho dobrovoľne poskytli ekonomické subjekty so záujmom svoje dlhy kompenzovať. Z tohto dôvodu, sa nám nepodarilo počas nášho skúmania získať údaje o rozsiahlejších dlžníckych štruktúrach. Napriek tomu si myslíme, že získané údaje o dlžníckej štruktúre s veľkosťou 21 subjektov, postačia na dokonalú prezentáciu modelu.

V nasledujúcej tabuľke je zobrazená dlžnícka štruktúra prepojených subjektov.

Tab. 1: Matica východiskovej dlžníckej štruktúry.

Subjekt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	1	0	8	0	4	0	0	0	9	5	0	0	3	9	0	0	0	7	0	0
2	0	0	0	0	10	0	8	0	5	2	6	0	0	0	0	9	0	8	4	0	3
3	3	2	0	9	0	9	5	3	0	9	0	0	4	0	0	0	8	0	0	0	0
4	0	0	0	0	2	0	5	0	8	0	0	0	3	4	5	0	9	0	8	7	2
5	2	0	0	0	0	0	7	0	0	6	0	0	2	0	0	0	4	3	0	5	0
6	0	1	0	0	0	0	3	0	2	0	0	8	0	4	0	0	0	0	5	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	7	0	0	6	0	8	0	0	0
8	7	0	0	0	0	2	0	0	0	8	5	4	0	0	0	0	0	0	3	5	9
9	6	0	2	0	0	0	0	2	0	5	7	6	0	0	0	0	3	0	0	0	0
10	0	0	0	0	8	0	3	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
11	0	0	0	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	7	4	9	0	0	0	6	0
12	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	5	3	2	9	0	0	7	3
13	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	9	0	0	5	0	0
14	0	0	0	0	0	0	3	3	0	4	0	0	1	0	6	0	8	0	3	0	0
15	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	5	0
16	0	0	0	6	0	5	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	3
17	0	2	0	0	0	0	7	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0
18	10	0	0	0	0	1	0	4	0	0	2	0	0	0	0	0	3	0	0	2	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	5	0	4	0	0	0	0	0	0	0
20	7	0	3	0	0	7	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	2	0

Zdroj: vlastné spracovanie

3.2 Výpočet

Pred použitím vlastného modelu, je potrebné vytvoriť úplný graf. Tento krok sa realizuje pripočítaním dostatočne veľkého čísla M ku všetkým ohodnoteniam hrán. V tomto prípade je $M = 20$ peňažným jednotkám. Takto upravená matica je zobrazená priamo v zápise z programu GAMS pre dlžnícku štruktúru:

```
1 $ontext
2 Vzajomný zápočet dlhov
3 $offtext
4 Sets
5 i index uzla /1*21/
6 Alias (i,j)
7 Sets offdiag1(i,j);
8 offdiag1(i,j)=yes;
9 offdiag1(i,i)=no;
10 Table c(i,j)
11      1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
12 1    0 21 20 28 20 24 20 20 29 25 20 20 23 29 20 20 20 27 20 20
13 2    20 0 20 20 30 20 28 20 25 22 26 20 20 20 29 20 28 24 20 23
14 3    23 22 0 29 20 29 25 23 20 29 20 20 24 20 20 20 28 20 20 20
15 4    20 20 20 0 22 20 25 20 28 20 20 20 23 24 25 20 29 20 28 27 22
16 5    22 20 20 20 0 20 27 20 20 26 20 20 22 20 20 20 24 23 20 25 20
17 6    20 21 20 20 20 0 23 20 22 20 20 28 20 24 20 20 20 20 25 20 20
18 7    20 20 20 20 20 20 0 21 20 20 20 20 27 20 20 26 20 28 20 20 20
19 8    27 20 20 20 20 22 20 0 20 20 28 25 24 20 20 20 20 20 23 25 29
20 9    26 20 22 20 20 20 20 22 0 25 27 26 20 20 20 20 23 20 20 20 20
21 10   20 20 20 20 28 20 23 20 20 0 23 20 20 20 20 20 20 20 20 20 29
22 11   20 20 20 23 20 23 20 20 20 20 0 20 20 20 27 24 29 20 20 26 20
23 12   25 20 21 20 20 20 20 20 20 20 23 0 20 25 23 22 29 20 20 27 23
24 13   20 23 20 20 20 20 20 20 21 20 20 20 0 20 20 29 20 20 25 20 20
25 14   20 20 20 20 20 20 23 23 20 24 20 20 21 0 26 20 28 20 23 20 20
26 15   20 20 20 20 23 20 20 20 20 20 20 20 20 20 0 20 22 21 20 25 20
27 16   20 20 20 26 20 25 20 20 22 20 20 20 20 20 20 0 20 22 20 20 23
28 17   20 22 20 20 20 20 27 20 20 27 20 20 20 20 20 20 0 20 20 30 20
29 18   30 20 20 20 20 21 20 24 20 20 22 20 20 20 20 20 23 0 20 22 20
30 19   20 20 20 20 20 20 20 20 20 26 20 25 20 24 20 20 20 20 0 25 20
31 20   27 20 23 20 20 27 20 20 26 20 20 20 20 20 20 20 20 20 0 20
32 21   20 20 20 20 23 20 22 20 20 20 20 22 20 23 20 20 20 20 22 0
33 Scalar n;
34 n=card(i);
35 Variables f,x;
36 x.lo(i,j)=0;
37 x.up(i,j)=1;
38 Equations
39 ohr1(i)
40 ucel;
41 ucel.. f=e=sum((i,j),c(i,j)*x(i,j))- (n*n-n)*20;
42 ohr1(i)..sum(j,c(i,j)*x(i,j)$offdiag1(i,j))-
sum(j,c(j,i)*x(j,i)$offdiag1(j,i))=e=0;
43 Model VZD/all/;
44 Solve VZD using lp maximizing f;
45 Display x.l;
```

3.3 Výsledok

Na základe výpočtu z programu GAMS sme dosiahli optimálne riešenie celkového zníženia dlhu o 438 peňažných jednotiek a vzťahy medzi jednotlivými subjektmi sú opísané v ďalej uvedenej matici.

Tab. 2: Matica dlžnickej štruktúry po vykonaní vzájomných zápočtov.

Subjekt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	20	0	0	19	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	15	12	17
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	22	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	15	0	0	6	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Zdroj: vlastné spracovanie

4 ZÁVER

Modely vzájomného zápočtu môžu poskytovať v reálnej praxi najmä výhodu v šetrení nákladov spojených s realizáciou úhrad jednotlivých dlhov. Avšak pre ich možné využitie neexistuje základ v legislatíve, a teda v prostredí aktuálne platnej legislatívy je ich aplikácia čisto teoretická.

V predchádzajúcom príklade bolo aplikovaním modelu na dlžnicu štruktúru 21 prepojených subjektov dosiahnuté zníženie celkového dlhu zo 625 na 187 peňažných jednotiek, čo v pomernom ukazovateli znamená zníženie dlhu o viac ako 70% (70,08 %). Toto percento by mohlo teda reprezentovať napr. 70% úšetrienie na poplatkoch spojených s úhradami.

Použitá literatúra

1. BABEJ, A. 2012. Modelovanie finančných tokov na báze teórie grafov = Cash flow modeling based on graph theory. In: Mladá veda AIESA 2012 – Participácia doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov na budovaní spoločnosti založenej na vedomostiach [elektronický zdroj] : zborník [príspevkov] , Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. ISBN 978-80-225-3546-5. - S. [1-4].
2. BABEJ, A. 2012. Vzájomné započítanie dlhov ako úloha maximálnej cirkulácie = Offsetting debts as a problem of maximal circulation. In: Nové trendy v ekonometrii a operačnom výskume [elektronický zdroj] : mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 10.-12. december / prosinec 2012 / editor Josef Jablonský, Katarína Čemická. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. - ISBN 978-80-225-3530-4. - S. [1-5].
3. BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z., GEŽÍK, P., 2012: *Sieťová analýza*, Bratislava : Vydavateľstvo Ekonóm, 2012. 198 s. ISBN 978-80-225-3503-8

4. *FECENKO, J.* 1994. K optimalizácii operácií zápočtov pohľadávok a záväzkov po lehote splatnosti. In: Ekonomický časopis = Journal of economics, roč. 42, č. 5, s. 360-374.
5. *GAZDA, V.* 2003. O nahradení klasického prístupu ku kompenzácii dlhov a pohľadávok. In: *Acta Oeconomica Cassoviensia* No 7. - Košice : Podnikovohospodárska fakulta so sídlom v Košiciach, 2003. ISBN 80-225-1713-5, s. 141-148.
6. *HOZLÁR, E.* 1993. Modelový prístup k riešeniu problematiky vzájomnej zadĺženosti podnikov. In Proceedings of the 2-nd seminar FHI EU, Bratislava 1993

Kontaktné údaje

Ing. Andrej Babej

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 903 411 793

email: andrej.babej@gmail.com

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 908 333 360

email: pavelgezik@gmail.com

FINANČNÁ KRÍZA A MODELOVANIE FINANČNÝCH FRIKCIÍ – DSGE PRÍSTUP

FINANCIAL CRISIS AND FINANCIAL FRICTIONS MODELLING - DSGE APPROACH

Martin Benkovič, Patrik Kupkovič

Abstrakt

Federálny rezervný systém v roku 2008 deklaroval stabilizujúcu sa situáciu na finančných trhoch, pričom vývoj v nasledujúcich obdobiach dokazoval, že situácia je naďalej nestabilná. Kríza bola označená termínom „kríza likvidity“, ktorej hlavnou príčinou bola insolventnosť. V teórii doteraz podceňovaný pojem finančný cyklus sa dostáva do centra výskumu centrálnych bánk. Vrcholy finančného cyklu sú spájané s bankovou krízou. Výskum sa zameriava na modelovanie finančných frikcií. Za základný model predstavenia finančného akcelerátora je v literatúre označovaný skratkou BGG model z roku 1999.

***Kľúčové slová:** BGG model, finančné frikcie, finančný akcelerátor*

Abstract

Federal Reserve System declared stabilization of situation in financial markets, but the development in subsequent periods proved that the situation remains unstable. The Crisis has been marked by the term „liquidity crisis“ which was the main cause of the insolvency. In theory underrated term financial cycle gets to the center of research of Central banks. The Peaks of the financial cycles are associated with the banking crisis. The modelling research focuses in modelling of financial frictions. The basic model BGG from year 1999 introduce the principle of financial accelerator and in recent literature is marked as BGG model.

***Keywords:** BGG model, financial frictions, financial accelerator*

1 FINANČNÁ KRÍZA

V roku 2008 FED deklaroval, že finančné trhy sa zotavujú z úverovej krízy a jeho vyjadrenia boli chápané, len ako sa snaha o ukludnenie situácie. Vývoj v nasledujúcich obdobiach, však dokázal, že situácia sa nestabilizuje. Alan Greenspan deklaroval, fakt, že ide o mimoriadnu udalosť v literatúre označovanú ako „kríza likvidity“, pretože podstatou problému je insolventnosť, jav, ktorý nastáva raz sto rokov¹. Následne vláda Spojených štátov amerických prevzala gigantov Fannie Mae a Freddie Mac. Finančná kríza viedla k zániku Lehman Brothers a Merrill-Lynch, dvoch z piatich najvýznamnejších bánk v USA. Skutočná hodnota finančného sektora sa stávala zjavnou, kedy finanční analytici investičných bánk predikovali vysoké straty konkurencie. Investičná banka Lehman Brother bola už na začiatku septembra na pokraji bankrotu. Americká federálna spoločnosť poistenia a vkladov FDIC v polovici septembra oznámila, že počet bánk a sporiteľní, ktoré majú problémy je stosedemnást', čo bol najvyšší počet od roku 2003. Podľa amerického úradu vykonávajúceho dohľad na sporiteľňami Office of Thrift Supervision mali tieto inštitúcie stratu 5,4 mld amerických dolárov. Značné problémy zaznamenal aj peňažný ústav Washington Mutual, ktorého akcie oslabili a v priebehu jedného

¹ „once-in-a century financial crisis“

týždňa sa znížili o šesťdesiat percent. V septembri vyhlásila bankrot najväčšia hypotekárna banka IndyMac Bancorp Inc. a to aj napriek tomu, že jej záväzky nepresiahli pol miliardy amerických dolárov, ale veľkú újmu zaznamela dôvera. V tomto období ohlásili bankrot aj menšie banky Columbian Bank a Trust., čo bol len začiatok v porovnaní s bankrotom Lehman Brothers. Finančná situácia sa však prenášala aj do Európy. Spoločnosť Oliver Wyman a Intrum Justitia, ktoré odhadovali pre ďalšie tri obdobia vysoké straty bánk vo Veľkej Británii, Írsku a Španielku. Pre udržanie ratingových hodnotení bolo potrebné navýšiť imanie o viac ako šesťdesiat miliárd eur. Následne agentúra Standard & Poor's znížila rating AAA významným svetovým zaist'ovňami Ambac Assurance a MBIA Insurance. Následne znížila rating týchto zaist'ovní aj agentúra Moody's Investors Service, čo fakticky znamenalo, že akcie týchto firiem sa stali senzitívnejšími na problémy bankového sektora. Začiatkom septembra gradovali problémy hypotekárnych agentúr Fannie Mae a Freddie Mac a investičnej banky Lehman Brothers, čo následne viedlo až k bankrotu.

1.1 Finančný cyklus

Výskum finančného cyklu centrálnymi bankami v makroekonomickej teórii, čoraz častejšie. Investorom známy a donedávna ekonómami ignorovaná je idea finančného cyklu. Finančný cyklus, často označovaný aj ako úverový cyklus pozostáva z pomaly sa posúvajúcich úverových boomov a prepadov. Vrcholy cyklu sú spojené s bankovou krízou. Výskum finančného cyklu predstavuje súčasný boom v oblasti výskumu finančných frikcií a prináša nové miery systematického rizika. Koncept tohto cyklu najmä jeho periodicita má v ekonómii rôzne vysvetlenie. Jeden význam implikuje zvrät, ktorý nie je predvídateľný v presnom čase. Aj napriek tomu sú základné kontúry finančného cyklu v porovnaní s obchodným cyklom zrejme. Charakterizuje ho nižšia frekvencia opakovania s vyššou amplitúdou. Borio (2012) konštatuje, že obchodné cykly majú kratšie trvanie s fluktuáciami do osem rokov, zatiaľ čo finančný cyklus je oveľa dlhší s fluktuáciami v trvaní od osem do tridsať rokov. Snahou empirického výskumu finančného cyklu je charakteristika rysov a sledovanie efektov a ich spojitosť s finančnou nestabilitou. Kľúčovým objavom je fakt, že pohyb finančného cyklu je nezávislý od peňažných agregátov M1 a M2. Zistením je aj fakt, že finančný cyklus je nezávislý od obchodného cyklu, okrem situácie, keď narastajúci stres z kolapsu finančného cyklu spôsobuje zmenu fázy obchodného cyklu. Myšlienka finančného cyklu sa stala výnimočnou vo výskume, pretože ide o vhodný indikátor finančnej citlivosti, ktorá nie je zachytená v konvenčných mierach rizika.

1.2 Model

Analyzovaný model pozostáva z troch typov ekonomických subjektov, domácností, podnikateľov a maloobchodníkov. Ide o modifikovaný dynamický novo Keynesovský model s finančným akcelerátorom. Domácnosti žijú nekonečne dlho, pracujú, spotrebúvajú a sporia a vlastnia peňažné a nepeňažné aktíva. Model predpokladá, že užitočnosť sa dá v čase rozložiť na užitočnosť zo spotreby, reálnych peňažných zostatkov a voľného času. Ďalším predpokladom modelu sú pružné ceny, monopolistická konkurencia a implicitné náklady prispôsobovania sa nominálnych cien. Model predpokladá kontinuum maloobchodníkov a monopolistickú konkurenciu na úrovni maloobchodníkov. Maloobchodníci nakupujú output od podnikateľov-producentov na konkurenčnom trhu, ktorý sa mierne diferencuje od outputu, ktorý nakupujú. Keďže produkt je diferencovaný, všetci maloobchodníci majú svoju trhovú silu. Domácnosti a firmy nakupujú CES agregovanú produkciu, ktorá je rozdelená medzi spotrebu a investičné tovary, ktorých cenový index je definovaný agregátnou cenovou úrovňou. Nastavenie cien v modeli „a lá Calvo“, čo umožňuje jednoduchým spôsobom zaviesť strnulé ceny. Premenné v modeli sú vyjadrené ako percentuálne odchýlky od ustáleného stavu a podiely premenných bez časového indexu označených veľkými písmenami označujú podiely hodnôt ustáleného stavu.

Agregátny dopyt

$$y_t = \frac{C}{Y} c_t + \frac{I}{Y} i_t + \frac{G}{Y} g_t + \frac{C^e}{Y} c_t^e + \dots + \phi_t^y \quad (1)$$

$$c_t = -r_{t+1} + E_t\{c_{t+1}\} \quad (2)$$

$$c_t^e = n_{t+1} + \dots + \phi_t^{c^e} \quad (3)$$

$$E_t\{r_{t+1}^k\} - r_{t+1} = -v[n_{t+1} - (q_t + k_{t+1})] \quad (4)$$

$$r_{t+1}^k = (1 - \epsilon)(y_{t+1} - k_{t+1} - x_{t+1}) + \epsilon q_{t+1} - q_t \quad (5)$$

$$q_t = \varphi(i_t - k_t) \quad (6)$$

Agregátna ponuka

$$y_t = a_t + \alpha k_t + (1 - \alpha)\Omega h_t \quad (7)$$

$$y_t - h_t - x_t - c_t = \eta^{-1} h_t \quad (8)$$

$$\pi_t = E_{t-1}\{\kappa(-x_t) + \beta\pi_{t+1}\} \quad (9)$$

Stavové premenné

$$k_{t+1} = \delta i_t = (1 - \delta)k_t \quad (10)$$

$$n_{t+1} = \frac{\gamma RK}{N} (r_t^k - r_t) + r_t + n_t + \dots + \phi_t^n \quad (11)$$

Monetárna politika a šoky

$$r_t^n = \rho r_{t-1} + \zeta \pi_{t-1} + \varepsilon_t^{rn} \quad (12)$$

$$g_t = \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_t^g \quad (13)$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad (14)$$

Vzťah (1) predstavuje log-linearizované rozpočtové ohraničenie. Primárne determinanty zmeny agregátneho y_t predstavujú spotreba domácností c_t , investície i_t , vládne výdavky g_t a malú zmenu vyvoláva spotreba podnikateľov c_t^e . Parameter ϕ_t^y zahŕňa zmeny monitorovacích nákladov². Vzťah (2) predstavuje Eulerovu rovnicu spotreby. Jednotkový koeficient pre reálnu úrokovú mieru predpokladá zmenu užitočnosti vyššiu ako efekt vyvolaný zmenou spotreby. Upravená Eulerova rovnica predpokladá, že frikcie na finančných trhoch neobmedzujú spotrebiteľské správanie. Rozšírenie modelu autormi Bernananke, Gertler, Girstlicht (1999) je možnosť domácností požičať si so zavedením frikcií. Modifikáciou finančného akcelerátora je aplikovateľnosť možná na výdavky aj celkový efekt. Vzťah (3) predstavuje podnikateľskú spotrebu, ktorá je proporcionálnou fixnou zmenou agregátneho čistého imania. Vzťahy (4), (5) a (6) determinujú dopyt po investíciách v log-lineárnom tvare. Vzťah (4) determinuje vplyv čistého imania na investície³. Investície sú tlačené do bodu, kedy sa očakávaný výnos z kapitálu $E_t\{r_{t+1}^k\}$ sa rovná oportunitným nákladom r_{t+1} . Frikcie na kapitálovom trhu reprezentujú relatívny podiel imania k hrubej hodnote kapitálu $n_{t+1} - (q_t + k_{t+1})$. Nárast tohto podielu znižuje náklady externých fondov a implikuje rast investícií. Tento vzťah determinuje finančný akcelerátor. Zvyšné dva vzťahy reprezentujú marginálny produkt a prepájajú ceny aktív s investíciami. Blok agregátnej ponuky reprezentujú vzťahy (7), (8) a (9). Prvý vzťah tohto bloku je log-linearizovaná produkčná funkcia s dodatočným predpokladom konštantnosti ponuky práce podnikateľov. Druhý vzťah tohto bloku reprezentuje rovnováhu na trhu práce.

² „monitoring costs“, pri určitej parametrizácii majú významný vplyv na y_t

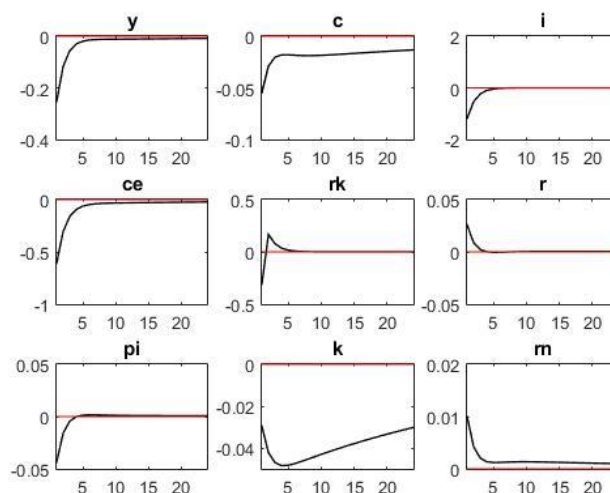
³ V prípade absencie frikcií na kapitálovom trhu platí vzťah $E_t\{r_{t+1}^k\} - r_{t+1} = 0$

Ľavá strana predstavuje marginálny produkt kapitálu úmerný prirážke maloobchodných tovarov pre všetky predávané tovary. Posledný vzťah tohto bloku vyjadruje nastavenie strnulých cien „a lá Calvo“ Calvo (1983). Vzťah (10) a (11) v modeli predstavujú tranzitívne rovnice pre dve stavové premenné kapitál k_t a čisté imanie n_t . Vzťah pre vývoj kapitálu má štandardný tvar, pričom vzťah pre vývoj čistého imania závisí primárne od čistej návratnosti akciového podielu podnikateľov. Vzťahy (12), (13) a (14) determinujú monetárnu politiku. Ako nástroj monetárnej politiky model využíva krátkodobú nominálnu úrokovú mieru. Predpokladá, že jednoduché pravidlo, kde centrálna banka upravuje aktuálnu nominálnu úrokovú mieru ako reakciu na oneskorenú mieru inflácie a oneskorenú úrokovú mieru. Posledný blok vzťahov reprezentujú exogénne šoky vo vládných výdavkoch a technologický šok.

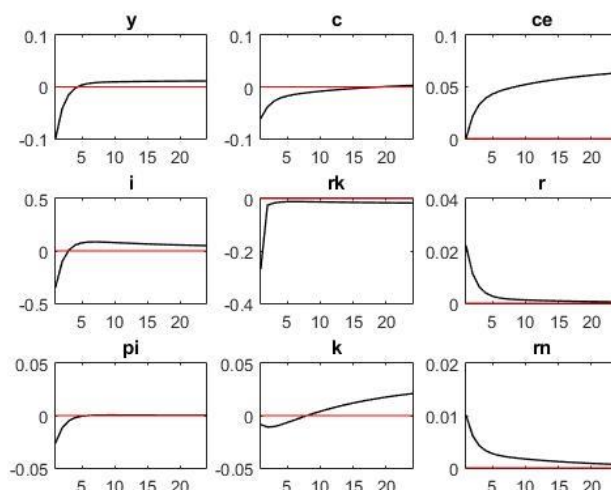
Model je v literatúre často označovaný ako BGG model a autori priniesli dve kľúčové rozšírenia v zmysle, že zaviedli do modelu oneskorenie investícií. Druhým rozšírením je možnosť diferencovaného prístupu k úverom, čo prinieslo prispôsobenie modelu empirickým údajom.

1.3 Funkcie reakcií na šoky

V tejto časti si charakterizujeme vplyv ortogonalizovanej monetárneho šoku na systém a analyzujeme funkcie reakcie na šoky v modeli s finančným akceleratorom aj v modeli bez finančného akceleratora.



Monetárny šok má krátkodobý negatívny vplyv na output a po troch štvrtrokoch sa output dostáva do ustáleného stavu. Šok má negatívny slabý, ale dlhodobý vplyv na spotrebu domácností a mierne silnejší vplyv na spotrebu podnikateľského sektora. Vplyvom tohto šoku krátkodobo klesajú aj investície a po troch obdobiach sa vrátia k ustálenému stavu. Monetárny šok vyvolá pokles bezrizikovej úrokovej miery a je nasledovaný jej nárastom nad úroveň ustáleného stavu, pričom sa v krátkom období dostáva vracia do ustáleného stavu. Šok má krátkodobý pozitívny vplyv na nominálnu úrokovú mieru a rovnako krátkodobý, ale negatívny vplyv na infláciu. Zaznamenali sme dlhodobý vplyv na úroveň kapitálu, kde spočiatku v prvých obdobiach vyvolá pokles kapitálu a postupne sa kapitál vracia k svojej rovnovážnej úrovni. Posledný graf zobrazuje vplyv monetárneho šoku v čase. Druhý graf charakter priebeh kľúčových premenných v modeli bez finančného akceleratora.



Vplyv monetárneho šoku v modeli bez finančného akcelératora je sprevádzaný negatívnym poklesom outputu, ktorého vplyvom sa output posúva na novú úroveň. Dlhodobý negatívny vplyv má aj na spotrebu domácností, ktorá sa však po troch rokoch vráti do ustáleného stavu. Krátkodobo negatívne ovplyvňuje infláciu a rovnako krátkodobo, ale pozitívne ovplyvňuje nominálnu úrokovú mieru. Vplyv na investície je slabší ako v prípade modelu s finančným akcelératorom. Vplyv monetárneho šoku na kapitál je v prvých obdobiach mierne negatívny a po ôsmich obdobiach sa dostáva nad svoj ustálený stav a jeho vplyv je dlhodobý.

Použitá literatúra

1. ADLER, D. The New Economics of Liquidity and Financial Frictions. Research Foundation Publications, Vol. 2014, No. 4. (2014), pp. 1-103
2. BERNANKE, Ben S., GERTLER, Mark, GILCHRIST, Simon. The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework," Handbook of Macroeconomics, in: J. B. Taylor & M. Woodford (ed.), Handbook of Macroeconomics, edition 1, volume 1, chapter 21, pages 1341-1393 Elsevier.
3. BORIO, Claudio E., The Financial Cycle and Macroeconomics: What Have We Learnt?, BIS Working Paper 395, 2012.
4. CALVO, G.A. Staggered prices in a utility-maximizing framework, Journal of Monetary Economics 12, 383-398.
5. DVOŘÁK, Pavel. Veřejné finance, fiskální nerovnováha a finanční krize. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck, 2008, xx, 343 s. ISBN 978-80-7400-075-1.

Kontaktné údaje

Ing. Martin Benkovič
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 6729 5834
benkovic.m@gmail.com

Ing. Patrik Kupkovič
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 6729 5834
patrik.kupkovic.@gmail.com

DŮLEŽITOST KRITÉRIÍ VYJÁDŘENÁ JAKOŽTO LINGVISTICKÁ PROMĚNNÁ

IMPORTANCE OF CRITERIA EXPRESSED AS A LINGUISTIC VARIABLE

Adam Borovička

Abstrakt

Důležitost kritérií v rozhodovacích procesech může být vyjádřena slovně. Metody a přístupy teorie rozhodování však mnohdy vyžadují tuto informaci v kvantitativní podobě. Možným řešením je vyjádření důležitosti kritérií pomocí lingvistické proměnné. Pak jednotlivé slovní výrazy vyjadřující důležitost kritérií jsou opsány prostřednictvím trojúhelníkových fuzzy čísel, která tvoří komplexní fuzzy škálu slovních významů. Příspěvek nabízí pohled na proces vytvoření této fuzzy škály. Je představen postup konstrukce trojúhelníkových fuzzy čísel, respektive jejich funkcí příslušnosti v rámci celé fuzzy škály. Pro praktické potřeby je navržena transformace fuzzy škály spočívající v eliminaci extrémálních výrazů. Popsané postupy jsou doprovázeny ilustrativními příklady.

***Klíčová slova:** důležitost kritéria, fuzzy škála, trojúhelníkové fuzzy číslo*

Abstract

A relevance of criteria can be expressed linguistically in the decision making processes. However, methods and approaches of the decision making theory mostly require this information in a quantitative form. Then particular verbal meanings expressing criteria relevance are described via the triangular fuzzy numbers, which make up a complex fuzzy scale of meanings. The article offers a view of a process of this fuzzy scale. The approach of construction of triangular fuzzy numbers, or their membership functions, in terms of the whole fuzzy scale are introduced. For the practical purposes, a transformation of a fuzzy scale is proposed. This transformation consists in an elimination of extremal meanings. The described approaches are illustrated by simple examples.

***Keywords:** fuzzy scale, relevance of criteria, triangular fuzzy number*

1 ÚVOD

Při dělení určitého rozhodnutí se většinou řídíme podle několika kritérií. Tato kritéria vždy nemusí mít stejnou váhu. Pak rozlišujeme jejich důležitost, která může být vyjádřena v kvantitativní i kvalitativní podobě. Při využití konceptů teorie rozhodování se většinou setkáváme s požadavkem na kvantitativní vyjádření důležitosti kritérií ve formě vah. Pokud tedy rozhodovatel stanovuje důležitost kritérií slovně (kvalitativně), je třeba tuto informaci převést do kvantitativní podoby.

Za tímto účelem může být důležitost kritéria vyjádřena jakožto lingvistická proměnná. Pak jsou jednotlivé slovní významy opisující stupeň důležitosti kritérií popsány pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel, která tvoří celou fuzzy škálu významů. Pokud je tato fuzzy škála sestrojena, známe tedy vlastně jakési fuzzy váhy kritérií, je možné pomocí známých konceptů teorie rozhodování získat kvantitativní informaci o důležitosti kritérií ve formě vah. Tento proces ale není předmětem příspěvku. Cílem příspěvku je představit konstrukci škály

trojúhelníkových fuzzy čísel, respektive jejich funkcí příslušnosti. Pro praktické účely je pak navržen přístup, který transformuje původní fuzzy škálu do podoby bez extrémálních významů. Základní principy postupů jsou ilustrovány na jednoduchých příkladech.

Struktura příspěvku je následující. Po úvodu je popsána důležitost kritérií jakožto lingvistická proměnná. Následně je kladen důraz na způsob vytváření fuzzy škály slovních významů, respektive na metodiku stanovení funkcí příslušnosti fuzzy čísel popisujících slovní významy. Poté je fuzzy škála transformována do navržené podoby. Závěrem dochází ke stručnému shrnutí příspěvku s námětem pro budoucí výzkum.

2 DŮLEŽITOST KRITÉRIÍ JAKOŽTO LINGVISTICKÁ PROMĚNNÁ

Koncept lingvistické proměnné byl vyvinut L. A. Zadehem (Zadeh, 1975a, Zadeh, 1975b, Zadeh, 1975c). Lingvistická proměnná je taková proměnná, jejíž hodnoty jsou slova a význam těchto slov jsou fuzzy množiny¹ definované na universu².

Důležitost kritéria si tedy můžeme obecně vyjádřit jako lingvistickou proměnnou charakterizovanou pěticí $(X, T(X), U, G, M)$. Jméno proměnné X může být *důležitost kritéria*, tedy $X = \textit{důležitost kritéria}$. Rozhodovatel slovně hodnotí relevanci jednotlivých kritérií na škále tří termů – *nízká, střední, vysoká*. Pak množinu $T(X)$ definujeme jako $T(X) = \{\textit{nízká, střední, vysoká}\}$. Je možné definovat universum U jako množinu $T(X)$ nebo může být formulována v širším pojetí lingvistických výrazů hodnotících důležitost kritérií s tím, že bude určitě obsahovat naše tři používané termy. Syntaktické pravidlo G je pouze redukováno na výčet zmíněných lingvistických termů. Sémantické pravidlo M přiřazuje význam každému slovu, který je vyjádřený pomocí fuzzy množiny na dané škále.

Samozřejmě je možné využít podrobnější škálu, například o pěti termech – *velmi nízká, nízká, střední, vysoká, velmi vysoká* či o sedmi termech – *extrémně nízká, velmi nízká, nízká, střední, vysoká, velmi vysoká, extrémně vysoká*. Početnost výrazů v množině termů je do značné míry odvislá na schopnosti příslušného subjektu rozlišit své preference. Podle toho použijeme škálu o třech výrazech, pěti výrazech atd. Také samozřejmě obecně záleží na konkrétní rozhodovací situaci, co je lingvistickou proměnnou, do jaké míry je rozhodovatel znalý situace atd. Obecně si dovoluji vyjádřit, že čím je rozhodovatel blíže vtažen do rozhodovací procedury, tedy zná okolnosti rozhodování, je seznámen s rozhodovacími metodami, přístupy, tím je schopen podrobnějšího rozlišení a vyjádření svých preferencí.

2.1 Slovní význam jako trojúhelníkové fuzzy číslo

Slovní vyjádření je popsáno pomocí trojúhelníkového fuzzy čísla. Tedy každému slovnímu významu přiřazujeme určitou hodnotu ze škály od 0 do 1 s tolerančním pásmem. Dostáváme vlastně mlhavou (fuzzy) váhu, která je vyjádřena pro j -té kritérium jako

$$\tilde{F}_{v_j} = (w_j - \delta_j^d, w_j, w_j + \delta_j^h),$$

kde w_j ($j=1,2,\dots,k$) je váha nejvíce odpovídající kvalitativnímu vyjádření preference j -tého kritéria, δ_j^d , δ_j^h ($j=1,2,\dots,k$) specifikují toleranční pásmo pro hodnotu váhy j -tého kritéria na intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

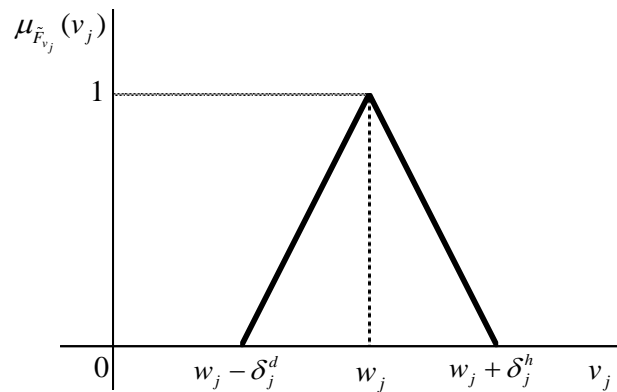
¹ Talašová (2003).

² Libovolná, ale pevně daná tzv. univerzální množina.

Funkce příslušnosti takto definované váhy jakožto fuzzy množiny \tilde{F}_{v_j} bude mít následující podobu

$$\mu_{\tilde{F}_{v_j}}(v_j) = \begin{cases} 0 & v_j \leq w_j - \delta_j^d \\ \frac{v_j + \delta_j^d - w_j}{\delta_j^d} & w_j - \delta_j^d \leq v_j \leq w_j \\ \frac{\delta_j^h + w_j - v_j}{\delta_j^h} & w_j \leq v_j \leq w_j + \delta_j^h \\ 0 & v_j \geq w_j + \delta_j^h \end{cases}.$$

Graficky lze funkci příslušnosti znázornit následujícím obrázkem (Obrázek 1).



Obrázek 1 Funkce příslušnosti mlhavé váhy \tilde{F}_{v_j}

Uvedený obrázek vystihuje situaci $\delta_j^d = \delta_j^h$. Je ale nepochybné, že trojúhelníkové fuzzy číslo nemusí být definováno symetricky, tedy může platit $\delta_j^d \neq \delta_j^h$.

2.2 Fuzzy škála a její transformace

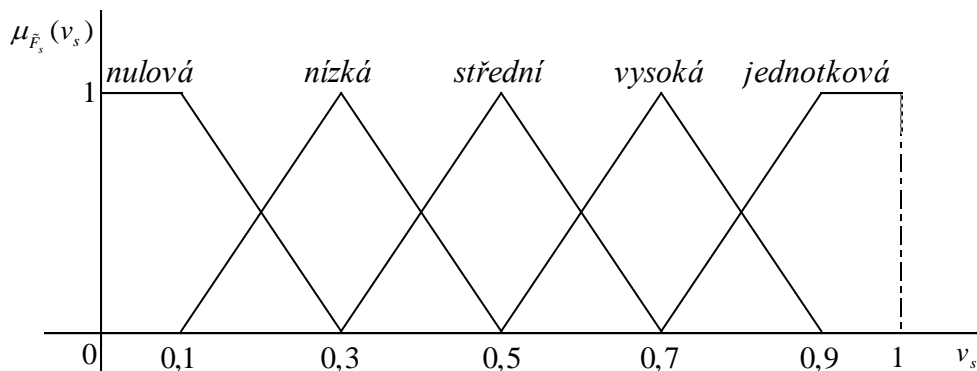
Celá slovní škála je převedena do škály trojúhelníkových fuzzy čísel³

$$\tilde{F}_s = (w_s - \delta_s^d, w_s, w_s + \delta_s^h),$$

kde s zastupuje konkrétní slovní výraz (term). Jednotlivé lingvistické výrazy jsou tedy převedeny na tato trojúhelníková fuzzy čísla s funkcí příslušnosti $\mu_{\tilde{F}_s}$.

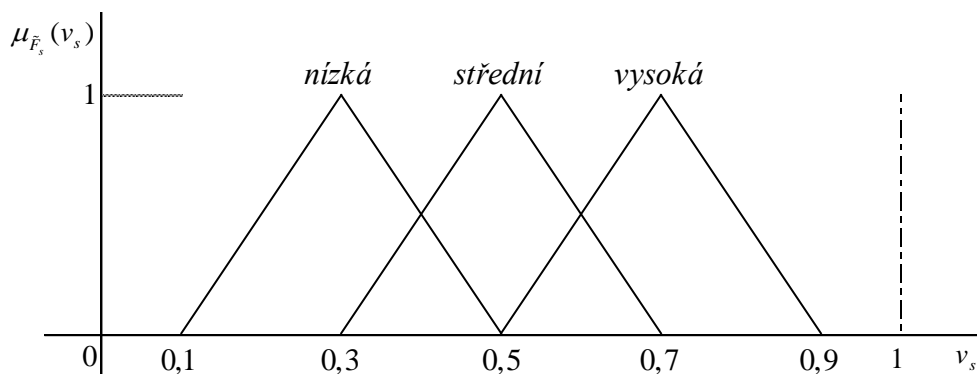
Pro tři termy je vykreslena původní fuzzy škála na následujícím obrázku (Obrázek 2).

³ Fuzzy škála (Talašová, 2003).



Obrázek 2 Původní fuzzy škála pro 3 termy

Kromě tří původních slovních vyjádření jsou přidána ještě dvě, a to *nulová* a *jednotková* důležitost (váha), čímž je vytvořena fuzzy škála. Tyto dva extrémy jsou pro rozhodovací situaci nežádoucí. Určitě nechceme, aby váha nějakého kritéria byla nulová, v takovém případě by kritérium ze souboru vypadlo. Stejně tak není možné, aby váha kritéria byla jednotková, pak by se úloha při jednotkovém součtu vah stávala jednokriteriální. Tedy pro účely vyjádření důležitosti kritérií rozhodovatelem oba extrémy vynecháváme, což zajišťuje aplikovatelnost při kvantifikaci vah kritérií vybranými metodami (např. Borovička, 2015). Poté už nemůžeme mluvit o fuzzy škále, protože není splněna její definice. Nazveme ji transformační škálou trojúhelníkových fuzzy čísel, která vykazuje následující podobu (Obrázek 3).



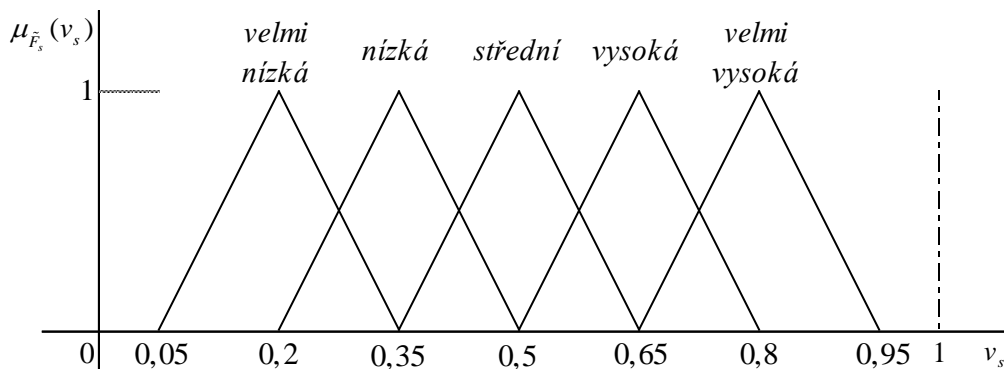
Obrázek 3 Transformační škála fuzzy čísel pro 3 termy

Trojúhelníková fuzzy čísla odpovídající slovním významům zapíšeme do následující tabulky (Tabulka 1).

Tabulka 1 Termy a příslušná fuzzy čísla – třístupňová škála

Term	Fuzzy číslo
<i>Nízká</i>	$\tilde{F}_{nízká} = (0,1;0,3;0,5)$
<i>Střední</i>	$\tilde{F}_{střední} = (0,3;0,5;0,7)$
<i>Vysoká</i>	$\tilde{F}_{vysoká} = (0,5;0,7;0,9)$

Pro výše zmíněnou škálu o pěti termech dostáváme po eliminaci extrémů následující transformační škálu (Obrázek 4).



Obrázek 4 Transformační škála fuzzy čísel pro 5 termů

Trojúhelníková fuzzy čísla odpovídající slovním významům můžeme pak zapsat následovně (Tabulka 2).

Tabulka 2 Termy a příslušná fuzzy čísla – pětistupňová škála

Term	Fuzzy číslo
<i>Velmi nízká</i>	$\tilde{F}_{\text{velmi nízká}} = (0,05;0,2;0,35)$
<i>Nízká</i>	$\tilde{F}_{\text{nízká}} = (0,2;0,35;0,5)$
<i>Střední</i>	$\tilde{F}_{\text{střední}} = (0,35;0,5;0,65)$
<i>Vysoká</i>	$\tilde{F}_{\text{vysoká}} = (0,5;0,65;0,8)$
<i>Velmi vysoká</i>	$\tilde{F}_{\text{velmi vysoká}} = (0,65;0,8;0,95)$

Takto bychom mohli konstruovat transformační škálu pro sedm či více termů dle potřeby rozhodovací úlohy.

Asi první otázka, která nás napadne, je určení jednotlivých fuzzy čísel, tedy celé škály, případně množiny škál. Některé postupy rozebírají například Bonissone (1982), Chen (1988), Keere (1982), či Wenstop (1976). Nejen že řeší samotnou konstrukci transformační (fuzzy) škály fuzzy čísel, ale také počet těchto škál (škál jazykových výrazů). Metod určení opisu škály jazykových významů do formy fuzzy čísel je celá řada. Vlastně se jedná o určení funkce příslušnosti v kontextu dalších funkcí na předem stanoveném intervalu.

Po seznámení s několika přístupy jsem usoudil, že nejlepší bude použít intuitivní metodu (Novák, 1986). Východiskem této metody je fakt, že každý člověk má v daném kontextu vlastní představu o významu konkrétního slova, která je ale z velké části společnou s ostatními lidmi. Pak můžeme zkonstruovat funkci příslušnosti tak, že hodnoty prvků příslušnosti pro jednotlivé prvky univerza odhadujeme na základě vlastní intuice, jak nám to nejvíce vyhovuje. Průběh funkce lze při tom vyjádřit i graficky, a stupně příslušnosti případně z grafu odměřit. Tímto způsobem vyjadřujeme význam slova tak, jak ho my chápeme. Výsledek se v zásadě o mnoho neliší od chápání ostatních lidí.

Škálu tedy sestavuji na základě vlastního úsudku. Jelikož význam mnou použitých termů je chápán lidmi přibližně stejně, nebude se má verze o moc lišit od ostatních. Interval hodnot $\langle 0,1 \rangle$ je zvolen s přihlédnutím na fakt, že váha každého kritéria se právě v tomto intervalu pohybuje. Mezi parametry všech fuzzy čísel platí stejné striktní relace, aby nebylo pochyb o porovnatelnosti fuzzy čísel za účelem rozlišení slovních významů. Funkce příslušnosti trojúhelníkových fuzzy čísel se samozřejmě překrývají, čímž jsou také vyjádřeny otevřenější hranice mezi jednotlivými významy.

3 ZÁVĚR

Záměrem příspěvku je představení popisu principu slovně vyjádřené důležitosti kritérií v rozhodovacím procesu prostřednictvím lingvistické proměnné. Je popsán způsob převodu slovních významů do podoby trojúhelníkových fuzzy čísel (fuzzy vah) tvořících komplexní fuzzy škálu. Dále je navržena transformace této škály nezbytná k procesu stanovení finálních hodnot vah kritérií. V budoucí práci by bylo možné zkoumat opis slovních významů pomocí jiných typů fuzzy čísel (např. trapezodiálních).

Použitá literatura

1. BONISSONE, P. P. A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications. In: Gupta, M. M., Sanchez, E. (eds.): *Approximate Reasoning in Decision Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1982, s. 329-339.
2. BOROVIČKA, A. *Vytváření investičního portfolia podílových fondů pomocí fuzzy metod vícekritériálního rozhodování*. Disertační práce, Katedra ekonometrie, Vysoká škola ekonomická v Praze, Praha, 2015.
3. CHEN, S. M. A new approach to handling fuzzy decision-making problems. In: *18th International Symposium on Multiple-Valued Logic*. Palma de Mallorca: UIB, 1988, s. 72-76.
4. KERRE, E. E. The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics. In: Gupta, M. M., Sanchez, E. (eds.): *Approximate Reasoning in Decision Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1982, s. 277-282.
5. TALAŠOVÁ, J. Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2003, ISBN 80-244-0614-4.
6. WENSTOP, F. Fuzzy set simulation models in a systems dynamic perspective. *Kybernetes*, roč. 6, č. 3, 1976, s. 209-218.
7. ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. *Information Sciences*, roč. 8, č. 3, 1975a, s. 199-249.
8. ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - II. *Information Sciences*, roč. 8, č. 4, 1975b, s. 301-357.
9. ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - III. *Information Sciences*, roč. 9, č. 1, 1975c, s. 43-80.

Kontaktní údaje

Ing. Adam Borovička, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra ekonometrie
nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67

Tel.: +420 224 09 5447

E-mail: adam.borovicka@vse.cz

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/58/2014 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze a projektu č. 13-07350S Grantové agentury České republiky.

TESTOVANIE DYNAMICKÉHO MODELU VÝBERU PORTFÓLIA

THE TEST OF THE DYNAMIC MODEL OF PORTFOLIO SELCTION

Ivan Brezina

Abstrakt

S tvorbou portfólia sa stretávame v stále viac oblastiach nielen hospodárskeho života. Predpoklad využitia tvorby portfólií je nielen, že investor sa rozhoduje na základe relevantných informácií a s podporou matematických modelov, ktoré slúžia na optimalizáciu skladby portfólia, ale aj rôznych prístupov k správe portfólia. Práve tu je značný rozdiel medzi dynamickým a statickým prístupom k optimalizácii portfólia. Tento príspevok je zameraný na testovanie funkčnosti dynamického modelu portfólia založeného na dynamickom strome možností.

Keľúčov  slová: *dynamick  strom moľnosti, Mean Absolute Deviation*

Abstract

We can meet more often with the creation of portfolio in many fields of live and not only in economic life. The assumption of the of the exploitation of creation is not only about it, that the investor make the decisions based on relevant information and with the help of mathematical models, which are created for optimization of portfolio selection, but also different approaches of portfolio managing. This paper is focused on the test of functionality of dynamic portfolio selection model based on dynamic decision tree.

Keywords: *dynamic decision tree, Mean Absolute Deviation*

1  VOD

Tento príspevok je zameran  na modely v beru finan n ho portfólia, jeho spr vou, teda vytv ran m a jeho zmenou. Na tento  cel boli skon struovan  viacerí matematick  modely, ktor  umoľn j  riadenie portfólia na základe rizika, ako napríklad model matematick ho programovania založený na miere rizika *Conditional Value at Risk (CVaR)*, ktorému sa venoval Uryasev (2000), či model matematického programovania založený na miere rizika *Mean Absolute Deviation (MAD)*, ktor  prezentovali Konno a Yamazaki (1991). Jeden z moľn ch prístupov vedenia a správy finančného portfólia predstavujú miery rizika, na základe ktorých moľno vytvoriť a použiť modely pre tvorbu portfólia.

Ďalej sa budeme zameriavať analýzou dynamického modelu výberu portfólia založený na miere rizika MAD. Pouijeme pritom logick  schému vetvenia rozhodovacieho stromu moľnosti popisan , ktor  je popisan  v práci „*portfólio, dynamizácia a náklady na zmenu portfólia*“, ktor  prezentoval Brezina (2015). V dynamickom modely portfólia prezentovaného v tejto práci bola použit  miera rizika MAD, ktor  vstupovala do modelu vytvoreného na základe rozhodovacieho stromu moľnosti. Pre rozhodovanie sa v jednotlivých stavoch je aj tu použit  model, ktorý je založený na štandardnom modeli výberu portfólia založený na miere rizika MAD:

$$\max \sum_{i=1}^n p_{i1} x_{i1} \quad (1)$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_{i1} x_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} x_{i1}} y_{i1} \leq MRV_0 \quad (2)$$

$$V_0 = \sum_{i=1}^n p_{i1} x_{i1} \quad (3)$$

$$x_{i1} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Kde:

p_{i1} - cena i -tého aktíva v danom čase;

x_{i1} - objem vlastneného i -tého aktíva v danom čase;

y_{i1} - umelá premenná reprezentujúca absolútnu odchýlku;

MRV_0 - určené minimálne riziko;

V_1 - uvažovaná výška investície, hodnota aktív vo vytváranom portfóliu.

Takýto model zaručuje nájdenie maximálnej hodnoty portfólia pomocou účelovej funkcie (1), pričom je zohľadnené maximálne riziko, ktoré je investor ochotný pri investovaní podstúpiť, čo zabezpečuje podmienka (2). Nepresiahnutie rozpočtových kritérií investora je pritom zohľadnené podmienkou (3).

2 TESTOVANIE DYNAMICKÉHO MODELU VÝBERU PORTFÓLIA

Opis vytvárania a správy portfólia pomocou tohto už uvedeného prístupu je v tomto príspevku popísaný pre obdobie decembra 2011, pričom sú do úvahy brané aktíva, ktoré tvoria index Dow Jones Industrial, obchodovaný na New Yorkskej burze. Ďalšie prevedené výpočty tu nebudú prezentované, ich výsledky budú zhrnuté v závere tohto príspevku.

Predpokladáme, že investor sa bude snažiť investovať svoje finančné prostriedky v posledných piatich dňoch decembra 2011 (23.12.2011 – 30.12.2011). Prítom ako údaje, na základe ktorých uskutočňuje svoje rozhodnutia, používa historické ceny príslušných akcií v decembri 2011.

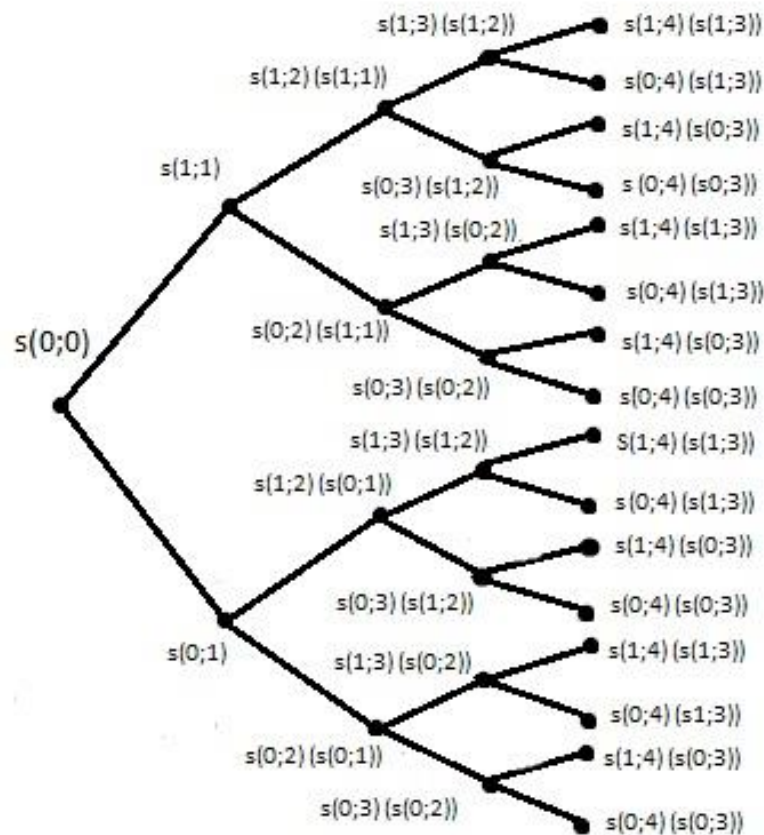
Uvažujeme pritom, že investor je ochotný akceptovať riziko spojené s investovaním vo výške 5%. Abstrahujeme od nákladov, ktoré sú spojené s tvorbou portfólia a s jeho zmenou. Tieto náklady vyjadříme až spätne, pričom ich hodnota bude dosahovať 2% z hodnoty vytváraného, či meneného portfólia. Celková hodnota akcií, ktoré chce investor v jednotlivých stavoch investície vlastniť, je 10 000 €.

Na základe teórie, prezentovanej pre dynamický model výberu portfólia, možno vytvoriť nasledujúce vetvenie rozhodovacieho stromu možností pre konkrétny uvažovaný problém. Schéma takéhoto vetvenia rozhodovacieho stromu možností je znázornená na obrázku 1 (z

dôvodu jednoduchšieho zobrazenia bude v rozhodovacom strome možností stav s_0^0 nahradený $s(0;0)$, s_1^1 bude nahradený $s(1;1)$, $s_2^1(s_1^1)$ nahradený $s(1;2)(s(1;1))$ atď.).

Horná vetva rozhodovacieho stromu v každom stave znamená, že investor pri prechode do nasledujúceho stavu mení svoje portfólio. Naopak, dolná vetva v každom stave znamená, že investor si ponechá portfólio z predchádzajúceho stavu. Pri rozhodnutiach sa však zohľadňuje to, že pokiaľ sa investor rozhodne portfólio v určitom stave zmeniť, hodnota portfólia s novou skladbou akcií bude stále 10 000 €. Konečným riešením teda bude, že investor získa skladbu portfólií pre každý stav vetvenia rozhodovacieho stromu možností. Tak zabezpečí že do úvahy budú brané stavy, kedy bude portfólio statické a jeho skladba sa v investičnom období nezmení, ako aj, že skladba portfólia sa bude meniť, pričom berieme do úvahy všetky možné kombinácie jeho zmeny zo skladby portfólia v predošlom časovom úseku.

Obrázok 1: Rozhodovací strom pre výber portfólia v období 23.12.2011 – 30.12.2011



Zdroj: vlastné spracovanie

Pretože sa investor snaží maximalizovať konečnú hodnotu portfólia, je pre neho zaujímavé iba konečné zloženie portfólia v stave s_4^x . Hodnota portfólia v jednotlivých konečných stavoch je uvedená v tabuľke 1. V hlavičke tabuľky je označená vetva, ktorá k danému konečnému riešeniu (stavu) vedie. Výsledky vypočítané pre každý stav boli získané z výpočtov realizovaných v systéme GAMS. Ďalšie výsledky boli získané z výpočtov v programovom systéme Excel.

Tabuľka 1: Konečné hodnoty portfólia na základe dynamického modelu portfólia založeného na miere rizika MAD

$s_4^0; s_3^0; s_2^0; s_1^0$	$s_4^1; s_3^0; s_2^0; s_1^0$	$s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^0$	$s_4^1; s_3^1; s_2^0; s_1^0$	$s_4^0; s_3^0; s_2^1; s_1^0$	$s_4^1; s_3^0; s_2^1; s_1^0$	$s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^0$	$s_4^1; s_3^1; s_2^1; s_1^0$
9929	10000	10183	10000	10005	10000	10183	10000
$s_4^0; s_3^0; s_2^0; s_1^1$	$s_4^1; s_3^0; s_2^0; s_1^1$	$s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^1$	$s_4^1; s_3^1; s_2^0; s_1^1$	$s_4^0; s_3^0; s_2^1; s_1^1$	$s_4^1; s_3^0; s_2^1; s_1^1$	$s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^1$	$s_4^1; s_3^1; s_2^1; s_1^1$
9874	10000	10183	10000	10005	10000	10183	10000

Zdroj: vlastné spracovanie

Ako je z tabuľky 1 vidieť, investor maximalizuje konečnú hodnotu portfólia v stavoch $s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^0$, $s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^0$, $s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^1$ a $s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^1$. Treba však brať do úvahy, že stále abstrahujeme od nákladov C , ktoré boli spojené s tvorbou a zmenou portfólia.

Vzhľadom na skladbu portfólia v jednotlivých stavoch investície je však možné tieto náklady spätne vypočítať. Tieto náklady znížia konečnú hodnotu, ktorú investor pri investovaní získa. Náklady, ktoré bolo potrebné vynaložiť pri tvorbe portfólia, ktorého konečná hodnota je v stave s_4^x , sú uvedené v tabuľke 2. V hlavičke je opäť označená vetva, ktorá k danému konečnému riešeniu vedie.

Tabuľka 2: Výška nákladov pri tvorbe portfólia vytvoreného na základe dynamického modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD

$s_4^0; s_3^0; s_2^0; s_1^0$	$s_4^1; s_3^0; s_2^0; s_1^0$	$s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^0$	$s_4^1; s_3^1; s_2^0; s_1^0$	$s_4^0; s_3^0; s_2^1; s_1^0$	$s_4^1; s_3^0; s_2^1; s_1^0$	$s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^0$	$s_4^1; s_3^1; s_2^1; s_1^0$
0	1	5	9	389	789	790	793
$s_4^0; s_3^0; s_2^0; s_1^1$	$s_4^1; s_3^0; s_2^0; s_1^1$	$s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^1$	$s_4^1; s_3^1; s_2^0; s_1^1$	$s_4^0; s_3^0; s_2^1; s_1^1$	$s_4^1; s_3^0; s_2^1; s_1^1$	$s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^1$	$s_4^1; s_3^1; s_2^1; s_1^1$
396	796	797	800	793	1193	1194	1198

Zdroj: vlastné spracovanie

Na základe nákladov z tabuľky 2 je možné vypočítať i hodnotu, ktorú investor pri investovaní získa (tabuľka 3). Tá predstavuje pri investovaní ukazovateľ, ktorý sa investor snaží maximalizovať, a bude teda slúžiť na rozhodnutie o priebehu investície.

Tabuľka 3: Hodnota investície v konečných stavoch pri investovaní na základe dynamického modelu portfólia založeného na miere rizika MAD

$s_4^0; s_3^0; s_2^0; s_1^0$	$s_4^1; s_3^0; s_2^0; s_1^0$	$s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^0$	$s_4^1; s_3^1; s_2^0; s_1^0$	$s_4^0; s_3^0; s_2^1; s_1^0$	$s_4^1; s_3^0; s_2^1; s_1^0$	$s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^0$	$s_4^1; s_3^1; s_2^1; s_1^0$
9929	9999	10178	9991	9616	9211	9393	9207
$s_4^0; s_3^0; s_2^0; s_1^1$	$s_4^1; s_3^0; s_2^0; s_1^1$	$s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^1$	$s_4^1; s_3^1; s_2^0; s_1^1$	$s_4^0; s_3^0; s_2^1; s_1^1$	$s_4^1; s_3^0; s_2^1; s_1^1$	$s_4^0; s_3^1; s_2^1; s_1^1$	$s_4^1; s_3^1; s_2^1; s_1^1$
9478	9204	9387	9200	9212	8807	8989	8802

Zdroj: vlastné spracovanie

Na základe tabuľky 3 je teda evidentné, že najvyššia hodnota portfólia po odpočítaní nákladov súvisiacich s tvorbou a zmenou portfólia je dosiahnutá v konečnom stave, ku ktorému sa dostaneme vetvou $s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^0$ a predstavuje hodnotu 10 178 €. Investor by mal teda investovať tak, aby jeho investícia nadobúdala zloženie portfólia uvedené v tabuľke 3, ktorá predstavuje rozloženie portfólia v jednotlivých dňoch investície pre uvedenú vetvu $s_4^0; s_3^1; s_2^0; s_1^0$.

Hodnota, ktorú investor získa takouto investíciou, je 10 178 €. Aj keď pri investícii bol vzhľadom na náklady dosiahnutý zisk, takýto druh investície bol pri našich experimentálnych výpočtoch skôr zriedkavý. Spätne prepočítané náklady sú značne vysoké. Vzhľadom na to, že

z analýzy dát je zrejmé, že všetky aktíva spĺňajú uvažované riziko, v jednotlivých stavoch je investícia zvyčajne umiestnená do jedného aktíva, ktoré v nasledujúcom období maximalizuje svoj zisk bez ohľadu na predošlú skladbu portfólia. Na základe daného je teda zrejmé, že portfólio ostane v ďalšom stave nezmenené, prípadne zmení celú svoju skladbu, s čím sú spojené i značné náklady.

Pri uvedenom príklade investor mení iba veľkosť investície, ktorá bola prevedená do vybratého aktíva, skladba portfólia sa však pritom nemení. Použitie dynamického modelu však pri takomto uvažovaní má zmysel, nakoľko prináša výsledok, ktorý nikdy nebude horší než pri použití statického modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD.

V prípade investovania väčších čiastok na trhu by hodnota, ktorá by pomocou použitia dynamického modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD, priniesla iné výsledky než pri použití statického modelu. Táto hodnota by postupne narastala, nikdy by však nebola horšia, než pri použití statického modelu výberu portfólia. Pre veľkých investorov by mohla znamenať značné zlepšenie ich investičnej stratégie.

Tabuľka 5: Optimálna skladba portfólia na základe dynamického modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD

	23.12.2011		27.12.2011		28.12.2011		29.12.2011		30.12.2011	
	množstvo akcií	podiel na portfóliu	množstvo akcií	podiel na portfóliu	množstvo akcií	podiel na portfóliu	množstvo akcií	podiel na portfóliu	množstvo akcií	podiel na portfóliu
AA	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
AXP	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
BA	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
BAC	1785,714	100,00%	1786,714	100,00%	1787,714	100,00%	1831,502	100,00%	1832,502	100,00%
CAT	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
CSCO	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
CVX	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
DD	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
DIS	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
GE	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
HD	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
HPQ	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
IBM	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
INTC	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
JNJ	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
JPM	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
KO	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
MCD	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
MMM	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
MRK	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
MSFT	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
PFE	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
PG	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
T	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
TRV	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
UNH	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
UTX	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
VZ	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
WMT	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%
XOM	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%

Zdroj: vlastné spracovanie

3 ZÁVER

Výsledky, ktoré sú prezentované v tomto príspevku potvrdzujú vhodnosť použitia dynamického modelu výberu portfólia. Uvažujeme totižto, že pri zmene portfólia investor predá portfólio za ceny, ktoré sú na konci každého dňa investície rovnaké ako na začiatku nasledujúceho dňa, v ktorom sa obchoduje na burze. Zisk vzniká v dôsledku predaja aktív a kurzovým rozdielom na začiatku obchodného dňa a vývojom v zmene ceny aktív počas dňa. Vzhľadom na vlastnosti dynamického modelu portfólia, ktoré zahŕňa i statickú držbu, výsledky nikdy nebudú horšie, než výsledky, ktoré poskytuje dynamické portfólio. To sa potvrdilo i pri prevedených výpočtoch.

Prezentovaná tvorba portfólia pritom dokázala, že aj napriek tomu, že investor investuje stále do rovnakého jedného aktíva, čo je spôsobené jeho rizikovosťou, maximalizuje svoj zisk. Pretože v jednom momente portfólio predá a následne nakúpi tak, že konečná hodnota portfólia je maximalizovaná a teda i po zahrnutí nákladov na zmenu portfólia poskytuje lepšie výsledky ako statický model tvorby a správy portfólia.

Použitá literatúra

1. BREZINA, I. 2015. Portfólio, dynamizácia a náklady na zmenu portfólia. In: Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi XI, Bratislava. 2015
2. BREZINA, I. 2013. Rôzne prístupy k analýze portfólia. In: Information technology aplikations/ Aplikácie informačných technológií 1/2013, 2013. s. 31–42.
3. BREZINA, I., DOLINAJCOVÁ, M. 2012. Výber dynamického portfólia založený na teórii rozhodovacích stromov. In: 6th International Scientific Conference Managing and Modelling of Financial Risks, Ostrava. 2012.
4. KONNO, H., YAMAZAKI, H. 1991. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. In: Management Science, Vol. 37, No. 5, 1991. s. 519–531.
5. PEKÁR, J., BREZINA, I. jr., ČIČKOVÁ, Z. 2012. Portfolio Return, Taking into Account the Cost of Financial Transactions. In: International Scientific Conference Quantitative Methods in Economics (Multiple Criteria Decision Making XVI) 2012. Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2012. pp. 171-175
6. URYASEV, S.P. 2000. Probabilistic Constrained Optimization Methodology and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2000.

Kontaktné údaje

Ing. Ivan Brezina, PhD.

Paneurópska vysoká škola, Fakulta ekonómie a podnikania

Tematínska 10, 851 05 Bratislava

Tel: (421 903) 245 554

email: brezina.ivan@yahoo.com

OD CVRP K EVRP – VC¹ FROM CVRP TO EVRP – VC

Ivan Brezina, Juraj Pekár

Abstrakt

V súčasnosti predstavuje zaujímavú „zelenú“ modifikáciu klasických úloh CVRP minimalizácia emisií CO₂, ktorý reprezentuje model EVRP – VC (*Emissions Vehicle Routing Problem – Vehicle Category*). Cieľom tejto modifikácie klasických CVRP je minimalizáciou spotrebu vozidiel v disponibilnom vozovom parku znížiť emisie CO₂ tak, že analyzuje možnosť použitia rôznych typov vozidiel z disponibilného vozového parku, ktoré sa môžu líšiť podľa ich hmotnosti, užitočného zaťaženia a množstvom vyprodukovania emisií.

Kľúčové slová: CVRP, EVRP – VC

Abstract

The paper presents an interesting "green" modification of the CVRP minimization of emissions of CO₂, which represents a model EVRP - VC (*Emissions Vehicle Routing Problem - Vehicle category*). The objective of this modification of the classical CVRP is minimizing the consumption of disposable vehicles in the fleet to reduce CO₂ emissions by analyzing the possibility of using various types of vehicles from the available fleet, which may vary according to their weight, the payload and the amount of emissions produced.

Keywords: CVRP, EVRP – VC

1 ÚVOD

Jednu z najznámejších optimalizačných úloh na obsluhu uzlov v dopravnej sieti v okružných úlohách predstavuje Problém obchodného cestujúceho (*Traveling Salesman Problem – TSP*), ktorej cieľom je nájsť optimálnu okružnú cestu, pričom začiatkový a aj koncový uzol je totožný a každý iný uzol v okružnej ceste je zahrnutý práve raz. V tejto úlohe sa uvažuje s jedným obchodným cestujúcim, prípadne s jedným vozidlom pri predpoklade, že vozidlo má dostatočne veľkú kapacitu na to, aby boli splnené požiadavky všetkých odberateľov. Ak však uvažujeme s odberateľmi, ktorých požiadavky presahujú kapacitu jedného vozidla, úlohu možno charakterizovať ako úlohu obchodného cestujúceho so špeciálnou štruktúrou (Müller, 1970), respektíve je takáto úloha označovaná ako úloha okružných jász (*Vehicle Routing Problem – VRP*), resp. častejšie ako kapacitná okružná úloha (*Capacited Vehicle Routing Problem – CVRP*).

V prípade optimalizácie okružných rozvozných trás s cieľom minimalizácie emisií CO₂, ktorý je založený na pôvodnom modeli CVRP, hovoríme o emisnej úlohe okružných jász rôznorodého vozového parku (*Emissions Vehicle Routing Problem – Vehicle Category*, EVRP – VC). V tejto modifikácii je optimalizácia prejdenej vzdialenosti vozidlom nahradená cieľovým kritériom minimalizácie emisií, resp. toto kritérium je odvodené od minimalizácie celkovej spotreby paliva (pri predpoklade závislosti spotreby paliva na hmotnosti vozidla

¹ This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

v priebehu jeho cesty). Pri optimalizácii je pritom rešpektovaná rôznorodosť vozového parku s rôznou celkovou nosnosťou, maximálnou nosnosťou a palivovou účinnosťou.

2 KAPACITNÁ OKRUŽNÁ ÚLOHA

Ako už bolo uvedené, ak uvažujeme o preprave objemnejších komodít, pričom každému zákazníkovi je priradená požiadavka na obsluhu, je nevyhnutné zohľadniť aj obmedzenie kapacity prepravného prostriedku. Súvisiaci problém je známy ako problém rozvozu (*Vehicle Routing Problem* – VRP), resp. kapacitný okružný problém (*Capacited Vehicle Routing Problem* – CVRP). Jeho podstatou je nájsť také minimálne trasy vozidla, ktoré sa začínajú a končia vo východiskovom (aj koncovom) uzle, aby každý uzol okrem východiskového uzla bol navštívený práve raz, pričom sa pri preprave neprekročí kapacita vozidla a budú uspokojené požiadavky všetkých zákazníkov. Úlohu CVRP možno zapísať nasledujúcim spôsobom.

Označenie:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ – množina odberateľov (zákazníkov),

$N_0 = N \cup \{0\}$ – množina odberateľov spolu so strediskom,

d_{ij} – minimálna vzdialenosť medzi vrcholmi $i, j \in N_0$,

q_i – požiadavky odberateľa $i \in N$,

g – kapacita vozidla.

$$\min f(\mathbf{X}, \mathbf{u}) = \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_0} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N_0} x_{ij} = 1, \quad j \in N, \quad i \neq j \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N_0} x_{ij} = 1, \quad i \in N, \quad i \neq j \quad (3)$$

$$u_i + q_j - g(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad i \in N_0, \quad j \in N, \quad i \neq j \quad (4)$$

$$q_i \leq u_i \leq g, \quad j \in N \quad (5)$$

$$u_0 = 0 \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N_0, \quad i \neq j \quad (7)$$

Prirodzenou modifikáciou problému rozvozu je uvažovanie s východiskovými uzlami, čo zohľadňuje okružné problémy s viacerými strediskami (*Multi Depot Vehicle Routing Problem* – MDVRP), keď každé vozidlo vychádza z jedného a vracia sa do jedného z množiny východiskových uzlov.

V teórii je častým predpokladom homogenita vozového parku, v praxi je však skôr bežný prípad odlišných vozidiel s rôznou kapacitou, vekom, alebo s ďalšími odlišnými parametrami. Takéto predpoklady zohľadňuje okružný problém s heterogénnym dopravným parkom (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem* – FSMVRP). Cieľom je zvyčajne, okrem minimalizácie celkovej vzdialenosti, aj minimalizácia celkových nákladov na vozidlá.

V prípade, ak po ukončení obsluhy nie je požadovaný návrat vozidla (vozidiel) do východiskového uzla, hovoríme o otvorenom probléme rozvozu (*Open Vehicle Routing Problem* – OVRP).

Ďalším rozšírením okružných problémov je zostavenie periodického plánu rozvozu v závislosti od denného plánu, tzv. periodický okružný problém (*Period Vehicle Routing*

Problem – PVRP). Tento typ rozvozných úloh zahŕňa aj alokačný problém, pričom alokačná časť zahŕňa priradenie uzlov ku dňu periódy (napr. v týždni), zatiaľ čo okružná trasa býva zvyčajne jednodenná. Rozšírením uvedeného rozvozného problému je modifikácia pre rozvoz aj zvoz materiálu, tzv. periodický okružný problém pre rozvoz a zvoz (*Period Vehicle Routing Problem with Simultaneous Delivery and Pickup* – PVRPSDP).

V niektorých prípadoch je potrebné rozdeliť požiadavky odberateľa do viacerých trás, čomu zodpovedá formulácia rozvozných úloh s delenou dodávkou (*Split Delivery Vehicle Routing Problem* – SDVRP).

Ďalšiu možnú modifikáciu predstavuje zásobovací okružný problém (*Inventory Vehicle Routing Problem* – IVRP) aplikovateľný v prípade opakovanej distribúcie tovaru k množine zákazníkov s monitorovanou lokálnou úrovňou zásob.

V prípade skutočnosti, že čas, miesto, veľkosť dodávky, ale aj otváracie hodiny sú náhodnou veličinou, hovoríme o stochastickom okružnom probléme (*Stochastic Vehicle Routing Problem* – SVRP). V prípade stochastických odberateľov ide o okružný problém so stochastickými odberateľmi (*Vehicle Routing Problem with Stochastic Customers* – VRPSC), v prípade stochastických požiadaviek ide o okružný problém so stochastickými požiadavkami (*Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand* – VRPSD), v prípade stochastických časov obsluhy a prepravy ide o okružný problém so stochastickými časmi obsluhy a prepravy (*Vehicle Routing Problem with Stochastic Service and Travel Times* – VRPSSTT).

V prípade úvahy plánovania viacerých použití vozidla v uvažovanom časovom intervale, ide o okružný problém s viacerými jazdami (*Multi-trip Vehicle Routing Problem* – MtVRP).

Ak vznikne požiadavka, aby boli zákazníci navštevovaní rovnakým vodičom približne v rovnakom čase každý deň, ide o tzv. konzistentné okružné problémy (*Consistent Vehicle Routing Problem* – ConVRP).

Ďalším logickým, a v praxi často používaným, rozšírením okružných problémov je zohľadnenie časových obmedzení. V tomto prípade treba priradiť okružnej ceste časový plán vrátane časových okamihov, v ktorých sa začne obsluha každého z ulov, ktorá sa začne (prípadne sa ukončí) počas špecifikovanej časovej periódy, tzv. okružné problémy s časovými oknami (*Vehicle Routing Problem with Time Windows* – VRPTW).

3 EMISNÉ ÚLOHY OKRUŽNÝCH JÁZD

V súčasnosti sú zaujímavé aj ekologicky orientované rozšírenia do úloh klasických okružných úloh, ktoré sa zameriavajú na minimalizáciu spotreby paliva alebo množstva vyprodukovaných emisií CO₂, pričom sa predpokladá priama úmera medzi týmito hodnotami. Pri formulácii týchto problémov sa zvyčajne predpokladá odhad množstva spotrebovaného paliva pre príslušný úsek okružnej úlohy. Vo všeobecnosti existuje celý rad metód pre odhad spotreby paliva a vyprodukovaných emisií v cestnej doprave, ktoré sú závislé na celom rade parametrov. Väčšina odhadových metód je založená na analytických modeloch emisií, ktoré sa líšia v zásadách, na ktorých sú modely založené a parametroch, ktoré sa berú do úvahy.

Kara a kol. (2007) prezentovali model, ktorého cieľom je minimalizácia hmotnosti prevážaného nákladu vo vozidle. Model sa usiluje o minimalizáciu energie vozidiel pri jednotlivých jazdách v okružných úlohách. Ich prístup však neodráža skutočnú spotrebovanú energiu vozidla, pretože zanedbáva niektoré veľmi dôležité faktory ako napríklad hmotnosť prázdneho vozidla.

Novšie modely sú založené na metódach odhadu paliva a znečistenia v závislosti na špecifických parametroch, za ktoré môžeme považovať napr. celkovú hmotnosť vozidla vrátane celkovej nosnosti vozidla (Peng a Wang 2009).

Niektoré súčasné modely berú do úvahy súčasne niekoľko faktorov ako napr. priemernú rýchlosť Figliozzi (2010), preťaženie vozidla, ktoré je ovplyvňované priemernou rýchlosťou v kombinácii s rýchlosťou zrýchlenia Figliozzi (2010), topológiou (Scott a kol. 2010, Ubeda a kol. 2010) alebo užitočným zaťažením (Jaramillo 2010, Scot a kol. 2010, Peng a Wang 2009).

Riešenie otázok vyplývajúcich zo spájania zelenej logistiky so smerovaním vozidiel a plánovaním uvádzajú Sbihi a Egles (2010), ktorí sa zameriavajú na aspekty časovo závislých problémov prepravy nebezpečného materiálu a dynamickú optimalizáciu modelov v reálnom čase.

Jabali a kol. (2012) skúmajú kompromis medzi minimalizáciou emisií CO₂ v porovnaní s minimalizáciou celkovej jazdnej doby. Emisie CO₂ sú v priamom vzťahu k rýchlosti vozidla a závisia od času cestovania alebo doby jazdy. Tieto faktory, ktoré ovplyvňujú spotrebu paliva, sú zahrnuté v ich optimalizačných modeloch. Vo svojej práci uvádzajú a porovnávajú tri rôzne modely. Prvým modelom je model pre minimalizáciu celkovej doby jazdy. Druhým modelom je model pre minimalizáciu emisií CO₂ v závislosti na dobe cestovania a rýchlosti. Posledným modelom je model založený na nákladoch, ktorý optimalizuje náklady na základe váženého priemeru cestovného času, nákladoch na emisie a na nákladoch na palivo za predpokladu, že dopravné spoločnosti môžu obmedziť rýchlosť svojich vozidiel.

Ubeda a kol. (2010) analyzujú účinky rôznych stupňov využitia vozidla na množstve vyprodukovaných emisií oxidu uhličitého (CO₂). Autori analyzujú rozdiely v emisiách CO₂ medzi vzdialenosťou a prístupom minimalizácie emisií.

Scott a kol. (2010) skúmajú vplyv sklonu vozovky a používajú korekčné faktory užitočného zaťaženia v rámci emisných modelov. Autori preverujú mieru vplyvu doručenia tovaru na riešenie úlohy najkratšej cesty a úlohy obchodného cestujúceho. Pre odhad spotreby paliva vo svojej štúdií využívajú model COPERT prezentovaný v práci Ntziachristos a Samaras (2000).

Bektas a Laporte (2011) vyvinuli model GVR (Green Vehicle Routing), ktorý je rozšírením klasickej úlohy okružných jász. Účelová funkcia v rozvinutom modeli je získaná pozorovaním nielen euklidovskej vzdialenosti medzi uzlami v sieti a doby jazdy, ale tiež na základe koncentrácie výfukových plynov v spojitosti so spotrebou paliva.

Xiao, Zhao, Kaku, a Xu (2011) venovali osobitnú pozornosť miere spotreby paliva v závislosti na zaťažení vozidla. Výsledky ukazujú, že daným modelom možno znížiť spotrebu paliva v priemere o 5 % v porovnaní so štandardnými modelmi VRP.

Erdogan & Miller – Hooks (2012) predstavili zelenú úlohu okružných jász (Green Vehicle Routing Problem – G-VRP), keď prezentujú problém smerovania vozového parku, ktorý využíva bio palivá a modifikovali algoritmus Clarka-Wrighta pomocou heuristických postupov. Používanie vozidiel, ktoré jazdia na bio palivá sa považuje za prekonanie ťažkostí, ktoré existujú pri používaní automobilov jazdiacich na báze fosílnych palív. Základný problém s využitím vozidiel, ktoré jazdia na báze fosílnych palív je zvýšenie emisií výfukových plynov (NO_x, SO₂ i CO₂) a obmedzený rozsah vozidiel v kombinácii s obmedzenou infraštruktúrou pre doplnenie požadovaným palivom.

Skupina talianskych autorov (Beltran, Carrese, Cipriani, a Petrelli, 2009) skúmala realizáciu zelených autobusov v mestskej sieti, kde sa do úvahy brali všetky prevádzky (zastávky) v

sieti. Vyvinuli model pre pridelovanie zelených autobusov pomocou algoritmov za predpokladu rovnováhy v sieti. Do úvahy brali citlivé oblasti miest ako obytné oblasti, parky a pod. a pripravili zelené trasy v blízkosti spomenutých obytných zón, ktoré mali veľký vplyv na zníženie znečistenia prostredia.

Okrem uvedených štúdií sa modelom G - VRP venujú aj ďalší autori (Faulin, Juan, Lera, a Grasman, 2011, Suzuki, 2011). Podrobnú prezentáciu a opis štúdií, ktoré do úvahy berú VRP rovnako ako problém G - VRP možno nájsť aj v prácach Lin, Choy, Ho, Chung, a Lam (2014). Teoretický základ tohto prístupu možno nájsť v prácach Shing a Jang (1993), Shing a Jang (1995) a Shi a Mizumoto (2000).

Možnou modifikáciou účelovej funkcie (1) pri rešpektovaní minimalizácie spotreby je účelová funkcia:

Označenie:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ – množina uvažovaných odberateľov,

$N_0 = \{0, 1, \dots, n\}$ – množina uvažovaných odberateľov vrátane strediska,

$M = \{1, 2, \dots, m\}$ – množina uvažovaných vozidiel,

a_k – spotreba paliva k -teho vozidla na 100 km, $k \in M$,

b_k – dodatočná spotreba paliva k -teho vozidla na tonu užitočného zaťaženia na 100 km, $k \in M$,

q_{ijk} – hmotnosť užitočného zaťaženia k -teho vozidla z i do j , $i, j \in N_0$, $k \in M$.

$$\min f(\mathbf{X}) = \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N} \sum_{k \in M} \left(d_{ij} (a_k x_{ijk} + b_k q_{ijk} x_{ijk}) \right) \quad (8)$$

Záver

Prezentované prístupy monitorujú vývoj a rozšírenia klasických okružných modelov a ich súčasné modifikácie s cieľom znižovania CO2 emisií pri minimalizácii spotrebovaných palív. Prezentované prístupy nie sú úplným a vyčerpávacím prehľadom. V príspevku nie sú prezentované všetky formulácie modelov a metódy riešenia na nich zostavených úloh. Príspevok má len slúžiť ako inšpirácia pre rôzne formulácie okružných úloh pri zohľadnení najnovších ekologických výziev.

Použitá literatúra

1. BEKTAS, T. – LAPORTE, G. 2011. *The pollution routing problem*. In: Transportation Research Part B, vol. 45, p.1232–1250 [online]. 2011. [cit. 2015.01.28]. Dostupné: <https://www.researchgate.net/publication/227427091_The_PollutionRouting_Problem>.
2. ČIČKOVÁ, Z. 2008. *Optimalizácia rozvozu materiálu*. In: Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníkov. [online]. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2008. ISBN 978-80-225-2498-8.
3. BREZINA, I., jr., ČIČKOVÁ, Z. 2011. *Solving the travelling salesman problem using the ant colony optimization*. In Management information systems : the International scientific journal. - Subotica ; Bratislava : University of Novi Sad, The Faculty of Economics : University of Economics Bratislava, Faculty of Economic Informatics, 2011. - ISSN 1452-774X. - Vol. 6, no. 4 (December 2011), s. 10-14.
4. ČIČKOVÁ, Z. 2013. Modifikácie problému obchodného cestujúceho / Zuzana Čičková. - VEGA 1/0104/12. In AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach [elektronický zdroj] : zborník : 15. medzinárodná vedecká konferencia : Bratislava, 25. október 2013 = AIESA - building of society based on knowledge : proceedings /

- zostavenie zborníka Anna Šlosárová, Janette Brixová ; recenzenti Igor Bandurič, Ivan Brezina. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2013. - ISBN 978-80-225-3770-4. - S. 1-11 CD-ROM.
5. KARA, I. – KARA, B. – YETIS, M. 2007. *Energy minimizing vehicle routing problem*. In: *Combinatorial optimization and application* (pp. 62–71). [online]. 2007, vol. 4616 [cit. 2015.02.20]. Dostupné: <http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-73556-4_9>.
 6. KOPFER, W. – SCHÖNBERGER, J. – KOPFER, H. 2013. *Reducing greenhouse gas emissions of a heterogeneous vehicle fleet*. In: *Flexible Services and Manufacturing Journal* [online]. 2013 [cit. 2015.03.13]. Dostupné: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10696-013-9180-9>>.ISSN 1936-6582.
 7. SCOTT, C. – URQUHART, N. – HART, E. 2010. *Influence of topology and payload on CO2 optimized vehicle routing*. In: *Proceedings of the 2010 international conference on applications of evolutionary computation* [online]. Vol. 2, p. 141–150. 2010. [cit. 2015.04.10]. Dostupné: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-12242-2_15>. ISSN 0302-9743.
 8. ŠOFRANKO, M. – BREZINA, I. 2015. *Modifikácie úlohy okružných jász s minimalizáciou emisií*. In: zborník z workshopu Plánovanie prepravy s cieľom znižovania emisií: 1. vedecký workshop k riešeniu projektu Vega č. 1/0245/15, Bratislava, ISBN 978-80-225-4105-3.
 9. ŠOFRANKO, M. – BREZINA, I. 2015. *Ekologický aspekt v okružných úlohách*. In: Zborník zo seminára VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD VO VEDECKO–VÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XI, Makov, ISBN 978-80-225-4084-1.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava; Tel: (421 2) 67 295 821, mail: ivan.brezina@euba.sk

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava; Tel: (421 2) 67 295 829, mail: juraj.pekar@euba.sk

ANALÝZA NIEKTORÝCH FAKTOROV OVPLYVŇUJÚCICH RACIONALITU ROZHODOVANIA

ANALYSIS OF SELECTED FACTORS INFLUENCING RATIONALITY OF DECISION MAKING¹

Zuzana Čičková, Tomáš Gál

Abstrakt

Merateľnosťou stupňa úžitku zo spotreby určitého statku sa zaoberá teória očakávanej užitočnosti spájaná najmä s menami John von Neumann a Oskar Morgenstern. Kritiky tejto teórie sú zamerané predovšetkým na obmedzenosť jej axióm. Príspevok sa zaoberá modifikáciami Ellsbergovho experimentu (pomocou obrázka, tajného alebo verejného hlasovania).

Kľúčové slová: *Teória hier, Teória rozhodovania, Racionalita, Limitovaná racionalita, Ellsbergov experiment, Behaviorálna ekonómia, Info-gap teória*

Abstract

Subjective expected utility theory is a scientific theory used for measuring usefulness efficiency from expended item. This theory is related to names, such as John von Neumann and Oskar Morgenstern. The theory is being criticized, mostly because of limitations of its axioms. This article presents modified Ellsberg's experiments (done by added image and non-public and public vote).

Key Words: *Game Theory, Decision Making, Rationality, Limited Rationality, Ellsberg experiment, Behavioral Economy, Info-gap Theory*

1 ÚVOD

Teória užitočnosti je súčasťou ekonomickej teórie, ktorá slúži najmä na vysvetlenie spotrebiteľského správania, pričom úžitkom chápem stupeň uspokojenia zo spotreby určitého statku (alternatívy, udalosti). Už A. Smith vo svojom diele z roku 1776 *Pojednanie o podstate a pôvode bohatstva národov* uvažuje o etike vlastného prospechu, ktorú považuje za najsilnejšiu ľudskú vlastnosť (pozri napríklad vydanie Smith, 2001). Normatívnym predpokladom neoklasickej ekonómie je predpoklad racionality správania sa v rozhodovacích procesoch, t.j. schopnosti voliť také prostriedky, ktoré vedú k vytýčeným cieľom, t.j. k uspokojovaniu potrieb jedinca.

Teória rozhodovania má za cieľ objektivizovanie výsledkov rozhodovania. Jedným z nástrojov, ktorý pomáha pri hodnotení rozhodnutia je subjektívna očakávaná užitočnosť (*Subjective expected utility*), na ktorej v minulom storočí pracovali viacerí matematici, ako Frank Ramsey, John von Neumann a Leonard Savage, ktorý sa tiež pokúsili o axiomatizáciu teórie užitočnosti. Zásadným kritikom tejto teórie bol Daniel Ellsberg, ktorý demonštroval

¹ This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

niekoľko testov, dokazujúcich, že ľudia sa správajú inak, než je očakávané podľa normatívu neoklasickej ekonómie. Ku kritikám neskôr prispeli aj behaviorálni ekonómovia Amos Tversky a Daniel Kahneman.

2 MERANIE UŽITOČNOSTI

Z hľadiska merateľnosti užitočnosti sú významné dva základné smery. Historicky starším prístupom je tzv. kardinalistický prístup (Walras, 1980), (Jevons, 1986), podľa ktorého je jedinec schopný vyjadriť stupeň uspokojenia číslom a vie aj ohodnotiť o koľko je jeden statok užitočnejší ako iný. Prístup zohľadňuje subjektivitu, čiže užitočnosť pre daného jedinca je merateľná iba v rámci jednej osoby a nie je priamo porovnateľná s užitočnosťou relevantnou pre inú osobu.

Novším prístupom je ordinalistická teória užitočnosti (tiež teória preferencií) (Hicks, 1939), (Hicks a Allen, 1934) s predpokladom, že užitočnosť je subjektívna a nemerateľná a subjekt môže určiť iba poradie dôležitosti statkov.

Efektívnosť výberu alternatívy vo všeobecnosti závisí od stavu sveta (stavu prírody), pričom na základe stupňa znalostí rozlišujeme neurčitosť, riziko a určitosť. Kým rozhodovanie za určitosti vedie k deterministickým modelom matematického programovania, rozhodovanie za rizika a neurčitosti je podmienené obmedzenými znalosťami o stave sveta. Pri rozhodovaní za rizika predpokladáme známe pravdepodobnosti, za ktorý nastane konkrétna situácia stavu sveta. Rozhodovanie za neurčitosti sa zakladá na neznalosti týchto pravdepodobností.

Historicky najstarší spôsobom hodnotenia variantov v prípade rozhodovania za rizika (prvá polovica 18. stor. Blaise Pascal a Pierre de Fermat) je teória očakávanej hodnoty. Teória predpokladá, že jedinec sa rozhoduje pre ten z variantov, ktorý prináša najvyššiu očakávanú hodnotu (očakávaný výnos), pričom očakávanú hodnotu možno vypočítať ako vážený priemer hodnôt všetkých možných výsledkov, kde váhy predstavujú pravdepodobnosti výsledkov. V roku 1738 D. Bernoulli formuláciou Petrohradského paradoxu položil základy teórie očakávanej užitočnosti, kde prezentoval, že funkcia užitočnosti musí byť logaritmická svojou podstatou. Axiomatizácia tejto teórie je spájaná s menami von Neumann a Morgenstern (1944).

Axiómy teórie očakávanej užitočnosti:

Nech P je množinou všetkých alternatív. Nech $A, B \in P$, potom nech $pA + (1 - p)B, p \in (0,1)$ označuje výsledok lotérie, kde p je pravdepodobnosť nastátia stavu A a $(1 - p)$ je pravdepodobnosť nastátia stavu B . Nech $A \succeq B$ označuje preferenciu (\succ) alebo indiferenciu (\sqcup) B pred A . Potom von Neumanove a Morgerstenove axiómy racionality rozhodovania za rizika možno formulovať takto:

- 1) Úplnosť: Pre všetky $A, B \in P$ platí jeden z týchto vzťahov: $A \succeq B, B \succeq A$.
- 2) Tranzitívnosť: Pre všetky $A, B, C \in P$ platí; ak $A \succeq B$ a $B \succeq C$, potom $A \succeq C$.
- 3) Úplnosť: Pre $A, B, C \in P$ také že $A \succeq B \succeq C$ platí: $pA + C \sqcup B$.
- 4) Nezávislosť: Pre $A, B, C \in P$ také že $A \succeq B$ platí: $pA + (1 - p)C \succeq pB + (1 - p)C$, pre všetky C , a $p \in (0,1)$

3 KRITIKA TEÓRIE OČAKÁVANEJ UŽITOČNOSTI

Už v roku 1953 M. Allais poukázal na príklade dvoch lotérií, že v určitých situáciách preferencie subjektov porušujú axiómy teórie očakávanej užitočnosti. Allais formulovaním tzv. Allaisovho paradoxu (Allais, 1953) poukázal na fakt, že ak v jednej z lotérií je ponúkaný istý výsledok, istota zvýši výber tejto lotérie, čo ovplyvní aj druhú ponúkanú lotériu. Allais

svoj príklad formuloval ako lotériu, kde si účastníci majú vybrať v dvoch kolách medzi dvoma možnosťami:

V prvom kole:

A1 – Istá výhra 1 milión p.j.

A2 – 10 % pravdepodobnosť výhry 5 miliónov p.j., 89 % pravdepodobnosť výhry 1 milión p.j. a 1% pravdepodobnosť výhry 0 p.j.

A v druhom kole:

B1 – 11 % pravdepodobnosť výhry 1 milión p.j. a 89 % pravdepodobnosť výhry 0 p.j.

B2 – 10 % pravdepodobnosť výhry 5 miliónov p.j. a 90 % pravdepodobnosť výhry 0 p.j..

Najčastejšia preferencia hráčov bola $A1 \succ A2$ a $B2 \succ B1$, čo je v rozpore s teóriou očakávaného úžitku.

Daniel Ellsberg demonštroval experimenty dokazujúce, že ľudia sa správajú inak než je očakávané. V jednom z experimentov má jedinec možnosť staviť na čiernu alebo bielu farbu guľôčky a následne si má zvoliť medzi dvomi lotériami. Testovaný vyberá guľôčky z jednej z dvoch nádob. V prvej nádobe je 50 bielych a 50 čiernych guľôčok. V druhej nádobe sa guľôčky nachádzajú v neznámom pomere. Testovanie ukázalo, že väčšina testovaných si zvolí výber z prvej nádoby. V skutočnosti výhodnosť výberu guľôčky bielej alebo čiernej farby z nádoby, kde je pomer guľôčok 50:50 je presne rovnaká, ako z nádoby, kde sú guľôčky v neznámom pomere (Ellsberg 1961).

Mas-Collel (podľa Ben-Haima, 2006) test obmenil ďalej tak, že v prvej nádobe zmenil pomer guľôčok na 49 bielych ku 51 čiernym. V druhej nechal neznámy pomer. Napriek znevýhodneniu prvej nádoby, majú testované osoby tendenciu si vyberať práve z nej.

V súčasnosti existujú dva zdroje vysvetlení tohto správania sa. Prvým zdrojom je štatistika a teória informačnej medzery (*information-gap theory*), druhým je psychológia a behaviorálna ekonómia. *Information-gap theory* zavádza do rozhodovania termíny robustnosť (*robustness*) a príležitosť (*opportunity*). Orientácia na robustnosť znamená znižovať neistotu a v tomto prípade sa sústrediť na výber z nádoby, kde je známy pomer, napriek tomu, že môže byť v skutočnosti nepriaznivejší. Orientácia na príležitosť je zameraná na maximalizovanie výstupu. Keďže v experimente je rovnaká hodnota výhry pri vsadení na prvú aj druhú nádobu, podľa *information-gap theory* je „výhodnejšie“ vsadiť na tú so známym pomerom.

Behaviorálna ekonómia jav vysvetľuje vplyvom predpojatosti voči efektu neistoty (*ambiguity effect bias*). *Bias* je predpojatosťou pri rozhodovaní. Predpojatosť, ktorú vytvára efekt neistoty, má za následok, že človek sa snaží rozhodovať sa podľa akýchkoľvek dodatočných informácií, bez ohľadu na to, či majú kauzálny súvis na objekt rozhodovacieho problému. Práve Daniel Ellsberg ako prvý popísal *ambiguity effect*. Na rozdiel od *information-gap theory*, behaviorálna ekonómia zastáva kvalitatívny prístup k problému, kedy nie je možné kvantifikovať prah, kedy sa *bias* aktivuje.

4 ELLSBERGOV PARADOX

Fungovanie *ambiguity effect* možno ukázať na druhom Ellsbergovom experimente. V ňom máme k dispozícii tri nádoby (alebo meštek) s guľôčkami. Tých je dokopy 90, pričom 30 je červených a zvyšných 60 je čiernych a žltých v neznámom pomere. Test je dvojkrokový. V prvom kroku si jedinec vyberá medzi možnosťou vybrať červenú alebo čiernu guľôčku pri rovnakej výške výhry. V druhom kroku si potom môže vybrať medzi možnosťou vybrať červenú a žltú dvojicu guľôčok alebo čiernu a žltú dvojicu. Podľa *information-gap theory*, aj podľa *ambiguity effect biasu* si testovaný vyberá v prvom kroku častejšie červenú a v druhom častejšie čiernu a žltú (Ellsberg, 1961). Paradox sa dá aj vyjadriť tak, že druhý krok – vybrať si medzi dvojicou červená a žltá a dvojicou čierna a žltá – je voľbou nevybrať červenú alebo nevybrať čiernu guľôčku. Potom:

(1) Vyberá sa jedna guľôčka: pravdepodobnosť výberu červenej : $(p_1 = \frac{1}{3})$
a pravdepodobnosť výberu čiernej $(\frac{2}{3} \geq p_2 \geq 0)$

(2) Vyberajú sa dve guľôčky: pravdepodobnosť, že guľôčka $(p_3 = \frac{2}{3})$ alebo čierna $(1 \geq p_4 \geq \frac{1}{3})$

Uvedené možnosti si možno predstaviť ako stratégie:

- V prvej voľbe červená, v druhej červená a žltá.
- V prvej voľbe červená, v druhej čierna a žltá.
- V prvej voľbe čierna, v druhej červená a žltá.
- V prvej voľbe čierna, v druhej čierna a žltá.

Podľa Ellsberga preferovanou stratégiou je stratégia (b). Ak subjekt v prvej voľbe vsadí na červenú, znamená to, že jeho subjektívna pravdepodobnosť výberu čiernej je $(p_{\text{čierna}} \leq \frac{1}{3})$, teda subjektívna pravdepodobnosť $(p_{\text{žltá}} \geq \frac{1}{3})$. Ak však v druhej lotérii zvolí výber čiernej a žltej $(p_{\text{čierna}+\text{žltá}} = \frac{2}{3})$ je to v rozpore so subjektívnymi pravdepodobnosťami v prvej voľbe, pretože $(p_{\text{žltá}} \geq \frac{1}{3})$ a $(p_{\text{červená}} = \frac{1}{3})$. Správanie sa subjektov je v súlade s tým, že človek skôr bude vsádzať za a proti niečomu, čo je známe, než proti neznámemu. Testovaní jedinci zvyknú jav tiež spätne racionalizovať tak, že odhadujú, že červených, čiernych a žltých guľôčok je približne rovnako, čo zodpovedá hypotéze predpojatosti *ambiguity effect*.

Behaviorálna ekonómia nekvantifikuje, kedy sa v testovaných aktivuje predpojatosť (*bias*), je však možné porovnanie jeho sily (schopnosti ovplyvniť rozhodovanie) v porovnaní s inými doteraz identifikovanými predpojatosťami. Pristúpili sme k experimentu, v ktorom sme vytvorili štyri situácie:

- Zopakovaný Ellsbergov experiment s malou modifikáciou, deväťdesiatich guľôčok, pričom tridsať je červených, zostávajúce sú červené alebo žlté v neznámom pomere, avšak farba je zastúpená minimálne jednou guľôčkou. Tento test slúžil ako kontrolná vzorka k ostatným pokusom.
- Modifikovaný Ellsbergov experiment, kde na dotazníku je grafika (obrázok) troch meštekov s guľôčkami. Táto grafika má navodzovať pocit, že guľôčok nie je

približne rovnako. Ovplyvnenie malo byť takto vytvorené nepriamo, na nevedomej úrovni a malo zasahovať pocit, že guľôčok je približne rovnako.

- III. Modifikovaný Ellsbergov experiment, kde respondent napíše svoj predpoklad, či je viac žltých alebo čiernych guľôčok – tajné hlasovanie. V experimente sme takto aktivovali predpojatosť ukotvenia (*anchoring bias*). Táto predpojatosť vzniká, keď si ľudia na základe fragmentu dát vytvárajú predstavu o celej sade (Tversky, A., Kahneman, D., 1974). *Anchoring bias* bol predpovedaný už Thomasom Schellingom (1960), keď prezentoval svoj experiment, v ktorom dvaja jedinci bez možnosti komunikácie vyberajú jeden zo štyroch štvorcov s cieľom vybrať rovnaký, pričom tri štvorce sú identickej modrej farby a jeden je červený. Jedinci hádajú, že ten druhý vyberie červený. Thomas Schelling nazval tento jav *Focal point*; bod, ktorý je dostatočne odlišný, aby sa naň sústredila pozornosť jedinca, ktorý s ním ďalej pracuje. Hypotéza predpojatosti *Anchoring bias* je rozšírením hypotézy *Focal point* na všetky javy, kedy testovaný jedinec kalkuluje s čiastočnými dátami, fragmentami alebo výraznými prvkami v sade, či už v hrách proti iným inteligentným protihráčom, alebo aj v hrách proti prírode.
- IV. Modifikovaný Ellsbergov experiment, kde respondenti sú vyzvaní verejne prejavíť svoj predpoklad – verejné hlasovanie, či je viac žltých alebo čiernych guľôčok. Takýmto spôsobom sme podnietili v testovaných predpojatosť na skupinové správanie (*bandwagon effect bias*). Tento spôsobuje konformné správanie (Long, S. D., Fox, N. R., 2007). Táto predpojatosť spôsobuje, že testovaní sú náchylní nekriticky prijať za svoje rozhodnutie, ktoré je deklarované ako rozhodnutie väčšiny. Pri realizovaní experimentu sme vedeli ovplyvniť preferenciu na výber červenej alebo žltej farby väčšiny guľôčok tak, že na farbu, ktorú sme chceli mať minoritnú sme sa opýtali ako na prvú.

Experiment bol realizovaný na 480 študentoch troch univerzít. Konkrétne sa zúčastnili študenti Fakulty hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity v Bratislave, študenti Fakulty informatiky a informačných technológií Slovenskej technickej univerzity a študenti Filozofickej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave.

Kým pri použití obrázku sme nenašli zásadnejší rozdiel, pri tajnom a verejnom hlasovaní sa takto podarilo signifikantne nakloniť preferencie od predpokladanej stratégie (b) – červená, potom čierna a žltá smerom ku stratégiám (a) – červená, potom červená a žltá, respektíve (d) – čierna, potom čierna a žltá. V tajnom hlasovaní malo veľmi veľký vplyv vytvorenie ukotvenia (*anchoring*) v prvom kroku, ktoré do značnej miery determinovalo rozhodnutie v druhom kroku. Stratégie (a) a (d) v tomto prípade boli volené dva krát častejšie, ako stratégia (b) (36, respektíve 38 voči 18). Vo verejnom hlasovaní bolo veľmi dobre možné ovplyvniť preferenciu počiatočnou manipuláciou k tomu, ktorá farba bude väčšinová. Testovaní jedinci sa potom riadili týmito vstupnými dátami.

Vzhľadom na uvedené výsledky, predpokladáme, že predpojatosť efektu neurčitosti (*ambiguity effect*) tvorí iba veľmi slabý vstup do procesu rozhodovania a slúži ako jedna z neskorších možností, v prípade, že nie sú k dispozícii naozaj žiadne iné (napríklad opora zo strany skupiny pri *bandwagon effecte* alebo opora vo vlastnej histórii pri *anchoring effecte*). Dokonca aj náhodné rozhodnutie sa pre niektorú farbu vytvára silnejší predpoklad pre stratégiu, ktorej sa potom testovaná osoba drží, bez ohľadu na to, či otestovala správnosť tejto stratégie. Pridanie sa ku skupine, rovnako bez ohľadu na to, že je úspech nezaručený, dokonca s vedomím toho, že skupinové rozhodnutie nemôže byť bližšie realite, ako náhodná voľba,

vedie testované osoby ku konformite a držaniu sa tejto stratégie. Zaujímavým výsledkom je, že podvedomá manipulácia s obrázkom meštekov rôznych veľkostí nemá vplyv na rozhodovanie. Stojí za pozornosť, že pri racionálnom (nie impulzívnom) rozhodovaní sa dáva ľudská kognícia vyššiu váhu na inferencii (aj keď na základe predpojatostí limitujúcich racionalitu), než úplne impulzívnemu, emotívnemu, rozhodnutiu. Daniel Kahneman (2012) prináša model pomalého a rýchleho myslenia, kde rýchle myslenie je impulzívne, vykonané na základe emócií a pomalé je vykonávané na základe najlepšej dostupnej inferencie. To, že testovaní jedinci zväčša neboli ovplyvnení podvedomým stimulom, ale že problém riešili svojou (predpojatosťami limitovanou) racionalitou môže otvoriť nové ciele testovania ľudskej racionality a nové prístupy k hodnoteniu racionálneho, limitovane racionálneho a „iracionálneho“ konania z pohľadu teórie hier a rozhodovania.

ZÁVER

Tento príspevok je venovaný Ellsbergovmu paradoxu, ktorým sa často demonštrujú obmedzenia axióm teórie očakávanej užitočnosti. Autori sa zaoberali modifikáciami Ellsbergovho experimentu (pomocou obrázka, tajného alebo verejného hlasovania). Použitím modifikovaných testov sa podarilo nakloniť preferencie od predpokladanej stratégie.

POĎAKOVANIE

Chceme poďakovať kolegom, ktorí nám umožnili realizovať testovania: doc. RNDr. Jozef Fecenko, CSc, doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD., Mgr. Tatiana Šoltésová, PhD, doc. Mgr. Vladimír Mucha, PhD, Mgr. Katarína Búzová, PhD.,

POUŽITÁ LITERATÚRA

1. AXELROD, R. 1990. The Evolution of Co-operation. New York, Penguin Books.
2. AXELROD, R. 2006. The Complexity of Cooperation. New Delhi, New Age International Limited Publishers.
3. BEN-HAIM, Y. 2006. Info-Gap Decision Theory (Second Edition). Academic Press, New York.
4. BERNOULLI, D. 1954. Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. In: *Econometrica*, 22: 1954 (1738) 23–36.
5. ELLSBERG, D. 1961. Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms. In: *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 75, No. 4 (Nov., 1961), pp. 643–669.
6. HICKS, J. R. 1934. Allen, R. A reconsideration of the theory of value". In: *Economica* Vol. 1, No. 1, 1934, pp. 52–76.
7. HICKS, J. R. 1946. Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory. Oxford: Clarendon Press, 1946 (2nd ed).
8. JEVONS, S. 1866. Brief Account of a General Mathematical Theory of Political Economy. In: *Journal of the Royal Statistical Society*, London, XXIX (June 1866), pp. 282–87.
9. KAHNEMAN, D. Tversky, A. 2004. Conflict Resolution: A Cognitive Perspective In: SHAFIR, E. (ed.) *Preference, Belief, and Similarity*, Cambridge, MIT Press.
10. KAHNEMAN, D. 2012. Myšlení pomalé a rychlé, Jan Melvil publishing.

11. LONG, S. D. FOX, N. R. 2007. Calculated Futures: Theology, Ethics, and Economics. Baylor University Press., p. 56.
12. MAURICE, A. 1953. Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine. In: *Econometrica*, 1953, 21, (4), 503–546.
13. NEUMANN, J., MORGENSTERN, O. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
14. SCHELLING, T. 1960. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge.
15. SMITH, A. 2001. Pojednání o podstatě a původu bohatství národů. Translated by Vladimír Irgl. Nové, preprac. vyd. Praha: Liberální institut, 2001. xv, p. 986
16. TVERSKY, A. KAHNEMAN, D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. In: *Science* 185 (4157), 1974 pp. 1124–1131.
17. WALRAS L. 1980. *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*. In: *Revue Philosophique de Louvain* Année Vol. 78 No. 40 pp. 603–604.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel.: (421 2) 67 295 828

email: cickova@euba.sk

PhDr. Ing. Tomáš Gál, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,

Mlynska dolina, 842 48 Bratislava

Tel.: (421 2) 59 244 978

email: tomas.gal@upcmail.sk

MOŽNOSTI PRE OPIS DÔCHODKOVÉHO SYSTÉMU V RÁMCI MODELU DLHODOBÉHO RASTU SLOVENSKA¹

OPTIONS FOR CAPTURING THE PENSION SYSTEM IN THE LONG- RUN MACROECONOMIC GROWTH MODEL OF SLOVAKIA

Tomáš Domonkos, Miroslava Jánošová, Filip Ostrihoň

Abstrakt

Predložený príspevok sa zaoberá dôvodmi a dôsledkami voľby konkrétneho spôsobu opisu premennej počtu penzistov, či už pomocou exogénnej premennej alebo endogénnej premennej v rámci väčšieho viac rovnicového modelu dlhodobého rastu Slovenska. Príspevok ďalej načrtáva možné výhody a nevýhody oboch variantov, pričom oba varianty pre modelovanie premennej počtu penzistov sú v rámci príspevku porovnané prostredníctvom projekcií vývoja Slovenska do roku 2025.

KLúčové slová: dlhodobý model, penzijný systém, exogénna premenná, endogénna premenná, Slovensko

Abstract

This paper discusses the reasons for, and possible results of, the choice regarding the modelling of the number of pensioners either as exogenous variable or endogenous variable in the framework of large-scale, multivariate, long-run macroeconomic growth model of Slovakia. The paper further addresses possible advantages and shortcomings of both alternatives for modelling the number of pensioners, while comparing the two through projections of development of Slovak economy till the year 2025.

Keywords: long-run model, pension system, exogenous variable, endogenous variable, Slovakia

1 ÚVOD

Makroekonomický model dlhodobého rastu Slovenska (SLMM) bol v rámci doterajšieho výskumu aplikovaný pre hodnotenie dlhodobých dopadov rôznych makroekonomických a legislatívnych zásahov, ktoré môžu ovplyvniť makroekonomické prostredie na Slovensku.

Samotný model SLMM bol vytvorený na základe existujúceho modelu rakúskeho hospodárstva (ALMM), ktorý bol prezentovaný Baumgartnerom et al. (2004). Uvedený model vychádzal z neoklasickej ekonomickej teórie, pričom v prípade mnohých aspektov rakúskeho hospodárstva boli pomerne striktné neoklasické predpoklady zvolnené doplnením rigidít. Vzhľadom na podobnosti medzi rakúskym a slovenským hospodárstvom, SLMM do značnej miery čerpá z pôvodnej práce Baumgartnera et al. (2004), pričom model bol ďalej modifikovaný pre zachytenie niektorých špecifik slovenského hospodárstva (detailnejšie členený sociálny systém, povinný dvoj-pilierový dôchodkový systém).

¹ Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu APVV-14-0787 „Zladenie verejných financií a starobného dôchodkového zabezpečenia (Návrh udržateľného a rast podporujúceho dôchodkového systému pre starnúcu slovenskú ekonomiku)“.

Použitý model SLMM pozostával zo 150 rovníc, ktoré boli po vzore Baumagrnera et al. (2004) zoskupené do siedmich blokov (bližšie popísané Domonkosom, Jánošovou a Ostrihoňom 2014). Uvedené rovnice modelujú 150 endogénnych premenných (teda premenné vysvetľované modelom) na základe 144 exogénnych premenných (premenné modelované mimo modelu, a ich hodnoty slúžia pre model ako vstup). Na základe exogénnych premenných sú následne vytvorené dlhodobé projekcie vývoja Slovenska do roku 2025, použitím Gaussovho-Siedelovho algoritmu, ktorý generuje deterministické, dynamické simulácie budúcich období (Quantitative Micro Software 2007).

Ohľadom aplikácií SLMM je možné uviesť skúmanie dlhodobých dopadov starnutia (Domonkos, Jánošová a Ostrihoň 2014), skúmanie rôznych zásahov do slovenského trhu práce (Ostrihoň, Domonkos a Jánošová 2014) a skúmanie dopadov rôznych nastavení dôchodkového systému Slovenska (Domonkos et al. 2014).

Vzhľadom na rôzne možnosti modelovania jednotlivých makroekonomických ukazovateľov je zámerom príspevku poukázať na výhody a nevýhody modelovania penzijného systému prostredníctvom exogénnych alebo endogénnych premenných, ktoré boli následne ilustrované prostredníctvom aplikácie SLMM pre generovanie projekcií vývoja Slovenska pre obdobie 2015-2025. Príspevok je štruktúrovaný do troch častí. V prvej časti je v krátkosti popísaný SLMM spolu s motiváciou pre vykonanú analýzu. Druhá časť opisuje možnosti pre modelovanie penzijného systému v rámci SLMM, spolu s výhodami a nevýhodami pri využití endogénnych a exogénnych premenných. Tretia časť porovnáva získané projekcie na základe dvoch prístupov a v rámci poslednej časti je prezentované zhrnutie príspevku.

2 OPIS DÔCHODKOVÉHO SYSTÉMU

V rámci SLMM je dôchodkový systém modelovaný ako súčasť bloku sociálneho systému. Z toho dôvodu nie sú príjmy dôchodkového systému samostatne modelované, ale sú implicitne zohľadnené pri modelovaní celkových príjmov sociálneho systému, ktoré sú získavané ako odvody, respektíve sú odvodené za jednotlivých poistencov štátom. Z hľadiska dôchodkového systému sú na základe exogénnych premenných z uvedenej sumy príjmov sociálneho systému vyčlenené príjmy do druhého dôchodkového piliera, ktoré nie sú k dispozícii verejnej správe.

$$SCSP_t = (1 - QSCSI_t)QSCP_tSC_t \quad (1)$$

V uvedenom vzťahu (1) predstavuje SCSP sumu odvodov v príslušnom roku do druhého dôchodkového piliera, SC je celková suma odvodov do sociálneho systému v príslušnom roku a ďalšie premenné predstavujú exogénne premenné modelu na základe, ktorých je odlišený druhý pilier slovenského penzijného systému (QSCP je podiel penzijných odvodov na celkových odvodoch a QSCSI je podiel odvodov do penzijného systému, ktoré sú k dispozícii vláde, voči celkovým odvodom do penzijného systému). V prípade výdavkovej strany je dôchodkový systém opísaný prostredníctvom celkových transferov vyplatených dôchodcom:

$$\Delta \log\left(\frac{TRP_t}{PEN_t}\right) = QPEN_t \Delta \log(QSCE_t W_t P_t) + (1 - QPEN_t) \Delta \log(P_t) \quad (2)$$

Vo vzťahu (2) predstavuje TRP objem celkových transferov dôchodcom, PEN je počet dôchodcov, ktorý je daný exogénne, QPEN je exogénna premenná, ktorá udáva pomer akým sú indexované priemerné dôchodky, QSCE je podiel odvodov platených zamestnancami na celkových odvodoch, W je reálna hodinová mzda a P je deflátor HDP.

Takto získaný objem dôchodkov je v modeli na základe ďalších exogénnych premenných rozdelený na dôchodky pochádzajúce z prvého piliera a dôchodky z druhého piliera,

prostredníctvom čoho je v modeli zachytená udržateľnosť štátneho a súkromného dôchodkového systému.

2.1 Využitie exogénnych premenných

Ako bolo naznačené pri opise vzťahov (1) a (2), pri modelovaní dôchodkového systému je využité veľké množstvo exogénnych premenných, ktoré sú vo väčšine prípadov kalibrované na základe historických dát. Je preto možné sa bližšie zaoberať možnosťami pre opis každej jednej z nich. No vzhľadom na rozsah príspevku bola pozornosť sústredená predovšetkým na exogénnu premennú počtu penzistov PEN.

Keďže uvedená premenná vystupuje v modeli ako exogénna, pričom jej hodnoty pre obdobie projekcie sú modelované mimo SLMM. Pre tvorbu projekcie bola použitá prognóza populácie Slovenska podľa Výskumného demografického centra INFOSTATU na nasledujúcich 10 rokov v ročnom členení na základe, ktorej bolo možné získať pomerne presnú informáciu o počte obyvateľov v ročných vekových kohortách. Vek odchodu do dôchodku bol určený na základe súčasne platnej legislatívy podľa zákona 461/2003 Z. z. a jej novely 252/2012 Z. z., na základe ktorej sa bude vek odchodu do dôchodku posúvať s predlžujúcou sa priemernou dĺžkou dožitia.

Takýto spôsob modelovania počtu penzistov umožňuje absolútnu kontrolu nad priebehom ako aj hodnotami vysvetľujúcej premennej. Premennú je tak možné považovať za jednu z „radiacich premenných“ modelu, ktorá predstavuje vytýčený stav systému, ku ktorému je nutné prispôbiť vývoj ostatných endogénnych premenných, tak aby bol tento stav dosiahnutý. V konkrétnom prípade tak bolo možné zohľadniť zmenu v legislatíve, respektíve faktor zmeny akým je priemerná dĺžka dožitia, ktorá nie je v SLMM explicitne modelovaná a preto by bolo problematické v modeli dosiahnuť endogenizáciu premennej so zachovaním vzťahu k priemernej dĺžke dožitia, ktorá by bola v súčasnom nastavení modelu tak či tak jedným z exogénnych vstupov.

Na druhej strane je takýto spôsob modelovania jednej z kľúčových premenných omnoho spornejší ako keby premenná bola modelovaná v rámci modelu. Keďže výpočet prebieha mimo modelu tak je značne menej transparentný, ako keď je možné ho opísať prostredníctvom matematickej funkcie, ktorá v procese tvorby projekcie musí platiť.

2.2 Využitie endogénnych premenných

Alternatívnym spôsobom, akým by bolo možné uvedenú premennú modelovať, je jej zahrnutie do SLMM prostredníctvom samostatného vzťahu, ktorý bude opisovať vývoj celkového počtu dôchodcov. Na tento účel bola použitá metóda najmenších štvorcov, využívajúc premenné opisujúce štruktúru populácie Slovenska ako vysvetľujúce premenné. Vzhľadom na relatívne malý počet období, ktoré sú dostupné v ročnej periodicite pre skúmané premenné, nie je možné hovoriť a štandardnej ekonometrickej analýze v pravom slova zmysle. Namiesto toho bol postup parametrizácie opísaný ako „curve-to-post-data-fitting“ (Bradley a Zalesky 2003), na základe ktorého je možné získať predstavu o vhodnej kombinácii exogénnych premenných pre opísanie historického vývoja endogénnej premennej.

Konkrétna podoba takto odhadnutej rovnice celkového počtu dôchodcov bola:

$$PEN_t = 0,086POP55_64_t + POP65_t \quad (3)$$

V uvedenom vzťahu (3) predstavuje PEN celkový počet dôchodcov, POP55_64 je počet obyvateľov vo veku 55-64 a POP65_ je počet obyvateľov starších ako 65 rokov.

Zjavnou výhodou tohto variantu pre modelovanie premennej je, že umožňuje zachovať väzby medzi jednotlivými premennými a tak zohľadňuje interakcie medzi jednotlivými

ekonomickými ukazovateľmi. Na túto vlastnosť je nutné dbať najmä v prípade ak medzi skúmanou premennou a ostatnými premennými existujú silné spätné väzby, v dôsledku ktorých je vývoj skúmanej premennej značne ovplyvnený svojim vlastným vývojom ako aj interakciou s inými premennými.

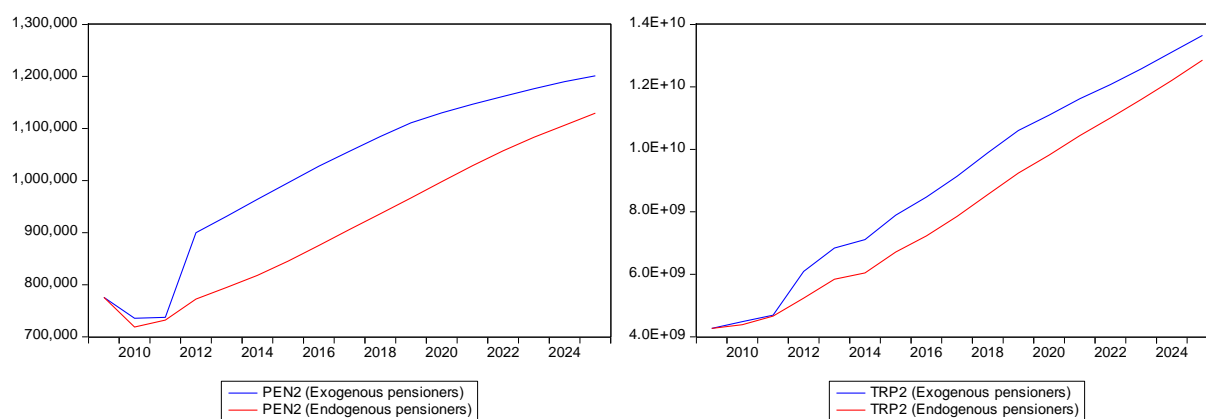
Naopak súvisiacou nevýhodou tohto prístupu je, že v prípade ak existujú už spomínané spätné väzby medzi premennými, tak je veľmi problematické dodatočne zaviesť ohraňovania na hodnoty endogénnej premennej. Rovnako nie je možné očakávať, že tieto hodnoty budú stabilné, keďže pri vysokej previazanosti systému sa na skúmanej endogénnej premennej môžu odraziť aj drobné zmeny v zdanlivo nesúvisiacich exogénnych premenných.

3 POROVNANIE OBOCH VARIANTOV V RÁMCI SLMM

Pre ilustráciu je možné uviesť ako sa vývoj slovenského hospodárstva bude meniť na základe projekcií SLMM, keď bude aplikovaný prvý alebo druhý variant modelovania premennej počtu penzistov (PEN). Na základe uvedených vzťahov (1)-(3) je možné očakávať, že rozdiel v počte penzistov ovplyvní celkové výdavky penzijného systému, v menšej miere celkové výdavky sociálneho systému. Prípadný rozdiel medzi príjmami a výdavkami sociálneho systému je vybilancovaný vládou, preto je možné očakávať rozdiely aj v príjmoch do sociálneho systému, výdavkoch vlády, vládnom dlhu a následne aj celkovej produktivite Slovenska.

Je nutné poznamenať, že zvolená aplikácia má určité nedostatky pre demonštráciu rozdielov medzi dvoma opisovanými prístupmi k modelovaniu počtu dôchodcov na Slovensku, keďže po endogenizácii počtu dôchodcov, bol ich počet závislý len na iných exogénnych premenných modelu, čiže nie je možné demonštrovať efekty, ktoré sú vyvolané spätnými väzbami. Napriek tomu je vidieť veľký rozdiel v počte dôchodcov pre prvý a pre druhý prístup najmä z dlhodobejšieho hľadiska (pozri obrázok 1, vľavo).

Obrázok 1: Počet penzistov (PEN2) v osobách a transfery penzistom (TRP2) v Eurách bežných cien



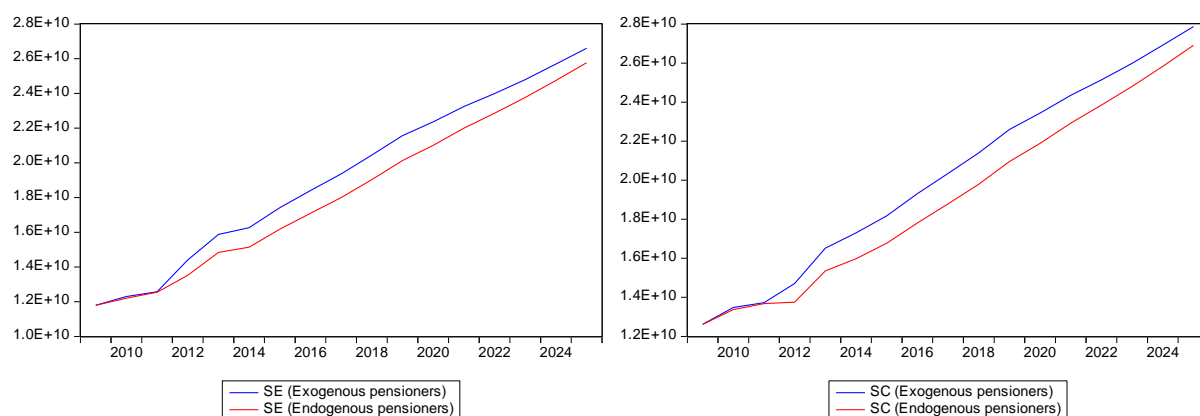
Zdroj: Výpočty autorov

Je možné pozorovať omnoho strmší nárast počtu penzistov ak by bola táto premenná modelovaná exogénne pri porovnaní s variantom kedy bola premenná vzhľadom k modelu endogénna (obrázok 1, vľavo). Tento prudký nárast je možné zdôvodniť zohľadnením, ďalších faktorov ako len štruktúrou populácie, ktorá je na základe vzťahu (3) hlavným faktorom ovplyvňujúcim tento počet v prípade ak je premenná endogénna. Rovnako je možné pozorovať postupné znižovanie tempa rastu dôchodcov v prípade exogénnej premennej, ktoré

je spôsobené zohľadnením zmeny legislatívy, na základe ktorej sa bude odchod do dôchodku oddŕaľovať s rastúcou priemernou dĺžkou dožitia.

Uvedený prudší rast počtu dôchodcov v prípade exogénnej premennej mal za dôsledok, že pri porovnaní s opačným variantom sú dosiahnuté vyššie výdavky penzijného systému (obrázok 1, vpravo). Ako bolo spomenuté vyššie, uvedené zvýšenie výdavkov penzijného systému sa prejaví vyššími celkovými výdavkami sociálneho systému pre variant exogénnej premennej oproti endogénnej premennej (obrázok 2, vľavo) a následnými vyššími príjmami do sociálneho systému v prípade modelovania počtu penzistov ako exogénnej premennej v porovnaní s variantom endogénnej premennej (obrázok 2, vpravo).

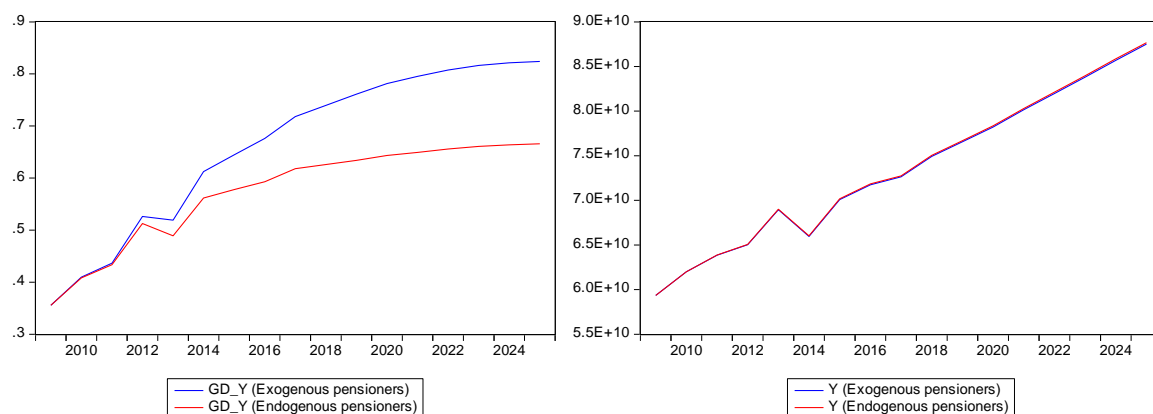
Obrázok 2: Výdavky sociálneho systému (SE) v bežných cenách a príjmy sociálneho systému (SC) v bežných cenách



Zdroj: Výpočty autorov

Zvýšenie výdavkov sociálneho systému spôsobí výrazne vyšší podiel vládneho dlhu na HDP v prípade použitia exogénnej premennej pre modelovanie počtu penzistov oproti prípadu kedy sa využije pre rovnaký účel endogénna premenná (pozri obrázok 3, vľavo). No toto zvýšenie vládneho dlhu má len marginálny dopad na celkový objem HDP v stálych cenách, podľa ktorého je HDP mierne nižšie pri využití exogénnej premennej počtu penzistov ako v prípade, že je v modeli uvedená premenná endogénna.

Obrázok 3: Vládny dlh k HDP (GD_Y) a HDP v eurách stálych cien roku 2005



Zdroj: Výpočty autorov

Zámerom porovnávanía jednotlivých variantov však nie je vyhodnotiť, ktorý zo spôsobov modelovania je lepší vzhľadom na dosiahnuté výsledky, (výšku vládneho dlhu, veľkosť HDP, atď.) ale poukázať na možné zmeny v modeli, ktoré jednotlivé varianty modelovania môžu spôsobiť. Keďže SLMM bol doteraz použitý len na vyhodnocovanie variantných scenárov,

vzhľadom na zmeny v exogénnych premenných (Domonkos et al. 2014, Domonkos, Jánošová a Ostrihoň 2014, Ostrihoň, Domonkos a Jánošová 2014), zmyslom projekcií nie je dosiahnutá úroveň skúmanej premennej, ale skôr je cieľom modelu ilustrovať možné dlhodobé dopady, ktoré zásah spôsobí pri porovnaní so základným scenárom. Preto, napriek výrazným rozdielom, ktoré sú zapríčinené spôsobom modelovania, nie sú tieto rozdiely považované za relevantný faktor pre rozhodovanie o vhodnom spôsobe modelovania premenných.

4 ZÁVER

Vzhľadom k argumentom, ktoré sú prezentované v rámci príspevku je možné konštatovať, že rozhodnutie o tom, či bude konkrétny ukazovateľ v rámci rozsiahlejšieho makroekonomického modelu, akým je aj SLMM, opísaný prostredníctvom exogénnej alebo endogénnej premennej je závislé od mnohých faktorov. Napriek tomu, že zvolená aplikácia neumožňuje ilustráciu všetkých špecifických črt prvého alebo druhého variantu k modelovaniu uvedenej premennej, je možné pozorovať pomerné výrazné rozdiely aké z kvantitatívneho hľadiska takáto voľba môže spôsobiť.

Pri konečnej voľbe je však nutné mať na pamäti aj funkčné hľadiská modelovanej premennej v rámci celého modelu. Na základe diskusie opísanej vyššie je možné usúdiť, že pokiaľ je zámerom aby boli čo najlepšie zachytené vzťahy medzi skúmanou premennou a ostatnými premennými v modeli, opísané spôsoby rozhodovania prostredníctvom behaviorálnych rovníc a nie je potrebné, aby skúmaná premenná sledovala konkrétny priebeh, potom je endogenizácia premennej prostredníctvom samostatnej funkcie v modeli pravdepodobne vhodnejšou voľbou.

Naopak ak je priebeh a vývoj skúmanej premennej pre ciele modelu rozhodujúci, očakáva sa že sa premenná bude v rámci aplikácie modelu ďalej meniť a zachytenie väzieb medzi inými premennými a skúmanou premennou nie je natoľko rozhodujúce pre účely modelovania, potom sa ako užitočnejšia voľba javí ponechať premennú v modeli exogénnou, a jej hodnoty modelovať v rámci samostatného modelu. Takáto premenná bude pre model riadiacou premennou, teda pri aplikácii algoritmus riešenia modelu prispôbi hodnoty endogénnych premenných tak aby zodpovedali vopred stanovenej exogénnej premennej.

Keďže v rámci výskumu dôchodkového systému sa očakáva, že premenná počtu penzistov sa bude meniť podľa viacerých legislatívnych a politických rozhodnutí, je vysoko pravdepodobné, že aj v ďalších aplikáciách bude táto premenná vystupovať ako exogénna, tak ako tomu bolo v predchádzajúcich aplikáciách (Domonkos et al. 2014, Domonkos, Jánošová a Ostrihoň 2014, Ostrihoň, Domonkos a Jánošová 2014).

Použitá literatúra

1. BAUMGARTNER, J. et al. 2004. A Long-run Macroeconomic Model of the Austrian Economy: Model Documentation and Simulations. In: Proceedings of OeNB Workshops, No. 5, 2004, s. 170 – 271.
2. BRADLEY, J. – ZALESKY, J. 2003. Modelling EU accession and Structural Funds impacts using the new Polish HERMIN model. Wrocław. 2003.
3. DOMONKOS, Tomáš - JÁNOŠOVÁ, Miroslava - OSTRIHOŇ, Filip. 2014. Modelovanie dlhodobých efektov starnutia. In: Strieborná ekonomika - potenciál na Slovensku. - Bratislava : Ekonomický ústav SAV, 2014, s. 301-327.
4. DOMONKOS, Tomáš - DOMONKOS, Štefan - JÁNOŠOVÁ, Miroslava - OSTRIHOŇ, Filip. 2014. A long-run macroeconomic model of Slovakia (long-term sustainability of the pension system). In: EcoMod2014 : international conference on

economic modeling, Bali 16.-18.7.2014 Denpasar Bali, Indonesia : Bank of Indonesia, 2014, s. 1-17.

5. OSTRIHONĚ, Filip - DOMONKOS, Tomáš - JÁNOŠOVÁ, Miroslava. 2014. Application of the long-run macroeconomic growth model of Slovakia. In IFORS 2014: Barcelona, Spain, 2014, s. 102, 313, 314, 376.
6. QUANTITATIVE MICRO SOFTWARE. 2007. EViews 6 User's Guide I, Irvine: Quantitative Micro Software, LLC.

Kontaktné údaje

Ing. Tomáš Domonkos, PhD.

Ekonomický ústav SAV

Šancová 56, 811 05 Bratislava,

Tel: (421 2) 5249 7053, kl. 133

email: tomas.domonkos@savba.sk

Ing. Miroslava Jánošová

Ekonomický ústav SAV

Šancová 56, 811 05 Bratislava,

Tel: (421 2) 5249 7053, kl. 138

email: miroslava.dolinajcova@savba.sk

Ing. Filip Ostrihoň, PhD.

Ekonomický ústav SAV

Šancová 56, 811 05 Bratislava,

Tel: (421 2) 5249 7053, kl. 138

email: filip.ostrihon@savba.sk

NÁKLADY NEZAMESTNANOSTI A ANALÝZA NÁKLADOV A VÝNOSOV V PODMIENKACH SR

COSTS OF UNEMPLOYEMENT AND COST-BENEFIT ANALYSIS IN SR

*Tomáš Domonkos, Brian König**

Abstrakt

Vysoká úroveň nezamestnanosti je stav negatívne vplývajúci na trh práce SR už niekoľko desaťročí. Politiky trhu práce majú dlhodobú ambíciu riešiť tento problém, avšak iba s menšími úspechmi. Jedným z možných nástrojov politiky trhu práce je podpora na vytvorenie pracovného miesta pre nezamestnanú osobu formou priamej finančnej dotácie. Tento článok si kladie za úlohu navrhnúť efektívnu výšku štátnej dotácie na vytvorenie pracovného miesta pre nezamestnaného v podmienkach SR.

KLúčové slová: politika trhu práce, náklady nezamestnanosti, , nezamestnanosť, analýza nákladov a výnosov.

Abstract

The problem of the high level of unemployment has negatively affected the Slovak labour market for several decades. Policy measures have ambitions to solve this problem but only with the smaller successes. Direct financial support to job creation for unemployed persons may be one of the potential instruments of labour market policy which can mitigate this negative development. This article aims to develop a procedure useful for estimating the effective amount of state subsidies for such kind of job creation policy.

Key words: labour market policy, costs of unemployment, unemployment, cost benefit analysis.

Úvod

Slovenská republika dlhodobo zápasí s vysokou mierou nezamestnanosti, ktorá patrí medzi najvyššie v krajinách Európskej únie (EU). Tento stav do značnej miery stigmatizuje slovenský trh práce, ktorému sa dlhodobo nedarí znížiť nepriaznivý vysoký počet nezamestnaných. Nezanedbateľným faktom je aj strata pracovných návykov dlhodobo nezamestnaného, čo komplikuje návrat takýchto osôb do zamestnania. Politika trhu práce Slovenskej republiky (SR) má dlhodobú ambíciu riešiť tento problém s väčšími resp. menšími úspechmi. Jedným z posledných oznámených krokov bola iniciatíva podporiť vytvorenie pracovných miest pre mladých (2014) a snaha zavedenia systému duálneho vzdelávania.

* Tento článok bol vypracovaný v rámci národného projektu Centrum sociálneho dialógu SR - KOZ SR podporovaného z ESF a v rámci projektu VEGA 2/0181/15.

Predložený článok si kladie za cieľ prostredníctvom analýzy nákladov a výnosov (tzv. Cost-benefit analýza)¹ a využitím odhadnutých nákladov nezamestnanosti pre reprezentatívneho nezamestnaného odhadnúť výšku finančných prostriedkov, ktoré by bolo efektívne vynaložiť na vytvorenie pracovného miesta formou dotácie. Špecificky sa zameriavame na formu, keď by dotácia prebiehala jeden rok a pracovné miesto by bolo udržané ešte jeden rok po ukončení dotácie. Ďalej prezentovanú metodiku je možné aplikovať aj na iné modelové scenáre na vytvorenie pracovného miesta pomocou finančnej dotácie. Táto analýza vychádza z predošlej práce autorov odhadu nákladov nezamestnanosti na jedného nezamestnaného v SR.

Odhadu nákladov nezamestnanosti sa v podmienkach Českej republiky venovali Čadil et al. (2011). Uvažovali priame a nepriame náklady na jedného nezamestnaného. Počas výpočtov nepriamych nákladov vychádzali z odhadu parametrov vzťahu definovaného ako Okunov zákon². Celkové náklady na jedného nezamestnaného vyčíslili následne pomocou strednej dĺžky v nezamestnanosti. Výpočet nákladov nezamestnanosti v Českej republike bol realizovaný aj firmou Elbona (2006), ktorá sa popri ekonomických nákladoch venuje aj neekonomickej stránke nezamestnanosti. Marten et al. (2012) odhadovali náklady nezamestnanosti pre šesť členských štátov EU (Nemecko, Belgicko, Španielsko, Švédsko, Francúzsko a Spojené kráľovstvo). Pri výpočte nepriamych nákladov na rozdiel od Čadil et al. (2011) nevychádzajú z Okunovho zákona, ale z odhadu sklonu k spotrebe, ktorý následne využívajú na odhad výpadku nepriamych daní. Typické pre navrhnutú metodiku je využívanie verejne dostupných údajov a relatívne univerzálna aplikovateľnosť pre ľubovoľnú krajinu, čo umožňuje porovnateľnosť výsledkov naprieč celej EÚ.

Pri kalkulácii nákladov nezamestnanosti v SR vychádzame z princípov odhadov nákladov nezamestnanosti vo vyššie spomínaných analýzách, pričom metodiku rozširujeme o vyčíslenie nákladov z výpadku príjmu právnickej osoby, ktorý by nezamestnaný, ak by bol zamestnaný pravdepodobne vytvoril. Samotný spôsob odhadu efektívnej výšky dotácie podľa našich vedomostí ešte v podmienkach SR nebol v takejto forme realizovaný.

1. Dáta a metodológia

Za účelom analýzy návratnosti štátnej dotácie na novovytvorené pracovné miesto je potrebné najprv vyčísliť náklady spojené s nezamestnanosťou uchádzača o zamestnanie. Je dôležité poznamenať, že nezamestnanosť ako taká má aj sociálne dôsledky.³ Táto analýza však od sociálnych aspektov nezamestnanosti abstrahuje. Našou snahou bude uvažovať predovšetkým o ekonomických výdavkoch a stratách štátu spojených s nezamestnanou osobou. Ekonomické náklady nezamestnanosti z pohľadu verejných rozpočtov môžeme rozdeliť na priame a nepriame nasledovným spôsobom:

Tabuľka 1 Ekonomické náklady nezamestnanosti z pohľadu verejných rozpočtov.

<i>Priame náklady</i>	<i>Strata príjmov</i>	Priame dane
		Odvody do sociálnej a zdravotnej poisťovne platené zamestnávateľom

¹ Analýza nákladov a výnosov je procedúra, ktorá dáva do pomeru náklady vynaložené na nejakú aktivitu a výnosy plynúce z danej aktivity.

² Okunov zákon vyjadruje vzťah negatívnej korelácie medzi ekonomickým rastom a mierou nezamestnanosti. Vzájomná závislosť uvedených dvoch veličín bola prvýkrát empiricky testovaná na amerických dátach Arthurom Okunom, podľa ktorého je zákon pomenovaný.

³ Sociálnymi aspektmi nezamestnanosti sa zaoberali napr. Dao et al. (2010).

		Odvody do sociálnej a zdravotnej poisťovne platené zamestnancom
		Dávka v nezamestnanosti (max. 1/2 roka)
	Dodatočné výdavky	Dávka v hmotnej núdzi a príspevky k dávke (napr. príspevok na bývanie a príspevok na zdravotnú starostlivosť a iné)
		Zdravotné poistenie
		Administrácia nezamestnaných (chod úradov práce) a aktívna politika trhu práce (APTP)
Nepriame náklady	Strata príjmov	Pokles výberu DPH a spotrebných daní v dôsledku zníženia kúpnej sily nezamestnaného a strata na výbere daní z príjmov právnických osôb

Zdroj: Na základe Čadil et al. (2011) zmenené o vlastné metodologické úpravy autorov.

Priame náklady nezamestnanosti môžeme rozdeliť na *stratu príjmov* štátu v podobe poklesu priamych daní a odvodov do sociálnej a zdravotnej poisťovne a *dodatočné výdavky* zastúpené rôznymi formami dávok a sociálnych výpomocí vyplácaných nezamestnanému, zdravotným poistením a výdavkami spojenými s administráciou nezamestnaných a opatreniami APTP. V rámci nepriamych nákladov sledujeme predovšetkým pokles štátu na výbere DPH a spotrebných daní v dôsledku zníženia príjmu nezamestnaného. Okrem spotrebných daní a DPH uvažujeme aj s poklesom produkcie a následným znížením výberu dane z príjmu právnických osôb⁴.

Analýza nákladov a výnosov vychádza z odhadu mesačných nákladov nezamestnanosti, pričom predpokladáme situáciu, v ktorej štát dotuje vytvorenie pracovného miesta počas jedného roka a následne toto pracovné miesto musí byť udržané jeden ďalší rok. Uvažujeme s výškou nákladov nezamestnanosti reprezentatívneho uchádzača o zamestnanie, ktorý sa stal na začiatku roka 2012 nezamestnaným. Pred stratou zamestnania nezamestnaný zarábala mzdu vo výške 624 eur, čo je mzda vypočítaná na základe priemernej dávky v nezamestnanosti. Ďalej predpokladajme, že štát sa rozhodne dotovať novovytvorené pracovné miesto počas doby jedného roka. Uvažujeme tri spôsoby dotácie:

- v prvom prípade štát dotuje pracovné miesto vo výške 624 eur mesačne (hrubá mzda novovytvoreného miesta), aby tohto uchádzača o zamestnanie zamestnal s tým, že zamestnávateľ sa zaviazal udržať pracovné miesto jeden rok po uplynutí dotácie, pričom mzda zamestnanca nemôže klesnúť pod úroveň 624 eur,
- v druhom prípade štát dotuje pracovné miesto len vo výške minimálnej mzdy, ktorá bola v roku 2012 na úrovni 327 eur pri zachovaní ostatných podmienok ako v prvom prípade vyššie (mzda zamestnanca nesmie klesnúť pod úroveň 624 eur).
- Na záver budeme uvažovať situáciu, kedy štátna dotácia bude 814 euro mesačne a mzda zamestnanca by bola 624 eur. Za uvedených podmienok by investícia z pohľadu nákladov vynaložených na dotáciu bola pre štát návratná presne po druhom roku udržania vytvorenej pracovnej pozície.

Tabuľka 2 Scenáre analýzy nákladov a výnosov vytvorenia pracovného miesta formou dotácie.

Scenár	Štát dotuje vytvorenie pracovného miesta vo výške	Zamestnávateľ vypláca zamestnancovi	Zamestnávateľ platí	Posledná mzda nezamestnaného
--------	---	-------------------------------------	---------------------	------------------------------

⁴ Metodika a odhad nákladov nezamestnanosti sú podrobnejšie prezentované v Domonkos a König et al. (2014).

1.	624 eur jeden celý rok	624 eur	Platí celkové odvody	624 eur
2.	327 eur jeden celý rok	624 eur	Platí časť mzdy a celkové odvody	624 eur
3.	814 eur jeden celý rok	624 eur	Platí iba časť odvodov	624 eur

Zdroj: Vlastné vypracovanie autorov.

Pri analýze predpokladáme, že nezamestnaný nemá nárok na dávku v nezamestnanosti, ale iba na dávku v hmotnej núdzi a príspevkov k dávke (DvHN a PkD). Takáto osoba je nezamestnaná viac ako šesť mesiacov.

Počas analýzy nákladov a výnosov a odhadu nákladov nezamestnanosti bolo použitých viacero údajov, ktoré boli predovšetkým čerpané zo Štatistického úradu SR (ŠÚ SR), Ministerstva financií SR (MF SR), Eurostatu, Sociálnej poisťovne, Ústredia práce, sociálnych vecí a rodiny (ÚPSVAR).⁵

V analýze ďalej skúmame hornú hranicu dotácie za vyššie spomínaných podmienok a prepočty rozširujeme na regionálnu úroveň (regionálne dáta podľa NACE III.), pričom zohľadňujeme rôzne situácie nezamestnaného jednotlivca (poberateľ dávky v nezamestnanosti, poberateľ dávky v hmotnej núdzi a príspevkov k dávke, nezamestnaný bez dávok).

2. Výsledky a diskusia

Pri odhade nákladov nezamestnanosti sme vychádzali z odhadu mzdy, ktorú by uchádzač o zamestnanie pravdepodobne zarábala, ak by bol zamestnaný. Tento odhad je kľúčový z toho dôvodu, že veľká časť priamych nákladov na nezamestnaného sa odvíja práve od výšky tejto mzdy. Z toho dôvodu sme v prepočtoch najprv uvažovali s hornou hranicou (HH) a dolnou hranicou (DH). Spodná hranica tohto intervalu bola vypočítaná z dát Sociálnej poisťovne ako medián posledného vymeriavacieho základu nezamestnaného. Za hornú hranicu bol zvolený vážený medián mzdy podľa štruktúry vzdelania nezamestnaných, pričom ako váha bol použitý počet nezamestnaných v danej vzdelanostnej skupine.⁶ Za účelom overenia, či skonštruovaný interval mediánu mzdy je reprezentatívny pre skupinu nezamestnaných bol porovnaný s výškou mzdy vypočítanou na základe priemernej výšky dávky v nezamestnanosti vyplatenej v sledovanom roku. Výpočty sme ďalej rozšírili o odhad nákladov nezamestnaného, ktorý by zarábala minimálnu, medián a priemernú mzdu.

Tabuľka 3 Celkové náklady na priemerného nezamestnaného v roku 2012.

Mzda	Náklady nezamestnanosti
DH mzdy 438,6 eur	456 eur
Odhad mzdy na základe priemernej dávky v nezamestnanosti 624 eur	606 eur
HH mzdy 648,7 eur	626 eur

Zdroj: Vlastné prepočty autorov na základe údajov z ŠÚ SR, MF SR, Sociálnej poisťovne SR a ÚPSVaR.

Horná hranica celkových nákladov na reprezentatívneho nezamestnaného bola odhadnutá na 626 eur a spadá približne do intervalu nezamestnaného s medián mzdou v hospodárstve bez nároku na dávky a nezamestnaného s rovnakou mzdou s nárokom na dávku v hmotnej núdzi a príspevkom k dávke, ktorá bola odhadnutá na 650 eur. Dolná hranica celkových nákladov

⁵ Podrobnejšie informácie o jednotlivých premenných sú prezentované v Domonkos a König et al. (2014).

⁶ Podrobnejšie informácie o výpočte DH a HH sú uvedené v Domonkos a König et al. (2014).

bola 456 eur, čo sa približuje nákladom nezamestnanosti prislúchajúcim nezamestnanému s minimálnou mzdou a s nárokom na dávku v nezamestnanosti na úrovni 440 eur.

Tabuľka 4 Celkové náklady štátu na jedného nezamestnaného v roku 2012, v eurách pri jednotlivých scenároch.

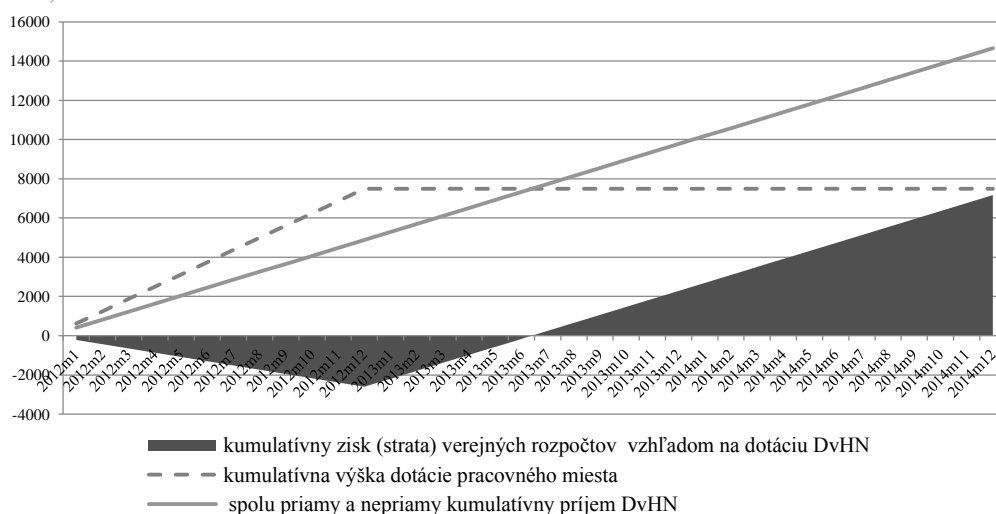
Výška mzdy	V prípade nároku na DvN	Bez nároku na DvN s nárokom na DvHN a PkD	Bez nároku na dávky
1. minimálna mzda (327,2 eur)	440	402	304
2. medián mzdy (637,3 eur)	816	650	552
3. priemerná mzda (805 eur)	1022	786	688

Zdroj: Vlastné prepočty autorov na základe údajov z ŠÚ SR, MF SR, Sociálnej poisťovne SR a ÚPSVaR.

Na základe uvedených výsledkov sa dá vysloviť záver, že reprezentatívny nezamestnaný nadobúdal mzdu v intervale HH – DH, avšak tá je bližšie k HH daného intervalu. Na túto skutočnosť môže poukazovať aj mzda vypočítaná na základe priemernej výšky dávky v nezamestnanosti, nakoľko jej hodnota sa v roku 2012 nachádzala relatívne bližšie k HH v porovnaní s DH.

Uvažujme prvú situáciu, kedy štát dotuje pracovné miesto na úrovni hrubej mzdy dotovaného miesta 624 eur, pričom sledujeme návratnosť dotácie z pohľadu nákladov na ňu vynaložených.

Obrázok 1 Návratnosť dotácie vo výške hrubej mzdy z pohľadu nákladov na ňu vynaložených, poberateľ DvHN a PkD, v euro.



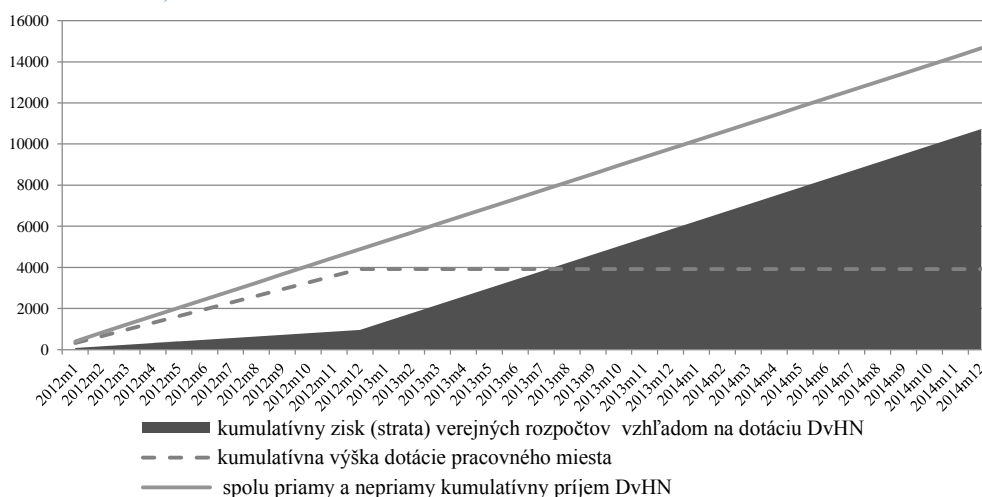
Zdroj: Vlastné prepočty autorov na základe údajov zo ŠÚ SR, MF SR, Sociálnej poisťovne SR a ÚPSVaR.

Prerušovaná čiara na grafe vyššie reprezentuje kumulatívne výdavky štátu na dotáciu počas obdobia jej vyplácania (jeden rok). Po jednom roku sa kumulatívna výška dotácie zastaví na konštantnej úrovni, nakoľko štát po uplynutí tohto obdobia pracovné miesto nedotuje. Plná čiara reprezentuje kumulatívny príjem štátu spojený s vyplácaním sociálneho a zdravotného poistenia od zamestnanca a zamestnávateľa, dane z príjmu fyzických osôb a nárast výberu DPH a spotrebných daní spojený so zvýšenou spotrebou nezamestnaného. V bode, v ktorom kumulatívny príjem pretne výdavky štátu na dotáciu sa štát dostáva do neutrálnej situácie z hľadiska jeho vynaložených nákladov a príjmov. Od tohto momentu každý ďalší mesiac, počas ktorého bude sledovaná osoba zarábať, vyjadruje zisk štátu. Zisk, resp. strata sú vyjadrené prostredníctvom tmavej plochy, ktorá nadobúda kladné hodnoty od siedmeho mesiaca po skončení trvania dotácie. Z uvedeného vyplýva, že ak jednotlivец bude pracovať

aspoň sedem mesiacov po vyčerpaní dotácie, táto forma investície bude pre štát neutrálna a každý ďalší mesiac bude prinášať pozitívny príjem.

V predchádzajúcej situácii sme uvažovali s prípadom kedy štát dotoval pracovné miesto v rovnakej výške ako bola mzda nezamestnaného pred stratou zamestnania. V tejto časti budeme uvažovať so situáciou, kedy štát bude dotovať pracovné miesto iba vo výške minimálnej mzdy, ktorá bola 327 eur, avšak zamestnávateľ sa musí zaviazat', že poskytne zamestnancovi mzdu minimálne vo výške jeho predchádzajúcej mzdy na úrovni 624 eur.

Obrázok 2 Návratnosť dotácie vo výške minimálnej mzdy z pohľadu nákladov na ňu vynaložených, poberateľ DvHN a PkD, v euro.



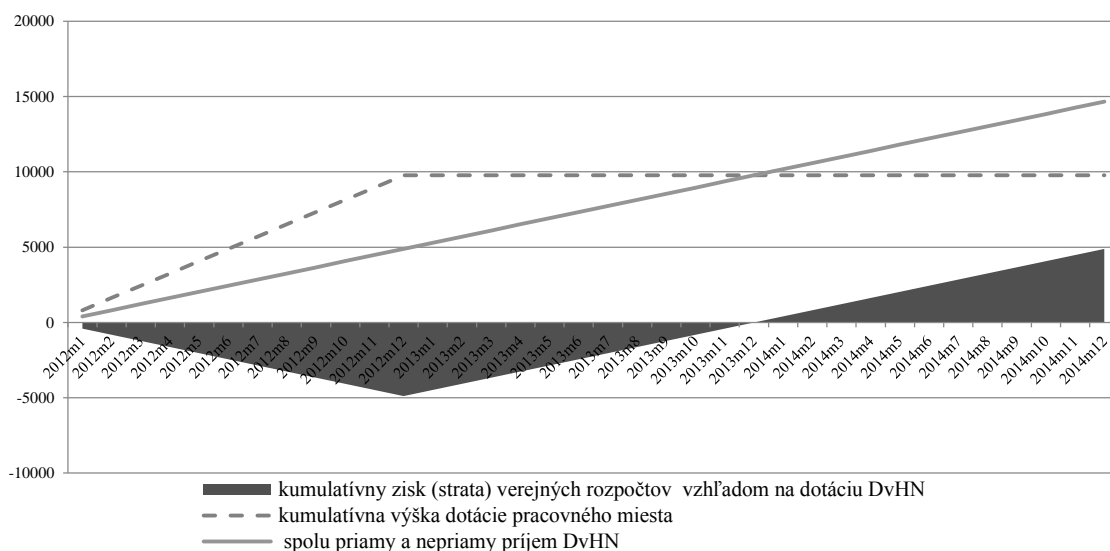
Zdroj: Vlastné prepočty autorov na základe údajov zo ŠÚ SR, MF SR, Sociálnej poisťovne SR a ÚPSVaR.

Na základe výsledkov uvedených na obrázku môžeme konštatovať, že návratnosť dotácie v uvedenom prípade je okamžitá, nakoľko náklady na ňu vynaložené sú nižšie ako príjmy plynúce štátu v dôsledku zamestnania sa nezamestnanej osoby okamžite po vytvorení pracovného miesta.

Analýza nákladov a výnosov - neutrálna výška dotácie

V predchádzajúcich prípadoch bolo uvažované s výškou dotácie na úrovni minimálnej mzdy a mzdy vypočítanej na základe priemernej výšky dávky v nezamestnanosti. Uvažujme situáciu, kedy sa zamestnávateľ zaviazá na novovytvorenom pracovnom mieste vyplácať jednotlivcovi hrubú mzdu vo výške minimálne 624 eur pri rovnakých podmienkach dotácie, pričom nás bude zaujímať, akú maximálnu výšku dotácie by mohol štát zvoliť, aby investícia po dvoch rokoch bola pre štát neutrálna. Ak by sme analyzovali uvedenú situáciu z pohľadu nákladov vynaložených na samotnú dotáciu vyzeralo by to nasledovne:

Obrázok 3 Návratnosť neutrálny dotácie z pohľadu nákladov na ňu vynaložených, poberateľ DvHN a PkD, v euro.



Zdroj: Vlastné prepočty autorov na základe údajov zo ŠÚ SR, MF SR, Sociálnej poisťovne SR a ÚPSVaR.

Z grafu vyššie vyplýva, že ak by výška dotácie pracovného miesta počas jedného roka bola na úrovni 814 eur a zamestnávateľ by udržal pracovné miesto rok po vyplatení dotácie, pričom hrubá mzda uchádzača o zamestnanie by bola 624 eur, z hľadiska nákladov vynaložených na dotáciu by investícia do pracovného miesta bola za dva roky neutrálna. To znamená, že ak by sa štát rozhodol dotovať novovytvorené pracovné miesto do výšky 814 eur za uvedených podmienok by investícia z pohľadu nákladov vynaložených na dotáciu bola pre štát návratná až po druhom roku udržania vytvorenej pracovnej pozície. Takáto dotácia by za jeden rok jej trvania mala celkovú hodnotu 9 771 eur.

Záver

Politika vytvorenia pracovného miesta formou dotácie je dlhodobý diskutovaný problém v SR. Diskusia často končí pri otázke, aká je efektívna výška vynaložených finančných prostriedkov na vytvorenie pracovného miesta, aby sa dané pracovné miesto zbytočne nepredražovalo, a aby sa dosiahol žiadaný efekt ako z pohľadu trhu práce, zamestnanca a zamestnávateľa, tak aj z pohľadu verejných financií. Predložený článok si kládol za cieľ navrhnúť vhodnú metodiku na zodpovedanie tejto otázky a následne aplikovať túto metodiku na modelové scenáre, ktoré môžu byť v budúcnosti zmenené a rozšírené podľa konkrétneho návrhu politiky trhu práce. Faktory, ktoré determinujú tento výpočet sú: odhad mzdy, ktorú by zamestnanec zarábala, keby bol zamestnaný, čo určuje výšku nákladov, ktoré generuje tento nezamestnaný; dĺžka a výška dotácie; obdobie koľko musí byť pracovné miesto udržané po ukončení dotácie a mzda vyplácaná zamestnancovi.

Ak by sme uvažovali, že vláda SR by vynaložila 624 eur mesačne počas jedného roka na vytvorenie jedného pracovného miesta, tak by náklady spojené s touto aktivitou z pohľadu príjmov plynúcich zo zamestnania dodatočnej osoby boli navrátené za sedem mesiacov po skončení dotovania pracovného miesta. Čiže celková návratnosť ročnej investície na úrovni 624 eur mesačne do pracovného miesta, kde by sa vyplácala ako mzda 624 eur by bolo sedem mesiacov. V prípade, ak by sa vynaložilo 327 eur mesačne počas jedného roka a vyplácala by sa mzda 624 eur dva roky, tak by náklady spojené s touto aktivitou priniesli zníženie tlaku na verejné financie okamžite, nakoľko náklady na dotáciu sú nižšie ako príjmy plynúce zo zamestnania dodatočného nezamestnaného. Návratnosť by bola okamžitá hneď od prvého momentu vytvorenia pracovného miesta. Ak by výška dotácie pracovného miesta počas jedného roka bola na úrovni 814 eur a zamestnávateľ by udržal pracovné miesto rok po

vyplatení dotácie, pričom hrubá mzda uchádzača o zamestnanie by bola 624 eur počas týchto dvoch rokov, z hľadiska nákladov vynaložených na dotáciu by investícia do pracovného miesta bola neutrálna. Takáto dotácia by za jeden rok jej trvania bola na úrovni 9 771 eur.

Literatúra

ČADIL, J. – PAVELKA, T. – KAŇKOVÁ, E. – VORLÍČEK, J. (2011): Odhad nákladů nezaměstnanosti z pohledu veřejných rozpočtů. Politická ekonomie. 2011, No. 5, pp. 618–637.

DAO, M. – LOUNGANI, P. (2010): The Human Cost of Recessions: Assessing It, Reducing It. IMF Staff Position Note (SPN/10/17), November 11, 2010. <https://www.imf.org/external/pubs/ft/spn/2010/spn1017.pdf>

KÖNIG, Brian - DOMONKOS, Tomáš. Job creation by direct financial subsidies in the Slovak Republic : a cost-benefit analysis. In Ekonomický časopis, 2015, roč. 63, č. 1, s. 359-371.

DOMONKOS, T. – KÖNIG, B. – RADVANSKÝ, M. (2014): Odhad nákladov nezamestnanosti - Empirická analýza v podmienkach Slovenskej ekonomiky na národnej, regionálnej a odvetvovej úrovni. Pracovný dokument Centra sociálneho dialógu SR - KOZ SR.

ELBONA. (2006): Náklady státu na jedného nezaměstnaného. Elbona, 2006. <http://portal.mpsv.cz/sz/politikazamest/vyzkumnestudie>

HELLIWELL, J. F. – HUANG, H. (2011): NBER Working Paper Series New Measures of the Costs of Unemployment: Evidence From The Subjective Well-Being of 3.3 Million Americans. National Bureau of Economic Research, [Working Paper No. 16829]. www.nber.org/papers/w16829

MAARTEN, G. – VALSAMIS, D. – VAN Der BEKEN, W. (2012): Why invest in employment? A study on the cost of unemployment. Final report. On behalf of: European Federation for Services to Individuals (EFSI). Brussels, December 2012. www.efsi-europe.eu/fileadmin/MEDIA/publications/Cost_of_unemployment_report/English_Study_on_the_cost_of_unemployment_January_2013.pdf

DOVÁĽOVÁ, G. – KARASOVÁ, K. – LUBYOVÁ, M. – ŠTEFÁNIK, M. (2014): A3-T5: Problematika trhu práce podľa regionálnych a odvetvových rozdielov - Analýza účinkov nástrojov aktívnej politiky trhu práce. Pracovný dokument Centra sociálneho dialógu SR - KOZ SR.

Štát plánuje podporiť zamestnanosť. Chce prispievať firmám na tvorbu miest pre mladých. Dostupné na: <http://www.aktuality.sk/clanok/257206/stat-planuje-podporit-zamestnanost-chce-prispievat-firmam-na-tvorbu-miest-pre-mladych/>

Kontaktné údaje

Tomáš DOMONKOS,
Ekonomický ústav SAV,
Šancová 56,
811 05 Bratislava, SR;

e-mail: tomas.domonkos@savba.sk;

Ing. Brian König, PhD.,
a, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava,
b, Ekonomický ústav SAV,
Šancová 56,
811 05 Bratislava, SR;
e-mail: brian.konig@savba.sk

SOLVING THE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

*Marek Dvořák*¹

Abstract

Neural nets are an interesting idea based on emulation of human mind. While they are usually connected with artificial intelligence, machine learning and classification, they can also be used to help solving many applications in operation research. In this article, I will try to introduce and compare two types of artificial neural networks - Kohonen self-organizing map and Hopfield-Tank network. This comparison will be done on several randomly generated Travelling Salesman problems.

Keywords: *traveling salesman, neural net, kohonen, hopfield-tank*

1 INTRODUCTION

In the last few years, neural networks have been used with increasing frequency, mainly in the field on artificial intelligence and deep learning. [4][2] It's thanks to increasing computational power which neural networks need to properly emulate human mind. [13] While it will take a long time until we are able to surpass the complexity of human brain, we can sufficiently emulate at least some parts of human reasoning.

The task of teaching machines to reason like a human being is mainly in the realm of artificial intelligence, many fields can take such opportunity to use it for their benefit. The Traveling Salesman problem is a classical problem of optimization where the exact solution can be hardly obtainable, and where artificial neural networks can help a great deal.

2 THE TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

Traveling salesman is a classical problem in a mathematic combinatorial optimization. [1] It is stated as such that there are n cities in a region and each city either given by a position on a cartesian coordinated grid, or with a matrix of distances between each city. The traveling salesman needs to visit each city only once and then return back to where he started. The optimization lies in finding a sequence of cities such that the total distance traveled is as minimal as possible.

Such problem can be formulated in terms of integer linear optimization. Let n be a number of cities and c_{ij} a distance between city i and city j . Then let's define a variable x

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if the route goes from city } i \text{ to city } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

We can then write an integer linear optimization problem as follows [12]:

¹The research project was supported by Grant No. IGA F4/54/2015 of the Internal Grant Agency, Faculty of Informatics and Statistics, University of Economics, Prague.

$$z = \sum_{i=0}^n \sum_{j \neq i, j=0}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (2)$$

$$\sum_{i=0, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad \text{for } j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$u_i + 1 - n(1 - x_{ij}) \leq u_j \quad \text{for } i = 1, \dots, n, i = 2, \dots, n \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{for } i = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$u_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (7)$$

However the computational complexity does rise exponentially with problem size instead of polynomially. This means that while smaller problems with fewer cities do not pose much problems, but as the number of cities increases, the time it takes to solve grows extremely quickly.

Thusly, on a large scale, it is infeasible to compute the absolute global extrema, but it is often favorable to use algorithms which while not arriving at the best possible solution, arrives at a suboptimal solution reasonably quickly.

Many heuristics and metaheuristics have been derived to make such computations faster. [8][11][14] One such heuristic is the nearest neighbor method. Let's start from random city. Then the next city to be visited is the city nearest to where we are right now. This continues until all the cities has been visited. Disadvantage of such algorithm is that it is possible for the last city to end up far away from the starter city. But even then this algorithm on average ends up being only 25% worse then optimal solution [7].

Other such algorithm stems from a list of all edges sorted from shortest to longest. The route is iteratively constructed by adding a shortest segment from the list. If such newly added segment should create a partial cycle in the route, it is discarded. This heuristics ends when all the cities are connected.

The last heuristics to mention here is the nearest insertion heuristics. First a city is selected. This city is on a self contained zero-length loop. We then try to add another city which minimizes the total distance on the newly formed loop. The algorithm continues until all the cities are part of the cycle.

There are also many metaheuristic, which are algorithms that do not take any initial assumptions about a problem, but instead offer a general framework for solving. One such heuristic families comes out of artificial neural networks.

3 ARTIFICIAL NEURAL NETWORK

Artificial neural net takes inspiration from biological neurons which can be found in central neural systems of humans and many other animals. Such net connects units called neurons, that are defined by its inputs, output and body of the neuron itself. [15] Such neuron can be simply thought of as a function which takes many inputs, weights them, and outputs a single value filtered through

an activation function. This output can be used as an input to another neuron. Neuron can be mathematically described with this function:

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sigma \left(b + \sum_{i=1}^n a_i w_i \right) \quad (8)$$

where σ is an activation function which can be either smooth sigmoid function like logistic function

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (9)$$

, hyperbolic tangens

$$\sigma(x) = \tanh(x) \quad (10)$$

, or stepwise function like

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

3.1 Kohonen self-organizing map

Such neurons described in the previous section can be arranged into networks. Self-organizing map consists of two layers. [9] The first layer is input layer, and the second layer which directly connects to the first one represents outputs.

Kohonen map is a bit different from traditional neural net that the output of net is not represented with the output of final layer, but instead is represented by trained weights of this layer. [10] When using SOM to solve the traveling salesman problem, those weights represent cartesian coordinates of a city on a route. This output layer can be arranged in an arbitrary number of dimensions, but for the purpose of TSP, one dimensional loop is mostly used.

An algorithm for using SOM is as follows:

1. Initialize the output network weights. They can be chosen at random, but mostly a circle in the TSP region is used.
2. Chose one city from the region at random.
3. Calculate the nearest neuron using euclidean distance.
4. Adjust weights of the output layer using equations:

$$\mathbf{W}_v(s+1) = \mathbf{W}_v(s) + \Theta(u, v, s) \alpha(s) (\mathbf{D}(t) - \mathbf{W}_v(s)), \quad (12)$$

$$\alpha(s) = e^{-\frac{s}{i}} \quad (13)$$

$$\Theta(s, i, r) = e^{-\frac{r^2}{2d^2(-s+1+i)^2}} \quad (14)$$

where n is iteration number, $\mathbf{D}(t)$ are the weights of the chosen city.

5. If maximum number of iterations is reached, end the algorithm. Else go to 2.

Kohonen map highly resembles stretching a rubber band. When you stretch a map to a chosen city, the closest nodes follow the stretched one, but the further away they are, the more negligible the weight adjusting is.

3.2 Hopfield-Tank neural net

Hopfield-Tank neural net highly resembles linear programming. It's output neurons are arranged in a grid which activation symbolizes the variable matrix of linear programming.

Hopfield-Tank nets are based on a energy function [5], which is to be minimized and which is constructed from constraints and objective function. This energy function covers column and row restrictions on the output matrix, together with objective function. Equations of motion are then derived to describe the change of neuron weights over time to minimize the energy function.

The equations of motion and the energy function in the case of TSP are as follows [6][5]:

$$\begin{aligned} \frac{du_{Xi}}{dt} = & -\frac{u_{Xi}}{\tau} - A \sum_{j \neq i} V_{Xj} - B \sum_{Y \neq X} V_{Yi} - C \left(\sum_Y \sum_j V_{Yj} - n \right) - \\ & - D \sum_Y d_{XY} (V_{Y,i+1} + V_{Y,i-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$V_{Xi} = g(u_{Xi}) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{u_{Xi}}{u_0} \right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E = & \frac{A}{2} \sum_X \sum_i \sum_{j \neq i} V_{Xi} V_{Xj} + \frac{B}{2} \sum_i \sum_X \sum_{X \neq Y} V_{Xi} V_{Yi} + \frac{C}{2} \left(\sum_X \sum_i V_{Xi} - n \right)^2 + \\ & + \frac{D}{2} \sum_X \sum_{Y \neq X} \sum_i d_{XY} V_{Xi} (V_{Y,i+1} + V_{Y,i-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

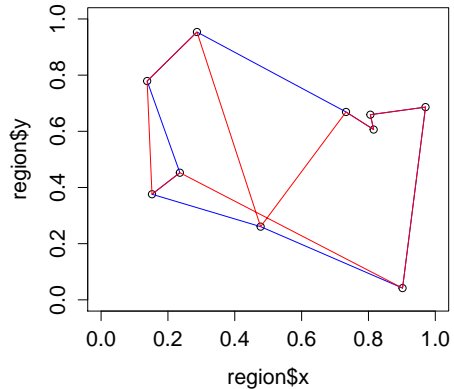
4 SOLVING THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM

The test data are five randomly generated regions of the size $n = 10$. [3] The position of each city was randomly generated from the uniform distribution $\mathcal{U}(0;1)$ which was then used as input to the self-organizing map. This was then converted to distance matrix to be used in Hopfield-Tank network.

Kononen map utilized 20 neurons that aligned along the path with maximum iterations set to 500 and the neuron neighborhood set to 5.

Hopfield-Tank net parameters were set to $A = B = 100, C = D = 90, u_0 = 0.02, \Delta t = 0.00001$.

Solution to both methods on one such randomly generated example can be seen here (blue line represents solution found by SOM, red line is a solution found by H-T net):



The solution to the first region found by SOM is 3.008, while the solution found by Hopfield-Tank net is 3.702. A result from one run can be considered inconclusive, so additional 4 runs were conducted. The results are summed in the following table:

solution	SOM	H-T
1	3.008	3.702
2	3.052	3.89
3	2.574	3.511
4	2.772	4.185
5	2.453	3.576

5 CONCLUSION

The results suggest that Hopfield-Tank net performs worse than Kohonen self-Organizing map. Hopfield-Tank net has a tendency to stop in local extrema more often, and given that it's constraints are part of the energy function too, this local extrema may be unfeasible.

It should be noted however that Hopfield-Tank can be adapted to more variety of optimization problems and if one can correctly set it's parameters, it may be proven more useful.

References

- [1] BEARDWOOD, J., HALTON, J. H. a HAMMERSLEY, J. M. (1959). The shortest path through many points. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 55, pages 299–327. Cambridge Univ Press.
- [2] CHIN, C. a BROWN, D. E. (2000). Learning in science: A comparison of deep and surface approaches. *Journal of research in science teaching*, **37**(2), 109–138.
- [3] DVOŘÁK, M. Využití umělých neuronových sítí pro řešení úloh kombinatorické optimalizace.

- [4] HINTON, G. E., OSINDERO, S. a TEH, Y.-W. (2006). A fast learning algorithm for deep belief nets. *Neural computation*, **18**(7), 1527–1554.
- [5] HOPFIELD, J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the national academy of sciences*, **79**(8), 2554–2558.
- [6] HOPFIELD, J. a TANK, D. (1985). “neural” computation of decisions in optimization problems. *Biological cybernetics*, **52**(3), 141–152.
- [7] JOHNSON, D. S. a NCGEOCH, L. A. (1997). *The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization*. Princeton University Press.
- [8] KARG, R. L. a THOMPSON, G. L. (1964). A heuristic approach to solving travelling salesman problems. *Management science*, **10**(2), 225–248.
- [9] KOHONEN, T. (1982). Self-organized formation of topologically correct feature maps. *Biological cybernetics*, **43**(1), 59–69.
- [10] KOHONEN, T. (1990). The self-organizing map. *Proceedings of the IEEE*, **78**(9), 1464–1480.
- [11] LAWLER, L. (1985). Kan and shmoys, the traveling salesman problem.
- [12] MILLER, C. E., TUCKER, A. W. a ZEMLIN, R. A. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, **7**(4), 326–329.
- [13] ROSENBLATT, F. (1958). The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, **65**(6), 386–408.
- [14] ROSENKRANTZ, D. J., STEARNS, R. E. a LEWIS, II, P. M. (1977). An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem. *SIAM journal on computing*, **6**(3), 563–581.
- [15] WERBOS, P. (1974). Beyond regression: New tools for prediction and analysis in the behavioral sciences.

Contact:

Ing. Marek Dvořák
 University of Economics, Prague
 Department of Econometrics
 W. Churchill Sq. 4
 130 67 Prague 3
 Czech Republic
 email: marek.dvorak@vse.cz

POUŽITÍ SHLUKOVÉ ANALÝZY PŘI IDENTIFIKACI ODLIŠNĚ FUNKUJÍCÍCH POLOŽEK

APPLICATION OF CLUSTER ANALYSIS TO DETECT DIFFERENTIAL ITEM FUNCTIONING

Lenka Fířtová

Abstrakt

Při harmonizaci testů, tedy při jejich převodu na jednotnou škálu, se mnohdy využívá tzv. kotvících položek, které jsou společné několika testům. Aby však bylo tyto položky možné použít k harmonizaci, je potřeba, aby se jejich parametry napříč testy neměnily, což však nemusí vždy nastat. Existuje celá řada postupů, jak testovat, zda položka vykazuje tzv. odlišné fungování, avšak tyto postupy mají svá omezení. Článek proto navrhuje alternativní postup identifikace odlišného fungování položek založený na shlukové analýze, který může běžně používané postupy doplnit.

Klíčová slova: *teorie odpovědi na položku, odlišné fungování položek, shluková analýza*

Abstract

When equating two tests, test developers often use so-called anchor items to link the test forms onto the same scale. However, in order for the anchor items to be suitable for equating, their parameters need to remain stable across the tests which are to be linked, which is not always the case. There are many ways to identify so-called differential item functioning, but all of them have their limitations. Therefore, this paper suggests an alternative approach to identifying differential item functioning based on the cluster analysis, which may be used alongside the traditional methods.

Keywords: *Item Response Theory, differential item functioning, cluster analysis*

1 TEORIE ODPOVĚDI NA POLOŽKU (IRT)

Teorie odpovědi na položku (Item Response Theory, dále IRT) je skupina modelů používaných především při tvorbě a vyhodnocování psychologických a znalostních testů k odhadu parametrů položek testu a úrovně testované dovednosti respondentů (dále latentní rys). Tyto modely umožňují odhadnout, s jakou pravděpodobností odpoví respondent s určitou úrovní latentního rysu na danou položku správně. Dichotomický dvouparametrický model vyjadřuje pravděpodobnost, že respondent i zodpoví správně položku j následovně (Partchev, 2004)

$$P_{ij}(\theta_i, \beta_j, \alpha_j) = P(x_{ij} = 1 | \theta_i, \beta_j, \alpha_j) = \frac{e^{\alpha_j(\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{\alpha_j(\theta_i - \beta_j)}}, \quad (1)$$

kde β_j = obtížnost j -té položky

α_j = diskriminační schopnost j -té položky

θ_i = úroveň latentního rysu i -tého respondenta

$x_{ij} = 1$, zodpověděl-li respondent i položku j správně, jinak 0.

Obtížnost položky je spojitá veličina na téže škále jako latentní rys respondentů a může teoreticky nabývat jakékoli hodnoty, byť se obvykle pohybuje v intervalu $(-4, 4)$. Diskriminace je rovněž spojitá veličina, která bývá obvykle kladná, ale může nabývat i záporných hodnot.

1.1 Odlišně fungující položky v rámci IRT

Jedním z problémů odhadu parametrů úloh pomocí IRT modelů je neurčenost metriky, ta se proto obvykle centruje v nule buď vzhledem k rozložení latentního rysu respondentů, nebo vzhledem k obtížnosti položek. Častým cílem tvůrců testu bývá sjednotit škálu, na nichž se vyskytují parametry položek různých testů, neboť jakmile jsou parametry položek různých testů na téže škále, jsou i latentní rysy respondentů řešících tyto testy na téže škále, a tudíž plně srovnatelné. To se obvykle provádí prostřednictvím tzv. kotvících položek, tedy množiny úloh, které jsou společné vícero testům. Je známo, že vyskytují-li se tytéž úlohy v různých testech, je možné jejich parametry převést na jednotnou škálu lineární transformací, a tyto parametry lineární transformace je pak možné použít pro převod všech zbylých (unikátních) úloh na jednotnou škálu. Problémem, kterému tvůrci testů často čelí, je ovšem fakt, že parametry kotvících položek nejsou napříč testy vždy stabilní. Mění-li se parametry položek test od testu, hovoříme o tzv. odlišném fungování položek (*differential item functioning*, dále *DIF*). Odlišně fungující položky je potřeba správně identifikovat a z kotvení následně vyřadit. K jejich identifikaci lze použít například některou z následujících metod.

1.2 Metody pro analýzu odlišného fungování položek

Lordova statistika pro identifikaci DIF

Jednou z metod identifikace *DIF* je Lordova statistika (Lord, 1980), kdy je testována sdružená nulová hypotéza, že parametry obtížnosti i diskriminace se v obou testech rovnají, tedy $H_0: \alpha_{j1} = \alpha_{j2}; \beta_{j1} = \beta_{j2}$, kde β_{j1} resp. β_{j2} označuje obtížnost j -té položky v prvním, resp. ve druhém testu, a α_{j1} resp. α_{j2} označuje diskriminaci j -té položky v prvním, resp. ve druhém testu. Statistiku pak spočítáme jako $v_i' \Sigma_i^{-1} v_i$, kde v_i značí vektor rozdílů odhadu parametrů diskriminace a obtížnosti v jednotlivých skupinách a Σ_i značí odhad kovarianční matice rozdílů mezi odhady parametrů. Tato statistika má pak chí-kvadrát rozdělení s počtem volnosti rovným počtu parametrů (tzn. 2 u dvouparametrického modelu).

Statistika Raju pro identifikaci DIF

Tato statistika k identifikaci *DIF* je založena na ploše mezi charakteristickými křivkami položek (Raju, 1990). Nulovou hypotézou je shoda parametrů položek jsou v obou testech. Pro dvouparametrický model lze vyjádřit testovou statistiku vztahem

$$UA = \left| \frac{2(a_2 - a_1)}{Da_1 a_2} \ln \left\{ 1 + \exp \left[\frac{Da_1 a_2 (b_2 - b_1)}{a_2 - a_1} \right] \right\} - b_2 - b_1 \right|, \quad (2)$$

kde UA značí *unsigned area*, D je škálovací konstanta, která přibližuje logistickou křivku normálnímu rozdělení, a_1 resp. a_2 značí odhad parametru diskriminace v prvním, respektive ve druhém testu, a b_1 resp. b_2 značí odhad parametru obtížnosti v prvním, respektive ve druhém testu. Označme H výraz nacházející se uvnitř absolutní hodnoty. Testovou statistikou je pak

$Z = (H - 0)/\sigma(H)$, která se porovná s kritickými hodnotami normovaného normálního rozdělení pro zvolenou hladinu významnosti.

2 SHLUKOVÁ ANALÝZA PRO IDENTIFIKACI *DIF*

Při identifikaci *DIF* může nekonzistence jedné kotvící položky způsobit, že se i ostatní položky budou jevit jako nekonzistentní, neboť nové odhady parametrů kotvících položek vycházejí z odhadu skóre na parametrech zafixovaných dle původního testu, a tento odhad skóre nemusí při výskytu *DIF* odpovídat skutečnosti. Například kdyby měla určitá kotvící položka v jednom z testů diskriminaci rovnu 0,8 a ve druhém testu by její diskriminace kvůli nekonzistentnímu chování byla rovna 1, pak by při zakotvení její diskriminace na 0,8 dle původního testu došlo k ovlivnění metriky všech položek ve druhém testu, což by mohlo vést k podhodnocení odhadu diskriminace zbylých kotvících položek, které by se tudíž také mohly jevit jako nekonzistentní. Odhalit kotvící položku či položky způsobující zdánlivě nekonzistentní chování ostatních položek může být přitom při použití výše uvedené Lordovy statistiky či statistiky Raju někdy obtížné. Alternativním postupem při identifikaci *DIF* by tedy mohla být shluková analýza kotvících položek.

Shluková analýza kotvících položek (Hučín, 2013) je postavena na myšlence, že pokud se kotvící položky chovají konzistentně, pak by vztah mezi jejich parametry měl být v jednotlivých propojovaných testech stejný. Kupříkladu, pokud je určitá položka v jednom z testů jednodušší než jiná, mělo by totéž platit i ve druhém z testů. Není-li tomu tak, pak je pravděpodobné, že se parametry jedné z nich či obou napříč testy mění, tedy že položky vykazují nekonzistentní chování.

Nekonzistentní chování lze analyzovat jak zvlášť pro diskriminaci a obtížnost, tak pro oba parametry zároveň. Postup bude nejprve ilustrován na analýze stability parametrů diskriminace napříč testy. Označme nyní $a_{1,i}$ $a_{1,k}$ resp. $a_{2,i}$ $a_{2,k}$ odhady diskriminace i -té a k -té položky v prvním, resp. ve druhém testu, a $se_{1,ai}$, $se_{1,ak}$ resp. $se_{2,ai}$, $se_{2,ak}$ odhady jejich směrodatných chyb. Dále označme \mathbf{A} matici normovaných rozdílů vzdáleností diskriminace, kde \mathbf{A} je čtvercová matice rozměru n krát n , pro jejíž prvek v i -tém řádku a k -tém sloupci platí

$$\mathbf{A}_{ik} = \frac{(a_{1,i} - a_{1,k}) - (a_{2,i} - a_{2,k})}{\sqrt{(se_{1,ai})^2 + (se_{1,ak})^2 + (se_{2,ai})^2 + (se_{2,ak})^2}}, \quad (3)$$

přičemž z reálných dat se ukazuje, že kovarianci je pro tyto účely možné zanedbat. Prvky matice \mathbf{A} tak mají přibližně rozdělení $N(0, 1)$. Matice \mathbf{A} je základem pro níže popsanou shlukovou analýzu. Při analýze stability parametrů obtížnosti lze postupovat obdobně.

Při analýze stability obou parametrů (diskriminace i obtížnosti) zároveň postupujeme následovně. Označme $b_{1,i}$ $b_{1,k}$ resp. $b_{2,i}$ $b_{2,k}$ odhady obtížnosti i -té a k -té položky v prvním, resp. ve druhém testu, a $se_{1,bi}$, $se_{1,bk}$ resp. $se_{2,bi}$, $se_{2,bk}$ odhady jejich směrodatných chyb, zbylé značení zůstává jako výše. Označme \mathbf{d}_{ik} vektor rozdílu vzdáleností diskriminace a obtížnosti dvojice položek i , k , tedy

$$\mathbf{d}_{ik} = \begin{bmatrix} (a_{1,i} - a_{1,k}) - (a_{2,i} - a_{2,k}) \\ (b_{1,i} - b_{1,k}) - (b_{2,i} - b_{2,k}) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Dále označme Σ_{ik} kovarianční matici rozdílu vzdáleností parametrů dvojice položek i , k , tedy

$$\Sigma_{ik} = \begin{bmatrix} (se_{1,ai})^2 + (se_{1,ak})^2 + (se_{2,ai})^2 + (se_{2,ak})^2 & (cov_{ab,1,i} + cov_{ab,1,k}) + (cov_{ab,2,i} + cov_{ab,2,k}) \\ (cov_{ab,1,i} + cov_{ab,1,k}) + (cov_{ab,2,i} + cov_{ab,2,k}) & (se_{1,bi})^2 + (se_{1,bk})^2 + (se_{2,bi})^2 + (se_{2,bk})^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kde $cov_{ab,1,i}$ resp. $cov_{ab,1,k}$, značí odhad kovariance parametru obtížnosti a diskriminace i -té resp. k -té položky v prvním testu a $cov_{ab,2,i}$ resp. $cov_{ab,2,k}$ ve druhém testu.

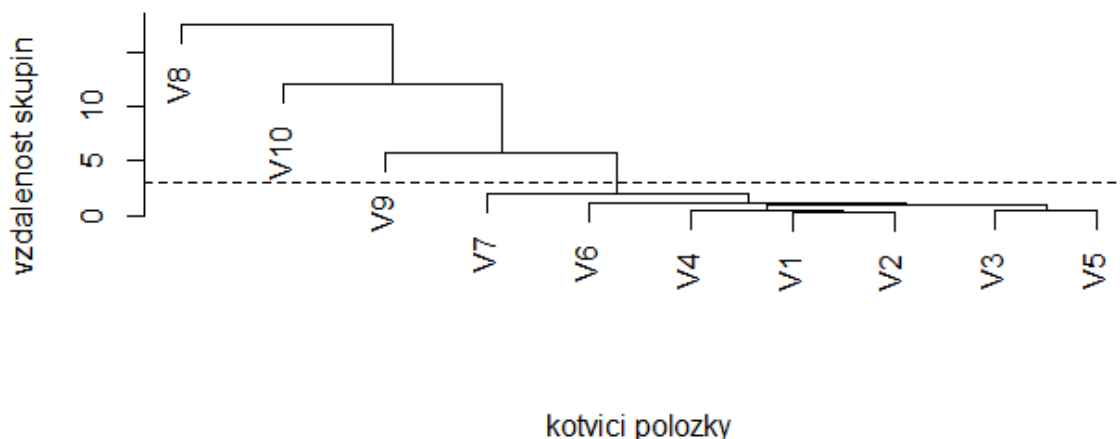
Prvek v i -tém řádku a k -tém sloupci matice rozdílů vzdáleností získáme při souběžné analýze stability parametrů obtížnosti a diskriminace jako $\mathbf{d}_{ik}' \boldsymbol{\Sigma}_{ik}^{-1} \mathbf{d}_{ik}$. Tato matice, jejíž prvky mají chí-kvadrát rozdělení s dvěma stupni volnosti, jsou základem pro shlukovou analýzu.

Podstatou shlukové analýzy je seskupování prvků s podobnými vlastnostmi do shluků. K tomu existuje množství různých algoritmů, jedním z nichž je například metoda nejvzdálenějšího souseda, která funguje následovně. Uvažujme situaci, kdy máme k dispozici n položek. V prvním kroku algoritmu vytvoříme n shluků, z nichž každý obsahuje právě jednu položku. Vzdálenosti mezi dvojicemi položek jsou tedy zároveň vzdálenostmi mezi jednotlivými shluky. Následně najdeme dvojici položek, které jsou si nejbližší, a ty sdružíme do jednoho shluku, čímž vznikne $n - 1$ shluků. Spočítáme vzdálenosti mezi nově vzniklým shlukem a ostatními shluky a postup opakujeme, a to až té doby, než vznikne jeden shluk obsahující všechny položky. Výsledky shlukové analýzy lze graficky zachytit v podobě dendrogramu, jehož vertikální osa představuje vzdálenost shluků.

3 SIMULACE

Nyní bude shluková analýza pro identifikace *DIF* ilustrována na simulovaných datech. Pro výpočty bude použit program *TAPIR* (Testová analýza pomocí IRT) vyvinutý společností Scio (Scio, 2012), který je souborem skriptů pracujících v prostředí *R* (*R* Core Team, 2015) a který využívá mimo jiné knihovnu *difR* (Magis, Beland & Raiche, 2013). V simulaci bylo použito 10 položek, které byly předloženy dvěma neekvivalentním skupinám o 10 000 respondentech, tedy skupinám s různým rozdělením latentního rysu. Prvních sedm položek se chovalo napříč skupinami konzistentně, poslední tři položky měly parametry, které jsou popsány v tabulce níže. Výstup v podobě dendrogramu je zachycen na obrázku 1. Na základě něj lze snadno identifikovat položky 8, 9 a 10 jako nekonzistentní.

ID položky	V8	V9	V10
obtížnost (skupina 1)	0,5	1,5	-1,5
obtížnost (skupina 2)	0,0	1,0	-0,5
diskriminace (skupina 1)	0,9	0,4	0,6
diskriminace (skupina 2)	0,4	0,7	1,2



Obr 1 Shluková analýza parametrů kotvicích položek (souběžná analýza obtížnosti a diskriminace)

4 ZÁVĚR

V článku byl stručně popsán problém identifikace odlišného fungování položek, tedy položek, jejichž parametry se mění napříč testy. Nejprve byly představeny dvě existující metody identifikace odlišně fungujících položek, a to Lordova statistika a statistika Raju. Problém, který někdy může v souvislosti s používáním těchto statistik vzniknout, je, že nekonzistence jedné či vícero kotvicích úloh se projeví zdánlivě nekonzistentním chováním i zbylých kotvicích úloh. Byl proto navržen alternativní postup pro identifikaci odlišně fungujících úloh, který využívá principů shlukové analýzy, a tento postup byl krátce ilustrován na konkrétním příkladu. Z něj je patrné, že shluková analýza může být alternativní cestou, jak nekonzistentní chování kotvicích položek identifikovat. Rozhodnutí, které položky nepoužít ke kotvení kvůli jejich odlišnému fungování, nemusí být vždy snadné, a jelikož je shluková analýza postavena na jiném principu než většina běžně používaných metod pro identifikaci *DIF*, lze ji považovat za jejich vhodný doplněk, který může pomoci toto rozhodování usnadnit.

Použitá literatura

1. LORD, F. M. (1980): *Applications of item response theory to practical testing problems*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,
2. MAGIS, D., BELAND, S., RAICHE, G. (2013): *difR: Collection of methods to detect dichotomous differential item functioning (DIF) in psychometrics*. R package version 4.5.
3. PARTCHEV, I. (2004): *A visual guide to the item response theory* [online]. Friedrich Schiller University at Jena [cit. 20. 11. 2015]. Dostupné z: <https://www.metheval.uni-jena.de/irt/VisuallIRT.pdf>
4. RAJU, N. S. (1990): *Determining the significance of estimated signed and unsigned areas between two item response functions* [online]. Applied Psychological Measurement, 14, 197-207. Dostupné z: <http://conservancy.umn.edu/bitstream/113559/1/v14n2p197.pdf>.
5. R Core Team. R (2015): A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austrila. Dostupné z: <http://www.R-project.org/>.
6. SCIO, s. r. o. Hučín, J. (2013): *Analýza kotvicích položek pomocí shlukové analýzy* [osobní komunikace].
7. SCIO, s. r. o. (2012): *Testová Analýza Pomocí IRT v R*. © 2012

Kontaktní údaje

Ing. Lenka Fiřtová
Vysoká škola ekonomická v Praze
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
tel: 739 840 803
e-mail: lenka.firtova@vse.cz

TESTOVÁNÍ KOINTEGRACE V DYNAMICKÝCH PANELOVÝCH DATECH

PANEL DATA COINTEGRATION TEST

Lukáš Frýd

Abstrakt V práci je zkoumán kointegrační vztah mezi hospodářským růstem, peněžní zásobou, inflací a úrokovou mírou. Test je postaven na panelových datech, které vykazují robustnější výsledky než pro případ odhadu kointegračního vztahu jednotlivých zemích zvlášť. Na základě testů jednotkových kořenů a testu kointegrace určených pro panelová data, se dospělo k závěru, že mezi uvedenými proměnnými existuje kointegrační vztah.

Klíčová slova průřezová heterogenita, testy jednotkových kořenů, testy kointegrace, panelová data

Abstract

We test the relationship among of GDP, CPI, interest rate and money aggregate M2. The methodology is based on the panel data. We use panel data unit root tests and panel data cointegration test. The dynamic panel data are more robust than their univariate versions. We find that there are cointegration relationships.

Keywords: cross-section heterogeneity, dynamic panel data, panel data cointegration test.

1 Úvod

Cílem této práce je zjistit, zda-li existuje dlouhodobý vztah mezi hrubým domácím produktem, peněžním agregátem, cenovou hladinou a úrokovou mírou. Většina literatury řeší tento typ problému pomocí analýzy jednotlivých zemí. Určitým problémem je však nedostatečná datová základna, zejména pro země bývalého východního bloku, pro které máme data přibližně od roku 1990/1991, tedy pro roční pozorování přibližně 20-25 údajů. V tomto případě nemají klasické testy jednotkových kořenů a testů kointegrace vhodné asymptotické vlastnosti. Možnou alternativou je relativně nově se formující sekce ekonometrie, zabírající se makroekonomickými panelovými daty. Hlavní myšlenkou tak je, zvýšit počet pozorování tím, že datovou základnu rozšíříme o průřezová data. Tato práce by tak spíše než analýza dané závislosti měla představit některé možnosti, jak řešit uvedený problém. Jak již bylo řečeno, jedná se o relativně novou metodologii, kdy značná část modelů stále není dostatečně robustní k větší heterogenitě v datech.

2 Specifikace modelu a data

Základem této práce bude zkoumat vztah mezi hrubým domácím produktem v konstantních cenách roku 2010,¹ měnového agregátu M2, indexu CPI a depozitní úrokové míry. Všechny proměnné

¹sezónně očištěna

jsou v logaritmické podobě. Data byla pořízena pro osm zemí východního bloku. Konkrétně se jedná o Bulharsko, Českou Republiku, Estonsko, Maďarsko, Polsko, Slovinsko, Ukrajinu a Bělorusko a to pro období 1991 až 2014. Další země bývalého východního bloku nebyly zařazeny do výzkumu z důvodu nedostatečné datové základny. Panelová verze odhadovaného modelu má tvar:

$$\ln GDP_{it} = \delta_i + \alpha_i \ln M2_{it} + \beta_i \ln CPI_{it} + \gamma_i \ln r_{it} + \epsilon_{it} \quad (1)$$

Kde index i představuje konkrétní zemi a index t dané časové období. Parametr δ je tzv. fixní efekt, tedy určitá specifikace dané země a parametry α, β, γ jsou sklony pro konkrétní zemi i .

3 Metodologie

V této části si představíme hlavní ekonometrické nástroje použité pro analýzu rovnice (1). Popíšeme si použité testy jednotkových kořenů a test kointegrace.

3.1 Průřezová závislost

Teorie týkající se panelových dat vznikla zejména pro potřeby mikroekonomie. Z tohoto důvodu se příliš nepředpokládaly případné vazby mezi jednotlivými subjekty. Jelikož se v současnosti rozvíjejí panelové techniky i v makroekonomii, je důležité brát tento předpoklad v úvahu. Pro testování průřezové závislosti využijeme test navržený Pesaran(2004), jehož verze pro "unbalanced" data vypadá následovně:

$$CD = \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{\rho}_{ij} \quad (2)$$

kdy

$$\hat{\rho}_{ij} = \sum_{t=1}^T e_{it}e_{jt} / \left(\sum_{t=1}^T e_{it}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^T e_{jt}^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

kde e_{it} jsou residua získaná z panelové regrese pomocí fixed effect estimátoru pro rovnici (1).

Nulová hypotéza předpokládá, že mezi jednotkami neexistuje závislost a testová statistika pak má asymptotické normované normální rozdělení.

3.2 Testy jednotkových kořenů

Pro testování stacionarity časových řad využijeme dva testy, Maddala a Wu (1999) a Pesaran(2007). První ze zmíněných testů patří do tzv. skupiny první generace, kterou charakterizuje fakt, že nepředpokládá průřezovou závislost mezi proměnnými. V případě její existence pak mohou testy první generace podávat špatné výsledky Pesaran(2007). Problém s existencí průřezové závislosti řeší testy druhé generace, mezi které patří například zde uvedený test Pesaran(2007). Tento test je také robustní vůči strukturálním změnám, které mohou nastat zejména v makroekonomických časových řadách a zkreslit tak výsledky některých testů jednotkových kořenů.

Maddala a Wu (1999) test dovoluje heterogenitu v autoregresních koeficientech, neumožňuje však průřezovou závislost, jak již bylo řečeno. Test má chi-kvadrát rozdělení a předpokládá následující proces:

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + b_i y_{it-1} + c_i t + \sum_{j=1}^p d_{ij} \Delta y_{it-j} + \epsilon_{it} \quad (4)$$

Kde ϵ_{it} představuje náhodnou chybu. Nulová hypotéza má tvar $H_0 : b_i = 0, i = 1, \dots, N$ a alternativní hypotéza $H_1 : b_i < 0, i = 1, \dots, N; b_i = 0, i = 1, \dots, N$

V případě existence průřezové závislosti, je vhodnější použít testy druhé generace, které jsou vydatnější, než testy první generace Westerlund(2006). Pro případ rovnice (1), kdy chceme zahrnout i tzv. "commom correlated effect", využijeme commom correlated augmented Dickey-Fuller (CADF) test podle Pesaran(2007), který předpokládá proces:

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + b_i y_{it-1} + c_i t + \sum_{j=1}^p d_{ij} \Delta y_{it-j} + g_i \bar{z}_t + \epsilon_{it} \quad (5)$$

kde $\bar{z}_t = (\bar{y}_{t-j}, \Delta \bar{y}_{t-1}, \dots, \Delta \bar{y}_{t-p})$

CIPS statistika, která je aritmetický průměr t-statistik z OLS odhadu parametru b_i z rovnice 5

$$CIPS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{t}_i \quad (6)$$

kde \tilde{t}_i je t-statistika z OLS odhadu parametru b_i

3.3 Testy kointegrace

V případě, že shledáme proměnné integrované stejného řádu, je nutné jej testovat na existenci kointegračního vztahu, kdy v případě jeho existence jsme schopni odhadnout dlouhodobý vztah mezi kointegrovanými proměnnými. V této práci využijeme test kointegrace podle Pedroni(1999,2004). Budeme předpokládat následující proces:

$$\ln GDP_{it} = \delta_i + \Theta_i t + \alpha_i \ln M2_{it} + \beta_i \ln CPI_{it} + \gamma_i \ln r_{it} + \epsilon_{it} \quad (7)$$

Test předpokládá, že $\ln GDP_{it}$, $\ln M2_{it}$ a $\ln CPI_{it}$ a $\ln r_{it}$ jsou $I(1)$ procesy. Z rovnice lze vyčíst, že test umožňuje heterogenitu jak pro fixní efekt δ_i , tak pro případný lineární trend $\Theta_i t$. Tím pádem je možné aby byl kointegrační vektor různý pro jednotlivé země. Pedroniho test patří do skupiny tzv. residuálních testů, kdy residua z rovnice (7) jsou vstupem do dvou typů testových statistik, kterých je celkem sedm. První typem jsou tzv. panel, nebo také (within dimension) testy, celkem jsou čtyři. Druhým typem jsou group testy (between dimension), které jsou celkem tři. Toto rozdělení je dáno tím, jestli hledíme na data jako na panely a nebo jako na "pool" data. U všech sedmi statistik se předpokládá asymptotické normované normální rozdělení.

$$\text{Panel } v - \text{ statistika} : Z_v = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1} \quad (8)$$

$$\text{Panel } \rho - \text{ statistika} : Z_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} (\hat{e}_{it-1} \Delta \hat{e}_{it-1} - \hat{\lambda}_i) \quad (9)$$

$$\text{Panel } PP - \text{ statistika} : Z_{PP} = \left(\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} (\hat{e}_{it-1} \Delta \hat{e}_{it-1} - \hat{\lambda}_i) \quad (10)$$

$$\text{Panel } ADF - \text{ statistika} : Z_{ADF} = \left(\hat{s}^2 \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{L}_{11i}^{-2} \hat{e}_{it-1}^* \Delta \hat{e}_{it-1}^* \quad (11)$$

$$\text{Group } \rho - \text{ statistika} : Z_\rho = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1} \sum_{t=1}^T (\hat{e}_{it-1} \Delta \hat{e}_{it-1} - \hat{\lambda}_i) \quad (12)$$

$$\text{Group } PP - \text{ statistika} : Z_{PP} = \sum_{i=1}^N \left(\hat{\sigma}^2 \sum_{t=1}^T \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1/2} \sum_{t=1}^T (\hat{e}_{it-1} \Delta \hat{e}_{it-1} - \hat{\lambda}_i) \quad (13)$$

$$\text{Group } ADF - \text{ statistika} : Z_{ADF} = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \hat{s}^2 \hat{e}_{it-1}^2 \right)^{-1/2} \sum_{t=1}^T \hat{e}_{it-1}^* \Delta \hat{e}_{it-1}^* \quad (14)$$

kde \hat{e}_{it} jsou rezidua získaná z rovnice 7, \hat{L}_{11i}^{-2} je kovarianční matice pro $\hat{\Delta}e_{it}$. Zbylé proměnné jsou popsány v Pedroni(1999). Cílem panelových statistik je testovat hypotézu $H_0 : \hat{\rho}_i = 1$ pro všechna i proti alternativní hypotéze $H_1 : \hat{\rho}_i < 1$ pro všechna i a cílem group statistik je testovat $H_0 : \hat{\rho}_i = 1$ proti $H_1 : \hat{\rho}_i = \hat{\rho} < 1$ pro všechna i .

4 Empirická část

4.1 Průřezová závislost

Než přejdeme k testování vlastností časových řad, je třeba nejprve určit, zda-li neexistuje mezi jednotlivými jednotkami, zde zeměmi, prostorová závislost. Její případná existence má následně dopad na zvolení vhodných testů, zejména pak testů jednotkových kořenů.

Výsledky testů jsou zobrazeny v tabulce 1, kde CD_P představuje hodnotu testové statistiky. Můžeme vidět, že pro HDP a úrokovou míru, můžeme zamítnout nulovou hypotézu o neexistenci prostorové závislosti na hladině významnosti menší jak 1%. V případě měnového agregátu, můžeme zamítnout nulovou hypotézu na hladině významnosti menší jak 10% a v případě indexu CPI na hladině menší jak 5%. U všech proměnných tak zamítneme nulovou hypotézu a v případě měnového agregátu, budeme brát určitý zřetel na to, že možnost dopuštění se chyby druhého druhu je vyšší.

Tabulka 1: Cross-section dependence

Závislá proměnná	CD_P	p -hodnota
$\ln GDP$	4.997	0.000
$\ln M2$	1.681	0.0927
$\ln CPI$	2.155	0.0311
$\ln r$	3.398	0.000

4.2 Panel unit root test

Druhým krokem v analýze je určit, zda-li se jedná o stacionární časové řady, jelikož případná aplikace regrese na nestacionární časové řady by mohla vést k tzv. problému zdánlivé regrese. My zde využijeme dva typy panelových testů. Test první generace podle Maddala a Wu(1999) a test druhé generace podle Pesaran (2007). Pro oba typy testů jsme testovali jak možnost existence deterministického trendu, tak možnost bez trendu. Stejně tak jsme zahrnuli případnou autokorelaci do řádu tři.

Z analýzy ohledně prostorové závislosti, se zaměříme zejména na test podle Pesaran(2007), který má v tomto případě vyšší sílu. V tabulce 2 jsou zobrazeny výsledky uvedeného testu, kdy nulová hypotéza předpokládá nestacionární časovou řadu. Hvězdičky uvedené v tabulce pak představují hladinu významnosti, na jaké můžeme nulovou hypotézu zamítnout.¹

Stejná metodika platí i pro test podle Maddala a Wu (1999) tabulka 3, který v tomto případě díky prostorové závislosti má menší sílu, případně může vést ke špatným závěrům Westerlund(2006). V našem případě se v tomto testu můžeme zaměřit na měnový agregát, u kterého bylo zamítnutí nulové hypotézy pro prostorovou závislost na vyšší hladině významnosti.

V uvedené analýze, nejsou závěry o stacionaritě zcela jasné. Z tohto důvodu je třeba udělat stejné testy, tentokrát pro první diference daných proměnných a zkoumat jejich stacionaritu. Výsledky obou testů, tentokrát však pouze pro zpoždění jedna, jsou uvedeny v tabulce 4 a 5. Zde již vidíme, že pro první diference, můžeme zamítnout nulovou hypotézu a přijmout alternativní o stacionaritě daných časových řad. Přestože výsledky v tabulkách 2 a 3, nebyly jednoznačné, díky ověření stacionarity prvních diferencí, můžeme uvedené časové řady považovat za procesy integrovaného řádu jedna. Podobně postupoval například Nazlioglu, Soytas (2012).

¹*** - menší jak 1% ** - menší jak 5% * - menší jak 10%

Tabulka 2: Pesaran (2007) CIPS Test

Konstanta				
Proměnná	<i>lag0</i>	<i>lag1</i>	<i>lag2</i>	<i>lag3</i>
$\ln GDP$	3.157	0.635	0.839	-1.628*
$\ln M2$	-2.506 ***	-0.013	-1.375	-1.927**
$\ln CPI$	-1.675*	-1.708**	-2.297**	-0.740
$\ln r$	0.485	-0.955	-0.285	-0.826
Trend				
$\ln GDP$	4.023	2.495	1.357	0.251
$\ln M2$	-0.825	1.494	0.685	2.013
$\ln CPI$	-2.201***	-1.300	-2.021**	3.072
$\ln r$	1.374	-0.116	1.103	2.051

Tabulka 3: Maddala and Wu (1999) Panel Unit Root test

Konstanta				
Proměnná	<i>lag0</i>	<i>lag1</i>	<i>lag2</i>	<i>lag3</i>
$\ln GDP$	7.574	12.121	9.892	10.514
$\ln M2$	130.599 ***	18.357	23.844	21.811
$\ln CPI$	257.911***	37.764 ***	38.611 ***	39.695 ***
$\ln r$	10.218	42.03***	20.240	12.355
Trend				
$\ln GDP$	25.839 *	36.054***	25.258**	17.349
$\ln M2$	108.442***	13.175	10.414	21.993
$\ln CPI$	188.02***	38.079***	79.957***	50.853***
$\ln r$	8.647	28.933**	14.810	16.490

Tabulka 4: Pesaran (2007) CIPS Test

lags	$\Delta \ln GDP$	$\Delta \ln M2$	$\Delta \ln CPI$	$\Delta \ln r$
0	-2.354**	-6.943***	-9.154***	-8.165***
1	3.982***	-4.035***	-6.501***	-7.036***

4.3 Kointegrace

Jelikož jsme zjistili nestacionární časové řady, je třeba ověřit, zda-li mezi nimi neexistuje kointegrační vztah. Jak jsme již uvedli, aplikace regresní analýzy na nestacionární časové řady, může

Tabulka 5: Maddala and Wu (1999) Panel Unit Root test

lags	$\Delta \ln GDP$	$\Delta \ln M2$	$\Delta \ln CPI$	$\Delta \ln r$
0	70.107***	87.396***	207.585***	122.260***
1	42.133***	94.130***	157.874***	283.575***

vést ke zdánlivé regresi. Na druhou stranu, pokud budeme zkoumat nestacionární časové řady, re-spektive jejich difference, tak v případě existence kointegračního vztahu ztrácíme cenné informace o jejich dlouhodobém chování.

Jako test kointegrace jsme si vybrali panelový test podle Pedroni(1999,2004), který umožňuje flexibilitu pro parametry jednotlivých zemí. Test jsme provedli jak pro případ existence trendové složky, tak bez ní. Výsledky jsou zobrazeny v tabulce 6 a 7, kdy pro nulovou hypotézu platí, že mezi časovými řadami neexistuje kointegrační vztah a testové kritérium má při platnosti H_0 normované normální rozdělení.

Pro obě tabulky platí, že hodnoty většiny testových statistik podporují zamítnutí nulové hypotézy. Jelikož máme krátké časové řady, tak podle Pedroni(2004), v tomto případě vykazují nejlepší vlastnosti statistiky Panel ADF a Group ADF. V obou případech můžeme zamítnout nulovou hypotézu a přijmout alternativní, že mezi danými proměnnými panuje dlouhodobý vztah.

Tabulka 6: Pedroni panel cointegration test bez trendu

Panel weighted statistics	
Panel v -statistic	1.589*
Panel ρ -statistic	-1.479*
Panel PP -statistic	-2.977**
Panel ADF -statistic	-3.123***
Group statistics	
Group ρ -statistic	-0.8332
Group PP -statistic	-3.295***
Group ADF -statistic	-3.946***

Tabulka 7: Pedroni panel cointegration test trend

Panel weighted statistics	
Panel v -statistic	2.83***
Panel ρ -statistic	-1.123
Panel PP -statistic	-3.971***
Panel ADF -statistic	-4.222***
Group statistics	
Group ρ -statistic	0.682
Group PP -statistic	-2.481***
Group ADF -statistic	-2.784***

5 Závěr

V této práci jsme se zabírali hypotézou, které proměnné mají dlouhodobý vliv na hospodářský růst. Podařilo se nám zjistit, že mezi hospodářským růstem, který jsme aproximovali pomocí HDP, existuje kointegrační vztah s úrokovou mírou, indexem spotřebitelských cen a měnovým agregátem.

Reference

- [1] Engle, R.F., Granger, C.W.J. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica* 55, 251–276.

- [2] Eberhardt, M., & Teal, F. (2010). *Productivity Analysis in Global Manufacturing Production*. (Oxford University, Department of Economics Discussion Paper Series #515)

- [3] Eberhardt, M., & Teal, F. (2011). Econometrics for Grumblers: A New Look at the Literature on Cross-Country Growth Empirics. *Journal of Economic Surveys*, 25(1), 109-155.

- [4] Fisher, Irving (1930). *The Theory of interest*. Philadelphia: Porcupine Press. ISBN 0-87991-864-0

- [5] Granger, C. W. J. (1988) Some Recent Developments in a Concept of Causality. *Journal of Econometrics* 39: 199-211.

- [6] Hansen, B., (1992). Tests for parameter instability in regressions with I(1) processes. *Journal of Business and Economics Statistics* 10, 321–335.

- [7] Pedroni, P. (1999). Critical values for cointegration tests in heterogeneous panels with multiple regressors. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 61, 653–670.

- [8] Pedroni, P. (2001). Purchasing power parity tests in cointegrated panels. *Rev. Econ. Stat.* 83, 727–731.

- [9] Pedroni, P. (2004). Panel cointegration; asymptotic and finite sample properties of pooled time series tests with an application to the purchasing power parity hypothesis. *Economet. Theor.* 20, 597–625.

- [10] Pesaran, M.H., Shin, Y., Smith, R.J. (2001). Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *Journal of Applied Econometrics* 16, 289–326.

- [11] Pesaran, M.H., Shin, Y., Smith, R. (1999). Pooled mean group estimation of dynamic heterogeneous panels. *Journal of the American Statistical Association* 94, 621–634

- [12] Pesaran, M.H. (2006). Estimation and inference in large heterogeneous panels with a multifactor error structure. *Econometrica* 74, 967–1012.
- [13] Pesaran, M.H. (2007). A simple panel unit root test in the presence of cross-section dependence. *Journal of Applied Econometrics* 22, 265–312.
- [14] Pesaran, M.H., (2012). On the interpretations of panel unit root tests. *Econ. Lett.* 116, 545–546.
- [15] Pesaran, H.M., Ullah, A., Yamagata, T. (2008). A bias-adjusted LM test of error cross section independence. *J. Econometrics* 11, 105–127.
- [16] Pesaran, M. H., Smith, V., & Yamagata, T. (2009). Panel unit root tests in the presence of a multifactor error structure. (Cambridge University, unpublished working paper, September)
- [17] Westerlund, J., (2006). Testing for panel cointegration with multiple structural breaks. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 68, 101–132.
- [18] Westerlund, J., (2008). Panel cointegration tests of the Fisher hypothesis. *J. Appl. Econ.* 23, 193–233.
- [19] Westerlund, J. (2007). Testing for Error Correction in Panel Data. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 69(6), 709-748.

Kontakné údaje

Ing. Lukáš Frýd

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4 130 67 Praha 3

email: lukas.fryd@gmail.com

PŘÍTOMNOST MIKROSTRUKTURNÍHO ŠUMU VE VYSOKOFREKVENČNÍCH KURZECH CIZÍCH MĚN: EMPIRICKÁ STUDIE

PRESENCE OF MICROSTRUCTURE NOISE IN HIGH-FREQUENCY FX RATES: EMPIRICAL STUDY

Mgr. Vladimír Holý

Abstrakt

Ceny finančních aktiv jsou při vyšších frekvencích pozorování často kontaminovány tzv. mikrostrukturním šumem. To může být způsobeno diskretností pozorovaných cen, bid-ask spreadem a dalšími efekty. Tento šum pak může značně vychýlit odhad rozptylu. Cílem práce bude analyzovat časové řady kurzů několika párů cizích měn. Empirická studie bude pomocí statistických testů popsaných v literatuře zjišťovat při jakých frekvencích se šum v datech vyskytuje.

Klíčová slova: Mikrostrukturní šum, Realizovaná volatilita, Měnový trh

Abstract

Financial asset prices are at the higher frequencies of observations often contaminated by microstructure noise. This may be caused by the discreteness of observed prices, bid-ask spread and other effects. This noise can greatly bias variance estimation. The goal of this paper is to analyze time series of exchange rates of several foreign currency pairs. Empirical study will use statistical tests described in the literature to determine at what frequencies the noise in the data occurs.

Keywords: Microstructure Noise, Realized Volatility, Foreign Exchange Market

1 ÚVOD

Dostupnost vysokofrekvenčních dat nabízí nové možnosti a výzvy v odhadu rozptylu časových řad. Používání vyšších frekvencí přináší více informací, ale v datech se pak objevuje tzv. mikrostrukturní šum (v angličtině „market microstructure noise“). Tento šum je způsoben zakrouhlováním cen, bid-ask spreadem a celkovou diskretní povahou transakcí a může velmi výrazně ovlivnit odhady rozptylu. V tomto článku se pokusíme zjistit při jakých frekvencích pozorování je tento šum přítomen v časových řadách kurzů několika párů cizích měn.

2 TEORETICKÉ ZÁKLADY

Nechť X_t je jednorozměrný proces logaritmičkových cen a předpokládejme, že se jedná o spojitý semimartingal se skoky

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{J_t} c_i, \quad (1)$$

kde μ_s je drift, σ_s je càglàg volatility proces a W_s značí Wienerův proces. Skoková komponenta je tvořena součtem nenulových stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin c_i , které jsou nezávislé na J_t . Proces X_t se nazývá efektivní cena. Místo X_t ovšem ve skutečnosti pozorujeme nějaký diskretní proces Y_t s výše zmíněným mikrostrukturním šumem. Předpokládejme,

že máme k dispozici n rovnoměrně rozmístěných pozorování s frekvencí f . Pozorování jsou tedy v časech $i \cdot f$, pro $i = 1, \dots, n$. Pozorovaný proces lze potom definovat jako

$$Y_i^f = X_{i \cdot f} + \varepsilon_i^f, \quad (2)$$

kde ε_i^f je mikrostrukturní šum. Předpokládejme, že ε_i^f jsou nezávislé na procesu X_t a mají následující strukturu

$$\varepsilon_i^f = \alpha_f \chi_{i \cdot f}, \quad (3)$$

kde $\chi_{i \cdot f}$ je bílý šum. V literatuře je toto nejběžnější situace, jak je uvedeno v knize [3]. V empirické studii se mimo jiné budeme zabývat otázkou, zda je parametr α_f závislý na frekvenci f nebo ne.

2.1 Výpočet realizované volatility

Jeden z nejvíce studovaných aspektů analýzy vysokofrekvenčních dat je odhad integrované variance. Ta je pro nějaký náhodný proces cen X_t definovaná jako

$$IV(0, t) = \int_0^t \sigma_\tau^2 d\tau. \quad (4)$$

Integrovaná variance může být odhadnuta pomocí tzv. realizované volatility definované jako

$$RV_n = \sum_{i=1}^n \left(Y_i - Y_{i-1} \right)^2, \quad (5)$$

kde n je počet pozorování pro danou frekvenci f . Realizovaná volatility ale konverguje k integrované volatilitě pouze za předpokladu, že proces X_t je spojitý semimartingal a nesmí tedy obsahovat komponentu skoků $\sum_{i=1}^n c_i$. Přítomnost šumu v pozorovaném procesu Y_i^f navíc způsobí vychýlení odhadu realizované volatility.

V článku [5] byl navržen odhad integrované volatility, který je konzistentní a robustní k přítomnosti skoků v procesu. Realizovaná tripower variation je definovaná jako

$$TV_n = \xi_{\frac{2}{3}}^{-3} \sum_{i=1}^{n-2} \left| Y_{i+2} - Y_{i+1} \right|^{\frac{2}{3}} \left| Y_{i+1} - Y_i \right|^{\frac{2}{3}} \left| Y_i - Y_{i-1} \right|^{\frac{2}{3}}, \quad (6)$$

kde

$$\xi_k = 2^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(k+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \quad (7)$$

Stejně jako u realizované volatility je i tento odhad v případě přítomnosti šumu vychýlený.

2.2 Testování přítomnosti šumu

Článek [2] navrhuje, jak testovat přítomnost šumu pomocí realizované volatility a v případě skoků v pozorovaném procesu pomocí realizované tripower variation. Nulová hypotéza testu je definovaná jako

$$H_0 : E\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right)^2 = 0 \quad (8)$$

a alternativní hypotéza jako

$$H_1 : E\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right)^2 > 0, \quad (9)$$

kde ε_t je definováno jako ve vzorci (3). Oba testy vychází z porovnání dvou odhadů integrované variance vypočtených při frekvencích f a f_S , tedy při počtech pozorování n a n_S . První test je založen na statistice

$$Z_{n,n_S} = \frac{\sqrt{n_S}(RV_n - RV_{n_S})}{\sqrt{2RQ_{n_S}}}, \quad (10)$$

kde RQ_{n_S} je realizovaná kvartacita definovaná jako

$$RQ_{n_S} = \frac{1}{3}n_S \sum_{i=1}^{n_S} (Y_i - Y_{i-1})^4. \quad (11)$$

Za platnosti nulové hypotézy konvergují RV_n a RV_{n_S} k integrované volatilitě. Pro $n, n_S \rightarrow \infty$ a $\frac{n_S}{n} \rightarrow 0$ pak statistika Z_{n,n_S} konverguje k normovanému normálnímu rozdělení. Za platnosti alternativní hypotézy tato statistika diverguje.

Druhý test, který je robustní ke skokům, je založený na statistice

$$ZT_{n,n_S} = \frac{\sqrt{n_S}(TV_n - TV_{n_t})}{\sqrt{\gamma QV_{n_S}}}, \quad (12)$$

kde QV_{n_S} je realizovaná quadpower variation definovaná jako

$$QV_{n_S} = \xi_1^{-4} n_S \sum_{i=1}^{n_S-3} \left| Y_{i+3} - Y_{i+2} \right| \left| Y_{i+2} - Y_{i+1} \right| \left| Y_{i+1} - Y_i \right| \left| Y_i - Y_{i-1} \right| \quad (13)$$

a

$$\gamma = \frac{\xi_{\frac{4}{3}}^3 - 5\xi_{\frac{2}{3}}^6 + 2\xi_{\frac{2}{3}}^2 \xi_{\frac{4}{3}}^2 + 2\xi_{\frac{2}{3}}^4 \xi_{\frac{4}{3}}}{\xi_{\frac{2}{3}}^6}. \quad (14)$$

Za platnosti nulové hypotézy konvergují TV_n a TV_{n_t} k integrované volatilitě. Pro $n, n_S \rightarrow \infty$ a $\frac{n_S}{n} \rightarrow 0$ pak statistika ZT_{n,n_S} konverguje k normovanému normálnímu rozdělení. Za platnosti alternativní hypotézy tato statistika diverguje.

3 ANALÝZA DAT

K dispozici máme ticková data 27 párů kurzů cizích měn (7 hlavních párů, 10 vedlejších párů a 10 exotických párů) za roky 2011 až 2014. Data obsahují pouze bid ceny $P_{i,t}^B$ a ask ceny $P_{i,t}^A$, kde index i označuje konkrétní měnový pár a index t značí čas. Nemáme tedy žádnou informaci o samotných transakcích. Podobně jako v [7] si nejdříve spočteme tzv. mid ceny $P_{i,t}^M$ jako průměr bid a ask cen

$$P_{i,t}^M = \frac{P_{i,t}^B + P_{i,t}^A}{2} \quad (15)$$

a dále si vypočteme jejich logaritmické výnosy

$$R_{i,t}^M = \log \frac{P_{i,t}^M}{P_{i,t-1}^M}, \quad (16)$$

kteřé budeme ve zbytku článku analyzovat.

3.1 Likvidita

Nejdříve se pokusíme posoudit likviditu jednotlivých měnových párů. Podobně jako v [7] budeme likviditu měřit pomocí logaritmického spreadu

$$LS_{i,t} = \log \frac{P_{i,t}^A}{P_{i,t}^B}. \quad (17)$$

Tabulka 1 obsahuje pro každý pár počet ticků za minutu a vážený průměr logaritmických spreadů (váhami jsou doby, po jaké bid a ask ceny platily). Žádnou výraznou závislost logaritmických spreadů na počtu ticků za minutu se nepodařilo prokázat. Např. pár EUR/USD s velkým počtem ticků má srovnatelný logaritmický spread jako pár EUR/CZK, který má v našem vzorku měnových párů nejmenší počet ticků za minutu. Velikost spreadu zřejmě ani není ovlivněna zařazením páru mezi hlavní páry (které jsou obecně nejčastěji obchodované), vedlejší páry nebo exotické páry (které jsou obecně méně častěji obchodovány).

Tabulka 1: Přehled měnových párů a jejich základních statistik.

klasifikace	měnový pár	ticků/min.	log spread
hlavní páry	EUR/USD	31.04	$1.45 \cdot 10^{-4}$
	USD/JPY	23.52	$2.52 \cdot 10^{-4}$
	GBP/USD	31.53	$2.01 \cdot 10^{-4}$
	USD/CAD	20.43	$3.11 \cdot 10^{-4}$
	USD/CHF	28.53	$3.51 \cdot 10^{-4}$
	AUD/USD	29.10	$2.52 \cdot 10^{-4}$
	NZD/USD	23.19	$4.04 \cdot 10^{-4}$
vedlejší páry	EUR/GBP	23.21	$2.97 \cdot 10^{-4}$
	EUR/CHF	15.79	$1.54 \cdot 10^{-4}$
	EUR/CAD	34.12	$4.10 \cdot 10^{-4}$
	EUR/AUD	40.02	$3.97 \cdot 10^{-4}$
	EUR/NZD	30.13	$5.72 \cdot 10^{-4}$
	EUR/JPY	41.26	$2.43 \cdot 10^{-4}$
	GBP/JPY	37.92	$3.86 \cdot 10^{-4}$
	CHF/JPY	31.41	$4.00 \cdot 10^{-4}$
	GBP/CHF	30.35	$4.58 \cdot 10^{-4}$
	GBP/AUD	35.24	$4.56 \cdot 10^{-4}$
exotické páry	EUR/CZK	2.78	$1.48 \cdot 10^{-4}$
	USD/CZK	18.11	$4.47 \cdot 10^{-4}$
	EUR/PLN	6.93	$5.17 \cdot 10^{-4}$
	USD/PLN	22.73	$7.31 \cdot 10^{-4}$
	EUR/SEK	14.50	$4.34 \cdot 10^{-4}$
	USD/SEK	31.98	$4.90 \cdot 10^{-4}$
	EUR/NOK	13.31	$5.08 \cdot 10^{-4}$
	USD/NOK	30.62	$5.76 \cdot 10^{-4}$
	EUR/HUF	5.31	$6.73 \cdot 10^{-4}$
USD/HUF	18.88	$8.66 \cdot 10^{-4}$	

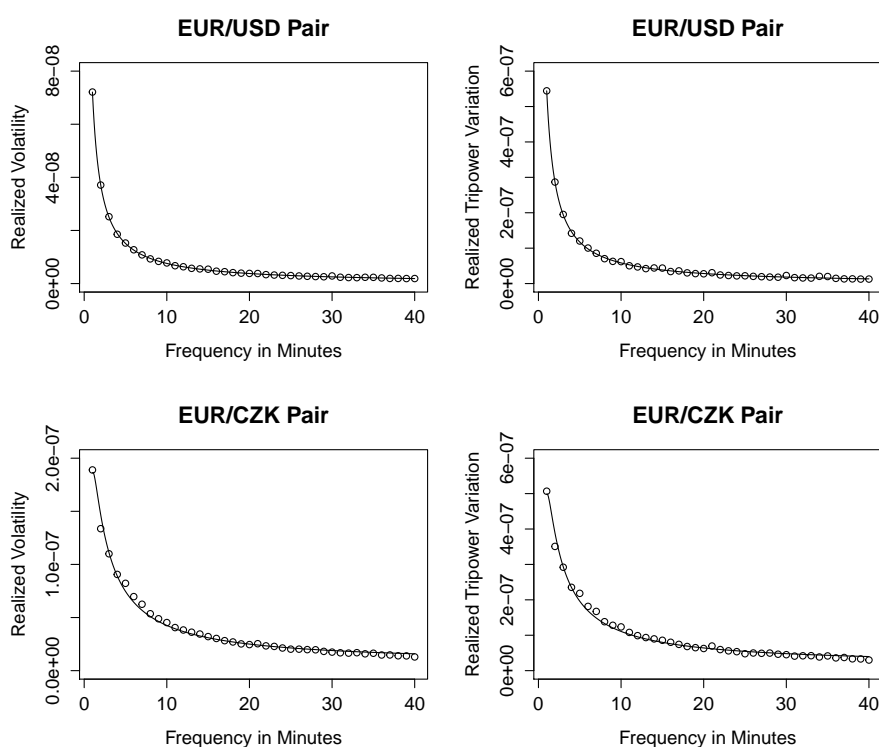
3.2 Vlastnosti šumu v odhadech integrované variance

V této části a ve zbytku článku již nebudeme pracovat s tickovými pozorováními, která jsou nerovnoměrně rozložená. Místo nich si tato data agregujeme tak, abychom dostali rovnoměrně rozložená pozorování s danou frekvencí (např. 20 minut). Toho docílíme tak, že za dané rovnoměrně rozložené pozorování zvolíme poslední (uplnyulé a nejbližší) tickové pozorování. Nyní se omezíme pouze na páry EUR/USD a EUR/CZK. Pro oba páry si spočteme denní realizované volatility a realizované tripower variation pro různé frekvence pozorování. Pokusíme se odhalit vztah mezi frekvencí pozorování f a velikostí odhadů. Do obrázku 1 jsme zanesli průměrnou hodnotu realizované volatility a realizované tripower variation přes všechny pozorované dny v závislosti na intradenní frekvenci pozorování. Z tohoto obrázku je jasné vidět, že při vyšších frekvencích pozorování je hodnota odhadů vychýlena. Průměrné hodnoty odhadů jsme ještě proložili křivkou

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{1}{f} + \hat{\beta}_2 \frac{1}{f^2}. \quad (18)$$

Z obrázku 1 je vidět, že tato křivka dobře postihuje chování šumu realizované volatility i realizované tripower variation pro oba páry, což nám naznačuje, že celkový šum v odhadech je kvadraticky závislý na počtu pozorování, tedy že parametr α_f ze vzorce (3) je lineárně závislý na počtu pozorování n .

Obrázek 1: Odhady realizované volatility (levý sloupec) a realizované tripower variation (pravý sloupec) vypočtené při různých frekvencích.



3.3 Přítomnost šumu v datech

Nyní spočteme pro všechny páry jejich denní realizované volatility a realizované tripower variation a pomocí testu založeného na statistice Z_{n,n_S} a testu založeného na robustní statistice

ZT_{n,n_S} zjistíme, zda je v konkrétních intradenních frekvencích pozorování šum přítomný nebo ne. Jako srovnávací frekvenci f_S stejně jako v [2] zvolíme 20 min, což je frekvence, u které se dá předpokládat minimální vliv šumu (to nám ostatně naznačuje i obrázek 1). Do tabulky 2 zaneseme procento dnů, ve kterých se testy založené na statistikách Z_{n,n_S} a ZT_{n,n_S} nezamítly pro zkoumané frekvence 1, 2, 5, 10 a 15 minut. Vidíme, že procenta nezamítnutí testu se pro jednotlivé páry příliš neliší (snad jen v exotických párech je mikrostrukturní šum o něco menší). Výsledky nám také ukazují, že v odhadech při frekvencích 1, 2, 5 a 10 minut je šum silně přítomný. U frekvence 15 minut je pak šum ve většině dnů neprokazatelný.

Tabulka 2: Testy přítomnosti šumu pro různé frekvence f a při srovnávací frekvenci $f_S = 20$.

pár\frekvence	% nezamítnutí testu Z_{n,n_S}					% nezamítnutí testu ZT_{n,n_S}				
	1	2	5	10	15	1	2	5	10	15
EUR/USD	0.0	0.2	0.9	9.7	48.1	0.1	0.2	2.1	20.8	67.6
USD/JPY	0.0	0.0	0.7	6.7	46.3	0.0	0.0	1.1	14.5	65.2
GBP/USD	0.0	0.2	1.0	9.1	43.5	0.1	0.4	2.3	17.6	62.0
USD/CAD	0.1	0.2	0.9	6.6	47.2	0.2	0.4	1.3	15.2	68.0
USD/CHF	0.0	0.0	0.4	8.0	46.5	0.0	0.2	1.0	16.0	65.2
AUD/USD	0.0	0.3	1.3	6.3	44.7	0.2	0.3	1.1	13.1	64.5
NZD/USD	0.1	0.2	0.7	9.1	49.8	0.1	0.2	1.3	16.7	67.0
EUR/GBP	0.0	0.1	0.4	4.9	40.2	0.0	0.1	1.0	12.8	63.0
EUR/CHF	0.0	0.0	0.8	6.0	44.0	0.0	0.1	0.8	10.0	63.8
EUR/CAD	0.1	0.2	0.6	9.3	46.4	0.1	0.3	1.7	17.5	64.1
EUR/AUD	0.2	0.3	1.1	9.1	47.2	0.2	0.3	1.5	17.1	64.2
EUR/NZD	0.0	0.3	1.2	7.7	50.7	0.1	0.2	1.3	15.7	64.3
EUR/JPY	0.1	0.2	1.0	7.0	46.0	0.1	0.3	1.1	16.4	64.8
GBP/JPY	0.1	0.1	0.7	7.2	44.4	0.1	0.2	1.3	16.3	62.9
CHF/JPY	0.0	0.0	0.4	4.8	44.8	0.0	0.2	0.5	10.9	62.6
GBP/CHF	0.0	0.0	0.6	7.4	43.0	0.0	0.1	1.0	13.6	61.1
GBP/AUD	0.1	0.2	1.4	7.1	45.1	0.1	0.5	1.4	13.5	61.7
EUR/CZK	0.3	0.9	2.9	27.4	59.2	0.6	1.4	5.3	37.9	69.7
USD/CZK	0.0	0.7	2.4	13.1	48.9	0.4	1.1	3.1	23.5	63.0
EUR/PLN	1.4	3.1	9.1	30.3	60.3	2.0	3.9	10.8	38.9	71.0
USD/PLN	1.1	1.7	5.0	20.8	51.4	1.3	2.5	6.6	31.0	65.2
EUR/SEK	0.4	1.4	6.2	30.3	54.6	0.9	1.5	8.2	37.7	62.5
USD/SEK	0.3	0.7	4.1	21.3	51.7	0.2	0.9	5.3	30.3	63.4
EUR/NOK	0.4	1.3	5.0	33.5	57.7	0.7	1.5	7.5	39.3	64.8
USD/NOK	0.2	0.4	2.7	20.5	49.0	0.3	0.8	4.3	31.5	61.7
EUR/HUF	0.4	0.7	4.5	26.5	60.5	0.4	1.0	5.7	36.0	68.4
USD/HUF	0.5	1.1	3.5	19.2	54.1	0.7	1.5	5.2	32.5	69.6

4 ZÁVĚR

V empirické studii jsme pomocí statistických testů zjistili, že v kurzech několika párů cizích měn je mikrostrukturní šum výrazně přítomen až do frekvence 10 minut. Odborná literatura doporučuje používat vysoké frekvence, např. článek [1] doporučuje frekvenci 5 minut a článek [4]

nejvyšší frekvenci, která je v datech k dispozici. Při používání vysokých frekvencí je tedy třeba s mikrostrukturním šumem počítat a místo realizované volatility pak použít nějakou alternativu robustní k tomuto šumu. Těmto metodám je věnována velká část vysokofrekvenční literatury (např. [4], [6] nebo [8]).

Použití lineární regrese dále naznačuje, že celkový šum v odhadech realizované volatility je kvadraticky závislý na počtu pozorování, což nesplňuje předpoklady části metod robustních k mikrostrukturnímu šumu. Budoucí výzkum se zaměří na použití korektnějších a podrobnějších metod zkoumání závislosti mikrostrukturního šumu na frekvenci pozorování.

Poděkování

Tento článek byl napsán v rámci grantu IG403024 Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

- [1] ANDERSEN, T. G., BOLLERSLEV, T., DIEBOLD, F. X. a LABYS, P. (2001). The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association*, **96**(453), 42–55. ISSN 0162-1459.
- [2] AWARTANI, B., CORRADI, V. a DISTASO, W. (2009). Assessing Market Microstructure Effects via Realized Volatility Measures with an Application to the Dow Jones Industrial Average Stocks. *Journal of Business & Economic Statistics*, **27**(2), 251–265. ISSN 0735-0015.
- [3] AÏT-SAHALIA, Y. a JACOD, J. (2014). *High-Frequency Financial Econometrics*. Princeton University Press. ISBN 978-1-4008-5032-7.
- [4] AÏT-SAHALIA, Y., MYKLAND, P. A. a ZHANG, L. (2005). How Often to Sample a Continuous-Time Process in the Presence of Market Microstructure Noise. *The Review of Financial Studies*, **18**(2), 351–416. ISSN 0893-9454.
- [5] BARNDORFF-NIELSEN, O. E. a SHEPHARD, N. (2004). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, **2**(1), 1–37. ISSN 1479-8409, 1479-8417.
- [6] BARNDORFF-NIELSEN, O. E., HANSEN, P. R., LUNDE, A. a SHEPHARD, N. (2008). Designing Realized Kernels to Measure the ex post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise. *Econometrica*, **76**(6), 1481–1536. ISSN 1468-0262.
- [7] HASBROUCK, J. a SEPPI, D. J. (2001). Common Factors in Prices, Order Flows, and Liquidity. *Journal of Financial Economics*, **59**(3), 383–411. ISSN 0304-405X.
- [8] JACOD, J., LI, Y., MYKLAND, P. A., PODOLSKIJ, M. a VETTER, M. (2009). Microstructure Noise in the Continuous Case: The Pre-Averaging Approach. *Stochastic Processes and their Applications*, **119**(7), 2249–2276. ISSN 0304-4149.

Kontaktní údaje

Ing. Tomáš Novák, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 267 295 824

email: novak@euba.sk

MODELOVANIE SPOLUPRÁCE FIRIEM V INOVAČNOM PROCESE

MODELING OF COOPERATION OF FIRMS IN INNOVATION PROCESS

*Milan Horniaček**

Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme možnosťami modelovania spolupráce podnikov pôsobiacich na oligopolných trhoch v inovačnom procese. Pod „inovačným procesom“ tu rozumieme podnikový výskum a vývoj aj následný predaj inovovaných výrobkov (alebo výrobkov vyrobených s použitím technologickej inovácie) na trhu a (v prípade inovovaných vstupov) ich použitie v ďalšej výrobe. Zameriavame sa na modely v tvare (deterministických aj stochastických) dynamických nekooperatívnych hier s nekonečným časovým horizontom a diskontovaním budúcich platieb. Konceptom rovnováhy v nich je (ostrá) silná dokonalá rovnováha. Táto požaduje, aby žiadna koalícia v žiadnej vlastnej podriadenej hre nemohla (slabo) ostro paretoovsky zlepšiť vektor platieb svojich členov. Analyzujeme modely dvoch prepojených oligopolných trhov aj modely všeobecnej ekonomickej rovnováhy.

Kľúčové slová: *dynamické nekooperatívne hry, inovačný proces, oligopol, silná dokonalá rovnováha, všeobecná ekonomická rovnováha.*

Abstract

In the present paper, we deal with possibilities of modeling of cooperation of firms acting in oligopolistic markets in innovation process. Here we understand “innovation process” as firm-level research and development and subsequent sale of innovated products (or products produced using a technological innovation) in the market and (in the case of innovated inputs) their use in subsequent production. We concentrate on models in the form of (deterministic as well as stochastic) dynamic non-cooperative games with infinite time horizon and discounting of future payoffs. A (strict) strong perfect equilibrium is the solution concept in them. It requires that no coalition in no proper subgame can (weakly) strictly Pareto improve the vector of payoffs of its members. We analyze models of two linked oligopolistic markets as well as models of general equilibrium.

Keywords: *dynamic non-cooperative games, innovation process, oligopoly, strong perfect equilibrium, general equilibrium.*

1 ÚVOD

Inovácie sú jedným z hlavných motorov rozvoja ekonomiky. Vyplýva to nielen z poznatkov o význame inovácií pre hospodársky rast (ktoré prinášala ekonomická teória už od čias J. A. Schumpetera – [13]), ale aj z novších prác (napr. [1]). Vzhľadom na vzrastajúcu finančnú náročnosť firemného výskumu a vývoja rastie aj význam spolupráce firiem v inovačnom procese. Táto zahŕňa nielen výskum a vývoj, ale aj predaj inovovaných výrobkov na trhu a výrobu s použitím inovovaných vstupov.

* Výskum, výsledkami ktorého sa zaoberá tento príspevok, bol finančne podporovaný z grantu APVV-14-0020.

Literatúra z oblasti ekonomickej analýzy inovačného procesu sa však zatiaľ sústreďuje len na spoluprácu firiem vo výskume a vývoji (napr. [3]). Nezaobrá sa (s výnimkou prác L. Šimkovej a spoločných prác M. Horniacka a L. Šimkovej – [17], [15], [16], [7], [14]) spoluprácou firiem na trhu inovovaných výrobkov. Pritom očakávanie takejto spolupráce (a jej výsledkov, ktoré zvyšujú finančné prínosy úspešnej inovácie) výrazne posilňuje motiváciu k výskumu a vývoju a spolupráci v ňom. Existujúca literatúra (keďže sa nezaobrá spoluprácou firiem na trhu inovovaných výrobkov) nevenuje pozornosť ani špecifikám inovačného procesu vo veľkých firmách, ktoré pôsobia v oligopolných odvetviach a upriamuje pozornosť – v súlade so zameraním hospodárskej politiky Európskej únie – na malé a stredné podniky (napr.[5]). Pritom na výhody veľkých firiem v inovačnom procese upozorňoval už J. A. Schumpeter [13].

V tomto príspevku sa zaoberáme možnosťami a doterajšími výsledkami modelovania spolupráce firiem vo výskume a vývoji a následne na trhu inovovaných výrobkov. Keďže väčšina odvetví súčasných ekonomík vyspelých krajín je oligopolná, zameriavame sa pritom na oligopolné odvetvia. Nakoľko inovačný proces má dynamický charakter, neexistuje pri ňom dopredu známe posledné obdobie, zásadné rozhodnutia sa prijímajú v diskretnom čase a pri modelovaní spolupráce je vhodné explicitne skúmať aj tresty za odchýlky od nej, sústreďujeme sa na modely v podobe dynamických nekooperatívnych hier s nekonečným diskretným časovým horizontom a (v zhode s prevládajúcim prístupom v mikroekonomickej teórii) s diskontovaním budúcich platieb. Niektoré otázky možno uspokojivo analyzovať pomocou deterministických modelov, avšak – vzhľadom na stochastický charakter inovačného procesu – je potrebné aj použitie stochastických hier. Rozlišujeme pritom dva prístupy. Prvý, jednoduchší, sa obmedzuje na spoluprácu výrobcov vstupov, uskutočňujúcich výrobnú inováciu, navzájom aj s kupujúcimi týchto vstupov, ktorí ich používajú v ďalšej výrobe (a pre ktorých je používanie inovovaných vstupov technologickou inováciou). Tento prístup umožňuje nielen explicitne opísať stratégie podnikov, ale aj vymedziť postačujúce podmienky, pri splnení ktorých je spolupráca výrobcov aj používateľov inovovaných vstupov (v porovnaní s oligopolistickou konkurenciou na trhu vstupov aj na trhu finálnych výrobkov vyrábaných pomocou týchto vstupov) výhodná pre používateľov finálnych výrobkov. Druhý, komplexnejší prístup spočíva v dynamických stochastických modeloch všeobecnej ekonomickej rovnováhy v oligopolnej ekonomike s výrobnými aj technologickými inováciami. V tomto prípade inovácie menia množiny produkčných možností podnikov. Vo všeobecnosti stratégie podnikov nemožno explicitne opísať, treba sa obmedziť na dôkaz existencie rovnováhy pomocou niektorej vety o pevnom bode. Taktiež nemožno priamo analyzovať dopad spolupráce podnikov v inovačnom procese na používateľov inovovaných výrobkov. Možno však skúmať postačujúce podmienky, pri splnení ktorých je rovnovážna spotrebná alokácia (silne alebo aspoň slabo) paretsky efektívna.

Spolupráca firiem v inovačnom procese musí byť odolná voči odchýlkam všetkých koalícií od nej. (Podniky, ktoré dokážu koordinovať svoju činnosť pri zavádzaní inovácií, dokážu koordinovať svoju činnosť aj pri ich zavádzaní odlišným než dohodnutým spôsobom.) Vhodnými konceptmi rovnováhy sú teda silná dokonalá rovnováha zavedená do literatúry Rubinsteinom [12] a ostrá silná dokonalá rovnováha zavedená do literatúry Horniackom [6]. Prvá nich požaduje, aby žiadna koalícia (vrátane jednoprvkových koalícií a veľkej koalície, ktorá obsahuje všetkých hráčov) nemohla v žiadnej vlastnej podriadenej hre silne paretsky zlepšiť vektor platieb svojich členov. Druhá požaduje, aby žiadna koalícia nemohla v žiadnej vlastnej podriadenej hre slabo paretsky zlepšiť vektor platieb svojich členov.

2 SPOLUPRÁCA VÝROBCOV A POUŽÍVATEĽOV INOVOVANÉHO VSTUPU

Východiskom pre modely tohto typu môže byť monografia [6]. Modely v nej nezahŕňajú inovačný proces. Monografia však obsahuje model s nekonečným diskretným časovým horizontom zameraný na podrobnú analýzu spolupráce podnikov na obidvoch stranách trhu, t.j. podnikov vyrábajúcich vstupy a podnikov, ktoré ich používajú vo svojej výrobe. Hlavným použitým konceptom rovnováhy je ostrá silná dokonalá rovnováha. Práca obsahuje dôkaz postačujúcich podmienok jej existencie pre diskontný faktor blízky jednej ([6], Proposition 3.4, s. 36-46).

Najjednoduchším rozšírením uvedeného modelu o inovačný proces je prídanie východiskového (nultého) obdobia, v ktorom môžu výrobcovia vstupov investovať do ich výrobkovej inovácie. Použitie inovovaných vstupov je potom technologickou inováciou vo výrobnom procese ich používateľov. Model tohto typu obsahujú práce L. Šimkovej [15] a [16]. Výsledok inovačného procesu v nich je deterministický. Použitým konceptom rovnováhy v [15] je rovnováha odolná voči opätovnému prerokovaniu. Na rozdiel od väčšiny konceptov tohto typu v literatúre, ktoré obmedzujú množinu profilov stratégií, ku ktorým sa veľká koalícia môže odchýliť (napr. na predpisy rovnovážneho profilu stratégií v iných vlastných podriadených hrách, teda na tzv. pokračovacie rovnováhy), prístup L. Šimkovej vyžaduje odolnosť rovnovážneho profilu stratégií voči všetkým odchýlkam veľkej koalície silno paretoovsky zlepšujúcim vektor platieb jej členov. Vektor rovnovážnych platieb v každej vlastnej podriadenej hre je teda slabo paretoovsky efektívny. To je možné vďaka zahrnutiu podnikov na obidvoch stranách trhu do množiny hráčov. Pri trestoch netreba meniť vyrábané množstvá, stačí meniť ceny vstupov.

Komplexnejší prístup k modelovaniu spolupráce výrobcov inovovaných vstupov s ich používateľmi predstavuje príspevok L. Šimkovej [17]. Výsledok inovačného procesu je opäť deterministický. Môže však prebiehať v každom období nekonečného diskretného časového horizontu hry. Tento príspevok používa aj silnejší koncept rovnováhy – silnú dokonalú rovnováhu. Autorka dokázala postačujúce podmienky jej existencie pre diskontný faktor blízky jednej. Keďže odchýlky koalícií môžu meniť platobne relevantný stavový vektor (vyjadrujúci účinnosť vstupov v ďalšom výrobnom procese), pri trestoch za odchýlky koalícií menších než veľká koalícia sa mení podiel trestaných hráčov na sume priemerných diskontovaných ziskov pri zachovaní slabej paretovskej efektívnosti vektora rovnovážnych priemerných diskontovaných ziskov v každej vlastnej podriadenej hre.

3 SPOLUPRÁCA V MODELOCH VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY

V modeloch všeobecnej ekonomickej rovnováhy v oligopolnej ekonomike treba zohľadňovať vplyv cien spotrebných statkov nielen na príjmy majiteľov podnikov, ale aj na ich výdaje. Tento prístup ako prví použili Dierker a Grodal [4]. Ich model je však statický. Zahrnutie inovačného procesu do modelov všeobecnej ekonomickej rovnováhy si vyžaduje dynamický model. Vzhľadom na stochastický charakter inovačného procesu a dynamickú strategickú interakciu podnikov najvhodnejší je model v podobe stochastickej hry. Takýto model vypracovali Horniaček a Šimková v príspevkoch [7] a [14]. Ich modely zahŕňajú okrem výrobných podnikov aj banky a odborové zväzy. Všetci hráči maximalizujú priemerné diskontované očakávané reálne bohatstvo svojich akcionárov resp. (v prípade odborových zväzov) členov. Toto je maximalizované, ak majitelia resp. členovia ako skupina nemôžu zvýšiť agregátnu priemernú diskontovanú očakávanú spotrebu každého spotrebného statku

a zároveň znížiť agregátnu priemernú diskontovanú očakávanú ponuku každej pracovnej služby každému podniku (ktorá je kladná). Obdobné kritérium sa používa aj pre koalície hráčov. Inovácia, ktorej výsledok je stochastický, môže zmeniť tvar množiny produkčných možností. Keďže cieľom je analyzovať spoluprácu firiem v inovačnom procese, použitým konceptom rovnováhy je silná dokonalá rovnováha. Autori dokazujú postačujúce podmienky jej existencie pre ľubovoľný diskontný faktor (z intervalu $(0,1)$) pomocou pevného bodu funkcie, ktorej funkčné hodnoty pre niektoré argumenty môžu byť mimo jej definičného oboru. Používajú pritom vetu 2 v [2]. Postačujúce podmienky silnej paretovskej efektívnosti spotrebnej alokácie v tomto modeli dokazujú v [14].

ZÁVER

V tomto príspevku sme poukázali na niektoré možnosti modelovania spolupráce firiem v inovačnom procese. Samozrejme, (z hľadiska rozvoja matematickej ekonómie aj z hľadiska aplikácie v empirických analýzach) je potrebné ich ďalšie rozpracovanie. Pri modeloch spolupráce výrobcov a používateľov inovovaných vstupov treba rozšíriť analýzu o ich stochastickú verziu. Tieto modely by bolo možné prispôbiť aj na analýzu inovačného procesu v sektore služieb, najmä vo finančnej oblasti (kde by mohli byť doplnením modelov analyzovaných napr. v [8], [10] a [11]).

Opísané modely všeobecnej ekonomickej rovnováhy v oligopolnej ekonomike s inováciami by bolo vhodné rozpracovať do podoby, v ktorej by mohli prispieť k obohateniu modelov spočítateľnej všeobecnej ekonomickej rovnováhy zohľadnením oligopolného charakteru niektorých odvetví (napr. automobilového priemyslu), pri ktorých sa zatiaľ (pre nedostatok vhodnejšieho modelového aparátu) vychádza z predpokladu dokonalkej konkurencie (napr. [9]).

Použitá literatúra

1. ARTONUCCI, T. 2007. Innovation and employment in Europe: A structural perspective. In: Cantner, U., Malerba, F. (eds.), Innovation, Industrial Dynamics and Structural Transformation. Heidelberg – Berlin: Springer, 2007, s. 255-279. ISBN 978-3-540-49464-5.
2. BROWDER, F.E. 1967. A new generalization of the Schauder fixed point theorem. In: Mathematische Annalen, roč. 174, 1967, s. 285-290.
3. COWEN, R., JONARD, N., ZIMMERMAN, J.B. 2007. Evolving networks of inventors. In: Cantner, U., Malerba, F. (eds.), Innovation, Industrial Dynamics and Structural Transformation. Heidelberg – Berlin: Springer, 2007, s. 129-148. ISBN 978-3-540-49464-5.
4. DIERKER, E., GRODAL, B. 1999. The price normalization problem in imperfect competition and the objective of the firm. In: Economic Theory, roč. 14, 1999, č. 2, s. 257-284. ISSN 0938-2259.
5. GIACCHERO, A., DONNINI, N., MARTIN, F. 2007. Innovation and competitiveness in local SMEs: Characterization of firms, entrepreneurs, environment and their relationships. In: Cantner, U., Malerba, F. (eds.), Innovation, Industrial Dynamics and Structural Transformation. Heidelberg – Berlin: Springer, 2007, s. 173-186.
6. HORNIAČEK, M. 2011. Cooperation and Efficiency in Markets. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 649. Heidelberg – Berlin: Springer, 2011. ISBN 978-3-642-19762-8. ISSN 0075-8442.
7. HORNIAČEK, M., ŠIMKOVÁ, Ľ. 2015. Strong Markov perfect general equilibrium with innovation. In: Mathematical Methods in Economics (MME 2015). Cheb,

- 09.09.2015-11.09.2015. Plzeň: University of West Bohemia, Faculty of Economics, 2015, s. 261-266. [CD-ROM] ISBN 978-80-261-0539-8.
8. HOZLÁR, E. 2014. Factoring credit risk and its security modeling. In: Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XVII, 2014. Virt, 28.05.2014-30.05.2014. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2014, s. 79-81. ISBN 978-80-225-3868-8.
 9. MIŤKOVÁ, V. 2009. Modeling the crisis in automobile industry - the applied CGE study. In: Mathematical Methods in Economics 2009 (MME 2009). Kostelec nad Černými lesy 09.09.2009-11.09.2009. Prague: Czech University of Life Sciences, Faculty of Economics and Management, 2009, s. 221-226. ISBN 978-80-213-1963-9.
 10. MLYNAROVÍČ, V. 2014. The analytical system for portfolio performance and risk distribution. In: Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XVII, 2014. Virt, 28.05.2014-30.05.2014. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2014, s. 182-187. ISBN 978-80-225-3868-8.
 11. MLYNAROVÍČ, V. 2013. Dekompozícia výnosov a rizika portfólia. In: Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi X. Čingov, 29.05.2013-31. 05. 2013. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2013, 7 s. ISBN 978-80-225-3646-2.
 12. RUBINSTEIN, A. 1980. Strong perfect equilibrium in supergames. In: International Journal of Game Theory, roč. 9, 1980, č. 1, s. 1-12. ISSN 0020-7276.
 13. SCHUMPETER, J. A. 1947. Capitalism, Socialism, and Democracy. Second edition. New York: Harper and Brothers, 1947.
 14. ŠIMKOVÁ, Ľ., HORNIAČEK, M. 2015. Pareto efficiency of consumers' allocations in oligopolistic general equilibrium with innovation. In: Mathematical Methods in Economics (MME 2015). Cheb, 09.09.2015-11.09.2015. Plzeň: University of West Bohemia, Faculty of Economics, 2015, s. 793-798. [CD-ROM] ISBN 978-80-261-0539-8.
 15. ŠIMKOVÁ, Ľ. 2014a. An example of renegotiation-proof equilibrium with product innovation. In: Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XVII, 2014. Virt, 28.05.2014-30.05.2014. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2014, s. 276-279. ISBN 978-80-225-3868-8.
 16. ŠIMKOVÁ, Ľ. 2014b. Impact of cooperation of firms on both sides of the market on innovation. In: Mathematical Methods in Economics (MME 2014). Olomouc, 10.09.2014-12.09.2014. Olomouc: Palacký university in Olomouc, 2014, s. 885-889. [CD-ROM] ISBN 978-80-244-4209-9.
 17. ŠIMKOVÁ, Ľ. 2015. Silná dokonalá rovnováha v bilaterálnom Cournotovom duopole s výrobovými inováciami vstupov. In: Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi XI. Seminár SSOV, Makov, 27.05.2015-29.05.2015. [CD-ROM]. Bratislava, Vydavateľstvo Ekonóm 2015, 5 s. ISBN 978-80-225-4084-1.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Milan Horniaček, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

Tel: (421 2) 20 66 98 61

email: milan.horniacek@fses.uniba.sk

VZŤAH MEDZI POČIATOČNOU ÚROVŇOU HDP A JEHO RASTOM: PRIESTOROVÁ ANALÝZA PRE REGIÓNY EURÓPSKEJ ÚNIE¹

RELATIONSHIP BETWEEN INITIAL HDP AND ITS GROWTH: SPATIAL ANALYSIS FOR REGIONS OF EUROPEAN UNION

Michaela Chocholatá

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá analýzou vzťahu medzi počiatočnou úrovňou HDP a jeho rastom v regiónoch Európskej únie v období 2000 – 2011 s dôrazom na zohľadnenie existencie priestorových efektov. Na základe grafického posúdenia kvantilových máp možno konštatovať potvrdenie typického záveru analýz priestorovej regionálnej konvergencie, a to, že regióny s najnižšou úrovňou počiatočného HDP v roku 2000 sa vo väčšine prípadov vyznačovali najvyššou úrovňou rastu HDP v analyzovanom období 2000 – 2011. Vychádzajúc z matice váh typu „kráľovná“ sa na globálnej úrovni potvrdila existencia pozitívnej priestorovej autokorelácie tak v prípade počiatočnej úrovne HDP ako aj pri raste HDP. Osobitne významná je však informácia o regiónoch, pre ktoré sa preukázala existencia pozitívnej priestorovej autokorelácie, nakoľko táto môže pomôcť pri efektívnom rozdeľovaní obmedzených finančných prostriedkov s cieľom podporiť také regióny, ktorých vysoká prosperita môže prispieť k vyššej prosperite ich susediacich regiónov.

***Kľúčové slová:** priestorová analýza, HDP, rast HDP, regióny, Európska únia*

Abstract

This paper deals with the analysis of relationship between the initial GDP and its growth during the period 2000 – 2011 in regions of European Union with emphasis on the existence of spatial effects. The graphic assessment of quantile maps confirms the typical conclusion of spatial analyses of regional convergence, i.e. it was showed that the regions with the lowest levels of initial GDP in 2000 were in most cases characterised by the highest levels of GDP growth during 2000 – 2011. Based on weight matrix of queen case the positive spatial autocorrelation was confirmed on global level both in case of initial GDP and GDP growth. Especially important, however, is the information about the regions for which the existence of positive spatial autocorrelation was proved, as this can help in the effective allocation of limited funds to support such regions, the high prosperity of which can contribute to higher prosperity of the neighbouring regions.

***Keywords:** spatial analysis, GDP, GDP growth, regions, European Union*

1 ÚVOD

Otázka regionálnej konvergencie zohráva v súčasnosti významnú úlohu, a to nielen na Slovensku, ale i v európskom meradle. Jedným z dôvodov je potreba redukcie nerovnomerností vývoja medzi regiónmi v rámci jednotlivých členských krajín Európskej

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0285/14 „Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na modely priestorovej ekonometrie“.

únie (EÚ) a tiež v rámci EÚ ako celku. Tradičným prístupom k testovaniu regionálnej konvergenencie z empirického hľadiska je koncepcia tzv. absolútnej (nepodmienenenej) β – konvergenencie, ktorá je založená na negatívnom vzťahu medzi úrovňou príjmu (HDP) v bázičkom období a mierou rastu príjmu (HDP). Znamená to, že chudobnejšie regióny majú tendenciu rásť rýchlejšie ako bohaté regióny a v dlhodobom horizonte „dobechnú“ úroveň bohatých regiónov.

Hoci je všeobecne známe, že existujú isté geografické zákonitosti usporiadania bohatých a chudobných regiónov v priestore, štúdie analyzujúce regionálnu konvergenciu začali zohľadňovať priestorové hľadisko až relatívne nedávno. Vo všeobecnosti možno hovoriť z hľadiska priestoru o absolútnej a relatívnej polohe analyzovaného regiónu. Vychádzajúc z Abreu a kol. (2005), absolútne hľadisko vyjadruje umiestnenie regiónu na konkrétnom mieste v priestore, kým relatívne hľadisko sa vzťahuje na relatívnu polohu regiónu vo vzťahu k inému regiónu.

Väčšina novších kvantitatívnych analýz zameraných na problematiku konvergenencie zdôrazňuje priestorovú interakciu medzi analyzovanými regiónmi, a teda skutočnosť, že geografická poloha regiónu má vplyv na vývoj rastu regiónu a tým aj na rýchlosť konvergenencie (Feldkircher, 2006).

Spomedzi štúdií analyzujúcich regionálnu konvergenciu možno spomenúť napríklad nasledujúce práce: Feldkircher (2006), Furková a Surmanová (2011), Paas a kol. (2007), Szomolányi a kol. (2011).

Cieľom tohto príspevku je analýza vzťahu medzi počiatočnou úrovňou HDP na obyvateľa a regionálnym rastom HDP pre regióny EÚ na úrovni NUTS2 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics). Štruktúra zvyšnej časti príspevku je nasledujúca: druhá časť je venovaná dátam, tretia časť popisuje analýzu priestorových interakcií tak z teoreticko-metodologického ako aj empirického hľadiska a štvrtá časť príspevku tvorí záver.

2 DÁTA

Predmetom analýzy sú dáta získané z regionálnej databázy Eurostatu, a to úroveň HDP na obyvateľa v PPS v bázičkom období (rok 2000) a rast HDP za obdobie 2000-2011, pričom obidve premenné budú analyzované v logaritmoch. Súbor obsahuje dáta za 272 NUTS2 regiónov EÚ, zodpovedajúci .shp súbor pre EÚ bol získaný z webovej stránky Eurostatu a celá analýza bola zrealizovaná vo voľne prístupnom softvéri GeoDa (Geographic Data Analysis). Grafické znázornenie všetkých 272 NUTS2 regiónov EÚ je na obrázku č. 1.

3 ANALÝZA PRIESTOROVÝCH INTERAKCIÍ

Na zohľadnenie priestorových interakcií medzi sledovanými regiónmi je potrebné pri analýze brať do úvahy tzv. priestorové efekty. Hoci literatúra vo všeobecnosti rozlišuje medzi dvomi typmi priestorových efektov, a to priestorovou autokoreláciou a priestorovou heterogenitou, ich jednoznačné rozlíšenie nie je jednoduché. V ďalšej časti tohto príspevku sa budeme zaoberať len otázkou priestorovej autokorelácie.

S pojmom „priestorová autokorelácia“ v kontexte štatistiky sa možno prvýkrát stretnúť v práci Cliffa a Orda (1969). Pod priestorovou autokoreláciou vo všeobecnosti rozumieme koreláciu premennej so samou sebou v priestore, čo vyjadruje skutočnosť, že dáta z jedného regiónu môžu mať vplyv na dáta z iného regiónu. Na zohľadnenie takýchto priestorových interakcií medzi regiónmi je potrebné špecifikovať maticu váh \mathbf{W} rozmeru ($N \times N$), kde N

označuje počet uvažovaných regiónov. Najbežnejšie používaným a zároveň najjednoduchším prístupom je použitie binárnej matice váh W s jednotkovými prvkami pre susediace regióny a s nulovými prvkami pre ostatné regióny. Jednou z možností je zadefinovať susedstvo regiónov na báze pohybu šachových figúrok, napr. susedstvo typu „kráľovná“, „veža“ alebo „strelec“. Maticu váh W možno však definovať aj na báze vzdialenosti, najbližších susedov a pod. (viac pozri napr. Getis, 2010).

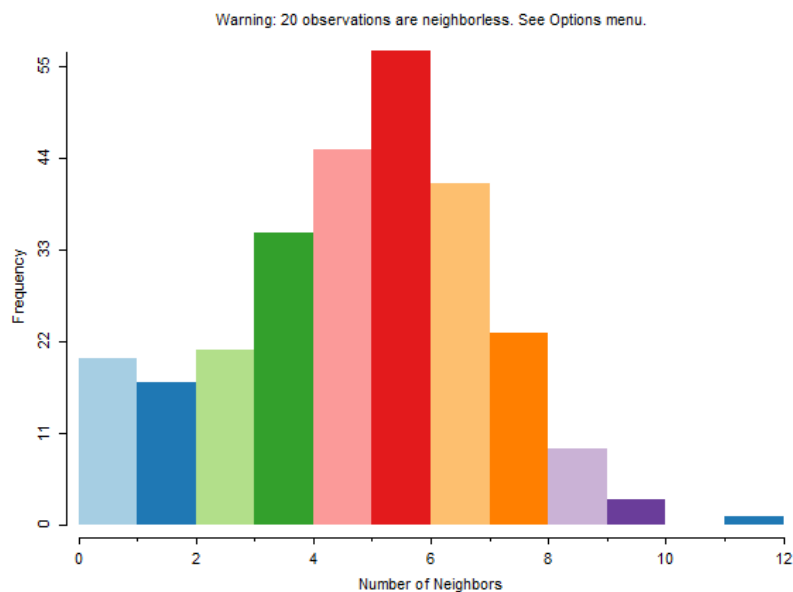


Obrázok č. 1: NUTS2 regióny EÚ

V tomto príspevku budeme uvažovať maticu váh W typu „kráľovná“, t.j. za susedné budú považované regióny, ktoré majú aspoň jeden spoločný bod hranice. Na znázornenie štruktúry susedstva poskytuje softvér GeoDa tzv. „connectivity histogram“, t.j. histogram susedstva, ktorý má v prípade analyzovaného súboru 272 NUTS2 regiónov EÚ tvar uvedený na obrázku č. 2. Vzhľadom na to, že 20 regiónov nemá suseda, budú tieto „izolované“ regióny Cypru, Malty, Francúzska, Fínska, Španielska, Grécka, Portugalska a Talianska vylúčené z ďalších analýz.

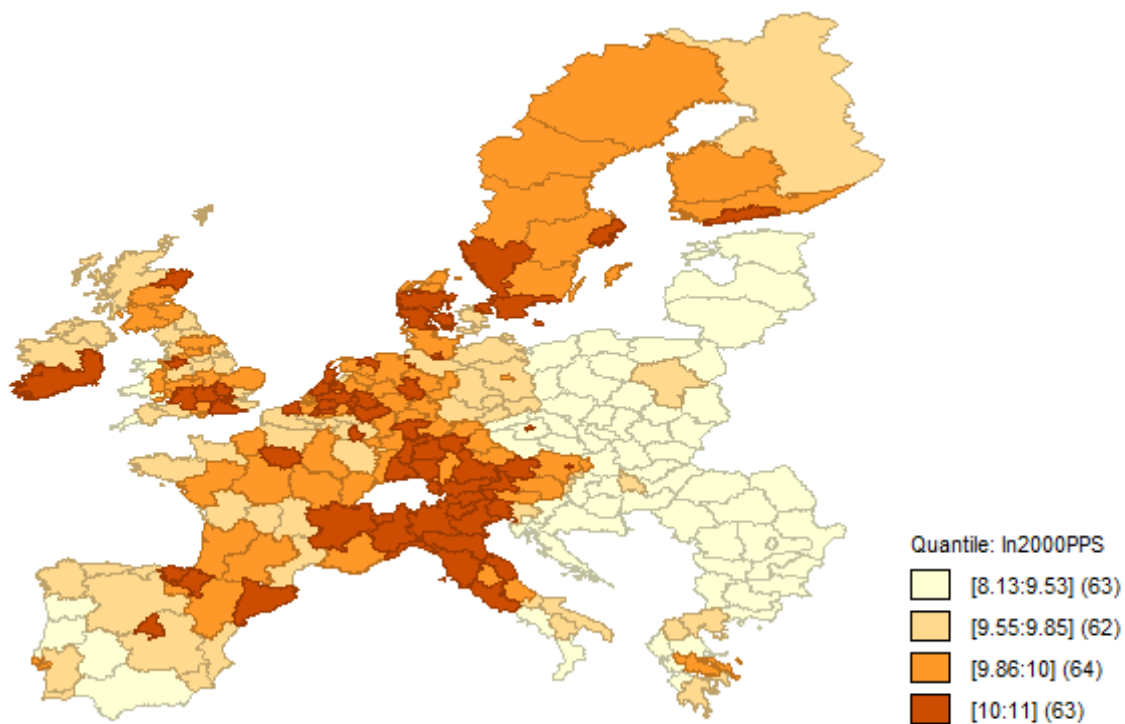
S cieľom preskúmať priestorovú štruktúru analyzovaných regiónov možno využiť prístupy exploratačnej, resp. priestorovej exploratačnej analýzy, kde patrí napr. znázornenie pozorovaných hodnôt na mape či znázornenie kvantilových máp. Okrem toho možno existenciu priestorovej autokorelácie testovať pomocou rôznych testov na globálnej prípadne lokálnej úrovni. Globálne štatistiky poskytujú informáciu o priestorovej autokorelácii z globálneho hľadiska, t.j. jednu hodnotu pre celý analyzovaný súbor dát. Lokálne štatistiky zase poskytujú informáciu o priestorovej autokorelácii pre jednotlivé analyzované priestorové jednotky (regióny). Lokálne indikátory merajúce priestorovú asociáciu LISA (Local

Indicators of Spatial Association) prezentované Anselinom (1995) slúžia predovšetkým na identifikáciu priestorových zhlukov. Medzi najznámejšie indikátory na globálnej a lokálnej úrovni patrí globálna a lokálna Moranova I štatistika (matematické vzťahy na ich výpočet možno nájsť napr. v publikácii Fischer a Getis, 2010). Veľmi často sa možno stretnúť s grafickým znázornením pomocou Moranovho rozptylového diagramu, ktorého vodorovná os obsahuje analyzovanú premennú a zvislá os jej priestorovo posunuté hodnoty. Tento diagram obsahuje okrem hodnoty globálnej štatistiky aj hodnoty lokálnych štatistík a je rozdelený do štyroch kvadrantov, z ktorých dva zodpovedajú pozitívnej autokorelácii (pravý horný a ľavý dolný) a dva zodpovedajú negatívnej autokorelácii (pravý dolný a ľavý horný). Kým existencia pozitívnej autokorelácie v prípade konkrétneho regiónu znamená, že ide o „podobný“ región ako sú jeho susedné regióny, existencia negatívnej autokorelácie naopak znamená, že daný región je „odlišný“ od svojich susedov.

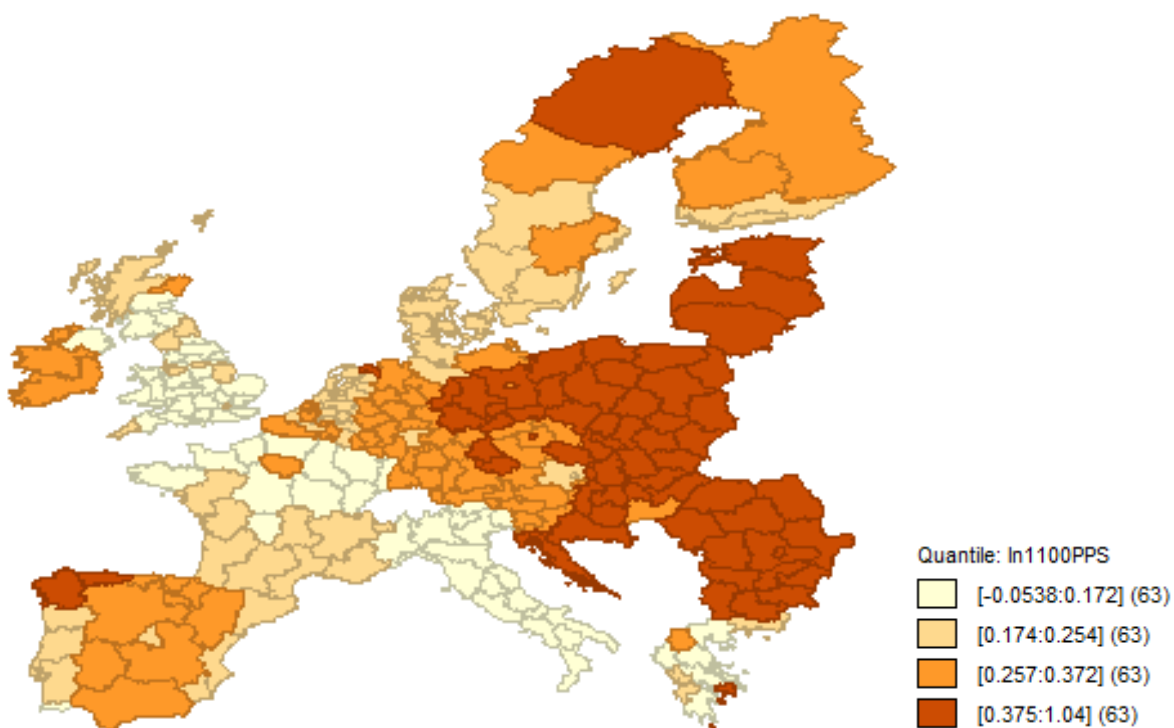


Obrázok č. 2: Histogram susedstva pre 272 NUTS2 regiónov EÚ

Z vyššie uvedeného je zrejmé, že jednou z možností ako posúdiť vzťahy medzi počiatočnou úrovňou HDP na obyvateľa v PPS v roku 2000 a regionálnym rastom HDP v období 2000 – 2011 pre 252 NUTS2 regiónov EÚ je použitie kvantilových máp. Kvantilové mapy znázornené na obrázku č. 3(a) – (b) rozdeľujú regióny na štyri skupiny podľa úrovne HDP v počiatočnom roku 2000, resp. podľa úrovne rastu HDP v období 2000 – 2011. Na základe tohto grafického znázornenia možno konštatovať, že sa potvrdil typický vzťah prezentovaný v publikáciách analyzujúcich priestorovú regionálnu konvergenciu (Fischer a Getis, 2010), t.j. že regióny s najnižšou úrovňou počiatočného HDP v roku 2000 sa vo väčšine prípadov vyznačovali najvyššou úrovňou rastu HDP v analyzovanom období 2000 – 2011.



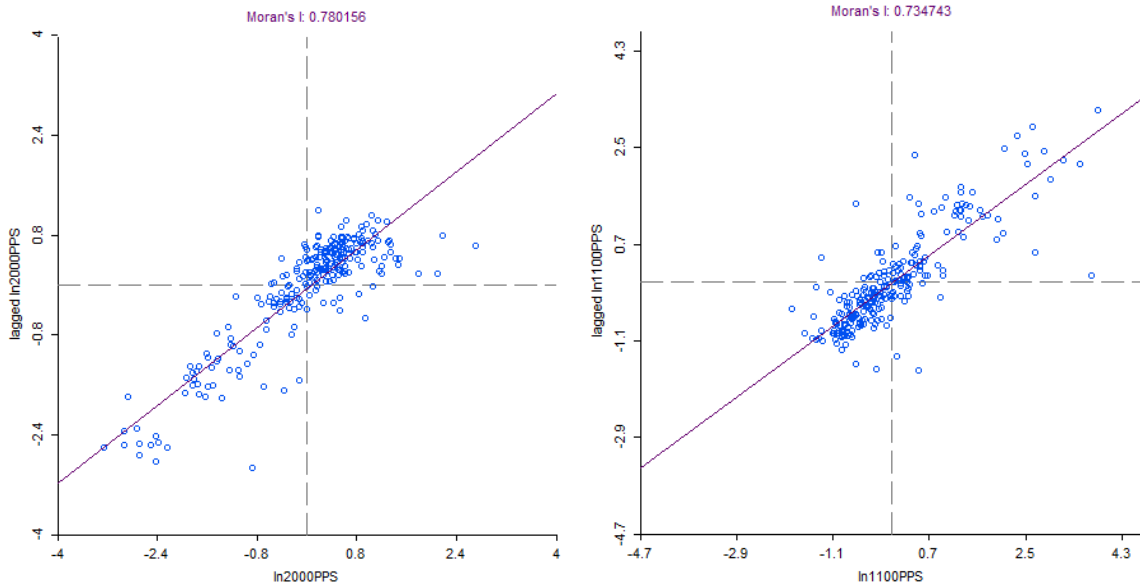
(a) HDP na obyvateľa v PPS (rok 2000, prirodzený logaritmus)



(b) Regionálny rast HDP na obyvateľa v PPS (obdobie 2000-2011, prirodzený logaritmus)

Obrázok č. 3: Kvantilové mapy

Na značný stupeň pozitívnej priestorovej autokorelácie v prípade úrovne HDP v roku 2000 a tiež v prípade regionálneho rastu HDP (2000 – 2011) poukazujú hodnoty globálnej Moranovej I štatistiky (0,780 a 0,735). Moranov rozptylový diagram pre HDP v roku 2000 a rast HDP (2000 – 2011) v jednotlivých regiónoch je znázornený na obrázku č. 4 (a) – (b).



(a) HDP na obyvateľa v PPS

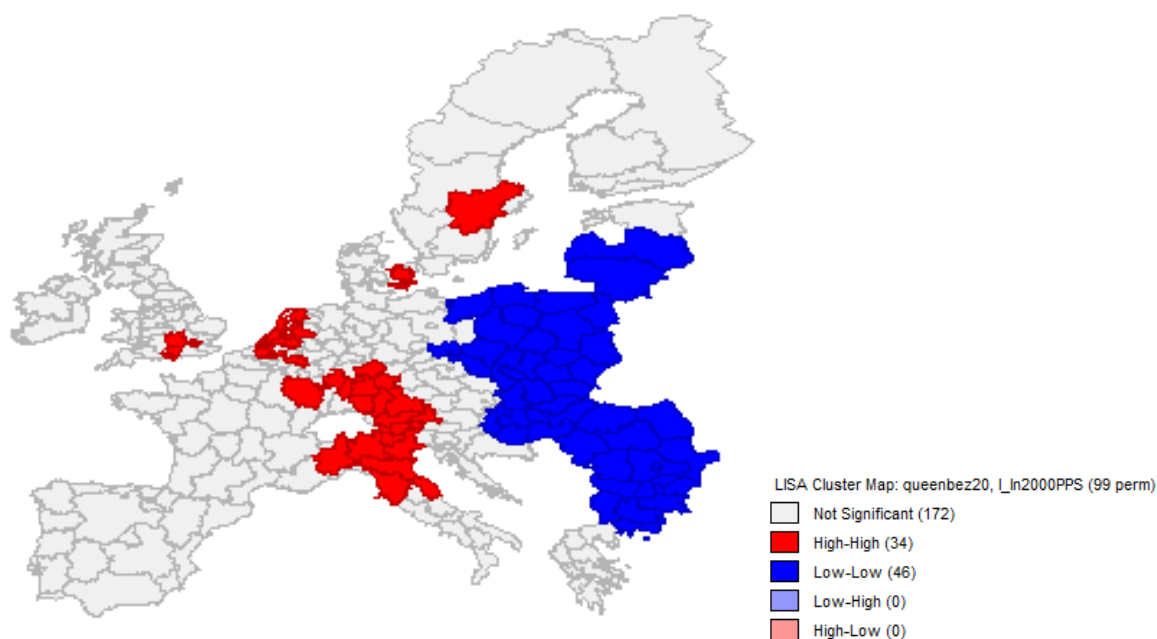
(rok 2000, prirodzený logaritmus)

(b) Regionálny rast HDP na obyv. v PPS

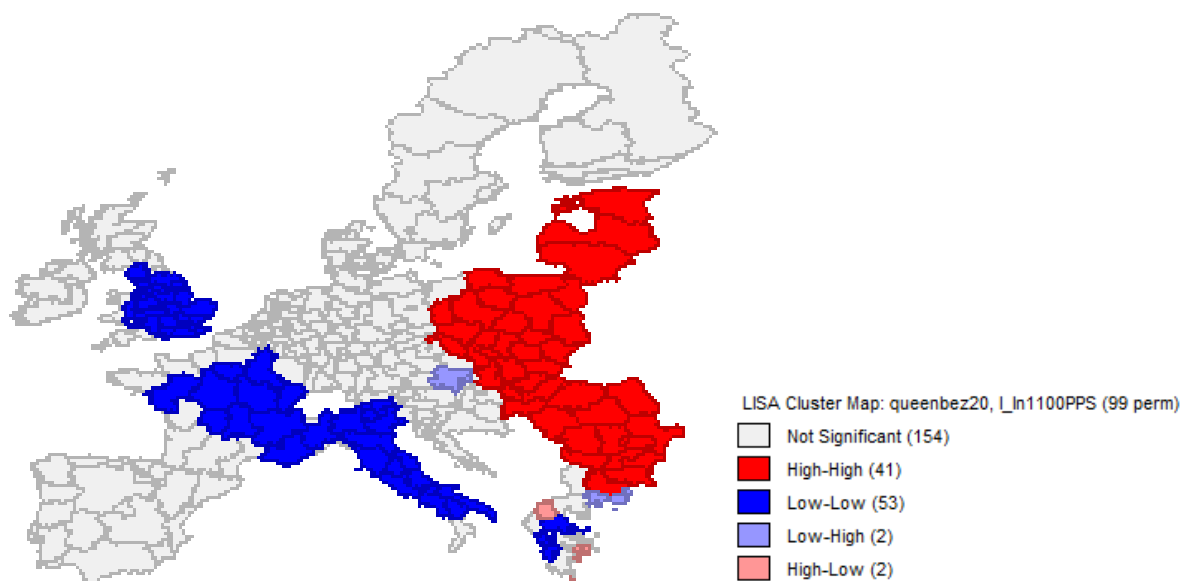
(2000-2011, prirodzený logaritmus)

Obrázok č. 4: Moranov rozptylový diagram

Na základe hodnôt lokálnych Moranových I štatistík znázornených v rozptylových diagramoch na obrázku č. 4 bola v prípade väčšiny regiónov identifikovaná pozitívna autokorelácia. Konkrétny typ priestorovej asociácie možno posúdiť tiež na základe grafického znázornenia výsledkov LISA vo forme „clusterových“ máp na obrázku č. 5 (a) – (b). Štatisticky významná pozitívna autokorelácia typu „*high – high*” bola v prípade analýzy úrovne HDP potvrdená pre 34 regiónov a typu „*low – low*“ pre 46 regiónov, negatívna priestorová autokorelácia nebola štatisticky významná pre žiadny región. Zaujímavé je, že v prípade regionálneho rastu HDP štatisticky významná pozitívna autokorelácia typu „*high – high*” (41 regiónov) v podstate zodpovedala regiónom s nízkou počiatočnou úrovňou HDP. Pozitívna autokorelácia typu „*low – low*“ bola štatisticky významná pre 53 regiónov a okrem toho boli identifikované 4 regióny so štatisticky významnou negatívnou priestorovou autokoreláciou.



(a) HDP na obyvateľa v PPS (rok 2000, prirodzený logaritmus)



(b) Regionálny rast HDP na obyvateľa v PPS (obdobie 2000-2011, prirodzený logaritmus)

Obrázok č. 5: „Clusterové“ mapy LISA

4 ZÁVER

Predmetom príspevku je problematika vzťahu medzi počiatočnou úrovňou HDP na obyvateľa v PPS v roku 2000 a regionálneho rastu HDP na obyvateľa v PPS v období 2000 – 2011 pre NUTS2 regióny EÚ s dôrazom na nástroje priestorovej analýzy. Analýzy týkajúce sa regionálneho rastu HDP sú v poslednom období veľmi populárne s cieľom identifikovať regionálne rozdiely a prijať vhodné opatrenia na ich odstránenie. Dôležitým aspektom takejto

analýzy je uvažovanie priestorovej dimenzie a špecifikácia susediacich regiónov na základe vhodnej definície matice váh. V príspevku bola použitá matica váh typu „kráľovná“.

Na báze kvantilových máp bolo potvrdené, že regióny s najnižšou úrovňou počiatočného HDP v roku 2000 sa vo väčšine prípadov vyznačovali najvyššou úrovňou rastu HDP v analyzovanom období 2000 – 2011. Na báze hodnoty globálnej Moranovej I štatistiky bola potvrdená pozitívna priestorová autokorelácia pre úroveň HDP aj pre rast HDP. Na základe lokálnych štatistík bolo možné určiť konkrétne regióny so štatisticky významnou priestorovou autokoreláciou vrátane typu tejto autokorelácie. Kým pozitívna autokorelácia indikuje zhlukovanie regiónov s podobnými hodnotami HDP (rastu HDP), negatívna autokorelácia naopak indikovala, v ktorých regiónoch je HDP (rast HDP) nižší, resp. vyšší ako v regiónoch, ktoré ho obklopujú.

Použitá literatúra

1. ABREU, M. a kol. 2005. Space and Growth: A Survey of empirical Evidence and Methods. *Région et Développement*, roč. 21, 2005, s. 14-44.
2. ANSELIN, L. 1995. Local Indicators of Spatial Association – LISA. In: *Geographical Analysis*, roč. 27, 1995, č. 2, s. 93-115.
3. CLIFF, A. D. – ORD, J. K. 1969. The problem of spatial autocorrelation. In *London Papers in Regional Science 1, Studies in Regional Science*, edited by A. J. Scott, London: Pion, s. 25-55.
4. FELDKIRCHER, M. 2006. Regional Convergence within the EU-25: A Spatial Econometric Analysis. *Proceedings of OeNB Workshops „New Regional Economics in Central European Economies: The Future of CENTROPE“*, 2006, č. 9, s. 101-119.
5. FISCHER, M. M. – GETIS, A. 2010. *Handbook of Applied Spatial Analysis. Software Tools, Methods and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 811 s.
6. FURKOVÁ, A. – SURMANOVÁ, K. 2011. Stochastic Frontier Analysis of regional competitiveness. In: *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych*. Warsaw: Warsaw University of Life Sciences Press, roč. XII, 2011, č. 1, s. 67-76.
7. GETIS, A. 2010. Spatial autocorrelation, In: Fischer, M.M. and Getis, A. 2010. *Handbook of Applied Spatial Analysis. Software Tools, Methods and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, s. 255-278.
8. PAAS, T. a kol. 2007. Econometric Analysis of income convergence in selected EU countries and their NUTS 3 level regions. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1078863 [cit. 15/04/2013]
9. SZOMOLÁNYI, K. a kol. 2011. The β -convergence of the EU 27 Countries. In: *Mathematical Methods in Economics 2011: Proceedings - part I, II: 29th International Conference*, Praha: Professional Publishing, 2011, s. 287-291.
10. <http://ec.europa.eu/eurostat/> [cit. 05/02/2015].
11. <http://ec.europa.eu/eurostat/web/gisco/geodata/reference-data/administrative-units-statistical-units> [cit. 05/02/2015].
12. <https://geodacenter.asu.edu/software/downloads> [cit. 05/02/2015].

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 832
email: michaela.chocholata@euba.sk

BOUNDED FUZZY APPROACH FOR ALLOCATION PROBLEM

HRANIČNÍ FUZZY PŘÍSTUP K ŘEŠENÍ ALOKAČNÍHO PROBLÉMU

Maria Kobzareva

Abstract

Fuzzy approach is a recent approach to uncertainty modeling, which deals with uncertainty by describing it using fuzzy sets defined by fuzzy membership functions. This paper introduces fuzzy bounded methodology to solve allocation problem with fuzzy parameters. The problem takes into account the fact that real demand of certain nodes could be different from predicted; the future demand of particular nodes is presented in the model by triangle fuzzy numbers. Paper also reviews p -fractile approach which is used to defuzzify uncertain demand and solve the model using p -fractile coefficients. Fuzzy allocation problem is transformed into linear programming problem with bounded constraints and solved by presented techniques using different formulation modifications. The paper presents case study computation experiments and its results.

Keywords: *bounded fuzzy approach, fuzzy parameters, p -fractile approach, allocation problem, triangle fuzzy number*

Abstrakt

Jedním z moderních přístupů k modelování neurčitosti je fuzzy přístup, který popisuje neurčitost pomocí fuzzy množin popsaných fuzzy funkcí příslušnosti. Tento článek uvádí hraniční fuzzy přístup k řešení alokačního problému s fuzzy parametry. Problém bere v úvahu skutečnost, že reálná poptávka některých uzlů může být odlišná od poptávky předpovídané. Budoucí poptávka uzlů je tak v modelu představena pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel. Článek také uvádí p -fractile přístup, který slouží k defuzzifikaci neurčité poptávky a řeší úlohu s použitím p -fractile koeficientů. Fuzzy alokační problém je převeden na úlohu lineárního programování s hraničním omezením a tento problém je řešen pomocí předložené techniky s použitím různých modifikací. Článek obsahuje případovou studii a výsledky jejího řešení za různých modifikací ve formulaci problému.

Klíčová slova: *hraniční fuzzy přístup, fuzzy parametry, p -fractile přístup, alokační problém, trojúhelníkové fuzzy číslo*

1 INTRODUCTION

The paper is focused on fuzzy formulation of allocation problem with uncertain demand. The paper presents allocation problem formulated as fuzzy problem with fuzzy parameters and binary variables and suggests bounded approach to solve the problem. The idea of introduced approach is to find an optimal solution for fuzzy linear programming (FLP) allocation problem by setting a bounded constraint on the potential increase in demand, expressed by the difference between upper bound and lower bound of the objective function. In the bounded fuzzy approach the given FLP problem is decomposed into crisp linear programming (CLP) problem with bounded constraint, regarding the difference between the upper and the lower bound of the objective function. The CLP problem is solved and optimal solution to the given FLP problem is obtained. The paper also reviews p -fractile approach used to solve allocation problem with uncertain data. P -fractile approach calculates adjusted demand values using 80 percent fractile for triangle fuzzy numbers and by solving bounded allocation problem with p -fractile calculated demand optimal solution is obtained. The methods are illustrated on a case study, results are provided.

2 ALLOCATION PROBLEM

Let us introduce allocation problem, where we have to decide where to locate a material storage for supplying different centers, respecting the condition that only a certain number of storages will be built and the center will only be supplied from the particular node if a storage is built in that node. The aim is to minimize transportation costs. The problem is that the demand of certain centers is not strictly set at the moment we solve the problem – it can change under the impact of unexpected circumstances. Let us first introduce classis allocation problem with given certain demand in different nodes.

2.1 Mathematical description of allocation problem

Let n be the number of centers which need to be supplied from the storages, located in some of the existed centers. Let us introduce binary variable $x_i \in \{0,1\}$ $i=1,\dots, n$, where $x_i = 1$ in case the central storage is located in center i , $x_i = 0$ otherwise. Next we consider c_{ij} distance between center i and center j for $i, j=1,\dots, n$, d_i is the demand of center i for $i=1,\dots, n$ and K the number of storages to be built. Variable z_{ij} is binary for $i, j=1,\dots, n$; if $z_{ij} = 1$, then center j gets material from storage located in center i , $z_{ij} = 0$ otherwise.

The mathematical model can then be written as follows:

$$\min \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} d_i z_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = K, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq n x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

where total transportation costs in ton kilometers calculated as (1) are minimized under the condition (2) which ensures that only K centers will be selected where the storage will be built. To ensure supply of center j the equation (3) must be equal. Condition (4) assures that if the storage is not built at center i , that it is not possible to supply other centers from this center.

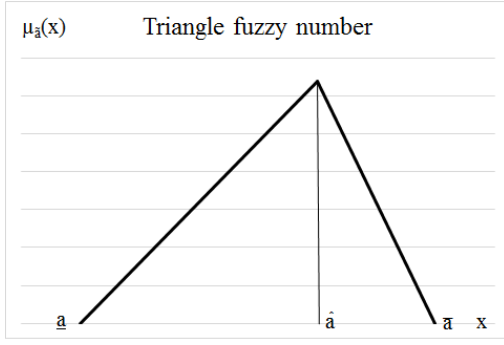
According to this model we will create a model with fuzzy parameter in the following section.

3 PRELIMINARIES

We will use triangle fuzzy number $\tilde{a} = (\underline{a}, \hat{a}, \bar{a})$ (see FIG. 1), where $\underline{a} \leq \hat{a} \leq \bar{a}$ and membership function $\mu_{\tilde{a}}(x)$ is described as follows:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \underline{a}, \\ L(x) = \frac{x-\underline{a}}{\hat{a}-\underline{a}}, & \underline{a} \leq x \leq \hat{a}, \\ R(x) = \frac{\bar{a}-x}{\bar{a}-\hat{a}}, & \hat{a} \leq x \leq \bar{a}, \\ 0, & x > \bar{a}. \end{cases} \quad (5)$$

FIG. 1: Triangle fuzzy number



Let's now define multiplication (6) for triangle fuzzy number: let $\tilde{a} = (\underline{a}, \hat{a}, \bar{a})$ be a triangle fuzzy number, then

$$k * \tilde{a} = (k * \underline{a}, k * \hat{a}, k * \bar{a}) \text{ pro } k > 0. \quad (6)$$

4 ALLOCATION PROBLEM WITH FUZZY PARAMETER

Consider the following linear programming allocation problem with n nodes and fuzzy parameter \tilde{d}_i , formulated as follows:

$$\min \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} \tilde{d}_i z_{ij} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = K, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq nx_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

Let the parameter \tilde{d}_i be the triangular fuzzy number $(\underline{d}_i, \hat{d}_i, \bar{d}_i)$. Now we define allocation problem based on fuzzy relations. For fuzzy \tilde{d}_i and binary variable z_{ij} the objective function $\tilde{z}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{d}_i z_{ij}$ is a fuzzy number calculated according to (6) as

$$\tilde{z}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{d}_i z_{ij} = (\underline{z}_i, \hat{z}_i, \bar{z}_i) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underline{d}_i z_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \hat{d}_i z_{ij}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{d}_i z_{ij} \right) \quad (11)$$

In the following modification we substitute triangle fuzzy number $\tilde{z}(x)$ in the objective function with its middle value \hat{z}_i in order to obtain a linear programming problem instead of fuzzy linear programming problem. Then, to defuzzify the problem (7-10) it can be modified according to the bounded principle as follows:

$$\min \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} \hat{d}_i z_{ij} \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = K, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq nx_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{d}_i z_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underline{d}_i z_{ij} \leq r, z_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

where (12) is objective function which uses middle values of triangle fuzzy numbers as coefficients (according to (11)); the objective function is to be minimized. Equation (13) ensures that only K centers will be selected where the storage will be built. To ensure supply of center j the equation (14) must be equal. Condition (15) assures that if the storage is not built at center i , that it is not possible to supply other centers from this center. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{d}_i z_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underline{d}_i z_{ij}$ is the difference between the highest possible costs associated with the highest demand and the lowest value of expected costs associated with lower demand which is bounded by parameter r (16), which can be defined using several different ways:

- as a given amount – we set the difference as a certain amount of costs in ton kilometers, which is acceptable for supplier;
- as a percentage of expected costs – the difference is limited by a percentage of expected costs;

Above presented modifications prevent us from choosing extreme allocation of centers, where the difference in costs with the highest amount of expected demand and the lowest amount of expected demand is huge. This method tries to balance the amount spent at all possible situations, whether the expected demand of nodes is high or low.

5 POSSIBILITY P-FRACTILE APPROACH

In previous section we used expected demand at its middle level to calculate the total expected costs – objective function. This idea might not be acceptable considering the expected demand is presented by triangle fuzzy number and we should take into account all disposable information to calculate future costs.

Let me then present another approach, used to solve problems with uncertain parameters described in [1, 11], which calculates expected demand according to possibility p -fractile.

Let $\tilde{\alpha}$ be a fuzzy number and g a real number. Now we define the measure of possibility of the event as $\alpha \in \tilde{\alpha}$, which is described in the interval $(-\infty, g >$ by

$$Pos(\alpha \leq g) = \sup_{r \in (-\infty, g)} \mu_{\tilde{\alpha}}(r). \quad (17)$$

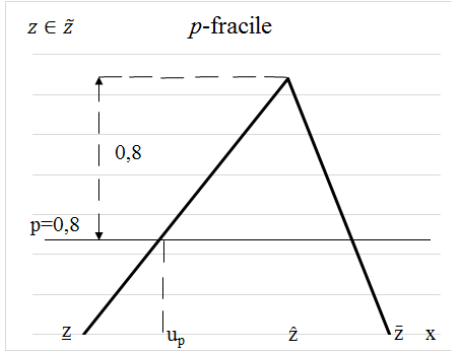
The necessity of event that $\alpha \in \tilde{\alpha}$ is certain in the interval $(-\infty, g >$ is then described by

$$Nes(\alpha \leq g) = 1 - \sup_{r \in (-\infty, g)} \mu_{\tilde{\alpha}}(r). \quad (18)$$

Similarly we can define $Pos(\alpha \geq g)$ and $Nes(\alpha \geq g)$. Now let's define p -necessity fractile. P -necessity fractile is given for $p \in (0,1)$: p -necessity fractile $u_p = \max u$, where u satisfies: $Nes(\alpha \geq u) \geq p$.

Let's set $p \in (0,1)$ to $p=0,8$, then we can formulate allocation problem as a maximization of $u^{0,8}$, where $u^{0,8} = \max(u)$ for $Nes(z \geq u) \geq 0,8$. From FIG. 2 it's clear that $u^{0,8} = \hat{z} - 0,8(\hat{z} - \underline{z})$.

FIG. 2: p -fractile



The problem can then be transformed according to the bounded method as follows:

$$\min \sum_i^n \sum_j^n c_{ij} d_i^{0,8} z_{ij} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = K, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^n z_{ij} \leq n x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{d}_i z_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \underline{d}_i z_{ij} \leq r, z_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

where triangle fuzzy number $\tilde{z}(x)$ in the objective function (19) is substituted with p -fractile coefficients $d_i^{0,8}$ calculated as $Nes(d_i \geq d_i^{0,8}) \geq 0,8, d_i \in \tilde{d}_i$, equation (20) ensures that only K centers will be selected where the storage will be built. Again to ensure supply of center j the equation (21) must be equal. Condition (22) assures that if the storage is not built at center i , that it is not possible to supply other centers from this center, (23) is equation which ensures that the difference between the highest possible amount we can spent and the lowest value of expected costs is less than parameter r , expressed by one of the options presented in the previous chapter.

6 CASE STUDY

Power supply network-maintenance company with 12 service centers solves the problem of allocating two material storages for maintaining electricity net in north and middle Czech. Every center has workers, which eliminate malfunction on electricity net in specific region of Czech Republic. The average year consumption of material calculated from historic data is defined as d_i , d'_i is additional consumption of center i , where we also take into account that in some years under the unexpected circumstances (flooding, snow calamity, hurricanes, enc.) the consumption can be different than usual, the real consumption will be $d_i + d'_i$. The aim is to allocate central

material storage in two centers, from which the other centers will be supplied with material with minimum transportation costs and with possibility to cover the material demand in case unexpected events in the region will occur.

The input data for described case study are presented in table 1, where places from 1 to 12 are the following: Česká Lípa, Děčín, Chomutov, Jablonec, Liberec, Litoměřice, Louny, Most, Praha, Teplice, Ústí, Varnsdorf. Table 1 contains distance matrix between nodes of graph. In the table you can find calculated estimated demand of particular nodes – low, average and high demand \underline{d}_i , \hat{d}_i and \bar{d}_i respectively.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	\underline{d}_i	\hat{d}_i	\bar{d}_i
1	0	33	113	68	55	42	85	90	84	69	60	30	1340	1566	2698
2	33	0	86	89	76	53	73	64	115	36	27	51	2646	2915	4259
3	113	86	0	175	162	71	34	23	103	51	69	137	1948	2148	3146
4	68	89	175	0	13	110	145	153	106	125	116	68	1276	1430	2200
5	55	76	162	13	0	97	140	140	111	112	103	55	2664	3071	5107
6	42	53	71	110	97	0	43	48	63	37	26	72	1150	1214	1535
7	85	73	34	145	140	43	0	27	69	37	54	113	2119	2518	4511
8	90	64	23	153	140	48	27	0	96	28	47	115	830	879	1123
9	84	115	103	106	111	63	69	96	0	94	88	114	972	1005	1172
10	69	36	51	125	112	37	37	28	94	0	19	87	1260	1476	2558
11	60	27	69	116	103	26	54	47	88	19	0	78	804	935	1592
12	30	51	137	68	55	72	113	115	114	87	78	0	698	840	1548

Table 1: List of input data – travel matrix, demand

We had used the approaches described in this paper and solve the presented linear problem, results are shown in the table 2.

r	middle value \hat{d}_i					p – fractile $d_i^{0,8}$				
	r	Δ	F	Storage allocation in nodes	Centers supplied from nodes	r	Δ	F	Storage allocation in nodes	Centers supplied from nodes
h, 1000 tkm	500	397347,6	640339	5, 10	from 5: 1,4,5,12	500	397347,6	587359,32	5, 10	from 5: 1,4,5,12
	400	397347,6	640339	5, 10	from 5: 1,4,5,12	400	397347,6	587359,32	5, 10	from 5: 1,4,5,12
	350	No feasible solution found				350	No feasible solution found			
% z	90	397347,6	640339	5, 10	from 5: 1,4,5,12	90	397347,6	587359,32	5, 10	from 5: 1,4,5,12
	60	420459,6	713179	5, 10	from 5: 1,4,5, 6, 12	60	420459,6	657117,7	5, 10	from 5: 1,4,5, 6, 12
	55	483120	894222	5, 7	from 7: 2, 3, 7, 10, 11	55	483120	829806	5, 7	from 7: 2, 3, 7, 10, 11

Table 2: Optimal solution

Beside the optimal value F in the table you can also find storage allocation information and information which nodes supply which centers. Difference between the upper and lower bounds – Δ can also be found in the table 2. The first column in each part of table contains the amount of acceptable difference r in ton kilometers. From the table you can see how solution changes when changing the value of parameter r . You can also compare results for classic approach and p -fractile approach.

The table is divided into two parts. First part of the table presents the solution for the first modification for r where r is presented as a given amount of ton kilometers (t.km). It is clear that the solution for both approaches is similar and does not change for any r greater than 397347,6 t.km. For r less than 397347,6 t.km there is no feasible solution of the problem found. Second part presents the solution for r presented as a percentage of future costs. As you can see from the table, solution is the same for the two approaches for all values of r , the value of objective function is greater for the first approach for any value of r . It is also clear, that with the decrease of number of percent the value of objective function and the difference between the bounds increases.

7 CONCLUSION

This paper offers a possibility to solve allocation problem with uncertain demand using bounded approach which balances the solution by defining acceptable potential change in demand. The problem is first solved using middle values of triangle fuzzy numbers and then the results are compared with the solution achieved with p -fractile coefficients in objective function. This paper concentrates on bounded approaches for allocation problem with fuzzy parameter which use defuzzification method to solve the problem. The presented method has two modifications – the potential loss can be described by a set amount of costs or by percentage of expected costs. Case study is solved to give a better overview of presented technique, computation experiments and comparison of results are provided.

Acknowledgements

This research was supported by the Czech Science Foundation, grant No. P403/12/1947 and by the project F4/54/2015 founded by the Internal Grant Agency of the University of Economics Prague.

References:

1. M. Inuiguchia, J. Ramík, Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem, *Fuzzy Sets and Systems* **111** (2000) 3-28.
2. M. Jayalakshmi, P. Pandian A New Method for Finding an Optimal Fuzzy Solution For Fully Fuzzy Linear Programming Problems. In: *International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)* **vol. 2**, Issue 4 (2012), pp. 247-254.
3. Jaroslav Ramík, Optimal solutions in optimization problem with objective function depending on fuzzy parameters. In: *Fuzzy Sets and Systems* **vol. 158** (2007) pp. 1873–1881

Kontakné údaje

Ing. Maria Kobzareva

University of economics, Prague, Faculty of informatics and statistics

W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague 3, Czech Republic

email: mariakobzareva@vse.cz

TEST JEDNOTKOVÉHO KOREŇA A ŠTRUKTURÁLNE ZMENY ¹

UNIT ROOT TEST AND STRUCTURAL BREAKS

Martin Lukáčik

Abstrakt

Testovanie stacionarity sa stalo bežnou súčasťou takmer všetkých analýz, lebo významne ovplyvňuje výber nástrojov a metód, ktoré sa pri nich použijú. Najčastejšie aplikovaným testom je rozšírený Dickeyho-Fullerov test. Kvôli štrukturálnym zmenám môžu byť jeho závery neadekvátne, preto Perron navrhol jednoduché riešenie využívajúce umelé premenné. Predmetom tohto príspevku je porovnanie oboch postupov v programe EViews.

Kľúčové slová: slabo stacionárny proces, nepravá regresia, diferencovanie, test jednotkového koreňa, štrukturálny zlom

Abstract

Testing of stationarity has become a common part of almost all the analysis because significantly affects the choice of tools and methods that are used in them. The most commonly applied test is Augmented Dickey-Fuller test. Due to structural changes may be his conclusions inadequate, therefore Perron proposed a simple solution using dummy variables. The aim of this paper is to compare these two tests in EViews.

Keywords: weakly stationary process, spurious regression, differencing, unit root test, structural break

1 ÚVOD

Lukáčik a Lukáčiková (2008) uvádzajú, že použitie časových radov v ekonometrických modeloch vyžaduje úpravu klasických predpokladov lineárneho modelu z dôvodu absencie realizácie náhodného výberu ako základnej podmienky ich aplikácie. Riešenie tohto problému si vyžaduje doplnenie predpokladov, aby sa zabezpečili platnosť zákona veľkých čísel a centrálnej limitnej vety. Tým sa do ekonometrie prináša nevyhnutnosť analýzy stacionarity, ktorá bola predtým doménou štatistickej analýzy časových radov.

Ak analyzujeme časové rady po ekonomickej kríze, nevyhneme sa častým prípadom štrukturálnych zlomov, ktoré v tomto období nevyhnutne vznikli. Na testovanie zlomov je v regresiach najčastejšie aplikovaný Chowov test, ktorý porovnáva súčty štvorcov reziduálov modelu rozdeleného podľa obdobia štrukturálnej zmeny a modelu so všetkými pozorovaniami spolu. Spôsob riešenia zlomu sa následne analyzuje pomocou umelých premenných.

Tým sa dostávame na úroveň diskusie, ktorá vznikla niekoľko rokov po publikovaní významného článku, v ktorom na nestacionaritu väčšiny ekonomických premenných upozornili Nelson a Plosser (1982), na ktorých závery reagovali svojou kritikou Perron (1989) a Rappoport s Reichlinovou (1989), ktorí spochybňujú trvalosť šokov Nelsona a Plossera, lebo títo nevzali do úvahy možnosť štrukturálnych zmien v trende, ktorá výrazne ovplyvňuje závery o nestacionarite.

¹ Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku".

V tomto príspevku sa budeme zaoberať, ako sa jednoducho pomocou umelých premenných zmení test jednotkového koreňa bez štrukturálnych zlomov na test so štrukturálnymi zlomami a ukážeme jeho aplikáciu na časovom rade štvrťročných údajov hrubého domáceho produktu Slovenska v bežných cenách v programe EViews.

2 TEST JEDNOTKOVÉHO KOREŇA BEZ ŠTRUKTURÁLNYCH ZLOMOV – ROZŠÍRENÝ DICKEYHO-FULLEROV TEST

Dickey a Fuller (1979) pomocou simulačných experimentov určili kritické hodnoty podielu odhadu parametra a jeho štandardnej odchýlky. Nazvali ju τ štatistika. Dickeyho-Fullerov test porovnáva vypočítanú štatistiku τ s kritickou hodnotou Dickeyho-Fullerovho rozdelenia. Nižšia hodnota štatistiky τ znamená zamietnutie nulovej hypotézy o nestacionarite procesu, ktorý generoval skúmaný rad.

Autori testu si zároveň všimli, že kritické hodnoty τ štatistiky závisia od typu skúmaného modelu. Preto určili kritické hodnoty špeciálne pre model bez absolútneho člena a deterministického trendu, osobitne pre model obsahujúci absolútny člen a zvlášť pre model s absolútnym členom a deterministickým trendom.

V prípade, ak je náhodná zložka v testovaných modeloch autokorelovaný proces, klasický Dickeyho-Fullerov test zlyháva. Preto autori testu navrhli rozšíriť pôvodný autoregresný model prvého rádu na všeobecný autoregresný model rádu p , ktorý eliminuje problém autokorelácie práve pridanými autoregresnými členmi. Kritické hodnoty Dickeyho-Fullerovho testu jednotlivých testovacích rovníc pre rôzne hodnoty hladiny významnosti α a rôzne hodnoty počtu pozorovaní vidíme v tab. 1.

V takomto prípade sa skúmajú modely v tvare:

$$\Delta y_t = \lambda y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (1)$$

$$\Delta y_t = \beta_0 + \lambda y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (2)$$

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \lambda y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (3)$$

Testovanie s modelmi (1) až (3) sa nazýva *rozšírený Dickeyho-Fullerov test (ADF test)*. Rozhodnutie o počte autoregresných členov p v skúmaných rovniciach, ktorý najlepšie eliminuje problém autokorelácie náhodných zložiek, sa obvykle vykonáva pomocou informačných kritérií navrhnutých Akaikem alebo Schwarzom. Vzhľadom na počet možných kombinácií pre testovanie, ktoré sú obsiahnuté v ponúknutých modeloch a hypotézach sa používa rozšírený Dickeyho-Fullerov test obvykle v *sekvenčnej procedúre*, ktorej podrobnejší postup je vysvetlený napr. v práci Lukáčik a Lukáčiková (2013).

Tabuľka 1: Kritické hodnoty Dickeyho-Fullerovho τ -testu (ADF testu)

α	0,01	0,025	0,05	0,10	0,01	0,025	0,05	0,10	0,01	0,025	0,05	0,10
n	τ -test (model bez konštanty)				τ_μ -test (model s konštantou)				τ_τ -test (model s konštantou a trendom)			
25	-2,66	-2,26	-1,95	-1,60	-3,75	-3,33	-3,00	-2,62	-4,38	-3,95	-3,60	-3,24
50	-2,62	-2,25	-1,95	-1,61	-3,58	-3,22	-2,93	-2,60	-4,15	-3,80	-3,50	-3,18
100	-2,60	-2,24	-1,95	-1,61	-3,51	-3,17	-2,89	-2,58	-4,04	-3,73	-3,45	-3,15
250	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	-3,46	-3,14	-2,88	-2,57	-3,99	-3,69	-3,43	-3,13
500	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	-3,44	-3,13	-2,87	-2,57	-3,98	-3,68	-3,42	-3,13

3 TEST JEDNOTKOVÉHO KOREŇA SO ŠTRUKTURÁLNYM ZLOMOM – PERRONOV TEST

Problémom testov jednotkového koreňa sú nesprávne závery, ak dochádza v procese k štrukturálnym zlomom. V takomto prípade testy nedokážu zamietnuť nulovú hypotézu o nestacionarite. Ak by sme poznali obdobie, kedy došlo k zlomu a mali by sme dostatok pozorovaní pred aj po ňom, postačovalo by vykonať testy oddelene. Problémom je zvyčajne nedostatok pozorovaní. Perron (1989) navrhol procedúru na testovanie jednotkového koreňa v prípade štrukturálnej zmeny, ktorá nastala v období $t = \tau + 1$. Nulová hypotéza predpokladá skok v jednom období oproti alternatívne zmeny konštanty trendovo stacionárneho procesu:

$$H_0 : y_t = \beta_0 + y_{t-1} + \mu_1 D_P + u_t, \quad D_P = 1 \text{ ak } t = \tau + 1, \text{ inak } D_P = 0 \quad (4)$$

$$H_1 : y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \mu_2 D_L + u_t, \quad D_L = 1 \text{ ak } t > \tau, \text{ inak } D_L = 0 \quad (5)$$

Perron navrhol využiť ADF test, pričom testovacia rovnica má tvar:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \theta y_{t-1} + \mu_1 D_P + \mu_2 D_L + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (6)$$

a zároveň upravil kritické hodnoty. Tie závisia od podielu poradiu obdobia, kedy nastala zmena na celkovom počte období λ . Kritické hodnoty Perronovho testu jednotlivých testovacích rovníc pre rôzne hodnoty hladiny významnosti α vidíme v tab. 2.

Perronov postup sa dá použiť aj pre iné typy štrukturálnych zmien, napríklad nulová hypotéza permanentnej zmeny absolútneho člena oproti alternatívne zmeny sklonu trendu:

$$H_0 : y_t = \beta_0 + y_{t-1} + \mu_2 D_L + u_t, \quad D_L = 1 \text{ ak } t > \tau, \text{ inak } D_L = 0 \quad (7)$$

$$H_1 : y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \mu_3 D_T + u_t, \quad D_T = t - \tau \text{ ak } t > \tau, \text{ inak } D_T = 0 \quad (8)$$

testovacia rovnica má tvar:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \theta y_{t-1} + \mu_2 D_L + \mu_3 D_T + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (9)$$

Prípadne sa dajú skombinovať a testovať oba predchádzajúce prípady spolu:

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \theta y_{t-1} + \mu_1 D_P + \mu_2 D_L + \mu_3 D_T + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (10)$$

Jednotlivé rovnice, ktoré testujú buď zmenu absolútneho člena alebo zmenu sklonu prípadne obe zmeny naraz, Perron označil postupne ako model A, model B a model C.

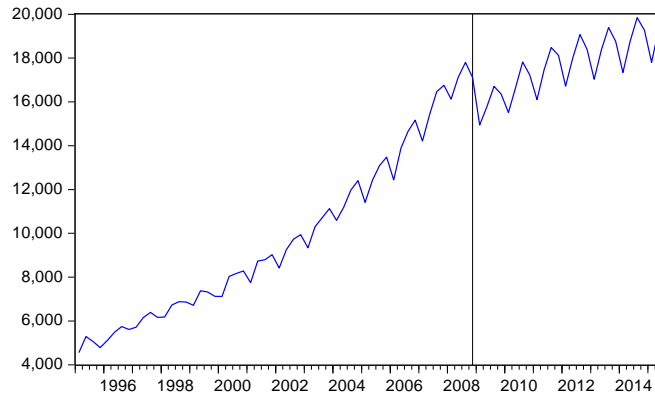
Tabuľka 2: Kritické hodnoty Perronovho testu

α	0,01	0,025	0,05	0,10	0,01	0,025	0,05	0,10	0,01	0,025	0,05	0,10
	Model A				Model B				Model C			
$\lambda=0,1$	-4,30	-3,93	-3,68	-3,40	-4,27	-3,94	-3,65	-3,36	-4,38	-4,01	-3,75	-3,45
$\lambda=0,2$	-4,39	-4,08	-3,77	-3,47	-4,41	-4,08	-3,80	-3,49	-4,65	-4,32	-3,99	-3,66
$\lambda=0,3$	-4,39	-4,03	-3,76	-3,46	-4,51	-4,17	-3,87	-3,58	-4,78	-4,46	-4,17	-3,87
$\lambda=0,4$	-4,34	-4,01	-3,72	-3,44	-4,55	-4,20	-3,94	-3,66	-4,81	-4,48	-4,22	-3,95
$\lambda=0,5$	-4,32	-4,01	-3,76	-3,46	-4,56	-4,26	-3,96	-3,68	-4,90	-4,53	-4,24	-3,96
$\lambda=0,6$	-4,45	-4,09	-3,76	-3,47	-4,57	-4,20	-3,95	-3,66	-4,88	-4,49	-4,24	-3,95
$\lambda=0,7$	-4,42	-4,07	-3,80	-3,51	-4,51	-4,13	-3,85	-3,57	-4,75	-4,44	-4,18	-3,86
$\lambda=0,8$	-4,33	-3,99	-3,75	-3,46	-4,38	-4,07	-3,82	-3,50	-4,70	-4,31	-4,04	-3,69
$\lambda=0,9$	-4,27	-3,97	-3,69	-3,38	-4,26	-3,96	-3,68	-3,35	-4,41	-4,10	-3,80	-3,46

4 TESTOVANIE NESTACIONARITY V PROGRAME EViews

Analyzovaný rad štvrtročných údajov *HDP* Slovenska v mil. eur v bežných cenách vidíme na obr. 1. Zvýraznené je obdobie začiatku krízy, ktorým je 2008Q4.

Obrázok 1: Časový rad štvrtročných údajov *HDP* Slovenska v mil. eur v bežných cenách



Na získanie výsledkov ADF testu v programe EViews použijeme v programe príkazy:

```
freeze(adf_level_1) hdp.uroot(adf,trend,dif=0,info=sic)
freeze(adf_level_2) hdp.uroot(adf,const,dif=0,info=sic)
freeze(adf_level_3) hdp.uroot(adf,none,dif=0,info=sic)
freeze(adf_dif1_2) hdp.uroot(adf,const,dif=1,info=sic)
freeze(adf_dif1_3) hdp.uroot(adf,none,dif=1,info=sic)
freeze(adf_dif2_2) hdp.uroot(adf,const,dif=2,info=sic)
freeze(adf_dif2_3) hdp.uroot(adf,none,dif=2,info=sic)
```

Výsledky testovania nestacionarity ADF testom sú prezentované v tab. 3.

Tabuľka 3: Výsledky jednotlivých testovacích rovníc pre pôvodnú premennú a prvú diferenciu

	Model 1	Model 2	Model 3		Model 2	Model 3		Model 2	Model 3
level	τ stat	τ stat	τ stat	1st diff	τ stat	τ stat	2nd diff	τ stat	τ stat
α	-1.8576	-0.9323	1.1136	α	-2.3161	-1.1679	α	-6.5787	-6.6294
1%	-4.0887	-3.5229	-2.5970	1%	-3.5229	-2.5970	1%	-3.5229	-2.5970
5%	-3.4726	-2.9018	-1.9453	5%	-2.9018	-1.9453	5%	-2.9018	-1.9453
10%	-3.1635	-2.5883	-1.6139	10%	-2.5883	-1.6139	10%	-2.5883	-1.6139

Na základe uvedených výsledkov môžeme konštatovať nestacionaritu *HDP* aj prvých diferencií *HDP*, ale stacionaritu druhých diferencií *HDP*. To by znamenalo, že *HDP* je integrované rádu 2, čo je nepravdepodobné.

Na získanie výsledkov Perronovho testu v programe EViews použijeme v programe príkazy:

```
scalar break = @dtoo("2008q3")
scalar lambda = (break-9)/(@obssmpl-9)
series Dp = @trend=break
series Dl = @trend>=break
series Dt = Dl*(@trend-break+1)
equation perron_lev_A.ls d(hdp) c @trend hdp(-1) dp dl d(hdp(-1)) d(hdp(-2)) ...
equation perron_lev_B.ls d(hdp) c @trend hdp(-1) dl dt d(hdp(-1)) d(hdp(-2)) ...
equation perron_lev_C.ls d(hdp) c @trend hdp(-1) dp dl dt d(hdp(-1)) d(hdp(-2)) ...
equation perron_dif1_A.ls d(hdp,2) c @trend d(hdp(-1)) dp dl d(hdp(-1),2) d(hdp(-2),2) ...
equation perron_dif1_B.ls d(hdp,2) c @trend d(hdp(-1)) dl dt d(hdp(-1),2) d(hdp(-2),2) ...
equation perron_dif1_C.ls d(hdp,2) c @trend d(hdp(-1)) dp dl dt d(hdp(-1),2) d(hdp(-2),2) ...
```

Počet autoregresných členov p v skúmaných rovniciach, ktorý najlepšie eliminuje problém autokorelácie náhodných zložiek, sa obvykle vykonáva pomocou informačných kritérií navrhnutých Akaikem alebo Schwarzom, ale pre jednoduchosť použijeme 8 a 7 oneskorení podľa výsledkov z ADF testu (vo výpise príkazov je neúplný výpis reprezentovaný ...).

Výsledky testovania nestacionarity ADF testom sú prezentované v tab. 4. Podiel poradia obdobia, kedy nastala zmena na celkovom počte období λ sa rovná 0,63.

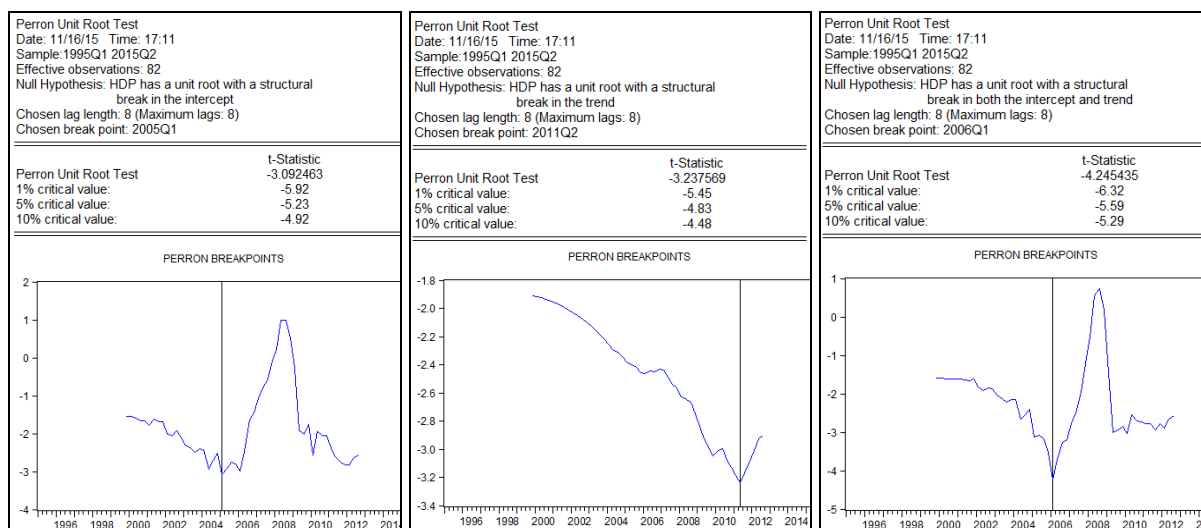
Tabuľka 4: Výsledky jednotlivých testovacích rovníc pre pôvodnú premennú a prvú diferenciu

	Model A	Model B	Model C		Model A	Model B	Model C
level	t stat	t stat	t stat	1st diff	t stat	t stat	t stat
β_1	1.27956	1.061	1.05589	β_1	4.1974	4.60361	4.067018
θ	0.51652	0.1969	0.1666	θ	-5.0528	-6.1255	-5.02802
μ_1	-0.118		-0.1722	μ_1	-0.1289		-0.2017
μ_2	-4.3981	-4.5757	-3.6943	μ_2	-4.616	-5.6915	-4.49541
μ_3		-0.26	-0.2871	μ_3		-0.5506	-0.56799

Na základe uvedených výsledkov môžeme konštatovať nestacionaritu *HDP* so štrukturálnym zlomom permanentnej zmeny absolútneho člena, ale trendovú stacionaritu prvých diferencií *HDP* so štrukturálnym zlomom permanentnej zmeny absolútneho člena. To by znamenalo, že *HDP* je integrované rádu 1.

Tvorcovia programu EViews od verzie 7 ponúkajú doplnok (EViews Add-in) s názvom *ppuroot* a v najnovšej verzii 9 dokonca Perronov test zapracovali do ponuky pre časové rady *View/Breakpoint_Unit_Root_Test*, pričom ich verzia testu nevyžaduje explicitné zadanie obdobia štrukturálneho zlomu, ale ho vyhľadá porovnaním cez dostupné obdobia podľa novej úpravy testu Perronom (1997).

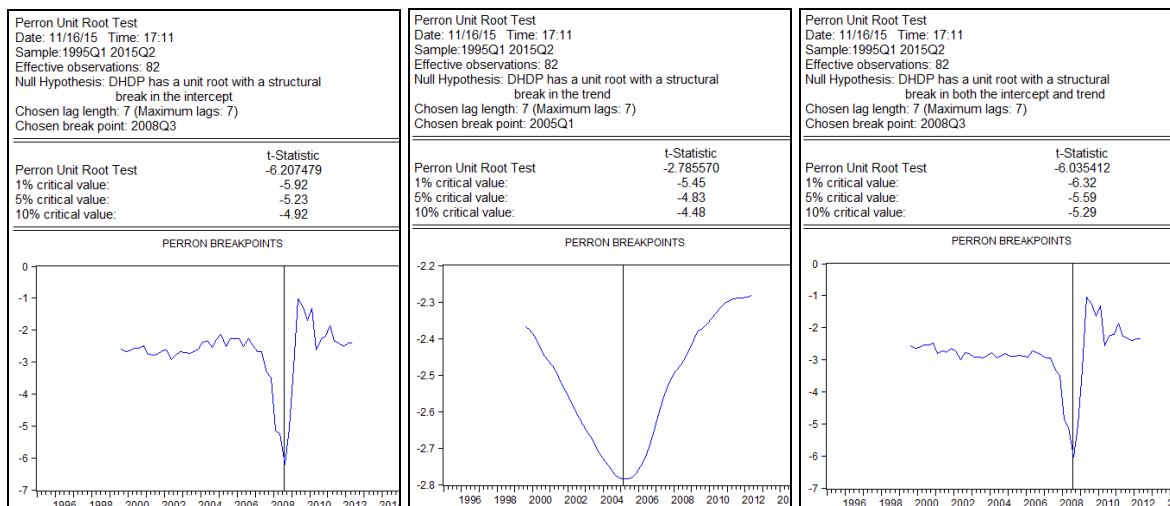
Obrázok 2: Perronov test jednotkového koreňa *HDP* Slovenska v mil. eur v bežných cenách



Výsledky na obr. 2 potvrdzujú nestacionaritu *HDP*, aj keď pre jednotlivé typy zlomov je vždy identifikované iné obdobie odlišné od predpokladaného obdobia začiatku krízy. Výsledky na obr. 3 zobrazujú rovnakú analýzu pre prvú diferenciu *HDP*. Vidíme, že tam, kde sa v modeli nachádza štrukturálna zmena v absolútnom člene (jej trvalá zmena), tam zamietame hypotézu o nestacionarite a prvú diferenciu sú stacionárne. Program EViews identifikuje ako obdobie zlomu posledné obdobie pred posunom.

Analogické výsledky dostaneme aj pri sezónnej prvej diferencii.

Obrázok 3: Perronov test jednotkového koreňa prvej diferencie HDP Slovenska



5 ZÁVER

Ignorovať štrukturálne zlomy pri testovaní nestacionarity často môže viesť k nesprávnym záverom. To ukázal aj prezentovaný prípad analýzy HDP Slovenska. Na testovanie pritom nie je potrebné využiť zabudovanú funkcionálnu programov. Aj vlastný postup vychádzajúci z Perronovej prvotnej analýzy môže byť vhodnejším nástrojom ako štandardný ADF test.

Použitá literatúra

1. DICKEY, D.A., FULLER, W.A. 1979. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. In: *Journal of the American Statistical Association*, roč. 74, s. 427-431.
2. DICKEY, D.A., FULLER, W.A. 1981. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. In: *Econometrica*, roč. 49, s. 1057-72.
3. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2008. Význam testovania stacionarity v ekonometrii. In: *Ekonomika a informatika*, roč. 6, č. 1, s. 146-157.
4. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Vektorovo autoregresné modely a ich aplikácie v makroekonomickej analýze. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
5. LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Englova-Grangerova procedúra a dynamická metóda najmenších štvorcov. In: AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: 15. medzinárodná vedecká konferencia, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
6. PERRON, P. 1989. The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit-root Hypothesis. In: *Econometrica*, roč. 57, s. 1361-1401.
7. PERRON, P. 1997. Further Evidence on Breaking Trend Functions in Macroeconomic Variables. In: *Journal of Econometrics*, roč. 80, s. 355-385.
8. RAPPOPORT, P., REICHLIN, L. 1989. Segmented Trends and Non-Stationary Time Series. In: *Economic Journal*, roč. 99, Supplement 1989, s. 168-177.
9. SZOMOLÁNYI, K. 2013. Model slovenského hospodárskeho cyklu. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: lukacik@euba.sk

BAYESOVSKÉ VÝPOČTY V EKONOMETRII ¹

BAYESIAN COMPUTATIONS IN ECONOMETRICS

Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi

Abstrakt

S príchodom algoritmov založených na Monte Carlo Markovových reťazcoch sa bayesovské metódy podľa Greenberga (2013) rozšírili do rozsiahlej množiny aplikácií, medzi ktorými nechýba ani ekonometria. Predmetom tohto príspevku je vysvetlenie Monte Carlo integrovania a podstaty dvoch základných algoritmov, z ktorých vychádzajú všetky ostatné, a to Gibbsovo vzorkovanie a Metropolisovho-Hastingsovho algoritmu.

Kľúčové slová: *apriórne a aposteriórne rozdelenie, Monte Carlo integrovanie, Gibbsovo vzorkovanie, Metropolisov-Hastingsov algoritmus*

Abstract

Greenberg (2013) in his book notes, that since the advent of Markov Chain Monte Carlo algorithms Bayesian methods have been extended to a large set of applications, among them not lack even econometrics. The subject of this paper is to explain Monte Carlo integration and the nature of two basic algorithms underlying all others: Gibbs sampling and Metropolis-Hastings algorithm.

Keywords: *prior and posterior, Monte Carlo integration, Gibbs sampling, Metropolis-Hastings algorithm*

1 ÚVOD

Podľa Koopa a spoluautorov (2007) by mal analytik využívajúci bayesovské vzťahy zvládnuť okrem bayesovskej metodológie (teórie) aj výpočtové nástroje, ktoré sa v bayesovskej ekonometrii používajú. A taktiež by mal byť schopný spojiť dohromady teóriu a výpočtové nástroje v kontexte riešeného empirického problému.

Pripomeňme značenie, ktoré sme používali v predchádzajúcich príspevkoch a bude využité aj v tomto. Vzťah medzi posteriorom (aposteriorným rozdelením pravdepodobnosti náhodnej premennej θ) označovaným $\pi(\theta|y)$, ktoré je podmienené pozorovanými dátami y a priorom (apriórny rozdelením pravdepodobnosti) označovaným $\pi(\theta)$ môžeme zapísať v tvare:

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{f(y)} \quad \text{resp.} \quad \pi(\theta|y) \propto f(y|\theta)\pi(\theta) \quad (1)$$

Pri rozvoji bayesovských analýz výpočtová časť dlho zaostávala za teoretickou. Dôvodom je komplikovanosť vzťahov, ktoré sa pri výpočte posteriorov vyskytujú. Totiž iba v niektorých jednoduchých prípadoch je aposteriórne rozdelenie vyjadriteľné analyticky. Ale s rozvojom numerických metód a metód, ktoré boli pri aproximáciách v iných vedných disciplínach využívané už dlhšie, sa rozšírila možnosť ich využitia aj v oblasti bayesovských odhadov.

¹ Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 044EU-4/2015 "Vypracovanie monografie Bayesovská ekonometria pre prax a študentov postgraduálneho štúdia".

Na simulovanie aposteriorného rozdelenia sa využívajú Monte Carlo integrovanie a z algoritmov Monte Carlo Markovových reťazcov (MCMC) buď Gibbsov algoritmus generovania vzoriek tzv. Gibbsovo vzorkovanie alebo Metropolisov-Hastingsov algoritmus. Oba algoritmy využívajú Markovové reťazce, preto pripomeňme ich základné vlastnosti.

Pri Markovových reťazcoch systém prechádza rôznymi stavmi tak, že každý ďalší stav závisí len od stavu, v ktorom sa bezprostredne nachádzal predtým a nie na celej histórii reťazca. Keďže je každý stav obmenou predchádzajúceho, blízke stavy sú korelované a neodrážajú cieľové rozdelenie. Aby sme získali nezávislé vzorky stavov, väčšina z nich sa vyradí a ponechá sa napríklad len každá tisíca vzorka. Každá vzorka koreluje s predchádzajúcou a ak reťazec pobeží dostatočne dlho, rozdelenie získaných vzoriek aproximuje ľubovoľné rozdelenie, z ktorého vzorky vyberáme. Konvergencia reťazca je tým rýchlejšia, čím viac sa návrhové rozdelenie podobá cieľovému.

Predmetom nášho záujmu v príspevku sú Monte Carlo integrovanie, Gibbsovo vzorkovanie a Metropolisov-Hastingsov algoritmus. A práve z posledných dvoch vychádzajú všetky ďalšie odvodené algoritmy používané na simulovanie posteriora.

2 MONTE CARLO INTEGROVANIE V REGRESII

Koop a spoluautori vysvetľujú Monte Carlo integrovanie nasledovne. Predpokladajme, že môžeme získať nezávislé a rovnako rozdelené (iid) vzorky stavov z posteriora $\pi(\theta|y)$, ktoré označme $\theta^{(r)}$ pre $r = 1, \dots, R$. Nech $g(\theta)$ je funkciou parametrov modelu, podľa slabého zákona veľkých čísel platí, že pre R blížiacie sa nekonečnu priemerná hodnota $g(\theta^{(r)})$ slabo konverguje v pravdepodobnosti k strednej hodnote $g(\theta)$:

$$\hat{g} = \frac{\sum_{r=1}^R g(\theta^{(r)})}{R} \xrightarrow{P} E[g(\theta)|y] \quad (2)$$

Potom odhad ľubovoľnej funkcie parametrov modelu môže byť podľa stratégie Monte Carlo integrovania vypočítané náhodným výberom vzoriek z posteriora a výpočtom priemernej hodnoty vzoriek. Zároveň títo autori upozorňujú, že málokedy sa dajú jednoducho priamo získať vzorky stavov z posteriora okrem niekoľkých špeciálnych prípadov. Preto odporúčajú alternatívny algoritmus váženého vzorkovania, ktoré využíva funkciu váh.

Ako príklad uvažujme úlohu navrhnutú Koopom a spoluautormi, v ktorej ukážeme Monte Carlo integrovanie v regresii.

1. Začneme generovaním údajov pre lineárny model s jednou vysvetľujúcou premennou a konštantou, pričom na začiatku zvolíme rozmer pre údaje, napr. $N = 100$. Konštantu β_0 nastavíme, aby sa rovnala 0, sklon β_1 sa rovná 1 a presnosť h ako opak rozptylu takisto 1.
2. Generujeme jednu hodnotu vysvetľujúcej premennej x_i z rovnomerného rozdelenia $U(0,1)$.
3. Generujeme jednu hodnotu náhodnej zložky u_i z normálneho rozdelenia $N(0,1)$.
4. Vypočítame závislú premennú y_i podľa vzťahu: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$
5. Opakujeme kroky 2 až 4 postupne N krát a vytvoríme

Vypočíta sa posterior priemeru a štandardnej odchýlky parametrov podľa vzťahov odvodených v Lukáčik a spoluautori (2015) a upravených tak, že namiesto náhodnej zložky $y_i - \beta x_i$ je uvažovaný vzťah $y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i$ resp. jeho maticový tvar $\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ a namiesto reziduálu $y_i - \hat{\beta} x_i$ je uvažovaný vzťah $y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$ resp. jeho maticový tvar $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta}$. Prior má normálne-Gama rozdelenie s hodnotami $\underline{\beta}_0 = 0, \underline{\beta}_1 = 1, \underline{V} = I_2, \underline{s}^{-2} = 1$ a $\underline{\nu} = 1$.

Následne sa vypočíta bayesov faktor (podiel marginálnych vierohodností) porovnávajúci model $M_1: \beta_1 = 0$ s $M_2: \beta_1 \neq 0$. Najskôr vypočítame marginálnu vierohodnosť modelu aj s premennou a následne modelu iba s konštantou a predelíme ich. Zároveň môžeme riešiť analýzu senzitivnosti tak, že nastavíme pre $\underline{V} = cI_2$ postupne rôzne hodnoty c od stotiny po milión a sledovať dopad zmeny tejto konštanty na posteriory a bayesov faktor.

Obvyklý záver tohto postupu je ten, že posterior priemeru a štandardnej odchýlky parametrov je oveľa viac odolný na zmeny v priore ako bayesov faktor. Okrem hodnôt extrémne informatívneho priora ($c = 0,01$) sú posterior priemeru a štandardnej odchýlky parametrov veľmi podobné pre ostatné hodnoty c . Na rozdiel od toho bayesov faktor slúžiaci na porovnanie modelov sa vyvíja od preferencie neohraničeného modelu pre malé hodnoty c , až po podporu ohraničeného modelu, keď sa prior stáva viac neinformatívnym. Samozrejme, prior je centrováný pre hodnoty, s ktorými boli generované dáta, preto prior a maximálna vierohodnosť nie sú v konflikte. Na pochopenie vplyvu sa odporúčajú vyskúšať aj hodnoty, ktoré sú v konflikte, napr. $\beta_1 = -1$.

Monte Carlo integrovanie sa dá realizovať dvomi spôsobmi. Prvý spôsob je priamy výber z posteriora pre vektor β pomocou t rozdelenia viacerých premenných. Druhý spôsob nazývaný metóda kompozície vyberá najskôr posterior h z Gama rozdelenia a následne z $\pi(\beta | y, h)$, ktoré má normálne rozdelenie. Programové riešenie náhodným výberom z t rozdelenia sa dá nájsť napr. v LeSage (1999).

3 GIBBSOVO VZORKOVANIE (GIBBS SAMPLING) V REGRESII

Gibbsovo vzorkovanie je obľúbený algoritmus používaný v prípadoch, keď sa ľahko pracuje s podmieneným aposteriorným rozdelením. Koop so spoluautormi opäť zjednodušene ilustrujú Gibbsovo vzorkovanie na prípade, keď je vektor parametrov rozdelený do dvoch blokov $\theta^T = [\theta_1^T \theta_2^T]$. Gibbsovo vzorkovanie vytvára reťazec vzoriek $\theta^{(r)}$ pre $r = 1, \dots, R$ takých, že pre R blízke sa nekonečnu priemerná hodnota $g(\theta^{(r)})$ konverguje k strednej hodnote $g(\theta)$:

$$\hat{g} = \frac{\sum_{r=1}^R g(\theta^{(r)})}{R} \xrightarrow{P} E[g(\theta) | y] \quad (3)$$

teda reťazec je vytvorený iteračným výberom z aposteriorného podmieneného rozdelenia. To znamená, že $\theta_1^{(r)}$ je vyberané z posteriora $\pi(\theta_1 | y, \theta_2^{(r-1)})$ a $\theta_2^{(r)}$ je vyberané z posteriora $\pi(\theta_2 | y, \theta_1^{(r)})$. Vidíme, že Gibbsovo vzorkovanie vyžaduje výber štartovacej hodnoty $\theta_2^{(0)}$. Aby sa eliminoval vplyv štartovacej hodnoty, obvykle sa vyradí počiatkových R_0 stavov označovaných ako „odpálené“ (burn-in).

Greenberg (2013) formalizuje algoritmus Gibbsovho vzorkovania pre prípad d blokov takto:

1. Zvolíme štartovacie hodnoty $\theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)}$
2. Vyberáme
 - $\theta_1^{(1)}$ z podmieneného posteriora $\pi(\theta_1 | y, \theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$
 - $\theta_2^{(1)}$ z podmieneného posteriora $\pi(\theta_2 | y, \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_d^{(0)})$ až
 - $\theta_d^{(1)}$ z podmieneného posteriora $\pi(\theta_d | y, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{d-1}^{(1)})$
3. Na g -tej iterácii
 - $\theta_1^{(g)}$ z podmieneného posteriora $\pi(\theta_1 | y, \theta_2^{(g-1)}, \theta_3^{(g-1)}, \dots, \theta_d^{(g-1)})$
 - $\theta_2^{(g)}$ z podmieneného posteriora $\pi(\theta_2 | y, \theta_1^{(g)}, \theta_3^{(g-1)}, \dots, \theta_d^{(g-1)})$ až
 - $\theta_d^{(g)}$ z podmieneného posteriora $\pi(\theta_d | y, \theta_1^{(g)}, \theta_2^{(g)}, \dots, \theta_{d-1}^{(g)})$
 pokiaľ nezískame požadovaný počet iterácií

Príklad Gibbsovo vzorkovania je uvedený v práci Lukáčik a spoluautori (2015), kde bol simulovaný a následne bayesovsky odhadnutý lineárny model s jednou vysvetľujúcou premennou bez absolútneho člena v programe *R*. Z tohto dôvodu ho nebudeme opakovať. Počet vyradených hodnôt na začiatku bol zvolený dosť malý (iba 200 vzoriek stavov), pričom sa odporúčajú rádovo až tisícky. Ale v tomto príklade to bol celkový počet realizovaných iterácií.

Prípadne môžeme zvoliť príklad, ktorý uvádza LeSage (1999) na stranách 156 až 159 a ktorý ukazuje Gibbsovo vzorkovanie v programe MatLABe. Následne prezentuje diagnostiku tohto modelu a jeho rozšírenia.

4 METROPOLISOV-HASTINGSOV ALGORITMUS

Metropolisov-Hastingsov algoritmus je podľa Koopa a spoluautorov v skutočnosti celá trieda algoritmov. Podobne ako oba predchádzajúce prístupy vytvára reťazec vzoriek stavov $\theta^{(r)}$ pre $r = 1, \dots, R$ takých, že pre R blízke sa nekonečnu priemerná hodnota $g(\theta^{(r)})$ konverguje k strednej hodnote $g(\theta)$:

$$\hat{g} = \frac{\sum_{r=1}^R g(\theta^{(r)})}{R} \xrightarrow{P} E[g(\theta) | y] \quad (4)$$

Zahrňa výber z vhodného rozdelenia príbuzného funkcii váh, označovanej ako kandidátsky generovaná hustota. Kandidátske výbery z $\theta^{(r)}$ sú buď akceptované alebo zamietnuté s istou pravdepodobnosťou označovanou pravdepodobnosť prijatia. Ak sú zamietnuté, $\theta^{(r)}$ sa nastaví na $\theta^{(r-1)}$. Pravdepodobnosť akceptácie závisí na presnom tvare algoritmu. Obvykle sa používajú dva varianty algoritmu: nezávislý M-H algoritmus a M-H algoritmus s náhodnou prechádzkou.

Greenberg formalizuje Metropolisov-Hastingsov algoritmus takto:

1. Pre dané hodnoty x vygenerujeme kandidáta y na nasledujúci stav z rozdelenia $q(x,y)$
2. Generuj U z rovnomerného rozdelenia $U(0,1)$. Ak je U menšie a nanajvýš rovné vypočítanej pravdepodobnosti prijatia $\alpha(x,y)$

$$U \leq \alpha(x, y) = \begin{cases} \min \left\{ \frac{f(y)q(y,x)}{f(x)q(x,y)}, 1 \right\} & f(x)q(x,y) \neq 0 \\ 0 & f(x)q(x,y) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

prijmi y . V opačnom prípade zamietni y a prijmi x a vráť sa ku kroku 1.

Výhodou algoritmu je, že pri výpočte pravdepodobnosti prijatia sa normovací koeficient cieľovej hustoty vykrátí, takže hodnota cieľovej hustoty môže byť nenormovaná.

LeSage (1999) uvádza aj príklad Metropolisovho-Hastingsovho algoritmu na príklade priestorovo autoregresného modelu 1. rádu.

Možnosť použitia Metropolisovho-Hastingsovho algoritmu v podprograme Dynare slúžiacom na bayesovský odhad parametrov DSGE modelov v prostredí MatLAB uvádza Horvát (2012) a podrobnejšie aj s príkladom ho uvádza vo svojej dizertačnej práci (2014).

5 ZÁVER

Bayesovské výpočtové nástroje majú v súčasnosti rozsiahle aplikačné využitie. Nami prezentované algoritmy sú východiskom ďalších algoritmov, ktoré naplňajú teoretické východiská pri empirických problémoch. Na simulovanie a posteriori rozdelenia, ktoré je kľúčom k bayesovským aplikáciám sa využíva Monte Carlo integrovanie, Gibbsov algoritmus generovania vzoriek alebo Metropolisov-Hastingsov algoritmus prípadne ich kombinácie. Cieľom nášho článku bola ich prezentácia v čo najjednoduchších reláciách a príkladoch.

Použitá literatúra

1. BOLSTAD, W.M. 2010. *Understanding Computational Bayesian Statistics*. New Jersey: John Wiley & Sons.
2. BROOKS, S.P. 1998. Markov Chain Monte Carlo Method and Its Application. In: *The Statistician* 47(1), s. 69-100.
3. ČERNÝ, D. 2013. *Bayesovská statistika. Klíč k porozumění vesmíru?* Retrieved from http://gchd.cz/fygyz/2012_2013/david_cerny-bayesovska_statistika.pdf
4. GREENBERG, E. 2013. *Introduction to Bayesian Econometrics*. Cambridge: Cambridge University Press.
5. HASTINGS, W.K. 1970. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. In: *Biometrika* 57(1), s. 97-109.
6. HORVÁT, P. 2012. Bayesiansky odhad parametrov. Dostupné na internete: <http://www.fhi.sk/files/katedry/kove/veda-vyskum/prace/2012>.
7. HORVÁT, P. 2015. DSGE modely v podmienkach SR. Dizertačná práca.
8. KOOP, G. – POIRIER, D.J. – TOBIAS, J.L. 2007. *Bayesian Econometric Methods (Econometric Exercises, Volume 7)*. Cambridge: Cambridge University Press.
9. LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. – SZOMOLÁNYI, K. 2015. Rozdelenie priora a posteriora pri bayesovských odhadoch v ekonometrii. In: *AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach*. Bratislava: Ekonóm, s. 653-659 .
10. LESAGE, J.P. 1999. Applied Econometrics using MATLAB. Dostupné na internete: <http://www.spatial-econometrics.com/>

Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 822
email: lukacik@euba.sk, istvanik@euba.sk, szomolan@euba.sk

VPLYV KRÍZY NA STABILITU ŠTRUKTÚRY PARAMETROV EKONOMETRICKÉHO MODELU¹

THE IMPACT ON THE STABILITY OF STRUCTURES PARAMETERS OF ECONOMETRIC MODELS

Adriana Lukáčiková

Abstrakt

V ekonomike často dochádza v rámci pozorovaného obdobia k zlomu, ktorý môže byť dôsledkom štrukturálnych zmien. Pri konštrukcii ekonometrických modelov je nevyhnutné tento fakt skúmať a implementovať do modelu. Najznámejším testom štrukturálnej zmeny koeficientov je Chowov test, ktorý porovnáva regresie z dvoch období, pred a po zmene. Na základe Quandtovho-Andrewsovoho testu vieme zistiť, v ktorom období dochádza k štrukturálnej zmene. Zo záverov týchto testov sa však nedá určiť, ktorý z parametrov je rôzny v období pred a po štrukturálnej zmene. Prístup umelých premenných má tú výhodu, že okrem zistenia, či sú dve regresie rôzne, vieme určiť aj zdroj rozdielu.

Kľúčové slová: štruktúrna stabilita, Chowov test, Quandtov-Andrewsov test, umelé premenné

Abstract

In economics often occurs within the observation period to break, which may be due to structural changes. In the design of econometric models, it is necessary to consider that fact and implement the model. The most famous test is the structural change coefficients Chow test that compares the regression of the two periods before and after the. Based Quandt-Andrews test, we can determine in which period there is a structural change. The conclusions of these tests, however, cannot determine which of the parameters is different between before and after structural change. Including artificial variable has the advantage that in addition to determining whether the two different regressions, can determine the source of the difference.

Keywords: stability of structure, Chow test, Quandt-Andrews test, dummy variables

1 ÚVOD

V klasickom lineárnom ekonometrickom modeli štandardne odhadujeme parametre na základe všetkých pozorovaní výberu, predpokladáme teda, že úroveň konštanty aj sklon sú rovnaké. Môže však nastať situácia, že v ekonomike dochádza v rámci pozorovaného obdobia k zlomu, čo môže byť dôsledok napríklad zmien v legislatíve (zavedenie novej daňovej sústavy), klimatických zmien, prudkých zmien technológií respektíve veľkých hospodárskych zmien. Pri konštrukcii modelov, ktoré obsahujú obdobia prvej dekády 21. storočia, je nevyhnutné sledovať aj vplyv krízy, ktorá sa začala prejavovať v roku 2008. Skúmaná funkcia môže podstupovať štrukturálnu zmenu, čo je dôležité v odhadovanom modeli identifikovať, testovať príslušnými testami a adekvátne riešiť.

¹ Tento príspevok vznikol s podporou VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku"

2 TESTOVANIE STABILITY ŠTRUKTÚRY PARAMETROV

Skúmanie štruktúrnej stability modelu môže poukázať na fakt, že došlo k zmene všetkých skúmaných parametrov alebo iba k zmene v absolútnom člene či k zmene iba v parametri pri jednej premennej. Vo všetkých týchto prípadoch má odhad modelu s nemeniacimi sa parametrami za následok, že pre niektoré obdobia sú skutočné hodnoty parametrov podhodnotené a pre ostatné obdobia nadhodnotené. To znamená, že estimátory metódy najmenších štvorcov modelu nezachycujúceho zmeny sú skreslené a nekonzistentné.

Zmena koeficientov významného rozsahu by sa mala dať identifikovať grafickou analýzou vzťahov medzi závislou a každou nezávislou premennou a grafickým priebehom sledovaných veličín v čase, čo by malo byť vždy súčasťou tvorby špecifikácie modelu. Na odhalenie menej výrazných zmien štruktúrnych koeficientov a chýb špecifikácie spôsobujúcich stratu želaných vlastností estimátorov je navrhnutých niekoľko testovacích postupov.

Najznámejším testom štruktúrnej zmeny koeficientov je Chowov test. Ak máme dostatočný počet pozorovaní pred (označené n_1) aj po štruktúrnej zmene ($n_2 = n - n_1$), potom sa na testovanie štruktúrnej stability používa testovacia štatistika s Fisherovým rozdelením s $k + 1$ a $(n_1 + n_2 - 2k - 2)$ stupňami voľnosti. Chowova štatistika je špeciálnym prípadom F-štatistiky a má tvar:

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/(k + 1)}{RSS_U/(n_1 + n_2 - 2k - 2)}$$

kde k je počet premenných modelu bez štruktúrnej zmeny s počtom pozorovaní $n_1 + n_2$ a so súčtom štvorcov reziduálov RSS_R . Premenná RSS_U označuje spočítanú hodnotu súčtov štvorcov reziduálov získaných po odhade z dvoch modelov. Prvou je suma štvorcov získaná z modelu pred štruktúrnou zmenou s počtom pozorovaní n_1 a druhou je suma štvorcov reziduálov získaná po odhade z modelu po štruktúrnej zmene s počtom pozorovaní n_2 .

Ak hodnota Chowovej štatistiky je väčšia ako kritická hodnota Fisherovho rozdelenia na zvolenej hladine významnosti, tak zamietame hypotézu, že regresie pred štruktúrnou zmenou a po nej sú rovnaké. Týmto zamietame hypotézu o štruktúrnej stabilite.

Ďalším testom je Quandtov-Andrewsov test, ktorým testujeme prítomnosť jedného alebo viacerých neznámych štruktúrnych bodov zlomu. Procedúra Quandtovho-Andrewsovho testu vypočíta a sumarizuje štatistiky Chowovho testu do jednej štatistiky, LR F-štatistiky a Waldovej F-štatistiky. Na základe individuálnych testovacích štatistik je možné vypočítať tri rozličné štatistiky: Maximum F, Exp štatistika a Ave štatistika. Maximum F je jednoduchým maximom z individuálnych Chowových štatistik.

Ani jeden z vyššie uvedených testov nedáva odpoveď na otázku, ktorý z parametrov spôsobil nestabilitu. Tá sa obvykle získa využitím techník umelých premenných.

V Chowovom teste porovnávame parametre modelu získané z odhadu pri použití údajov pred overovaného pozorovania, v ktorom malo dôjsť ku štruktúrnej zmene a z odhadu pri použití údajov od tohto pozorovania. Testom porovnávame, či je pre nás adekvátny odhad parametrov modelu:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + u_t, \quad \text{pre } t = 1, 2, \dots, n$$

alebo dvojice modelov:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t1} + u_{t1}, \quad \text{pre } t = 1, 2, \dots, n_1$$

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_{t1} + u_{t2}, \quad \text{pre } t = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$$

Aby sme určili, ktorý z parametrov je nestabilný, zaradíme do modelu umelú premennú. V tomto prípade očakávame, že zmena vplyva na absolútny člen aj na parameter pri vysvetľujúcej premennej. Umelá premenná D nadobúda hodnotu 0 pre obdobie pred štruktúrnou zmenou, teda pre $t = 1, 2, \dots, n_1$, a hodnotu 1 v období od štruktúrnou zmeny, teda pre $t = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$.

Model s umelou premennou:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 d_t + \beta_2 d_t x_t + \beta_3 x_t + u_t$$

nadobúda pre obdobie pred štruktúrnou zmenou, v ktorom $d_t = 0$, tvar:

$$E(y_t, d_t = 0, x_t) = \beta_0 + \beta_3 x_t$$

a od obdobia po štruktúrnou zmene, v ktorom $d_t = 1$, nadobúda tvar:

$$E(y_t, d_t = 1, x_t) = \beta_0 + \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)x_t$$

Pri testovaní štatistickej významnosti parametrov pri umelej premennej a pri súčine umelej a vysvetľujúcej premennej môžu nastať štyri prípady:

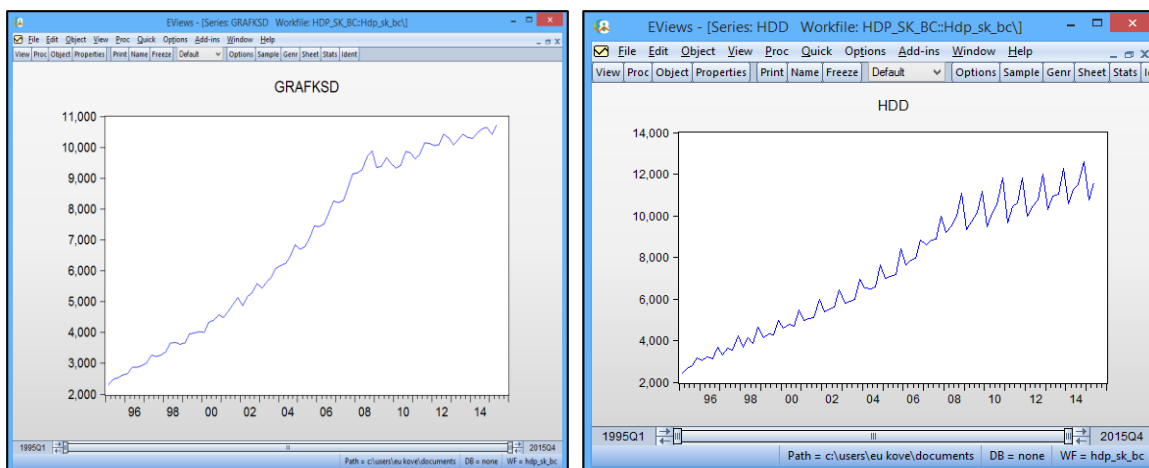
- obidva parametre sú štatisticky nevýznamné, teda $\gamma_0 = \alpha_0$ a $\gamma_1 = \alpha_1$, čo znamená, že regresné priamky modelu sú totožné, a to potvrdzuje stabilitu oboch parametrov v pôvodnom modeli
- iba parameter pri súčine umelej a vysvetľujúcej premennej je nevýznamný, teda $\gamma_1 = \alpha_1$, čo znamená, že regresné priamky modelu sú rovnobežné a nezhodné, a to potvrdzuje nestabilitu úrovňovej konštanty
- iba parameter pri umelej premennej je nevýznamný, teda $\gamma_0 = \alpha_0$, čo znamená, že regresné priamky modelu sa zbiehajú v hodnote absolútneho člena na osi y , a to potvrdzuje nestabilitu parametra v sklone
- obidva parametre sú štatisticky významné, čo znamená, že regresné priamky modelu sa pretínajú v jednom bode, a to potvrdzuje nestabilitu oboch parametrov v pôvodnom modeli.

Pripomíname, že testovanie stability využívajúce umelé premenné rovnako ako Chowov test predpokladá, že rozptyl náhodnej zložky sa nemení pre všetkých n pozorovaní. Preto je pred ich použitím potrebné preveriť homoskedasticitu u_t .

3 VPLYV KRÍZY NA ŠTRUKTÚRNU STABILITU PARAMETROV SPOTREBNEJ FUNKCIE

Vyššie popísané testy a techniky umelých premenných využijeme pri modelovaní spotrebnej funkcie za obdobie 1995q1 až 2015q2, pričom determinantom spotreby je hrubý disponibilný dôchodok. Sledované obdobie obsahuje aj pozorovania, v ktorom došlo v ekonomike ku kríze, čomu musíme pri konštrukcii modelu venovať pozornosť.

Na grafe č. 1 je znázornený priebeh konečnej spotreby domácností (KSD) a priebeh hrubého disponibilného príjmu (HDD), z ktorého sa dá usudzovať, že od roku 2008 respektíve 2009 došlo k pomalšiemu rastu konečnej spotreby domácností.



Graf č. 1 Priebeh KSD a HDD

Výsledkom odhadov rôznych modifikácií spotrebnej funkcie tak, aby boli splnené predpoklady lineárneho modelu, štatistická významnosť parametrov modelu, modelu ako celku a zohľadnená sezónnosť je model, ktorého výstup z EViewsu je na obr. č.1

Obr. č. 1 Výstup odhadu rovnice spotreby

Dependent Variable: KSD				
Method: Least Squares				
Date: 11/21/15 Time: 19:10				
Sample (adjusted): 1996Q2 2015Q2				
Included observations: 77 after adjustments				
Convergence achieved after 8 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-138.2897	194.2772	-0.711816	0.4789
HDD	0.314957	0.067114	4.692856	0.0000
@SEAS(1)	182.0475	162.4497	1.120639	0.2663
@SEAS(2)	304.3441	141.0354	2.157928	0.0344
@SEAS(3)	379.1610	145.2562	2.610291	0.0111
KSD(-1)	0.658808	0.071443	9.221429	0.0000
AR(4)	0.729767	0.089178	8.183301	0.0000
R-squared	0.998487	Mean dependent var	7142.998	
Adjusted R-squared	0.998358	S.D. dependent var	2679.414	
S.E. of regression	108.5905	Akaike info criterion	12.29955	
Sum squared resid	825433.5	Schwarz criterion	12.51263	
Log likelihood	-466.5328	Hannan-Quinn criter.	12.38478	
F-statistic	7700.170	Durbin-Watson stat	1.810433	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Zdroj: vlastné výpočty

Už na základe grafickej analýzy môžeme predpokladať, že vplyvom krízy dochádza k zmene vývoja závislej a nezávislej premennej. Grafická analýza je len orientačná, preto tento predpoklad je treba potvrdiť aj testom. V Chowovom teste môžeme postupne zadávať obdobie, v ktorom predpokladáme, že dochádza ku zlomu a testovať existenciu zlomu pre každé obdobie zvlášť. Pre zistenie, či spotrebná funkcia podstupuje štrukturálnu zmenu, aplikujeme Quandtov-Andrewsov test, ktorý sumarizuje Chowove štatistiky. Výstup z Quandtovho-Andrewsovho testu v EViews-e je na obr. č. 2.

Obr. č. 2 Quandt – Andrewsov test – výstup z EViewsu

Quandt-Andrews unknown breakpoint test		
Null Hypothesis: No breakpoints within 15% trimmed data		
Equation Sample: 1996Q2 2015Q2		
Test Sample: 1999Q2 2012Q3		
Number of breaks compared: 54		
Statistic	Value	Prob.
Maximum LR F-statistic (2008Q4)	6.747724	0.0000
Maximum Wald F-statistic (2009Q2)	84.56097	0.0000
Exp LR F-statistic	1.636913	0.0024
Exp Wald F-statistic	38.47986	0.0000
Ave LR F-statistic	2.149239	0.0072
Ave Wald F-statistic	22.19409	0.0001
Note: probabilities calculated using Hansen's (1997) method		

Zdroj: vlastné výpočty

Na základe *LR F*-štatistiky môžeme konštatovať, že k zmenám štruktúrnych koeficientov dochádza v 4. štvrťroku 2008. Tento test však nedáva odpoveď na otázku, ktorý z parametrov je rôzny.

Na zistenie, ktorý z koeficientov je rozdielny, aplikujeme techniku umelých premenných. Definujme umelú premennú *DUM*, ktorá nadobúda hodnotu rovnú 0 v obdobiach 1995q1 až 2008q3 a hodnotu rovnú 1 v obdobiach 2008q4 až 2015q2. Do modelu zavedieme umelú premennú *DUM* a aj jej multiplikatívnu formu *DUM*HDD*. Výstup z odhadu je na obr. č. 3.

Obr. č. 3 Odhad spotrebnej funkcie s umelými premennými

Dependent Variable: KSD				
Method: Least Squares				
Date: 11/23/15 Time: 14:48				
Sample (adjusted): 1996Q2 2015Q2				
Included observations: 77 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-510.8632	137.6786	-3.710549	0.0004
HDD	0.423275	0.072769	5.816652	0.0000
@SEAS(1)	172.7271	102.0964	1.691804	0.0953
@SEAS(2)	291.1293	82.42909	3.531875	0.0007
@SEAS(3)	369.4677	86.20333	4.286002	0.0001
KSD(-1)	0.610212	0.071924	8.484109	0.0000
DUM	1258.324	530.3454	2.372649	0.0205
DUM*HDD	-0.147408	0.051676	-2.852531	0.0057
AR(4)	0.577777	0.096594	5.981530	0.0000
R-squared	0.998906	Mean dependent var		7142.998
Adjusted R-squared	0.998777	S.D. dependent var		2679.414
S.E. of regression	93.69256	Akaike info criterion		12.02738
Sum squared resid	596924.1	Schwarz criterion		12.30133
Log likelihood	-454.0543	Hannan-Quinn criter.		12.13696
F-statistic	7760.997	Durbin-Watson stat		2.484993
Prob(F-statistic)	0.000000			

Zdroj: vlastné výpočty

Z odhadu rovnice vidíme, že parameter pri umelej premennej *DUM* aj pri premennej *DUM*HDD* je štatisticky významný, z čoho môžeme vyvodit' záver, že regresie pred krízou a v období, keď sa kríza začala prejavovať sa líšia v úrovňovej konštante aj v sklone, funkcia spotreby teda podstupuje štruktúrnu zmenu.

4 ZÁVER

V príspevku sú opísané možnosti detekcie štrukturálneho zlomu, ktorý môže mať vplyv na jednotlivé parametre modelu. S problémom stability štruktúrnych parametrov je potrebné sa zaoberať v modeloch odhadovaných na základe obdobia, v ktorom mohlo dôjsť k zlomu dôsledkom veľkých hospodárskych zmien. Takýmto prípadom je aj kríza, ktorá sa začala prejavovať v prvej dekáde 21. storočia. Na zistenie prítomnosti zlomu sa využíva Chowov respektíve Quandtov – Andrewsov test, avšak na podrobnejšiu analýzu stability parametrov je vhodné aplikovať techniky umelých premenných. Z výsledkov odhadov modelov s umelými premennými sa dá zistiť, ktorý z parametrov je zdroj rozdielu.

Použitá literatúra

1. ANDREWS, D. 2003. Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point: A Corrigendum In: *Econometrica* 71 (1), s. 395–397.
2. CHOCHOLATÁ, M. 2013. The global financial crisis and stock returns: evidence from the Czech Republic, Hungary and Poland. In: *Mathematical methods in economics 2013: proceedings of the 31st international conference* : Jihlava, 11-13 September 2013: College of Polytechnics Jihlava, 2013.
3. SURMANOVÁ, K. - FURKOVÁ, A. 2011. Analýza dopadu krízy na priemysel SR = The Impact of the crisis to the Slovak industry. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, mezinárodní vědecký seminář* : zborník : Praha, 13.-15. december 2011 Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2011.
4. SURMANOVÁ, K. - FURKOVÁ, A. - REIFF, M. 2015. Estimation and analysis of consumption function in Slovakia. In: *Mathematical methods in economics. MME 2015: conference proceedings of the 33rd International conference* : Cheb, Czech Republic, September 9-11, 2015.
5. SZOMOLÁNYI, K. - LUKÁČIK, M. 2010. Model hospodárskych cyklov a reálne ekonomiky. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu* : zborník z medzinárodného vedeckého seminára : Praha 15. - 17. december 2010, Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2010.

Kontaktné údaje

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 829

email: adriana.lukacikova@euba.sk

ENTROPICKÝ MODEL ODHADU OD MATICE V MESTSKEJ HROMADNEJ DOPRAVE

ESTIMATION OF OD MATRIX IN MUNICIPAL PUBLIC TRANSPORT USING ENTROPY MODEL

Tomáš Majer, Stanislav Palúch

Abstrakt

V príspevku prezentujeme algoritmus na odhad počtu cestujúcich zo zastávky i do zastávky j v mestskej hromadnej doprave. Algoritmus kombinuje gravitačný a entropický model a jeho výsledky sú verifikované na údajoch z úplného dopravného prieskumu realizovaného v marci 2006 v súmestí Martin – Vrútky.

Kľúčové slová: dopravný prieskum, OD matica, gravitačný model, entropický model

Abstract

The paper presents an algorithm to estimate the number of passengers traveling between bus stops i and j in municipal public transport. The algorithm combine gravity and entropy model. Results are verified on the real data acquired by the full traffic survey on public transport of towns Martin – Vrútky conducted in March 2006.

Keywords: traffic survey, OD matrix, gravity model, entropy model

1 ÚVOD

V súčasnosti sa veľmi často diskutuje o kvalite a dostupnosti verejnej dopravy a o spôsoboch, ako zabezpečiť jej preferenciu pred individuálnou automobilovou dopravou. Preto je dôležité nielen merať súčasný dopyt po službách mestskej hromadnej dopravy napríklad pomocou dopravného prieskumu, ale aj dokázať tento dopyt odhadnúť bez realizácie samotného prieskumu a pri zmenených podmienkach ako napríklad otvorenie nového priemyselného parku alebo kolaudácie nových bytových domov, zmena tarify a ceny cestovného lístka, zmena organizácie dopravy v meste a podobne.

V príspevku sa zameriame na odhad OD matice (origin – destination, zdroj – cieľ). Jej prvky (t_{ij}) vyjadrujú počet cestujúcich zo zastávky i do zastávky j . Budeme pritom predpokladať, že poznáme sumárny počet cestujúcich nastupujúcich na zastávke i – riadkové súčty OD matice a sumárny počet cestujúcich vystupujúcich na zastávke j – stĺpcové súčty OD matice. Tiež budeme mať k dispozícii informácie o cestnej sieti, najmä o vzdialenosti medzi zastávkami. Našou úlohou bude sumárne počty rozdeliť do jednotlivých prvkov matice a presnejšie určiť, odkiaľ a kam ľudia cestujú.

2 MATEMATICKÝ MODEL

Na odhad prvkov OD matice bolo vypracovaných viacero prístupov. Väčšina z nich sa snaží problém riešiť pomocou optimalizačného modelu, ktorý môže maximalizovať úžitok z použitia verejnej dopravy, minimalizovať časové straty cestujúcich prípadne odchýlku od zadaných riadkových a stĺpcových súčtov OD matice.

2.1 Gravitačný model

Označme symbolom Q_i počet cestujúcich nastupujúcich na zastávke i a D_j počet cestujúcich vystupujúcich na zastávke j . Potom môžeme predpokladať, že počet cestujúcich zo zastávky i do zastávky j bude priamo úmerný súčinu $Q_i D_j$ a nepriamo úmerný dopravnému odporu $f(C_{ij})$ závislému od vzdialeností zastávok C_{ij} . Zavedme dva druhy kalibračných konštánt: a_i a b_j pre každú nástupnú aj výstupnú zastávku - každý riadok a stĺpec OD matice. Potom môžeme každý prvok OD matice určiť pomocou vzťahu

$$t_{ij} = a_i \frac{Q_i D_j}{f(C_{ij})} b_j.$$

Funkciu dopravného odporu budeme predpokladať v tvare

$$f(C_{ij}) = K + (C_{ij} - \bar{C})^2,$$

kde \bar{C} je ideálna vzdialenosť a K dopravný odpor pri ideálnej vzdialenosti.

Optimalizačný model môžeme formulovať nasledovne:

Minimalizuj chybu

$$e = \sum_i \left(Q_i - \sum_j t_{ij} \right)^2 + \sum_j \left(D_j - \sum_i t_{ij} \right)^2$$

za podmienok

$$t_{ij} = a_i \frac{Q_i D_j}{K + (C_{ij} - \bar{C})^2} b_j \text{ pre } \forall i, j,$$

$$a_i, b_j, t_{ij} \geq 0 \text{ pre } \forall i, j.$$

Tento model je možné riešiť jednoduchou iteračnou metódou, ktorá striedavo prepočítava kalibračné konštanty a_i a b_j tak, aby súhlasili riadkové resp. stĺpcové súčty Q_i a D_j . Algoritmus skončí, keď sa dosiahne požadovaná presnosť alebo už nie je možné uvedeným postupom presnosť zvýšiť resp. znížiť chybu.

2.2 Entropický model

Entropický model sa snaží rozdeliť cestujúcich pri zachovaní riadkových a stĺpcových súčtov tak, aby sa maximalizovala pravdepodobnosť takéhoto rozdelenia. Počet možností, ako rozdeliť celkový počet cestujúcich $T = \sum_i \sum_j t_{ij}$ na jednotlivé elementy t_{ij} môžeme vyjadriť vzťahom

$$\begin{aligned} & \binom{T}{t_{11}} \cdot \binom{T-t_{11}}{t_{12}} \cdot \binom{T-t_{11}-t_{12}}{t_{13}} \cdot \dots \cdot \binom{t_{nn}}{t_{nn}} = \\ & = \frac{T!}{t_{11}! (T-t_{11})!} \cdot \frac{(T-t_{11})!}{t_{12}! (T-t_{11}-t_{12})!} \cdot \frac{(T-t_{11}-t_{12})!}{t_{13}! (T-t_{11}-t_{12}-t_{13})!} \cdot \dots \cdot 1 = \frac{T!}{\prod_i \prod_j t_{ij}!} \end{aligned}$$

Maximalizácia pravdepodobnosti je ekvivalentná maximalizácii tohto počtu možností. Aby sme sa vyhli súčinom, môžeme maximalizovať logaritmus tohto vzťahu

$$\ln \frac{T!}{\prod_i \prod_j t_{ij}!} = \ln T! - \sum_i \sum_j \ln t_{ij}! \geq \ln T! - \sum_i \sum_j t_{ij} \ln t_{ij}$$

Keďže T je konštanta, zjednodušený matematický model bude vyzerať:

Maximalizuj

$$H = - \sum_i \sum_j t_{ij} \ln t_{ij}$$

za podmienok

$$\sum_j t_{ij} = Q_i$$
$$\sum_i t_{ij} = D_j$$

Na riešenie tohto modelu môžeme použiť nasledovný postup:

1. Urči počiatočné riešenie vyriešením gravitačného modelu
2. Zvoľ počiatočnú veľkosť zmeny d , napr. $d = 10$
3. Postupne pre všetky $i, j, k, m = 1..n$:
Ak $t_{im} \geq d$ a súčasne $t_{jk} \geq d$, potom skús upraviť OD maticu:
 $t_{ik} = t_{ik} + d$, $t_{im} = t_{im} - d$, $t_{jk} = t_{jk} - d$, $t_{jm} = t_{jm} + d$, čím sa nezmenia riadkové a ani stĺpcové súčty Q_i a D_j . Ak sa hodnota účelovej funkcie zlepši, ponechaj zmenu. Ak sa hodnota účelovej funkcie nezlepši, vráť t_{ik} , t_{im} , t_{jk} , t_{jm} na pôvodné hodnoty.
4. Ak sa podarilo hodnotu účelovej funkcie zlepšiť, opakuj krok 3.
5. Zmeň hodnotu d , ak je d väčšie ako napríklad 0,1 opakuj krok 3.

3 EXPERIMENT

Vyššie uvedený postup sme aplikovali na údaje získané z úplného dopravného prieskumu v MHD Martin – Vrútky, ktorý sa konal 16.3.2006 v čase rannej špičky. Sčítacie lístky sa rozdávali v čase od 5:30 do 8:00 a zbierali až do 8:45.

Systém MHD Martin – Vrútky obsluhuje 87 zástaviek, na ktoré bolo umiestnených cca 160 pracovníkov – sčítačov. Počas prieskumu bolo rozdáných 8242 lístkov, z ktorých sa vrátilo 7510, t.j. 91%. OD matica získaná prieskumom je teda veľkosti 87x87 a súčet všetkých jej prvkov je 7510.

Výsledky pre gravitačný model boli prezentované v príspevku [1]. Následne sme na maticu získanú gravitačným modelom aplikovali vyššie uvedený postup na riešenie entropického modelu. Na porovnanie oboch výsledkov sme použili funkciu

$$E = \sum_i \sum_j |t_{ij} - T_{ij}|,$$

kde t_{ij} predstavuje odhad získaný gravitačným resp. entropickým modelom a T_{ij} sú hodnoty získané úplným dopravným prieskumom. Takto určená chyba je potom dvojnásobok počtu chybné priradených cestujúcich z ich celkového počtu.

Chyba gravitačného modelu vyšla 9491, t.j. nesprávne bolo určených až 4746 cestujúcich, čo je viac ako 63%. Po aplikovaní entropického modelu sa chyba znížila na 7213, t.j. nesprávne bolo určených 3607 cestujúcich, čo je približne 48%. Ak nebudeme brať do úvahy tie prvky OD matice, kde bola chyba menšia ako 1, bude entropický model vykazovať celkovú chybu 6166, t.j. 3083 cestujúcich alebo 41%. Napriek tomu, že sa dosiahlo podstatné zlepšenie oproti gravitačnému modelu, chyba je stále veľká.

Niektoré prvky OD matice s najväčšou chybou sú vypísané v tabuľke Tab.1.

Zo zastávky	Do zastávky	Prieskum	Model	Chyba
D.Záturčie, sídlisko	Podháj I.	82	18,0	64,0
Ľadoveň	Dojčenecký ústav	63	9,1	53,9
Ľadoveň	Ul. Hviezdoslavova	59	5,9	53,1
Košúty, nadjazd	Vrútky, aut.stanica	58	10,3	47,7
Ľadoveň	PRIOR	0	46,5	46,5
Ľadoveň	Hlavná pošta	0	44,6	44,6
D.Záturčie, sídlisko	Hlavná pošta	125	80,9	44,1
Ľadoveň	OÚNZ	0	35,9	35,9
Ľadoveň	Ul. Červenej armády	40	7,1	32,9
Ľadoveň	Ul. A. Pietra	0	31,7	31,7
Ľadoveň	Ul. Jesenského	34	6,6	27,4
Vrútky, aut.stanica	OÚNZ	51	24,7	26,3
Košúty, zdr.stred.	Vrútky, aut.stanica	34	8,2	25,9
D.Záturčie, sídlisko	PRIOR	109	84,3	24,7
D.Záturčie, sídlisko	Ul. A. Pietra	82	57,5	24,5
Ul. Jesenského	PRIOR	0	23,8	23,8
Bystrička obchod	Ul. Jesenského	25	1,5	23,5
D.Záturčie, sídlisko	Ul. Alexandrova	46	22,6	23,4
Ľadoveň	Prieložtek	0	23,4	23,4
Hotel Turiec	Ul. 1. čsl. brigády	23	0,0	23,0
Hotel Turiec	PRIOR	0	22,5	22,5
Ul. Hollého II.	Ul. A. Pietra	29	6,6	22,4
Ul. Jesenského	Hlavná pošta	1	22,9	21,9
Ľadoveň	Štadión TJ ZŤS	26	4,2	21,8
Prieložtek	Dojčenecký ústav	24	3,1	20,9
Hotel Turiec	Hlavná pošta	1	21,6	20,6
Košúty, sídlisko	Hlavná pošta	41	20,5	20,5
Ul. Alexandrova	Ul. Červenej armády	23	2,8	20,2

Tab.1: Prvky OD matice s najväčšou chybou

4 ZÁVER

V príspevku sme ukázali spôsob, ako je možné pomocou entropického modelu zvýšiť presnosť odhadu počtu cestujúcich zo zastávky i do zastávky j v mestskej hromadnej doprave. Napriek výraznému zlepšeniu je výsledok aj tak diskutabilný a je potrebné hľadať ďalšie možnosti odhadu dopravného dopytu. Jednou z možností je napríklad určiť OD maticu ako vážený súčet čiastkových OD matíc získaných rôznymi spôsobmi.

Pod'akovanie

Tento príspevok vznikol vďaka podpore grantu APVV-14-0658 "Optimalizácia mestskej a regionálnej verejnej dopravy".

Použitá literatúra

1. MAJER, T. – PALÚCH, S.: Gravitačný model odhadu dopytu v mestskej hromadnej doprave. In: AIESA - 16. medzinárodná vedecká konferencia., 2015, s. 667-671.

2. MATHEW, T. V. – KRISHNA RAO K. V.: Introduction to Transportation Engineering. NPTEL, 2006.
3. SEN, A. - SMITH, T. E.: Gravity Models of Spatial Interaction Behavior. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1995.
4. WILSON, A. G.: Complex Spatial Systems: The Modeling Foundations of Urban and Regional Analysis. Harlow, Essex: Prentice – Hall, 2000.
5. WILSON, A.,G.: Entropy in Urban and Regional Modelling. London: Pion Limited, 1970.

Kontaktné údaje

Ing. Tomáš Majer, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4284

email: tomas.majer@fri.uniza.sk

doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4250

email: stanislav.paluch@fri.uniza.sk

SIMULÁCIA MONTE CARLO PRE GARCH MODEL

THE MONTE CARLO SIMULATION OF GARCH MODEL

Michaela Mináriková

Abstrakt

Vplyv náhodných hodnôt má široké využitie, predovšetkým je známa obrovská významnosť využitia simulačných metód v Ekonometrii. Cieľom článku je testovanie ekonometrického modelu logaritmickej závislosti výnosov akcií od obchodovaného množstva akcií spoločnosti IBM. Pre vysvetlenie závislosti je použitý GARCH model, ktorý je obvyčajne používaný pre vysvetlenie finančných časových radov. Následne je použitá simulácia Monte Carlo s 10 005 iteráciami pre verifikáciu závislosti a porovnanie priemerných hodnôt modelov pred a po simulácii. Automatizácia ekonomického softvéru šetrí čas a pomáha pri riešení komplikovaných modelov.

KLúčové slová: Simulácia, Monte Carlo, GARCH, Iterácia, Model

Abstract

The impact of random values is very broad, mainly there is great signification of simulation methods in Econometrics. The aim of article is testing of econometric model dependency between logarithmic returns and logarithmic trading volume of IBM shares. For explaining of dependency is used GARCH model, which is usually uses for financial time series. Subsequently is used the Monte Carlo Simulation with 10 005 iterations for verifying of dependency and comparing of average values of model before and after simulation. Automation of economic software saves a time and helps in dealing of complicated models.

Keywords: Simulation, The Monte Carlo, GARCH, Iteration, Model

1 ÚVOD A TEORETICKÉ VÝCHODISKO

Cieľom článku je testovanie GARCH modelu závislosti výnosov akcií od obchodovaného množstva akcií spoločnosti IBM. Následne je použitá simulácia Monte Carlo s 10 005 iteráciami pre verifikáciu závislosti a porovnanie priemerných hodnôt dôležitých parametrov modelov pred a po simulácii Monte Carlo.

1.1 GARCH(p,q) model

GARCH(p,q) model patrí medzi lineárne modely, predstavuje rozšírenie modelu ARCH o oneskorený podmienený rozptyl, pričom podmienený rozptyl modelu ARCH(q) je definovaný ako

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

kde $u_t = v_t \sqrt{h_t}$, pričom v_t sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom a u_t je časový rad s rozptylom σ^2 . $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ kde $i=1\dots q$ a $\{v_t\}$ je biely šum nezávislý na h_{t-k} a u_t je časový rad s autoregresnou podmienenou heteroskedasticitou rádu q.

GARCH(p,q) je model so zovšeobecnenou autoregresnou podmienenou heteroskedasticitou, ktorý bol skúmaný Bollerslevom v 1986. V modeli je podmienený rozptyl lineárnou funkciou štvorcov rezíduí modelu a oneskoreného podmieneného rozptylu, ktorý je vyjadrený ako

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_1 u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \delta_1 h_{t-i}$$

kde $\alpha_1 + \delta_1$ je zotrvačnosť náhodných šokov. Časový rad u_t môžeme vyjadriť v tvare kde $u_t = v_t \sqrt{h_t}$, kde v_t je biely šum nezávislý od $h_{t-k} > 0$ s nulovou strednou hodnotou a rozptylom rovným 1, pričom takto zadefinovaný časový rad u_t nazývame ako časový rad so zovšeobecnenou autoregresnou podmienenou heteroskedasticitou rádu p,q. Ak hodnoty autokorelačnej funkcie s rastúcou špicatosťou exponenciálne klesajú, rýchlosť tohto poklesu je závislá od súčtu $\alpha_1 + \delta_1$. Ak je súčet približne jedna, pokles autokorelačnej funkcie je len veľmi pomalý. Rovnako aj hodnoty parciálnej autokorelačnej funkcie exponenciálne klesajú v závislosti od rastúceho oneskorenia.

1.2 Simulácia

Simuláciou rozumieme experiment so skutočným modelom, ktorým sa snažíme napodobňovať skutočnosť. Súčasne je možné využiť simulovanie reality vo finančnej, ekonomickej, matematickej, fyzikálnej a riadiacej sfére, pričom jej prínosmi je schopnosť riešiť analyticky neriešiteľné úlohy, uľahčovať riešenie viacrozmerných úloh, možnosť skúmať dynamiku systému a reakcií na rôzne činitele a predovšetkým skúmanie závislosti medzi systémami. V prípade simulácie ekonometrického modelu je používaná počítačová simulácia, ktorá je plne kontrolovaná počítačovým programom a umelou inteligenciou.

Pre simuláciu vyššie uvedenej závislosti výnosov akcií od obchodovaného množstva spoločnosti IBM GARCH modelom je použitá simulácia metódou Monte Carlo, ktorej základom je generovanie náhodných čísel.

Metóda Monte Carlo bola prvý krát použitá v 40-tých rokoch 20. storočia v americkom Lab Los Alamos. Zakladateľmi boli dvaja európsky matematici - John Von Neuman a Stanislav Marcin Ulama, ktorí skúmali pohyb neurónov cez rôznorodé materiály. Názov metódy je odvodený od hlavného mesta štátu Monako, ktoré je známe vďaka hazardu.

2 ÚDAJE A POUŽITÁ METODOLÓGIA

Metóda Monte Carlo je považovaná za vysoko efektívny nástroj simulácie náhodných procesov v Ekonometrii na základe generácie náhodných dát, ktoré tvoria stochastickú časť modelu.

2.1 Algoritmus Metódy Monte Carlo

Základným krokom je proces, ktorý generuje dáta a preto je potrebný model, pre ktorý je možné odhadnúť parametre modelu. Uvažujeme o GARCH(p,q) modeli s podmieneným rozptylom.

Na odhad rovnice GARCH modelu s náhodnou zložkou metódou Monte Carlo je potrebné poznať pravdepodobnostné rozdelenie modelu a následne použiť generátor náhodných čísel.

Algoritmus metódy vyzerá nasledovne:

- zvolenie rozsahu pozorovaní
- pomocou modelu GARCH sú odhadnuté hodnoty parametrov α a δ pre deterministickú časť modelu
- následne je vytvorených r po sebe nasledujúcich hodnôt h_t pre $t = 1, 2, \dots, n$ a pre každé pozorovanie sú vypočítané jednotlivé parametre α a δ
- po určení pravdepodobnostného rozdelenia náhodných zložiek u_t sú pomocou generátora náhodných čísel generované hodnoty r po sebe idúcich nezávislých hodnôt u_t
- pomocou týchto hodnôt, ktoré sú pripočítané ku každému odhadu parametrov sú vypočítané hodnoty odhadnutého radu závislej premennej \hat{y}_t
- posledným krokom algoritmu je pomocou novo vytvorených hodnôt \hat{y}_t a u_t odhadnutie GARCH(p,q) modelu po r iteráciách, pričom sa uložia potrebné štatistiky a parametre a zároveň sa vypočítajú ich priemerné hodnoty

2.2 Údaje

Pre účely Simulácie Monte Carlo boli použité dáta z internetového portálu www.yahoo.finance.com. Pre modelovanie boli použité logaritmické hodnoty výnosov spoločnosti IBM, ktoré boli vytvorené diferenciou uzatváracích cien akcií IBM a logaritmické hodnoty obchodovaného množstva spoločnosti IBM. Časové rady boli stiahnuté pre obdobie od 01/05/2007 do 8/31/2015, čo predstavuje 2 179 dát.

Spoločnosť IBM – International Business Machines je spoločnosť založená v roku 1911 v Spojených Štátoch Amerických.

3 VÝSLEDKY

GARCH model použitý na vysvetlenie vzťahu medzi logaritmickými výnosmi akcií a logaritmickými hodnotami obchodovaného množstva akcií a pre odhadnutie parametrov α a δ je špecifikovaný ako

$$DLOG_IBM = 0.000613229037358$$

$$GARCH = -0.000716375158673 + 0.153976032316 * RESID(-1)^2 + 0.546746284993 * GARCH(-1) + 0.0000492513995863 * LOG_VOLUME$$

Dependent Variable: DLOG_IBM
 Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
 Date: 11/15/15 Time: 00:02
 Sample: 1/05/2007 8/31/2015
 Included observations: 2179
 Convergence achieved after 9 iterations
 Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
 GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1) + C(5)
 *LOG_VOLUME

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000613	0.000219	2.801872	0.0051
Variance Equation				
C	-0.000716	7.83E-07	-915.1344	0.0000
RESID(-1)^2	0.153976	0.018350	8.390862	0.0000
GARCH(-1)	0.546746	0.023250	23.51642	0.0000
LOG_VOLUME	4.93E-05	6.04E-08	816.0212	0.0000
R-squared	-0.000877	Mean dependent var		0.000187
Adjusted R-squared	-0.002719	S.D. dependent var		0.014379
S.E. of regression	0.014398	Akaike info criterion		-5.967013
Sum squared resid	0.450706	Schwarz criterion		-5.953964
Log likelihood	6506.060	Hannan-Quinn criter.		-5.962242
Durbin-Watson stat	2.032771			

Obrázok 1.: GARCH model závislosti logaritmických výnosov od logaritmických hodnôt obchodovaného množstva akcií spoločnosti IBM

Všetky parametre modelu sú významné na hladine významnosti 0,05. Model ako celok je tiež významný, bez autokorelácie a heteroskedasticity. Najdôležitejším predpokladom významnosti modelu je overenie normálneho rozdelenia modelu. Na základe Jarque-Bera testu normality nebol tento predpoklad potvrdený. Takýto jav je častý pri vysvetľovaní finančných časových radoch a preto môžeme model na základe Kvázi metódy najmenších štvorcov považovať za vhodný pre vysvetlenie závislosti a ďalej použiť východiskové predpoklady z modelu a hodnoty parametrov pre Simuláciu Monte Carlo.

Následne bola použitá Simulácia Monte Carlo s 10 005 iteráciami, ktorej výstup je zobrazený v obrázku 2.

Dependent Variable: DLOG_IBM
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 11/14/15 Time: 20:41
Sample: 1/05/2007 8/31/2015
Included observations: 2179
Convergence achieved after 10 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1) + C(5)*LOG_GARCH

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000374	0.000238	1.572392	0.1159

Variance Equation

C	1.26E-05	1.42E-06	8.891245	0.0000
RESID(-1)^2	0.135051	0.012188	11.08051	0.0000
GARCH(-1)	0.805303	0.016486	48.84885	0.0000
LOG_GARCH	3.31E-06	1.52E-06	2.181714	0.0291

R-squared	-0.000169	Mean dependent var	0.000187
Adjusted R-squared	-0.002009	S.D. dependent var	0.014379
S.E. of regression	0.014393	Akaike info criterion	-5.856998
Sum squared resid	0.450387	Schwarz criterion	-5.843949
Log likelihood	6386.199	Hannan-Quinn criter.	-5.852228
Durbin-Watson stat	2.034212		

Obrázok 2.: Model závislosti logaritmických výnosov akcií od logaritmických hodnôt obchodovaného množstva akcií spoločnosti IBM po 10 005 iteráciách

Model po 10 005 iteráciách je špecifikovaný rovnako ako predchádzajúci:

$$DLOG_IBM = 0.000374140905589$$

$$GARCH = 1.26366870372e-05 + 0.135051311532*RESID(-1)^2 + 0.805302576435*GARCH(-1) + 3.30800820923e-06*LOG_GARCH$$

Všetky parametre modelu sú opäť významné na hladine významnosti 0,05. Model ako celok je tiež významný, bez autokorelácie a heteroskedasticity. Na základe Jarque-Bera testu normality nebolo overené normálne rozdelenie, ale na základe Kvázi metódy najmenších štvorcov je možné GARCH model považovať za vhodný model, ktorý adekvátne vysvetľuje závislosť medzi logaritmickými výnosmi akcií a logaritmickými hodnotami obchodovaného množstva akcií spoločnosti IBM.

V poslednej časti výsledkov, v tabuľke 1 je uvedený súhrn priemerných hodnôt jednotlivých parametrov vypočítaných ako priemer každého parametra po iterácií. Priemery sú uvedené spolu s základnými deskriptívnymi štatistikami.

Tabuľka 1.: Priemerné hodnoty parametrov GARCH modelu a ich deskriptívne štatistiky

	AVG C1	AVG C2	A RESID(-1)^2	A GARCH(-1)	A LOG_VOLUME
Mean	0.000373	0.0000124	0.135350	0.806184	-1.17E-08
Median	0.000373	0.0000123	0.136021	0.805897	-5.44E-08
Maximum	0.000486	0.0000876	0.222309	0.869938	0.0000416
Minimum	0.0000917	0.00000838	0.087369	0.528724	-0,0000402
Std. Dev.	0.0000193	0.00000232	0.006000	0.013161	0.00000465
Skewness	-1.141879	23.22626	0.341957	-12.94127	0.019434
Kurtosis	22.03544	604.8698	18.13465	254.0572	7.895267
Jarque-Bera	153228.1	1.52E+08	95683.45	26554779	9990.471
Probability	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Sum	3.734397	0.124320	1354.175	8065.868	-0.000117
Sum Sq. Dev.	3.72E-06	5.38E-08	0.360164	1.732772	2.17E-07
Observations	10005	10005	10005	10005	10005

Hodnotové rozdiely medzi reálnymi parametrami a priemernými hodnotami parametrov, vypočítanými na základe priemerovania odhadov po jednotlivých iteráciách sú len minimálne, teda parametre rovnice po 10 005 iteráciách nie sú skreslené odhady reálne odhadnutých parametrov modelu.

4 DISKUSIA A ZÁVER

Monte Carlo Simulácia je založená na vyhodnotení GARCH modelu vytvoreného pred a po generovaní modelu vyššie popísaným algoritmom. Hodnoty sú generované umelo za pomoci generátora náhodných čísel. Rozdiely medzi skutočnými parametrami a generovanými parametrami po 10 005 iteráciách nie sú veľké, teda parametre rovnice simulovanej Metódou Monte Carlo sú neskreslenými odhadmi reálnych parametrov, čo je uvedené v tabuľke 2.

Tabuľka 2.: Porovnanie hodnôt parametrov GARCH modelu pred a po použití Monte Carlo Simulácie a priemerných hodnôt parametrov

MODEL	C1	C2	RESID(-1)^2	GARCH(-1)	LOG_VOLUME
1. M	0,000613000	-0,000716000	0,153976000	0,546746000	0,000049300
2. M	0,000374000	0,000012600	0,135051000	0,805303000	0,000003310
Mean MC	0,000373000	0,000012400	0,135350000	0,806184000	-0,000000012

Model 1. M je pôvodný model a model 2. M je vytvorený po 10 005 iteráciách. Monte Carlo ponúka široké využitie a uplatnenie v mnohých odvetviach, každý interpretuje iný postup a model a preto sa jednotlivé výsledky môžu v závislosti od použitých metód odhadov a použitia algoritmu líšiť.

Pre kompletné porovnanie modelov boli urobené aj prognózy nasledujúceho dňa 01.09.2015 pre obidva modely, ktoré boli porovnané aj so skutočnou hodnotou logaritmu výnosu akcie spoločnosti IBM v tento deň. Porovnanie hodnôt je uvedené v tabuľke 3, kedy je menšia odchýlka od skutočnosti v prípade modelu vytvoreného po Simulácií Monte Carlo.

Tabuľka 3.: Porovnanie hodnôt predpovede logaritmickeho výnosu akcií spoločnosti IBM pre nasledujúci deň 01.09.2015

MODEL	1.9.2015
1. M	0,000613229
2. M	0,000374141
Skutočnosť	-0,035864436

Použitá literatúra

1. BOLLERSLEV, T. 2009. Glossary to ARCH (GARCH). s. 32–33. [online] http://public.econ.duke.edu/~boller/Papers/glossary_arch.pdf, [27.10.2015].
2. ENGLE, R. F. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. USA: In *Econometrica*, 1982, vol. 50, No. 4, s. 999 – 1007.
3. KLIEŠTIK, T. 2011. Modelovanie a simulácia ako signifikantný nástroj analýzy rizika. Katedra ekonomiky, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov, Žilinská univerzita v Žiline, 2011, s. 44-53. [online] <http://emi.mvso.cz/EMI/2011-03/07%20Kliestik/Kliestik.pdf>, [06.11.2015].
4. EViews.com forum. [online] <http://forums.eviews.com/search.php?sid=ec15f8fe4b78a5605958c5f8824a00b9>, [05.11.2015].
5. EViews.com forum. [online] <http://forums.eviews.com/viewtopic.php?f=5&t=656>, [07.11.2015].

Kontaktné údaje

Ing. Michaela Mináriková
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421) 911 395 666
email: michaella.minarikova@gmail.com

VYBRANÉ TECHNIKY ODHADU PARAMETROV CGE MODELOV¹

SOME CGE MODELS PARAMETERS ESTIMATIONS TECHNIQUES

Veronika Miřková

Abstrakt

Článok sa venuje trom rôznym technikám odhadu parametrov modelov všeobecnej ekonomickej rovnováhy: kalibrácii, ekonometrickému odhadu a maximálnej entropii. Každá z metód je stručne opísaná, následne sú diskutované ich výhody a nevýhody.

KLúčové slová: *model všeobecnej ekonomickej rovnováhy, kalibrácia, ekonometrický odhad*

Abstract

The paper presents four different techniques of the computable general equilibrium models parameters estimations: a calibration, an econometric approach and a maximum entropy approach. Each method is shortly introduced and the advantages and disadvantages of each of them are discussed.

Keywords: *computable general equilibrium model, calibration, econometric estimation*

1 PREHLAD RIEŠENIA PROBLEMATIKY

Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy (Computable General Equilibrium model - CGE) je makroekonomický model založený na mikroekonomických princípov využívaný predovšetkým na simulovanie hospodárskych politík krajín, medzinárodného obchodu alebo environmentálnych zmien. Model sa skladá z behaviorálnych rovníc a identít, ktoré spolu vytvárajú systém simultánnych rovníc, pričom niektoré môžu byť nelineárne, dokonca nelineárne v parametroch. Analytická štruktúra modelu je založená na ekonomických princípoch, ktorá podmieňuje premenné a ich vzájomné vzťahy. Funkčná štruktúra je teda matematickou reprezentáciou analytickej štruktúry, pozostáva z algebraického vyjadrenia rovníc modelu. A nakoniec, numerická štruktúra zahŕňa znamienka parametrov a magnitúdy funkčných foriem modelu (1). Cieľom tohto článku je opísať niektoré metódy odhadu parametrov CGE modelov, zjednotiť ich symboliku a diskutovať ich výhody, resp. nevýhody.

Najčastejšie používaným prístupom k odhadu hodnôt parametrov CGE modelov je kalibrácia, ktorá je založená na údajoch jedného obdobia zoskupených do matice spoločenského účtovníctva (Social Accounting Matrix - SAM). Tento prístup umožňuje stanoviť hodnoty niektorých parametrov na základe ekonomickej teórie alebo hospodárskej politiky modelovanej krajiny a zvyšok parametrov je stanovených tak, aby model replikoval údaje daného obdobia (15).

V 90. rokoch minulého storočia sa mnoho ekonómov zavrholo ekonometrický odhad parametrov CGE modelu, nakoľko sa domnievali, že tento prístup oslabuje ekonomickú štruktúru modelu. Mansur a Whalley (10) v 1981 uviedli, že „Dostupné údaje zvyčajne neumožňujú ekonometrický odhad parametrov CGE modelu, takže na stanovenie hodnôt sa

¹ Článok vznikol s podporou Agentúry pre podporu výskumu a vývoja prostredníctvom grantu APVV-14-0020 „Modelovanie Pareto optimálnych interakcií finančného a podnikového sektora v adaptačných procesoch“.

využíva procedúra kalibrácie.“ Naproti tomu bol Jorgenson (7) už v 1984 kritikom kalibrácie a parametre modelov odhadoval ekonometrickými metódami. Rovnako neskôr, v prácach Laua (8), Diewerta a Lawrenca (4) bola kalibrácia kritizovaná z rôznych hľadísk. McKittrick (11) v 1998 dokazuje, že mnoho rokov po „objave“ ekonometrie v CGE modelovaní, sa takmer výlučne využíva len kalibrácia. Neskôr, v 2001 Arndt, Robinson a Tarp (1) uvádzajú, že s rastúcou popularitou CGE modelov rastie aj kritika ich slabých empirických východísk, obzvlášť odhadu behaviorálnych parametrov. Braker (2) v 2004 vyčíta kalibrácii, že neberie do úvahy dostatočne dlhé časové rady, aj keď sú dostupné. Modely teda nie sú využívané na simulácie dlhodobých procesov, prispôbení zmenám v cenách a technologickým zmenám. Scricciu (14) dokonca kalibráciu nazval matematickou manipuláciou a jeho kritika vychádza z faktu, že východiskové obdobie pre dataset, zvyčajne posledný rok, za ktorý sú údaje dostupné, nemusí vierohodne reprezentovať modelovanú ekonomiku, keďže ignoruje historický vývoj. Na druhej strane, kalibrácia, expertné odhady alebo hodnoty parametrov z iných zdrojov literatúry umožňujú bohatú štruktúru modelu so stochastickými a nelineárnymi rovnicami.

Práca Benčíka (3) bola lastovičkou v oblasti CGE modelovania na Slovensku. Na odhad všetkých parametrov modelu využíval kalibráciu. Mlynarovič (12) opísal procedúru kalibrácie ako východiska pre CGE modelovanie. Metodológia z (12) bola využitá v práci Páleníka a Kotova (13) na CGE model aplikovaný na kvantifikáciu výnosov a nákladov vstupu Slovenskej republiky do Európskej únie. Ekonometrický odhad bol použitý v práci Lichnera a Miklošoviča (9), kde odhadovali hodnoty CES produkčných funkcií Slovenskej republiky metódou najmenších štvorcov.

2 KALIBRÁCIA

V tejto časti sa venujeme opisu procedúry kalibrácie tak, ako ju uvádzajú Mansur a Whalley (10), pričom označenie je zmenené tak, aby bolo v súlade so značením použitým v ostatných opisoch odhadov parametrov. Ak CGE model zapíšeme ako

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{q}_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

kde \mathbf{X}_t je vektor endogénnych premenných, \mathbf{Z}_t vektor exogénnych premenných, $\boldsymbol{\beta}$ vektor neznámych parametrov a \mathbf{q}_t čistý dopyt v čase t , potom celú procedúru môžeme formalizovať v piatich krokoch:

- 1) Na začiatku stanovíme východiskové obdobie (zvyčajne jeden rok), označíme t' .
- 2) Ak je to potrebné, prispôbime dopyt použitím numerického algoritmu (napr. RAS metóda, bližšie vid'. (17)).
- 3) Rozdelíme vektor $\boldsymbol{\beta}$ na vektor pozorovaných parametrov $\boldsymbol{\beta}^o$ ktorý sa zvyčajne skladá z elasticít a vektor nepozorovaných parametrov $\boldsymbol{\beta}''$, ktorý obsahuje zvyšné parametre.
- 4) Na základe využitia dostupných zdrojov a a priori metód stanovíme množinu hodnôt $\boldsymbol{\beta}^o$ a $\boldsymbol{\beta}''$ tak, aby sme dostali

$$\boldsymbol{\beta}'' = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\beta}^o, \mathbf{q}_t) \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

- 5) Riešením je potom

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\beta}^o) = \mathbf{q}_t \quad (3)$$

Podľa Walrasovho zákona tento systém zaručuje všeobecnú ekonomickú rovnováhu (10). Hlavnou výhodou tohto prístupu je to, že využíva bodové údaje z jedného obdobia, o ktorom rozhoduje užívateľ alebo tvorca modelu. Východiskové obdobie (najčastejšie rok) je zvyčajne

to, pre ktoré je dostupných najviac dát a navyše zaručuje stabilitu parametrov. Využitie metódy je z technického hľadiska nenáročné.

Problémovým hľadiskom je to, že použité hodnoty elasticít sa týkajú inej klasifikácie odvetví alebo komodít, než na ktoré sa zameriava model, pochádzajú z iných krajín alebo časových období, než sú skúmané. Nie je výnimkou ani použitie zastaraných odhadov elasticít z literatúry staršieho dáta alebo dokonca odhady bez podložených údajov. McKitrick (11) vysvetľuje, že tieto samoučelnosti pramenia zo snahy prispôbiť model skúmanej technológii.

Je známym faktom, že kvalita modelu priamo závisí od kvality použitých dát. Zvlášť to platí pre CGE modely, kde sa ľubovoľne volí východiskové obdobie pre použité údaje. Môžu sa vyskytovať náhodné anomálie alebo nezvyčajné hospodárske situácie v ktoromkoľvek období použitom na kalibráciu. Navyše, takmer vždy je potrebné údaje škálovať kvôli vybilancovanosti matice spoločenského účtovníctva (11).

McKitrick uvádza ako nevýhodu kalibrácie to, že obmedzuje výskumníka na funkčné formy prvého rádu (s konštantnou elasticitou substitúcie). Tieto funkcie v sebe zahŕňajú obmedzujúce podmienky týkajúce sa štruktúry modelovanej ekonomiky. Lau (8) odporúča pomocou kalibrácie odhadovať len hodnotu jedného parametra v rovnici. Napriek uvedeným faktom je kalibrácia najpoužívanejšou metódou v CGE modelovaní.

3 EKONOMETRICKÝ ODHAD

V ekonometrickom odhade sa na výpočet hodnôt parametrov využívajú celé časové rady. Jednoduchý zápis podľa Jorgensona (7) je nasledovný (značenie bolo oproti originálu upravené na jednotné s ostatnými prístupmi):

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{q}_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4)$$

Sú potrebné kompletne časové rady T pozorovaní. Štatistický odhad potom dáva estimátor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Základné riešenie pre vybrané časové obdobie potom pozostáva z vektora cien \mathbf{X}' tak, aby platilo

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}'_t, \mathbf{Z}_t, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{q}_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (5)$$

Aj keď má ekonometrický prístup mnoho výhod, je s ním náročné a zložité pracovať. Na tomto mieste môžeme zhrnúť niekoľko odporúčaní, ako narábať s CGE modelom:

Ohraničenia CGE modelu: aj keď existujú špecializované ekonometrické metódy na odhad parametrov CGE modelov (7) a odhadované hodnoty parametrov môžu uspokojivo opisovať správanie sa agentov, nie sú úplne kompatibilné so systémom všeobecnej rovnováhy, nakoľko často nie sú rešpektované ohraničenia CGE modelu (1). Ako alternatívu je možné použiť jednoduchú validačnú procedúru, kde sa model spustí späť na historických dátach a porovnajú sa výsledky pre vybrané premenné. Takto sa revidujú vybrané parametre a rekalibruje sa model – pozri napr. (5). Tento prístup však neposkytuje žiadne štatistiky pre vyhodnotenie robustnosti parametrov.

Dostupnosť dát: Pre ekonometrický odhad sú nevyhnutné časové rady, zvyčajne usporiadané v maticiach spoločenského účtovníctva. Problémom sú nedostatočne skonštruované SAM pre rozvíjajúce sa krajiny s chýbajúcimi, nekompletnými a neistými údajmi. Dokonca aj vyspelé krajiny môžu mať problém s dostupnosťou požadovaných údajov. Revidované alebo nové údaje pre minulé obdobia poskytnú nové informácie a zlepšujú odhady parametrov, ktoré boli založené na neistých údajov a teoretických koncepciách. Čím viac údajov, tým spoľahlivejšie

odhady štruktúrálnych parametrov získame. Navyše, ekonometrické odhady sú najčastejšie založené na ročných údajoch, takže hodnoty elasticít zodpovedajú krátkodobému hľadisku a môžu podhodnocovať citlivosť agentov v modeli v dlhšom období (zvyčajne tri až päť rokov) (1).

Stabilita parametrov: Pri práci s časovými radmi môžeme zaznamenať zmeny hodnôt agregátov a teda zmeny hodnôt podielov v dôsledku štruktúrálnych zmien v krajine. Tieto de facto vedú k nestabilite odhadovaných parametrov. Go, Lofgren, Ramos a Robinson (6) ponúkajú nasledovné riešenie: Na základe údajov z matice spoločenského účtovníctva jedného roka sa replikujú a priori parametre (ako napr. elasticity obchodu) vystupujúce v štruktúre modelu (ako napr. podiely obchodu). S viacerými SAM môžu byť vylepšené nielen posteriórne odhady parametrov, ale je možné sledovať, či sa mení štruktúra ekonomiky. Na ekonometrický odhad sú potrebné dostatočne dlhé časové rady kvôli zachovaniu požadovaného stupňa voľnosti.

Skutočné hodnoty: SAM sa zvyčajne vyjadrujú v nominálnych hodnotách, a teda informácie o relatívnych cenách môžu byť obmedzené. S každou novou SAM sa overuje, či odhady parametrov konvergujú k novým hodnotám a či sú stabilné, t.j. bez nejakých trendov.

4 METÓDA MAXIMÁLNEJ ENTROPIE

V prípade, že sú dostupné údaje neúplné, obsahujú poruchy alebo sú nekonzistentné, využíva sa metóda maximálnej entropie alebo minimálnej križovej entropie. Táto metóda využíva všetky dostupné informácie na jednej strane, na druhej strane nepredpokladá žiadne informácie, ktoré nie sú dostupné.

Začnime statickým CGE modelom tak, ako bol sformulovaný Arndtom, Robinsonom a Tarpom (1):

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\delta}) = 0 \quad (6)$$

kde \mathbf{f} je vektor funkcie s nasledovnými parametrami: \mathbf{X} je vektor endogénnych premenných, \mathbf{Z} je vektor exogénnych premenných (\mathbf{Z}^o pre pozorovateľné a \mathbf{Z}^u pre nepozorovateľné z historických údajov), \mathbf{B} je vektor behaviorálnych parametrov a $\boldsymbol{\delta}$ je druhý vektor behaviorálnych parametrov, ktorých hodnoty sú jednoznačne implikované voľbou \mathbf{B} , presnou formuláciou \mathbf{f} a východiskovým rokom. Pri označení období 1,2, ..., T je východiskový rok značený t' . Potom môžeme model zapísať ako

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t^o, \mathbf{Z}_t^u, \mathbf{B}, \boldsymbol{\delta}) = 0 \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (7)$$

Riešením je séria riešení, ktoré vytvárajú časový rad, ktorý môžeme porovnať s historickými časovými radmi pre kľúčové premenné.

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{g}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t^o, \mathbf{Z}_t^u, \mathbf{B}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{e}_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (8)$$

kde \mathbf{Y}_t je vektor historických „cieľových hodnôt“, \mathbf{g} je funkcia, ktorej výsledkom je vektor „cieľových hodnôt“, \mathbf{e}_t je vektor diskrepancie medzi historickými údajmi a predikovanými hodnotami. Nech \mathbf{B}_k ($k = 1, \dots, K$) je diskrétna náhodná premenná s $2 \leq M \leq \infty$ možnými výsledkami:

$$\mathbf{B}_k = \sum_{m=1}^M p_{km} v_{km} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

kde p_{km} je pravdepodobnosť nastatia výsledku v_{km} . Každý prvok \mathbf{e}_t je konečná a diskrétna náhodná premenná s $2 \leq J \leq \infty$ možnými výsledkami:

$$e_{in} = \sum_{j=1}^J r_{mj} w_{mj} \quad t = 1, 2, \dots, T, n = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

kde r_{mj} je pravdepodobnosť nastatia výsledku w_{mj} . Účelová funkcia potom využíva váhy q a s a každý člen potom môže byť a_1 a a_2 .

$$\min_{p, r, Z_i} \left\{ \alpha_1 \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M p_{km} \log \frac{p_{km}}{q_{km}} + \alpha_2 \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J r_{mj} \log \frac{r_{mj}}{s_{mj}} \right\} \quad (11)$$

za podmienok stanovených v práci Arndta, Robinsona and Tarpa (1). Pri jednotkových váhach sa metóda minimálnej krížovej entropie stave metódou maximálnej entropie. V prípade, keď $q_{km} = q$ a $s_{mj} = s$ dostávame

$$\max_{p, r, Z_i} \left\{ -\alpha_1 \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M p_{km} \log p_{km} - \alpha_2 \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J r_{mj} \log r_{mj} + K\alpha_1 \log q + T\alpha_2 \log s \right\} \quad (12)$$

Podľa autorov (1) táto metóda v sebe kombinuje pozitíva ekonometrického odhadu a kalibrácie. Z pohľadu ekonometrie využíva kompletne historické časové rady a poskytuje štatistické testy pre odhadované parametre. Na druhej strane, táto metóda môže byť použitá aj v prípade, ak nie sú dostupné kompletne údaje. Berie do úvahy všetky relevantné ohraničenia, využíva apriórnu informáciu o hodnotách parametrov.

Nevýhodou môže byť fakt, že problém je vysoko nelineárny v parametroch a môže existovať množstvo lokálne optimálnych riešení. Podľa autorov metódy model konverguje do rovnakého bodu nezávisle od počiatočných hodnôt. Tento prístup bol oponovaný v práci Go, Lofgrena, Ramosa a Robinsona (6).

5 ZÁVER

V článku boli prezentované tri rôzne prístupy k odhadu hodnôt parametrov CGE modelu. Najstaršou a najčastejšie využívanou metódou je kalibrácia – má mnoho odporcov, ktorí navrhujú ekonometrický odhad. Na týchto princípoch je postavený aj prístup maximálnej entropie. Každá z vymenovaných metód má svoje klady aj zápory, a teda nie je možné jednoznačne určiť, ktorá je lepšia ako iná. Výber metódy závisí od výskumníka a dostupnosti údajov.

Použitá literatúra

1. ARNDT, C. – ROBINSON, S. – TARP, F. (2002) Parameter Estimation for a Computable General Equilibrium Model: A Maximum Entropy Approach. In: *Economic Modelling*, 19, 2002.
2. BARKER, T. The Transition to Sustainability: a Comparison of General-Equilibrium and Space-Time-Economic Approaches. Tyndall centre working paper, vol. 62, Tyndall Centre for Climate Change Research, University of East Anglia, Norwich, 2004.
3. BENČÍK, M. *Konštrukcia experimentálneho modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy a jeho vlastnosti*. Národná banka Slovenska: Inštitút menových a finančných štúdií. Bratislava 2001.
4. DIEWERT, W.E. – LAWRENCE, D. The Marginal Costs of Taxation in New Zeland. Report prepared for the New Zeland Business Round Table by Swan Consultants Pty Ltd., Canberra, 1994.

5. DIXON, P.B. – PARMENTER, B.R. – RIMMER, M.T. *The Australian Textiles, Clothing and Footwear Sector from 1986-87 to 2013-14: Analysis Using the Monash model*. Melbourne, Australia: Monash University, Centre for Policy Studies and IMPACT Project, 1997.
6. GO, D.S. – LOFGREN, H. – RAMOS, F.M. – ROBINSON, S. Estimating Parameters and Structural Change in CGE Models Using a Bayesian Cross-Entropy Estimation Approach. Policy research working paper 7174. World Bank, 2015.
7. JORGENSEN, D.W. Econometric methods for applied general equilibrium analysis. In: Scarf, H.E. and J.B. Shoven (eds.) *Applied General Equilibrium Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
8. LAU, L. Comments on Mansur and Whalley's Numerical Specification of Applied General Equilibrium Models. In: Scarf, H.E. and J. B. Shoven (eds.) *Applied General Equilibrium Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
9. LICHNER, I. and MIKLOŠOVIČ, T. Odhad elasticity substitúcie CES produkčnej funkcie. In: V. Páleník et al. *Možnosti modelovania zmien ekonomiky SR so zreteľom na fungovanie v EMÚ*. Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied, Bratislava 2011.
10. MANSUR, A. – WHALLEY, J. Numerical Specification of Applied General Equilibrium Models: Estimation, Calibration, and Data. In: Scarf, H.E. and J. B. Shoven (eds.) *Applied General Equilibrium Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press 1984.
11. MCKITRICK, R.R. The Econometric Critique of Computable General Equilibrium Modeling: The Role of Functional Forms. *Economic Modelling* 15, 1988.
12. MLYNAROVÍČ, V. Principles of a general equilibrium model construction. In: *Mathematical methods in economics* 2002. Ostrava, 2002.
13. PÁLENÍK, V. and M. KOTOV. Aplikácia modelu CGE na kvantifikáciu prínosov a nákladov vstupu Slovenskej republiky do Európskej únie. *Ekonomický časopis* 50, 2002.
14. SCRIECIU, S. S. The inherent dangers of using computable general equilibrium models as a single integrated modelling framework for sustainability impact assessment. A critical note on Böhringer and Löschel (2006). *Ecological Economics*, 60(4), 2007.
15. SHOVEN, J.B. – WHALLEY, J. *Applying General Equilibrium*. The University Press, Cambridge, 1992.
16. TOUHAMI A. – DUFOUR, J.M. Statistical Inference for Computable General Equilibrium Models, with Application to a Model of the Moroccan Economy. *The Review of Economics and Statistics*, 80, 1988.
17. TRINH, B. – PHONG, N.V. A Short Note on RAS Method. *Advances in Management & Applied Economics*, vol.3, no. 4, 2013.

Kontaktné údaje

Ing. Veronika Miťková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied, Ústav ekonómie

Mlynské luhy 4, 821 01 Bratislava

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

POROVNANIE HISTORICKÝCH VÝNOSOV SLOVENSKÝCH PENZIJNÝCH FONDŮV

SLOVAK PENSION FUNDS HISTORICAL RETURNS COMPARISON

Vladimír Mlynarovič

Abstrakt

Príspevok porovnáva historické výnosy vybraných slovenských penzijných fondov v dvoch časových obdobiach. Metodológia Blackovej – Littermanovej optimalizácie je použitá na konštrukciu historických efektívnych hraníc pre konzervatívne a rastové penzijné fondy.

KLúčové slová: penzijné fondy, efektívne hranice, Blackov – Littermanov model

Abstract

The paper compares historical returns of selected Slovak pension funds in two periods. The methodology of Black – Litterman optimisation is used to construct historical efficient frontiers for conservative and growth pension funds.

Keywords: pension funds, efficient frontiers, Black – Litterman model

1 ÚVOD

Druhý pilier dôchodkového sporenia na Slovensku prešiel od svojho vzniku relatívne veľkým počtom zmien, ktorými jeho účastníci reagovali na priame legislatívne zmeny, ale taktiež na fluktuácie na svetových finančných trhoch. V súčasnosti možno šesť správcofských spoločností, Allianz, Axa, Aegon, VUB, Poštová a NN uviesť ako také, ktoré fungujú od začiatku tohto typu dôchodkového sporenia na Slovensku a dva typy fondov, konzervatívne a rastové, ako také, ktoré tiež fungujú od tohto momentu. Cieľom tohto príspevku je analyzovať efektívnosť fungovania celého systému a jednotlivých správcofských spoločností prostredníctvom konštrukcie a porovnania efektívnych hraníc v dvoch relatívne rovnako dlhých časových obdobiach v priestore očakávaných výnosov a rizika meraného štandardnou odchýlkou, a to samostatne pre konzervatívne a rastové fondy.

V prvej časti príspevku opíšeme použitú metodiku konštrukcie efektívnej hranice vychádzajúcu z Blackovho – Littermanovho prístupu k optimalizácii portfólia (Black – Litterman, 1990). V druhej časti potom porovnáme vzájomné polohy jednotlivých historických efektívnych hraníc a taktiež polohy fondov jednotlivých správcofských spoločností vzhľadom k týmto hraniciam.

2 METODOLÓGIA

Úlohu konštrukcie efektívnej hranice možno formálne zapísať v tvare

$$eff \{ \mathbf{E}^T \mathbf{w}; \Omega(\mathbf{w}) \}$$

za podmienok

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$$

$$\mathbf{w}^l \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{w}^u$$

kde

- $\Omega(\mathbf{w})$ je funkcia skalárnej miery rizika,
- \mathbf{w} - vektor váh portfólia,
- \mathbf{E} - vektor očakávaných výnosov,
- \mathbf{w}^l - vektor dolných hraníc váh portfólia,
- \mathbf{w}^u - vektor horných hraníc váh portfólia,
- \mathbf{e} - vektor s prvkami rovnými 1.

Poznamenajme, že existujú excelovské VBA procedúry (Jackson – Staunton, 2001; Mlynarovič, 2001) pre efektívnu realizáciu procesu riešenia takýchto úloh v Exceli, ktoré poskytnú aproximáciu efektívnej hranice vo vybranom priestore očakávaných výnosov a rizika.

Jedným z limitujúcich aspektov aplikácie v priestore očakávaných výnosov a rizika meraného štandardnou odchýlkou, ktorý využívame v tejto aplikácii, je to, že výsledné alokácie aktív sú vysoko senzitívne na malé zmeny vo vstupoch, a to najmä na nepresnosti v odhadoch očakávaných výnosov. Fisher Black a Robert Litterman (Black – Litterman, 1990) vyvinuli kvantitatívny prístup k vysporiadaniu sa s problémom chýb odhadov. Cieľom ich modelu je vytvoriť stabilné portfólia v priestore očakávaných výnosov a rizika. Ako východiskový bod využívajú rovnovážne výnosy vypočítané napríklad prostredníctvom modelu oceňovania kapitálových aktív (CAPM), alebo optimalizačnej procedúry, v ktorej je implikovaný vektor rovnovážnych výnosov \mathbf{P} extrahovaný zo známych informácií, pričom

$$\mathbf{P} = \delta \mathbf{C} \mathbf{w}$$

kde \mathbf{w} je v tomto prípade vektor váh trhovej kapitalizácie, \mathbf{C} je kovariačná matica a δ je koeficient avarzie k riziku, ktorý vyjadruje priemernú trhovú toleranciu k riziku. V našej aplikácii používame tento prístup na opísanie efektívnej hranice trhu slovenských penzijných fondov nasledovne. Nech \mathbf{w}_c opisuje kapitalizáciu na trhu fondov a E_c je zodpovedajúci výnos váženej trhovej konkurencie pre bežné obdobie. Potom rizikové aktualizovaný výnos možno zapísať v tvare

$$E_c - \delta \mathbf{w}_c^T \mathbf{C} \mathbf{w}_c$$

a budeme predpokladať, že tento výnos je pre váženu trhovú konkurenciu rovný nule. Potom dostávame

$$\delta_c = \frac{E_c}{\mathbf{w}_c^T \mathbf{C} \mathbf{w}_c}$$

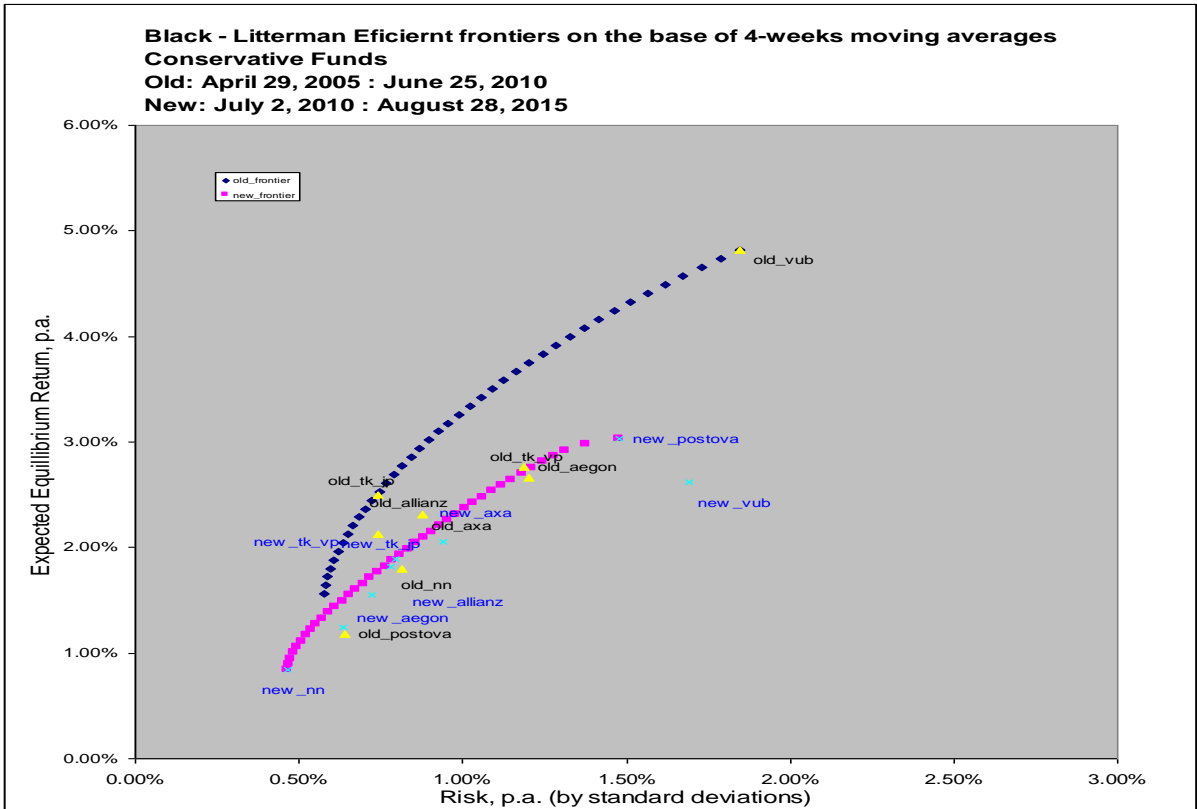
a nakoniec vektor

$$\mathbf{P}_c = \delta_c \mathbf{C} \mathbf{w}_c$$

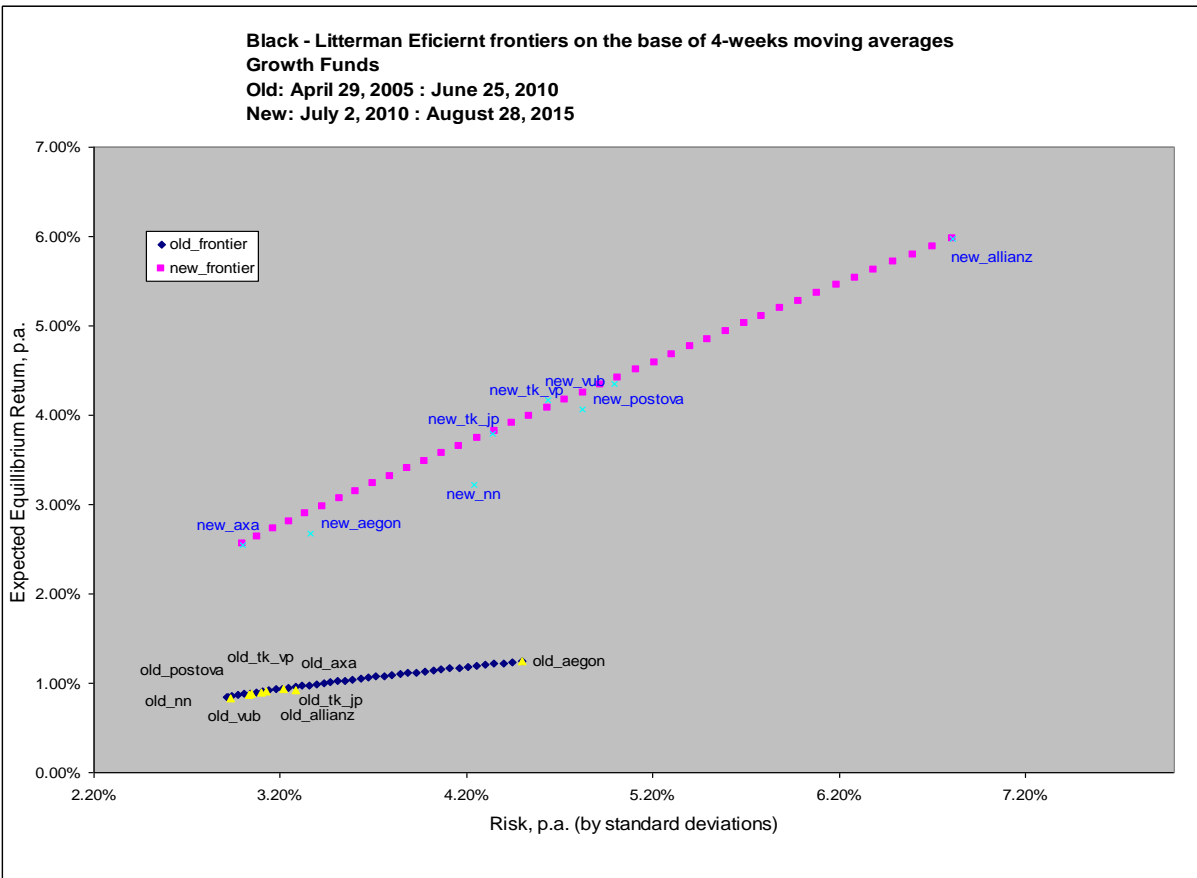
je použitý ako vektor očakávaných výnosov pre optimalizáciu v priestore priemer - rozptyl.

3 VÝSLEDKY

Vlastná aplikácia je založená na časových radoch 4-týždňových klzavých výnosov jednotlivých fondov, pričom celé historické obdobie sme rozdelili na dva časové úseky, a to od 29.4. 2005 do 25.6. 2010 a od 2. 7. 2010 do 28.8. 2015.



Obr. 1



Obr. 2

Obrázok 1 prezentuje výsledky pre konzervatívne fondy, kde spolu s efektívnymi hranicami a pozíciami fondov jednotlivých správčovských spoločnosti uvádzame aj dva fiktívne fondy, a to jednoduchú trhovú konkurenciu, vytvorenú ako jednoduchý priemer výnosov jednotlivých správčovských spoločnosti, a váženú trhovú konkurenciu, v ktorej sú váhy odvodené od trhovej kapitálácie jednotlivých fondov meranej čistou hodnotou ich aktív. Analogické výsledky pre rastové fondy sú uvedené na obrázku 2.

Použitá literatúra

1. MARKOWITZ, H., 1959: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley and Sons.
2. ZELENY, M., 1982: Multiple Criteria Decision Making. McGraw Hill, New York.
3. KONNO, H. - WAKI, H.-A. YUUKI, 2002: Portfolio Optimization under Lower Partial Risk Measures. *Asia/Pacific Financial Markets* **9**, 127-140.
4. MLYNAROVÍČ, V., 2001: Finančné investovanie. Teória a aplikácie. IURA Edition, Bratislava, ISBN 80-89047-16-5.
5. JACKSON, M. – M. SSTAUNTON, 2001: Advanced Modeling in Finance using Excel and VBA, John Wiley and Sons.
6. BLACK, F. – R. LITTERMAN, 1990: Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, vol. 48, no. 5, 28 – 43.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Ústav ekonómie

Mlynské luhy 4 1/b, 852 35 Bratislava

email: mlynarovic@fses.uniba.sk

MĚŘENÍ DÉLKY DOŽITÍ RUSKÉ POPULACE

LONGEVITY PREDICTION OF RUSSIAN POPULATION

Kirill Odintsov, Elena Kuchina

Abstrakt

V tomto článku se zabýváme predikcí délky dožití ruské populace pro lidi narozené od roku 2011 do roku 2060. K tomuto používáme data z online databáze mortality.org. Predikci doby dožití vytváříme klasicky pomocí úmrtnostních tabulek, kdy budoucí úmrtnost odhadujeme pomocí Lee-Carterova modelu.

KLíčové slová: Lee-Carterův model, predikce délky dožití pro Rusko, úmrtnostní tabulky

Abstract

In this paper we would like to look closely at mortality data for Russia from online database mortality.org. Using standard life table approach along with Lee-Carter model to predict central mortality rate for the future we would like to predict life expectancy of people born in Russia from 2011 to 2060.

Keywords: Lee-Carter model, longevity prediction for Russian, life tables

1 INTRODUCTION

As the lifespan of population in most countries increases the topic of longevity risk becomes more and more important. Governments need to plan how to reform their pension systems to either contain the number of people who are on pension or to somehow finance the increasing number of pensioners. Most of the countries solve this dilemma by constantly increasing the average age when people retire. Russia is exception in this case. The average age when people retire in Russia have not significantly change in past years and is still one of the lowest in Europe. This motivated us to have a closer look on Russian mortality data.

2 DATA DESCRIPTION

We have used the software R with the package *demography* to download the data directly from database on mortality.org, using *hmd.mx* function. The data consist of death rates, number of population within each age group for Russia between years 1959 to 2010. In order to select appropriate methods for modelling the survival probabilities, we have decided to analyse the patterns that are observable directly from the data without logarithmic transformation.

Based on the observation of death rates for both males and females together we have observed that some death rates are above 1 as seen on Figure 1 which would mean that the probability of death is greater than 100%. The reason for this is that at certain age the sample is too small and it is impossible to draw valid conclusions from the data. For the default rate to be continuous, we have decided to work with data up to the age of 90. For higher ages we assume the death rate to be equal to the death rate at 90.

RUS: total death rates (1959-2010)

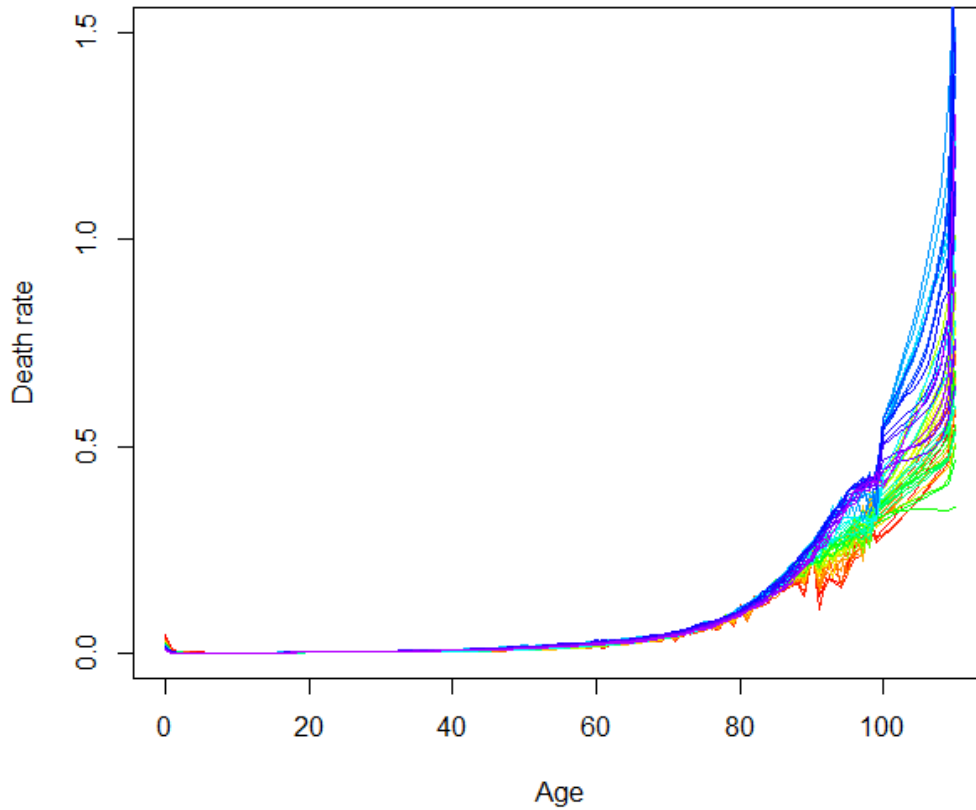


Figure 1

Let us define the central mortality rate $m_{x,t}$ as (Plat, R., 2009)

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}} = \frac{\# \text{deaths during calendar year } t \text{ aged } x \text{ last birthday}}{\text{average population during calendar year } t \text{ aged } x \text{ last birthday}}.$$

The initial mortality rate q_x , which is the probability that a person aged x dies within the next year can be expressed by the following approximation (Plat, R., 2009):

$$q_x \approx 1 - e^{-m_x}$$

The one-year survival probability at age x during the calendar year t can be expressed as (Spedicato G. A., ACAS Clemente G. P.):

$$p_{x,t} = e^{-\mu_{x,t}} \approx e^{-m_{x,t}}$$

Selecting all $p_{x,t}$ for which $t - x = Y$, a longtinal life table for the cohort of born in calendar year Y can be created (Spedicato G. A., ACAS Clemente G. P.).

In Figure 2 we have calculated life expectancy for male and female separately using above described well known procedure. From Figure 2 we can see that the life expectancy for man and women in Russia is very different. This is why we decided to model male and female life expectancy separately.

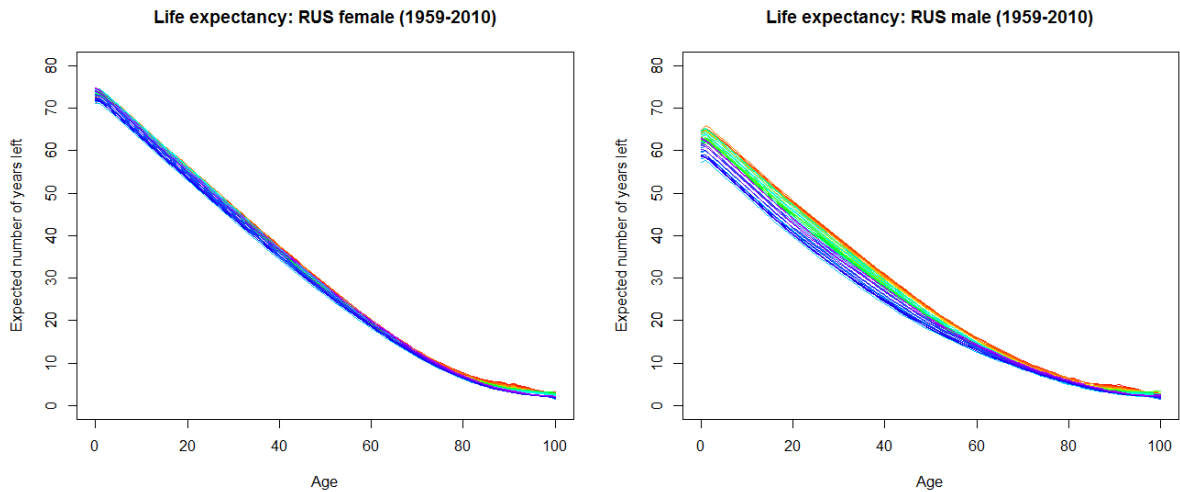


Figure 2

Also interestingly the life expectancy in Russia haven't grown much in last 51 years. We can compare it to for exmaple Australia (Figure 3) or Czech republic (Figure 4) where we see that life expectancy for every age group improved quite significantly. The difference of male and female life expectancy in Russian is remakebly wast compared to any country in the mortality.org database.



Figure 3

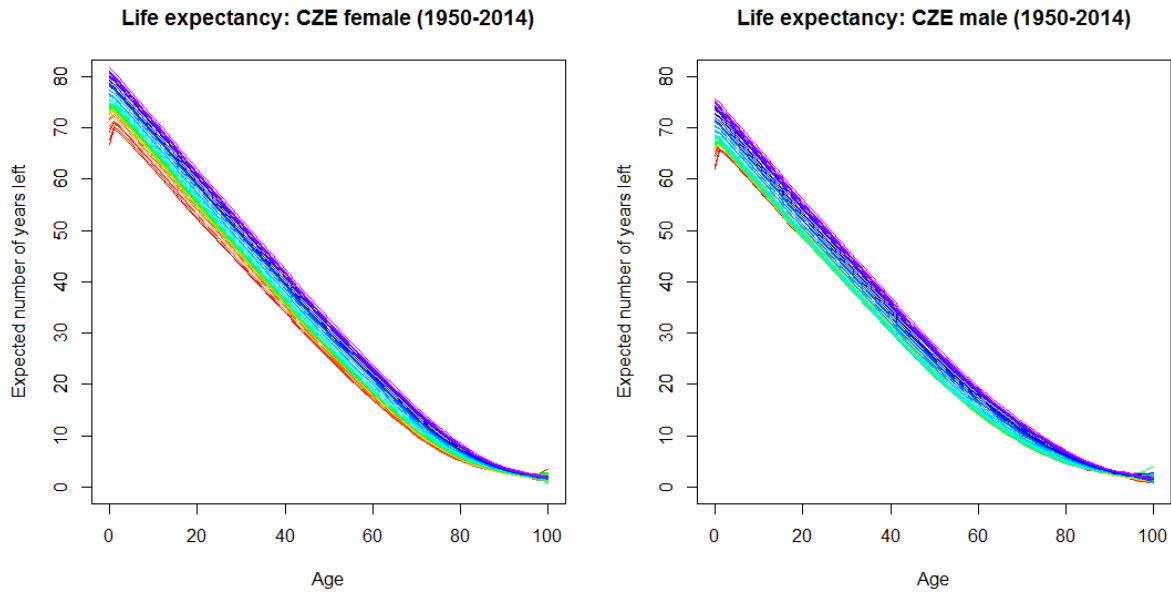


Figure 4

In Figure 5 we can see that life expectancy of person born at certain year have truly no trend in past 51 years for both Russian man and women. Nevertheless we see in Figure 6 that the population in general seems to have grown quite rapidly until 1990s when it began to decline. This population growth can't be contributed by higher number of children born alive as it is more or less on decline during the observed period (Figure 7). But decrease of population size after 1990s can be connected with the decline in live births.

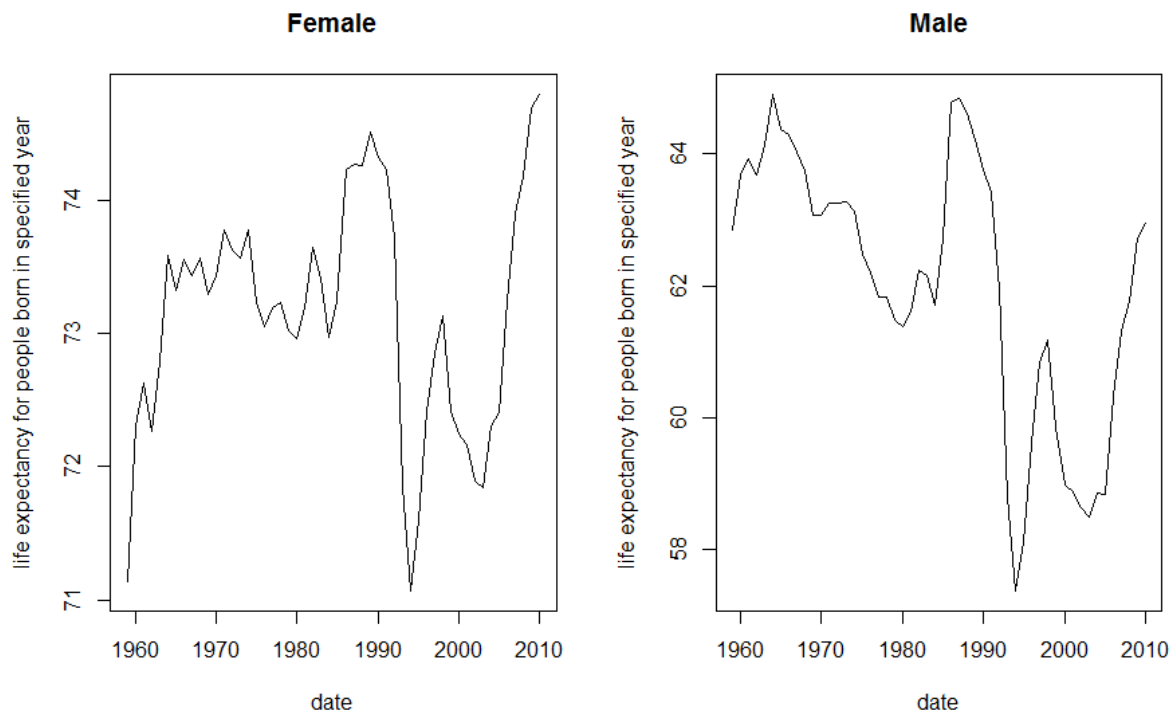


Figure 5

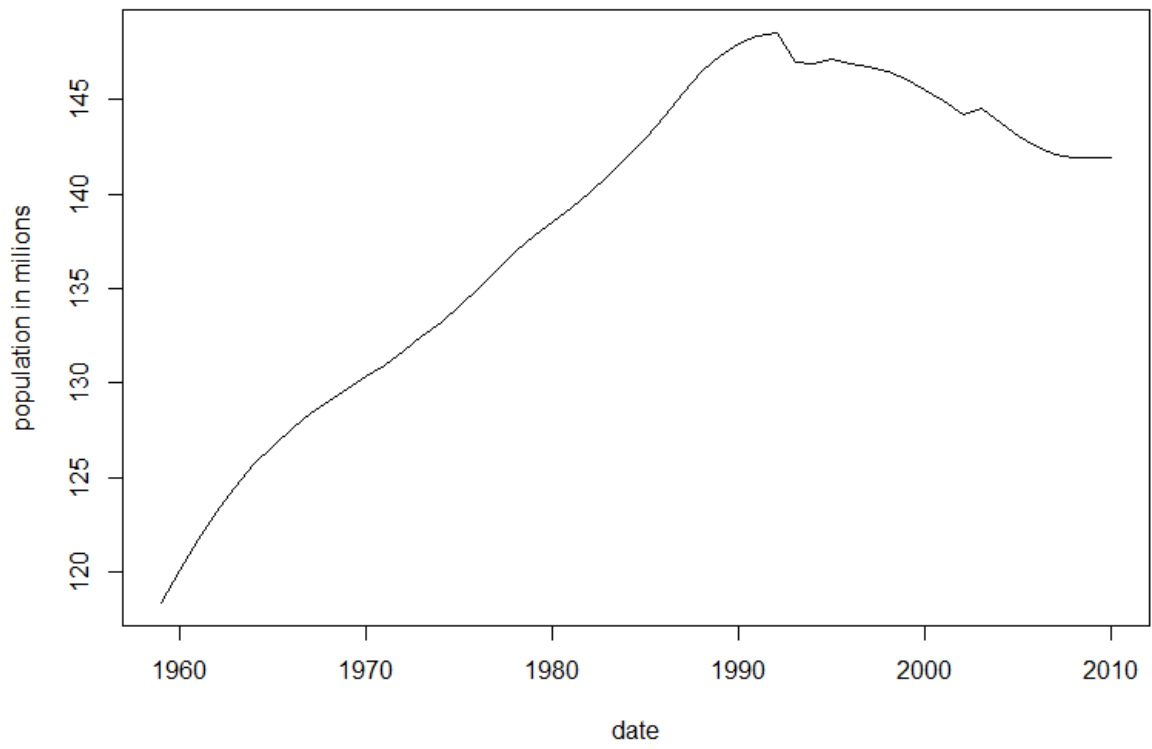


Figure 6

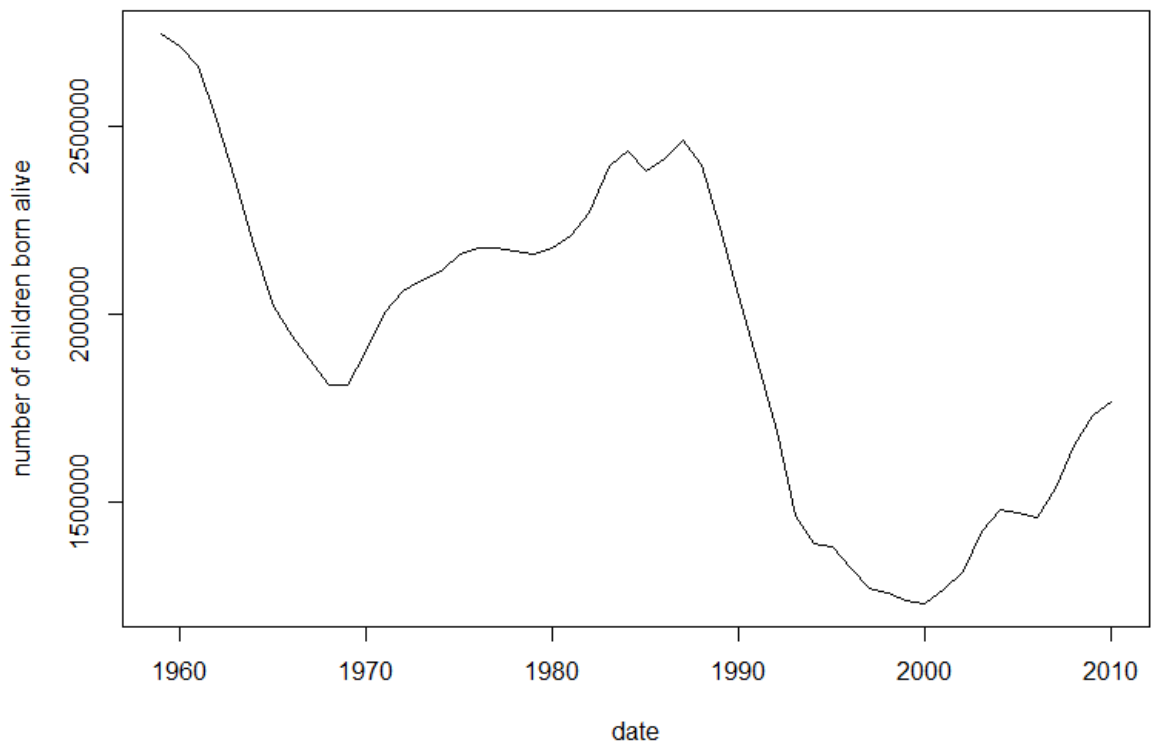


Figure 7

3 LEE-CARTER MODEL

Numerous methods have been proposed in modelling mortality probabilities. Due to subjectivity and potential for bias in the methods based on the expectations was avoided in this research paper. Explanatory approach enables to take into account known risk factors such as information about medical treatment, environmental and behavioural changes. For inclusion of these factors into the model, a deep social and environmental research would be needed. Due to this fact, the approach based on the extrapolation has been chosen (Booth, H., Tickle, L., 2008).

The Lee-Carter model is a universally recognized method for mortality forecasting. It combines a demographic model of mortality with time-series methods of forecasting. The Lee-Carter model of mortality is

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}$$

where $m_{x,t}$ represents the central death rate at age x in the year t , k_t is an index of mortality level at time t , a_x is a general pattern of mortality by age, b_x as the relative speed of change at each age and $\varepsilon_{x,t}$ are the residual at age x and time t , which are independent and identical distributed random variables $N(0, \sigma^2)$.

As a first step the parameters were estimated based on the original version of Lee Carter model by a two-stage process where Singular Value Decomposition (SVD) of the matrix of centered age profiles $\ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x$. A unique solution of the system of equation is assured by the following constraints: $\sum_t k_t = 0$ and $\sum_x b_x = 1$. Better convergence between estimated and observed deaths is assured by refitting of \hat{k}_t (Spedicato G. A., ACAS Clemente G. P.).

In general one of the problems with Lee-Carter method relates to the assumption that the age component is invariant over time. But in case of Russian data the assumption of invariance of age component seems to be reasonable as we showed in part two of the text that the life expectancies for all ages do not show any trend within observed 51 years.

In Figure 8 we can see the estimated parameters for model for females and in Figure 9 we can see the predicted parameters for male model.

In Figure 10 we can see predicted life expectancies for years from 2011 to 2060 for both male and females. These life expectancies were calculated with predicted death rates of Lee-carter model using simple methodology described in part 2 of the text. We can see that in general the predicted life expectancies lines did not move significantly this is mainly caused by the fact that even in our data sample we did not observe any trend of longer life expectancies.

In Figure 11 we see that life expectancy of new-borns is predicted to slightly increase for females and slightly decrease for males.

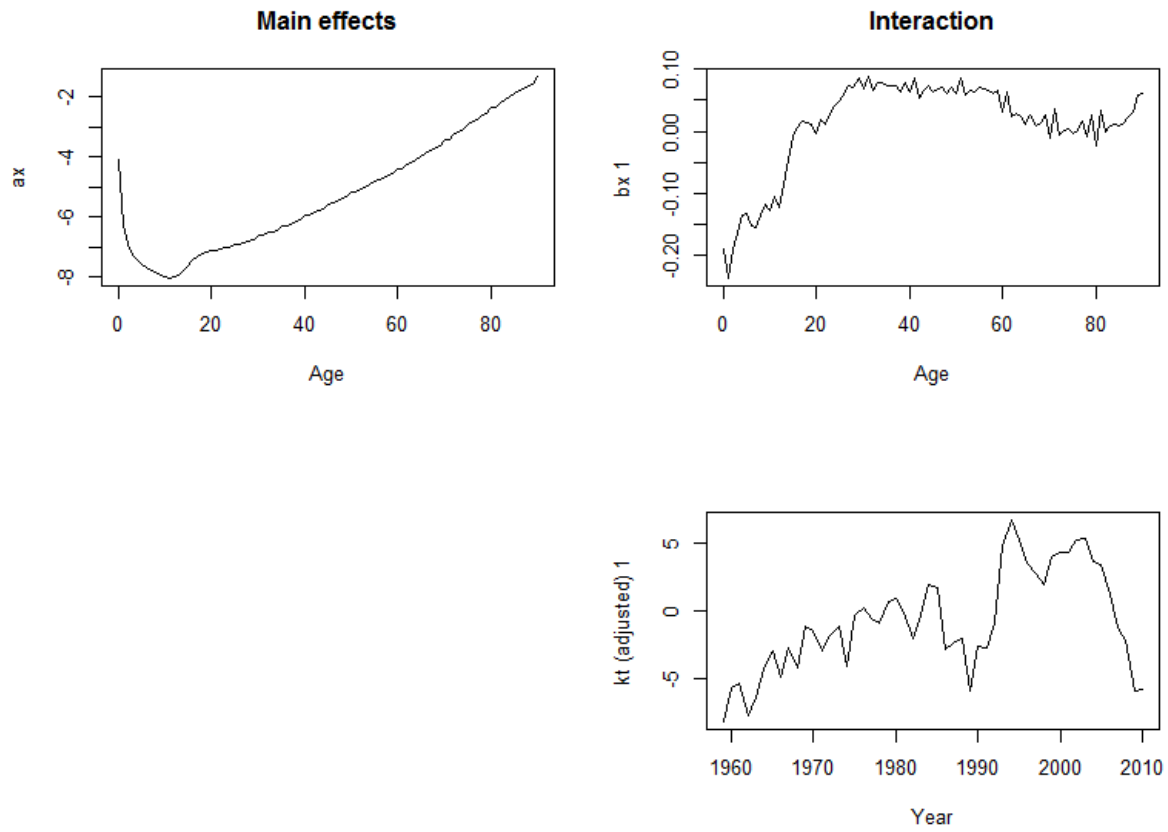


Figure 8

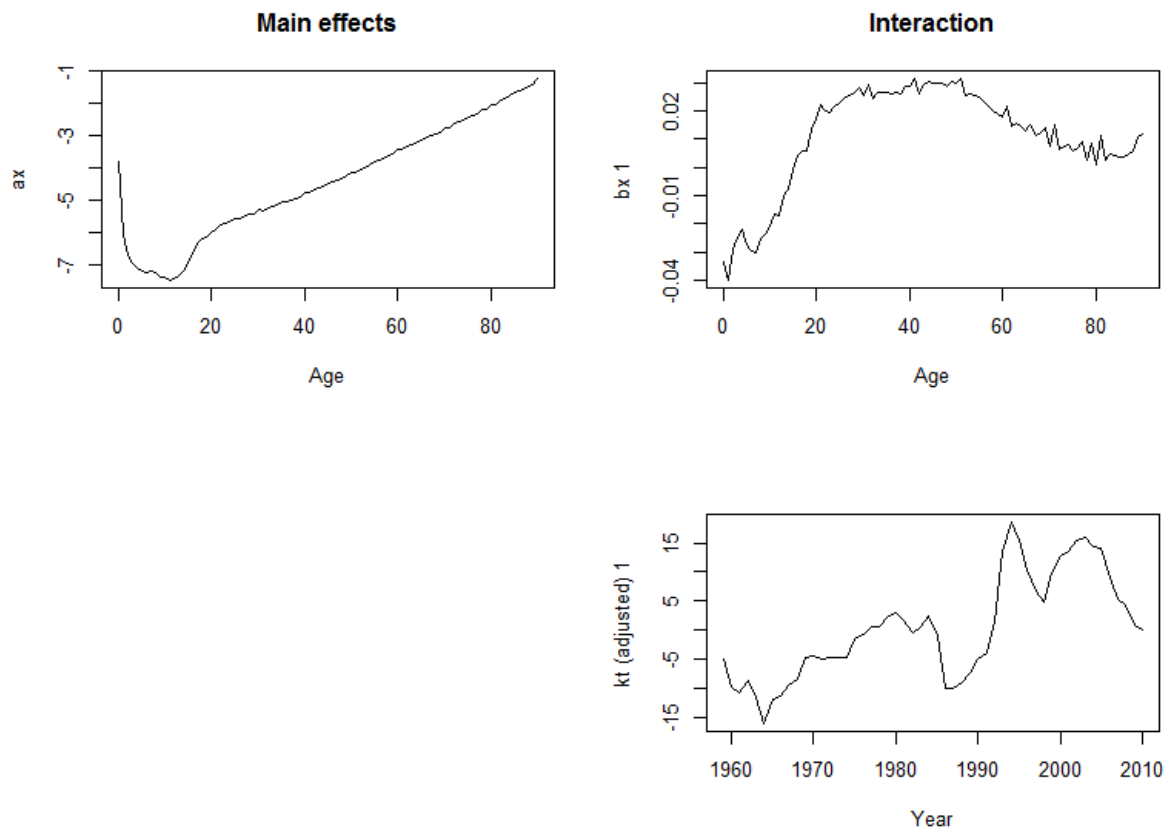


Figure 9

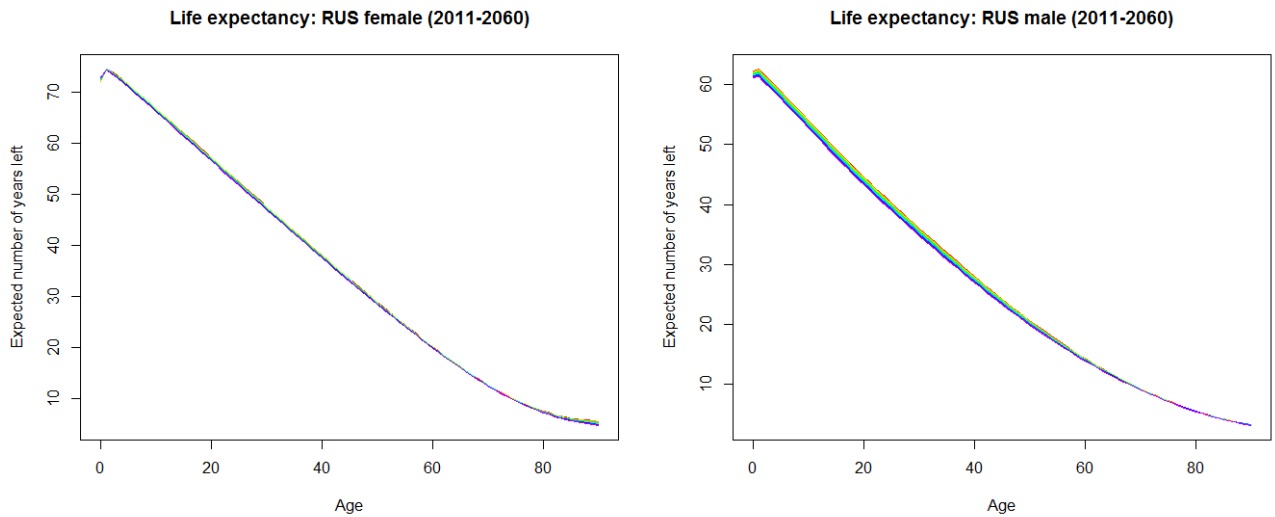


Figure 10

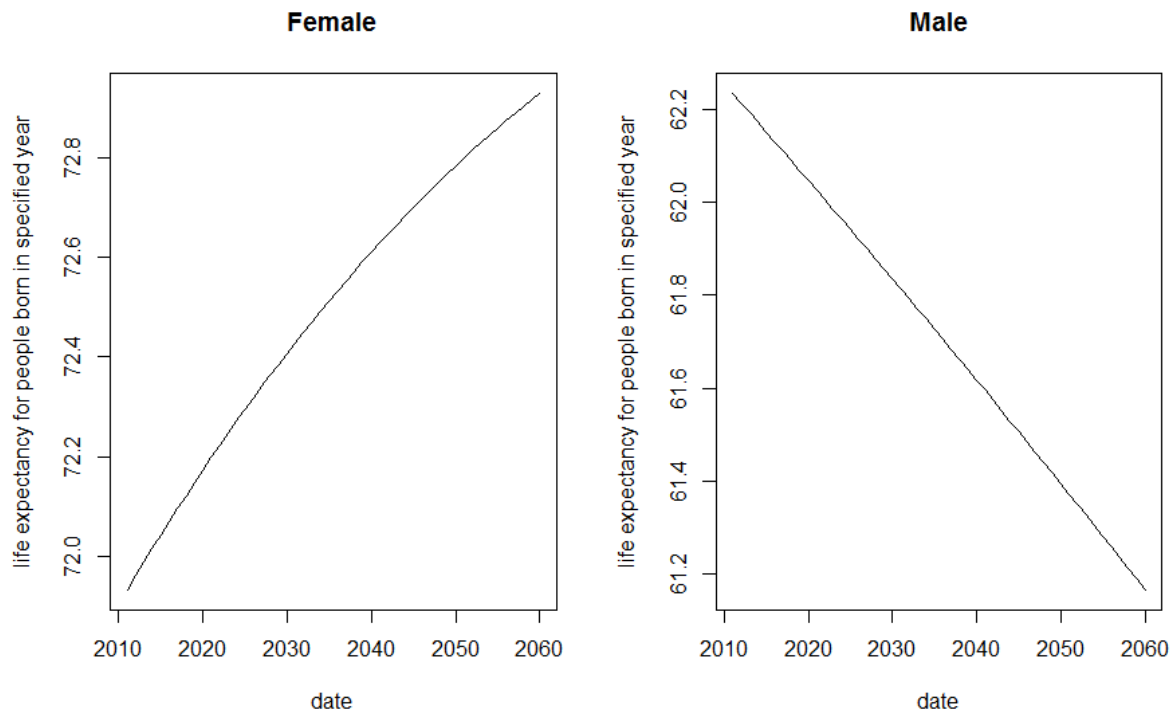


Figure 11

4 CONCLUSION

The Russian mortality data shows quite unique behaviour from European countries, where the life expectancies are not increasing in the available data set and there are very high differences between male and female life expectancies. When only taking into consideration the past development of the life expectancies and using Lee-Carter model we do not see that this should improve in following years. Meaning that the Russia is not increasing retirement age seems justifiable. In this case it is important to note that if we believe that some changes of underlying factors of why life expectancy of Russian population behave it does could occur other approach that takes into consideration such changes in the future should be taken. Our approach is based solely on information from the past. But as we already said our main

interest in this paper was the mathematical modeling from a the available data and not testing and predicting causes of why mortality in Russia behaves the way it does.

Acknowledgement

This paper was supported by the grant No. 58/2014, IG403024 of the internal Grant Agency.

Literature

1. Booth, H., &Tickle, L. (2008). Mortality Modelling and Forecasting: a ReviewofMethods. *AnnalsofActuarial Science*, 3(1-2), 3-43
2. Plat, R. (2009). On Stochastic Mortality Modelling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3), 393-404.
3. Spedicato G. A., ACAS Clemente G. P.. Mortality projection with demography and lifecontingencies packages
4. BOOTH, HEATHER; MAINDONALD, JOHN; SMITH, LEN -- Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline *Population Studies Volume 56 issue 3 2002*

Contact

Mgr. Kirill Odintsov

VŠE, FIS

W. Churchill sq.4, Prague, CZ

Tel: (420) 732528649

email: kodintsov@hotmail.com

OPTIMALIZÁCIA LOKÁCIE NABÍJACÍCH JEDNOTIEK PRE ELEKTROAUTÁ V SR¹

ELECTRIC VEHICLES CHARGING STATIONS LOCATION OPTIMIZATION IN SLOVAKIA

Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková

Abstrakt

Rozvoj elektromobility je podmienený vybudovaním vhodnej infraštruktúry, pričom základným predpokladom je dostupnosť nabíjacích staníc. V príspevku sa venujeme aplikácii modelu rozmiestňovania, ktorý je aplikovaný na nájdenie optimálneho rozmiestnenia nabíjacích jednotiek. V prvej časti uvádzame rozmiestňovací model, kde účelová funkcia reprezentuje počet prejdých kilometrov všetkými obyvateľmi, na zabezpečenie jedného nabitia elektromobilu. V ďalšej časti je uvedený model aplikovaný na území SR, pričom výsledkom je stanovenie miest, v ktorých by mali byť umiestnené nabíjacie stanice pri celkovej minimálnej prejdenej vzdialenosti.

Kľúčové slová: lokácia, elektromobily

Abstract

The development of electromobility depends on the construction of infrastructure, and basic prerequisite is the availability of charging stations. This article deals with the application of the location model that is applied to find the optimum deployment of charging stations. In the first part we present the location model, where the objective function represents the number of kilometers traveled by all residents to ensure a single charge of their electric cars. In next section is that model applied in the Slovak Republic and the outcome is the establishment of places where charging stations should be located to minimize total distance traveled.

Keywords: location, electromobility

1 ÚVOD

V súčasnej dobe prebieha veľký rozmach zelených technológií v rôznych oblastiach. Jednou z oblastí kde sa začína implementovať zelená technológia je elektromobilita. Využívanie elektrických vozidiel predstavuje významné zníženie hluku a emisií pochádzajúcich z dopravy s pozitívnym dopadom na zvyšovanie kvality života. Nástup elektromobility vyvoláva v automobilovom priemysle výrazné zmeny.

Pre naštartovanie elektromobility na Slovensku je potrebné najprv zabezpečiť dostatočnú infraštruktúru – nabíjacie stanice (jednotky) a následne realizovať vládne opatrenia na zvýšenie trhového podielu elektroáut (elektromobilov) na trhu s automobilmi.

V príspevku sa zaoberáme optimalizáciou rozmiestnenia nabíjacích staníc v SR, ktoré podpora rozvoj zavádzania elektromobilov. V prvej časti je uvedený lokačný model, na

¹ This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

základe ktorého je vypočítaná optimálna sieť nabíjajúcich staníc. V druhej časti je uvedená samotná analýza v podmienkach SR.

2 ÚLOHA CELKOVEJ MINIMÁLNEJ VZDIALENOSTI PRI STANOVENOM POČTE NABÍJACÍCH STANÍC

V tejto časti opíšeme model, pomocou ktorého možno určiť minimálnu celkovo prejdenú vzdialenosť zo všetkých miest do miest s nabíjacími stanicami pri vopred danom počte nabíjajúcich jednotiek. Cieľ, ktorý bol stanovený, je založený na myšlienke prejdenej vzdialenosti zo všetkých miest do miest s nabíjacími jednotkami spolu, t. j. pri stanovení počtu nabíjajúcich staníc treba určiť minimálnu celkovo prejdenú vzdialenosť všetkými obyvateľmi na jedno nabitie.

Problém možno formulovať ako úlohu bivalentného programovania, kde máme premenné $y_{ij} \in \{0,1\}, x_i \in \{0,1\}, i, j = 1, 2, \dots, n$, n – počet potenciálnych miest s nabíjacími stanicami, ako aj všetkých miest. Premenné $y_{ij} \in \{0,1\}, i, j = 1, 2, \dots, n$ reprezentujú, či j -te mesto použije obsluhu z i -tého mesta s nabíjajúcou stanicou. Na druhej strane v modeli vystupujú premenné $x_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n$, ktoré nadobúdajú bivalentné hodnoty, pričom ak nadobudne hodnotu 0, tak sa potenciálne v j -tom meste nezriadi nabíjacia stanica. V prípade nadobudnutia hodnoty 1 v uvedenom meste je potrebné zriadiť nabíjajúcu stanicu, aby bol dosiahnutý stanovený cieľ.

Na zostrojenie účelovej funkcie potrebujeme parametre $d_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$, ktoré udávajú hodnoty minimálnej vzdialenosti medzi mestami i a mestami j , t. j. matica \mathbf{D} je matica minimálnych vzdialeností. Okrem uvedených parametrov je nutné definovať hodnoty $b_j, j = 1, 2, \dots, n$ reprezentujúce počet obyvateľov prichádzajúcich do j -tého mesta s nabíjajúcou stanicou. Potom možno uvedenú úlohu formulovať takto:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j d_{ij} y_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{ij} - x_i \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = p$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

kde p – počet miest s nabíjajúcou stanicou,

d_{ij} – najkratšia vzdialenosť z i -tého mesta do j -tého mesta,

b_j – počet obyvateľov j -tého mesta.

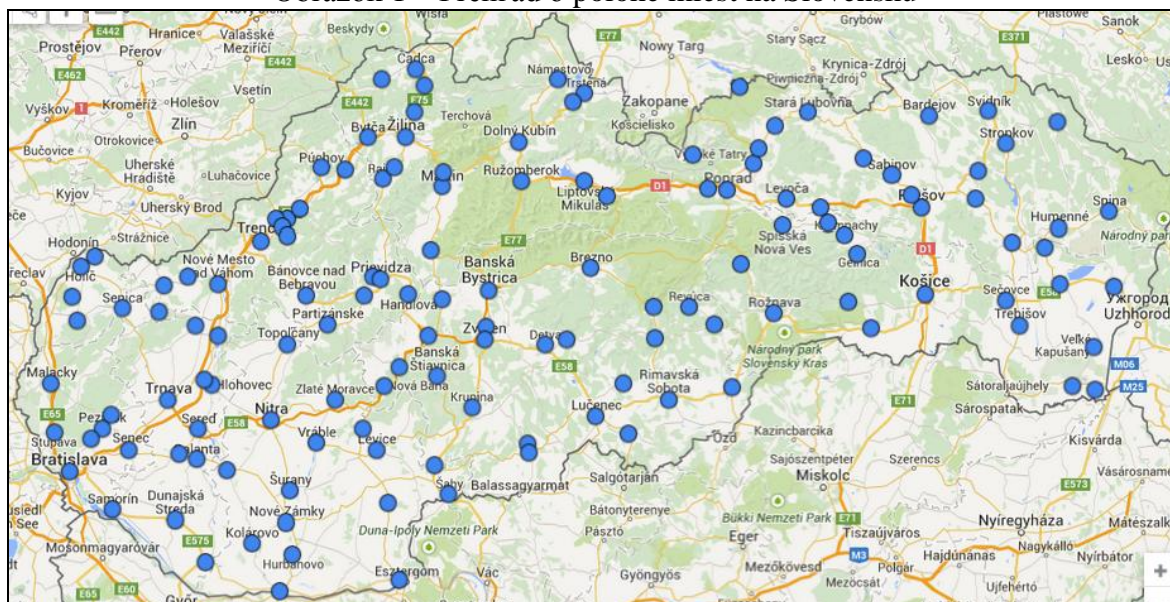
3 OPTIMALIZÁCIA UMIESTNENIA NABÍJACÍCH STANÍC PRE ELKTROMOBILY V SR

Cieľom optimálneho umiestnenia nabíjajúcich staníc je pokrytie územia Slovenska 20 nabíjacími stanicami. Daný cieľ má za úlohu naštartovať rozvoj elektromobility na

Slovensku, predajnosť elektromobilov a súčasne zvýšenie trhového podielu elektromobilov voči automobilom so spaľovacím motorom.

V tejto etape sme použili algoritmus na výpočet celkovej minimálnej prejdenej vzdialenosti, ktorú prejdú majitelia elektromobilov za účelom nabitia svojho elektromobilu zo všetkých miest. Samotný výpočet sa realizoval na podklade 138 miest Slovenska. Rozmiestnenie všetkých 138 miest na Slovensku môžeme vidieť na obrázku 1.

Obrázok 1 – Prehľad o polohe miest na Slovensku



Zdroj: vlastné spracovanie

Na výpočet modelu bola použitá matica najkratších vzdialeností D . Ďalej k výpočtu bolo potrebné použiť počet obyvateľov v jednotlivých mestách, ktorý bol označený pomocou parametrov b_j . Ďalším parametrom je p , ktorý vyjadruje počet nabíjajúcich staníc. V našom prípade $p = 20$, mestá, v ktorých budú vybudované nabíjacie stanice pre elektromobily.

Samotný výpočet sme realizovali prostredníctvom softvéru GAMS. V tabuľke 1 sa nachádza príslušný názov mesta, v ktorom vznikne nabíjacia stanica.

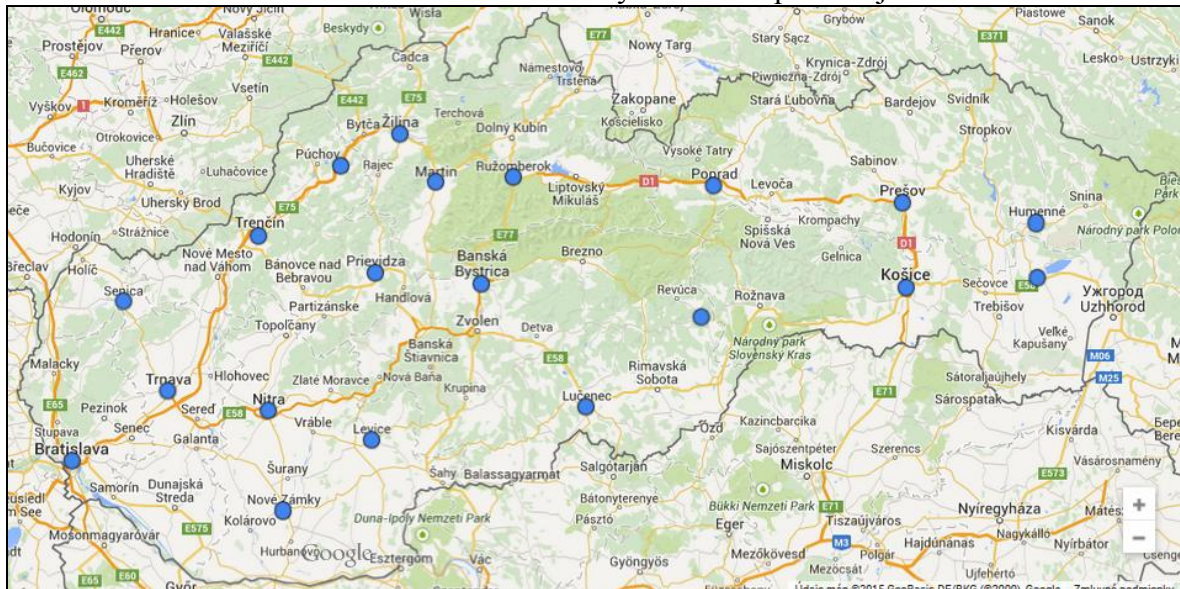
Tabuľka 1 – Názov mesta

Názov mesta	Názov mesta
Banská Bystrica	Nové Zámky
Bratislava - Staré mesto	Poprad
Humenné	Považská Bystrica
Jelšava	Prešov
Košice - Staré mesto	Prievidza
Levice	Ružomberok
Lučenec	Senica
Martin	Trenčín
Michalovce	Trnava
Nitra	Žilina

Zdroj: vlastné spracovanie

Na obrázku 2 je znázornených zvolených 20 miest, v ktorých vznikne nabíjacia stanica pre elektromobily.

Obrázok 2 – Grafické znázornenie výberu miest pre nabíjacie stanice



Zdroj: vlastné spracovanie

Po riešení uvedenej úlohy sme získali hodnotu účelovej funkcie 39 744 622,9 km, ktorá reprezentuje počet prejdených kilometrov v prípade, ak by každý obyvateľ miest v SR mal realizovať jedno nabitie elektromobilu, pričom akékoľvek iné umiestnenie by spôsobilo zvýšenie počtu prejdených kilometrov na jeden nabíjací cyklus.

4 ZÁVER

V príspevku sa autori venovali problému umiestňovania nabíjacích staníc pre elektromobily, ktoré sú základným predpokladom zvýšenia počtu elektromobilov v SR. V súčasnosti sa začínajú zriaďovať nabíjacie stanice, avšak nie je stanovená koncepcia pre SR. Autori poukazujú na možnosť využitia optimalizačných modelov, ktoré by mohli byť použité na tvorbu konceptu, ktorý by skvalitnením dostupnosti nabíjacích staníc podporil rozmach využívania elektromobilov v SR.

Použitá literatúra

1. BREZINA, I. a kol. 2009. *Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. 1. vyd. Bratislava : Ekonóm, 2009. 222 s. ISBN 978-80-225-2825-2.
2. DREZNER, Z. at al. 2004. *Facility location. Applications and theory*. Berlin : Springer-Verlag, 2004. ISBN 3-540-21345-7, p. 457.
3. EUROACTIV.SK, 2014. EÚ na Slovensku podporí rozvoj elektromobility. [online]. [cit. 2015.04.11]. Dostupné na: <<http://www.euractiv.sk/energetika/clanok/eu-na-slovensku-podpori-rozvoj-elektromobility-023221>>.
4. PEKÁR, J. a kol. 2012. *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier*. 1. vyd. Bratislava : Ekonóm, 2012. 228 s. ISBN 978-80-225-3349-2.
5. Štatistický úrad SR, počet miest v SR k 2013, [cit. 2015.04.10] Dostupné na internete: <<http://datacube.statistics.sk/TM1WebSK/TM1WebLogin.aspx>>.

Kontaktné údaje

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD, prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., doc Ing. Zuzana Čičková, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného
výskumu a ekonometrie
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 824
email: pekar@euba.sk, brezina@euba.sk, cickova@euba.sk

PROBLÉM REDUKCIE DOPRAVNEJ SIETE

TRANSPORT NETWORK REDUCTION PROBLEM

Štefan Peško, Tomáš Majer

Abstrakt

V príspevku prezentujeme matematický model a exaktný algoritmus problému redukcie dopravnej siete, ktorý môžeme definovať nasledovne: Majme dopravnú sieť T , množinu relácií R medzi uzlami dopravnej siete – požiadavky na prepravu osôb alebo materiálu a číslo q väčšie ako 1. Našou úlohou je nájsť takú podsieť S , aby dĺžka najkratšej cesty pre každú reláciu R v podsieti S bola najviac q – násobok dĺžky najkratšej cesty v sieti T .

Kľúčové slová: redukcia siete, OD matica, problém K – najkratších ciest

Abstract

Network reduction problem is formulated as follows: We are given a transportation network T , a set of important origin – destination relations R and a number q greater than 1. The goal is to find a subnetwork S of the given network T such that shortest paths between all origin – destination pairs from R using only subnetwork S are not longer than q -multiple of the corresponding distance in original network T . A mathematical model and an exact algorithm of just mentioned task is presented.

Keywords: network reduction, OD matrix, K -shortest path problem

1 ÚVOD

Integrovaný dopravný systém je jedným z najperspektívnejších nástrojov na pozastavenie prudkého nárastu individuálnej automobilovej dopravy v mestách. Aby bola hromadná doprava osôb rýchlejšia a efektívnejšia, je potrebné najmä v čase dopravných špičiek zabezpečiť plynulejší pohyb hromadných dopravných prostriedkov. Toto je možné zabezpečiť napríklad určením priority pri riadení svetelných križovatiek a budovaním samostatných pruhov pre autobusy. Takéto úpravy sú však finančne veľmi náročné a preto je veľmi dôležité presne stanoviť, ktoré úseky dopravnej siete sú najdôležitejšie a budú prioritne využívané v systéme mestskej hromadnej dopravy.

Predpokladajme, že máme zameraný dopyt po službách mestskej hromadnej dopravy formou OD – matice, ktorej jednotlivé prvky T_{ij} reprezentujú počet cestujúcich zo zastávky i do zastávky j . Z pomedzi všetkých relácií v OD – matici vyberieme len niekoľko tých najdôležitejších tak, aby sme pokryli napríklad 80% všetkých cestujúcich. Bolo by neefektívne, keby medzi každou dvojicou zastávok premávali spoje po najkratšej trase. V takom prípade by autobusy jazdili takmer po každej ulici v meste, celý dopravný systém by pozostával z veľkého množstva liniek a bol by pre cestujúcu verejnosť veľmi neprehľadný. Na druhej strane je dôležité, aby sa cestujúci v autobuse nevozili zbytočne dookola celého mesta a je preto rozumné požadovať, aby predĺženie trasy pre väčšinu cestujúcich nepresiahlo napríklad 50%.

Problém výberu úsekov dopravnej siete (redukcie dopravnej siete), po ktorých budú premávať spoje nosných liniek hromadnej dopravy a pritom nedôjde k nadmernému predĺženiu trasy

linky medzi najdôležitejšími dvojicami zastávok po prvý krát formuloval J. Černý. Niekoľko rôznych prístupov k riešeniu úlohy prezentovali A. Černá, J. Černý, P. Czimmermann a Š. Peško v príspevkoch [1], [2], [3] a [5]. Czimmermann pritom dokázal, že takto formulovaná úloha redukcie dopravnej siete patrí do kategórie NP ťažkých úloh.

2 MATEMATICKÝ MODEL

Nech $G = (V, H, c)$ je orientovaný graf, kde V je množina vrcholov, ktoré reprezentujú križovatky a autobusové zastávky, H je množina hrán, ktoré predstavujú úseky dopravnej siete medzi vrcholmi a $c: H \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia, ktorá každému úseku dopravnej siete priradí jeho dĺžku. Nech R je množina dôležitých relácií (o_r, d_r) medzi dvojicami zastávok získaná z OD matice. Potom pod redukciou siete budeme rozumieť úlohu nájsť podgraf $G' = (V', H', c)$ grafu G s minimálnou sumárnou dĺžkou hrán, pričom pre všetky relácie z R musí platiť, že dĺžka najkratšej cesty (u_k, v_k) v grafe G' nesmie byť väčšia ako q – násobok dĺžky najkratšej (u_k, v_k) cesty v grafe G , kde q je zadaná konštanta.

Označme:

- n – počet vrcholov v grafe G
- c_{ij} – cena hrany (i, j) , ak takáto hrana existuje, inak ∞
- R – množina dôležitých relácií (o_r, d_r)
- o_r, d_r – počiatočný a koncový vrchol relácie r
- l_r – dĺžka najkratšej (o_r, d_r) cesty v grafe G
- q – najväčšie prípustné predĺženie najkratšej cesty, $q > 1$
- $x_{ij}^{(r)}$ – premenná určujúca, či hrana (i, j) bude použitá v najkratšej (o_r, d_r) ceste v podgrafe G'
- y_{ij} – premenná určujúca, či bude hrana (i, j) vybraná do podgrafu G'

Matematický model úlohy potom bude vyzerat' nasledovne:

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{ij} \quad (1)$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^n x_{o_r j}^{(r)} = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_{i d_r}^{(r)} = 1 \quad \text{pre } \forall r \in R \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik}^{(r)} = \sum_{j=1}^n x_{kj}^{(r)} \quad \text{pre } \forall k = 1, 2, \dots, n, k \neq o_r, k \neq d_r \text{ a pre } \forall r \in R \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(r)} \leq q l_r \quad \text{pre } \forall r \in R \quad (4)$$

$$x_{ij}^{(r)} \leq y_{ij} \quad \text{pre } \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n \text{ a pre } \forall r \in R \quad (5)$$

$$x_{ij}^{(r)} \in \{0, 1\} \quad \text{pre } \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n \text{ a pre } \forall r \in R \quad (6)$$

Podmienky (2) a (3) vytvárajú najkratšie (o_r, d_r) cesty v grafe G' , podmienka (4) limituje dĺžku tejto cesty, podmienka (5) zabezpečí, že každá použitá hrana v (o_r, d_r) ceste bude vybraná do podgrafu G' a podmienka (6) zabezpečí bivalentnosť všetkých premenných $x_{ij}^{(r)}$ a vzhľadom na podmienku (5) a tvar účelovej funkcie aj y_{ij} .

2.1 Modifikovaný matematický model

Matematický model (1) – (6) nie je veľmi praktický pre rozsiahle siete a veľký počet relácií. Skúsme ho preto sformulovať nasledovne:

Nech množina hrán grafu G , $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots, h_m\}$, $|H| = m$, $c(h_j) = c_j$. Pre každú reláciu $r \in R$ určíme množinu $I^{(r)} = \{p_1^{(r)}, p_2^{(r)}, p_3^{(r)}, \dots, p_{K^{(r)}}^{(r)}\}$ $K^{(r)}$ – najkratších (o_r, d_r) ciest. Jednotlivé $p_i^{(r)}$ cesty môžeme určiť napríklad pomocou Palúchovho algoritmu na nájdenie K – najkratších ciest [4]. Definujme konštantu $b_{ij}^{(r)}$ pre $r \in R$, $\forall i = 1..K^{(r)}$ a $\forall j = 1..m$ rovnú 1 práve vtedy, ak i – ta najkratšia (o_r, d_r) cesta $p_i^{(r)}$ obsahuje hranu h_j . V opačnom prípade bude $b_{ij}^{(r)} = 0$.

Zavedme bivalentné premenné $z_i^{(r)}$, ktoré určia výber jednej z najkratších $p_i^{(r)}$ ciest pre každú reláciu r . Rovnako zavedme bivalentné premenné y_j , ktoré určia výber hrán grafu G do podgrafu G' .

Potom môžeme matematický model zapísať nasledovne:

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{j=1}^m c_j y_j \quad (7)$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{i=1}^{K^{(r)}} z_i^{(r)} = 1 \quad \forall r \in R \quad (8)$$

$$b_{ij}^{(r)} z_i^{(r)} \leq y_j \quad \forall r \in R, \forall i = 1, 2, \dots, K^{(r)}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

$$z_i^{(r)} \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R, \forall i = 1, 2, \dots, K^{(r)} \quad (10)$$

V takomto prípade ide o model pokrývacej úlohy, ktorá je veľmi rýchlo riešiteľná vo väčšine dostupných solverov.

3 EXPERIMENT

Vyššie uvedený postup sme experimentálne overili na cestnej sieti v Žiline. Vstupné údaje boli získané z údajov projektu OpenStreetMap [6] dostupných pod Open Data Commons Open Database licenciou [7]. Použitý model cestnej siete obsahoval 2664 vrcholov a 3411 hrán. V tejto sieti bolo určených 73 autobusových zastávok. Grafické vyobrazenie siete je na obrázku Obr.1.



Obr.1: Grafické znázornenie cestnej siete v Žiline

Na určenie K – najkratších ciest sme použili Palúchov algoritmus [4] a model (7) až (10) sme riešili pomocou Python API pre Gurobi MILP solver [8] na počítači s 8-jadrovým Intel XEON procesorom, 16GB operačnej pamäte RAM a OS Linux.

Pre naše experimenty sme náhodne vygenerovali 2 množiny, ktoré obsahovali 50 a 100 relácií medzi dvoma rôznymi autobusovými zastávkami. Namiesto určenia koeficientu q sme pre každú reláciu vypočítali 10, 20, 30, 40 a 50 najkratších ciest, čím sme vytvorili 10 rôznych zadanií. Aj najrozsiahlejšiu úlohu zvolený solver vypočítal do 30 sekúnd. Časy výpočtu pre všetky zadania sú v tabuľke Tab.1 a redukovaná cestná sieť pre 200 relácií je znázornená na obrázku Obr.2.

Number of shortest paths		10	20	30	40	50
50 relácií	Čas [s]	0,131	0,267	0,435	1,065	1,845
	Cena [m]	55856	54593	54358	54187	53826
200 relácií	Čas [s]	0,454	2,493	3,096	16,147	20,808
	Cena [m]	78291	77220	76729	75371	74944

Tab.1: Výpočtové časy pre úlohu redukcie dopravnej siete



Obr.2: Grafické znázornenie redukovanej cestnej siete v Žiline

4 ZÁVER

Ukázali sme, že riešenie úlohy redukcie dopravnej siete pomocou jej transformácie na pokrývajúcu úlohu je veľmi rýchle aj pre rozsiahlejšie siete. V našom ďalšom výskume sa chceme zamerať na podobné úlohy, keď jednotlivým reláciám bude priradená aj určitá váha ako napríklad počet cestujúcich a multikriteriálna účelová funkcia bude okrem minimalizácie nákladov minimalizovať aj celkové časové straty cestujúcich spôsobené predĺžením najkratších ciest.

Pod'akovanie

Tento príspevok vznikol vďaka podpore grantu APVV-14-0658 "Optimalizácia mestskej a regionálnej verejnej dopravy".

Použitá literatúra

1. Czimerman, P., Černá, A., Černý, J., Peško, Š.: Network Reduction Problems. In: Journal of Information , Control and Management Systems 5 (2), 2007, 139-147.
2. Czimmermann, P.: On a Certain Transport Network Reduction Problem, In: Journal of Information, Control and Management Systems 8 (2014), 21-24
3. Černá, A., Černý, J.: Economically Optimal Subnetwork for Passenger Transport. In: Proc. of the Int. Conf. Mathematical Methods in Economics 2011, Janská dolina, Slovakia, 6-9. September 2011, 101-106.
4. Palúch, S.: A multi label algorithm for k shortest paths problem , In: Communications, Scientific Letters of the University of Žilina. Vol. 11, No. 3, 2009, 11-14.
5. Peško, Š.: Min-max model for the network reduction problem, In: Mathematical methods in economics : 31st international conference : 11-13 September 2013, Jihlava, Czech Republic : proceedings. - Jihlava: College of Polytechnics Jihlava, 2013,718-723.
6. OpenStreetMap – data export of Slovakia region in OSM format, Available at: <http://www.freemap.sk/>
7. Open Data Commons Open Database License (ODbL), Available at: <http://opendatacommons.org/licenses/odbl/>
8. Gurobi Optimization, Inc. – Gurobi Optimizer Reference Manual, Available at: <http://www.gurobi.com>

Kontaktné údaje

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
Tel: (421 41) 513 4275
email: stefan.pesko@fri.uniza.sk

Ing. Tomáš Majer, PhD.
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
Tel: (421 41) 513 4284
email: tomas.majer@fri.uniza.sk

SROVNÁNÍ PŘÍSTUPŮ K ANALÝZE MIGRACE A JEJÍHO DOPADU NA EKONOMIKY CÍLOVÉ A ZDROJOVÉ ZEMĚ

A COMPARISON OF APPROACHES TO MIGRATION ANALYSIS AND ITS IMPACTS ON THE SOURCE AND HOST COUNTRY ECONOMIES

Tatiana Polonyankina

Abstrakt

Příspěvek stručně popisuje několik ekonomických přístupů k analýze migrace a nabízí zamyšlení nad možnostmi pohledu na ekonomické dopady přeshraničního přesunu pracovníků. Na migraci je možné se dívat z pohledu jedince, který se rozhoduje o přesunu do jiné země. Makroekonomický přístup nabízí srovnání vlivu migrace na pracovní trh státu trpícím odlivem pracovních sil s cílovým státem migrantů. Další pohled dělí migraci na pozitivní a negativní, podle dovedností migrujících pracovníků. Poslední část nabízí analýzu vlivu migrace na specializaci občanů cílové země. Příspěvek se také krátce zamýšlí nad rozpracování posledního modelu a to pomocí použití prostorové ekonometrie, kde je zohledněna geografická závislost.

***Klíčová slova:** imigrace, pracovní trh, Roy model*

Abstract

This article briefly describes different economic approaches to the analysis of migration and offers a reflection on the possible depictions of the economic impact of cross-border redeployment. Firstly, we look at migration from the perspective of an individual who is deciding on relocating to another country. Our second approach shows the impact of migration on labor markets, comparing country suffering from the outflow of labor with migration destination country. The third method classifies migration as positive or negative depending on the skills of the migrant workers. The last section provides an analysis of the impact of migration on the specialization of citizens in the destination country. The paper also suggests a change in the migration model using spatial econometrics, which takes into account geographic dependency.

***Keywords:** immigration, labor market, Roy model*

1 ÚVOD

Momentálně řeší Evropská unie velkou otázku: Co s uprchlíky, kteří sem míří ze zemí mimo EU? Nejvíce žadatelů o azyl pochází ze Sýrie, kde již 5 let probíhá občanská válka a kde působí Islámský stát. Další žadatelé jsou z Afghánistánu, také postiženého válkou. Mnoho běženců přichází z Afriky (Somálsko, Súdán, Demokratická Republika Kongo), kde mimo vojenských nepokojů, povstání a radikálních skupin, také panuje chudoba, sucho a nedostatek potravin.

Vzhledem k událostem poslední doby je migrace a její výhody/nevýhody diskutovaným tématem. Jaký může mít migrace ekonomický dopad? Přesun pracovních faktorů z jedné země do druhé vede ke změně dostupného pracovního kapitálu jak cílového, tak zdrojového

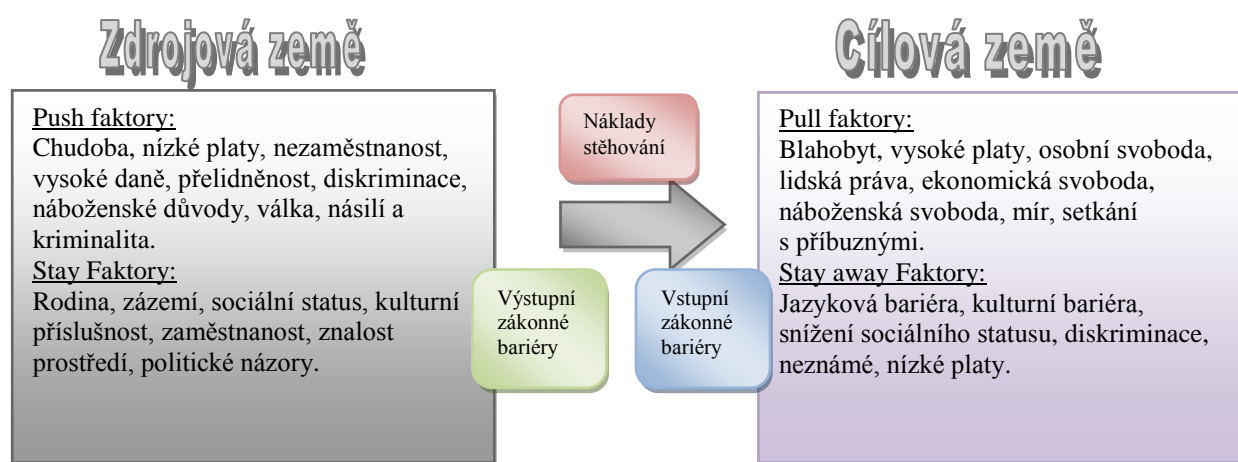
státu. Kdo je na trhu práce cílové země nejvíce ovlivněn migrací? Pracovníci, kteří si na pracovním trhu přímo konkurují s cizinci. Přísun cizinců zvýší nabídku pracovních sil, to může vést ke snížení mezd. Na druhou stranu pracovníci, kteří cizincům nekonkurují a vidí cizince, jako komplementy ne substituty mohou na přísunu cizinců získat, kdy cizinci zvýší poptávku po produkci.

Mnoho světových ekonomů se zabývalo dopadem migrace na ekonomiky cílových zemí. Existuje také více přístupů, jak se na migraci dívat a analyzovat její vliv na pracovní trh. Cílem tohoto příspěvku je shrnutí některých dosud používaných přístupů. Na migraci se můžeme dívat z pohledu jedince uvažujícího o migraci, nebo analyzovat pracovní trh země trpící odlivem nebo přílivem zahraničních pracovníků. Další možností je podívat se na migraci z hlediska schopností a dovedností přemísťujících se pracovníků. Posledním uvedeným pohledem je analýza limu cizinců na specializaci občanů cílové země.

2 PŘÍSTUPY K MIGRACI

2.1 Faktory ovlivňující migraci

Rozhodnutí jedince o přesunu do jiné země není snadné. Přistěhovalce do země mohou přitahovat vyhlídky vyšších příjmů, vyšší životní úroveň, lepší kariérní příležitosti, větší svoboda, větší bezpečí, inovace, atd. Nicméně, migrace znamená také náklady, a to jak hmotné (hlavně finanční) nebo nehmotné (nejistota, ztráta sociálního statusu,...). Determinanty migrace můžeme rozdělit na Push a Pull Faktory a jsou zobrazené na obrázku níže:



Obrázek 1: Faktory ovlivňující migraci

Ekonomická motivace migranta je tedy funkcí více faktorů, které můžeme rozdělit do 4 skupin:

- Negativní faktory, které vedou občany k odchodu ze země původu;
- Positivní faktory, které vedou občana k rozhodnutí zůstat v zemi původu;
- Negativní faktory, které vedou cizince k rozhodnutí nemigrovat do jiné země;
- Positivní faktory, které vedou cizince k přechodu do jiné země.

Ve své zemi vyhodnocuje jedinec „Push faktory“ (proč odejít) vs. „Stay faktory“ (proč zůstat). V cílové zemi zase „Pull faktory“ (proč se do země přistěhovat) vs. „Stay away faktory“ (proč se do země nemigrovat). Dále musí každý zájemce o přesun vyčíslit svoje

náklady spojené se stěhováním, mezi které patří náklady na cestu, nebezpečí během cesty, doba cesty, ušlý zisk při stěhování. Vyčíslení těchto faktorů je z části individuální pro každého jedince, z části společné pro obyvatele stejné země nebo jedince migrující do stejné země. Pro každou zemi existují také specifické legislativní bariéry při vstupu a výstupu ze země. Při rozhodování je nutné vzít v úvahu zákonné výstupní bariéry země původu (výstupní visa a podmínky pro jejich získání, výstupní daň, prohibice, trestní bezúhonnost, případné potrestání rodiny, která zůstane). Formální zákonné vstupní bariéry mohou být vstupní visa a podmínky pro jejich získání, kvóty, poplatky, trestní bezúhonnost. Pokud vezmeme občana Čínské lidové republiky, bude mít tyto náklady jinde než občan České republiky při rozhodování migrace do Německa.

$$F_i(\text{factors}) = \sum_{a=1}^m \text{push factors}_{i,a} + \sum_{b=1}^n \text{pull factors}_{i,b} - \sum_{c=1}^o \text{stay factors}_{i,c} - \sum_{d=1}^p \text{stay away factors}_{i,d} - \sum_{f=1}^r \text{moving costs}_{i,f} - \sum_{e=1}^q \text{barriers}_{i,e}$$

Rozhodnutí občana i , který vyhodnocuje migraci do země Z , můžeme vyjádřit jako funkci výše popsaných faktorů. Občan se rozhodne migrovat, pokud je hodnota funkce větší než nula.

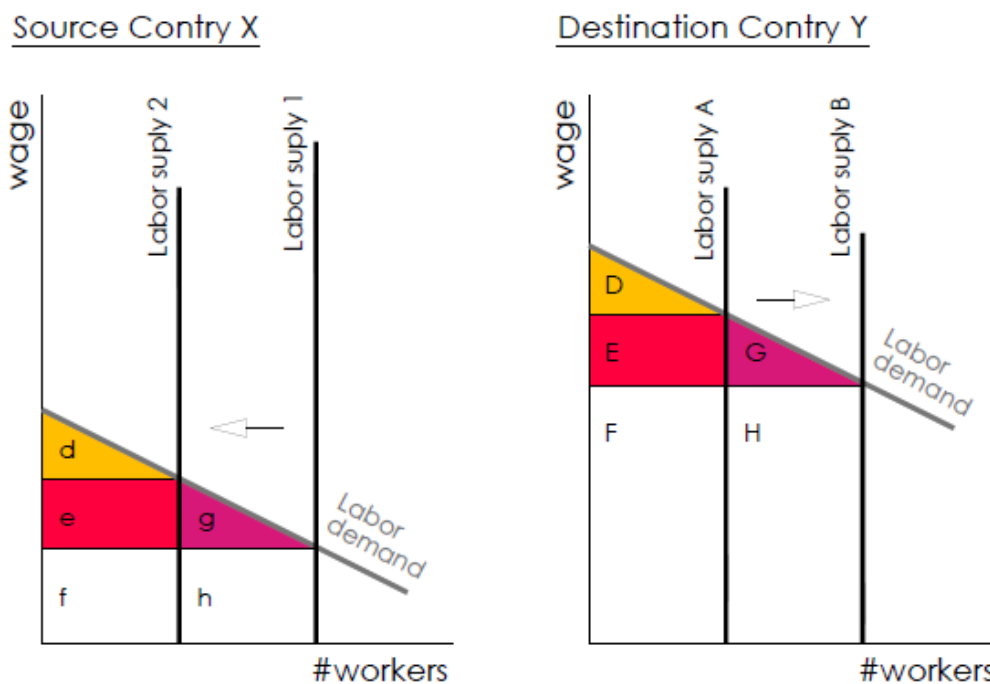
2.2 Základní model vlivu migrace na pracovní trh

Na první pohled by se mohlo zdát, že existuje přímá úměra mezi počty cizinců jedné národnosti v zemi a rozdílem mezi příjmy cílové země a příjmy země jejich původu. Tedy čím je větší rozdíl mezi příjmy, tím více cizinců se stejným původem v cílové zemi žije. Pokud uvažujeme žebříček nejchudších a nejbohatších států sestavený na datech rok 2013 a kde je bohatství měřeno hrubým domácím produktem na osobu podle parity kupní síly, v Kataru, Lucembursku nebo Singapuru (nejbohatších státech) by mělo být nejvíce cizinců z nejchudších států jako Konga nebo Číny a Indie. To, že tato úměra neplatí, dokazuje existenci dalších faktorů, které ovlivňují migraci.

Základní ekonomický model pracovního trhu, který je nejvíce požívaný a také výchozí pro další modely migrace je popsán v knize *The Economics of Immigration: Theory and Policy*. Mezi základní předpoklady patří: migranti jsou pouze pracovníci a ovlivňují pouze nabídkovou funkci práce v cílové zemi. S rostoucí mzdou, klesá poptávka po práci v zemi a s rostoucím počtem pracovníků klesá mezní produktivita práce. Co se stane na pracovním trhu při migraci ze země X do cílové země Y ? Pokud v zemi X dochází k odchodu pracovníků, snižuje se pracovní nabídka a roste mzdy. Pokud v zemi Y dochází k příchodu pracovníků, zvyšuje se pracovní nabídka a klesají mzdy.

Graf 1 zobrazuje dopad migrace na pracovním trhu. Kdo získal a kdo ztratil migrací?

- Zdrojová země X : Majitelé jiných zdrojů než je pracovní síla: Ztráta pole $e + g$; Domácí pracovníci: zisk e ; Čistá změna: ztráta g .
- Cílová země Y : Majitelé jiných zdrojů než je pracovní síla: Zisk pole $E + G$; Domácí pracovníci: ztráta E ; Čistá změna: zisk G .
- Cizinci, kteří přišli do země Y : Ztráta mezd v zemi X : Ztráta pole h ; Zisk mezd v zemi Y : zisk pole H ; Čistá změna: rozdíl $H - g$.
- Svět (celkový součet): Čistá změna země X : ztráta g ; Čistá změna země Y : zisk g . Čistá změna příjmu cizinců: $(H + G) - (h + g)$.

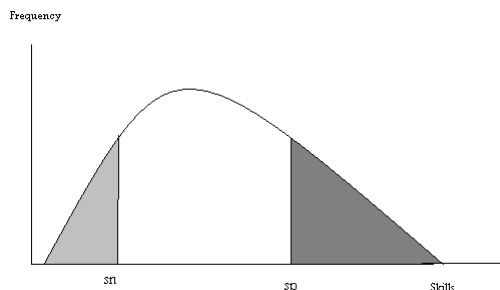


Graf 1: Migrace ze země X do země Y

Uvedený ekonomický model říká, že zvýšení počtu cizinců v zemi vede ke zvýšení nabídky pracovníků a tím pádem k poklesu mezd. Nicméně už první empirické výsledky (například Borjas (2005), Damuri and Peri (2010)), získané zejména analýzou amerického pracovního trhu, ukazují, že dopad migrace na mzdy občanů je téměř nulový.

2.3 Kdo mění zemi pobytu? Roy Model

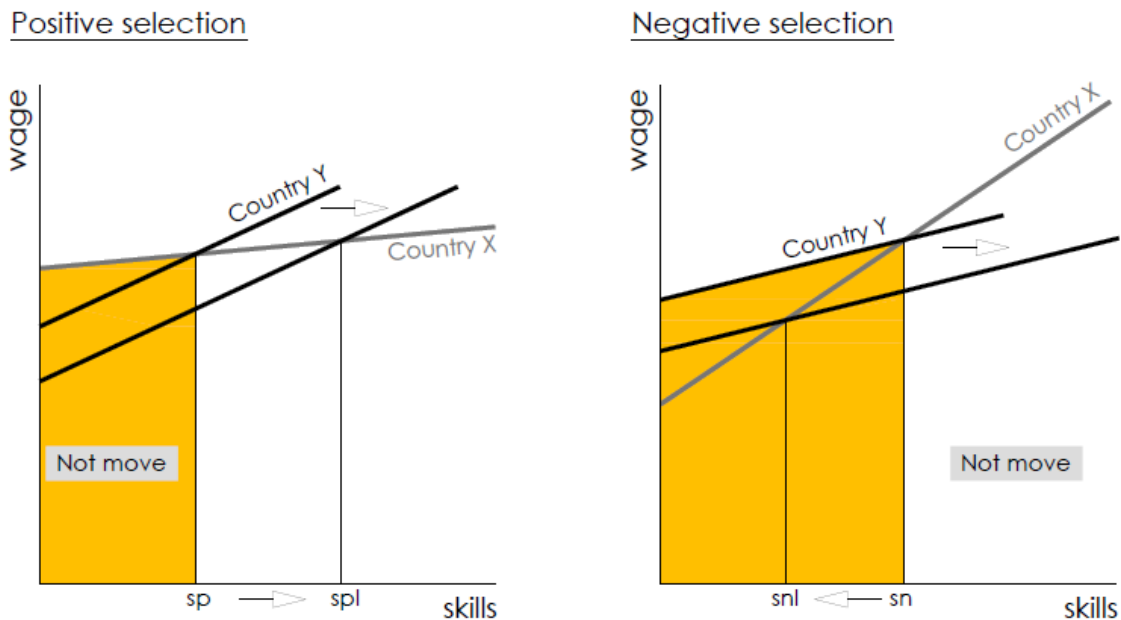
Roy model se zamýšlí nad osobami, které mění zemi pobytu, z hlediska jejich dovedností a dovedností chybějících na pracovním trhu cílové země. Předpokládá se, že osoby s bydlištěm v potencionální zdrojové zemi se momentálně snaží rozhodnout, zda migrují do cílové země, nebo ne (např. pracovníci Jižní Ameriky migrující do USA, afričtí pracovníci mířící do Evropy, atd.) Kdo jsou pracovníci migrující za prací? Rozhodně se nejedná o náhodný výběr. Podívejme se podrobněji na jejich migrační rozhodnutí:



Graf 3: Roy model.

Předpokladem je, že příjmy v obou zemích (zdrojové a cílové) závisí na množství jednoho faktoru – dovedností/schopností, kterými pracovník disponuje. Graf znázorňuje rozdělení pracovníků ve zdrojové zemi podle množství jejich dovedností. Nejpočetnější je skupina v pásmu uprostřed, tedy s průměrným množstvím dovedností. Pracovníci vlevo od sn mají

podprůměrné dovedností, tedy méně vzdělaní jedinci. Pokud migruje tato skupina, jedná se pro cílovou zemi o negativní migraci, kdy cílová země obecně upřednostňuje vzdělanější jedince. Naopak, skupina pracovníků s nadprůměrnými schopnostmi je vpravo od sp , reálně se může jednat o vysokoškolsky vzdělané pracovníky nebo odborníky v oboru. Pokud migruje tato skupina, dle modelu se jedná o pozitivní migraci.



Graf 4: Roy model, negativní a pozitivní migrace.

Fyzická osoba, která se snaží rozhodnout, zda migrovat či nikoli, odchází do zahraničí v případě, že výnosnost jejich dovedností je vyšší v cílové zemi, než ve zdrojové zemi. Jaká skupina pracovníků do země přichází, závisí na sklonu křivky návratnosti dovedností ve zdrojové a cílové zemi. Mohou nastat dva případy:

1. Graf „Positive selection“ znázorňuje případ pozitivní migrace. Žlutá část vlevo je situací, kdy je ve zdrojové zemi X vyšší mzda než v cílové Y a jedinci s méně dovednostmi zůstávají doma. Migrují pracovníci s více než sp dovednostmi, napravo od rovnovážného bodu, kdy je změna země působení výhodná.
2. Graf „Negative selection“ znázorňuje případ negativní migrace. Žlutá část je situací, kdy je v cílové zemi Y vyšší mzda než ve zdrojové zemi X . Změna země působení je výhodná pro pracovníky s méně než sn dovednostmi. Pracovníci s více než sn dovednostmi zůstávají v zdrojové zemi, kde dostanou za své dovednosti více peněz.

Závěr modelu Roy: Relativní návratnost dovedností v zemi určuje dovednostní složení přistěhovalců.

Jak se změní situace, pokud v cílové zemi dojde k poklesu mezd, například vlivem ekonomické recese? Graf s Positive selection ukazuje situaci při pozitivní migraci. Při snížení mezd ve zdrojové zemi Y platí méně za stejné dovednosti a křivka poptávky se posouvá směrem dolů. V novém rovnovážném bodě snl , se snížil počet pracovníků, kteří se rozhodli odejít ze země Y . Pro negativní migraci platí, že snížení mezd vede ke rozšíření oblasti pro rozhodnutí nemigrovat. Z grafů je jasné, že snížení mezd má pouze vliv na množství

přicházejících pracovníků a nemění negativní migraci na pozitivní a naopak. Pro změnu mezi typy migrace by muselo dojít ke změně sklonu křivek.

2.4 Peri – Sparber model

Teoretický neoklasický model tržní rovnováhy poprvé ve své práci použili Peri a Sparber (2007). Základ tvoří teorie komparativních výhod, pomocí které model vysvětluje vliv cizinců na mzdy a specializaci pracovního trhu cílové země. Pracovníci při specializaci na pracovním trhu využívají svoji komparativní výhodu. Konkrétně pracovníci cizinci mají komparativní výhodu v manuálních dovednostech a pracovníci, kteří jsou občany, mají komparativní výhodu v komunikačních dovednostech.

Předpokladem je otevřená ekonomika, kde existuje finální obchodovatelné spotřební zboží Y , na jehož produkci jsou nezbytné dva vstupy Y_H a Y_L . Vstupy pracovníků se středoškolským a nižším vzděláním jsou označeny indexem L („low educated“) a pracovníků s univerzitním a vyšším vzděláním indexem H („high educated“). Dále jsou definované vztahy pro vstupy středoškolsky a níže vzdělané pracovníky pouze a vstupy vysokoškolských pracovníků považujeme za konstantní, protože model se zaměřuje na pracovníky s nižším než vysokoškolským vzděláním. Pracovníci s nižším vzděláním se odlišují z hlediska relativní produktivity. Pro produkci jednotky vstupu Y_L musí pracovník použít jak své manuální tak interaktivní dovednosti. Y_L modelujeme dvoufaktorovou CES funkcí ve tvaru:

$$Y_L = \left[\beta_L M^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} + (1 - \beta_L) I^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \right]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}},$$

kde: β_L je relativní produktivita manuálních a interaktivních dovedností pracovníků se středoškolským a nižším vzděláním, λ je elasticita substituce mezi manuálními a interaktivními dovednostmi. M jsou manuální dovednosti, I jsou interaktivní dovednosti.

Pracovníky s nižším vzděláním rozlišujeme podle jejich původu na občany a cizince. Tyto skupiny se liší v komparativní výhodě, která je definovaná jako relativní efektivita v manuálních a také interaktivních dovednostech. Občané mají komparativní výhodu v komunikačních dovednostech, jejich průměrná relativní efektivita manuálních vzhledem k interaktivním dovednostem je menší než průměrná relativní efektivita manuálních vzhledem k interaktivním dovednostem cizinců. To znamená, že občané jsou průměrně více efektivní v komunikačních dovednostech a migranti jsou více efektivní v manuálních dovednostech. Rovnovážná nabídka poměru manuálních a interaktivních dovedností občanů je následující:

$$m_n^* = \left(\frac{\beta_L}{1 - \beta_L} \right)^{\frac{\alpha\lambda}{(1-\alpha)\lambda + \alpha}} \left[f(\bar{e}_L)_i^{\frac{1}{1-\alpha}} + (1 - f)(\bar{e}_L)_n^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{-\alpha}{(1-\alpha)\lambda + \alpha}} \left[(\bar{e}_L)_n^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

kde m_n^* je optimální nabídka podílu manuálních a interaktivních dovedností občanů, f podíl cizinců v populaci. Log-linearizační rovnice se získá regresní model níže, který je možné použít pro analýzu dopadu migrace na specializaci občanů, kde t je index pro období a c je index pro stát a region:

$$\ln \left(\frac{M}{C} \right)_{\text{native, ct}} = \theta + \delta \ln f_{ct} + \lambda_1 \text{educ}_{ct} + \lambda_2 \text{age2}_{ct} + \lambda_3 \text{age3}_{ct} + \lambda_4 \text{age4}_{ct} + \lambda_5 \text{age5}_{ct} + \varepsilon_{ct},$$

Kde vysvětlovaná proměnná udává změnu průměrného poměru v práci používaných manuálních a interaktivních dovedností občanů ve skupině, f_{ct} je poměr cizinců ve skupině, proměnná charakterizující vzdělání ve skupině, dále je zde skupina proměnných pro věk ve skupině, náhodná složka.

Metoda prostorové ekonometrie se jeví jako vhodná pro úpravu původního modelu, který ve fázi regrese pracuje s panelovými daty, kde jsou za jednotlivé regiony použity průměry proměnných. Vznikají tedy regionální data a můžeme očekávat prostorovou závislost, v takovém případě použití klasických regresních modelů jako metoda nejmenších čtverců není vhodná, vzhledem k existenci prostorové autokorelace, které vede k nestabilitě odhadů. Prostorová ekonometrie je stále oblíbenější metodou pro práci s regionálními daty, kdy pracuje s maticí, která zohledňuje sousedství jednotlivých oblastí.

3 ZÁVĚR

Pozornost celé Evropy je momentálně upnuta k řešení uprchlické vlny, která míří do Evropské unie. Politické i mediální diskuze se zabírají možným řešením problému, ale také dopady migrace na ekonomiku Evropské unie. Cílem příspěvku bylo teoreticky ukázat migraci a její dopad na ekonomiku z několika pohledů. První část vycházející z maximalizace užítku jedince popisuje faktory ovlivňující jednotlivce, při rozhodování zda emigrovat či ne. V druhé části se na migraci díváme z pohledu státu. Graficky je znázorněný dopad na pracovní trh, kde porovnáváme stát trpící odlivem pracovních sil s cílovým státem migrantů. Třetí model jde dál a dělí migraci na pozitivní a negativní, podle dovedností migrujících pracovníků. Poslední pohled nabízí analýzu vlivu migrace na specializaci občanů. Z ekonometrického hlediska zmiňuje tento příspěvek možnost rozpracování posledního modelu a to pomocí použití prostorové ekonometrie, kde je zohledněna geografická závislost. Volba výchozího modelu nebo přístupu závidí jak na dostupných datech, tak na výchozí hypotéze, jejíž platnost chceme ověřit.

This paper is supported by the research grant IGA VŠE/IG403024/58/2014.

Použitá literatura

1. ALONSO-VILLAR, O., DEL RÍO, C. 2011. Occupational segregation in a country of recent mass immigration: evidence from Spain. *The Annals of Regional Science*, February 2013, Vol. 50, No. 1, pp 109-134
2. Autor, David H. 2009. Lecture notes: Self-Selection — The Roy Model. Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. available at: <http://econ-www.mit.edu/files/4092/>
3. BORJAS G. J. 2010. *Labor Economics*. Boston et al.: McGraw-Hill, ISBN: 9780073511368
4. BORJAS, G. J. 2005: The Labor Market Impact of High Skill Immigration, *American Economic Review*, Vol. 95, No. 2, pp. 56-60.
5. BORJAS G. J. 1985. Assimilatio, changes in cohort quantity, and the earnings of immigrants, *Journal of Labour Economics*, 1985, Vol. 3, No. 4, pp 463-489
6. D'AMURI, F., PERI, G. 2010: Immigration and Occupation in Europe, *Discussion Paper CReAM* 2010.
7. LESAGE, J. a PACE, R. K. 2009. *Introduction to Spatial Econometrics*. Statistics: A Series of Textbooks and Monographs. CRC Press, Boca Raton. ISBN 9781420064254.
8. LESAGE, J. 1999 The theory and practice of spatial econometrics. University of Toledo. Toledo, Ohio, 1999, Vol. 28, pp 33.

9. MANACORDA, M., MANNING, A., WADSWORTH, J. 2012. The impact of immigration on the structure of wages: theory and evidence from Britain, *Journal of the European Economic Association*, Vol. 10, No. 1, pp.120-151.
10. MUSIL, P. 2015. Nejbohatší a nejchudší země světa: Katar a kongo, *Ekonomický deník*, available at: <http://ekonomicky-denik.cz/nejbohatsi-a-nejchudsi-zeme-sveta-katar-a-kongo/>
11. NICA, E. 2015. Labor Market Determinants of Migration Flows in Europe. *Sustainability* 2015, Vol. 7, pp 634-347.
12. PERI, G., SPARBER C. 2011. Assessing Inherent Model Bias: An Application to Native Displacement in Response to Immigration, *Journal of Urban Economics*, 2011, Vol. 69, No 1, pp. 82-91.
13. PERI, G., SPARBER C. 2009. Task specialization, Immigration and Wages. *American Economic Journal: Applied Economics*, American Economic Association, 2009. Vol. 1, No. 3, pp 135-169.
14. UN High Commissioner for Refugees (UNHCR), UNHCR Global Trends 2014: World at War, 18 June 2015, available at: <http://www.refworld.org/docid/558292924.html/>

Kontaktní údaje

Ing. Tatiana Polonyankina.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3 – Žižkov

Tel: (+420) 774 871 148

email: xpolt11@vse.cz

STOCHASTICKÝ ENVIRONMENTÁLNY MODEL ZÁSOb¹

STOCHASTIC ENVIRONMENTAL INVENTORY MODEL

Marian Reiff

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá environmentálnym modelom zásob s možnosťou jednorazovej objednávky. Model zahŕňa mechanizmus zdaňovania vplyvu na životné prostredie s cieľom minimalizovať celkové očakávané náklady. Model zohľadňuje náhodný dopyt zákazníkov modelovaný pomocou diskretného rozdelenia. Simulačný model je zostrojený v tabuľkovom procesore MS Excel.

Kľúčové slová: *modelovanie zásob, simulácia, environmentálna záťaž*

Abstract

The paper deals with environmental single-period inventory model. Demand is random. The model includes a mechanism of taxation of environment impact in order to minimize the total expected costs. The model takes into account the random customer demand modeled by discrete distributions. The simulation model is constructed in spreadsheet software MS Excel.

Keywords: *inventory modeling, simulation, impact on environment*

1 UVOD

Vzhľadom na potenciálny vplyv činností ako výroba, skladovanie a preprava zásob na životné prostredie, je potrebné pri rozhodovaní a riadení zásob zohľadňovať aj tento fakt.

Cieľom príspevku je rozšíriť kvantitatívne modely, ktoré sa zvyčajne zameriavajú buď na minimalizáciu nákladov alebo maximalizáciu zisku, tak aby zachytávali aj dopad modelovaných činností na životné prostredie. Problém dopadu ľudskej činnosti na životné prostredie možno začleniť do modelu buď vo forme pridania ohraničenia do modelu alebo rozšírením účelovej funkcie modelu.

Model jednorazovej objednávky bez možností znovu objednania v prostredí so zdaňovaním environmentálnej záťaže. Nech

- Q predstavuje rozhodujúcu premennú, objednané množstvo
- D predstavuje náhodný diskretný dopyt
- c_o predstavuje náklady spojené s nahodnotením dopytu, $c_o = c + \tau - v$ kde c predstavuje jednotkové náklady na obstaranie, τ jednotkovú daň na vyprodukované emisie a v predstavuje jednotkovú výpredajovú cenu
- c_u predstavuje náklady spojené s podhodnotením dopytu, $c_u = p - c - \tau + s$ kde c predstavuje jednotkové náklady na obstaranie, τ jednotkovú daň na vyprodukované

¹ This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

emisie, p predstavuje jednotkovú predajnú cenu a s sú náklady na stratu dobrého mena - stratu goodwill.

V závislosti od veľkosti objednávky a špecifickej veľkosti dopytu funkciu celkových nákladov je možné vyjadriť nasledujúcim vzťahom

$$C(Q, D) = \begin{cases} c_o(Q - D) & \text{ak } Q < D \\ c_u(D - Q) & \text{ak } Q \geq D \end{cases}$$

V prípade, že dopyt má stochastický charakter, strednú hodnotu nákladovej funkcie vyjadríme pomocou $EC(Q, D) = \sum_{D=0}^{\infty} p(D)C(Q, D) = c_o \sum_{D=0}^{Q-1} p(D)(Q - D) + c_u \sum_{D=Q}^{\infty} p(D)(D - Q)$.

Pre optimálnu veľkosť objednávky platí $P(Q^*) = \sum_{D=0}^{Q^*} p(D) \geq \frac{c_u}{c_u + c_o} = \frac{p + s - c - \tau}{p + s - v}$.

Optimálnu veľkosť objednávky Q^* vypočítame jednoduchou procedúrou. Dosadzujeme do posledného vzťahu celočíselne hodnoty Q (začínajúc $Q = 1$) až pokiaľ neplatí uvedená nerovnosť.

V prípade ak náhodný dopyt nie je modelovaný diskretným rozdelením, optimálnu pravdepodobnosť nenastania deficitu určíme na základe vzťahu $P(\text{dopyt} \leq Q^*) = c_u / (c_u + c_o)$ a optimálnu veľkosť dodávky v prípade normálneho rozdelenia vypočítame pomocou vzťahu $Q^* = \mu + z_s$ alebo v prípade rovnomerného rozdelenia použijeme vzťah $Q^* = a + P(\text{dopyt} \leq Q^*)(b - a)$

Pre určenie veľkosti objednávky možno použiť aj simulačný model zostrojený v tabuľkovom procesore MS Excel. Cieľom príspevku je zostrojiť takýto model.

1.1 Simulačný model

V nasledujúcej časti je prezentovaná konštrukcia simulačného modelu na konkrétnom príklade. Tabuľky č. 1 obsahuje vstupné údaje. Úlohou je učiť veľkosť objednávky (variabilná premenná), ktorú si na začiatku ľubovoľne zvolíme a jej hodnota je uvedená v tabuľke č. 2. v bunke B16.

V tabuľke č. 2 s názvom Simulačný model prezentovaná simulácia obsahuje 1000 opakovaní generovania veľkosti dopytu (strená časť tabuľky je skrytá), a pre jednotlivé hodnoty dopytu je vypočítaný zisk alebo strata dosiahnutý pri veľkosti objednávky 400 ks. Simulačný model je zostrojený pomocou zabudovaných funkcií MS Excel, pričom cieľom je uspokojiť dopyt zo zásob tvorených veľkosťou objednávky. Môžu nastať dva rôzne prípady a to, že dopyt je väčší respektíve menší ako objednané množstvo a s tým sú aj spojené náklady nadhodnotenie respektíve podhodnotenia dopytu. V zostrojenom simulačnom modeli pre jednoduchosť neuvažujeme s nákladmi na stratu goodwill alebo nákladov na ušlý zisk.

Pri hodnotení výsledku simulácie analyzujeme dosiahnutý zisk alebo stratu uvedenú v stĺpci G v riadkoch 20 až 1019 tabuľky č. 2. Dopyt môže nadobúdať hodnoty 200, 250, 300, 350 a 400 kusov a k nim prislúchajúce hodnoty zisku 760, 510, 260, 10 a -240 €. Početnosť (frekvenciu) jednotlivých prípadov si množme pozrieť v tabuľke č. 2 v časti A1028:B1033.

Tabuľka č. 1: Vstupné údaje

	A	B	C
1	Vstupné údaje		
2	Predajná cena	4	€/ks
3	Nákupná cena	2	€/ks
4	Náklady na likvidáciu zásob	1	€/ks
5	Environmentálne náklady	0,1	€/ks
6			
7			
8	Pravdepodobnostné rozdelenie dopytu (dikrétné rozdelenie)		
9	Dolná hranica	Horná hranica	Veľkosť dopytu
10	0	0,3	200
11	0,3	0,5	250
12	0,5	0,8	300
13	0,8	0,95	350
14	0,95	1	400

Tabuľka č. 2: Simulačný model

	A	B	C	D	E	F	G
14							
15	Rozhodujúca premenná						
16	Veľkosť objednávky	400					
17							
18	Simulácia						
19	Poradové číslo opakovania	Veľkosť dopytu	Tržby	Náklady nadhodnotenia dopytu	Náklady na obstaranie tovaru	Environmentálne náklady	Zisk/Strata
20	1	200	800,00 €	200,00 €	800,00 €	40,00 €	-240,00 €
21	2	200	800,00 €	200,00 €	800,00 €	40,00 €	-240,00 €
22	3	300	1 200,00 €	100,00 €	800,00 €	40,00 €	260,00 €
1017	998	300	1 200,00 €	100,00 €	800,00 €	40,00 €	260,00 €
1018	999	400	1 600,00 €	0,00 €	800,00 €	40,00 €	760,00 €
1019	1000	250	1 000,00 €	150,00 €	800,00 €	40,00 €	10,00 €
1020							
1021	Popisné štatistiky						
1022	Priemerný zisk/strata		117,50 €		95% interval' spoľahlivosti		
1023	Smerodajná odchýlka		302,75 €		Dolná hranica		98,74 €
1024	Minimalny zisk/strata		-240,00 €		Horná hranica		136,26 €
1025	Maximalny zisk/strata		760,00 €				
1026	Distribúcia zisku/straty						
1027							
1028	Hodnota v bunke		Zisk/Strata		Početnosť		
1029	760		46				
1030	510		158				
1031	260		290				
1032	10		192				
1033	-240		314				

Odhadnutá stredná hodnota očakávaného zisku je 117,5€ so smerodajnou odchýlkou 302,75€. V prípade ak je zbežne simulácia ešte raz, sú vygenerované iné náhodné čísla a výsledok simulácie je mierne odlišný. Interval spoľahlivosti v bunke F1023 a F1024 zachytáva túto neistotu rozdelenia strednej hodnoty očakávaného zisku.

Tabuľka č. 3: Určenie veľkosti objednávky

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1035									
1036	Veľkosť	Priemerný							
1037		117,50 €							
1038	200	380,00 €							
1039	225	394,75 €							
1040	250	397,00 €							
1041	275	379,75 €							
1042	300	379,75 €							
1043	325	312,25 €							
1044	350	265,75 €							
1045	375	192,13 €							
1046	400	123,75 €							
1047									
1048									

Veľkosť objednávky	Priemerný zisk (€)
200	380,00
225	394,75
250	397,00
275	379,75
300	379,75
325	312,25
350	265,75
375	192,13
400	123,75

Úlohou je určiť veľkosť objednávky. Zatiaľ sme odhadli iba strednú hodnotu zisku pre veľkosť objednávky 400 kusov. Výpočet zopakujeme pre rôzne hodnoty variabilnej premennej – veľkosti objednávky, tieto hodnoty sú uvedené v tabuľke č. 3 v časti A1038:A1046. Vo vedľajšom stĺpci v rozsahu B1038:B1046 sú uvedené prislúchajúce stredné hodnoty zisku. Vyberáme najväčšiu hodnotu stredného zisku a k nej prislúchajúcu hodnotu veľkosti objednávky. Tieto hodnoty môžeme vypočítať manuálnym prepisovaním hodnoty veľkosti objednávky v bunke B16 alebo pomocou nástroja MS Excelu s názvom Tabuľka údajov nachádzajúci sa v záložke Údaje v časti Citlivostná analýza (vo verzii MS Office 2010 Analýza hypotéz).

Použitá literatúra

1. ALBRIGHT, S. C., WINSTON, W., ZAPPE, C., (2010) Data Analysis and Decision Making, (4th Edition) / South-Western College Pub, ISBN: 0-538-47612-5
2. GEŽÍK, P., 2007. Modely zásob a problémy s určením funkcie celkových nákladov, AIESA - Mladá veda 2007, Bratislava, Vydavateľstvo EKONÓM
3. GEŽÍK, P., 2014. Modifikovaný EOQ prístup v cenotvorbe produktov s možnosťou využitia recyklovaného materiálu, Nové trendy v ekonometrii a operačnom výskumu zborník príspevkov : mezinárodný vedecký seminár : 26. - 28. november / listopad 2014, Praha Vydavateľstvo EKONÓM, ISBN 978-80-225-3985-2
4. PEKÁR, J., 2010 Softvérová podpora rozhodovania v prostredí Microsoft Excel, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, ISBN 978-80-225-2889-4

Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: reiff@euba.sk

VÝPOČET HORNÍ MEZE VÝBĚROVÉHO ROZPTYLU NAD INTERVALOVÝMI DATY

COMPUTATION OF UPPER BOUND OF SAMPLE VARIANCE OVER INTERVAL DATA

*Ondřej Sokol*¹

Abstrakt

Práce se zabývá problematikou výpočtu horní meze výběrového rozptylu v případě, kdy nejsou k dispozici přesná data, ale pouze intervaly, ve kterých tato data s jistotou leží. Obecně je nalezení horní meze výběrového rozptylu ze znalosti pouze intervalových dat NP-těžký problém, ale při splnění určitých podmínek kladených na vstupní intervalová data lze použít některý z efektivních algoritmů. V práci je upraven Xiangův algoritmus tak, aby, byť i za cenu exponenciální složitosti, dokázal vždy najít optimální řešení. Následně je zkoumána složitost v průměrném případě na datech pocházejících z běžných rozdělání.

Klíčová slova intervalová data, horní mez výběrového rozptylu, algoritmus

Abstract

This thesis deals with the calculation of the upper limit of the sample variance when the exact data are not known but intervals which certainly contain them are available. Generally, finding the upper limit of the sample variance knowing only interval data is an NP-hard problem, but under certain conditions imposed on the input data an appropriate efficient algorithm can be used. In this work Xiang's algorithm was modified so that, even at the cost of exponential complexity, can always find the optimal solution. The average computational complexity over randomly generated data is analyzed.

Keywords: interval data, upper bound of sample variance, algorithm

1 Úvod

V této práci je řešen problém výpočtu rozptylu, který nastává, pokud přesná data nejsou dostupná, ale známe intervaly, ve kterých s určitostí tato data leží. Tato situace nastává například v důsledku chyb měření za předpokladu, že známe nebo alespoň dokážeme spolehlivě odhadnout velikost této chyby. Dalším příkladem jsou kategorizovaná data, kdy například známka odpovídá určitému rozmezí získaných bodů z testu, či obecně různá zaokrouhlená data. Často dochází ke zveřejňování intervalových dat místo přesných údajů z důvodu zachování tajemství a ztížení identifikace, což se objevuje například v demografických datech. Při predikcích se pak často setkáváme s intervalovou předpovědí místo bodové předpovědi.

Pokud známe pouze intervaly, je možné při výpočtu statistik buď data nahradit pevnou hodnotou, což s sebou obvykle nese ztrátu informace, nebo spočítat statistiku z intervalů a zachovat tak co

¹Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/54/2015 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

nejvíce známých informací. V takovém případě je výstupem interval, dolní a horní mez, ve kterém se s jistotou nachází daná statistika. Samotný výpočet intervalu statistiky pak může být velmi složitý problém.

V této práci je zkoumán Xiangův algoritmus pro výpočet horní meze výběrového rozptylu, což je obecně NP-těžký problém. Algoritmus pro instance splňující některé zákonitosti dokáže nalézt řešení v polynomiálním čase. V této práci je navržena modifikace tohoto algoritmu tak, aby bylo možné zpracovat jakoukoliv instanci, i když obecně s exponenciální složitostí. Dále je pak zkoumána složitost v průměrném případě při náhodně generovaných datech.

Tento příspěvek vychází z diplomové práce [1].

2 Definice

Uzavřeným reálným intervalem je v této práci myšlena množina bodů, pro které platí:

$$\mathbf{x} := [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad (1)$$

kde \underline{x} označuje **dolní mez** a \bar{x} **horní mez** intervalu \mathbf{x} . Interval \mathbf{x} je **degenerovaný** právě když $\underline{x} = \bar{x}$. Označme $\underline{x} = x^c - x^\Delta$ a $\bar{x} = x^c + x^\Delta$.

Otevřený reálný interval je pak značen

$$\hat{\mathbf{x}} := (\underline{x}, \bar{x}) = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} < x < \bar{x}\}. \quad (2)$$

Necht' máme $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, pak pojem **zúžený interval** značí

$$\mathbf{x}_i^\ddagger := \left[x_i^c - \frac{1}{n}x_i^\Delta, x_i^c + \frac{1}{n}x_i^\Delta \right] \quad (3)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Necht' máme množinu skalárů x_1, x_2, \dots, x_n a statistiku, tedy spojitou funkci dat, $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$. V takovém případě i statistika $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je jedna hodnota. V této práci je ale řešena situace, kdy přesné hodnoty x_i neznáme, ale máme k dispozici intervaly $\mathbf{x}_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$, pro které platí $x_i \in \mathbf{x}_i$ a zároveň nejsou známy žádné další informace o těchto intervalech.

Na x_1, x_2, \dots, x_n lze nahlížet jako na realizace náhodné veličiny, a tudíž je pak i hodnota $S = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ náhodnou veličinou. Jedinou informací, kterou máme k dispozici, jsou meze, kterých x_i může nabývat. Hledány jsou tedy meze statistiky S , přičemž pro ně platí:

$$\underline{S} := \inf\{S(x_1, x_2, \dots, x_n) : (\forall i)x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]\}, \quad (4)$$

$$\overline{S} := \sup\{S(x_1, x_2, \dots, x_n) : (\forall i)x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]\}. \quad (5)$$

Pak zřejmě platí

$$\underline{S} \leq S \leq \overline{S}. \quad (6)$$

V této práci je zkoumán výběrový rozptyl v případech, kdy nejsou k dispozici přesná data, ale pouze intervaly. V případě, že hledáme dolní mez intervalu výběrového rozptylu lze řešení obecně najít v polynomiálním čase, jelikož se jedná o minimalizaci konvexní kvadratické funkce na konvexní

množině. Speciální algoritmy pro nalezení řešení v logaritmickém a lineárním čase lze najít v [2] a [3]. Výpočet horní meze je ale obecně NP-těžký problém.

Některé ostatní statistiky byly studovány v pracích: Černý a Hladík [4] (t -statistika), Kreinovich [5] a Xiang a kol. [3] (entropie), Kreinovich a kol. [6] (vyšší momenty). Další uvedení do problematiky je v přehledových publikacích o statistikách nad intervaly [7] a [8].

3 Xiangův algoritmus

Algoritmus byl prvně publikován v [3]. Algoritmus předpokládá, že žádný zúžený interval není podmnožinou vnitřních bodů jiného zúženého intervalu. Žádný uzavřený zúžený interval tedy není vnořený do jiného otevřeného zúženého intervalu. Tuto podmínku lze nahradit ekvivalentní podmínkou $|x_i^c - x_j^c| \geq \frac{1}{n} |x_i^\Delta - x_j^\Delta|$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ taková, že $i \neq j$. Algoritmus pracuje iteračně.

Definují se tři různé množiny:

- I^- je množinou indexů i , o kterých víme, že optimální hodnota x_i maximalizující rozptyl je $x_i = \underline{x}_i$. Tedy $I^- := \{i : x_i = \underline{x}_i\}$.
- I^+ je množinou indexů i , o kterých víme, že optimální hodnota x_i maximalizující rozptyl je $x_i = \bar{x}_i$. Tedy $I^+ := \{i : x_i = \bar{x}_i\}$.
- I je pak množinou indexů, u kterých jsme zatím nerozhodli, kam budou přiřazeny. Platí tedy $I := \{1, \dots, n\} \setminus (I^- \cup I^+)$.

V každé iteraci se dále spočte hodnota R^- a R^+ dle vzorců $R^- = \sum_{i \in I^-} \underline{x}_i$ a $R^+ = \sum_{i \in I^+} \bar{x}_i$.

Na začátku platí $I^- = I^+ = \emptyset$, $I = \{1, \dots, n\}$ a tedy i $R^- = R^+ = 0$.

1. Necht' $m \in I$ je index, pro který platí $x_m^c = \text{median}\{x_i^c, i \in I\}$.
2. Každá střední hodnota x_i^c pro $i \in I$ je porovnána s mediánem x_m^c a je přiřazena do jedné z množin P^- nebo P^+ v závislosti na tom, zda je tento prvek menší nebo větší než medián. Pro množiny platí $P^- = \{i : x_i^c \leq x_m^c\}$ a $P^+ = \{j : x_j^c > x_m^c\}$.
3. Spočteme hodnoty e^- a e^+ dle vzorců $e^- = R^- + \sum_{i \in P^-} \underline{x}_i$ a $e^+ = R^+ + \sum_{j \in P^+} \bar{x}_j$.
4. Nyní mohou nastat tři situace:
 - pokud $n \cdot \underline{x}_m^\dagger < e^- + e^+$, pak $I^- = I^- \cup P^-$, $R^- = e^-$ a $I = P^+$,
 - pokud $n \cdot \underline{x}_m^\dagger > e^- + e^+$, pak $I^+ = I^+ \cup P^+$, $R^+ = e^+$ a $I = P^-$,
 - pokud $n \cdot \underline{x}_m^\dagger = e^- + e^+$, pak $I^- = I^- \cup P^-$, $I^+ = I^+ \cup P^+$ a $I = \emptyset$.
5. V případě, že $I \neq \emptyset$, iterace pokračují od bodu 1. Ve chvíli, kdy je u všech prvků rozhodnuto, do které množiny patří, je spočten výběrový rozptyl $\hat{\sigma}^2$ z hodnot $x_i = \underline{x}_i$ pro $i \in I^-$ a $x_j = \bar{x}_j$ pro $j \in I^+$.

Důkaz platnosti algoritmu je k dispozici v původním článku [3].

4 Příklad nesplnění předpokladu

Pokud je ve zkoumané množině intervalů alespoň jeden vnořený zúžený interval v intervalu $[\underline{E}, \overline{E}]$, pak vypočítaný výběrový rozptyl nemusí být správný. V případě, že se takový zúžený interval nachází mimo interval $[\underline{E}, \overline{E}]$, pak je vždy správně určen.

Pokud jsou zúžené vnořené intervaly v intervalu $[\underline{E}, \overline{E}]$, je třeba při výpočtu rozptylu prozkoumat oba krajní body těchto intervalů. Do algoritmu jsou proto vloženy tyto krajní body jako pevné hodnoty. V případě d zúžených vnořených intervalů je tedy třeba spustit výpočet 2^d -krát. Z důkazu platnosti algoritmu [3] plyne, že zařazení pevných hodnot, které nesplňují předpoklady, tj. jsou vnořené do jiného intervalu, do algoritmu, nemá vliv na jeho funkčnost.

5 Popis rozšířeného algoritmu

V případě, že data nesplňují předpoklady a existuje tedy několik vnořených zúžených intervalů, pak lze algoritmus upravit, aby přesto fungoval, byť s exponenciální složitostí vzhledem k počtu vnořených zúžených intervalů. Rozšířený algoritmus pak probíhá následovně:

1. Zjistíme, jaké intervaly $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou podmnožinou vnitřních bodů alespoň jednoho jiného intervalu. Přeznačme je $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_d$. Bez újmy na obecnosti nyní máme $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-d}$ a $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_d$.
2. Každý interval \mathbf{y}_j od 1 do d porovnáme s hodnotami \underline{E} a \overline{E} a vybereme hodnotu y_j , tj. j -tý interval pak bude zastupovat jedna hodnota:
 - pro $\overline{y}_j \leq \underline{E}$ vybereme $y_j = \underline{y}_j$,
 - pro $\underline{y}_j \geq \overline{E}$ vybereme $y_j = \overline{y}_j$,
 - pro ostatní případy je nutné pracovat s oběma krajními body intervalu \mathbf{y}_j .
3. Pro nepřirazené intervaly \mathbf{y}_j je nutné vytvořit všechny možné jejich kombinace. Utvoříme všechny možné posloupnosti hodnot y_1, y_2, \dots, y_d a spolu s intervaly $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-d}$ použijeme původní algoritmus, přičemž nyní zafixované hodnoty y_1, y_2, \dots, y_d přímo zahrneme do odpovídající množiny I^- nebo I^+ .
4. Ze všech vypočtených hodnot výběrového rozptylu se vybere ta nejvyšší.

6 Výpočetní složitost

Využívá se skutečnosti, že nalezení mediánu je možné v lineárním čase. V každé iteraci je nalezen medián a poté jsou provedeny operace, jejichž složitost je menší nebo rovna počtu prvků přiřazených prvků. Jelikož v každém kroku je přiřazena alespoň jedna polovina prvků, je celkový počet kroků potřebný pro nalezení výsledku $C \cdot \left(n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} \dots\right) \leq C \cdot 2n$, viz [3]. Asymptotická složitost je tedy $\mathcal{O}(n)$. Přidáním pevných hodnot do algoritmu není složitost ovlivněna.

V případě, že v datovém souboru je nanejvýš d vnořených zúžených intervalů, pak je třeba prozkoumat oba krajní body těchto intervalů. Celková složitost rozšířeného algoritmu je pak $\mathcal{O}(2^d n)$.

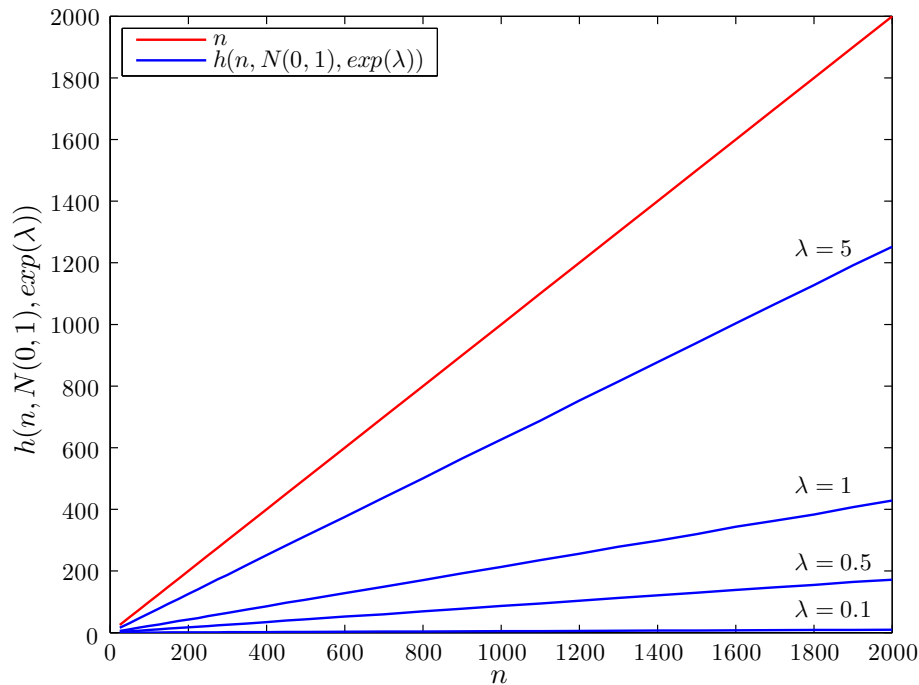
7 Odhad průměrné složitosti při náhodných datech

Pro výpočet střední hodnoty počtu vnořených intervalů definujeme funkci $h(n, R_1, R_2)$, kde n je počet intervalů a R_1 a R_2 jsou jednorozměrná rozdělení hodnot x_i^c a x_i^Δ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Obdobně jako v předchozí kapitole je definována funkce $b(n, R_1, R_2)$ pro odhad rozptylu počtu zúžených vnořených intervalů. Cílem je zjistit, jak se funkce h a b chovají v závislosti na zvyšujícím se n .

$$D := \{i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbf{x}_i^\ddagger \cap [\underline{E}, \overline{E}] \neq \emptyset \wedge \exists j : \mathbf{x}_i^\ddagger \subset \hat{\mathbf{x}}_j^\ddagger; x_i^c \sim R_1; x_i^\Delta \sim R_2\}, \quad (7)$$

$$h(n, R_1, R_2) := \mathbb{E}(d := |D|), \quad (8)$$

Pomocí simulací byla odhadována průměrná složitost pro náhodná data. Pro funkci $h(n, N(0, 1), \exp(\lambda))$ pro $\lambda = \{0, 1; 0, 5; 1; 5\}$ se zvyšující se velikostí n je patrný jasný lineární trend, jak je zřetelně vidět na obrázku 1. Počet vnořených zúžených intervalů je tedy podílem n , který se se zvyšující velikostí n výrazněji nemění.



Obrázek 1: Graf funkce $h(n, N(0, 1), \exp(\lambda))$ pro $\lambda = \{0, 1; 0, 5; 1; 5\}$.

Obdobné průběhy lze sledovat i pro jiné generované náhodné intervaly z běžných rozdělení.

8 Závěr

Xiangův algoritmus lze poměrně jednoduše upravit tak, aby byl schopen zpracovat jakýkoliv vstup. Problémem ale je, že složitost algoritmu nad náhodně generovanými intervaly je v průměrném případě exponenciální. Pro výpočet horní meze nad náhodně generovanými intervaly je tedy vhodnější použití Fersonova algoritmu [2], u kterého bylo obdobnými simulacemi zjištěno, že průměrná složitost nad náhodnými intervaly je polynomiální [9].

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/54/2015 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

Reference

- [1] SOKOL, Ondřej. Intervalová data a výběrový rozptyl: výpočetní aspekty. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. 2015.
- [2] FERSON, Scott; GINZBURG, Lev; KREINOVICH, Vladik; LONGPRÉ, Luc; AVILES, Monica. Exact Bounds on Finite Populations of Interval Data. *Reliable Computing*. 2005, roč. 11, č. 3, s. 207–233. ISSN 1573-1340.
- [3] XIANG, Gang; CEBERIO, Martine; KREINOVICH, Vladik. Computing population variance and entropy under interval uncertainty: linear-time algorithms. *Reliable computing*. 2007, roč. 13, č. 6, s. 467–488.
- [4] ČERNÝ, Michal; HLADÍK, Milan. The complexity of computation and approximation of the t-ratio over one-dimensional interval data. *Computational Statistics & Data Analysis*. 2014, roč. 80, s. 26–43. ISSN 0167-9473.
- [5] KREINOVICH, Vladik. Maximum entropy and interval computations. *Reliable Computing*. 1996, roč. 2, č. 1, s. 63-79.
- [6] KREINOVICH, Vladik; LONGPRÉ, Luc; FERSON, Scott; GINZBURG, Lev. Computing Higher Central Moments for Interval Data. Technical report. University of Texas at El Paso. 2004.
- [7] FERSON, Scott; KREINOVICH, Vladik; HAJAGOS, Janos; OBERKAMPF, William; GINZBURG, Lev. Experimental uncertainty estimation and statistics for data having interval uncertainty. Sandia National Laboratories. 2007.
- [8] NGUYEN, Hung T.; KREINOVICH, Vladik; WU, Berlin; XIANG, Gang. Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. *Studies in Computational Intelligence*. 2012. ISSN 1860-9503.
- [9] ČERNÝ, Michal; SOKOL, Ondřej. Interval data and sample variance: A study of an efficiently computable case. In: *Mathematical Methods in Economics 2015 (MME)*. Plzeň: University of West Bohemia. 2015, s. 99–104. ISBN 978-80-261-0539-8.

Kontaktní údaje

Ing. Ondřej Sokol

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel.: +420 721 352 927

Email: xsoko00@vse.cz

PROBLÉM VÝBĚRU PREDICTORŮ REGRESNÍCH MODELŮ. GENETICKÝ ALGORITMUS VS KLASICKÝ STEPWISE.

SELECTION PROCEDURE OF PREDICTORS OF PARAMETRIC REGRESSION MODELS. GENETIC ALGORITHM VS CLASSIC STEPWISE.

Nataliya Soldatyuk

Abstrakt

Tato práce se zabývá otázkou efektivního výběru prediktorů pro parametrické regresní modely, zejména pro modely s velkým počtem potenciálních represorů. Existuje několik hlavních problémů spojených s výběrem parametrů: velký počet proměnných může rekvifikovat model a kromě toho výrazně prodloužit dobu zpracování algoritmu. Dalším problémem je silná korelace mezi proměnnými, které přičiňuje numerické problémy a přidává redundantních informací do modelu.

Problém model selection byl aktivně diskutován ve statistické literatuře v průběhu posledních desetiletí. Mnoho heuristických a deterministické přístupů bylo vyvinuto, zlepšeno a úspěšně použito pro modelování. Hlavním cílem této práce je porovnat výhody použití genetických algoritmů pro výběr regresorů místo klasického přístupu stepwise. Aplikovali jsme genetický algoritmus na vzorek dat s velkým počtem pozorování a srovnání jeho výsledek s výstupem stepwise metody aplikované na stejném vzorku.

Klíčové slova: model selection, heuristický přístup, genetický algoritmus.

Abstract

In this paper we address the question of efficient selection of predictors for parametric regression models. Of particular interest is the models with a large number of potential repressors. There are few main problems associated with the said selection: too many variables can overfit the model and significantly increase the time of the calculation. Other issue is caused by strong correlation between variables, which arises numerical problems and adds redundant information into the model.

Model selection problem has been actively discussed in a statistical literature during past decades. A lot of heuristic and deterministic approaches were developed, improved and successfully used for modelling. In this study we focus mainly on heuristic approaches. The main purpose of this study is to compare benefits of usage genetic algorithm for model selection instead of classic stepwise approach. We have applied genetic algorithm to learning data sample with large number of observations and compared its result to output of heuristic stepwise applied to the same sample.

Keywords: model selection, regression model, heuristic approach, genetic algorithm.

1 INTRODUCTION TO MODEL SELECTION

The task of the model selection is to find a family of distributions from possible set of families, which is the best approximation of reality presented by learning data sample. Lets assume we have sample of N observations, each of them consists of a response variable $y_n \in R^1$ and vector of potentially predictive variables $x_n = (x_{1n}, \dots, x_{pn}), x_n \in R^p$. Especially interesting case for us is the situation when the learning sample is presented by large number

of predictors. Then we assume p is finite large number. For the sake of concreteness we will consider only regression type models. We don't specify regressor's types here as we are looking for universal solution. The goal is to construct the model

$$y = x\beta + \varepsilon \quad (1)$$

That gives accurate predictions of future responses. Here $\beta \in R^k, k \geq p + 1$ is the vector of regression parameters and ε is an error term.

In other words the problem can be formulated in the following way: let $I \subseteq M$ is the index set which defines the model (1), function $f : M \rightarrow R$ is the fitness function, which evaluates quality of the estimated model. Then model selection problem is optimization of the value of fitness function:

$$\max_{I \subseteq M} f(I) \quad (2)$$

A few fundamental issues may occur during selection procedure:

- if $|I|$ is too large number, then model (1) “overfits” the learning data sample, which leads to an increase of the model accuracy for any other data sample;
- on other hand if $|I|$ is too small number, problem of “underfitting” occurs;
- a large number of predictors makes the optimization problem (2) too complex for real time application.

2 METHODOLOGY

Model selection problem has been actively discussed in a statistical literature during past decades. A lot of heuristic and deterministic approaches were developed and improved. In this study we focus our attention on comparison of one of the common used stepwise variable selection approach with genetic algorithm.

2.1 Genetic algorithm

A genetic algorithm is a heuristic for function optimization where the extreme of the function cannot be established analytically. Genetic algorithm belongs to the larger class of evolutionary algorithms (EA), which generate solution for optimization problems using techniques inspired by natural evolution, such as inheritance, mutation, selection, and crossover. Genetic algorithm promote “survival of the fittest”.

Given an initial population, often created randomly, the principal steps of a genetic algorithm are:

1. Select parents from the current population to underdo genetic operations to form offspring. This is done stochastically with preference assigned to individuals that yield higher function values.
2. Apply genetic operations such as crossover, mutation and inversion to the selected parents to form offspring. The operators are designed such that properties of the parents are reproduced in the offspring.
3. Recombine the offsprings and current population to form new population.

These steps performed until some predefined stopping criterion is met. The selection method from a population of potential solutions, with preference to “fittest” individuals. The individuals in the population are often called “chromosomes” built out of “genes” that

represent the properties of the individual, and the function to optimize the “fitness” function. Each iteration is called “generation”.

The objective of variable selection for regression models is to find parsimonious models that perform as well or better than the model that utilizes all available information. With this objective in mind, we construct a measure of fitness for a selection of variables v . Given two tagged sets of data, a training or construction set C , and a hold-out or selection set S , a regression model $m_c(x)$ can be constructed using C , and evaluated using S . If the total number of variables is p , and the number of variables in the selection v is n , we propose the following fitness function:

$$f(v, C, S) = c_s(m_c(v)) + \rho \frac{u - n}{u}. \quad (3)$$

The first term rewards models with good performance, and the second term rewards parsimonious models. The parameter ρ determines the weight that is placed on such a reward.

The genetic algorithm is configured by parameters such as: the fraction of the population to undergo each genetic operation, the size of the population, the fitness function and the stopping criteria. A predefined number of the best encountered individuals is returned as the result of one run of the algorithm.

2.2 Stepwise model selection

Stepwise selection approach is well known selection process most commonly used during model development. Stepwise selection is a variation of forward and backward eliminations. We briefly summarize these methods.

Backward elimination begins with a full model consisting of all candidate predictor variables. Variables are sequentially eliminated from the model until a prespecified stopping rule is satisfied. At a given step of the elimination process, the variable whose elimination would result in the smallest decrease in a summary measure is eliminated. Possible summary measures are deviance or R^2 . The most common stopping rule is that all variables that remain in the model are significant at a pre-specified significance level.

Forward selection begins with the empty model. Variables are added sequentially to a model until a predefined stopping rule is satisfied. At a given step of the selection process, the variable whose addition would result in the greatest increase in the summary measure is added to the model. A typical stopping rule is that if any added variable would not be significant at a predefined significance level, then no further variables are added to the model.

Stepwise selection is a variation of forward and backward eliminations. At each step of the variable selection process, after a variable has been added to the model, variables are allowed to be eliminated from the model. For instance, if the significance of a given predictor is above a specified threshold, it is eliminated from the model. The iterative process is ended when a pre-specified stopping rule is satisfied.

Unfortunately, any correlation among the independent variables causes this procedure to be deficient. As a result, in the presence of multicollinearity, it's impossible to determine unambiguously the individual contribution of each variable enough to say which one is more important and thus should be included first. For such models value of R^2 are biased high and estimated standard errors are biased low. That is why we are looking for better alternative to stepwise selection.

3 EMPIRICAL STUDY

The objective of our study is to compare the performance of a regression model constructed using the variable selection method based on the genetic algorithm with models constructed using stepwise variable selection. In order to investigate relative performance methods were applied to data sample of 87 000 of real observations containing 22 numerical predictors and one binary outcome.

Genetic algorithm was programmed in R. The chromosomes were represented as binary vectors, where the presence of a bit indicates the presents of corresponding variable in the model. The genetic operators such as crossover, mutation and inversion were used and selection was done by universal stochastic sampling. This also was used in selection of individuals to replace in the fixed size population in the recombination step. Initialization was random, and the stopping criteria was lack of improvement in the average value of Akaike information criterion.

The generic algorithm ran for 80 generations. The fittest model was selected as the result of method. At the same time, regression modes were constructed in SAS using stepwise variable selection approach. Results of both methods are presented in the table 1 and table 2.

Table 1. AIC of models with variables selected by genetic algorithm

Number of generations	AIC	Change in best AIC
10	83474.29	
20	83447.90	-26.39
30	83390.90	-57.00
40	83346.32	-44.59
50	83292.36	-53.95
60	83239.45	-52.91
70	83087.71	-151.74
80	83087.71	0.00

Table 2. AIC of models with variables selected by stepwise

Selection method	AIC of optimal model
Forward	11378.45296
Backward	11377.68883
Stepwise	11378.45296

Results of the study shows that models built on variables selected by genetic algorithm have lower value of AIC and thus are better fitted to the sample. However, more deep analysis of assigned parameters showed that there are highly correlated parameters and there is high risk of multicollinearity. In other side models built using stepwise have higher AIC, but there is very low risk of overfitting or multicollinearity.

Conclusions

The study deals with a problem of selection of predictors for parametric regression models. There are few main problems associated with the said selection: too many variables can overfit the model and significantly increase the time of the calculation. Other issue is caused

by strong correlation between variables, which arises numerical problems and adds redundant information into the model. In this study we have compared benefits of usage genetic algorithm instead of classic stepwise approach. We have applied genetic algorithm to learning data sample with large number of observations and compared its result to output of heuristic stepwise applied to the same sample. Genetic algorithm sowed better result, however it does not dials with problem of overfitting and multicollinearity.

Acknowledgements

This paper is supported by the research grant IGA VŠE/IG403025/54/2015.

Literature

1. AUSTIN, P., TU, J. 2004. Automated variable selection methods for logistic regression produced unstable models for predicting acute myocardial infarction mortality. In: *Journal of Clinical Epidemiology*, vol. 57, 2004, p. 1138-1146.
2. LEEB, H., PTSCHER, B. Model Selection and Inference: Facts and Fiction. In: *Econometric Theory*, vol. 21, (2005), p.21-59.
3. RAO, C., WU, Y., KONISHI, S., MUKERJEE, R. On Model Selection. Lecture notes - monograph series. In: *Model Selection*, vol. 38, (2001), pp. 1-64, published by: Institute of Mathematical Statistics.
4. HANSEN, B. Challenges for econometric model selection. *Econometric theory*. In: *ET 20th Anniversary Colloquium: Automated Inference and the Future of Econometrics*, vol. 21, (2005), pp. 60-68.
5. YANG, Y. Localized Model Selection for regression. In: *Econometric Theory*, vol. 24, (2008), pp. 472-492
6. HENDRY, D., DOORNIK, J. Automatic selection methods in econometrics empirical model discovery and theory evaluation. In: *The MIT Press*, (2004), eISBN: 978-0-262-32441-0.
7. BREIMAN, L. Heuristics of instability and stabilization in model selection. In: *The Annals of Statistics*, vol.24, 6 (1996), pp. 2350–2383.
EFRON, B., GOUS, A.: Scales of evidence for model selection. *Lecture notes-monograph series*, vol.38 (2001), pp. 208–256.
8. MAUGIS, C., CELEUX, G., MARTIN-MAGNIETTE, M.: Variable selection for clustering with gaussian mixture models. In: *Biometrics*, vol.65 (2009), pp. 701–709.

Contact information

Mgr. Nataliya Soldatyuk
University of Economics, Prague
W. Churchill Sq. 4, 130 67 Prague, Czech Republic
Tel: (420) 224 095 111
email: nsoldatyuk@gmail.com

REGIONÁLNA KOMPARÁCIA OKUNOVHO KOEFICIENTU¹

REGIONAL COMPARISON OF OKUN'S COEFFICIENT

Kvetoslava Surmanová

Abstrakt

V tomto článku sa venujeme analýze regiónov Slovenska na účely porovnania citlivosti nezamestnanosti k hospodárskemu rastu. Odhadujeme Okunov koeficient v jednotlivých krajoch Slovenska. Použijeme metodológiu viacrovnicového modelu, presnejšie model so zdanlivo nesúvisiacimi náhodnými zložkami (SUR model). Výsledky analýzy poukazujú na skutočnosť, že koeficient s najvyššou hodnotou 8,44 % vykazuje bratislavský kraj a košický (s výnimkou trnavského) najnižšiu 3,12 %, čo poukazuje na nepružnosť pracovného trhu.

KLúčové slová: *Okunov koeficient, SUR model, nezamestnanosť, rast HDP*

Abstract

In this article we analyse regions of Slovakia in order to compare the sensitivity of unemployment to economic growth. We estimate Okun's coefficient in individual regions of Slovakia. We use the methodology of multiple equation model, more accurate model to seemingly unrelated random component (SUR model). The coefficient with the highest value 8.44% spectrum is region of Bratislava and region of Kosice (with the exception region of Trnava) the lowest 3.12%, suggesting labour market rigidities.

Keywords: *Okun's coefficient, SUR model, unemployment, growth of GDP*

1 OKUNOV ZÁKON

V roku 1962 Arthur M. Okun prezentoval empirický výskum, v ktorom sa zamerl na vzťah miery nezamestnanosti a reálneho produktu. Relácia týchto dvoch základných makroekonomických veličín bola založená na veľmi jednoduchých rovniciach, ktoré zachytávali negatívny vzťah uvedenej relácie a bola pomenovaná Okunov zákon. Postupne bola táto teória modifikovaná ekonómami, ktorí do pôvodného vzťahu miery nezamestnanosti a reálneho outputu doplnili elementy, s ktorými sa v Okunovej analýze neuvažovalo.

1.1 Verzie Okunovho zákona

Poznáme viacero verzií Okunovho zákona. Spomeňme aspoň dva najčastejšie používané spôsoby, ako možno zachytiť reláciu medzi nezamestnanosťou a rastom ekonomiky, a to prírastkovú verziu a gapovú verziu. Už sám Okun uviedol, že oba vzťahy sú problematické. Gapová verzia je spojená s problémom získania potenciálneho produktu a negatívum videl tiež vo veľmi jednoduchých analytických vzťahoch. Knotek (2007) rozšíril teóriu Okunovho zákona o ďalšie modifikácie, konkrétne dynamickú verziu a verziu založenú na produkčnej funkcii.

Dynamika nemusí predstavovať len oneskorenie o 1 pozorovanie. Verzia založená na produkčnej funkcii kombinuje teoretickú produkčnú funkciu s prírastkovou verziou.

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0285/14 "Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na metódy priestorovej ekonometrie"

Prírastková verzia Okunovho zákona zachytáva zmenu štvrťročnej miery nezamestnanosti vo vzťahu so zmenou rastu outputu, čo môžeme zapísať nasledovne:

$$\Delta u = a + b \cdot (gGDP), \quad (1)$$

kde Δu je zmena v miere nezamestnanosti a $gGDP$ je rast reálneho HDP. Parameter b sa nazýva Okunov koeficient. Podiel $(-a/b)$ vyjadruje mieru rastu výstupu konzistentnú so stabilnou mierou nezamestnanosti. Uvedený podiel rovnako vyjadruje ako rýchlo musí rásť ekonomika, aby sa zachovala daná miera nezamestnanosti.

Gapová verzia využíva veľkosť potenciálneho produktu. Podľa Okuna je vysoká miera nezamestnanosti spojená s nevyužitými zdrojmi, čo znamená, že skutočný produkt sa nachádza pod potenciálnym produktom. Túto verziu Okunovho zákona môžeme analyticky zapísať nasledovne:

$$u = a + b(y^* - y), \quad (2)$$

kde u je miera nezamestnanosti, a rozdiel $(y^* - y)$ vyjadruje medzeru v produkte.

2 DÁTA A REGIONÁLNE ROZDIEL

Problematika vzniku nerovností na regionálnej úrovni (a nielen na nej) má význam v živote ľudí. Úroveň je jednou z otázok, ktoré rezonujú v spoločnosti i na Slovensku. Empirické štúdie potvrdzujú, že práve redukcia úloh vlády z centrálnej úrovne na regionálnu úroveň prispieva k rastu zodpovednosti samospráv a ďalších regionálnych inštitúcií.

Miera nezamestnanosti patrí medzi dôležité ukazovatele trhu práce ekonomiky nielen každého štátu, ale tiež každého regiónu. Práve preto je dôležitá nepretržitá snaha o znižovanie, resp. udržanie hladiny nezamestnanosti. Cieľom tejto snahy je pozitívny vývoj ekonomiky, hlavne zvyšovanie hrubého domáceho produktu.

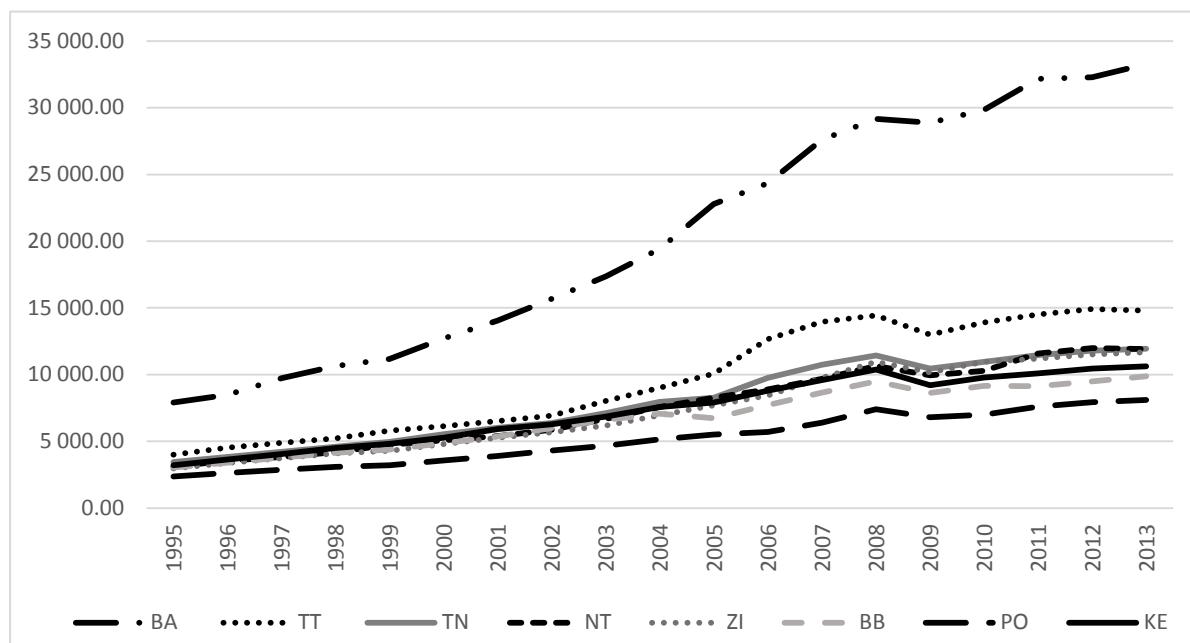
Vstupom do Európskej únie sa Slovensko zaviazalo k implementácii regionálnej politiky. Cieľom regionálnej politiky EÚ je znižovanie rozdielov medzi úrovňami rozvoja jednotlivých regiónov a zmiernenie zaostávania menej rozvinutých regiónov krajiny. V rámci uvedeného sa zameriavame na sledovanie rozdielov medzi regiónmi vo výške HDP a miery nezamestnanosti. Slovensko je na úrovni NUTS III členené na osem krajov, pričom tieto územné jednotky sú príliš heterogénne a neporovnateľné. A to nielen z pohľadu komparácie úrovne konvergencie, ale i regionálnych disparít. Preto pri ich analýze môžeme očakávať výrazné rozdiely. Z tohto dôvodu prináša analýza na úrovni regiónov podrobnejšie a bohatšie výsledky v porovnaní s analýzou realizovanou na úrovni NUTS I, t. j. na celoslovenskej úrovni.

Pri komparácii regiónov poukazujeme na rozdiely, pričom využívame ukazovatele z relácie Okunovho zákona, ktorý analyzujeme nižšie. Zo skupiny ekonomických ukazovateľov regionálny hrubý domáci produkt vyjadreného na 1 obyvateľa v bežných cenách. A zo skupiny sociálnych ukazovateľov uvádzame priebeh miery nezamestnanosti vyjadrenej v percentách.

Na vývoji HDP v jednotlivých regiónoch (obrázok 1) je zachytený viditeľný rozdiel medzi bratislavským krajom a ostatnými regiónmi Slovenska, pričom najnižšia celková produkcia je na východe Slovenska, v prešovskom kraji. Z obrázku 1 je možné pozorovať, že ekonomika sa v roku 2008 nachádzala vo všetkých regiónoch na vrchole hospodárskeho cyklu, čomu nasledovalo krátke obdobie recesie. Kríza do produkcie krajov zasiahla rozdielne, najvýraznejší pokles produkcie bol zaznamenaný v trnavskom a košickom kraji, kde HDP na

obyvateľa v roku 2009 zaznamenalo pokles na úroveň roka 2006. V trnavskom kraji za výrazným poklesom bolo zrejme strojárstvo, ktorého súčasťou je aj automobilový priemysel.

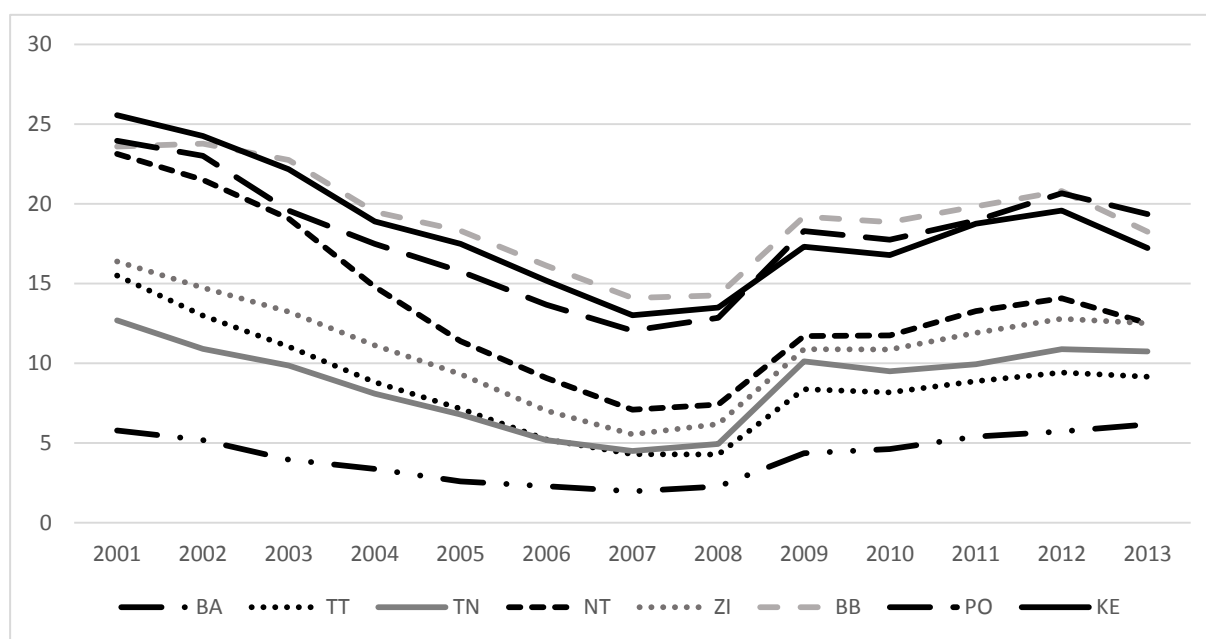
Obrázok 1 Priebeh HDP na obyvateľa v krajoch SR za obdobie rokov 1995 - 2013



Zdroj: ŠÚ SR

Miera nezamestnanosti patrí medzi základné ukazovatele trhu práce a z obrázku 2 môžeme pozorovať zoskupenie krajov do 3 skupín. Najnižšiu mieru vykazuje bratislavský kraj. V trnavskom, trenčianskom, žilinskom a nitrianskom kraji sa nezamestnanosť pohybuje blízko 10 percent. Kraje s najvyššou mierou nezamestnanosti nad 15 percent sú košický, banskobystrický a najvyššiu mieru má prešovský, pričom ešte do roku 2012 ním bol banskobystrický. Z grafického priebehu je vidieť narušenie klesajúcej tendencie v období krízy a zvyšovanie miery nezamestnanosti, ktoré sa zastavilo až v roku 2013, kde dochádza k opätovnému pozvoľnému poklesu.

Obrázok 2 Vývoj miery nezamestnanosti v krajoch SR za obdobie rokov 2001 - 2013



Zdroj: ŠÚ SR

3 EMPIRICKÁ ANALÝZA

Na analýzu používame viacrovnícový model so zdanlivo nesúvisiacimi náhodnými zložkami (SUR) a údajovú základňu pozostávajúcu z časových radov je za obdobie rokov 2002 – 2013. Tvar analyzovaného SUR modelu pre 8 krajov SR získame úpravou vzťahu (1) a to nasledovne:

$$\begin{aligned}\Delta u_{BA_t} &= c(11) + c(12) * gGDP_{BA_t} + u_{t,BA} \\ \Delta u_{TT_t} &= c(21) + c(22) * gGDP_{TT_t} + u_{t,TT} \\ \Delta u_{NR_t} &= c(31) + c(32) * gGDP_{NR_t} + u_{t,NR} \\ \Delta u_{TN_t} &= c(41) + c(42) * gGDP_{TN_t} + u_{t,TN} \\ \Delta u_{ZA_t} &= c(51) + c(52) * gGDP_{ZA_t} + u_{t,ZA} \\ \Delta u_{BB_t} &= c(61) + c(62) * gGDP_{BB_t} + u_{t,BB} \\ \Delta u_{PO_t} &= c(71) + c(72) * gGDP_{PO_t} + u_{t,PO} \\ \Delta u_{KE_t} &= c(81) + c(82) * gGDP_{KE_t} + u_{t,KE}\end{aligned}$$

kde kraje sú označené nasledovne: BA – Bratislavský kraj, TT – Trnavský kraj, NR – Nitriansky kraj, TN – Trenčiansky kraj, ZA – Žilinský kraj, BB – Banskobystrický kraj, PO – Prešovský kraj, KE – Košický kraj. Na modelovanie bol využitý softvér EViews 7. Výsledky modelu uvádzame v tabuľke 1.

Tabuľka 1 Výsledky z odhadu SUR modelu

		Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	R ²	Okunov koeficient
BA	C(11)	1,07	0.196903	5.449395	0.0000	0,6439	8,44
	C(12)	-0,13	0.011894	-10.69204	0.0000		
TT	C(21)	0,34	0.419574	0.815916	0.4176	0,5819	2,97
	C(22)	-0,12	0.027450	-4.197162	0.0001		
TN	C(31)	0,76	0.450336	1.678076	0.0982	0,5728	4,88
	C(32)	-0,15	0.040478	-3.828705	0.0003		
NR	C(41)	0,95	0.642877	1.470242	0.1464	0,5013	3,78
	C(42)	-0,25	0.047164	-5.306128	0.0000		
ZA	C(51)	1,19	0.483000	2.459975	0.0166	0,6346	5,76
	C(52)	-0,21	0.039396	-5.233605	0.0000		
BB	C(61)	0,50	0.580821	0.866795	0.3893	0,4059	3,22
	C(62)	-0,16	0.046884	-3.336746	0.0014		
PO	C(71)	0,71	0.669016	1.060661	0.2928	0,2876	4,33
	C(72)	-0,16	0.031845	-5.150943	0.0000		
KE	C(81)	0,75	0.409042	1.826952	0.0724	0,6768	3,12
	C(82)	-0,24	0.032385	-7.393320	0.0000		

Zdroj: vlastné výpočty

Všetky parametre sú štatisticky významné na hladine významnosti do 1 %. Breuschov-Paganov test² (BP = 110,055 je väčšie ako $\chi^2(0,05; 28) = 41,33$) o korelovanosti náhodných zložiek zamietol nulovú hypotézu a preto prijímame alternatívnu hypotézu, t. j. súčasná korelácia náhodných zložiek je vysoko pravdepodobná, čo znamená, že na odhad modelu je vhodná zovšeobecnená metóda najmenších štvorcov.

²B-P test vychádza z variančno-kovariančnej matice $V_{\hat{u}(SUR)}$. Podrobnejšie pozri Ivaničová a kol. (2012)

Záver

Zatiaľ čo ekonomická teória hovorí o 2 – 3 % raste outputu, aby sa dosiahlo zníženie miery nezamestnanosti, výsledky z našej analýzy poukazujú na potrebu ešte vyššieho rastu, priemerná hodnota za všetky regióny je približne 4,56 %. Najvyššiu mieru rastu ekonomiky, 8,44 % vyžaduje bratislavský kraj, naopak najnižšiu mieru rastu ekonomiky 3,12 % košický kraj. Môžeme skonštatovať, že dosiahnuté výsledky korešpondujú s vývojom v regiónoch, ktorý je zachytený na obrázkoch 1 a 2. Zaujímavá je hodnota 2,97 % pre trnavský kraj, kde by očakávania mohli byť približne na hodnote vyššej ako nami získaná priemerná hodnota rastu. Typickými problémami pri výskume na úrovni regiónov je v prvom rade získavanie relevantných údajov a ich nedostupnosť na príslušnej regionálnej úrovni. Rovnako sa môžeme stretnúť s problémom ich oneskoreného publikovania. Práve aplikáciou SUR modelu – spojením regionálnych štatistík do 1 modelu sme zabezpečili dostatočný počet pozorovaní, ktorý by bol v prípade analýzy samostatných krajov nepostačujúci (len 12 pozorovaní). Nespornou výhodou SUR modelu je skutočnosť, že pri odhade modelu je okrem vzťahu závislej a nezávislých premenných obsiahnutá informácia o faktoroch, ktoré sú pre všetky zlúčené prierezové jednotky spoločné (legislatíva, atď.).

Problematika vzniku nerovností na regionálnej úrovni (a nielen na nej) má význam v živote ľudí. Úroveň je jednou z otázok, ktoré rezonujú v spoločnosti i na Slovensku. Empirické štúdie potvrdzujú, že práve redukcia úloh vlády a z centrálnej úrovne na regionálnu úroveň prispieva k rastu zodpovednosti samospráva a ďalších regionálnych inštitúcií.

Miera nezamestnanosti patrí medzi dôležité ukazovatele trhu práce ekonomiky nielen každého štátu, ale tiež každého regiónu. Práve preto je dôležitá nepretržitá snaha o znižovanie, resp. udržanie hladiny nezamestnanosti. Cieľom tejto snahy je pozitívny vývoj ekonomiky, hlavne zvyšovanie hrubého domáceho produktu.

Zaujímavým rozšírením uvedeného modelu by bolo zakomponovať informáciu o kríze, ktorá sa prejavila po roku 2008, príp. do modelu doplniť informáciu o prerozdeľovaní finančných prostriedkov zo štrukturálnych fondov, ktoré sú základným finančným nástrojom regionálnej politiky.

Použitá literatúra

1. IVANIČOVÁ, Z. - CHOCHOLATÁ, M. – SURMANOVÁ, K. 2012. Ekonometrické modelovanie /. - 1. vyd. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM. 350 s. ISBN 978-80-225-3381-2
2. KNOTEK, S. E. 2007. How Useful is Okun's Law? Kansas City: Federal Reserve Bank of Kansas City. Dostupné na: <http://www.kc.frb.org/PUBLICAT/ECONREV/PDF/4q07Knotek.pdf>
3. LUKÁČIK, M.- SZOMOLÁNYI, K.- LUKÁČIKOVÁ, A. - HANČLOVÁ, J., 2010. Long-run structural macroeconomic models of the Slovak and Czech economies. In *Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XV : proceedings of the international conference*. Bratislava: IURA EDITION. ISBN 978-80-8078-364-8, s. 107-116.
4. OKUN, A. M., 1962. Potential GNP: Its Measurement and Significance. *American Statistical Association, proceedings of the Business and Economics Statistics Section*. Alexandria, Virginia: American Statistical Association. Dostupné na: <http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p01b/p0190.pdf>
5. SURMANOVÁ, K. - REIFF, M. 2014. Okun's law verification at the Slovak regions data. In *Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XVII. International scientific conference. Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XVII : proceedings of the international scientific conference*. Vydavateľstvo EKONÓM, 2014. ISBN 978-80-225-3868-8, s. 255-262.

Kontaktné údaje

Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: surmanova@yahoo.sk

SYSTÉMY DŮCHODKOVÉHO ZABEZPEČENIA¹

SOCIAL SECURITY SYSTEMS

Karol Szomolányi

Abstrakt

Sociálna politika vytvárania dôchodcovských systémov v skupine krajín Vyšehradskej štvorky nie je časovo konzistentná. V tejto práci sa pokúsime zodpovedať na otázku, prečo je to tak. Modelmi všeobecnej rovnováhy formulujeme rôzne systémy dôchodkového zabezpečenia a rozšírením modelov o realistické prvky diskutujeme ich výhodnosť. Jednou z nevýhod fondového systému sú lobistické politické tlaky na dôchodcovské fondy, ktoré čiastočne kontroluje verejný sektor. Tieto tlaky môžu pochádzať priamo od fiškálnych autorít a považujeme ich za dôvod nízkej udržateľnosti fondového či kombinovaného systému v postkomunistických krajinách.

***Kľúčové slová:** systémy dôchodkového zabezpečenia, krajiny Vyšehradskej štvorky, model všeobecnej rovnováhy*

Abstract

Social security policy of the Visegrad Four country group is time inconsistent. In the paper we attempt to explain this inconsistency. Using general equilibrium models we form different social security systems and by augmenting by realistic features we discuss an expedience of different systems. One of disadvantage of funded system is that pension funds provide a tempting target for lawmakers and lobbyists. We consider this political interference to be a reason of low sustainability of funded or combined pension security system in post-communist countries.

***Keywords:** social security systems, Visegrad Four countries, general equilibrium model*

1 ÚVOD

V bežných médiách na Slovensku ale aj v okolitých krajinách (Vyšehradskej štvorky) je predmetom diskusií efekt rôznych dôchodkových systémov už dlhšie ako desaťročie. Slovenské vlády postupne prešli od priebežného dôchodkového ku kombinovanému systému, a pravidelne korigujú existujúci legislatívny stav možnosťami spätných prechodov občanov smerom z fondového do priebežného systému a reguláciami fondového systému. Ďalšie tri krajiny Vyšehradskej skupiny tiež zaviedli kombinovaný dôchodkový systém, aby sa po čase vrátili k pôvodnému priebežnému systému. Jedine v Českej republike si sporitelia mohli dobrovoľne ponechať svoje úspory, ak sa vzdali zodpovedajúcej časti budúcej veľkosti dôchodku. Z tejto časovej nekonzistencie sociálnej politiky vyplývajú dve otázky: Ktorý dôchodkový systém je výhodný? Čo spôsobuje časovú nekonzistenciu sociálnej politiky?

Na tieto dve otázky hľadá odpoveď táto práca. V druhej kapitole modelovo definujeme a formulujeme dôchodkové systémy. Uvažujeme systém bez dôchodkového zabezpečenia, priebežný dôchodkový systém a fondový dôchodkový systém. V priebežnom systéme

¹ Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku".

zamestnanci zaplatia odvody, ktoré sa prerozdedia medzi dôchodcov. Vo fondovom systéme zamestnanci povinne sporia prostriedky, ktoré po zhodnotení trhovou cenou využijú v dôchodcovskom veku. Kombinovaný systém je kombinácia priebežného a fondového dôchodcovského systému. Formulácie zodpovedajú triede modelov všeobecnej rovnováhy.² V diskusii nenájeme jasnú odpoveď prvú otázku. V rozšíreniach modelov o realistické prvky žiaden zo systémov nie je Pareto efektívny a každý má svoje výhody a svoje nevýhody. Jednou z nevýhod fondového systému sú rôzne politické tlaky na spôsob spravovania fondov. Tieto tlaky môžu pochádzať z rôznych lobistických skupín ale aj, ako argumentujeme v diskusii, od samotných fiškálnych politických autorít. Prípadný prevod fondov sporiteľov do verejného rozpočtu môže autoritám pomôcť krátkodobo vylepšiť fiškálnu pozíciu krajiny. Z nášho pohľadu je toto dôvod, prečo kombinovaný alebo fondový systém je ťažko udržateľný v postkomunistických politických reáliách.

2 MODEL Y DÔCHODKOVÝCH SYSTÉMOV

Uvažujme prídellovú reálnu ekonomiku s mnohými spotrebiteľmi, ktorí žijú dve obdobia. Prídell spotrebiteľa označíme symbolom y , jeho spotrebu symbolom c . Tieto premenné meriame v jednotkách spotreby. Spotrebiteľ si smie zo svojho prídelu y v prvom období usporiť $y - c$ jednotiek, ktoré môže požičať inému subjektu (spotrebiteľovi) s rovnovážnou úrokovou mierou r ³. V malej otvorenej ekonomike spotrebiteľ nedokáže ovplyvniť rovnovážnu úrokovú mieru. Spotrebiteľia majú rôzny vek. Keďže uvažujeme o dvoch obdobiach, môžeme ich demograficky rozdeliť na juniorov a seniorov. Juniori sa narodili v súčasnom období a majú pred sebou dve obdobia života. Seniori sa narodili v minulom období a v súčasnosti žijú posledné obdobie. Predpokladáme, že stav populácie v ekonomike rastie konštantnou mierou n . Juniorov je v ekonomike $1+n$ krát viac ako seniorov a platí:

$$N_{t+1} = (1+n)N_t \quad (1)$$

Rovnica (1) opisuje demografickú dynamiku v ekonomike. Spotrebiteľovu súčasnú hodnotu reálneho životného blahobytu (ďalej len blahobytu) možno zmerať funkciou užitočnosti $U(c_t, c_{t+1})$, ktorá je rastúca a konkávna v oboch premenných a zodpovedá Inadovým (1963) podmienkam.

2.1 Systém bez dôchodkového zabezpečenia

V prípade neexistencie kolektívneho prerozdelenia prídelu spotrebiteľa možno jeho súčasnú hodnotu životného reálneho rozpočtového ohraničenia (ohraničenia) napísať v tvare:

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} = y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} \quad (2)$$

Na pravej strane ohraničenia (2) je súčasná hodnota reálneho životného bohatstva w (bohatstvo). Spotrebiteľ rieši úlohu:

$$U^* = \max_{c_t, c_{t+1}} [U(c_t, c_{t+1})]$$

vzhľadom na (2). Zmena bohatstva w má príjmový efekt na spotrebu c v oboch obdobiach a teda aj na blahobyt U .

² Pozri Lukáčiková (2004).

³ Pozri Lukáčik (2012).

2.2 Priebežný dôchodkový systém

Spotrebiteľia sa dohodnú zriadiť priebežný systém dôchodkového zabezpečenia. Každý junior uhradí x jednotiek produkcie. Z celkového množstva, ktoré sa vyzbiera od juniorov $N_{t+1}x$, sa rovnomerne rozdelí medzi N_t seniorov. Prídely, ktorý pripadne na seniora označíme písmenom b : $N_t b = N_{t+1}x$. Seniorovi sa v danom období zvýši bohatstvo o b jednotiek a príjmovým efektom sa mu zvýši blahobyt. Juniorove bohatstvo sa zmení na:

$$w_p = w + \frac{(r-n)b}{(1+r)(1+n)} \quad (3)$$

Juniorovi sa zvýši bohatstvo vtedy a len vtedy, ak úroková miera je vyššia ako miera rastu práce. Priebežný dôchodkový systém je Pareto efektívny, ak $r > n$. Je to možné preto, že priebežný dôchodkový systém umožňuje súčasne žijúcim spotrebiteľom obchodovať so spotrebiteľmi, ktorí sa ešte nenarodili.

2.3 Fondový dôchodkový systém

Ak je úroková miera nižšia ako miera rastu populácie, je systém priebežného dôchodkového zabezpečenia nevýhodný. Analyzujeme alternatívny systém.

Spotrebiteľia sa dohodnú na zriadení fondového systému dôchodkového zabezpečenia. Každý junior je povinný ušetriť si f jednotiek produkcie do ďalšieho obdobia. Tieto prostriedky budú zhodnotené ako všetky úspory úrokovou mierou r . V ďalšom období junior spotrebuje svoje povinné úspory v hodnote $f(1+r)$. Bohatstvo spotrebiteľov sa nezmení.

Optimálne riešenie úlohy spotrebiteľa môže pri relatívne nízkom prídele v prvom období a relatívne nízkej úrokovej miere generovať záporné úspory $y_t - c_t^* < 0$. Pre takéhoto juniora je fondový dôchodkový systém nevýhodný, pretože je povinný si usporiť, aj keď to pre neho nie je optimálne. Jeho blahobyt sa zníži. Preto fondový systém vo všeobecnosti nie je Pareto efektívny.

3 DISKUSIA

K celkovému obrazu výhodnosti a nevýhodnosti jednotlivých systémov doplníme model o realistické prvky. Podľa modelu je Pareto efektívne zvoliť priebežný dôchodkový systém, ak úroková miera je vyššia ako miera rastu populácie. Tento výsledok nie je relevantný, ak v modeli uvažujeme nekonečne dlho žijúce rodiny namiesto spotrebiteľov, ktoré môžeme interpretovať ako podobné entity, akým je štát. Tiež si môžu zvoliť vlastné systémy dôchodkového zabezpečenia, podľa ich aktuálnej demografickej pozície a podľa aktuálnej úrokovej miery, za ktorú sa zhodnocujú rodinné úspory. Možno predpokladať, že rodiny na rozdiel od štátu dokážu efektívne pružne meniť systém zabezpečenia podľa potreby. Barro (2007) argumentuje, že vzrast priebežného dôchodkového systému od 30-ych rokov minulého storočia veľmi zoslabil rodinnú súdržnosť a starostlivosť dospelých detí o ich rodičov v dôchodkovom veku. Na druhej strane Williamson (2014) dôvodí, že politika bez dôchodkového zabezpečenia nie je dôveryhodná (časovo konzistentná) podľa teórie Kydlanda a Prescottta (1977). Existuje sociálne nízka vrstva rodín s vierou, že ich politické authority nenechajú zaopatrené a preto zvolia stratégiu, v ktorej si finančne nezabezpečia svoje dožitie. V skutočnosti, v dnešnom svete nie je dôveryhodná politika nezaopatrenia ľudí v núdzi. Systém bez dôchodkového zabezpečenia nie je Pareto efektívny.

Doepke a spoluautori (1999) predpovedajú prechod z priebežného dôchodkového systému na fondový v mnohých európskych krajinách s demografickou krízou. Autori uvádzajú príklad Nemecka. Skutočne všetky štyri štáty Vyšehradskej skupiny reformovali vyplácanie

dôchodkov a (na čas) zvolili kombinovaný systém. Ale prečo napríklad Nemecko doteraz nereformovalo svoj systém? Prečo sa tri zo štyroch vyšehradských štátov vrátilo k čisto priebežnému systému?

Williamson (2014) predpovedá demografickú krízu v USA podobnú v Európskych štátoch za desaťročie, no napriek tomu neodporúča prechod na fondový dôchodkový systém. Uvádza k tomu dva dôvody. Prvý dôvod je, že verejné (alebo vládou kontrolované súkromné) penzijné fondy nie sú z politických dôvodov spravované efektívne. Prítomnosť obrovských aktív pod kontrolou verejnosti je terčom záujmu rôznych lobistických skupín a zákonodarcov. Williamson uvádza príklad Kanady s kombinovaným systémom, kde sú fondy terčom skupín, ktoré obhajujú sociálnu zodpovednosť investovania. Podľa teórie sociálnej zodpovednosti investovania možno zmeniť správanie firiem smerovaním investícií preč od týchto firiem. Napríklad tabakový priemysel je typický cieľ sociálne zodpovedného investovania. Aj keď sociálne zodpovedné investovanie má vznešené ciele, obmedzenie investícií nie je efektívne. V horšom prípade sa môže odraziť na znehodnotení starobných dôchodkov.

Do tejto kategórie lobistických tlakov na šporiace fondy radíme aj politické aktivity vyšehradských krajín. Maďarsko a Poľsko priamo znárodnili fondové úspory a prešli do priebežného systému. Česká republika ponúkla fondy vrátiť občanom, ktorí sa vzdajú časti svojho dôchodku v starobe. Súčasná vláda pravidelne otvára obyvateľom možnosť prechodu z fondového systému do priebežného. Politické authority v týchto krajinách sú k týmto krokom motivované snahou krátkodobo vylepšiť fiškálnu pozíciu štátov na úkor sporiteľov. Prevedenie prostriedkov z fondov do verejného rozpočtu je krátkodobý ale významný príjem štátu. Je to ďalší – hrubší – príklad lobistických tendencií siahnúť na fondy čiastočne kontrolované verejnosťou.

Druhým Williamsonovým dôvodom je známy problém morálneho hazardu. Morálny hazard je prvok v poisťovníctve, podľa ktorého jednotlivец zabezpečený proti konkrétnej strate je menej opatrný v predchádzaní tejto straty. V tomto prípade morálny hazard je sklon manažérov fondových spoločností riskantne investovať s vedomím, že súkromné fondy sú do istej výšky vládou garantované. Problém morálneho hazardu vedie k ďalším reguláciám, ktoré vo všeobecnosti negenerujú efektívne riešenie. „Vládna garancia fondového systému a regulácia potrebná na zamedzenie morálneho hazardu generuje náklady, pri ktorých je preferovaný priebežný systém.“ V skutočnosti sme na Slovensku svedkami postupného zvyšovania regulácií spravovania dôchodcovských fondov.

Použitá literatúra

1. BARRO, R. J. 2007: Macroeconomics: A Modern Approach. Thomson South Western.
2. DOEPKE, M. – LEHNERT, A. – SELLGREN, A.W. 1999: Macroeconomics. [Online], dostupné: <http://faculty.wcas.northwestern.edu/~mdo738/book.htm>, (30.3.2011).
3. INADA, K. 1963: On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. In: Review of Economic Studies, roč. 30, č. 2 s. 119–127.
4. KYDLAND, F.E. – PRESCOTT, E.C. 1977: Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans. In: Journal of Political Economy, roč. 85, č. 3, s. 473-92.
5. LUKÁČIK, M. 2012: Analýza úrokových mier v Európskej únii. In Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu : mezinárodní vědecký seminář: zborník: Praha - Bratislava: EKONÓM, s. 1-5.
6. LUKÁČIKOVÁ, A. 2004: Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonomiky SR. In Participácia doktorandov na vedeckovýskumnej činnosti: IV. medzinárodná vedecká konferencia doktorandov, Bratislava: Fakulta hospodárskej informatiky EU, s. 329-334.
7. WILLIAMSON, S.D. 2014: Macroeconomics. PEARSON, 5. vydanie.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

tel: (421 2) 67 295 822

email: szomolan@euba.sk

METODY KONTRAFAKTUÁLNÍ EVALUACE

CONTRAFACTUAL EVALUATION METHODS

Michal Švarc

Abstrakt

Cílem toho dokumentu je poskytnout čtenářům stručný úvod do metod kontrafaktuální evaluace využívajících regrese a ukázat jejich využití na skutečném projektu. Jako vhodný projekt k aplikaci těchto metod byl vybrán jeden z projektů poskytujících stáže, který by realizovaný Fondem dalšího vzdělávání a financován z velké části Evropským sociální fondem. Hlavním cílem projektu bylo zlepšení konkurenceschopnosti účastníků projektu na trhu práce a to díky možnosti nabýt nové pracovní zkušenosti a zlepšit si své současné dovednosti. V tomto článku jsou použity tři metody odhadu efektů projektu, a to metoda Difference in Differences, Fixed Effects Estimator a Propensity Score Matching.

***Klíčová slova:** Kontrafaktuální evaluace, Difference in Differences, First Differenced Estimator, Fixed Effects Estimator.*

Abstract

The main purpose of this document is brief introduction to regression based methods for counterfactual evaluation methods and their application on real project effects evaluation. As an appropriate project for demonstration was selected one of the trainee programs realized by Fund of Further Education and funded mainly by means of the European Social Fund. The main aim of this project was improving participant's competitiveness on labor market via improving their skills and enhancing their work experience. This paper shows three methods (Difference in Differences estimator, Fixed Effects Estimator and First differences Estimator).

***Keywords:** Counterfactual evaluation, Difference in Differences, First differenced Estimator, Fixed Effects Estimator.*

1 METODY KONTRAFAKTUÁLNÍ EVALUACE

Koncept kontrafaktuální evaluace se opírá převážně o kvantitativní přístup, který využívá experimentů či kvazi-experimentů, a jehož základní princip spočívá v porovnávání výsledků jedinců rozdělených do dvou skupin, přičemž jedinci v jedné skupině jsou vystaveni intervenci a jedinci ve skupině druhé jsou ponecháni bez jakéhokoliv dalšího vnějšího zásahu svému přirozenému vývoji. Samotný pojem kontrafaktál (contrafactual) označuje hypotetickou situaci, která by nastala, kdyby u osoby v intervenované skupině mohly být pozorovány výsledky vývoje, jakoby do intervence zapojená nebyla. Takováto situace je ovšem nereálná, protože jedna a ta samá osoba nemůže současně intervenci absolvovat i neabsolvovat.

Efektů intervence je v případě těchto empirických metod připisován rozdílu mezi změnami pozorovaných vlastností u osob v intervenované a kontrolní skupině. Pojem **Average Treatment Effect (ATE)** označuje odhad vlivu intervence na pozorované proměnné a je modelován jako střední hodnota rozdílu mezi výsledky jedinců, kdyby na ně působila intervence (y_1) a výsledků jedinců kdyby byli bez intervence (y_0).

$$ATE = E(y_1 - y_0)$$

Takováto situace bohužel ve skutečnosti nenastává a tak, aby bylo možno takto usuzovat o efektech intervence, musí platit, že jak osoby jsou do skupin rozdělovány náhodně a zároveň osoby v jednotlivých skupinách lze považovat za vzorek, které je nezávislý a stejně rozdělený. Tento předpoklad je v literatuře nazýván jako **Stable unit treatment value assumption (SUTVA)**. [1]

Pokud jsou obě dvě výše jmenované podmínky splněny, pak je možno vyjádřit nestranný a vydatný odhad vlivu intervence jako rozdíl středních hodnot pozorovaných vlastností u osob intervenovaných a u osob bez intervence.

$$ATE = E(y_1) - E(y_0)$$

Bohužel v praxi, a zejména v případě intervence v oblasti sociální politiky, se takovéto situace, kdy jedinci jsou rozdělováni náhodně, objevují velmi zřídka. V drtivé většině případů je finální rozhodnutí, zda se jedinec zapojí nebo nezapojí do intervence, ponecháno na jedinci samém, a v takovémto případě jedinec kalkuluje s očekávaným přínosem zapojení se do intervence. Tento problém je nazýván jako **Self-Selection Problem**. [2]

Možným řešením celého problému je zavedení dalšího předpokladu, které bývá označován jako **Ignorability of Treatment (IoT)**. Pokud předpokládáme, že jsou k dispozici dodatečné informace o jedincích (obsažené v charakteristickém vektoru \mathbf{x}), na základě kterých je možné rozhodnout, zda jedinec náleží do kontrolní skupiny nebo do skupiny intervenovaných osob, je možné tvrdit, že výsledek s intervencí i bez intervence je nezávislý na intervenci, ale společně s intervencí samotnou závisí na charakteristickém vektoru jednotlivce.

Díky tomuto předpokladu lze průměrný efekt intervence pro daný profil jedince vyjádřit jako podmíněnou střední hodnotu rozdílu pozorovaných vlastností u obou skupin osob právě zmiňovaným charakteristickým vektorem.

$$ATE(\mathbf{x}) = E(y_1 - y_0 | \mathbf{x})$$

1.1 Difference in Differences (DiD)

Metoda Difference in Differences, česky nazývaná jako metoda rozdílu v rozdílech, je aplikovatelná jak v případě, že jsou k dispozici panelová data, tak i v případě data typu pooled-cross section. Metoda porovnává výsledky kontrolní ($\bar{y}_{C,1}$) a intervenované skupiny ($\bar{y}_{T,1}$) před intervencí (první diference) s výsledky kontrolní ($\bar{y}_{C,2}$) a intervenované skupiny ($\bar{y}_{T,2}$) po intervenci (druhá diference), přičemž data mohou být jak experimentálního, tak i kvazi-experimentálního původu. Průměrný efekt intervence lze získat tedy takto:

$$ATE = (\bar{y}_{T,2} - \bar{y}_{C,2}) - (\bar{y}_{T,1} - \bar{y}_{C,1}),$$

ekvivalentně lze tento vztah zapsat i takto:

$$ATE = (\bar{y}_{T,2} - \bar{y}_{T,1}) - (\bar{y}_{C,2} - \bar{y}_{C,1}).$$

Tvar regresní rovnice pro odhad metodou DiD je následující:

$$y_{it} = \beta_0 + \delta_0 d2_t + \beta_1 dT_i + \delta_1 (d2_t dT_i) + \alpha x_{i,t} + u_{i,t} \mid i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2.$$

Proměnná dT_i je binární proměnnou, která nabývá hodnoty 1, pokud jedinec je zařazen do intervenované skupiny. Proměnná $d2_t$ je rovněž binární proměnnou, které ovšem určuje období. Pokud je její hodnota 1, pak se jedná o období po intervenci a naopak, pokud je její hodnota rovna nule, jedná se o období před intervencí. Vektor $x_{i,t}$ je charakteristickým vektorem jedinců. Efekt intervence je v případě regresní rovnice reprezentován hodnotou koeficient δ_1 .

Předpoklady pro užití této metody jsou celkem tři. Zaprvé je předpokládáno, že zkoumaná vlastnost by se u obou skupin vyvíjela v čase totožně, kdyby nebylo intervence. Druhý předpoklad říká, že intervence působí pouze na intervenované jedince a nikoliv na jedince z kontrolní skupiny. Poslední předpoklad říká, že efekty intervence se projevují v době, kdy jsou měřeny.[3]

1.2 First Differenced Estimator (FD), Fixed Effects Estimator (FE)

V případě, že jsou k dispozici panelová data, lze pro odhad efektů intervence použít First Differenced Estimator. Jsou-li tedy k dispozici údaje o jedincích v jednotlivých časových okamžicích, lze zavést pojem **nepozorovatelný fixní efekt** jedince, který je pro každého jedince jiný, avšak v čase neměnný. Tento nepozorovatelný fixní efekt si lze představit jako povahové vlastnosti nebo genetické dispozice daného jedince. Pro účely lepší srovnatelnosti s předchozí metodou bude užito stejných proměnných i odhadovaných koeficientů pro zápis regresní rovnice:

$$y_{it} = \beta_0 + \delta_0 d2_t + \beta_1 dT_i + \delta_1 (d2_t dT_i) + \alpha x_{i,t} + a_i + u_{i,t} \mid i = 1, 2, \dots, N, t = 1, 2.$$

V takto specifikované rovnici se objevuje nově pouze proměnná a_i , která označuje právě nepozorovaný fixní efekt jedince (alternativně nepozorovanou heterogenitu). Tato nepozorovaná heterogenita je eliminována v modelech zabývajících se touto problematikou (**Fixed effects models, Random effects models**) postupem, ve kterém se přechází od jednotlivých pozorování k diferencím mezi dvěma obdobími. Pokud jsou k dispozici pouze dvě období, pak First Differenced Estimator a Fixed Effects Estimator jsou totožné.

Pokud zapíšeme výše uvedenou rovnici nejprve pro druhé období:

$$y_{i2} = \beta_0 + \delta_0 + \beta_1 dT_i + \delta_1 (dT_i) + \alpha x_{i,2} + a_i + u_{i,2} \mid i = 1, 2, \dots, N, t = 2,$$

a poté pro první období:

$$y_{i1} = \beta_0 + \beta_1 dT_i + \alpha x_{i,1} + a_i + u_{i,1} \mid i = 1, 2, \dots, N, t = 1,$$

a následně je od sebe odečteme, dostaneme tuto rovnost: pro

$$\Delta y_i = \delta_0 + \delta_1 (dT_i) + \alpha \Delta x_i + \Delta u_{i,1} \mid i = 1, 2, \dots, N,$$

čímž je nepozorovatelný fixní efekt eliminován a zkoumaný efekt intervence je reprezentován koeficientem δ_1 .

Pro svou podobnost s metodou DiD je tento způsob občas označován jako zvláštní případ užití metody DiD. Určitou nevýhodou tohoto postupu je fakt, že tato metoda eliminuje vliv v čase konstantních proměnných z charakteristického vektoru jednotlivce.

2 O PROJETKU

Projekt Stáže ve firmách – vzdělávání praxí byl realizován Fondem dalšího vzdělávání v letech 2012 až 2014. Dle projektové žádosti je hlavním cílem projektu zavedení inovativního způsobu dalšího vzdělávání občanů České republiky, a tím zlepšit jejich postavení na trhu práce. Nástrojem, kterým má být tohoto cíle dosaženo, byly právě stáže ve firmách.

Velmi zjednodušeně lze základním principem fungování projektu popsat takto. Pro každou typovou pozici (například existovala typová pozice ARCHITEKT) byla připravena tzv. šablona, ve které bylo specifikováno, co se stážista má naučit, jaké vybavení má mít dispozici ke stáži dle této šablony, jaká je časová dotace na mentora, který se má stážistovi věnovat po čas stáže, ale i nezbytné vstupní znalosti a dovednosti pro osoby, které chtějí stáž dle této šablony absolvovat. Na základě této rámcové specifikace bylo firmám umožněno vypisovat karty stáží, což byly více méně inzeráty dostupných stáží, které měly být realizovány u firmy, jež je vypsal, a musely splňovat všechny náležitosti specifikované šablonou, podle které byla karta stáže vypsána. Pokud firma a karta stáže splňovala všechny podmínky projektu, byla vystavena na web projektu, kde byla dostupná široké veřejnosti. Zájemci se poté mohli přihlašovat k vypsáním a vystaveným kartám stáží. Pokud uchazeč o stáž splňoval podmínky definované šablonou, byl schválen a zájemce se stal jedním z kandidátů pro zveřejněnou kartu stáže (nabídku stáže). Firma, jež vypsal kartu stáže, si poté vybrala z kandidátů toho nejvhodnějšího, které dostal možnost absolvovat stáž v dané firmě a na dané pozici. Pokud vše proběhlo dle regulí projektu, firma po skončení stáže obdržela od realizátora projektu finanční náhradu za náklady, které jí s realizováním stáže vznikly. Výše těchto nákladů byla specifikována pro každou typovou pozici individuálně již v šabloně stáže. Rovněž stážistovi byly hrazeny náklady spojené se stáží, jako stravné, cestovné a případně i náklady spojené s ubytováním).

Dle projektové žádosti byly stanoveny benefity projektu pro osoby stážistů následující:

- lepší možnost uplatnit se na trhu práce,
- možnost získat lepší finanční ohodnocení.

2.1 Dostupná data z projektu

Jednotlivé zdroje dat pro účely kontrafaktuální evaluace projektu lze klasifikovat do dvou skupin, a to do skupiny interních datových zdrojů a do skupiny externích datových zdrojů.

V rámci projektu vznikl informační systém, který sloužil jako evidenční a administrativní nástroj pro celý projekt a je proto považován za interní datový zdroj. Z tohoto systému byly pro analýzu převzaty zejména informace o věku, pohlaví, nejvyšší dosažené vzdělání, datu registrace osoby do systému, a počet podaných přihlášek ke kartám stáží. Dalším interním zdrojem dat byly evaluační dotazníky, které fungovaly nejen pro účely evaluace celého projektu, ale i pro monitoring průběhu stáží. Z těchto dotazníků byly převzaty zejména informace o nejvyšším dosaženém vzdělání. Posledním, ale zato nejdůležitějším, interním zdrojem dat bylo telefonické dotazování jak osob absolvujících stáž, tak i osob, jež byly zařazeny do kontrolní skupiny. Zde bylo od osob zjišťováno, jaký ekonomický status a příjem z výdělečné činnosti měly před a po skončení stáže.

Jako externí zdroje dat posloužily statistické ročenky Ministerstva práce a sociální věcí, ze kterých byla převzata data o míře nezaměstnanosti v jednotlivých okresech v daném čase. Pro spárování údajů o okresech s místem trvalého bydliště byla využita služba spojenosti Google konvertující adresy do standardizovaných formátů včetně PSČ. To bylo posléze použito, společně se seznamem České pošty, jako klíč pro mapování bydliště osob na data ze statistických ročenek.

3 DESIGN KONTRAFAKTUÁLNÍ EVALUACE A VÝSLEDKY

Osoby, které dostaly možnost absolvovat stáž v rámci projektu Stáže ve firmách – vzdělávání praxí a zároveň stáž i úspěšně dokončily, jsou v následující ukázce aplikace regresních kontrafaktuálních metod zařazeny do skupiny s intervencí. Osoby, jež projeví zájem o stáž tím, že podaly přihlášku k vybrané kartě stáže, avšak nedostaly možnost se stáže zúčastnit, a to jak z důvodů toho, že nesplnily všechny podmínky projektu nebo nebyly vybrány firmou jako nejvhodnější kandidát pro stáž, byly zařazeny do kontrolní skupiny.

U obou skupin osob byly pomocí telefonického dotazování (CATI) zjišťovány mimo jiné informace o jejich ekonomickém statusu v době před a šest měsíců po stáži, ale i jejich příjem z výdělečné činnosti. Tyto informace posloužily jako základní vstupy pro modelování efektu intervence.

Určitou slabinou takto designovaného modelu kontrafaktuální evaluace je skutečnost, že osoby, které nedostaly možnost stáž absolvovat, mohou mít v průměru menší schopnost prosadit se na trhu práce než osoby, které byly firmou poskytující stáže ke stáži vybrány jako více vhodné. Tuto hypotézu ovšem na základě dat o jednotlivých osobách ani na základě výsledků modelů kontrafaktuální evaluace nebylo možno potvrdit.

Pro modelování vlivu stáží na příjem z výdělečné činnosti byly využity kromě nezbytných proměnných označujících časové období a příslušnost jedince do dané skupiny i další proměnné pro charakteristický vektor jedinců. Mezi tyto proměnné se řadí sada binárních proměnných označujících ekonomický status osob. Další užitou proměnnou je míra nezaměstnanosti v okrese bydliště dané osoby, věk dané osoby, počet přihlášek podaných ke kartám stáže, nejvyšší dosažené vzdělání dané osoby, pohlaví a doba od zahájení projektu k podání první přihlášky ke kartě stáže. Smyslem poslední proměnné je v tomto případě zohlednění vlivu různých etap projektu na efekty stáží. V průběhu realizace projektu se totiž zpříšňovaly podmínky pro realizaci stáží.

Na základě dostupných a vybraných proměnných byl specifikován regresní model dle Difference in Differences přístupu takto:

$$\begin{aligned}
 rev_{i,t} = & +\beta_1 group_i + \beta_2 time_t + \beta_3 (group_i time_t) + \beta_4 eco_osvc_{i,t} \\
 & + \beta_5 eco_nezam_{i,t} + \beta_6 eco_neak_{i,t} + \beta_7 eco_stud_{i,t} \\
 & + \beta_8 project_phase_{i,t} + \beta_9 unepm_rate_{i,t} + \beta_{10} age_{i,t} + \beta_{11} age_{i,t}^2 \\
 & + \beta_{12} applic_i + \beta_{13} applic_i^2 + \beta_{14} outlier_{i,t} + \beta_{15} edu_ZS_{i,t} \\
 & + \beta_{16} edu_SS_vl_{i,t} + \beta_{17} edu_SS_od_{i,t} + \beta_{18} edu_SS_gym_{i,t} \\
 & + \beta_{19} edu_SS_vos_{i,t} + \beta_{20} edu_VS_{i,t} + \beta_{21} gen_i + u_{i,t},
 \end{aligned}$$

a regresní model eliminující nepozorovatelné fixní efekty jedinců dle metody first differenced estimator, ve které byly ovšem zohledněny i výše zmiňované proměnné, které jsou sice v čase neměnné, ale pro modelovaný efekt stáže nezbytné.

Takto specifikované modely byly nejprve odhadnuty pro všechny osoby. Avšak odhadnuté hodnoty zkoumaného parametru vyjadřujícího efekt stáže disponovaly poměrně velkou směrodatnou chybou, takže spodní hranice intervalu spolehlivosti¹ ležela v záporné části osy reálných čísel a horní hranice intervalu spolehlivosti naopak v kladné části. Ač model vykazoval dobré charakteristiky vzhledem k testům správnosti specifikaci, nebylo možno nic říci o vlivu stáží na příjem osob z výdělečné činnosti. Z tohoto důvodu byly osoby rozděleny do skupin, podle jejich ekonomického statutu v době kdy podaly přihlášku ke stáži. Vznikly tak dvě skupiny osob. První skupina čítala osoby, jež byly v době podání přihlášky k vypsání kartě stáže zaměstnanci nebo osobami samostatně výdělečně činnými. V druhé skupině osob pak byli jedinci, kteří byli nezaměstnaní, případně osoby ekonomicky neaktivní či studenti.

Po tomto rozčlenění osob do skupin se již zkoumané koeficienty vyjadřující průměrný efekt stáže na příjem z výdělečné činnosti ukázaly jako více vypovídající. V případě osob zaměstnaných a samostatně výdělečně činných byla hodnota zkoumaného koeficientu kladná a většina hodnot z intervalu spolehlivosti ležela v kladné části osy reálných čísel. Naproti tomu v případě osob nezaměstnaných či ekonomicky neaktivních byla střední hodnota odhadovaného efektu stáží blízká nule a více než polovina intervalu spolehlivosti ležela v negativní části osy reálných čísel.

Na základě těchto výsledků, lze uvažovat, že efekt stáží na příjem z výdělečné činnosti je spíše pozitivní u osob zaměstnaných a samostatně výdělečně činných, zatímco efekt stáží na příjem z výdělečné činnosti je diskutabilní u osob, že na stáž vstupovaly jako nezaměstnané či ekonomicky neaktivní. Tyto ne příliš pozitivní výsledky mohou být způsobeny i skutečností, že šest měsíců po absolvování stáže není dostatečně dlouhá doba na to, aby se vliv stáže na příjem z výdělečné činnosti mohl projevit u osob, které si teprve po ukončení stáže začaly hledat regulérní zaměstnání či předmět jejich obživy.

¹ Uvažovaná hladina spolehlivosti je 95%

Použitá literatura

1. WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Econometric analysis of cross section and panel data*. 2nd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2010, xxvii, 1064 p. ISBN 02-622-3258-8.
2. CAMERON, Adrian C. a Pravin K. TRIVEDI. *Microeconometrics: methods and applications*. ISBN 05-218-4805-9.
3. MANNING, Alan. *Differences-in-Differences and A Brief Introduction to Panel Data*. [online]. 2008. Dostupné z: http://econ.lse.ac.uk/~amanning/courses/ec406/ec406_DinDPanel.pdf.
4. WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introductory econometrics: a modern approach*. 4th ed. Mason, OH: South Western, Cengage Learning, c2009, xx, 865 p. ISBN 03-246-6054-5.

Kontaktní údaje

Ing. Michal Švarc

Vysoká škola ekonomická v Praze

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

tel: +420 724 031 631

email: xsvam00@vse.cz

APLIKACE VÍCEKRITERIÁLNÍ HRY NA KONKURENČNÍ RESTAURACE

MULTICRITERIA GAMES – APPLICATION IN RESTAURANTS

Michaela Tichá

Abstrakt

Teorie her je velmi zajímavou a v poslední době rozvíjenou disciplínou. Jedním z novějších směrů je teorie vícekritériálních her. Ukázalo se, že klasická teorie her často nestačí, že nastávají případy, kdy hráči chtějí maximalizovat nebo minimalizovat více kritérií, kdy sledují několikero cílů. V takovém případě přichází na řadu teorie vícekritériálních her. V tomto článku se budeme zabývat aplikací vícekritériálních her na konkurenční prostředí firem provozujících gastronomii.

***Klíčové slová:** teorie her, vícekritériální hry, aplikace teorie her*

Abstract

Game theory is very interesting and lately developed on discipline. One of the newer trends is the theory of multicriteria games. It turned out that classical game theory is often not enough that arise instances where players want to maximize or minimize multiple criteria when pursuing several varieties goals. In this case, comes the theory of multicriteria games. In this article, we discuss the application of multicriteria games in the competitive environment of companies operating gastronomy.

***Keywords:** game theory, multicriteria games, application of game theory*

1 ÚVOD

Teorie her se zabývá řadou rozhodovacích situací, v nichž proti sobě stojí dva či více hráčů a každý se snaží maximalizovat svůj zisk. Často se však setkáváme se situacemi, kdy se alespoň jeden z hráčů rozhoduje na základě více kritérií, které chce maximalizovat zároveň. Proto vznikla teorie vícekritériálních her aplikací teorie vícekritériální optimalizace do teorie her.

Teorie vícekritériálních her je stále se rozvíjející disciplína. Způsob, kterým bychom v libovolné hře našli všechny rovnovážné body, zatím neexistuje. Je však řada konceptů, které naleznou buď nějakou podmnožinu rovnovážných bodů, nebo naleznou všechny rovnovážné body v nějaké specifické hře. V tomto článku použijeme nejsnazší způsob popsany v (Krus, Bronisz, 1994) – skalarizaci výplatní funkce. Zadání úlohy bylo převzato z (Tichá, 2013).

2 ZÁKLADNÍ KONCEPTY

Zformulujeme nekooperativní vícekritériální hru více hráčů a popíšeme použitý způsob řešení.

Definice 1. Necht' n je přirozené číslo a $N = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina n hráčů, X_i je množina čistých strategií hráče $i \in N$ a pro každého hráče $i \in N$ máme výplatní funkci

$$u_i : \prod_{j \in N} X_j \rightarrow R^{r(i)},$$

kteřá přiřazuje každé kombinaci strategií hráčů bod v $r(i)$ -dimenzionálním Euklidovském prostoru, kde $r(i)$ je počet kritérií hráče $i \in N$. Množinu

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$$

nazveme *vícekritériální hru*.

Obdobně provedeme rozšíření na smíšené strategie. Označme $\Delta(X_i)$ množinu smíšených strategií hráče $i \in N$. Pro smíšenou strategii $x_i \in \Delta(X_i)$, $j \in X_i$ označíme x_{ij} pravděpodobnost, že hráč i odpoví čistou strategií j .

Definice 2. Necht'

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$$

je vícekritériální hra z definice 1. Nyní pod množinou strategií $(X_i)_{i \in N}$ uvažujeme množiny smíšených strategií $\Delta(X_i)$ a hru G nazveme *smíšené rozšíření vícekritériální hry*.

Dále budeme uvažovat pod pojmem vícekritériální hra její smíšené rozšíření.

Nejjednodušší a také nejlépe interpretovatelný způsob řešení je skalarizace vektorových výplatních funkcí. Pro každého hráče vytvoříme vektor vah jednotlivých kritérií a uděláme vážený součet, čímž vznikne jediné kritérium. Může se stát, že kritéria nejsou vzájemně srovnatelné, v takovém případě je potřeba je nejprve znormovat.

Následně známými způsoby vyřešíme standardní hru a potom platí, že nalezené řešení je zároveň rovnovážný bod původní vícekritériální hry. Toto řešení je popsáno v (Krus, Bronisz, 1994).

3 ZADÁNÍ ÚLOHY

Budeme uvažovat dvě firmy provozující restaurační zařízení, pojmenujeme je Anna a Barbora. Každá firma může provozovat restauraci v několika městech se dvěma možnými zaměřeními (řecká, italská). Firmy si vzájemně konkurují. Nyní rozhodují o otevření několika nových poboček. Každá firma může v každé pobočce zvolit jedno z možných zaměření. Počet zákazníků jednotlivých firem závisí na volbě obou firem. V každém městě je daný zájem o konkrétní zaměření restaurace. Pokud obě firmy zvolí totéž zaměření, počet zákazníků se podělí mezi ně. Pokud zvolí různé, přijde tolik zákazníků, jaký je zájem v daném městě.

Uvažujeme, že firmy chtějí provozovat nové restaurace ve dvou městech - v Kocourkově a ve Lhotě. V obou městech si pronajmuly prostory a nyní se rozhodují, jaké restaurace tam zřídí. Předpokládejme, že firma Anna zvažuje buď otevření dvou italských restaurací, nebo dvou řeckých restaurací. Zřízení jedné v Kocourkově a jedné ve Lhotě by pro ni bylo náročné, neboť by musela zařizovat dva různé dodavatele surovin, sestavovat dva jídelní lístky z nových receptů apod. Firma Barbora již má nějaké italské a řecké restaurace otevřené v jiných městech, a tak nemá nové starosti s dodavateli apod. Chce však otevřít alespoň jednu novou italskou restauraci. Zvažuje tedy možnosti otevření dvou italských restaurací, otevření italské restaurace v Kocourkově a řecké restaurace ve Lhotě a otevření řecké restaurace v Kocourkově a italské restaurace ve Lhotě.

Předpokládejme nyní, že máme na základě statistických průzkumů v jednotlivých městech sestaveny očekávané návštěvnosti restaurací. Podívejme se na hodnoty v následující tabulce

Týdenní návštěvnost	Lhota	Kocourkov
italská restaurace	500	600
řecká restaurace	320	350

Tabulka nám říká, že ve Lhotě je zájem o italskou restauraci takový, že by ji týdně navštívilo 500 lidí (při návštěvě téhož zákazníka několikrát jej počítáme při každé návštěvě znovu), a zájem o řeckou restauraci takový, že by ji týdně navštívilo 320 lidí. V Kocourkově je zájem takový, že by italskou restauraci týdně navštívilo 600 lidí a řeckou restauraci 350 lidí.

Cílem obou firem je maximalizovat počet zákazníků v obou restauracích zároveň. Dále předpokládejme, že zřídí-li ve městě firmy obě restaurace stejného zaměření, návštěvnost se rozdělí napůl mezi obě firmy. Pokud ve městě zřídí dvě odlišné restaurace, do každé přijde daný počet zákazníků z výše uvedené tabulky.

4 SESTAVENÍ VÍCEKRITERIÁLNÍ HRY

Máme tedy zadanou reálnou úlohu a tu chceme nyní řešit pomocí teorie her. Nejprve ji musíme převést do matematické podoby. Firmy Anna a Barbora představují dva hráče. Firma Anna má dvě čisté strategie a firma Barbora má tři čisté strategie, znázorněno v následující tabulce

Anna		Barbora	
<i>strategie</i>	<i>označení</i>	<i>strategie</i>	<i>označení</i>
italská - italská	X	italská - italská	A
řecká - řecká	Y	italská - řecká	B
		řecká - italská	C

Obě firmy se snaží maximalizovat dvě kritéria - počet zákazníků jejich restaurace ve Lhotě a počet zákazníků jejich restaurace v Kocourkově. Počty zákazníků považujeme za výplatní funkce. Nutno podotknout, že nemůžeme uvažovat dvě standardní hry - jednu ve Lhotě a jednu v Kocourkově. Získali bychom dvě různá řešení, která by zcela jistě nesplňovala dané podmínky jako například, že firma Anna chce provozovat obě restaurace stejného zaměření. Musíme tedy maximalizovat obě výplatní funkce zároveň a využít teorie vícekritériálních her.

Nyní sestavíme matice výplatních funkcí. Firma Anna má dvě matice: A_1 , která představuje počet návštěvníků ve Lhotě, a A_2 , která představuje počet návštěvníků v Kocourkově. Firma Barbora má také dvě matice: B_1 , která představuje počet návštěvníků ve Lhotě, a B_2 , která představuje počet návštěvníků v Kocourkově. Konkrétní hodnoty snadno získáme z tabulky návštěvnosti za výše uvedeného předpokladu, že zákazníci buď chodí všichni do jediné

otevřené restaurace daného zaměření, nebo se rozdělí a polovina chodí do jedné a polovina do druhé, jsou-li obě stejného zaměření.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 250 & 250 & 500 \\ 320 & 320 & 160 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 300 & 600 & 300 \\ 350 & 175 & 350 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 250 & 250 & 320 \\ 500 & 500 & 160 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 300 & 350 & 300 \\ 600 & 175 & 600 \end{pmatrix}$$

Takto máme zadánu vícekriteriální hru a můžeme přejít k jejímu řešení.

5 ŘEŠENÍ ÚLOHY

Nyní budeme uvažovat, že firma Anna preferuje město Kocourkov a záleží mu na návštěvnosti v tomto městě čtyřikrát více než na návštěvnosti ve Lhotě. Oproti tomu firma Barbora preferuje návštěvnost v obou městech stejnou mírou.

Řekneme tedy, že firma Anna má vektor preferencí $\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$, zatímco firma Barbora má vektor preferencí $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Můžeme tak sestavit vážené matice A a B :

$$A = 0,2 * A_1 + 0,8 * A_2 \qquad B = 0,5 * B_1 + 0,5 * B_2$$

Máme tedy klasickou dvoumaticovou hru se zadanými maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 290 & 530 & 340 \\ 344 & 204 & 312 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 275 & 300 & 310 \\ 550 & 337,5 & 380 \end{pmatrix}$$

a můžeme ji vyřešit nalezením lokálního optima nelineárního programu:

$$\max_{p,q} p^T (A + B)q - \alpha - \beta$$

za podmínek

$$Aq - \alpha e \leq 0$$

$$B^T p - \beta f \leq 0$$

$$e^T p - 1 = 0$$

$$f^T q - 1 = 0$$

$$p \geq 0$$

$$q \geq 0,$$

kde e a f jsou jedničkové vektory příslušných dimenzí, α a β je cena hry prvního, resp. druhého hráče, p a q jsou pak vektory pravděpodobností jednotlivých strategií.

Zadáme-li program do příslušného softwaru (např. MS Excel), spočteme řešení

$$p = \begin{pmatrix} 0,829268 \\ 0,170732 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 0,341463 \\ 0 \\ 0,658537 \end{pmatrix}$$

a cenu hry prvního, resp. druhého hráče

$$\alpha = 322,9$$

$$\beta = 321,9.$$

Rovnovážným bodem hry je tedy strategický profil, kde firma Anna zvolí s 82,9% pravděpodobností strategii dvou italských restaurací a s 17,1% pravděpodobností strategii dvou řeckých restaurací a firma Barbora zvolí s 34,1% pravděpodobností strategii dvou italských restaurací a s 65,9% pravděpodobností strategii řecké restaurace ve Lhotě a italské restaurace v Kocourkově.

6 ZÁVĚR

V článku jsme se zabývali jednou z možných aplikací vícekriteriálních her. Dvě firmy provozující restauraci spolu soupeřili o zákazníky ve dvou městech. Rozhodovali o otevření nových restaurací a jejich zaměření. Počet návštěvníků restaurace byl dán tím, jaké restaurace byly ve městě otevřené. Sestavili jsme číselné zadání úlohy a následně jsme řešili vícekriteriální hru. Využili jsme jedno z možných řešení vícekriteriálních her – skalarizaci. Pomocí preferencí firem jsme sestavili vektory vah jednotlivých hráčů. Díky tomu jsme hru zjednodušili na jednokriteriální dvoumaticovou hru. Tu jsme poté vyřešili známým způsobem pomocí nelineárního programu a interpretovali řešení.

Použitá literatura

1. KRUS, L., BRONISZ, P.. 1994. On n-person Noncooperative Multicriteria Games Described in Strategic Form. *Annals of Operation Research*, Vol. 51, pp. 83-97
2. TICHÁ, M. 2013. Aplikace teorie her dvou hráčů v ekonomii. Diplomová práce, VŠE Praha.
3. TICHÁ, M. 2012. Vícekriteriální hry. Diplomová práce, MFF UK.

Kontaktní údaje

RNDr. Ing. Michaela Tichá

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 3, 130 67 Praha 3

Tel.: 224 095 445

email: xticm11@vse.cz

Příspěvek byl sepsán s podporou interní grantové agentury, grant č. IGA F4/54/2015.