

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum

**MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ
NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII
A OPERAČNÍM VÝZKUMU**

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Slovenskej spoločnosti pre operačný výskum

ZBORNÍK

28. november – 30. november 2018

28. listopad – 30. listopad 2018

Praha

Programový výbor – recenzenti:

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
doc. dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD., VŠE Praha
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

Organizačný výbor:

Ing. Jan Zouhar, PhD.
Ing. Brian König, PhD.

Náklad: 50 ks
AH 13,72

Kontakt: brian.konig@euba.sk

Editor: Ing. Brian König, PhD.

Web editor: doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2018

ISBN: 978-80-225-4563-1

Obsah

<i>Adam Borovička:</i> Striktní a fuzzy relace a jejich využití ve vícekritériálním rozhodování	5
<i>Ivan Brezina, Pavel Gežík:</i> Optimalizácia linky podpory prostredníctvom rozhodovacích stromov	11
<i>Zuzana Čičková, Matej Zagiba:</i> Väzňova dilema v oblasti bezdrôtovej komunikácie	19
<i>Marek Dvořák:</i> Aplikace binární klasifikace na data akciového trhu	23
<i>Petr Fiala, Renata Majovská:</i> Modely koordinace technologií	28
<i>Dana Figurová:</i> Rovnostárske riešenie rozdelenia výhry v kooperatívnej hre	34
<i>Jiří Georgiev:</i> Porovnání predikčního výkonu VAR modelu oproti neuronové síti	40
<i>Marián Goga:</i> Niektoré teoreticko-metodologické východiská k stabilite ekonomického systému	45
<i>Jakub Hanousek:</i> DEA modely – měření efektivity veřejné dopravy v České republice	53
<i>Eduard Hozlár:</i> Modelovanie vplyvu faktoringu na hodnotu firmy	62
<i>Michaela Chocholatá:</i> Determinanty kriminality z priestorového hľadiska: GWR prístup	68
<i>Miroslava Jánošová:</i> Medzinárodná investičná pozícia ako indikátor vonkajšej rovnováhy	77
<i>Marek Kawulok, Lukáš Frýd:</i> Analýza vývoje korelace mezi HDP a výdaji na zbrojení	82
<i>Brian König:</i> Determinanty zahraničného obchodu krajín eurozóny	88
<i>Brian König:</i> Metodologické prístupy k meraniu veľkosti strednej triedy	94
<i>Stanislav Kováč:</i> Previazanosť akciových trhov pred a po ohlásení makroekonomickej zmeny	99
<i>Karel Lebr, Ondřej Sokol:</i> Přiřazování zaměstnanců ke klientům v malé firmě	111

<i>Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková:</i> Úvod do analýzy panelových dát v systéme R	118
<i>Simona Macková:</i> Přetrvávající rozdíly mezi západním a východním Německem: aplikace metod prostorové ekonometrie	128
<i>Veronika Miťková:</i> Ohrožujú imigranti výšku platov na Slovensku?	135
<i>Vladimír Mlynarovič:</i> Niektoré princípy kompromisu v úlohe výberu portfólia	141
<i>Mariya Oleynik, Lukáš Frýd:</i> Attrition analýza pomocí metod strojového učení	145
<i>Stanislav Palúch:</i> Exaktný model optimalizácie turnusov s dvoma typmi vozidiel	153
<i>Juraj Pekár:</i> Výber stratégie hráča pri investovaní do akcie	159
<i>Štefan Peško:</i> Robustný model PRIVOL s dvoma scenármi dopytu cestujúcich a dvoma typmi vozidiel	164
<i>Michal Pieter:</i> Riešiteľ LocalSolver: popis a nové rozhranie	171
<i>Marian Reiff:</i> Analýza indexu Burzy cenných papierov Praha pomocou metodológie skrytého Markovovho modelu	180
<i>Allan Jose Sequeira Lopez:</i> Teória hier a mechanizmus dobrovoľného príspevku	186
<i>Karol Szomolányi:</i> Neofisherovská teória monetárnej politiky	192
<i>Barbora Šicková, Ondřej Sokol:</i> Porovnanie alternatívnych metód práce s chýbajúcimi hodnotami v regresných modeloch	197
<i>Petr Štourač:</i> Analýza časových řad výnosů vybraných firem z indexu S&P 500 pomocí metody CUSUM	203
<i>Petra Tomanová, Adam Krčál:</i> Robustní odhady stochastické volatility: Analýza S&P 500	209
<i>Petra Zýková:</i> Analýza závislosti průměrné mzdy na HDP ve stálých cenách	216

STRIKTNÍ A FUZZY RELACE A JEJICH VYUŽITÍ VE VÍCEKRITERIÁLNÍM ROZHODOVÁNÍ

STRICT AND FUZZY RELATION AND THEIR USE IN MULTI- CRITERIA DECISION MAKING

Adam Borovička

Abstrakt

Koncept striktní a fuzzy relace je velmi důležitý (nejen) v teorii rozhodování. Mnoho metod vícekriteriálního hodnocení variant využívá koncept (fuzzy) preferenční relace pro vyhodnocení sledovaných alternativ. Pomocí relace lze vyjádřit (ne)existenci vztahu mezi dvěma subjekty. Fuzzy relace navíc dokáže rozlišit sílu tohoto vztahu. Článek se zaměřuje na popis obou konceptů relací s akcentem na specifikaci jejich vlastností (reflexivita, symetrie a tranzitivita). Dále je nastíněno základní využití obou konceptů při řešení reálných rozhodovacích úloh prostřednictvím metod vícekriteriálního hodnocení variant.

Klíčová slova: fuzzy relace, striktní relace, vícekriteriální rozhodování

Abstract

The concept of strict and fuzzy relation is very important (not only) in the decision making theory. Many multi-criteria evaluation methods use the concept of (fuzzy) preference relation for an evaluation of chosen alternatives. Thanks to this concept, (non-)existence of relationship between two subjects are expressed. Fuzzy relation even enables distinguish an intensity of this relationship. This article focuses on a description of both relation concepts with the emphasis on a specification of their properties (reflexivity, symmetry and transitivity). Further, the basic usage of both concepts is outlined in solving real-life decision making problems via the multi-criteria evaluation methods.

Keywords: fuzzy relation, multi-criteria decision making, strict relation

1 ÚVOD

Identifikace vztahů mezi různými subjekty je často důležitou složkou průběhu rozhodovacího procesu. Kvantitativně lze tento vztah vyjádřit pomocí konceptu (striktní) relace. Jestliže je třeba vyjádřit i sílu (intenzitu) takového vztahu, aplikuje se koncept fuzzy relací.

Mnoho metod vícekriteriálního hodnocení variant využívá jakožto vyhodnocovací princip preferenční relaci. Průkopníkem tohoto přístupu je metoda ELECTRE I (Roy, 1968). Během 70. let se vyvinulo mnoho dalších metod, např. ELECTRE II (Roy a Bertier, 1973), ELECTRE III (Roy, 1978), nebo PROMETHEE I (Brans, 1982). Postupně se ale začalo uvažovat o konceptu fuzzy preferenční relace. První zmínky jsou v (Roy, 1977; 1980). Poté se začaly vyvíjet další koncepty, například (Takeda, 1982; Martel a D'Avignon, 1986). Všechny tyto koncepty pracují s různou formou odvození fuzzy relace. Modifikaci metody ELECTRE III navrhl Czyżak a Słowiński (1996), kde prahy preference a dispreference jsou odvozeny v prostředí mlhavých kriteriálních hodnot pomocí několika navržených měr založených na konceptu pravděpodobnosti a nutnosti. Vedle těchto vyhodnocovacích metod nalezneme metody odhadu vah, které jsou také založené na vyjádření síly preference mezi kritérii, např. Saatyho metoda. Tento koncept je pak vlastně implementován v metodě vícekriteriálního

hodnocení variant založené na maximalizaci funkce užitku, to jest AHP (Saaty, 1977) či její (fuzzy) modifikace.

Z předcházejícího odstavce je patrné, že je význam konceptu obou typů relací nemalý. Kvantifikace vztahů (preferencí) mezi variantami je nepostradatelná. I proto je hlavním cílem příspěvku jasně a srozumitelně čtenáře seznámit s oběma koncepty. Z pohledu reálné aplikace jsou významné jednotlivé vlastnosti relací, které jsou podrobněji osvětleny. Několikero ilustrativních příkladů dotváří alespoň rámcovou představu o využitelnosti těchto konceptů.

Struktura článku je následující. Po úvodu je představen koncept (striktních) relací, ze kterého vychází koncept fuzzy relací, jež je také řádně popsán. Následně je zpracován nástin možné aplikace konceptů, a to jak z pohledu algoritmického, tak čistě praktického. Shrnutí článku rekapituluje zejména jeho obsah s vyzvednutím aplikační důležitosti studovaných konceptů.

2 STRIKTNÍ RELACE

Jak uvádí například (Bojadziew a Bojadziew, 2007), představme si následující kartézský součin

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

kde X a Y jsou množiny.

Dle Klira a Folgera (1988) striktní¹ relaci², respektive relaci mezi striktními množinami, lze chápat jako podmnožinu kartézského součinu. Označme relaci mezi dvojicí množin jako $R(X, Y)$. Pak můžeme psát

$$R(X, Y) \subset X \times Y,$$

kde kartézský součin reprezentuje všeobecnou, úplnou množinu.

Každá striktní relace R může být definována pomocí charakteristické funkce (funkce příslušnosti), která každé podmnožině úplné množiny patřící do příslušné relace přiřazuje hodnotu 1, a hodnotu 0 v případě, že do relace nepatří. Tedy pro charakteristickou funkci platí

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Klir a Folger (1988) uvádí pro bližší objasnění problému jednoduchý příklad. Předpokládejme, že R reprezentuje relaci sňatku mezi množinou všech mužů a množinou všech žen. Z množiny všech možných párů budou mít hodnotu charakteristické funkce 1 pouze páry oddané, což indikuje příslušnost do stanovené relace.

Ukažme si ve stručnosti základní možné vlastnosti striktní relace, které nám nabízí například Fiala (2013) nebo Klir a Folger (1988). Definujme striktní relaci R v $X \times X$.

2.1 Reflexivita

Relace R je *reflexivní*, jestliže platí

$$(x, x) \in R \quad \forall x \in X.$$

Relace R je *nerflexivní*³, jestliže platí

¹ Přívlastek „striktní“ je možno vynechat. Označení „relace“ nebo „striktní relace“ jeden a ten samý koncept, a to nemlhavou (nefuzzy) relaci.

² crisp relation (eng.)

³ irreflexive (eng.)

$$(x, x) \notin R \quad \forall x \in X .$$

2.2 Symetrie

Relace R je *symetrická*, jestliže platí

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \quad \forall x, y \in X .$$

Relace R je *asymetrická*, jestliže alespoň pro nějaké $x, y \in X$ výše zmíněná formule neplatí, tedy tato

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R .$$

Relace R je *antisymetrická*, jestli platí

$$(x, y) \in R, (y, x) \in R \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X .$$

Relace R je *striktně (přísně) antisymetrická*⁴, pokud pro $x \neq y$ platí

$$\text{buď} \quad (x, y) \in R, \text{ nebo} \quad (y, x) \in R \quad \forall x, y \in X .$$

2.3 Tranzitivita

Relace R je *tranzitivní*, pokud platí

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \quad \forall x, y, z \in X .$$

Relace R je *netranzitivní*⁵, pokud výše zmíněná podmínka není splněna, tedy neplatí

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \quad \forall x, y, z \in X .$$

Relace R je *antitranzitivní*, pokud platí

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \notin R \quad \forall x, y, z \in X .$$

3 FUZZY RELACE

Koncept fuzzy relace, který se snaží popsat neurčitý vztah mezi prvky množin, studovalo mnoho autorů, například Zadeh (1965, 1971), či Kaufmann (1975).

Fuzzy relaci můžeme definovat jako množinu

$$\tilde{R} = \{((x, y), \mu_{\tilde{R}}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

kde $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ je funkce příslušnosti, která vyjadřuje stupeň příslušnosti indikující míru vztahu x s y .

Fuzzy relace může vykazovat několik vlastností. Definujme fuzzy relaci \tilde{R} v $X \times X$.

3.1 Reflexivita

Fuzzy relace \tilde{R} je *reflexivní*, pokud platí (Zadeh, 1971)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1 \quad \forall x \in X .$$

Fuzzy relace \tilde{R} je *ε -reflexivní*, pokud platí (Yeh, 1975)

⁴ strictly antisymmetric (eng.)

⁵ nontransitive (eng.)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, x) \geq \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Fuzzy relace \tilde{R} je *slabě reflexivní*, pokud platí (Yeh a Bang, 1975)

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{R}}(x, x) \\ \mu_{\tilde{R}}(y, x) \leq \mu_{\tilde{R}}(x, x) \end{array} \right\} \quad \forall x, y \in X .$$

3.2 Symetrie

Fuzzy relace \tilde{R} je *symetrická*, pokud platí (Zadeh, 1971)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x) \quad \forall x, y \in X .$$

Fuzzy relace \tilde{R} je *asymetrická*, pokud alespoň pro nějaké $x, y \in X$ platí

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y, x) .$$

Fuzzy relace \tilde{R} je *antisymetrická*, pokud platí pro $x \neq y$ buď (Kaufmann, 1975)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y, x) \quad \forall x, y \in X ,$$

nebo

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0 \quad \forall x, y \in X .$$

Fuzzy relace \tilde{R} je *perfektně antisymetrická*, pokud platí pro $x \neq y$ (Zadeh, 1971)

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0, \quad \text{pak} \quad \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0 \quad \forall x, y \in X .$$

3.3 Tranzitivita

Dle Klir a Folger (1988) je fuzzy relace \tilde{R} je *tranzitivní* (nebo *max-min tranzitivní*), pokud platí

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \max_{y \in Y} \min[\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z)] = 0 \quad \forall x, z \in X .$$

Fuzzy relace je \tilde{R} je *netranzitivní*, pokud platí alespoň pro nějaký element množiny X

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) < \max_{y \in Y} \min[\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z)] = 0 .$$

Fuzzy relace \tilde{R} je *antitransitivní*, pokud platí

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) < \max_{y \in Y} \min[\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{R}}(y, z)] = 0 \quad \forall x, z \in X .$$

Vlastnost tranzitivity fuzzy relace může být definována z různých úhlů pohledu. Tedy například můžeme stanovit fuzzy relaci \tilde{R} jako *max-součin tranzitivní*⁶

$$\mu_{\tilde{R}}(x, z) \geq \max_{y \in Y} [\mu_{\tilde{R}}(x, y) \cdot \mu_{\tilde{R}}(y, z)] = 0 \quad \forall x, z \in X .$$

4 VYUŽITÍ RELACÍ VE VÍCEKRITERIÁLNÍM ROZHODOVÁNÍ

Jak je zřejmé z úvodu, řada metod vícekriteriálního hodnocení variant využívají právě koncept (preferenční) relace, který umožňuje vyhodnocení variant. Na základě vyjádření

⁶ max-product transitive (ang.)

preferance mezi dvojicemi variant pomocí striktní relace, respektive její síly (intenzity) pomocí fuzzy relace, jsou metody schopny rozdělit hodnocené varianty do různých skupin (např. efektivní a neefektivní), či dokáží alespoň vyjádřit agregovanou preferenci mezi variantami. Pomocí (fuzzy) relace též můžeme stanovovat váhy rozhodovacích kritérií.

Rozdělení na varianty „dobré“ (efektivní) či „špatné“ (neefektivní) může být velice přínosné, aby se rozhodovatel mohl v početné množině variant zorientovat. Eliminací neefektivních variant dochází ke zjednodušení, může se pak soustředit na užší skupinu „perspektivních“ alternativ, ze kterých případně může doprovodnou procedurou vybírat ty „nejlepší“. Takový postup se nabízí například na finančním trhu, kde nabídka investičních instrumentů je velice široká, což může být zejména pro začínajícího investora svazující. Další aplikace bychom mohli hledat v produkčních procesech či projektovém řízení.

5 ZÁVĚR

Hlavní náplní příspěvku bylo seznámení s konceptem striktní a fuzzy relace. Podrobný výklad se zaměřil zejména na specifikaci důležitých vlastností relací – reflexivitu, symetrii a tranzitivitu. Praktické využití těchto relací bylo představeno na poli vícekriteriálního rozhodování. Mnoho metod zejména vícekriteriálního hodnocení variant používá k vyhodnocení právě koncept relace, resp. fuzzy relace. V případě fuzzy relace lze nejen vyjádřit (ne)existenci vztahu mezi dvěma elementy (jako striktní relace), ale navíc i sílu tohoto vztahu, což může být v praktických rozhodovacích problémech velice užitečné.

Použitá literatura

1. BOJADZIEV, G., BOJADZIEV, M. *Fuzzy logic for business, finance, and management*. New Jersey: World Scientific, 2007.
2. BRANS, J. P. *L'ingenierie de la decision. Elaboration dinstruments daide a la decision. Methode PROMETHEE*. In: *Laide a la Decision: Nature, Instrument s et Perspectives Davenir*. R. Nadeau, M. Landry (ed.), Quebec: Presses de Universite Laval, 1982, s. 183-214.
3. CZYŻAK, P., SŁOWIŃSKI, R. Possibilistic construction of fuzzy outranking relation for multiple-criteria ranking. *Fuzzy Sets and Systems*. 1996, roč. 81, č. 1, s. 123-131.
4. FIALA, P. *Modely a metody rozhodování*. Praha: Oeconomica, 2013.
5. KAUFMANN, A. *Introduction to the theory of fuzzy subsets, vol. I*. New York: Academic Press, 1975.
6. KLIR, G. J., FOLGER, T. A. *Fuzzy sets, uncertainty, and information*. New York: Prentice-Hall International, Inc., 1988.
7. MARTEL, J. M., D'Avignon, G. R. A fuzzy outranking relation in multicriteria decision making. *European Journal of Operational Research*. 1986, roč. 25, č. 2, s. 258-271.
8. ROY, B. Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE). *La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle (RIRO)*. 1968, roč. 2, č. VI, s. 57-75.
9. ROY, B. ELECTRE III: algorithme de classement basé sur une représentation floue des préférences en présence des critères multiples. *Cahiers du CERO*. 1978, roč. 20, č. 11, s. 3-24.

10. ROY, B. Partial preference analysis and decision-aid: The fuzzy outranking relation concept. In: *Conflicting Objectives in Decisions*. D. E. Bell, R. L. Keeney, H. Raiffa (ed.), New York: Wiley, 1977, s. 40-75.
11. ROY, B. Selektieren, Sortieren und Ordnen mit Hilfe von Prävalenzrelationen: Neue Ansätze auf dem Gebiet der Entscheidungshilfe für Multikriterien-Probleme. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*. 1980, roč. 32, s. 465-496.
12. ROY, B., BERTIER, P. La méthode ELECTRE II. - Une application au media-planning. In: *Operational Research 72*. M. Ross (ed.), Amsterdam: North Holland, 1973, s. 291-302.
13. SAATY, T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*. 1977, roč. 15, č. 3, s. 234-281.
14. TAKEDA, E. Interactive identification of fuzzy outranking relations in a multicriteria decision problem. In: *Fuzzy Information and Decision Processes*. M. M. Gupta, E. Sanchez (ed.), Amsterdam: North Holland, 1982, s. 301-307.
15. YEH, R. T., BANG, S. Y. Fuzzy relations, fuzzy graphs and their applications to clustering analysis. In: *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. L. A. Zadeh, K. S. Fu, K. Tanaka, M. Shimura (ed.), New York: Academic Press, 1975, s. 125-150.
16. ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. roč. 8, č. 3, s. 338-353.
17. ZADEH, L. A. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Science*. 1971, roč. 3, č. 2, s. 177-206.

Kontaktní údaje

Ing. Adam Borovička, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra ekonometrie
nám. W. Churchilla 4, Praha 3, 130 67

Tel: +420 224 09 5447

E-mail: adam.borovicka@vse.cz

Tento příspěvek byl vytvořen za podpory projektu č. IGA F4/57/2017 Interní grantové agentury, Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze.

OPTIMALIZÁCIA LINKY PODPORY PROSTREDNÍCTVOM ROZHODOVACÍCH STROMOV

OPTIMIZATION OF SUPPORT LINE THROUGH DECISION TREES

Ivan Brežina, Pavel Gežík

Abstrakt

Rozhodovací strom je relativne bežné grafické zobrazenie štruktúry rozhodovacieho procesu z dôvodu ich prehľadnosti a jednoduchej interpretovateľnosti. Takýto rozhodovací strom prehľadne interpretuje možnosti voľby v jednotlivých krokoch rozhodovacieho procesu a zobrazuje tieto kroky s ich nasledujúcimi možnosťami.

Rovnako tak rozhodovací strom popisuje aj možnosť výberu požadovanej voľby pri telefonáte na tzv. linku podpory, resp. akúkoľvek inú telefónnu linku, kde je nutné vypočítať si možnosti a následne si zvoliť požadovanú voľbu.

Príspevok popisuje možnosti usporiadania volieb prostredníctvom rôznych variantov rozhodovacích stromov. Následne ponúka možnosť vybrať variant, ktorý bude umožňovať usporiadať voľby s najkratším priemerným časom čakania.

KLúčové slová: *rozhodovací strom, optimalizácia, priemerný čas čakania*

Abstract

The decision tree is a relatively frequent graphical representation of the structure of the decision making process for clarity and simple interpretability. This decision tree interprets the choice options in each step of the process of decision making and displays these steps with the following options.

The decision tree also describes the possibility of choosing the desired option when calling the support line, respectively. any other phone line where you have to listen to the options and then choose the desired option.

The paper describes options for organizing choices through different decision tree variants. Then it offers the option to choose variants that will allow you to hold options with the shortest average waiting time.

Keywords: *Decision Tree, Optimization, Average Time of Waiting*

ÚVOD

Rozhodovací strom predstavuje grafické zobrazenie štruktúry rozhodovacieho procesu pomocou koreňových stromov. S rozhodovacími stromami sa v bežnom živote stretávame pomerne často z dôvodu ich prehľadnosti a jednoduchej interpretovateľnosti. Ako príklady možno uviesť rodokmene, evolučné stromy, vizualizácia rozhodovacieho procesu, určenie optimálnej stratégie rozhodovacieho procesu, priečinky (adresáre) a ich podpriečinky (podadresáre) v počítač a pod.

Jeden z príkladov je aj možnosť výberu požadovanej voľby pri telefonáte na tzv. linku podpory, resp. akúkoľvek inú telefónnu linku, kde je nutné vypočítať si možnosti a následne si zvoliť požadovanú voľbu.

1 ROZHODOVACIE STROMY

Rozhodovacie stromy sú také acyklické grafy¹, ktoré predstavujú zobrazenie rozhodovacieho procesu a umožňujú rozhodovanie na základe pravidiel definovaných v štruktúre rozhodovacieho stromu.

Rozhodovací *strom* je neprázdny súvislý acyklický graf, v ktorom medzi každými dvomi vrcholmi existuje práve jedna cesta. Takýto strom možno zakresliť tak, že vrcholy nižšej úrovne sa umiestňujú nad vrcholy vyššej úrovne, resp. vrcholy nižšej úrovne pod vrcholy vyššej úrovne. Vrcholy sa rozvetvujú do ďalších vrcholov a vytvárajú tak štruktúru stromu. Rozhodovacie stromy sa zvyčajne zakresľujú zhora nadol alebo sprava naľavo.

1.1 Štruktúra rozhodovacích stromov

Rozhodovacie stromy predstavujú analógiu s reálnymi stromami v prírode a na základe toho bola aj prevzatá terminológia, a pre rozhodovacie stromy hovoríme raste stromu, jeho vetvení alebo o jeho prerezávaní.

Rozhodovací strom sa skladá zo štyroch základných prvkov – z koreňa stromu, vnútorných vrcholov, listov a orientovaných hrán. Koreň stromu a vnútorné vrcholy označujú jednu konkrétnu vlastnosť (atribút), ktorá sa na danom mieste rozhodovacieho stromu testuje. Každý vrchol predstavuje rozhodovanie podľa jednej vybranej vlastnosti (atribútu) klasifikovaného objektu. Vyberané vlastnosti musia objekty od seba čo najviac odlišovať, aby boli na konci stromu čo najpresnejšie klasifikované.

Orientované hrany vychádzajúce z jednotlivých vrcholov obsahujú predikáty pre daný atribút a takto reprezentujú možné výsledky testovania tohto atribútu v danom vrchole. V rozhodovacom strome z koreňa postupne prebieha vetvenie do ďalších vrcholov (strom rastie). Po určení koreňa, ktorý reprezentuje atribút nesúci najväčšie množstvo informácie, v ďalšom kroku rozdelíme množinu variantov na toľko podmnožín, koľko je hodnôt koreňového atribútu. V každej podmnožine sú varianty s jedinou hodnotou tohto atribútu. Ďalej vyhladáme v každej podmnožine ďalší najvýznamnejší atribút, a takto sa pokračuje pokiaľ nevyčerpáme všetky atribúty.

Vrcholy, ktoré sa už ďalej nedelia, sa označujú ako terminálne vrcholy alebo listy (listové vrcholy, výstupné vrcholy). List stromu indikuje hodnotu cieľovej vlastnosti, označuje teda triedu, ktorou je element označený v prípade, že sa pri klasifikácii dostane v rozhodovacom strome na jeho pozíciu.

1.2 Interpretácia rozhodovacích stromov

Rozhodovacie vrcholy predstavujú zobrazenie fázy realizovaného výberu niektorej možnosti. Je to teda taká fáza rozhodovacieho procesu, v ktorej sa rozhodovací subjekt rozhoduje, ktorý z variantov vyberie (zvyčajne sa zobrazujú vo forme štvorca, resp. obdĺžnika).

¹ Neorientovaným grafom nazývame usporiadanú dvojicu $G = (U, H)$, pre ktorú $U = \{u_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) je konečná neprázdna množina n vrcholov a $H = \{h_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) je množina hrán grafu G , hrany h_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) pritom tvorí množina dvojprvkových podmnožín množiny U (H je ľubovoľná podmnožina množiny všetkých kombinácií druhej triedy prvkov množiny U).

Hrany vychádzajúce z rozhodovacích vrcholov predstavujú alternatívy, ktoré sú predmetom výberu rozhodovacieho subjektu. Takéto rozhodovacie stromy možno nazvať ako rozhodovacie stromy s deterministickou štruktúrou.

Ako príklad jednoduchého rozhodovacieho stromu bez situačných vrcholov môžeme uviesť Obr. 1, ktorý predpovedá na základe pohlavia a spôsobu platby, či zákazník, resp. zákazníčka kúpi elektrický záhradný gril. Je pritom známa množina údajov, ktorej jeden záznam by mohol vyzeráť ako príklad v tabuľke (Tab. 1).

Tab. 1: Príklad rozhodovacieho stromu

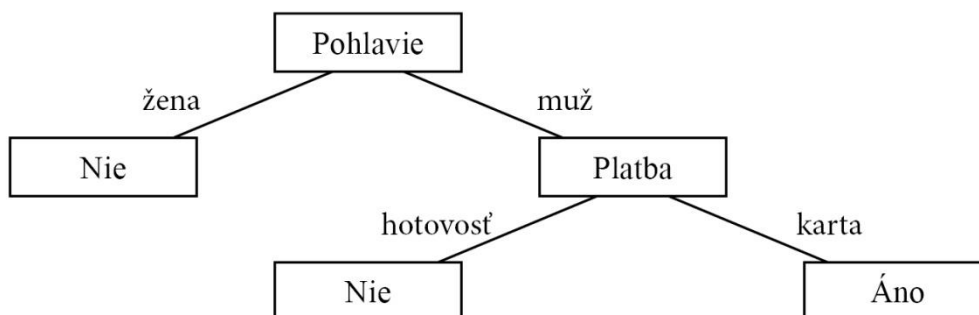
	Atribút		Trieda
Predikát	Pohlavie	Spôsob platby	Nákup grilu
	Muž/Žena	Karta/Hotovosť	Áno/Nie

Zdroj: Vlastné spracovanie

Postup vytvorenia rozhodovacieho stromu:

1. Urči koreňový vrchol a ohodnot' ho atribútom pre delenie; pridaj hranu pre každý hodnotiaci predikát (ak sú známe hodnoty predikátu, tak ju ohodnot'),
2. Pre každú hranu na základe deliaceho predikátu vytvor množinu alternatív a pridaj vrchol pre každú podmnožinu,
3. Ak je splnené ukončovacie kritérium, vytvor list a ohodnot' ho príslušnou triedou; ak nie je splnené, ak teda existuje vrchol, pre ktorý nepatria všetky atribúty do tej istej triedy, opakuj pre tento vrchol bodu 2.

Obr. 1: Jednoduchý príklad rozhodovacieho stromu



Zdroj: Vlastné spracovanie

2 OPTIMALIZÁCIA LINKY PODPORY

Optimalizácia spočíva v zostavení štyroch rozhodovacích stromoch s rôznou štruktúrou, kde každý jeden reprezentuje jeden variant štruktúry linky podpory. Uvedená linka podpory má riešiť problémy, ktoré sú spojené so 14 voľbami a možnosťou prepojenia na operátora. Práve počet 15 možností neumožňuje využiť klávesnicu telefónu a teda je nutné jednotlivé možnosti vhodne zoskupiť. Toto zoskupenie je možné urobiť podľa vlastností jednotlivých volieb.

V rámci optimalizácie je nutné aby boli splnené predpoklady spojené so samotným telefonátom zákazníka:

- Zákazník si vypočuje text danej voľby do konca, teda aj s časťou " ... zvolte číslo X."
- Zákazník zadá svoju voľbu po prvom vypočutí, hneď po skončení textu.
- Zákazník presne vie, čo chce riešiť, nepočúva ďalšie voľby po tom, čo si vypočuje tu, ktorú chce zvoliť.

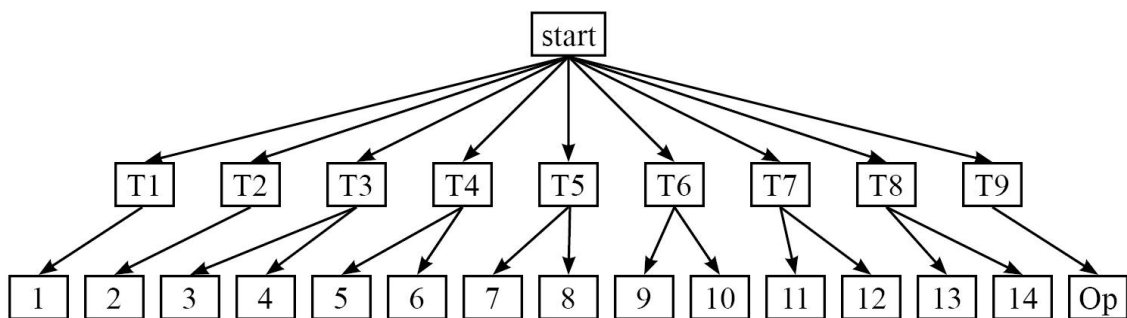
2.1 Varianty zoskupenia jednotlivých volieb

Jednotlivé voľby sú už podľa ich označenia (čísla od 1 po 14 plus voľba operátor) zoradené podľa množstva zákazníkov, ktorí si ich volia. Práve táto skutočnosť ovplyvnila možnosti ich zoskupenia do jednotlivých skupín ako aj fakt, že nie možné vytvoriť rovnaké veľké skupiny.

Variant A

Jedná sa o variant, kde sú využité všetky „tlačidlá“ telefónnej klávesnice. Na každé tlačidlo (T1 až T9) sú priradené dve voľby okrem T1 a T2, ktoré majú po jednej voľbe (1 a 2 sú najčastejšie voľby), vid'. Obr. 2.

Obr. 2: Variant A

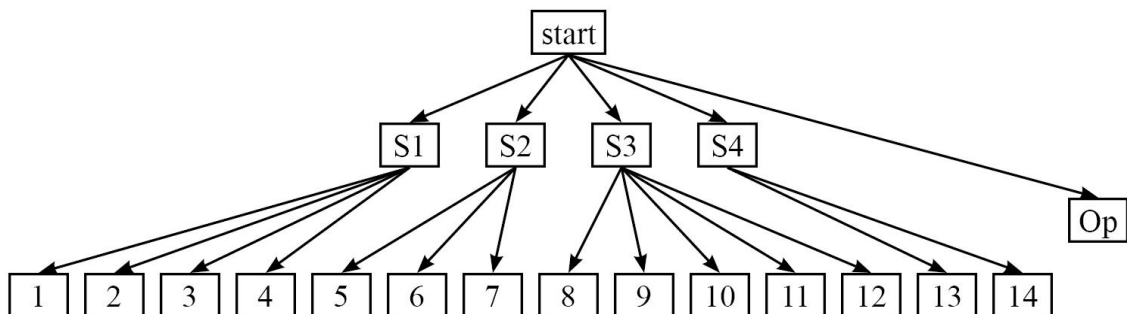


Zdroj: Vlastné spracovanie

Variant B

Ďalší variant využíva zoskupenie jednotlivých volieb do skupín (S1 až S4) podľa problematiky, pod ktorú ich je možné priradiť vzhľadom na problémy ale aj množstvo zákazníkov. Posledná možnosť je voľba spojenia s operátorom ilustrovaná Obr. 3.

Obr. 3: Variant B



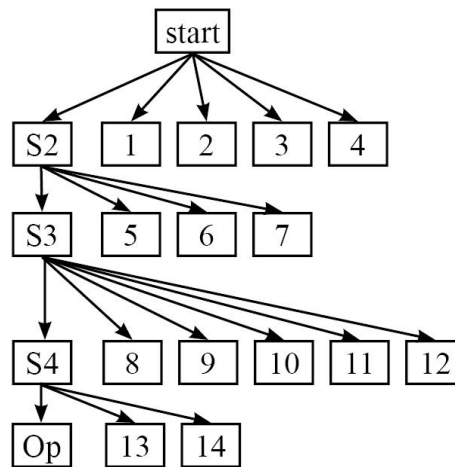
Zdroj: Vlastné spracovanie

Variant C

S využitím zoskupenia volieb do skupín uvažuje aj ďalší variant, ktorý ale neuvažuje so skupinami na jednej úrovni rozhodovacieho stromu ale jednotlivé skupiny zobrazuje

v jednotlivých úrovniach vetvenia. Rozhodovací strom nie je potom vetvený „do šírky“ ale „do dĺžky“ a znázornený v Obr. 4.

Obr. 4: Variant C

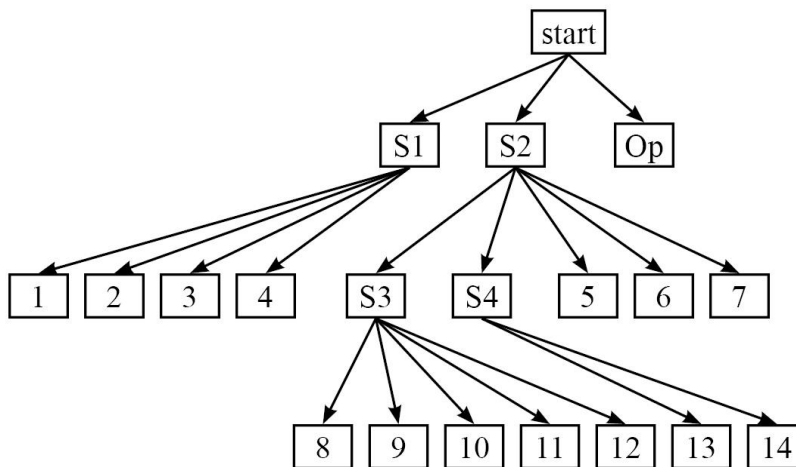


Zdroj: Vlastné spracovanie

Variant C

Posledný variant je kombinácia variantu B a variantu C a zobrazená v Obr. 5.

Obr. 5: Variant D



Zdroj: Vlastné spracovanie

2.2 Čas trvania jednotlivých volieb

Jednotlivé časy, teda dĺžky trvania týchto volieb v sekundách sú v tabuľke v stĺpci „čas voľby“ (Tab. 2). Ďalej tabuľka zobrazuje vypočítanú dĺžku trvania, ktorú zákazník stráví na linke² kým si vypočuje voľbu, kvôli ktorej vola na linku podpory. Jednotlivé časy vychádzajú z výpočtu podľa rozhodovacích stromov.

² Daný čas vychádza z nutnosti splnenia všetkých vyššie spomínaných predpokladov.

Tab. 2: Časy jednotlivých volieb v uvedených variantoch

voľba	čas voľby (sekundy)	čas voľby pre			
		variant A	variant B	variant C	variant D
1	4,1	4,1	10,4	8,7	10,4
2	6,2	10,3	16,6	14,9	16,6
3	4,4	20,3	21,0	19,3	21,0
4	4,9	20,8	25,9	24,2	25,9
5	5,6	27,7	16,5	17,3	29,5
6	6,6	28,7	23,1	23,9	36,1
7	5,0	33,7	28,1	28,9	41,1
8	5,2	33,9	23,2	22,8	23,2
9	6,7	42,7	29,9	29,5	29,9
10	4,2	40,2	34,1	33,7	34,1
11	5,1	49,9	39,2	38,8	39,2
12	5,5	50,3	44,7	44,3	44,7
13	6,2	58,0	30,1	27,7	30,1
14	5,5	57,3	35,6	33,2	35,6
operátor	3,9	55,7	27,8	21,5	14,8

Zdroj: Vlastné spracovanie

Časy trvania textu jednotlivých tlačidiel a skupín sú uvedené v nasledujúcej tabuľke (Tab. 3).

Tab. 3: Časy trvania textu tlačidiel a skupín

text	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	S1	S2	S3	S4
čas (sekundy)	4,1	6,2	5,6	6,2	6,6	7,3	8,8	7	3,9	6,3	4,6	7,1	5,9

Zdroj: Vlastné spracovanie

2.3 Množstvá volajúcich pre jednotlivé voľby

Ďalej je nutné poznať pre potreby optimalizácie množstva volajúcich, ktorí budú voliť dané jednotlivé voľby podľa problému, ktorý chcú riešiť. Jedná sa o simulované množstvá podľa zadaných hypotéz (Tab. 2). Tieto množstvá sú simulované na 5 možných stavoch - počtoch, ktoré majú priebeh od počtu s prioritou na prvých voľbách až po počet s mierne klesajúci množstvom volajúcich v postupnosti podľa voľby (od 1 po 14). Súčet simulovaného množstva bol 1000 volajúcich.

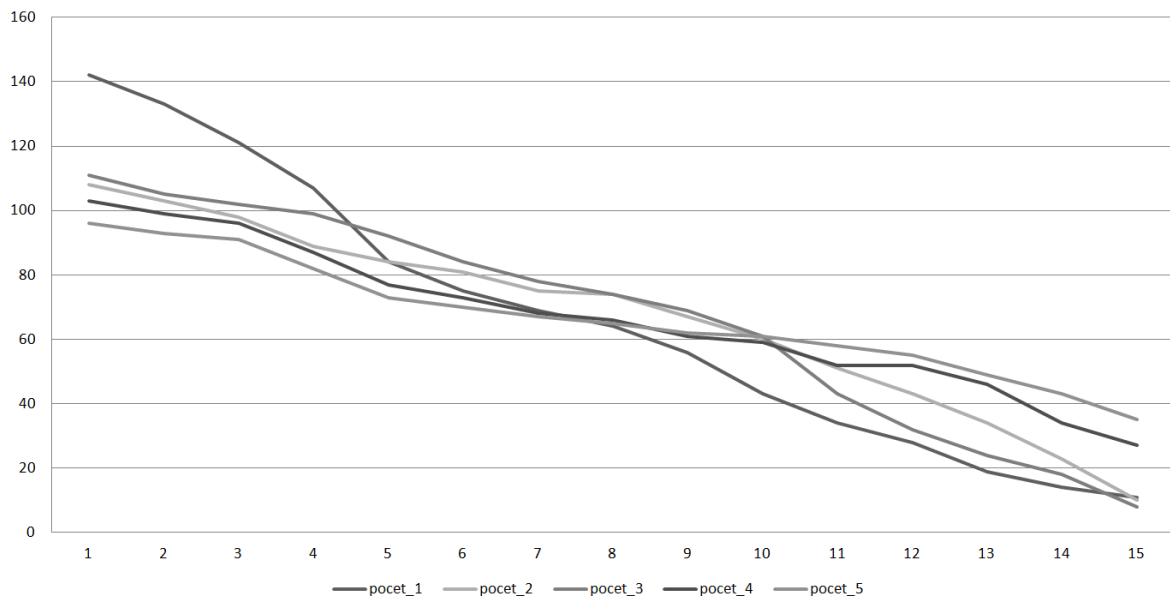
Tieto množstvá možno zobrazit' v prehľadnom grafe pre lepšiu predstavu rozdielnosti. Jednotlivé rady sa odlišujú v množstve volajúcich zobrazených na osy y pre dané voľby zobrazené na osy x (Obr. 6).

Tab. 4: Množstvá volajúcich pre jednotlivé voľby

voľba	čas voľby	množstvo zákazníkov				
		pocet_1	pocet_2	pocet_3	pocet_4	pocet_5
1	4,1	142	108	111	103	96
2	6,2	133	103	105	99	93
3	4,4	121	98	102	96	91
4	4,9	107	89	99	87	82
5	5,6	84	84	92	77	73
6	6,6	75	81	84	73	70
7	5,0	69	75	78	68	67
8	5,2	64	74	74	66	65
9	6,7	56	67	69	61	62
10	4,2	43	60	61	59	61
11	5,1	34	51	43	52	58
12	5,5	28	43	32	52	55
13	6,2	19	34	24	46	49
14	5,5	14	23	18	34	43
operátor	3,9	11	10	8	27	35
spolu		1000	1000	1000	1000	1000

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obr. 6: Množstvá volajúcich pre jednotlivé voľby



Zdroj: Vlastné spracovanie

ZÁVER

Výsledky pre všetky varianty na simulovaných počtoch sú uvedené v nasledujúcej tabuľke, ktorá zobrazuje priemerné časy dĺžky hovoru v jednotlivých variantoch pre všetkých 5 možných počtov (Tab. 5).

Tab. 5: Priemerné časy dĺžky hovoru pre jednotlivé varianty a počty volajúcich

	pocet_1	pocet_2	pocet_3	pocet_4	pocet_5	priemer
variant A	25,350	28,860	27,786	30,264	31,413	28,734
variant B	22,640	24,368	23,815	24,927	25,434	24,237
variant C	21,729	23,566	23,047	23,969	24,425	23,347
variant D	25,461	27,358	27,013	27,410	27,709	26,990

Zdroj: Vlastné spracovanie

Z tabuľky je zrejmé, že variant C, teda rozhodovací strom zostavený prostredníctvom zoskupenia volieb na každej úrovni vetvenia je najlepšou voľbou bez ohľadu na počet volajúcich v jednotlivých voľbách. Teda pre všetky simulované počty boli vo variante C najnižšie priemerné časy a volajúci bol „na linke“ najkratšie.

Použitá literatúra

1. Brezina, I., Čičková, Z., & Gežík, P. (2012). *Sieťová analýza*. Bratislava: EKONÓM.
2. Clark, P. (1990). *Machine Learning: Techniques and Recent Developments*. Retrieved September 04, 2018, from <http://www.cs.utexas.edu/users/pclark/papers/techniques.pdf>
3. Machová, K. (2002). *Strojové učenie princípy a algoritmy*. Košice: ELFA s.r.o..
4. Mlynarovič, V. (2006). *Indukcia rozhodovacích stromov*. Retrieved September 05, 2018 from <http://www2.fiit.stuba.sk/~kapustik/ZS/Clanky0506/mlynarovic/index.html>
5. MLYNAROVIČ, V. (1998). *Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania*. Bratislava: Bratislava: EKONÓM.
6. Pítel, J. (1988). *Ekonomicko-matematické metódy*. Bratislava: Príroda.
7. Tkáč, M. (2016). *Riziko v podniku. Prípadová štúdia 3*, Retrieved September 04, 2018, from <http://history.euke.sk/docs/2016-rozhodovacie-stromy.pdf>

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: +421 2 67 295 821
email: ivan.brezina@euba.sk

Ing. Pavel Gežík, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: +421 2 67 295 820
email: pavel.gezik@euba.sk

VÄZŇOVA DILEMA V OBLASTI BEZDRÔTOVEJ KOMUNIKÁCIE

PRISONER'S DILEMMA IN THE FIELD OF WIRELESS COMMUNICATION

Zuzana Čičková, Matej Zagiba

Abstrakt

V rámci teórie hier možno v súčasnosti študovať širokú paletu rôznych typov hier, ktoré možno využiť v rôznych aplikačných oblastiach. V mnohých rozhodovacích situáciách si však aj naďalej vystačíme s formuláciou základných typov hier. Tento príspevok poukazuje na možnosť použitia známej hry väzňova dilema v oblasti bezdrôtovej komunikácie, pričom okrem terminologického zosúladenia týchto dvoch oblastí sa tiež poukazuje na to, ako možno za týchto podmienok predikovať správanie sa subjektov. Budeme prezentovať bimaticovú hru, kde hráčov budú reprezentovať dve zariadenia, pričom každé z nich chce poslať paket pomocou druhého hráča, pričom budeme uvažovať s nákladmi na preposielanie paketov.

KLúčové slová: bezdrôtová komunikácia, teória hier, väzňova dilema

Abstract

As part of game theory, a wide variety of different types of games can now be explored in all sorts of application areas. In many decision making situations, however, the formulation of basic types of games is sufficient. This paper points to the possibility of using a well-known game of prisoner's dilemma in the field of wireless communication. In addition to the terminological alignment of these two areas, we also demonstrate how the behavior of subjects can be predicted under these conditions. We will present a bi-matrix game where the players will represent two devices, each of which wants to send a packet with assistance of the other player, while considering the cost of packet forwarding.

Keywords: wireless communication, game theory, prisoner's dilemma

1 ÚVOD

Teória hier vo svojej podstate skúma konfliktné rozhodovacie situácie (hry) viacerých účastníkov (hráčov). Táto vedná disciplína aplikáciou rôznych typov hier zasahuje do rôznych oblastí. Ako príklad možno okrem ekonómie uviesť politológiu, psychológiu, kognitívne vedy a podobne. Tento príspevok poukazuje na možnosť použitia známej hry väzňova dilema v oblasti bezdrôtovej komunikácie. Príspevok je štruktúrovaný takto: V prvej časti uvedieme stručné informácie o hrách s nenulovým súčtom vo všeobecnosti. Potom si priblížime hru väzňova dilema. V druhej časti sa budeme venovať novej aplikácii tejto hry v oblasti bezdrôtovej komunikácie.

Táto oblasť pritom súvisí s tzv. internetom vecí (Internet of Things – IoT), čo je pomerne nový pojem používaný pojem v oblasti informačných a komunikačných technológií (ICT). V podstate ide o sieť prepojených objektov (vecí - napr. senzory teploty, vniknutia, vlhkosti, elektrickej spotreby a podobne), ktoré sú jednoznačne adresovateľné s tým, že táto sieť je založená na štandardizovaných komunikačných protokoloch umožňujúcich výmenu a zdieľanie dát a informácií. Prepojené objekty majú často mimoriadne obmedzené zdroje

napríklad v Alphan a Baar (2010), Crawford a kol. (2007), Felegyhazi a Hubaux (2007), Mookherjee a Sopher (1994), Rontidis a kol. (2015) a podobne.

2 BIMATICOVÉ HRY A VÄZŇOVA DILEMA

Bimaticové hry sú základným typom hier (Goga, 2013, Chobot a kol., 1991). V hre vystupujú dvaja účastníci (hráči). Každý z hráčov volí nezávisle (bez informácie o voľbe protihráča) jednu z konečného počtu variantov správania (stratégií). Predpokladá sa, že hráči sú inteligentní a majú úplné informácie o konfliktnej situácii. Zájmy hráčov nie sú diametrálne protikladné, t.j. zisk jedného z hráčov nemusí byť sprevádzaný stratou druhého a hráči sú inteligentní. Otázkou je akú stratégiu má hráč zvoliť tak, že voľbou inej stratégie nemôže zvýšiť svoj zisk. Bimaticovú hru možno formalizovať takto: Nech $P=\{1,2\}$ je množina hráčov, z ktorých každý má konečnú množinu stratégií (X – hráč 1, Y – hráč 2}, t.j. hráč 1 volí $\mathbf{x} \in X$, hráč 2 volí $\mathbf{y} \in Y$. Množinu všetkých výsledkov hry možno označiť ako $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y$. Jednotlivé prvky množín X a Y možno usporiadať pomocou konečného počtu prirodzených čísel (prvky množiny X : $i = 1, 2, \dots, m$ a prvky množiny Y : $j = 1, 2, \dots, n$). Hodnoty hry pre hráča 1 možno zapísať do matice $\mathbf{A}_{m \times n} = \{a_{ij}\}$, kde a_{ij} udáva platbu hráča pri výsledku (i, j) . Výsledky hry pre hráča 2 zapisujeme do matice $\mathbf{B}_{n \times m} = \{b_{ji}\}$, kde b_{ji} udáva platbu hráča 2 pri výsledku (i, j) .

Riešenie bimaticových hier spočíva v identifikácii rovnovážnych stratégií pre oboch hráčov. Stav nazveme rovnovážnym, ak v tomto stave má systém za určitých podmienok tendenciu zotrvať (za vyhovujúci výsledok možno považovať iba taký súbor stratégií, ktorý sa sám vynucuje tým, že prípadné úsilie o jednostranné porušenie vedie automaticky k poškodeniu hráča, ktorý sa o túto zmenu pokúsi).

Najjednoduchšie riešenie bimaticových hier je riešenie v čistých stratégiách, čo je taká dvojica čistých stratégií (i_0, j_0) , že pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$a_{i_0, j_0} \geq a_{i, j_0} \quad \text{a} \quad b_{j_0, i_0} \geq b_{j_0, i} \quad (1)$$

t.j. nájdeme prvky s maximálnymi hodnotami v maticiach \mathbf{A} a \mathbf{B} .

Môžu nastať tri prípady:

- 1) Existuje jeden rovnovážny bod – jednoznačne určíme čisté optimálne stratégie hráčov
- 2) Existuje viac rovnovážnych bodov, pričom však len jedno nie je dominované - jednoznačne určíme čisté optimálne stratégie hráčov
- 3) Existuje viac rovnovážnych bodov, pričom však minimálne dve nie sú dominované – neexistuje rovnovážny bod v čistých stratégiách

V prípade neexistencie riešenia v čistých stratégiách hľadáme riešenie v stratégiách zmiešaných. Zmiešané rovnovážne stratégie možno identifikovať napríklad riešením úlohy nelineárneho programovania (Čičková a Zagiba, 2017).

Väzňova dilema je jednou z najznámejších hier v rámci teórie hier. Hru možno jednoducho charakterizovať takto: jedná sa o bimaticovú hru dvoch hráčov (1 a 2), každý má k dispozícii dve stratégie (nazveme ich *spolupráca* a *zrada*), pričom matica platieb \mathbf{A} je takáto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ pričom pre prvky tejto matice platí: } a_{12} < a_{22} < a_{11} < a_{21}.$$

Matica platieb \mathbf{B} pre hráča 2 je rovnaká ako matica platieb \mathbf{A} . Takúto hru možno charakterizovať aj formou bimaticy (tabuľka 1).

Tabuľka 1: bimatica platieb

		Hráč 2	
		<i>spolupráca</i>	<i>zrada</i>
Hráč 1	<i>spolupráca</i>	a_{11}, a_{11}	$a_{12}, (a_{21})$
	<i>zrada</i>	$(a_{21}), a_{12}$	$(a_{22}), (a_{22})$

Rovnovážny bod v čistých stratégiách možno identifikovať na základe (1). Takéto stratégie sú v tabuľke 1 vyznačené (). Je zrejme, že rovnovážny bod tak zodpovedá stratégii *zradiť* pre oboch hráčov, teda aj keď najväčšie výplaty hráčov sú v prípade ich vzájomnej spolupráce, táto stratégia nie je rovnovážnym bodom hry.

3 VÄZŇOVA DILEMA V OBLASTI BEZDRÔTOVEJ KOMUNIKÁCIE

V tejto časti sa zameriame na to, ako možno hru väzňova dilema aplikovať v oblasti bezdrôtovej komunikácie, pričom budeme vychádzať z práce (Felegyhazi a Hubaux, 2007).

Hra je známa ako forwarder's dilemma. Hráčov v tomto kontexte budú reprezentovať dve zariadenia 1 a 2 (používatelia alebo prevádzkovatelia sietí, ktorí disponujú svojimi zariadeniami), pričom každé z nich chce poslať paket na miesto určenia, pričom však chce použiť aj druhého hráča (forwarder). V hre budeme uvažovať s nákladmi na preposielanie paketov. V bežných sieťových prostrediach obvykle nie sú náklady na preposielanie paketov významné, ale v prípade bezdrôtovej komunikácie sú náklady na vyslanie paketu omnoho vyššie. V prípade zariadení s napájaním na akumulátor je dilema jasná - ak nebudú preposielať pakety, všetky zariadenia budú mať problémy s komunikáciou. Ak budú preposielať pakety, akumulátory sa rýchlo vybijú.

Označme náklady na preposlanie paketu $c \in (0,1)$. Ak hráč 1 chce poslať paket cez hráča 2, hráčovi 1 s týmto vznikajú náklady c . Je však umožnená komunikácia medzi hráčom 2 a miestom určenia pre doručenie paketov a hráč 2 vykazuje zisk vo výške 1. Hra je symetrická, čiže analogické pravidlá platia, ak chce hráč 2 poslať paket cez hráča 1. Teda v prípade, že obaja hráči posielajú pakety, výplaty sú pre oboch $1-c$. Druhou stratégiou hráčov je paket neposlať. Potom ak hráč 1 posielal paket cez hráča 2 a tento paket cez hráča 1 neposielal, hráč 1 má platbu $-c$ a hráč 2 má zisk 1 a naopak. Ak obaja hráči nevykonajú žiadnu akciu, výplaty sú pre oboch 0. Každý z hráčov má takto 2 stratégie (*poslať*, *neposlať*). Výplaty hráčov možno charakterizovať vo forme bimaticy (tabuľka 2).

Tabuľka 2: bimatica platieb

		Hráč 2	
		<i>poslať</i>	<i>neposlať</i>
Hráč 1	<i>poslať</i>	$1-c, 1-c$	$-c, (1)$
	<i>neposlať</i>	$(1), -c$	$(0), (0)$

Matice platieb hráčov sú v tomto prípade $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-c & -c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, teda platí: $-c < 0 < 1-c < 1$, teda

$a_{12} < a_{22} < a_{11} < a_{21}$. Hra je typu väzňova dilema. Spor je jasný. Aj keď rovnovážnou stratégiou pre oboch hráčov je pakety neposlať (v tabuľke 2 je rovnovážna stratégia značená $(0), (0)$), zrejme najvýhodnejšou stratégiou je pakety poslať (stratégia $1-c, 1-c$). S posielaním paketov je spojená najvyššia platba vo výške $2(1-c)$.

4 ZÁVER

Tento príspevok bol zameraný na aplikáciu hry známej ako väznova dilema v oblasti bezdrôtovej komunikácie. Zameranie teórie hier na analýzu konfliktných rozhodovacích situácií medzi živými aj neživými subjektmi umožňuje jej použitie aj v tejto oblasti. Hráčov tu reprezentujú dve zariadenia (teda používatelia alebo prevádzkovatelia sietí, ktorí týmito zariadeniami disponujú). Hráč používa protihráča na preposielanie paketu na miesto jeho určenia, pričom sme uvažovali s nákladmi na preposielanie paketu. Z analýzy rovnovážneho bodu je, obdobne ako v hre väznova dilema, zrejмый konflikt medzi rovnovážnymi stratégiami hry a najvýhodnejšími stratégiami správania sa pre oboch hráčov.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17 *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska*

Použitá literatúra

1. ALPHAN, T., BAAR, T. 2010. Network Security: A Decision and Game-Theoretic Approach. New York: Cambridge University Press.
2. CRAWFORD, V. P, GNEEZY, U., ROTTENSTREICH, Y. 2007. The Power of Focal Points Is Limited: Even Minute Payoff Asymmetry May Yield Large Coordination Failures. American Economic Review, 98(4), 1443–1458.
3. ČIČKOVÁ, Z., ZAGIBA, M. 2017. Sieťová bezpečnosť a teória hier. Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi XII [elektronický zdroj]. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
4. FELEGYHAZI, M., HUBAUX, J.P. 2007. Game Theory in Wireless Networks: A Tutorial. EPFL Technical report: LCA-REPORT-2006-002.
5. GOGA, M. 2013. Teória hier. Bratislava: Iura Edition.
6. CHOBOT, M., TURNOVEC, F., ULÁŠÍN, V. 1991. Teória hier a rozhodovania. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa.
7. MOOKHERJEE, D., SOPHER, B. 1994. Learning Behavior in an Experimental Matching Pennies Game. Games and Economic Behavior. 7 (1), 62-91, ISSN 0899-8256
8. RONTIDIS, G., PANAOUSIS, E., LASZKA, A., DAGIUKLAS, T., MALACARIA, P., ALPCAN, T. 2015. A game-theoretic approach for minimizing security risks in the Internet-of-Things. IEEE International Conference on Communication Workshop (ICCW), London.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: cickova@euba.sk

Mgr. Matej Zagiba

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mlynska dolina F1

842 48 Bratislava

Tel: (421 2) 60 295 127

email: Matej.Zagiba@uniba.sk

APLIKACE BINÁRNÍ KLASIFIKACE NA DATA AKCIOVÉHO TRHU APPLICATION OF A BINARY CLASSIFICATION METHOD ON STOCK MARKET DATA

*Marek Dvořák*¹

Abstract In this paper, we applied one particular method of binary classification introduced by Dvořák and Fiala [2] on stock market index data. We used receiver operating characteristic curve and area under the curve to measure model strength. This method has proven to be less effective than hoped in this particular application, although its strength may be in other applications, particularly when low variance of estimated parameters is needed.

Keywords: *binary classification, stock market, time series, prediction*

Abstrakt V tomto článku je na datech z burzy cenných papírů aplikována metoda představená Dvořákem a Fialou [2]. Pro ohodnocení síly modelu jsme využili křivku ROC a plochu pod touto křivkou (AUC). Tato metoda v této konkrétní aplikaci poskytuje výsledky, které jsou efektivní méně, než jsme doufali, i když její přednosti mohou ležet jinde, jako například je-li potřeba minimální variability odkadnutých parametrů.

Klíčová slova: *binární klasifikace, burza cenných papírů, časová řada, předpověď*

1 INTRODUCTION

Predicting time series is always a difficult task. There are also multiple approaches one could undergo when attempting to tackle this problem. One could construct an intricate model of reality (Zhang et al [4]), leaving only a few variables to be estimated from real data. Quite opposite approach is to not make assumptions about reality and let the model estimate many variables surrogating the reality itself (Kim et al [3]). One could make a decision between estimating the continuous prediction of exact quantitative value or just a binary prediction on rise/fall (Dutta et al [1]).

When it comes to estimating something as seemingly random as stock market indices, the task is even harder. If we consider the stock market to be an effective market, we might consider our task to be even impossible. Thus any predictions on stock market assume its ineffectivity. So considering all that, when it comes to predicting stock market indices, our expectations about the quality of the result have to be reasonable. If we somehow miraculously discovered a method for easy stock market prediction, the ineffective market would eventually include it in itself, becoming more effective in the process and rendering our method useless, but giving us fame and fortune in the meantime.

Considering all this, most models trying to predict stock market indices are more descriptive in the nature, caring less about the prediction itself, and concentrating more on trying to find some interesting insight of the time series data itself.

¹The research project was supported by Grant No. IGA F4/57/2017 of the Internal Grant Agency, Faculty of Informatics and Statistics, University of Economics, Prague.

The model used in this paper is very simple. It belongs to the family of linear classifiers. And we use it to predict univariate time series. While we use multiple stock indices, they are not utilized in VAR sense, but only as a method to gain more training samples. The goal of this paper to implement a real world application of a method introduced by Dvořák and Fiala [2] and see how it behaves on one particular case.

2 MODEL

We used model introduced by Dvořák and Fiala [2]. This model constructs a linear hyperplane through the data. The equations describing the model are 1 through 9.

$$EX_j^+ = \frac{1}{n^+} \sum_{i^+=1}^{n^+} X_{i^+,j} \quad (1)$$

$$EX_j^- = \frac{1}{n^-} \sum_{i^-=1}^{n^-} X_{i^-,j} \quad (2)$$

$$A = [EX_1^-, \dots, EX_j^-, -1] \quad (3)$$

$$B = [EX_1^+, \dots, EX_j^+, 1] \quad (4)$$

$$C = \frac{A+B}{2} \quad (5)$$

$$Z = [0, \dots, 0, 1] \quad (6)$$

$$N = (B - A)((B - A)Z) - Z(B - A)^2 \quad (7)$$

$$c = NC \quad (8)$$

$$[b_0, b_1, \dots, b_j] = \left[\frac{c}{N_{j+1}}, \frac{N_1}{N_{j+1}}, \dots, \frac{N_j}{N_{j+1}} \right], \quad (9)$$

where X_j^+ are all positive examples in data, X_j^- are all negative examples in data and c is arbitrarily chosen identification constant and b_0, \dots, b_j are estimated parameters.

3 APPLICATION

3.1 Data

For our experiment, we used data about stock indices from Nasdaq acquired using *quantmod* package in *R*. More precisely, we used 1st Source Corporation (SRCE), Twenty-First Century Fox, Inc. (FOX), 1-800-FLOWERS.COM, Inc. (FLWS), 1347 Property Insurance Holdings, Inc. (PIH),

1st Constitution Bancorp (FCCY), Twenty-First Century Fox, Inc. (FOXA), 21Vianet Group, Inc. (VNET), 2U, Inc. (TWOU), 3Pea International, Inc. (TPNL). We also used Composite indices S&P 500 (GSPC), Dow Jones Industrial Average (DJI) and NASDAQ Composite (IXIC). Closing adjusted price was used out of all of them.

All the indices i in time t were then logarithmized and differentiated using simple equation 10.

$$\Delta index_{i,t} = \ln index_{i,t} - \ln index_{i,t-1} \quad (10)$$

Dependant variable was then constructed from this logarithmic difference as a simple sign function 11 signaling 1, when the index i in time t rose in value and 0 when the index fell in value or its value stayed the same.

$$Y_{i,t} = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta index_{i,t} \leq 0 \\ 1 & \text{if } \Delta index_{i,t} > 0 \end{cases} \quad (11)$$

Explanatory variables were acquired for each lag of length m as simple lagged variables from unquantized logarithmic differences. We constructed 7 lagged variables using $m = 1, \dots, 7$.

$$X_{i,t,m} = \Delta index_{i,t-m} \quad (12)$$

This data was then used as an input for the model. The whole set was also split to training and testing data. Two batches were used. First was using FOX index in testing data and the rest of indices in training, the second batch was using SRCE index in testing and the rest in trainings.

3.2 Model

The described model was then used to acquire parameters of model linear hyperplane. We chose to use $c = 1$ as the model's free parameter. The model was then used to make predictions Y'_t . As the predictions are defined on the set $(-\infty; +\infty)$, they were also squashed using logistic function 13.

$$lY'_t = \frac{1}{1 + e^{-Y'_t}} \quad (13)$$

The estimated variables are in table 1.

Variable	Batch 1	Batch 2
Intercept	0.1533454	0.1387147
lag 1	-880.5196383	-914.7514425
lag 2	-56.6327792	-57.3274863
lag 3	-255.2641881	-244.3400773
lag 4	-120.8764208	100.7377934
lag 5	-74.4663352	-48.7654409
lag 6	-29.9690326	-18.2127459

Table 1: Table with estimated parameters on batch 1 and batch 2

The predictions were then used to plot receiver operating characteristic curve (ROC curve) and calculate area under this curve (AUC) to estimate model strength.

The ROC curve for the first batch where the test data was index FOX is in the figure 1. The area under this curve is $AUC_{FOX} = 0.5017297$.

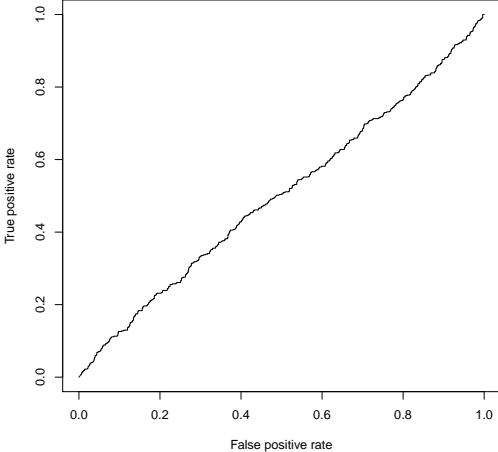


Figure 1: ROC curve for FOX testing data.

The ROC curve for the second batch where the test data was index SRCE is in the figure 2. The area under this curve is $AUC_{FOX} = 0.5062954$.

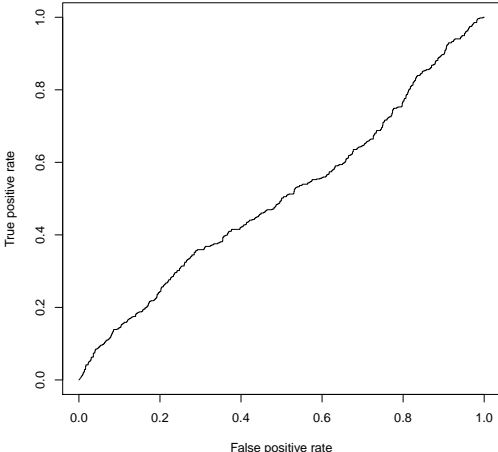


Figure 2: ROC curve for SRCE testing data.

4 CONCLUSION

As we can see, this application brought results which were less than satisfactory. Both ROC's lie more on less on a diagonal, which is confirmed with AUC's, which are dangerously close to

0.5, which indicates that the model in this particular application does less than stellar. Perhaps the explanatory variables were not particularly suited for this application. Maybe if we included more of them. Most likely reason is that this model has other strengths. And that is that the variability of the estimation is quite low, with the downside if introducing bias.

Subsequent work might include more explanatory variable preprocessing, so they would be better suited for this particular model. Also it might be worth considering to use dataset with less noise than are stock market indices.

References

- [1] DUTTA, A., BANDOPADHYAY, G. a SENGUPTA, S. (2012). Prediction of stock performance in indian stock market using logistic regression. *International Journal of Business and Information*, **7**(1).
- [2] DVOŘÁK, M. a FIALA, P. (2018). Parameter estimation of regression model with quantized variables. In *36th International Conference Mathematical Methods in Economics*, pages 76–80.
- [3] KIM, K.-J. a HAN, I. (2000). Genetic algorithms approach to feature discretization in artificial neural networks for the prediction of stock price index. *Expert systems with Applications*, **19** (2), 125–132.
- [4] ZHANG, X., FUEHRES, H. a GLOOR, P. A. (2011). Predicting stock market indicators through twitter “i hope it is not as bad as i fear”. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, **26**, 55–62.

Contact:

Ing. Marek Dvořák
University of Economics, Prague
Department of Econometrics
W. Churchil Sq. 4
130 67 Prague 3
Czech Republic
email: marek.dvorak@vse.cz

MODELY KOORDINACE TECHNOLOGIÍ

MODELS OF TECHNOLOGY COORDINATION

Petr Fiala, Renata Majovská

Abstrakt

Přijímání nových technologií a techniky v sítích nasvědčují tomu, že individuálně racionální rozhodování, týkající se technologií a techniky, může vést, při existenci síťových externalit, ke kolektivně neefektivním výsledkům. Použití konvertorových technologií však může tyto výsledky změnit. Konvertory umožňují, aby vznikly původně nedosažitelné síťové externality, a v některých případech zabráňují uzamčení. Tyto otázky hrají důležitou roli zejména při řízení vývoje počítačových sítí a internetových standardů.

***Klíčová slova:** technologie, koordinace, modely*

Abstract

Adopting new technologies and networking techniques suggests that individually rational decision-making on technology and technology can lead to collectively inefficient results in the presence of network externalities. However, the use of converter technology may change these results. Converters allow for originally unattainable network externalities and, in some cases, prevent locking. These issues play an important role in managing the development of computer networks and Internet standards.

***Keywords:** technology, coordination, models*

1 ÚVOD

U konkurenčních síťových technologií dochází ke konkurenčnímu boji o tržní podíl podle několika charakteristik, včetně velikosti sítě. Počítače mají vlastní hodnotu, umožňující vykonávat řadu aktivit samostatně, navíc mají síťovou hodnotu, která roste s počtem propojených počítačů do sítě. Síťové produkty vykazují síťové externality, které je možno definovat jako přírůsteky užítku, který uživatel získá používáním produktu, když počet uživatelů stejného typu produktu roste (Fiala, 2016). Ačkoliv pozitivní externality dosahují největší pozornosti v literatuře o sítích, mohou vzniknout i síťové záporné externality (Bobzin, 2006, Shy, 2001). Problém uzamčení při používání nějaké techniky vzniká tehdy, když tuto techniku používá větší počet uživatelů než jinou techniku, přestože tato jiná technika může mít vyšší vlastní hodnotu. Přepnutí na jinou techniku může být vyvoláno její rostoucí síťovou hodnotou, přestože její vlastní hodnota je nižší. Přepnutí na jinou techniku však také vyžaduje určité náklady, záleží na jejich výšce a přírůstku hodnoty, který tato změna přinese. Vzhledem ke komplementárnosti jednotlivých komponent informačních a komunikačních systémů je vyžadována jejich kompatibilita. To znamená, že komplementární komponenty musí pracovat se stejnými standardy. To vytváří problém koordinace, jak se firmy dohodnou na standardech. Pro analýzu problému výběru technologií v sítích použijeme jednoduché modely teorie her (Dlouhý, Fiala, 2015), jako je koordinační hra, Arthurův model a jejich modifikace a zobecnění.

2 KOORDINAČNÍ HRA

Použijeme koordinační hru pro analýzu koordinace výběru technologie. Předpokládejme, že dvě firmy 1 a 2 stojí před výběrem ze dvou technologií A a B . Hodnoty technologií pro firmy jsou zachyceny v tabulce. Obě technologie vykazují síťové externality, kdy se předpokládá, že pro hodnoty platí

$$a > c, b > d.$$

Tab. 1. Hodnoty technologií pro firmy

		Firma 2	
		Technologie A	Technologie B
Firma 1	Technologie A	$a; a$	$d; c$
	Technologie B	$c; d$	$b; b$

Tabulkou je definována tzv. koordinační hra, kdy je cílem koordinovat obě firmy tak, aby používaly stejnou technologii, kdy obě firmy dosahují vyšší hodnoty, než když každá používá jinou technologii. Jedná se vlastně o nekooperativní hru dvou hráčů (firmy 1 a 2) se dvěma strategiemi (výběr technologie A a B). Základní koncepcí řešení nekooperativních her je nalezení tzv. Nashovy rovnováhy, kdy při změně strategie kteréhokoliv z hráčů, za předpokladu neměnnosti strategií ostatních hráčů, se tento hráč může jedině poškodit. V koordinační hře existují dvě Nashova rovnovážná řešení; rovnováha (A, A) – obě firmy vyberou technologii A a rovnováha (B, B) – obě firmy vyberou technologii B .

Existence většího počtu rovnovážných řešení vyvolává otázku, jak budou firmy koordinovat svoje aktivity. Pokud technologie A představuje novou technologii a technologie B starou, může dojít k následujícím dvěma pozorovaným typům selhání trhu. Pokud platí, že hodnota $a > b$ a je vybráno rovnovážné řešení (B, B) , tzn. firmy zůstanou u hůře hodnocené staré technologie B , potom se hovoří o přílišné setrvačnosti (excess inertia). Pokud platí, že hodnota $b > a$ a je vybráno rovnovážné řešení (A, A) , tzn. firmy přejdou k hůře hodnocené nové technologii A , potom se hovoří o přílišné pohyblivosti (excess momentum).

Obě symetrická rovnovážná řešení mohou být vhodnými kandidáty pro výběr. Dalším zjemněním pojmu Nashova rovnovážného řešení jsou paretoovsky dominantní a rizikově dominantní rovnovážné řešení. Rovnovážné řešení je paretoovsky dominantní, když neexistují jiné strategie, pro které alespoň pro jednoho hráče je hodnota řešení lepší a pro ostatní hráče není horší. Rovnovážné řešení je rizikově dominantní, jestliže nejlepší odpověď obou hráčů zůstává nezměněna, dokud protihráč nevybere rovnovážnou strategii s pravděpodobností alespoň 0,5 (Harsanyi, Selten 1988).

Pokud platí

$$a > b > c > d > 0 \text{ a } (b - d) > (a - c),$$

potom rovnovážné řešení (A, A) je paretoovsky dominantní a rovnovážné řešení (B, B) je rizikově dominantní.

3 ARTHURŮV ZÁKLADNÍ MODEL

Uvažujme základní Arthurův model (Arthur, 1989) se dvěma firmami 1 a 2 a dvěma technologiemi A a B . Každá firma činí rozhodnutí o koupi technologie podle počáteční preferované vlastní hodnoty technologie a podle síťových externalit, spojených s každou technologií. Tyto hodnoty jsou shrnuty v Tab. 2, kde a_1 je původní preferovaná hodnota

technologie A pro firmu 1, n_A je velikost sítě, používající technologii A, s je parametr síťové hodnoty. Analogická označení platí pro firmu 2 a technologii B.

Tab. 2. Hodnoty pro výběr technologie

	Technologie A	Technologie B
Firma 1	$a_1 + s n_A$	$b_1 + s n_B$
Firma 2	$a_2 + s n_A$	$b_2 + s n_B$

Jsou uvažovány rostoucí výnosy z rozsahu, takže parametr s je vždy kladný. Firma 1 původně preferuje technologii A a firma 2 původně preferuje technologii B, takže platí

$$a_1 > b_1 \text{ a } a_2 < b_2.$$

Podle předpokladů Arthurova modelu nakupuje v každé časové periodě jedna firma jednu technologii. Firma i přichází na trh v periodě t_i . Typ přicházející firmy je náhodnou složkou v modelu, obě firmy mají stejnou pravděpodobnost příchodu. Výběr technologie firmou i je určen kombinací tří faktorů:

- typem firmy (náhodná složka),
- počáteční preferovanou hodnotou technologie,
- počtem předchozích výběrů každé technologie.

Model předpokládá dvousložkovou hodnotu technologie. První složka je vlastní hodnota technologie, druhá složka je tvořena síťovou hodnotou.

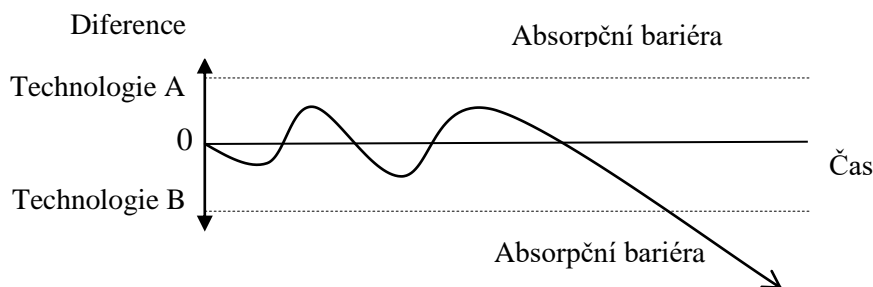
Arthur ukazuje, že za těchto předpokladů budou uživatelé uzamčeni v jedné z technologií. Tento výsledek je možno snadno odvodit z výplatní matice v Tab. 2. Firma 1 bude na začátku preferovat technologii A, vzhledem k počáteční preferované vlastní hodnotě a žádné síťové hodnotě. Firma 1 přepne na technologii B, jakmile začne platit

$$b_1 + s n_B > a_1 + s n_A.$$

Nerovnici je možno přepsat do tvaru tzv. přepínací nerovnosti

$$n_B - n_A > \frac{(a_1 - b_1)}{s}.$$

Tato nerovnost společně s obdobnou nerovností pro firmu 2 určuje absorpční bariéry. Jakmile difference velikosti sítě s technologií B překročí velikost sítě s technologií A o určitou hodnotu, určenou počátečními preferovanými hodnotami a parametrem síťové hodnoty s , budou uživatelé uzamčeni technologií B, která se stává standardem. Firma 1 se vzdá technologie A, jestliže velikost sítě s technologií B je taková, že přínos z technologie B převyší původní preferovanou hodnotu pro firmu 1. V tomto okamžiku budou již obě firmy 1 a 2 kupovat jen technologii B a velikost sítě s technologií A se nebude zvětšovat. Tato analýza je vyjádřena graficky na Obr. 1.



Obr. 1. Absorpční bariéry

4 ZOBECNĚNÍ ARTHUROVA MODELU

Základní Arthurův model umožňuje určitá zobecnění. Uvedeme model s možnostmi použití konvertorů tak, aby se technologie staly kompatibilní. Zavedením konvertorů, které umožňují kompatibilitu mezi technologiemi, dochází k zajímavým změnám Arthurova modelu. Zavedme parametry kompatibility k_{AB} a k_{BA} , z intervalu mezi nulou a jednou, které měří kompatibilitu technologie A s technologií B , respektive kompatibilitu technologie B s technologií A . Hodnoty jsou shrnuty v Tab. 3., ze kterých odvodíme některé vztahy pro absorpční bariéry.

Tab. 3. Hodnoty pro výběr technologie s konvertory

	Technologie A	Technologie B
Firma 1	$a_1 + s n_A + k_{AB} s n_B$	$b_1 + s n_B + k_{BA} s n_A$
Firma 2	$a_2 + s n_A + k_{AB} s n_B$	$b_2 + s n_B + k_{BA} s n_A$

Předpokládejme reciproční konvertor, který umožňuje kompatibilitu v obou směrech a platí $k_{AB} = k_{BA}$. Potom má přepínací nerovnost tvar

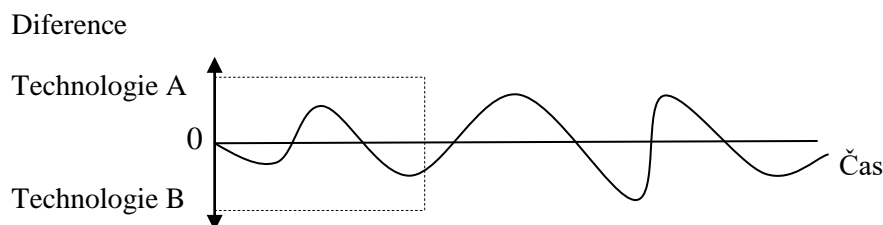
$$n_B - n_A > \frac{(a_1 - b_1)}{s(1 - k_{AB})}.$$

Ve srovnání se základním modelem Arthura jsou absorpční bariéry vynásobeny koeficientem

$$\frac{1}{(1 - k_{AB})}.$$

Podle hodnoty parametru kompatibility k_{AB} mohou nastat následující situace:

- Pro zcela nekompatibilní technologie, parametr kompatibility $k_{AB} = 0$, dostáváme základní Arthurův model.
- Pro částečně kompatibilní reciproční konvertor, parametr kompatibility $0 < k_{AB} < 1$, jsou absorpční bariéry širší než u situace bez konvertorů. S rostoucí hodnotou parametru kompatibility k_{AB} se absorpční bariéry rozšiřují.
- Pro plně kompatibilní reciproční konvertor, parametr kompatibility $k_{AB} = 1$, budou absorpční bariéry odstraněny a nedojde k uzamčení uživatelů nějakou technologií. Situaci je možno zachytit graficky na Obr. 2.



Obr. 2. Plně kompatibilní konvertor

Obdobnou analýzu můžeme provést pro obousměrný konvertor, kde parametry kompatibility nejsou stejné ($k_{AB} \neq k_{BA}$).

Zkoumejme dále situaci při zavedení jednosměrného konvertoru. Předpokládejme, že technologie A má pomocí jednosměrného konvertoru přístup k technologii B ($0 < k_{AB} \leq 1$) a technologie B nemá přístup k technologii A ($k_{BA} = 0$).

Podle hodnoty parametru kompatibility k_{AB} mohou nastat následující situace:

- Pro částečně kompatibilní jednosměrný konvertor, parametr kompatibility $0 < k_{AB} < 1$:
Firma 1 přepne z původně preferované technologie A na technologii B , jakmile začne platit

$$(1 - k_{AB}) n_B - n_A > \frac{(a_1 - b_1)}{s}.$$

Firma 2 přepne z původně preferované technologie B na technologii A , jakmile začne platit

$$n_A - (1 - k_{AB}) n_B > \frac{(b_2 - a_2)}{s}.$$

Absorpční bariéra pro technologii A se přibližuje a absorpční bariéra pro technologii B se vzdaluje.

- Pro plně kompatibilní jednosměrný konvertor, parametr kompatibility $k_{AB} = 1$:
Firma 1 by přepnula z původně preferované technologie A na technologii B , jakmile by začalo platit

$$-n_A > \frac{(a_1 - b_1)}{s},$$

tato nerovnost však nikdy nenastane, protože je vždy levá strana záporná a pravá strana kladná.

Firma 2 přepne z původně preferované technologie B na technologii A , jakmile začne platit

$$n_A > \frac{(b_2 - a_2)}{s}.$$

S tím, jak roste počet uživatelů, firma 2 přepne na technologii A , která se stává standardem. Absorpční bariéra pro technologii A se ještě více přiblíží a absorpční bariéra pro technologii B přestane existovat.

5 ZÁVĚR

Pro analýzu problémů výběru technologií v sítích jsou zde použity koordinační hra, Arthurův model, jejich modifikace a zobecnění. Z analyzovaných jednoduchých modelů je možno získat důležité závěry. Tyto závěry se týkají změn ve výběru a přijetí technologie při použití konvertorů.

Zavedením konvertorů dojde ke změnám v uzamčení technologií a přijetí standardů. Konkrétní změny záleží na typu konvertoru, zda je jednosměrný nebo obousměrný a zda je částečně nebo plně kompatibilní. Pokud se jedná o obousměrný konvertor, tak zavedení obousměrného částečně kompatibilního konvertoru oddálí přijetí standardu technologie, zatímco zavedení obousměrného plně kompatibilního konvertoru zcela zamezí přijetí standardu technologie. Pokud se jedná o jednosměrný konvertor, tak zavedení jednosměrného částečně kompatibilního konvertoru znamená tendenci směrem k uzamčení preferovanou technologií a zavedení jednosměrného plně kompatibilního konvertoru způsobí přijetí preferované technologie za standard.

V dalším výzkumu se zaměříme na analýzy vlivu strategického stanovení cen a kompatibility technologií na výběr standardů a na společenský blahobyť,

Poděkování

Výzkumný projekt je podporován grantem č. P402/12/G097 Grantové agentury České republiky a grantem č. IGA F4/57/2017, Fakulty informatiky a statistiky, VŠE, Praha a grantem č. 7429/2018/08 VŠFS, Praha.

Použitá literatura

1. ARTHUR, W. 1989. Competing Technologies, Increasing Returns, and Lock-in by Historical Events. *Economic Journal* 99, 116-131.
2. BOBZIN, H. 2006. *Principles of Network Economics*. Springer, Berlin.
3. DLOUHÝ, M., FIALA, P. 2015. *Teorie ekonomických a politických her*. Oeconomica, Praha.
4. FIALA, P. 2016. *Dynamické vytváření cen a alokace zdrojů v sítích*. Professional publishing, Praha.
5. HARSANYI, J. C., SELTEN, R. 1988. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press, Cambridge.
6. SHY, O. 2001. *The Economics of Network Industries*. Cambridge University Press, Cambridge.

Kontaktní údaje

Prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA
Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
Tel: (420 2) 24 095 447
email: pfiala@vse.cz

PaedDr. Renata Majovská, PhD.
Vysoká škola finanční a správní, Fakulta ekonomických studií
Estonská 500, 101 00 Praha 10
Tel: (420 2) 10 088 831
email: renata.majovska@gmail.com

ROVNOSTÁRSKE RIEŠENIE ROZDELENIA VÝHRY V KOOPERATÍVNEJ HRE

THE EGALITARIAN SOLUTION OF REDISTRIBUTION IN COOPERATIVE GAME

Dana Figurová

Abstrakt

Teória kooperatívnych hier skúma pozitívne účinky vytvorenia koalície založenej na záväzných dohodách. Vo všeobecnosti rozlišujeme kooperatívne hry s prenosnými a neprenosnými výhrami. Pre hry s neprenosnými výhrami je charakteristické to, že zisky z výhier sú viazané na jednotlivých výhercov a ich úžitok nemožno prenášať na ostatných spoluhráčov. V kooperatívnej hre s prenosnými výhrami môže formálny víťaz zisky z výhier prerozdeliť všetkým členom koalície. Tento príspevok je zameraný na prezentovanie rovnostárskeho riešenia prerozdelenia výhry v kooperatívnej úlohe rozvozu, ktorá plynie zo vzájomnej spolupráce členov koalície. Dôležitým faktorom podmieňujúcim kooperatívne správanie je to, že jeho realizovaním účastníci zvyšujú dosahované zisky alebo aspoň pravdepodobnosť ich dosiahnutia voči iným – nekooperatívnym stratégiám.

KLúčové slová: kooperatívna hra, rovnostárske riešenie, prerozdelenie výhier v teórii hier

Abstract

The Cooperative Game Theory explores the positive effects of creating a coalition based on binding agreements. In general, we distinguish cooperative games with transferable and non-transferable winnings. For cooperative games with non-transferable winnings it is characteristic that prize winnings are tied to individual winners and their use cannot be transferred to other teammates. In a cooperative game with transferable winnings, winners can earn winnings from all members of the coalition. This contribution is aimed at presenting the egalitarian solution of redistribution in Cooperative Vehicle Routing Problem result from mutual cooperation among members of the coalition. An important factor determining the cooperative behaviour is that by its realization the participants increase the achieved profits or at least the probability of their achievement against other - non-cooperative strategies.

Keywords: cooperative game, the egalitarian solution, redistribution in game theory

1 ÚVOD

Teória hier je vedný odbor, ktorý sa zaoberá riešením prevažne konfliktných rozhodovacích situácií zahŕňajúcich viac než jeden subjekt (jednotlivci, firmy, štáty, politické strany a pod.), pričom predpoklady a pravidlá konfliktu (hry) sú presne definované, pričom jednotlivé subjekty nazývame hráčmi.

Kooperatívna teória hier (Cooperative Game Theory, CGT) je využívaná na modelovanie spolupráce medzi hráčmi. Väčšina aplikácií CGT v oblasti teórie hier sa týka plánovania, úspor a vyjednávania (Barron, 2013). Kooperatívne hry sú definované ako „Teória, ktorá sa zaoberá predovšetkým koalíciou hráčov, ktorý skординujú svoje činnosti na to, aby dosiahli ďalšie výhody“ (Branzei et al., 2008). Viacerí autori dokázali (Lozano, 2013, Zibaei et

al.,2016), že práve vzájomnou spoluprácou medzi dodávateľmi v úlohe rozvozu dochádza k značnému ušetreniu prepravných nákladov.

Základnou dilemou kooperatívnej hry n hráčov je pre každého hráča voľba vhodnej spolupráce. V koalíciách môžu hráči získať väčšie výhody, než by získali samostatným postupom. Tieto výhody by mali nasledovne hráči medzi sebou spravodlivo rozdeliť. Z hľadiska rozdelenia výhier možno rozlišovať medzi zaručenými a spoločnými výhrami (Demúth, 2013). Zaručené výhry sú také, ku ktorým hráč dospel na základe vlastného rozhodnutia bez ohľadu na správanie druhého hráča, pričom spoločné výhry vznikajú v dôsledku vzájomnej spolupráce medzi hráčmi. V tomto príspevku sa budeme zaoberať rozdelením výhry medzi hráčov vo vnútri jednotlivých koalícií. Pri rozdeľovaní výhier medzi jednotlivých hráčov budeme vychádzať z teórie vyjednávania, pričom predpokladáme prenositeľnosť výhry. Jednou z možností je v prípade kooperatívnej hry využitie Shapleyho hodnoty, ktorá vychádza z apriórneho ocenenia pozície a sily každého hráča z hľadiska možnosti koalíčnej spolupráce (Chobot a kol.,1991). V tomto príspevku sa zameriame na rovnostárske riešenie rozdelenia výhry, pričom tento spôsob aplikujeme na kooperatívnu úlohu rozvozu, v ktorej majitelia jednotlivých skladov spolu kooperujú a získavajú tak určité výhody (úsporu prepravných nákladov) vyplývajúce zo spolupráce.

2 ROZDELENIE VÝHIER V KOOPERATÍVNEJ HRE

Predpokladajme, že hráči (majitelia jednotlivých skladov v prípade úlohy rozvozu) môžu uzatvárať záväzné dohody o voľbe stratégií (v našom prípade sa táto stratégia týka vzájomnej dohody o využívaní vozidiel v rámci koalície) a o prípadnom prerozdelení spoločne získanej výhry. Takúto hru nazývame kooperatívnou hrou n hráčov s prenosnými platbami (n vyjadruje počet hráčov). Nech $P = \{1,2,\dots,n\}$ je množinou všetkých hráčov. Koalíciou S nazveme ľubovoľnú podmnožinu množiny P , $S \subseteq P$. V súvislosti s analýzou kooperatívnej hry nás zaujíma odpoveď na nasledujúce otázky (Chobot a kol.,1991):

- Kedy má zmysel uzatvárať dohodu?
- Ako si hráči rozdelia spoločne získanú výhru?

Vo všeobecnosti je zrejme účelné uzatvoriť dohodu vtedy, ak hráči vzájomnou spoluprácou získajú viac ako samostatným postupom. Jadro kooperatívnej hry potom tvorí množina prijateľných rozdelení, pričom každé rozdelenie má nasledujúce vlastnosti (Chobot a kol.,1991):

- Hráči si rozdelia celú spoločnú výhru
- Každý z hráčov požaduje aspoň toľko, koľko by si zabezpečil samostatným postupom bez spolupráce s druhým hráčom.

Vychádzame z teórie vyjednávania, pričom vo všeobecnosti poznáme nasledovné spôsoby rozdelenia výhry – utilitárne riešenie, rovnostárske riešenie, Nashovo riešenie a Kalai – Smorodinského riešenie (Mas-collel, et al.,1995, aplikované napr. v Tichá, 2016). Predpokladajme, že každý z hráčov P má zaručený úžitok $u_p^* = u_p(\{P\})$, t.j. úžitok v prípade, že sa nachádza v jednočlennej koalícii.

Uvažujme teraz dvoch hráčov (dodávateľov) α a β s charakteristickou funkciou s hodnotami $v(\{\alpha\}), v(\{\beta\}), v(\{\alpha, \beta\})$.

Z daných hodnôt môžeme určiť zaručený úžitok hráčov, t.j. ich úžitok v prípade, že sa nachádzajú v jednočlennej koalícii.

$$\begin{aligned}u_\alpha(\{\alpha\}) &= v(\{\alpha\}) \\u_\beta(\{\beta\}) &= v(\{\beta\}).\end{aligned}$$

Najprv je potrebné rozdeliť výhru koalície vo všetkých kritériách medzi hráčov tak, aby rozdelenie výhry bolo nezáporné, celá výhra bola rozdelená a oba hráči si polepšili oproti jednočlennej koalícii. Koalícia je teda pre hráča výhodná a vznikne vtedy, keď existuje riešenie spĺňajúce nasledujúce podmienky.

- nezáporné rozdelenie koalície $S(\{\alpha, \beta\})$,

$$\begin{aligned}x_{\alpha} &\geq 0 \\x_{\beta} &\geq 0\end{aligned}$$

- výhra koalície je rozdelená

$$x_{\alpha} + x_{\beta} = v(\{\alpha, \beta\})$$

- hráč α , resp. β má z koalície úžitok väčší aspoň o ε , oproti jednočlennej koalícii

$$\begin{aligned}u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) &\geq u_{\alpha}(\{\alpha\}) + \varepsilon \\u_{\beta}(\{\alpha, \beta\}) &\geq u_{\beta}(\{\beta\}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

V nasledujúcom texte si predstavíme jeden z rôznych prístupov prerozdelenia výhry - rovnostárske prerozdelenia výhry.

2.1 Rovnostárske riešenie prerozdelenia výhier v kooperatívnej hre

Predpokladajme, že hráči si rozdelia výhru $v(S)$ tak, že si každý z hráčov koalície polepší o rovnakú hodnotu úžitku oproti tomu prípadu, v ktorom by z koalície vystúpil a bol sám. Rovnostárske riešenie maximalizuje Rawlsovu funkciu blahobytu – minimum z úžitkov jednotlivých hráčov znížený o ich zaručený úžitok (Kalai, 1977).

Nech $f(u(S) - u^*)$ je funkcia vektoru úžitkov hráčov, kde $u^* = (u^*_1, \dots, u^*_p)^T$ je vektor zaručených úžitkov hráčov, pričom túto funkciu chceme maximalizovať. V prípade rovnostárskeho riešenia si teda hráči rozdelia výhru tak, že maximalizujú minimum z úžitku jednotlivých hráčov zmenšeného o ich zaručený úžitok, t.j. budeme maximalizovať:

$$f(u(S) - u^*) = \min(u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) - u_{\alpha}(\{\alpha\})) + u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) - u_{\beta}(\{\beta\}).$$

Úlohu lineárneho programovania rovnostárskeho riešenia dvoch hráčov, na základe ktorej budeme v empirickej časti tohto príspevku riešiť rozdelenie výhier v kooperatívnej úlohe rozvozu, formulujeme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}\max_{x_{\alpha}, x_{\beta}} \min &(u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) - u_{\alpha}(\{\alpha\})) + u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) - u_{\beta}(\{\beta\}) \\&x_{\alpha} + x_{\beta} = v(\{\alpha, \beta\}) \\&u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) \geq u_{\alpha}(\{\alpha\}) + \varepsilon \\&u_{\beta}(\{\alpha, \beta\}) \geq u_{\beta}(\{\beta\}) + \varepsilon. \\&x_{\alpha} \geq 0 \\&x_{\beta} \geq 0\end{aligned}$$

Keďže účelová funkcia nie je lineárna nemôžeme konštatovať, že sa jedná o úlohu lineárneho programovania. Túto úlohu musíme prepísať zavedením premennej D , ktorá udáva minimálnu hodnotu zvolených funkcií, pričom túto premennú budeme následne maximalizovať. Hodnoty všetkých funkcií, ktorých minimum maximalizujeme, musí byť potom väčší alebo rovný premennej D . Úlohu potom môžeme prepísať nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned}\max_{x_{\alpha}, x_{\beta}, D} &D \\&u_{\alpha}(\{\alpha, \beta\}) - u_{\alpha}(\{\alpha\}) \geq D \\&u_{\beta}(\{\alpha, \beta\}) - u_{\beta}(\{\beta\}) \geq D \\&x_{\alpha} + x_{\beta} = v(\{\alpha, \beta\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\alpha(\{\alpha, \beta\}) &\geq u_\alpha(\{\alpha\}) + \varepsilon \\
u_\beta(\{\alpha, \beta\}) &\geq u_\beta(\{\beta\}) + \varepsilon. \\
x_\alpha &\geq 0 \\
x_\beta &\geq 0
\end{aligned}$$

V nasledujúcej časti príspevku aplikujeme takto formulovanú úlohu lineárneho programovania na prípad kooperatívnej úlohy rozvozu.

3 NUMERICKÝ PRÍKLAD

Na analýzu kooperatívnej hry sme vychádzali z numerického príkladu kooperatívnej úlohy rozvozu (Zibaei et al., 2016), na základe ktorého sa autori snažili dokázať, že prostredníctvom spolupráce medzi dodávateľmi sa dajú značne ušetriť prepravné náklady. Dáta boli získané z internetovej stránky (pozri v [10]).

V úlohe rozvozu s viacerými skladmi sa teda domnievame, že majitelia jednotlivých skladov sú zároveň aj hráčmi, ktorí chcú spolupracovať s ostatnými hráčmi s cieľom minimalizovať svoje prepravné náklady. Minimálne prepravné náklady $TC(S)$ sme získali vyriešením jednotlivých koalícií na základe matematického modelu úlohy kooperatívneho rozvozu (dáta sú k dispozícii na vyžiadanie od autorov tohto príspevku), ktorý je modifikáciou modelu rozvozu s viacerými strediskami uvedeného v (Pekár a kol., 2012). Predpokladajme, že každý z hráčov P má zaručený úžitok, t.j. úžitok v prípade, že sa nachádza v jednočlennej koalícii, čo v našej úlohe rozvozu predstavuje množstvo prepravných nákladov $TC(S)$ v prípade jednočlenných koalícií S .

Stručne povedané, budeme skúmať, ako spolupráca hráčov v úlohe rozvozu dáva príležitosť, aby sa s využitím techník kooperatívnych hier na jednej strane minimalizovali celkové náklady na dopravu, pričom hlavným atribútom tohto príspevku je následne tieto prepravné náklady rozdeliť medzi jednotlivých členov v koalícii na základe rovnostárskeho riešenia prostredníctvom úlohy lineárneho programovania uvedenej v podkapitole 2.1.

Uvažujeme teda úlohu rozvozu s viacerými strediskami, pričom máme k dispozícii štyroch dodávateľov, ktorí majú za úlohu obslužiť určitých zákazníkov. Dodávateľov, t.z. majiteľov jednotlivých skladov, budeme považovať za hráčov s označením $P = \{1,2,3,4\}$. Každý z hráčov vlastní jeden sklad s jedným vozidlom. Maximálna kapacita skladov je v našom prípade $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 200$, pričom kapacita každého vozidla je daná $Q_k = 220$. Zákazníci sú striktné pridelení k jednotlivým skladom (hráčom). V prípade vytvorenia koalície $S \subseteq P$ vieme, že existuje práve $2^n - 1$ možných koalícií (pričom n reprezentuje počet hráčov). To znamená, že v našom prípade existuje práve 15 možných koalícií.

Úloha kooperatívneho rozvozu je vyriešená pre každého hráča individuálne a potom jednotlivo pre vytvorené koalície S : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ a $\{1,2,3,4\}$ (dáta sú k dispozícii na vyžiadanie od autorov tohto príspevku). Príslušné úlohy sme riešili prostredníctvom matematického programovacieho jazyka GAMS. Na výpočet optimálneho riešenia sme používali solver Cplex 12.2.0.0 v rámci GAMSu na počítačovom zariadení INTEL® Core (TM) 2 CPU, E8500 @ 3.16 GB RAM pre Windows 10. Na výpočet rovnostárskeho riešenia úlohy lineárneho programovania využívame doplnok Solver v prostredí Microsoft Excel.

Našou úlohou je na základe dosiahnutých výsledkov optimálnych trás poukázať na to, ako je možné rozdeliť prepravné náklady dosiahnuté vzájomnou spolupracou medzi hráčmi (dodávateľmi) na základe rovnostárskeho riešenia hry.

Tabuľka 1 slúži na vyčíslenie celkových prepravných nákladov $TC(S)$ jednotlivých hráčov v koalíciách po absolvovaní optimálnych trás rozvozu (dáta sú k dispozícii na vyžiadanie autorov), z ktorých budeme vychádzať pri aplikácii rovnostárskeho riešenia pri ich následnom rozdeľovaní medzi hráčov v koalícii S , pričom prvé štyri hodnoty predstavujú zaručené úžitky hráčov v tom prípade, že hráči postupujú individuálnym spôsobom (nekooperujú navzájom).

Tabuľka 1: Celkové minimálne náklady $TC(S)$ v prípade jednotlivých koalícií a rozdelenie prepravných nákladov na základe rovnostárskeho riešenia prerozdelenia výhry.

Koalície (S)	TC (S)	Rozdelenie prepravných nákladov rovnostárskym riešením			
		1 hráč	2 hráč	3 hráč	4 hráč
$S_1 = \{1\}$	20,68	20,68			
$S_2 = \{2\}$	20,83		20,83		
$S_3 = \{3\}$	20,83			20,83	
$S_4 = \{4\}$	20,68				20,68
$S_5 = \{1,2\}$	26,63	13,3122	13,3178		
$S_6 = \{1,3\}$	26,44	13,2172		13,2228	
$S_7 = \{1,4\}$	28,07	14,0350			14,0350
$S_8 = \{2,3\}$	27,58		13,7873	13,7927	
$S_9 = \{2,4\}$	26,44		13,2228		13,2172
$S_{10} = \{3,4\}$	28,70			14,3526	14,3474
$S_{11} = \{1,2,3\}$	31,66	10,5502	10,5549	10,5549	
$S_{12} = \{1,2,4\}$	31,66	10,5518	10,5565		10,5518
$S_{13} = \{1,3,4\}$	31,66	10,5518		10,5565	10,5518
$S_{14} = \{2,3,4\}$	31,66		10,5549	10,5549	10,5502
$S_{15} = \{1,2,3,4\}$	34,60	8,6478	8,6522	8,6522	8,6478

Zdroj: Vlastné spracovanie

V tabuľke 1 sme rozdelili minimálne prepravné náklady (hodnotu účelovej funkcie) medzi členov koalícií na základe rovnostárskeho riešenia hry. V stĺpci „Rozdelenie nákladov“ možno vidieť, že napr. v prípade vzájomnej spolupráce hráča 1 a 4, si na základe tohto spôsobu riešenia rozdelia náklady na prepravu rovným dielom, t.z. 50% na 50%.

V prípade rozdelenia nákladov vyplývajúcich zo vzájomného využívania vozidiel medzi členmi v koalícii $\{1,2,3\}$ na základe rovnostárskeho riešenia, hráč 1 dostane 10,5502 jednotiek, hráč 2 dostane 10,5549 jednotiek a hráč 3 dostane 10,5549 jednotiek prepravných nákladov.

4 ZÁVER

Základným cieľom tohto príspevku bolo prezentovanie a následné aplikovanie rovnostárskeho riešenia kooperatívnej hry, ktorý sa považuje za jeden z mnohých prístupov riešenia

prerozdelenia výhry v kooperatívnych hrách. V tomto príspevku sme sa zameriavali na kooperatívnu úlohu rozvozu s cieľom minimalizácie celkových prepravných nákladov s tým, že hráči majú tendenciu medzi sebou spolupracovať. Našou úlohou bolo na základe dosiahnutých výsledkov optimálnych trás (dáta sú k dispozícii na vyžiadanie od autorov tohto príspevku) poukázať na to, ako je možné rozdeliť výhru (v našom prípade prepravné náklady) dosiahnutú vzájomnou spolupracou medzi hráčmi (dodávateľmi). Vyčíslili sme náklady jednotlivých hráčov, či už jednotlivo alebo v spolupráci s iným hráčom, ktoré sme následne na základe úlohy lineárneho programovania rovnostárskeho riešenia prerozdělili medzi jednotlivých hráčov.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17 *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska* a VEGA 1/0248/17 *Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie*.

Použitá literatúra

1. BARRON, E. N. 2013. *Game Theory: An Introduction, 2nd Edition*. New Jersey: John Wiley & Sons. ISBN: 978-1118216934.
2. BRANZEI, R., DIMITROV, D., a TIJS, S. 2008. *Models in cooperative game theory*. New York: Springer Science & Business Media. ISBN: 978-3-540-77953-7.
3. CHOBOT, M., TURNOVEC, F., a ULAŠÍN, V. 1991. *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa. ISBN: 80-05-00702-7.
4. DÉMUTH, A. 2013. *Teória hier a problém rozhodovania*. Trnava: Filozofická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave. ISBN: 978-80-8082-580-5.
5. KALAI, E. 1977. Proportional Solutions to Bargaining Situations: Interpersonal Utility Comparisons. In: *Econometrica*, roč. 45, 1977, č. 7, s. 1623-1630.
6. LOZANO, S., MORENO, P., ADENSO-DÍAZ, B., a ALGABA, E. 2013. Cooperative game theory approach to allocating benefits of horizontal cooperation. In: *European Journal of Operational Research*, roč. 229, 2013, č.2, s 444-452.
7. MAS-COLLEL, A., WHINSTON, M. D. a GREEN, J. F. 1995. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press. ISBN: 978-0195073409.
8. PEKÁR, J., BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z., and REIFF, M. 2012. *Modelovanie rozmiestnenia recyklačných centier*. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm. 226 s. ISBN 978-80-225-3349-2.
9. TICHÁ, M. (2016). *Vícekritériální hry*. Praha, 2016. Disertační práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Fakulta informatiky a statistiky. Katedra ekonometrie.
10. ZIBAEI, S., HAFEZALKOTOB, A., a GHASHAMI, S. S. 2016. Cooperative vehicle routing problem: An opportunity for cost saving. In: *Journal of Industrial Engineering International*, roč.12, 2016, č.3, s. 271-286.

Kontaktné údaje

Ing. Dana Figurová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: danafigurova@gmail.com

POROVNÁNÍ PREDIKČNÍHO VÝKONU VAR MODELU OPROTI NEURONOVÉ SÍTI

COMPARISON OF PREDICTIVE PERFORMANCE OF VAR MODEL AGAINST NEURAL NET

Ing. Jiří Georgiev

Abstrakt

Pro zlepšení finančních a ekonomických predikcí by mohlo být potenciálně vhodné postihovat a reprodukovat nejen lineární, ale i nelineární vztahy mezi proměnnými. V tomto příspěvku byly zkoumány predikční schopnosti vícerozměrných modelů na inflaci za Českou republiku, Slovensko a Rakousko. Porovnány byly výsledky lineárních VAR modelů oproti nelineárním modelům odhadnutým pomocí feedforward neuronových sítí. Neuronové sítě se v rámci této úlohy prokázaly jako nástroj rovnocenný VAR modelům, a to především díky regularizaci, zabuzující přeučení modelu.

Klíčová slova: VAR, neuronová síť, predikce

Abstract

To improve financial and economic forecast, it might be potentially appropriate to accommodate and reproduce not only linear but also nonlinear relationship among variables. This thesis contribution forecast capabilities of multivariate models for inflation of Czech Republic, Slovakia and Austria. The results of linear VAR models are compared to estimates by feedforward neural nets. Neural nets proved to be equal to VAR models in this task, mainly due to regularization, which prevents overfitting.

Keywords: VAR, neural net, prediction

Úvod

Predikce ekonomických a finančních časových řad umožňují subjektům dělat správná rozhodnutí a vhodně upravovat svá budoucí očekávání. Cílem predikčních modelů je co nejlépe extrahovat informace z minulého vývoje a přetvářet je na možný budoucí vývoj. Donedávna v analýze časových řad dominovaly lineární modely. V posledních pár letech se však objevila řada studií poukazujících na vhodnost použití nelineárních modelů, a to zejména neuronových sítí, například Marcellino, 2002, Choudhary et al., 2012, Nakamura, 2004, McNelis et al., 2004. Většina ze zmíněných studií se zaměřuje pouze na predikční schopnosti jednorozměrných AR modelů odhadnutých metodou nejmenších čtverců oproti odhadům pomocí neuronových sítí a reportují, že neuronové sítě dosahují lepších, případně stejných výsledků. Z tohoto důvodu

Lze očekávat obdobné výsledky i u vícerozměrných rozšíření AR modelů.

V tomto příspěvku jsou tedy zkoumány predikční schopnosti vícerozměrných modelů časových řad, a to konkrétně vektorových autoregresních modelů (VAR) a feedforward neuronových sítí (NN), na inflaci v České republice, Slovensku a Rakousku.

K výpočtům byl použit programovací jazyk R a k odhadu neuronových sítí bylo použito prostředí R Keras ¹ a Tensorflow ².

1 Přehled použitých modelů

1.1 Vektorové autoregresní modely

Vektorový autoregresní model (VAR) je tradiční nástroj pro analýzu vícerozměrných ekonomických a finančních časových řad. Podrobně o použití VAR modelů hovoří například Zivot et al., 2007. VAR model je rozšířením jednorozměrného autoregresního modelu (AR) o více proměnných. Ty jsou považovány v rámci modelu za endogenní a vstupují do něj rovnocenně. Předpokladem pro odhad VAR modelu je stacionarita časových řad. Pokud je tento předpoklad porušen je nutné řady stacionarizovat, případně lze použít model korekce chyby při existenci konitegračních vztahů.

Nechť $\mathbf{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt})'$ je $m \times 1$ rozměrný vektor časových řad. Pak lze vektorový autoregresní model s p zpožděními zapsat

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \Pi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Pi_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \Pi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \Phi \mathbf{D}_t + \mathbf{G} \mathbf{X}_t + \epsilon_t, \quad (1)$$

kde Π_i je $m \times m$ rozměrná matice koeficientů, \mathbf{c} je vektor úrovnových konstant, \mathbf{D}_t je matice deterministických proměnných, \mathbf{X}_t je matice stacionárních exogenních proměnných a Φ, \mathbf{G} jsou matice koeficientů a ϵ_t je $m \times 1$ rozměrný vektor bílého šumu, Zivot et al., 2007.

Pro správnou specifikaci VAR(p) modelu je zásadní výběr vhodného počtu zpoždění p . K výběru vhodného počtu zpoždění se nejčastěji používají výběrová kritéria založená na analýze reziduální kovarianční matice. Mezi nejznámější patří například Akaikeho informační kritérium (AIC), Schwarz-Bayesovo informační kritérium (BIC) a Hannan-Quinnovo (HQ). Pro výběr zpoždění u predikčních modelů je často vhodné BIC zejména pro svou tendenci počet zpoždění podhodnocovat a tím snižovat variabilitu modelu. Podrobně o výběru zpoždění a vlastnostech jednotlivých kritérií píší například Lütkepohl, 2005 a Gredenhoff et al., 1997.

¹<https://keras.rstudio.com/>

²<https://www.tensorflow.org/>

1.2 Dopředná neuronová síť

Feedforward neuronová síť čili vícevrstvý perceptron je čistý model hlubokého učení. Tímto typem neuronové sítě informace jakoby protéká pouze jedním směrem od vstupu do výstupu a neexistují žádná zpětná spojení. Feedforward neuronová síť je sítí neuronů uspořádaných do vrstev. Vrstvy jsou navzájem propojeny a předávají si informace. Každá vrstva obsahuje neurony neboli jednotky. Každá jednotka přijímá vstupy z jednotek, které jsou ve vrstvách pod nimi a zároveň odesílají výstupy jednotkám ve vrstvách nad nimi. V rámci jedné vrstvy mezi jednotkami nejsou žádné vztahy. Jednotky ze **vstupní vrstvy** N_i posílají informace do první skryté vrstvy $N_{h,1}$, následně pak přes všechny skryté vrstvy $N_{h,l}$ až do **výstupní vrstvy** N_0 . Mezi skrytými vrstvami jsou vstupy přenásobeny vahami a je na ně aplikována **aktivační funkce** F_i . Aktivační funkce může být libovolná diferencovatelná funkce. Nejčastěji se jako aktivační funkce používá Sigmoid, ReLu, Softmax, případně lze použít i lineární aktivační funkci, Krose et al., 1996. Výstupní jednotka $\mathbf{x}^{(k)}$ k -té vrstvy pak vypadá následovně:

$$\mathbf{x}^{(k)} = F(\mathbf{a}^{(k)}) \quad (2)$$

kde $\mathbf{a}^{(k)}$ je vážený součet výstupu z jednotky předchozí

$$\mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)} + \mathbf{W}^{(k)}\mathbf{x}^{(k-1)} \quad (3)$$

kde $\mathbf{W}^{(k)}$ je matice vah k -té vrstvy a $\mathbf{b}^{(k)}$ vektor přidaných konstant. Váhy neuronové sítě jsou odhadnuty iteračně, pomocí dopředné a zpětné propagace vůči zvolené nákladové funkci. Po odhadu vah se používá již pouze dopředná propagace. I přestože samotné učení sítě může být časově náročné, získávání výsledků z již naučené sítě je velice rychlé, Fausett, 1993. Podrobný popis dopředných neuronových sítí a možností jejich odhadů uvádí Goodfellow et al., 2017.

2 Porovnání kvality predikcí na reálných datech za inflaci

K porovnání predikčních schopností byly použity makroekonomické veličiny za Českou republiku, Rakousko a Slovensko. Konkrétně k odhadu inflace vyjádřené indexem spotřebitelských cen cpi_q byly použity ukazatele: hrubý domácí produkt gdp_q , krátkodobá úroková sazba int_q , náklady práce ulc_q , objem importu zboží imp_q , nezaměstnanost $unemp_q$ a peněžní zásoba $m1_q$. Dále do modelů byla zařazena exogenní proměnná ve formě indexu spotřebitelských cen pro 28 zemí Evropské unie. Horizontem všech časových řad je poslední kvartál roku 2017 a zdrojem je databáze OECD³.

K vyhodnocení predikční chyby byla použita střední čtvercová chyba MSE a metoda klouzavých

³<https://data.oecd.org>

oken s krokem 3 na posledních 10 kvartálech dle Hyndman, 2014 a MSE na deset kroků dopředu. Pro každou zemi byly odhadnuty různé kombinace proměnných, deterministických členů a počtů zpoždění. U neuronových sítí byly dále pro každou zemi odhadnuty různé počty vrstev a neuronů s různými aktivačními funkcemi a různými formami regularizace. Výsledky jsou uvedeny v tabulkách 1, 2, 3, 4, 5, 6. VAR modely poskytují lepší predikce pro Českou republiku a Slovensko. Pouze u Rakouska jsou úspěšnější neuronové sítě.

Tabulka 1: Odhad NN model ČR

	Model	Lags	Activ. Fun.	Hidden Units, Layers	MSE10	MSE3
1	cpi_q,imp_q,unemp_q	4	softmax	15, 3	0.125	0.058
2	cpi_q,imp_q,int3_q,unemp_q	4	softmax	30, 1	0.132	0.059
3	cpi_q,gdp_q	6	linear	20, 3	0.126	0.162
4	cpi_q,gdp_q,imp_q,ulc_q	6	linear	15, 3	0.115	0.184
8	cpi_q,gdp_q,ulc_q,unemp_q	4	linear	15, 3	0.109	0.233

Tabulka 2: Odhad VAR model ČR

	Model	Lag	MSE10	MSE3
2	cpi_q,imp_q,int3_q,unemp_q	2	0.057	0.055
6	cpi_q,act_q,imp_q,ulc_q	1	0.070	0.057
7	cpi_q,imp_q	5	0.052	0.057
8	cpi_q,imp_q,int3_q	1	0.063	0.057

Tabulka 3: Odhad NN model Slovensko

	Model	Lags	Activ. Fun.	Hidden Units, Layers	MSE10	MSE3
1	cpi_q,imp_q,unemp_q	6	softmax	30, 3	0.120	0.072
4	cpi_q,ulc_q,unemp_q	5	relu	30, 3	0.111	0.158
8	cpi_q,gdp_q,ulc_q,unemp_q	5	relu	15, 3	0.102	0.182
6	cpi_q,act_q	6	relu	15, 3	0.123	0.206
12	cpi_q,act_q,imp_q,unemp_q	5	linear	15, 3	0.111	0.260

Tabulka 4: Odhad VAR model pro Slovensko

	Model	Lag	MSE10	MSE3
1	cpi_q,unemp_q	5	0.079	0.066
3	cpi_q,act_q,gdp_q	5	0.080	0.067
4	cpi_q,act_q,unemp_q	5	0.068	0.067
7	cpi_q,ulc_q,unemp_q	8	0.100	0.074
8	cpi_q,act_q,gdp_q,ulc_q	5	0.054	0.075

Tabulka 5: Odhad NN model Rakousko

	Model	Lags	Activ. Fun.	Hidden Units, Layers	MSE10	MSE3
1	cpi_q,act_q,gdp_q,ulc_q	4	linear	30, 3	0.030	0.037
2	cpi_q,gdp_q,ulc_q,unemp_q	4	linear	20, 3	0.031	0.041
3	cpi_q,gdp_q,imp_q,ulc_q	4	linear	30, 3	0.040	0.048
4	cpi_q,ulc_q,unemp_q	4	relu	30, 1	0.042	0.129

Tabulka 6: Odhad VAR model pro Rakousko

	Model	Lag	MSE10	MSE3
1	cpi_q,act_q,gdp_q,ulc_q	3	0.033	0.043
2	cpi_q,act_q,unemp_q	4	0.033	0.043
3	cpi_q,act_q,gdp_q,unemp_q	5	0.050	0.043
6	cpi_q,act_q,gdp_q,imp_q	7	0.074	0.044
10	cpi_q,gdp_q,unemp_q	5	0.055	0.045

3 Závěr

Na datech za Českou republiku, Slovensko a Rakousko byly použity vícerozměrné modely VAR a neuronové sítě pro predikci inflace vyjádřené spotřebitelským indexem cen. Jak VAR modely, tak neuronové sítě byly odhadnuty s exogenní proměnnou indexu spotřebitelských cen za 28 zemí Evropské unie. Pro Českou republiku a Slovensko VAR modely poskytují lehce lepší predikce než neuronové sítě. I přestože na daných datech VAR modely dosahují lepších výsledků nelze je jednoznačně prohlásit za lepší nástroj oproti neuronovým sítím. Neuronové sítě totiž poskytují širokou řadu dalších možností nastavení a kalibrace, které nebyly v tomto příspěvku použity a mohly by znamenat výrazné zlepšení odhadu. Za zmínku stojí například metoda tzv. „brzkého zastavení“, Prechelt, 2012 a pokročilé metody iterativního výběru regularizační konstanty λ , která se projevila jako velmi důležitá část modelu.

Použitá literatura

- FAUSETT, Laurene V., 1993. *Fundamentals of Neural Networks: Architectures, Algorithms And Applications*. Pearson. ISBN 0-13-334186-0.
- GOODFELLOW, Ian; BENGIO, Yoshua; COURVILLE, Aaron, 2017. *Deep Learning*. The MIT Press. ISBN 0-262-03561-8.
- GREDEHNOFF, Mikael; KARLSSONY, Sune, 1997. Lag-Length Selection in VAR-Models Using Equal and Unequal Lag-Length Procedures. *Working Paper Series in Economics and Finance*.
- HYNDMAN, Rob J., 2014. *Measuring Forecast Accuracy*.
- CHOUDHARY, M. Ali; HAIDER, Adnan, 2012. Neural Network Models for Inflation Forecasting: An Appraisal. *Applied Economics*. Roč. 44, č. 20, s. 2631–2635. Dostupné z DOI: 10.1080/00036846.2011.566190.
- KROSE, Ben; SMAGT, Patrik, 1996. *An Introduction to Neural Networks*. The University of Amsterdam.
- LÜTKEPOHL, Helmut, 2005. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- MARCELLINO, Massimiliano, 2002. Instability and Non-Linearity in the EMU. *IEP-Università Bocconi, IGIER and CEPR*.
- MCNELIS, Paul; MCADAM, Peter, 2004. Forecasting Inflation with Thick Models and Neural Networks. *European Central Bank*.
- NAKAMURA, Emi, 2004. Inflation Forecasting Using a Neural Network. *Economics letters*.
- PRECHELT, Lutz, 2012. *Neural Networks: Tricks of the Trade (Lecture Notes in Computer Science)*. Springer. ISBN 978-3-642-35289-8.
- ZIVOT, Eric; WANG, Jiahui, 2007. *Modeling Financial Time Series with S-PLUS®*. Springer New York.

Kontaktní údaje

Ing. Jiří Georgiev

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: georgiev.jiri@gmail.com

NIEKTORÉ TEORETICKO-METODOLOGICKÉ VÝCHODISKÁ K STABILITE EKONOMICKÉHO SYSTÉMU¹

SOME OF THE THEORETICAL-METHODOLOGICAL BACKGROUND TO THE STABILITY OF THE ECONOMIC SYSTEM

Marián Goga

Abstrakt

Autor článok člení na dve časti. Prvá časť poukazuje na niektoré dôležité problémy, ktoré tvoria pozadie stability ekonomického systému a v zásadnej miere ho ovplyvňujú. Tieto problémy úzko súvisia s rovnováhou, nerovnováhou, stabilitou a nestabilitou ekonomického systému a sú uvedené faktory, ktoré v najväčšej miere ovplyvňujú dynamiku ekonomického rastu. Druhá časť obsahuje niektoré metodologické problémy súvisiace s analýzou stability systému a so spätnými väzbami, ktoré tvoria nutnú podmienku existencie stability.

Kľúčové slová: *ekonomická politika, makroekonomická stabilita a nestabilita, rovnováha a nerovnováha, spätná väzba, dynamika systému*

Abstract

The author of the article is split into two parts. The first part highlights some of the important issues, which form the background of the stability of the economic system and crucially affect it. These problems are closely linked with balance, imbalance of power, stability and instability of the economic system and listed the factors most affecting the dynamics of economic growth. The second part contains some of the methodological problems associated with the analysis of the stability of the system, and with non-ties, which form a necessary condition for the existence of stability.

Keywords: *economic policy, macroeconomic stability and non-stability, equilibrium and non-equilibrium, feed back, dynamic of system*

JEL Classification: C02, C61, C69

1 ÚVOD

Pojem stabilita hrá v analýzach a modeloch ekonomického rastu a rozvoja významnú úlohu. V mnohých ekonomických analýzach je stabilita považovaná za nevyhnutnú podmienku, kým nestabilita je považovaná za neprípustnosť.

Nevyhnutnou podmienkou na zabezpečenie vyšších temp hospodárskeho rastu napríklad v SR je jeho rovnomernosť, ktorá je zase podmienená udržiavaním makroekonomickej stability. A pretože hrubý domáci produkt (HDP) predstavuje národohospodársky pohľad na úhrnný

¹ Príspevok vznikol v rámci projektu VEGA - 1/0248/17 *Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie.*

výsledok reálneho fungovania podnikateľských a verejnoprávnych subjektov, treba sa aj na celkovú hospodársku rovnováhu a stabilitu pozerat' ako na základnú podmienku prosperity podnikov. Lebo ani makroekonomická stabilita nie je abstraktný pojem, ale kompozícia pozostávajúca z trvale nízkej miery inflácie, nízkych úrokových mier a dostupných úverov, z rastu miezd rešpektujúceho vývoj produktivity práce i z ďalších podmienok prajných na podnikanie.

V článku sa zaoberáme niektorými teoretickými a metodologickými problémami analýzy stability ekonomického systému z pohľadu na jej ekonomické pozadie a na spätné väzby, ktoré sú nutnou podmienkou stability systému.

1 EKONOMICKÉ POZADIE STABILITY SYSTÉMU

Rovnováha systému je stabilná vtedy, ak hospodársky mechanizmus dokáže do ekonomickej štruktúry efektívne včleniť spätné väzby. Pritom prvý okruh spätných väzieb zabezpečuje vplyv spotrebiteľov na výrobu a druhý okruh neustále generuje objektívny cenový mechanizmus. Efektívne spätné väzby musia mať kompenzačný charakter, t. j. ekonomický systém so spätnými väzbami musí byť schopný upravovať sa do žiadaného stavu. Stabilita je vo všeobecnosti chápaná ako odolnosť systému voči poruchám (šokom).²

V súvislosti so spätnými väzbami a stabilitou rovnováhy v ekonomickom systéme sa v ekonomickej literatúre objavuje ich členenie na:

- a) negatívne spätné väzby,
- b) pozitívne spätné väzby.

Ekonomická teória analyzujúca problémy rovnováhy, stability a dynamiky vychádza pri definovaní spätných väzieb z tézy, že ak je na trhu prebytok dopytu nad ponukou, spôsobuje to tlak na rast cien a ak ponuka prevyšuje dopyt, dôsledkom je tlak na zníženie cien. V prvom prípade sa ekonomický systém z nerovnovážnej situácie dostane do rovnovážneho stavu pomocou negatívnej spätnej väzby a v druhom prípade budú opačne pôsobiť pozitívne spätné väzby. Ináč povedané, o negatívnych spätných väzbách hovoríme vtedy, ak krivka dopytu je klesajúca (má negatívny sklon) a krivka ponuky je rastúca. O pozitívnych väzbách hovoríme, ak krivka dopytu je rastúca a krivka ponuky je klesajúca.³

Proces prispôsobovania sa trhu je definovaný ako stabilný vtedy, keď obnovuje rovnováhu v prípade, že bola narušená a nestabilný je vtedy, keď rovnováhu nenastolí. Z niektorých analýz vyplýva, že pozitívna spätná väzba je postačujúcou podmienkou pre nestabilitu ekonomického systému a negatívna väzba je nevyhnutnou podmienkou pre stabilitu systému.⁴

V tejto súvislosti sa v ekonomickej teórii objavuje téza, podľa ktorej ekonomika, v ktorej sú ekonomické nerovnováhy udržiavané v určitých hraniciach, je dynamicky stabilná. Naopak, mimo týchto hraníc dynamická nestabilita narastá, a to z dvoch príčin:

- dôsledky každého ekonomického javu po prekročení určitých hraníc spravidla menia

² LAŠČIAK, A. 1995. *Úvahy o ekonomike Slovenskej republiky*. Bratislava: SLOVAKIA PLUS, 1995, s. 17.

³ HUSÁR, J.: Rovnováha, stabilita a dynamika hospodárstva z pohľadu ekonomickej teórie. In: *Ekonomický časopis*, roč. 48, č. 3, 2000, s. 323.

⁴ Tamtiež, s. 326.

znamienko (napr. úspory z rozsahu produkcie sa menia na straty, pozitívne externality sa stávajú negatívnymi a pod.),

- dochádza k efektu presunu nerovnováh (prebytok ponuky alebo dopytu na jednom trhu, vytvára prebytok ponuky alebo dopytu na inom trhu).⁵

Celkovú stabilitu národného hospodárstva určuje relatívne samostatný vývoj vnútornej a vonkajšej rovnováhy. Napríklad makroekonomická stabilita slovenskej ekonomiky zaznamenávala v priebehu transformácie výkyvy, ktoré boli dané jednak externými vplyvmi (priebeh hospodárskeho cyklu v krajinách Európskej únie, vývoj svetových cien strategických surovín a pod.), zmenami v prístupe k hospodárskej politike (preferovanie makroekonomickej stability na začiatku transformácie, neskôr preferencia rastu a následný pokus o obnovenie rovnováhy a pod.), ale aj vnútornými faktormi, ktoré však boli hospodárskou politikou v krátkodobom a strednodobom horizonte relatívne málo ovplyvniteľné (stav technologickej základne, produkčného potenciálu, úrovne konkurencieschopnosti a pod.).

V štruktúre ekonomiky SR sú stále zakódované riziká pre vonkajšiu rovnováhu. Ekonomika sa naďalej vyznačuje takou dovoznou náročnosťou, ktorá nie je primeraná vyspelej ekonomike. Stabilizačné opatrenia majú dočasný vplyv, pretože nie sú podporené dostatočnými zmenami konkurenčnej schopnosti ekonomiky. Možno to podložiť tým, že značná časť exportnej výkonnosti naďalej závisí od malého počtu aktérov a hlavný exportéri pracujú s nízkou mierou pridanej hodnoty. Úlohou hospodárskej politiky teda nemá byť iba odstraňovanie prejavov nerovnováhy, ale politikou konkurencieschopnosti a tvorbou štandardného trhového prostredia dosahovať trvalejšie pozitívne výsledky.

2 NIEKTORÉ METODOLOGICKÉ PROBLÉMY STABILITY SYSTÉMU

Teória ekonomickej dynamiky a stability skúma vo svojej všeobecnej podstate dynamiku zmien rozšírenej reprodukcie a ich zákonitosti – najmä zákonitosti dynamiky materiálno-vecnej štruktúry. Vo svojej špecifickej podobe skúma táto teória správanie sa jednotlivých modelov ekonomického rastu a rozvoja v najrôznejších reprodukčných podmienkach a stanovených kritériách. Za všeobecný matematický aparát, potrebný na skúmanie dynamiky ekonomického systému v čase, možno považovať bodové množinové zobrazenia.⁶ Na analýzu stability a v špeciálnych prípadoch vybilancovanosti prichádza do úvahy typologický aspekt týchto zobrazení a systém diferencných a diferenciálnych rovníc. Špeciálnym matematickým aparátom, ktorý sa uplatňuje na analýzu modelov ekonomickej dynamiky je variačný počet, matematická teória optimálneho riadenia, dynamické programovanie, lineárne a nelineárne programovanie a teória systémov.

Teória stability sa zaoberá analýzou vplyvov porúch (šokov) na správanie sa najrôznejších systémov. Stabilitou pritom rozumieme kvantitatívne vyjadrenie „odolnosti“ systému voči poruchám (šokom). O jednoduchej stabilite hovoríme vtedy, ak je systém schopný vrátiť sa postupom času do toho istého stavu z určitej množiny jeho rovnovážnych stavov, z ktorého bol vychýlený pôsobením nejakých porúch (šokov). Takúto stabilitu treba však považovať za

⁵ PŘÍVAROVÁ, M. 1995. *Teória ekonomickej nerovnováhy*. Bratislava: Elita, 1995, s. 138.

⁶ MORISHIMA, M. 1964. *Equilibrium, Stability and Growth*. London: Oxford University Press, 1964, s. 138.

relatívnu vlastnosť systémov, posudzovanú len vzhľadom na určitý a pokiaľ ide o typy a intenzitu pôsobenia obmedzený rozsah porúch (šokov).

Zmeny systému sa vyjadrujú geometricky v podobe trajektórií, ktoré križujú v priestore stavové premenné. Rozlišujú sa tri typy trajektórií:⁷

1. Trajektória sa nazýva asymptoticky stabilnou, ak všetky trajektórie dostatočne k nej blízke v čase $t = t_0$ sa k nej blížia pre $t \rightarrow \infty$.
2. Trajektória sa nazýva neutrálne stabilnou, ak všetky trajektórie dostatočne k nej blízke v čase $t = t_0$ zostanú v jej okolí pre ďalšie časové intervaly.
3. Trajektória je nestabilnou vtedy, ak trajektórie dostatočne k nej blízke v čase $t = t_0$ sa od nej vzdďaľujú, keď $t \rightarrow \infty$.

Ako sme už spomenuli, stabilita dynamických systémov sa v skutočnosti najčastejšie dosahuje pomocou spätných väzieb. Preto sa väčšina kritérií stability, ktoré sa používajú v matematickej teórii optimálneho riadenia a regulácie, vzťahujú na dynamické systémy so spätnými väzbami. V odbornej literatúre existuje mnoho matematických metód vhodných na analýzu stability a rovnováhy dynamických systémov so spätnými väzbami, z ktorých väčšina sa dá aplikovať aj na dynamické makroekonomické modely.⁸

Všetky zmeny (transformácie), ktoré sa realizujú v danom ekonomickom systéme sa musia nachádzať v určitej stabilnej oblasti, čiže v množine stavov, ktorú pri realizovaní nejakej transformácie systém neopúšťa. Táto oblasť stability má tzv. hraničné stavy, ktoré dynamický systém nesmie prekročiť, pretože v opačnom prípade sa systém rozpadá (prestane fungovať). Ide o „invariabilné stavy“.

Z uvedených poznatkov vyplýva, že ekonomický systém je stabilný len vtedy, keď má schopnosť vrátiť sa po nejakej poruche (šoku) do svojej východiskovej situácie, v ktorej bol pred poruchou (šokom), t. j. systém je stabilný vtedy, keď je odolný voči poruchám (šokom). Systém sa do svojej východiskovej situácie môže dostať buď postupne po určitom čase, alebo rôznymi spôsobmi.⁹

Za stabilnú oblasť považujeme takú množinu stavov dynamického systému, ktorú pri opakovaní nejakej transformácie T systém neopúšťa. Systém v stabilnej oblasti nemusí mať rovnovážne stavy. Transformácie, ktoré vedú k stabilite, charakterizujú väčšinou nejaké dynamické vlastnosti systémov.

Vývoj dynamického systému v čase pomocou transformácie je súčasťou tzv. časového zákona pohybu systému a matematicky je transformácia prvkov systému vyjadrená v takomto tvare:

a) transformácia vektora vstupov:

⁷ LAŠČIAK, A. a kol. 1985. *Dynamické modely*. Bratislava – Praha: Alfa – SNTL, 1985, s. 140 – 143

⁸ WEI-BIN ZHANG. 1990. Economic Dynamics. Growth and Development. In: *Lecture Notes in Economics and*

Mathematical Systems. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, No. 350, 1990, s. 202 alebo PUU, T. 1991.

Nonlinear Economic Dynamics. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 1991.

⁹ HENIN, P. Y. 2003. *Macrodynamics: Fluctuations and Growth*. London: Routledge, 2003, s. 124.

– v prípade diskkrétnej činnosti $\mathbf{x}_t = \sum_{\tau=0}^{\theta} T(\mathbf{x}_{t-\tau}, \tau)$ – vektorová diferenciálna rovnica vyššieho stupňa,

– v prípade spojitej činnosti $\mathbf{x}_t = \int_0^{\theta} T(\mathbf{x}_{t-\tau}, \tau) d\tau$ – vektorová integrálna rovnica,

b) transformácia vektora výstupov:

– v prípade diskkrétnej činnosti $\mathbf{y}_t = \sum_{\tau=0}^{\theta} Z(\mathbf{y}_{t-\tau}, \tau)$ – vektorová diferenciálna rovnica,

– v prípade spojitej činnosti $\mathbf{y}_t = \int_0^{\theta} Z(\mathbf{y}_{t-\tau}, \tau) d\tau$ – vektorová integrálna rovnica,

kde T a Z sú operátory transformácie,

t – čas (okamih), v ktorom sa prvky systému nachádzajú,

τ – dĺžka nasledujúceho času (okamihu), pričom platí $0 \leq \tau \leq \max_i \theta_i = \theta$.

Riešením uvedených rovníc sa získajú vektorové funkcie \mathbf{x}_t a \mathbf{y}_t , ktoré určujú vývoj prvkov stavu vstupov a výstupov dynamického systému. Týmito funkciami je vyjadrený vývoj systému v čase.¹⁰

- Ak uvažujeme o diskrétnych činnostiach, potom priebeh týchto funkcií alebo vývoj dynamického systému v čase závisí od ich hodnoty, čiže od stavu vstupov a výstupov v určitom konečnom počte začiatočných okamihov v intervale diskrétnych hodnôt $\langle 0, \theta \rangle$.
- Ak uvažujeme o spojitých činnostiach, potom tento priebeh závisí od všetkých hodnôt uvedených funkcií v spojitom intervale $\langle 0, \theta \rangle$.

Predpokladajme teraz, že vstup aj výstup v dynamickom systéme je konštantný, t. j. stav systému sa v čase nemení a platí $\mathbf{x}_t = \text{konšt.}$ a $\mathbf{y}_t = \text{konšt.}$ O takomto systéme hovoríme, že je v stave rovnováhy a pre vektorové rovnice vstupov platí:

$$\mathbf{x} = \sum_{\tau=0}^{\theta} T(\mathbf{x}, \tau), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{x} = \int_0^{\theta} T(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

príp. pri jednorazovom priebehu činnosti môžeme rovnicu písať v tvare $\mathbf{x} = T(\mathbf{x})$. Túto rovnicu nazývame rovnicou rovnováhy. Analógia platí aj pre vektorové rovnice výstupov.

Na to, aby bol dynamický systém v stave rovnováhy musí byť splnená podmienka, že existuje vektor, ktorý je riešením rovnice rovnováhy. Rovnicu rovnováhy môžeme zapísať aj v tvare funkcií:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{x}), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{y}).$$

Je zrejmé, že nie všetky systémy môžu nadobúdať stav rovnováhy. Rovnováhu môžu nadobúdať len tie dynamické systémy, v ktorých existuje riešenie rovnice rovnováhy. Stav vstupov a výstupov sa v nerovnovážnych systémoch v priebehu času menia, pričom tieto zmeny v systéme môžu smerovať k rovnovážnemu stavu. Potom hovoríme, že systém je v stave rovnováhy a je stabilný, čo sa matematicky vyjadruje takto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_t = \mathbf{x}^*, \quad \text{resp.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}_t = \mathbf{y}^*,$$

¹⁰ GOGA, M. 2011. *Ekonomická dynamika*. Bratislava: Iura Edition, 2011, ISBN 978-80-8078-394-5, s.56.

kde: \mathbf{x}^* a \mathbf{y}^* je riešenie rovníc rovnováhy.

Ak priebeh funkcií \mathbf{x}_t a \mathbf{y}_t v čase závisí od hodnoty týchto funkcií v určitých diskrétnych okamihoch na intervale $\langle 0, \theta \rangle$ alebo spojitě na celom intervale, potom uvedené limity sú definované na množine stavov, ktorú nazývame oblasťou stability dynamického systému.

Keď označíme dynamické odchýlky stavu vstupov alebo výstupov od rovnovážneho stavu v tvare

$$\Delta \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^*, \quad \text{resp.} \quad \Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_t^*,$$

potom stabilitu dynamického systému môžeme zapísať takto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{x}_t = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{y}_t = 0,$$

pričom trajektória hodnôt $\Delta \mathbf{x}_t$, resp. $\Delta \mathbf{y}_t$ smeruje k nule. Riešením rovnovážnych rovníc sa získa vektorová funkcia \mathbf{x}_t , resp. \mathbf{y}_t , ktorá predstavuje priebeh odchýlky od rovnovážneho stavu systému v čase t . Ak sa odchýlky $\Delta \mathbf{x}_t$, resp. $\Delta \mathbf{y}_t$ postupom času zväčšujú, t. j. hodnoty vstupnej veličiny \mathbf{x}_t , resp. výstupnej veličiny \mathbf{y}_t sa vzdávajú od rovnovážneho stavu \mathbf{x}^* a \mathbf{y}^* , systém je nestabilný.

Stabilita dynamických systémov sa v skutočnosti najčastejšie dosahuje, ako sme uviedli, pomocou spätných väzieb. Preto väčšina kritérií stability, ktoré sa používajú v matematickej teórii optimálneho riadenia sa vzťahuje na dynamické systémy so spätnými väzbami. Aby bola podmienka stability splnená, musí mať systém aspoň jednu spätnú väzbu. Toto je nutná podmienka existencie stability.

Spätné väzby sa členia na dva typy:

- pozitívna spätná väzba je definovaná tak, že ak sa zväčšia (zmenšia) hodnoty vstupujúcej premennej v systéme, potom sa zväčšia (zmenšia) hodnoty vystupujúcej premennej (napr. dynamický model Keynesovho multiplikátora investícií),
- negatívna spätná väzba – ak sa zväčšia (zmenšia) hodnoty jednej premennej v systéme, zmenšia (zväčšia) sa hodnoty druhej premennej.

Spätná väzba je nevyhnutná na stabilitu dynamického systému pre svoj kompenzačný charakter. To znamená, že v prípade odchýlky systému od rovnováhy, musí spätná väzba oslabiť zmeny stavu vstupujúcich veličín v systéme.

Poznamenávame, že stabilita systému nevyžaduje, aby spätná väzba bola negatívna. Pri negatívnej spätnej väzbe stabilný systém smeruje k rovnovážnemu stavu zmenšovaním oscilácií a pri pozitívnej spätnej väzbe stabilný systém smeruje k rovnovážnemu stavu monotónnym približovaním sa k nemu. Na druhej strane, negatívna spätná väzba sama o sebe nezabezpečuje stabilitu systému. Napríklad, pavučinový model predstavuje situáciu, v ktorej trhy s negatívnou spätnou väzbou sa môžu správať buď stabilne alebo nestabilne.¹¹

Stabilita dynamických systémov so spätnými väzbami nie vždy závisí od znamienka spätnej väzby. V matematickej teórii optimálneho riadenia sa používa celý rad rôznych kritérií a metód skúmania stability a rovnováhy dynamických systémov (Hurwitzove, Langeho

¹¹ HUSÁR, J. 2000. Rovnováha, stabilita a dynamika hospodárstva z pohľadu ekonomickej teórie. In: *Ekonomický časopis*, roč. 48, č. 3, 2000, s. 327.

matematické kritériá stability a pod.).¹² Stabilita dynamických systémov závisí v podstate od časového priebehu hodnôt výstupných veličín systémov. Teda, ak sú známe diferenciálne rovnice charakterizujúce dynamické vlastnosti systémov, potom najdôležitejšie informácie na posudzovanie stability týchto systémov poskytujú ľavé strany týchto rovníc, kde sa nachádzajú údaje, ktoré sa vzťahujú na výstupné veličiny.

4 ZÁVER

Záverom môžeme konštatovať, že s rastom ekonomickej úrovne systému nadobúdajú štrukturálne zmeny vedúce k zmierneniu nerovnováh rozdielny stupeň významu. Štrukturálne prvky preukazujú tendenciu k stabilizácii, v čoho dôsledku sa stabilizujú aj makroekonomické štruktúry charakterizujúce odvetvovú štruktúru národného hospodárstva. Pod pojmom stabilizácia makroekonomickej štruktúry chápeme stabilizáciu v relatívnom zmysle. V tejto súvislosti vystupuje do popredia dôležitá otázka, kedy sa pri určitej dosiahnutej ekonomickej úrovni bude makroekonomická štruktúra stabilizovať.

Ak je ekonomika v takej vývojovej etape, že relatívna stabilizácia makroekonomických štrukturálnych zmien sa ešte neprejavuje, potom sa musí pri realizácii štrukturálnej politiky rešpektovať skutočnosť, že realizácia makroekonomických štrukturálnych zmien je spojená s realizáciou súboru mikroekonomických štrukturálnych zmien. Ak je naproti tomu ekonomika v etape rozvoja, kedy sa stabilizácia makroekonomických štrukturálnych zmien prejavuje zjavnými symptómami tejto stabilizácie, potom musí ekonomika pri realizácii štrukturálnej politiky vychádzať zo skutočnosti, že sa mikroekonomické štrukturálne zmeny budú realizovať v rámci vytvorenej makroštruktúry.

Pre súčasnosť je v tomto smere nevyhnutné rešpektovať požiadavku tvorby takej štruktúry ekonomiky, ktorá prispieva k novej kvalite ekonomického rastu a rozvoja. V ekonomickej literatúre sa môžeme stretnúť s pojmom ekonomický rast vysokej kvality.¹³ Pod týmto pojmom sa rozumie rast ekonomiky, ktorý sa vyznačuje trvalou dynamikou, odolnou proti externým ekonomickým šokom. Rast ekonomiky je sprevádzaný internou a externou finančnou stabilitou národného hospodárstva do budúcnosti tým, že zabezpečuje rast investícií, najmä investícií do ľudského faktora. Rešpektuje sociálne, ekonomické a ekologické aspekty rozvoja národného hospodárstva.

Použitá literatúra

1. GANDOLFO, G. 1997. *Economic Dynamics*. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 1997.
2. GOGA, M. 2011. *Ekonomická dynamika*. Bratislava: Iura Edition, 2011, ISBN 978-80-8078-394-5.
3. HENIN, P. Y. 2003. *Macrodynamics: Fluctuations and Growth*. London: Routledge, 2003.

¹² ŠINDELÁŘ, J. – TUZAR, A. 1970. Úvod do teorie stability regulovaných soustav. In: *Kybernetika*, Vol. 6, No 1, 1970, s. 3 – 183.

¹³ MURATA, Y. 1977. *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*. London: Academic Press, 1977.

4. HUSÁR, J. 2000. Rovnováha, stabilita a dynamika hospodárstva z pohľadu ekonomickej teórie. In: *Ekonomický časopis*, roč. 48, č. 3, 2000, s. 319 – 332.
5. HUSÁR, J. 2007. *Makroekonomická analýza*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2007.
6. LAŠČIAK, A. 1995. *Úvahy o ekonomike Slovenskej republiky*. Bratislava: SLOVAKIA PLUS, 1995.
7. LAŠČIAK, A. a kol. 1985. *Dynamické modely*. Bratislava – Praha: Alfa – SNTL, 1985.
8. MORISHIMA, M. 1964. *Equilibrium, Stability and Growth*. London: Oxford University Press, 1964.
9. MURATA, Y. 1977. *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*. London: Academic Press, 1977.
10. PRÍVAROVÁ, M. 1995. *Teória ekonomickej nerovnováhy*. Bratislava: Elita, 1995.
11. PUU, T. 1991. *Nonlinear Economic Dynamics*. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 1991.
12. SHONE, R. 2003. *Economics Dynamics*. London: Cambridge University Press, 2003.
13. ŠINDELÁŘ, J. – TUZAR, A. 1970. Úvod do teorie stability regulovaných soustav. In: *Kybernetika*, Vol. 6, No. 1, 1970, s. 3 – 183.
14. WEI-BIN ZHANG. 1990. Economic Dynamics. Growth and Development. In: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, No. 350, 1990.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Marián Goga, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

Tel.: +4212/67295824

e-mail: goga@euba.sk

DEA MODELY – MĚŘENÍ EFEKTIVNOSTI VEŘEJNÉ DOPRAVY V ČESKÉ REPUBLICCE

DEA MODELS – MEASURING EFFICIENCY PUBLIC TRANSPORTATION IN CZECH REPUBLIC

Jakub Hanousek

Abstrakt

Tento článek se zabývá aplikací DEA modelů na autobusovou dopravu ve veřejném zájmu v krajích ČR. Jedná se o metodu lineárního programování, která slouží k měření efektivnosti jednotek. A právě neustálý tlak na zvyšování dotací při současném poklesu výkonnosti je problémem veřejné dopravy v posledních letech. Analýza výsledné míry efektivnosti pro jednotlivé kraje bude provedena také se zřetelem ke specifickým faktorům kraje.

***Klíčové slová:** efektivnost, DEA modely, veřejná doprava*

Abstract

This article deals with using DEA models to assess efficiency of the bus public transport in the Czech Republic regions. It is a method based on linear programming used to measuring efficiency of units. The main problem of public transport is the constant pressure to increase subsidies into this sector whilst the efficiency decreases. The analysis of the resulting efficiency rates of all the different regions will be carried out with respect to the regions' specific characteristics. In the conclusion the optimal values will be proposed.

***Keywords:** efficiency, DEA models, public transport*

1 ÚVOD

Tento článek se zabývá hodnocením efektivnosti autobusové dopravy ve veřejném zájmu v České republice za pomoci metody lineární optimalizace, která se nazývá analýza obalu dat, zkráceně DEA modely. Objektem hodnocení je 14 krajů, které v rámci své působnosti veřejnou dopravu zajišťují a částečně financují z veřejných zdrojů. Veřejná doprava je chápána jako veřejná služba k zajištění mobility občanů daného kraje. Problémem je neustálý tlak na zvyšování dotací při současném poklesu výkonnosti. Tento vývoj je markantní zvláště v posledních letech. V situaci, kdy dotované linky jsou provozovány pouze jedním dopravcem s nárokem na plnou kompenzaci ztráty, není dostatečný zájem na zvyšování efektivnosti poskytnuté služby.

Analýza bude prováděna pomocí DEA modelů. jako nástroje měření efektivnosti jednotek s možností jejich srovnání. Výhodou zmíněné metody je schopnost zahrnout do hodnocení více vstupů a výstupů, a to v různých jednotkách. Dále není třeba znát přesný tvar produkční funkce ani funkční vztahy mezi vstupy a výstupy.

2 EFEKTIVNOST

Úvahy o efektivnosti vycházejí z povahy ekonomických zdrojů a našich potřeb. Pokud by zdroje byly dostupné v neomezeném množství a technologie by umožnily vyprodukovat tolik statků a služeb, kolik každý člověk požaduje, potom by efektivnost nebyla důležitá. Realita je

však jiná. Převážná část zdrojů má podobu vzácných statků, proto je musíme využívat efektivně.

Při analýze efektivnosti se často setkáváme s pojmem *Pareto efektivnost* nebo Pareto optimalita. Pareto efektivnosti neboli efektivity je dosaženo, jestliže žádné možné přeskupení výroby nemůže zapříčinit, že na tom bude kdokoliv lépe, aniž by na tom byl někdo hůře (Samuelson, 2013).

3 DEA MODELÝ

Modely analýzy obalu dat byly navrženy jako nástroj k hodnocení efektivnosti homogenních produkčních jednotek. Homogenní produkční jednotka spotřebovává určité množství **vstupů** a vytváří určitý objem **výstupů**. Snahou jednotky je vyprodukovat co největší objem výstupu s co nejmenším vstupem.

DEA modely berou v úvahu více různých vstupů a výstupů. Míru efektivnosti jednotky můžeme obecně vyjádřit jako poměr váženého součtu vstupů a váženého součtu výstupů, tedy

$$\frac{\sum_i u_i y_{iq}}{\sum_j v_j x_{jq}} \quad (1)$$

Kde v_j jsou váhy j -tého vstupu a u_i jsou váhy i -tého výstupu,

$\mathbf{X} = \{x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ je matice vstupů a $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Všechny přípustné kombinace vstupů a výstupů tvoří **množinu přípustných možností**, která je určena tzv. **efektivní hranicí**. Produkční jednotky, jejichž kombinace vstupů a výstupů leží na efektivní hranici, jsou **efektivními jednotkami** (Jablonský a Dlouhý, 2004).

Tvar efektivní hranice závisí na charakteru **výnosů z rozsahu**, které mohou být konstantní, nebo variabilní, a to rostoucí nebo klesající.

- **Konstantní výnosy z rozsahu**

Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu znamená, že je-li kombinace vstupů a výstupů (x, y) prvkem množiny přípustných možností, potom je prvkem této množiny i kombinace $(\alpha x, \alpha y)$, kde $\alpha > 0$ (Jablonský a Dlouhý, 2004).

- **Variabilní výnosy z rozsahu**

V případě variabilních výnosů z rozsahu už neplatí požadavek, že pro zachování efektivnosti musí být α -násobný nárůst vstupů provázen α -násobným růstem výstupů. Dochází k modifikaci efektivní hranice. efektivní hranice tvoří obal dat, který je **konvexní** (Jablonský a Dlouhý, 2004). To vede k nárůstu počtu efektivních jednotek.

3.1 CCR model

V roce 1978 byl navržen první DEA model vycházející z předpokladu konstantních výnosů z rozsahu. Jeho název byl odvozen od počáteční písmen tvůrců Charnese, Coopera a Rhodese. Východiskem zůstává poměr (1), který chceme maximalizovat. Pro každou jednotku pracujeme s tzv. virtuálním vstupem a virtuálním výstupem, což je vážený součet jednotlivých vstupů a výstupů. Jednotlivé váhy jsou vypočítány optimalizačním způsobem při dodržení podmínek maximální jednotkové efektivnosti všech ostatních jednotek. Model lze zapsat následovně (Charnes et al., 1994):

Maximalizovat:

$$z = \frac{\sum_i^r u_i y_{iq}}{\sum_j^m v_j x_{jq}}$$

Za podmíněk:

$$\frac{\sum_i^r u_i y_{iq}}{\sum_j^m v_j x_{jq}} \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

kde z je míra efektivnosti q -té jednotky, je infinitezimální konstanta, která zabezpečuje, že všechny váhy vstupů a výstupů budou kladné, je hodnota j -tého vstupu hodnocené jednotky, je hodnota i -tého výstupu hodnocené jednotky, je hodnota j -tého vstupu k -té jednotky a je hodnota i -tého výstupu k -té jednotky. x_{jk} je hodnota

Model (2) není lineární. Převědeme ho na úlohu lineárního programování pomocí Charles-Cooperovy transformace a dostaneme **primární CCR model orientovaný na vstupy**, který má podobu (Charnes et al., 1994):

Maximalizovat:

$$z = \sum_i^r u_i y_{iq},$$

Za podmíněk:

$$\sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_j^m v_j x_{jq} = 1 \quad (3)$$

$$u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Z výpočetního hlediska i z hlediska interpretace je lepší pracovat s duální formulací modelu (3). V něm pracujeme s proměnnými λ , které představují váhy jednotlivých jednotek. Další proměnnou modelu je θ_q , což je potřebná míra redukce vstupů pro dosažení efektivní hranice.

Duální CCR model orientovaný na vstupy je formulován následovně (Charnes et al., 1994):

Minimalizovat:

$$\theta_q,$$

Za podmíněk:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_q x_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j \geq y_{kq}, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Model se snaží najít virtuální jednotku charakterizovanou vstupy $\mathbf{X}\lambda$ a výstupy $\mathbf{Y}\lambda$, které jsou lineární kombinací vstupů a výstupů ostatních jednotek a které nejsou horší než vstupy a výstupy hodnocené jednotky. Hodnocená jednotka je efektivní, pokud virtuální jednotka s těmito vlastnostmi neexistuje, resp. je totožná s hodnocenou jednotkou. Tato situace nastane, jestliže proměnná θ_q je rovna jedné. Zároveň všechny přídatné proměnné jsou rovny nule. Po doplnění přídatných proměnných do modelu (4) dostaneme výpočetní tvar modelu v maticové podobě (Charnes et al., 1994):

Minimalizovat:

$$z = \theta_q - \varepsilon (\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-),$$

Za podmínek:

$$\mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \theta_q \mathbf{x}_q, \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq 0$$

Kde \mathbf{s}^+ a \mathbf{s}^- jsou vektory přídatných proměnných v omezeních pro vstupy a výstupy a vektor $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$.

Cílové hodnoty pro dosažení efektivní hranice $(\hat{\mathbf{x}}_q, \hat{\mathbf{y}}_q)$ můžeme získat jedním z následujících dvou způsobů:

1. $\hat{\mathbf{x}}_q = \mathbf{X}\lambda^*$, $\hat{\mathbf{y}}_q = \mathbf{Y}\lambda^*$, kde λ^* je vektor optimálních hodnot vah vypočtených modelem (5)
2. $\hat{\mathbf{x}}_q = \theta_q^* \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{-*}$, $\hat{\mathbf{y}}_q = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{+*}$, kde symboly s hvězdičkou (*) jsou vektory optimálních hodnot modelu (5)

Tyto hodnoty udávají, na jakou úroveň je třeba snížit vstupy při stejných výstupech, aby jednotka byla efektivní.

Analogicky lze formulovat **duální CCR model orientovaný na výstupy** v maticové podobě:

Maximalizovat:

$$g = \phi_q + \varepsilon (\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-),$$

Za podmínek:

$$\mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q, \quad (6)$$

$$\mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \phi_q \mathbf{y}_q,$$

$$\lambda, s^+, s^- \geq 0.$$

Hodnocená jednotka je efektivní, jestliže optimální hodnota účelové funkce $g^* = 1$. Pokud je optimální hodnota větší než jedna, jedná se neefektivní jednotku a optimální hodnota proměnné ϕ_q^* udává potřebné navýšení výstupů pro dosažení efektivní hranice.

Cílové hodnoty pak dostaneme:

1. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{X}\lambda^*$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{Y}\lambda^*$, kde λ^* je vektor optimálních hodnot vah vypočtený modelem (6).
2. $\mathbf{x}_q' = \phi_q^* \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{-*}$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{+*}$, kde symboly s hvězdičkou (*) jsou vektory optimálních hodnot proměných modelu 6

Pro optimální řešení CCR modelů platí, že hodnota účelové funkce v modelu orientovaném na vstupy je převrácenou hodnotou účelové funkce v modelu orientovaném na výstupy.

3.2 BCC model

Model, který předpokládá variabilní výnosy z rozsahu, byl navržen v roce 1984 Bankerem, Charnesem a Cooperem. Konvexní obal dat vede ke skutečnosti, že na efektivní hranici se nachází více jednotek, než je tomu u CCR modelu. Pro formulaci BCC modelů stačí přidat k modelům (5 a 6) podmínku konvexnosti $\mathbf{e}^t \lambda = 1$. Dostaneme **duální BCC model orientovaný na vstupy** v následující podobě (Charnes et al., 1994):

Minimalizovat:

$$z = \theta_q + \varepsilon (\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-)$$

Za podmínek:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- &= \theta_q \mathbf{x}_q, \\ \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ &= \mathbf{y}_q, \\ \mathbf{e}^t \lambda &= 1, \\ \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- &\geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Analogicky bude odvozen **duální BCC model orientovaný na výstupy**

Maximalizovat:

$$\begin{aligned} g &= \phi_q + \varepsilon (\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\ \mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- &= \mathbf{x}_q, \\ \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ &= \phi_q \mathbf{y}_q, \\ \mathbf{e}^t \lambda &= 1, \\ \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- &\geq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Interpretace i způsob zjišťování cílových hodnot jsou u modelů (7) a (8) stejné jako v případě modelů (5) a (6).

4 VEŘEJNÁ AUTOBUSOVÁ DOPRAVA

Na veřejnou autobusovou dopravu můžeme nahlížet jako na statek soukromý nebo veřejný. Tyto principy jsou také uplatněny na trhu autobusové dopravy v České republice. Část trhu je provozovaná na komerční bázi a část je objednáвана veřejnými subjekty a financovaná z veřejných peněz.

Nedotovaná doprava je provozována na trzích s dostatečnou poptávkou po přepravních službách. Jedná se hlavně o trasy mezi velkými městy, na kterých probíhá konkurenční boj mezi soukromými dopravci (například linku Praha-Brno provozuje v 11 dopravců). V tomto případě je role státu zbytečná, protože zákazník si sám vybere nejlepšího dopravce, naopak regulace a dotace způsobí neefektivnost. Nejedná se však o čistý případ volné soutěže, protože určitou formou regulace je vydávání licencí na příslušnou linku s cílem zajistit určitou kvalitu poskytované služby a ochranu životního prostředí.

Část veřejné autobusové dopravy je poskytována v obecném zájmu a je spolufinancována z veřejných zdrojů. Na její úhradě se podílejí hlavně kraje, malá část jde z rozpočtů obcí.

5 APLIKACE DEA MODELŮ

Za produkční jednotku bude považován v souladu s předchozím výkladem kraj, který v rámci své působnosti veřejnou dopravu zajišťuje a spolufinancuje. Množina produkčních jednotek bude tvořena 14 kraji České republiky.

Výhodou DEA modelů oproti jiným metodám je možnost zahrnout do analýzy více proměnných, tj. vstupů a výstupů a tím jednotku hodnotit komplexněji. Zároveň není třeba řešit, že proměnné jsou v různých jednotkách a řádech.

Důležitým předpokladem je vhodně zvolit vstupní a výstupní veličiny modelu tak, aby co nejvíce reprezentovaly reálnou situaci. Jejich počet by pak měl odpovídat velikosti sledovaného souboru, tj. v našem případě počtu krajů. Obecně se doporučuje trojnásobek součtu počtu vstupů a výstupů. Pokud je počet sledovaných jednotek malý vzhledem k počtu vstupů a výstupů, pak bude většina jednotek ležet na efektivní hranici.

Vstupy: Náklady, Autobusy

Výstupy: Tržby, Jízdní výkony, Přepravní výkony

Kraj	Náklady (tis. Kč)	Autobusy (ks)	Tržby (tis. Kč)	Jízdní výkony (tis. Km)	Přepravní výkony (tis. osob)
Hl.město Praha	83686	135	38714	5900	3835
Středočeský	1733190	692	985864,8	42840	42281
Jihočeský	604423	312	228374,3	19262	16954
Plzeňský	550521,2	289	190586	14797	12298
Karlovarský	214056,7	159	83260,9	6645	6973
Ústecký	302921,8	350	126743,8	19275	13130
Liberecký	394205	288	177430	12458	11267
Královehradecký	506508	229	224752	18634	14063
Pardubický	457525	425	182731,8	18873	12744
Vysočina	496714,8	282	220046	15535	15200
Jihomoravský	1201183	596	632198	41520	40281
Olomoucký	684731,9	189	268178,2	17367	24075

Zlínský	676885	266	385193	21896	24084
Moravskoslezský	1118801	676	512464,6	30558	36104

Tab. 5.1: Data pro DEA modely, zdroj: Ministerstvo dopravy, IODA, autor

Jak bylo dříve uvedeno, předpokladem DEA modelů je homogenita produkčních jednotek. Určitá pochybnost vznikla v otázce zařazení Hl. města Praha do souboru jednotek. Praha vystupuje jako samostatný kraj, ale veřejná doprava je podobně jako v dalších městech zajištěna v rámci městské hromadné dopravy. Linková autobusová doprava je z tohoto pohledu okrajová. Na základě testu jak zařazení či vyřazení Prahy ovlivní efektivní hranici a míry efektivnosti, jsem dospěl k závěru, že nedochází k významným rozdílům, a proto jsem jednotku do souboru zařadil.

Kraj	CCR-1	BCC-1	CCR-0	BCC-0
Hl.město Praha	1,000	1,000	1,000	1,000
Středočeský	0,999	1,000	1,001	1,000
Jihočeský	0,835	0,837	1,198	1,179
Plzeňský	0,697	0,708	1,435	1,425
Karlovarský	0,830	0,919	1,205	1,191
Ústecký	1,000	1,000	1,000	1,000
Liberecký	0,816	0,818	1,225	1,215
Královéhradecký	1,000	1,000	1,000	1,000
Pardubický	0,803	0,824	1,245	1,193
Vysočina	0,821	0,822	1,218	1,216
Jihomoravský	0,953	1,000	1,049	1,000
Olomoucký	1,000	1,000	1,000	1,000
Zlínský	1,000	1,000	1,000	1,000
Moravskoslezský	0,858	0,950	1,166	1,047

Tab. 5.2: Výsledky CCR a BCC modelů, zdroj: autor

Všechny kraje s hodnotou míry efektivnosti 1 leží na efektivní hranici a jsou v rámci daného souboru krajů efektivní. Charakter výnosů z rozsahu pak určuje, že tuto podmínku splňuje 5 krajů v případě konstantních výnosů z rozsahu a 7 krajů v případě variabilních výnosů z rozsahu. Průměrná míra efektivnosti pro CCR-I model je **90,1%** (resp. pro CCR-O model je 112,4%). Tuto hranici překračuje 7 krajů (Hl. město Praha, Středočeský, Ústecký, Královéhradecký, Jihomoravský, Olomoucký a Zlínský). Průměrná míra efektivnosti v případě BCC-I modelu je **91,9 %** (resp. pro BCC-O model je 110,5%) a lepší než průměr je 9 krajů (přibyly kraje Karlovarský a Moravskoslezský).

Pro lepší přehlednost si kraje rozdělíme do několika skupin dle výsledku CCR modelu orientované na vstupy (CCR model v orientaci na výstupy dává stejné výsledky).

Míra efektivnosti	Kraj
= 1	Hl. město Praha, Ústecký, Královéhradecký, Olomoucký, Zlínský
< 0,9 – 1)	Středočeský, Jihomoravský
< 0,8 – 0,9)	Moravskoslezský, Jihočeský, Karlovarský, Vysočina, Liberecký, Pardubický
< 0,8	Plzeňský

Tab. 4.4: Rozdělení krajů dle míry efektivnosti, zdroj: autor

Předchozí analýza ukázala, že existuje více krajů s mírou efektivnosti 1. Tyto kraje by mohli být dále uspořádány podle výsledků tzv. super efektivnosti, které však nebudou součástí tohoto článku.

6 ZÁVĚR

Stěžejní částí tohoto článku byla praktická aplikace na reálná data, která jsem získal v databázi Ministerstva dopravy a na webových stránkách jednotlivých krajů ČR. Pro vyjádření relevantních vstupů jsem zvolil náklady, jako souhrnné peněžní ocenění všech vstupů a počet autobusů pro vyjádření kapitálového vstupu. Výstupy byly charakterizovány tržbami za prodané jízdenky a výkony, konkrétně jízdami a přepravami.

Pro vlastní analýzu byly zvoleny modely v orientaci na vstupy i výstupy, protože poskytují jiný pohled na zvolenou problematiku. Výpočty provedené základními modely ukázaly, že průměrná efektivnost pro CCR-I model je 90,1% a tuto hranici překročilo 7 krajů. Průměrná míra efektivnosti pro BCC-I modely byla 91,9 % a lepší než průměr bylo 9 krajů.

Výsledky jsem dále porovnal s faktory, které by mohly mít vliv na výslednou míru efektivnosti, a které v modelech nebyly zahrnuty. Jednalo se hlavně o hustotu obyvatelstva, průměrnou mzdu a alternativní způsoby dopravy. Tyto vlivy se potvrdily hlavně v případě Prahy. Částečně vysvětlily i nižší efektivnost krajů s menší hustotou obyvatel. Kraj Plzeňský vykázal nejnižší míru efektivnosti 70 %, v tomto případě se nízká efektivnost nedala vysvětlit pouze uvedenými faktory. Za zmínku stojí srovnání krajů Královéhradeckého a Pardubického, které mají velmi podobné geografické i demografické charakteristiky. Kraj Královéhradecký se ukázal 100 % efektivní, zatímco Pardubický kraj dosáhl míry efektivnosti jen 80 %. Krajem s nejvyšší mírou efektivnosti se stal Olomoucký kraj, jedná o kraj s průměrnou hustotou osídlení a s menším počtem aut. Ve větší míře je rovněž využívána i veřejná železniční doprava.

K zajímavému závěru jsem dospěl, když jsem porovnal míry efektivnosti krajů vypočtené DEA modely s dotacemi do autobusové dopravy na obyvatele kraje. Kraje, které dosáhly „nejlepších“ výsledků měly i méně dotací na obyvatele ve srovnání s ostatními kraji a naopak kraje s nejnižší mírou efektivnosti dotovaly dopravu více.

Použitá literatura

1. CHARNES, A., COOPER, W.W., LEWIN, A., SEIFORD, L.: *Data envelopment analysis: Theory, methodology and applications*. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1994, 422 s.
2. FIALA, P a kolektiv: *Operační výzkum – nové trendy*. Praha: Professional Publishing, 2010, 239 s.
3. JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ, M.: *Modely hodnocení efektivnosti produkčních jednotek*. Praha: Professional Publishing, 2004, 183 s.
4. Informace pro dopravní analýzy, dostupné z: <http://www.ioda.cz/> [cit. 2015-03-08].
5. Ministerstvo dopravy, dostupné z: <http://www.mdcz.cz/> [cit. 2015-03-08].
6. Společnost Banxia, dostupné z: <http://www.banxia.com/> [cit. 2015-04-10].
7. Zákon 194/2010 Sb. o veřejných službách v přepravě cestujících.

Kontaktní údaje

Ing. Jakub Hanousek

Vysoká škola ekonomická v Praze, fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

Email: xhanj52@vse.cz

MODELOVANIE VPLYVU FAKTORINGU NA HODNOTU FIRMY

MODELING THE IMPACT OF FACTORING ON THE VALUE OF THE COMPANY

Eduard Hozlár

Abstrakt

V príspevku sa prezentuje prístup k modelovaniu vplyvu finančných zdrojov z faktoringu na hodnotu firmy. Ide o firmy, ktoré efektívne využívajú úverové zdroje na základe faktoringových zmlúv. Tento typ cudzích zdrojov využívajú hlavne stredne veľké výrobné podniky. Zvolený je prístup k modelovaniu hodnoty firmy na základe CAPM modelu. Skúma sa pritom vplyv zmien iba jednej zložky cudzích zdrojov na výslednú hodnotu firmy.

Príučové slová: hodnota firmy, modelovanie, faktoring

Abstract

The paper presents an approach to modeling the impact of financial resources on factoring on company value. These are companies that effectively use credit resources based on factoring contracts. This type of foreign resource is mainly used by medium-sized manufacturing companies. The approach to modeling company value based on the CAPM model is selected. It examines the impact of changes to only one component of foreign sources on the resulting company value.

Keywords: company value, modeling, factoring

1. MODELOVANIE HODNOTY FIRMY – ZÁKLADNÉ TEORETICKÉ PRÍSTUPY

Pre modelovanie financovania firmy sa zameriame na *vlastné financovanie* a *cudzíe financovanie*. Vlastným financovaním plynie do podniku určitá časť zdrojov, ktorú nazývame *vlastný kapitál*, ktorý je hlavným nositeľom podnikateľského rizika a nemá stanovenú splatnosť. Medzi vlastný kapitál patrí v prvom rade základné imanie, ktorého výška a spôsob ručenia závisí od právnej formy podnikania. Ak sa finančné potreby kryjú zdrojmi z vlastnej činnosti (zisk, odpisy), ide o samofinancovanie, ktoré znižuje potrebu cudzieho kapitálu.

Prevládajúcim finančným zdrojom firmy sú najčastejšie *cudzíe zdroje*, ktoré majú návratný charakter. Cena cudzích zdrojov je nižšia ako cena vlastných zdrojov, pretože riziko, ktoré podstupuje vlastník firmy je vyššie ako riziko, ktoré podstupuje veriteľ. Cudzíe zdroje financovania sú vo všeobecnosti úverové zdroje, ktoré poskytuje veriteľ dlžníkovi za úrok na základe zmluvy. Riziko veriteľa priamo závisí na dobe poskytnutia úveru. Platené úroky sú pre dlžníka súčasťou nákladov.

Osobitú úverovú formu financovania predstavuje poskytnutie úveru formou faktoringu. V hlavnom členení rozlišujeme čistý faktoring (resp. faktoring bez regresu) a faktoring s regresom.

Bezregresný faktoring. V tomto type faktoringu faktor znáša celé riziko z nezaplatenia odkúpenej pohľadávky a od klienta nemôže požadovať žiadne plnenie. Preto cena odkúpenej pohľadávky zahŕňa aj rizikovú prirážku za nezaplatenie pohľadávky do lehoty jej splatnosti ako aj za prevzatie správy.

Faktoring s regresom: Pri faktoringu s regresom faktor vráti klientovi ohrozené pohľadávky, ktoré neboli uhradené do lehoty splatnosti. Riziko ohrozených pohľadávok znáša klient. Faktor vykonáva všetky služby súvisiace so správou pohľadávok klienta, ale nenesie žiadne riziko spojené s platobnou neschopnosťou odberateľov klienta. Faktor požaduje od klienta dva druhy poplatkov: a) faktoringový poplatok za správu pohľadávok a ich inkaso a b) a úrok za poskytnuté a čerpané úverové financovanie.

1.1. Trhová hodnota kapitálu

na kapitál. Optimálna štruktúra kapitálu je taká jeho štruktúra, pri ktorej sa dosahuje najvyššia trhová hodnota firmy, resp. *minimálne náklady na celkový kapitál*, pričom musia byť splnené podmienky pre udržiavanie schopnosti plniť záväzky voči veriteľom riadne a včas. *Kapitálová štruktúra firmy* je podiel jednotlivých zložiek vlastného a cudzieho kapitálu na celkovom kapitále, ktorým kryjeme celý majetok firmy.

Z hľadiska určovania hodnoty firmy alebo investície náklady na kapitál podniku považujeme za najvýznamnejší faktor rozhodovania. V rámci kapitálovej štruktúry ide o výdavok, ktorý spájame so získavaním a viazaním rôznych foriem kapitálu.

Náklady na cudzí kapitál (náklady na dlh) vznikajú pri forme úveru alebo pri emisii obligácie. Vyjadrujeme ho ako úrok, ktorý podnik platí svojim veriteľom a pri výpočte nesmieme zabudnúť, že úroky znižujú základ dane z príjmu.

Náklady na vlastné imanie predstavujú zisk, ktorý získavajú vlastníci ako výnos kapitálu, ktorý investovali do vybraného podniku.

Náklady na celkový kapitál firmy vyjadrujeme ako *priemerné náklady na celkový kapitál*, ktoré závisia nielen od nákladov na získanie foriem kapitálu, ale aj od podielu zložiek kapitálu na celkovom kapitále podniku. Náklady kapitálu vyjadrujeme v trhových hodnotách.

Klasický prístup k modelovaniu hodnoty firmy spočíva v skúmaní jej finančnej štruktúry a priemerných nákladov na celkový kapitál z hľadiska dosiahnutia maximálnej trhovej hodnoty firmy. Tejto problematike sa venovalo veľa autorov, napr. BREALEY, R.A., 2014, KRAĽOVIČ, J. – VLACHYNSKÝ, K. 2011, KRIŠTOFÍK, P. et al. 2010 a iní. Platí, že čím je podnik zadlženejší, tým nižšie sú priemerné náklady kapitálu pre podnik a tým vyššia je trhová cena podniku a tým vyšší zisk pripadá na každú vlastnícku jednotku (napr. jednu akciu). Keby však zadlženosť podniku rástla až na hranicu platobnej neschopnosti, majitelia (akcionári) by zvýšili požadovaný výnos na svoj kapitál kvôli kompenzácii rizika. Z toho vyplýva, že do určitého podielu cudzieho kapitálu celkové náklady podniku na kapitál klesajú a potom začínajú rásť. Za týchto predpokladov je možné určiť optimálnu finančnú štruktúru podniku. Je v bode, v ktorom celkové náklady na kapitál sú minimálne. V tomto bode sa dosahuje aj optimálna (najvyššia) trhová cena podniku.

1.2. Modelovanie nákladov na kapitál

Zníženie priemerných nákladov na podnikový kapitál (t.j. vážený aritmetický priemer nákladov vlastného a cudzieho kapitálu) zvyšuje trhovú hodnotu podniku. *Vážené priemerné*

náklady na celkový kapitál r_A predstavujú priemernú mieru výnosu, ktorú požadujú poskytovatelia vlastného kapitálu a poskytovatelia dlhového kapitálu. Výpočet priemerných nákladov kapitálu je diskutovaný napr. v (Brealey, Myers, Allen, 2014). Výpočet r_A má nasledovné parametre:

$$r_A = r_E \frac{E}{E + D} + r_D \frac{D}{E + D} \quad (1)$$

kde

r_E – náklady na vlastný kapitál, t.j. výnos, ktorý požadujú majitelia spoločnosti (v podobe dividend a zvýšenia hodnoty spoločnosti),

r_D – náklady na dlhový kapitál po zdanení, t.j. výnos, ktorý požadujú poskytovatelia dlhu (napr. úrok požadovaný bankou), očistený o úrokový daňový štít,

E – trhovú hodnotu vlastného kapitálu (imania) spoločnosti,

D – trhovú hodnotu dlhového kapitálu spoločnosti, pričom E a D slúžia ako váhy pre výpočet váženého priemeru.

Náklady na vlastný kapitál r_E sa najčastejšie počítajú pomocou modelu CAPM v tvare

$$r_E = r_f + r_p \beta + r_s, \quad (2)$$

kde

r_f – výnos z investície do bezrizikových aktív, ktorý investorom prinášajú „bezrizikové“ aktíva. Ak firma podniká na Slovensku, môžeme použiť výnosy slovenských štátnych dlhopisov.

r_p – trhovú riziková prirážka, t.j. dodatočný výnos nad úroveň výnosu z bezrizikovej investície, ktorý požadujú investori do (viac rizikového) akciového trhu. Tento rozdiel je potom potrebné upraviť o riziko krajiny.

β – beta koeficient daného odvetvia, ktorý vyjadruje rizikovosť konkrétneho odvetvia alebo spoločnosti v pomere k riziku z investície do celkového akciového trhu (ktorý má koeficient beta rovný 1).

r_s – špecifická riziková prirážka týkajúca sa konkrétnej spoločnosti (napr. prirážka za veľkosť spoločnosti)

Pri výbere bezrizikového aktíva treba zohľadniť krajinu a menu, v ktorej sa budú peňažné toky realizovať. Pre slovenské firmy sa môžu použiť výnosy slovenských štátnych dlhopisov. Historický prehľad výnosov do splatnosti benchmarkového 10 ročného vládneho dlhopisu uverejňuje aj NBS. Prehľad trhových rizikových prirážok (equity risk Premium ERP) je možné nájsť napríklad internetovej stránke amerického profesora financií na Stern School of Business Univerzity v New Yorku Aswatha Damodarana [10]. Informácie uverejnené na tejto internetovej stránke často používajú aj odborníci na oceňovanie a finančné modelovanie na celom svete.

Náklady cudzieho kapitálu. Pri nákladoch na dlhový kapitál r_D sa berie do úvahy daňový úrokový štít, t.j. používajú sa náklady na dlhový kapitál po zdanení:

$$r_D = i (1 - d) \quad (3)$$

kde i je úroková sadzba dlhového kapitálu a d je sadzba dane z príjmov.

Ak má firma viacero úverov a iných cudzích zdrojov, treba vypočítať vážené úrokové náklady pretože je potrebné odhadnúť, za akú priemernú úrokovú sadzbu by podnik dokázal na trhu prefinancovať celý svoj existujúci dlh.

Pre naše potreby budeme skúmať faktoringové úverovanie, kde náklady na tento typ úveru obsahujú nielen úrok z úveru ale aj faktoringový poplatok. Tento typ úverovania využívajú tie firmy, ktoré potrebujú viac hotovosti a nemajú dosť iného majetku na ručenie bankového úveru. Preto sú aj náklady na tento úver vyššie ako na bankový úver.

1.3. Ilustrácia výpočtu priemerných nákladov na celkový kapitál

Pre ilustráciu výpočtu uvedeného v Tabuľke 1 sme si zvolili firmu, ktorá má pomer dlhu a vlastného imania 64%, riziková prirážka je prepočítaná ratingom Slovenska Aa a aktuálnym údajmi k 1.7.2018 z databázy Damodarana [10]. Pre zadané údaje nám podľa (1) až (3), kde stupeň samofinancovania je 70/105 a stupeň zadlženosti 45/105, vyšli priemerné náklady na celkový kapitál 8,06%. V tomto príklade sme uvažovali s priemernou hodnotou dlhu pred zdanením 4,5%.

r_f - výnos z investície do bezrizikových aktív	0,81%
r_p - trhová riziková prirážka	5,88%
β - koeficient beta	0,97
r_s - špecifická riziková prirážka	4,50%
r_E - náklady na vlastný kapitál	10,99%
Priemerné náklady na dlhový kapitál spoločnosti	4,50%
d – sadzba dane z príjmov	21,0%
r_D – náklady na dlhový kapitál po zdanení	3,56%
Trhová hodnota dlhového kapitálu	45,0
Trhová hodnota vlastného imania	70,0
Pomer dlhu a vlastného imania	64%
Sadzba dane z príjmov	21,0%
priemerné náklady kapitálu	8,08%

Tabuľka 1: Výpočet priemerných nákladov kapitálu – vlastné spracovanie podľa [10].

2. STOCHASTICKÝ MODEL NÁKLADOV NA CELKOVÝ KAPITÁL PRI FAKTORINGOVOM ÚVEROVANÍ

Pri zapojení faktoringového úverovania náklady na dlh určite vzrastú jednak o zvýšené riziko faktora a o prepočítaný faktoringový poplatok. Uvažujme o tom, že nárast priemernej ceny dlhového kapitálu i vzrastie o náhodnú veličinu f rovnomerne rozdelenú v intervale $\langle 0; c \rangle$, kde c vyjadruje maximálny percentuálny prírastok ceny dlhu. Úlohou je nájsť takú štruktúru kapitálu, pri ktorej sa s vysokou pravdepodobnosťou zníži priemerná cena celkového kapitálu, čo má za následok zvýšenie hodnoty firmy.

Označme α stupeň zadlženosti firmy, t.z. $(1 - \alpha)$ je jej stupeň samofinancovania. Ak i je priemerná cena bankového dlhu a d sadzba dane z príjmu, f sadzba nákladov za faktoring, výška ktorej je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v intervale $\langle 0; c \rangle$, potom optimalizačný model má tvar

minimalizovať $E((1 - \alpha)r_E + \alpha r_D)$

za podmienok

$$P((1 - \alpha)r_E + \alpha r_D < r_A) = \gamma$$

$$r_D = (i + f)(1 - d)$$

$$f \approx R(0; c)$$

$$\alpha \geq 0$$

V tomto modeli ide o nájdenie optimálnej hodnoty stupňa zadlženosti pri zadanej úrovni priemerných nákladov na celkový kapitál.

Iný prístup je spojený s pomerovým ukazovateľom D/E , ktorá si označme ako k . Potom rovnica (1) má tvar

$$r_A = r_E \frac{1}{1 + k} + r_D \frac{k}{1 + k}$$

Ak by sme za dlhové financovanie zvolili faktoring, ktorý by zvýšil priemerné náklady na dlh o hodnotu $\delta = (1 - d)f$, potom možno medzi k a δ odvodiť nasledovný vzťah:

$$\delta = \frac{r_E - r_D}{k} + r_D - r_A,$$

kde $k \geq 0$.

V tomto prípade môžeme hľadať maximálnu hodnotu pomeru D/E :

maximlizovať k

za podmienok

$$P(f < \frac{1}{1-d} (\frac{r_E - r_D}{k} + r_D - r_A))$$

$$f \approx R(0; c)$$

$$k \geq 0.$$

V uvedenom prístupe k modelovaniu priemerných nákladov na celkový kapitál pre firmy, ktoré využívajú ako hlavný zdroj financovania dlhového kapitálu faktoring s regresom je ukázané, že nárast nákladov na dlhový zdroj cez faktoring má zmysel iba vtedy, keď pomer dlhu a vlastných zdrojov je menší ako 1. Túto podmienku spĺňajú firmy zamerané na výrobnú činnosť pre obchod. Zvyšovaním ceny dlhu pre zachovanie priemerných nákladov na kapitál treba meniť štruktúru kapitálu v prospech vlastného kapitálu.

Použitá literatúra

1. JUDIN, D.B., 1981: Matematické meódy riadenia pri neúplnej informácii, Alfa,
2. ZALAI, K. et al. 2013. Finančno – ekonomická analýza podniku. Bratislava: Sprint 2 s.r.o., 2013. 471 s. ISBN 978-8089393-80-0.
3. BREALEY, R.A., MYERS, S.C., ALLEN, F., 2014: Teorie a praxe firemních financií. Aktualizované vydanie. BizBooks, Brno
4. HOZLÁR, E., 2016: Faktoring ako alternatívny zdroj financovania prevádzky podniku. In Finančný manažér : periodikum Slovenskej asociácie podnikových

- finančníkov. - Bratislava : Slovenská asociácia podnikových finančníkov, 2016. ISSN 1335-5813, 2016, roč. 16, č. 3, s. 30-42.
5. HOZLÁR, E., 2017: Stochastický model štruktúry financovania podniku. In: Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi 12 : zborník zo seminára. - Bratislava : EKONÓM, S. 82-88
 6. HARUMOVÁ, A. et al. 2008. Stanovenie hodnoty majetku: hlavné aspekty ekonomickej znaleckej a expertnej činnosti. Bratislava: Iura Edition, 2008. 499 s. ISBN 978-80-8078-224-5.
 7. KISLINGEROVÁ, E. et al. 2010. Manažérske financie. 3. Vyd. Praha: C. H. Beck, 2010. 811 s. ISBN 978-80-7400-194-9.
 8. KRALOVIČ, J. – VLACHYNSKÝ, K. 2011. Finančný manažment. 3. vyd. Bratislava: Ekonómia, 2011. 468 s. ISBN 978-80-8078-356-3.
 9. KRIŠTOFÍK, P. et al. 2010. Podnikové financie. Banská Bystrica: Duma, 2010. 203 s. ISBN 978-80-967833-6-X.
 10. <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>

Tento príspevok vznikol v rámci riešenia projektu APVV-14-0020 Modelovanie Pareto optimálnych interakcií finančného a podnikového sektora v adaptačných procesoch a grantu VEGA1/0340/16 Modelovanie efektívnosti financovania a kooperácie sektorov a regiónov slovenskej ekonomiky.

Kontaktné údaje

doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, FSEV, Ústav ekonomie

Mlynské luhy 4, 82105 Bratislava

Tel: (421 2) 2066862

email: hozlar@fses.uniba.sk

CRIME DETERMINANTS FROM THE SPATIAL PERSPECTIVE: A GWR APPROACH

DETERMINANTY KRIMINALITY Z PRIESTOROVÉHO HĽADISKA: GWR PRÍSTUP

Michaela Chocholatá

Abstract

This paper deals with the analysis of crime determinants from the spatial perspective using the geographically weighted regression (GWR) approach. The dependent variable is the total number of crimes per 1000 persons and variables GDP per capita, rate of employed persons and population density are used as independent variables (crime determinants). The analysis is done for the 113 NUTS 3 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics) regions of the Czech Republic, Hungary, Poland and Slovakia. Besides the OLS estimation of the classical regression model the locally varying coefficients based on geographically weighted regression (GWR) are estimated. The results proved that the local GWR approach describes the data set better than the global model. The GWR local coefficient estimates furthermore enabled to assess the influence of analysed crime determinants in individual regions.

Keywords: crime, region, GWR approach

Abstrakt

Predmetom príspevku je analýza faktorov ovplyvňujúcich kriminalitu s ohľadom na umiestnenie regiónu v priestore s využitím prístupu geograficky váženej regresie (GWR). Závislou premennou je celkový počet trestných činov na 1000 osôb a premenné HDP na osobu, miera zamestnanosti a hustota obyvateľstva sú použité ako nezávislé premenné (faktory ovplyvňujúce kriminalitu). Analýza je realizovaná pre 113 NUTS 3 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics) regiónov z Českej republiky, Maďarska, Poľska a Slovenska. Okrem odhadu parametrov klasického regresného modelu metódou najmenších štvorcov boli odhadnuté tiež lokálne sa meniace parametre na báze GWR. Výsledky potvrdili, že lokálny GWR prístup popisuje analyzované dáta lepšie ako globálny model. Odhady lokálnych koeficientov na báze GWR navyše umožnili posúdiť vplyv analyzovaných determinantov (faktorov) kriminality v jednotlivých regiónoch.

Kľúčové slová: kriminalita, región, GWR prístup

1 INTRODUCTION

The analysis of crime from different aspects (sociological, psychological, economic, urban planning etc.) can be seen as an interesting issue. There have been published many studies dealing with the causes, determinants and effects of crime – for a detailed survey see e.g. Messner et al. (1999), Anselin et al. (2000), Lee et al. (2009) and Ratcliffe (2010). From the spatial perspective it is especially important to analyse the impact of location together with impacts of other socio-economic crime determinants on the number of crimes in a concrete region. These issues are subjects of the spatial econometric analysis using nowadays quite a broad range of models regarding spatial dependence and/or spatial heterogeneity of analysed regions.

Messner et al. (1999) using the exploratory spatial data analysis (ESDA) to examine the distribution of homicides strongly confirmed the spatial patterning of criminal violence. Spatial regimes and spatial autocorrelation were considered in the Almeida et al. (2003) examination study of spatial pattern of crime in the state of Minas Gerais in Brazil. The ESDA approach together with the geographically weighted exploratory statistics (GWS) and algorithm of hierarchical clustering were used by Penchev (2014) in the analysis of crime rates in the European Union (EU) on the NUTS 3 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics) level. Cracolici and Uberti (2008) analysed the geographical distribution of crime in Italian provinces based on estimation of various cross-sectional spatial econometric models. Lee et al. (2009) distinguished the social organization theory, criminal opportunity theory, strain theory, economic theory and pointed out that location (space) is nowadays considered to be one of the most important factors in the analysis of crime. They presented the analysis of determinants of crime incidence in Korea based on a mixed geographically weighted regression (GWR) approach and confirmed that crime is not randomly distributed over space. The spatial panel econometrics was used by Delbecq et al. (2013) who studied the crime in Chicago. Chocholatá (2018a) provided the spatial analysis of crime regions of the Czech Republic, Hungary, Poland and Slovakia based on ESDA instruments and estimation of both non-spatial and spatial econometric models. It was proved that the crime rate is determined not only by the economic and demographic indicators of the analysed region, but also essentially by the number of crimes in neighbouring regions.

The aim of this paper is to estimate the appropriate econometric models of crime for the cross-sectional data of 113 NUTS 3 regions of the Visegrad 4 (V4) countries, i.e. the Czech Republic, Hungary, Poland and Slovakia. Taking into account the spatial heterogeneity of the analysed regions as well as the impacts of selected crime determinants (GDP per capita, rate of employed persons and population density) on the number of crimes in a concrete region, the GWR approach will be applied.

The rest of the paper is organized as follows. The introduction in section 1 is followed by section 2 which provides the methodological issues concerning the GWR. Section 3 of the paper deals with the data description and the empirical results of the analysis. Conclusion is presented in section 4.

2 METHODOLOGY – GEOGRAPHICALLY WEIGHTED REGRESSION (GWR)

As mentioned above, spatial econometrics has to do with two spatial effects – spatial dependence (spatial autocorrelation) and spatial non-stationarity (spatial heterogeneity). The presence of spatial autocorrelation means that there is a significant tendency towards clustering of similar (dissimilar) values in space indicating positive (negative) spatial autocorrelation, the presence of spatial heterogeneity indicates that parameters can vary across regions (Chocholatá, 2018b; Furková, 2018).

With respect to the aim of this paper we will concentrate on modelling of spatial heterogeneity using the GWR approach. As for spatial heterogeneity, we can suppose that it is not true that the same relationship holds across all the analysed regions (Curran, 2009). In general, we can either consider various spatial regimes (with different regression parameter values for groups of regions) or to suppose the most general situation in which parameters vary locally, i.e. for each analysed region.

The GWR approach was developed by Brunson, Charlton and Fotheringham (see e.g., Fotheringham et al., 2002) and enables to estimate local parameter values for each region in the data set. The corresponding model is as follows (Wheeler and Páez, 2010):

$$y_i = \beta_{i0} + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{ik} x_{ik} + \varepsilon_i \quad (1)$$

where index $i = 1, \dots, n$, denotes the i -th region, y_i is the value of dependent variable at region i , x_{ik} denotes the values of the k -th independent variable at region i , β_{i0} is the intercept, β_{ik} is the regression coefficient for the k -th independent variable, p is the number of regression terms, and ε_i denotes the error term at region i . Model (1) can be rewritten in a matrix form as follows (Wheeler and Páez, 2010; Furková, 2018):

$$y_i = \mathbf{x}_i \boldsymbol{\beta}_i + \varepsilon_i \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\beta}_i$ denotes a column vector of regression coefficients and \mathbf{x}_i is a row vector of independent variables at region i . Regression coefficients at region i can be estimated by weighted least squares:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}_i \mathbf{y} \quad (3)$$

where \mathbf{y} is the $n \times 1$ vector of dependent variables, \mathbf{X} is the $n \times k$ matrix of independent variables (including a column of ones for the intercept), \mathbf{W}_i is the $n \times n$ diagonal weight matrix at region i , $\boldsymbol{\beta}_i$ denotes the vector of p local regression coefficients at region i (Wheeler and Páez, 2010). The weights are based on the distance of the region i and all the other regions (Bivand and Brunstad, 2003), the weight declines continuously as the distance between two regions increases (Fotheringham et al., 2002). GWR is thus based on the window weighting technique, the weighting scheme is based on the spatial kernel function. Fotheringham et al. (2002) distinguish GWR with fixed and adaptive spatial kernels, respectively. Nakaya (2016) presents various possibilities how to determine the optimal value of the bandwidth of the spatial kernel function specifying the range of the search window.

GWR results in estimation of n vectors of parameters, one for each region. In order to test whether the GWR model describes the data significantly better than a global model (i.e. model supposing that the same relationship holds across the all analysed regions), various tests can be performed, e.g. the GWR ANOVA test testing the statistically significant improvement in the GWR model performance over the global model and geographical variability tests of local coefficients (Fotheringham et al., 2002, Leung et al., 2000, Nakaya, 2016).

3 DATA AND EMPIRICAL RESULTS

The analysis in this paper is based on the same data as used in Chocholatá (2018a). The data set comprises the regional data for the 114 NUTS 3 regions of the Visegrad group countries (14 Czech regions, 20 Hungarian regions, 72 Polish regions and 8 Slovak regions)¹. The dependent variable is the total number of crimes per 1000 persons in 2016 calculated as the total number of crimes in 2016² divided by the Eurostat data on average annual population to

¹ With regard to the data from a Hungarian region Zala giving 26 593 registered crimes in 2016 in comparison to 6 222 registered crimes in 2015, we decided to exclude this region from analysis and to provide the analysis for a reduced set of 113 NUTS 3 regions.

² Total number of registered crimes in 2016 was retrieved from different sources: Police of the Czech Republic (<http://www.policie.cz/docDetail.aspx?docid=22346473&docType=ART>), Hungarian Central Statistical Office

calculate regional GDP data (thousand persons) by NUTS 3 regions in 2015 (<http://ec.europa.eu/eurostat/web/rural-development/data/database>). The independent variables³, i.e. crime determinants, were as follows: GDP per capita defined at PPS for 2015, employment rate (calculated as a ratio of employed persons to the average annual population to calculate regional GDP data – both in 2015) and population density (inhabitants per km²) in 2016. The spatial analysis was carried out in software GeoDa, the .shp file for the European regions with regard to NUTS 2013 classification was downloaded from the web page of Eurostat (<http://ec.europa.eu/eurostat/web/gisco/geodata/reference-data/administrative-units-statistical-units>) and adequately modified in GeoDa. GWR approach was applied in the GWR4 software environment.

Fig. 1 illustrates the box maps for the total number of crimes per 1000 persons (denoted as *cri16obyv*), GDP per capita (*gdp15pps*), rate of employed persons (*emp15obyv*) and population density (*popdens16*) across individual NUTS 3 regions of V4 countries in order to visualise the unequally distribution of analysed variables over space with considerable differences across regions inside the analysed countries. Concerning the dependent variable, crime rates, high concentration of criminality was detected in 4 regions – in Prague region, Budapest and Pest regions and the city of Wroclaw, the lowest criminality was detected in majority of Slovak regions, 3 Czech regions and 18 Polish regions. High values of independent variables – GDP per capita, rate of employed persons and population density – were detected in regions corresponding to the capital cities of individual countries and some other Polish regions while low values could be found in majority of Hungarian regions, south-eastern Slovak regions and various Polish regions. Indicating the huge spatial heterogeneity, it could not be expected that the same relationship would hold across all the regions in the data set.

As the first step, the classical global regression model was estimated using the standard OLS technique:

$$crime_i = \beta_0 + \beta_1 gdp_i + \beta_2 emp_i + \beta_3 dens_i + \varepsilon_i \quad (4)$$

where the dependent variable (*crime*) is a function of independent variables (*gdp* – GDP per capita, *emp* – rate of employed persons and *dens* – population density), β_0 , β_1 , β_2 and β_3 are unknown parameters and ε_i represents an error term. Estimates of individual global coefficients (i.e. without regional differentiation) are in Tab. 1 (column: Linear model). All the estimated coefficients were statistically significant at the 5 percent level. It follows testing for the presence of the spatial autocorrelation among the regression residuals by calculation of the spatial diagnostic test statistics – the Moran's *I* (the formula for calculation see e.g., Getis, 2010). Estimated value of 0.341 indicates presence of the statistically significant positive spatial autocorrelation. In order to capture the spatial non-stationarity across analysed regions, the global spatial analysis based on model (4) was followed by the local spatial analysis based on model (5):

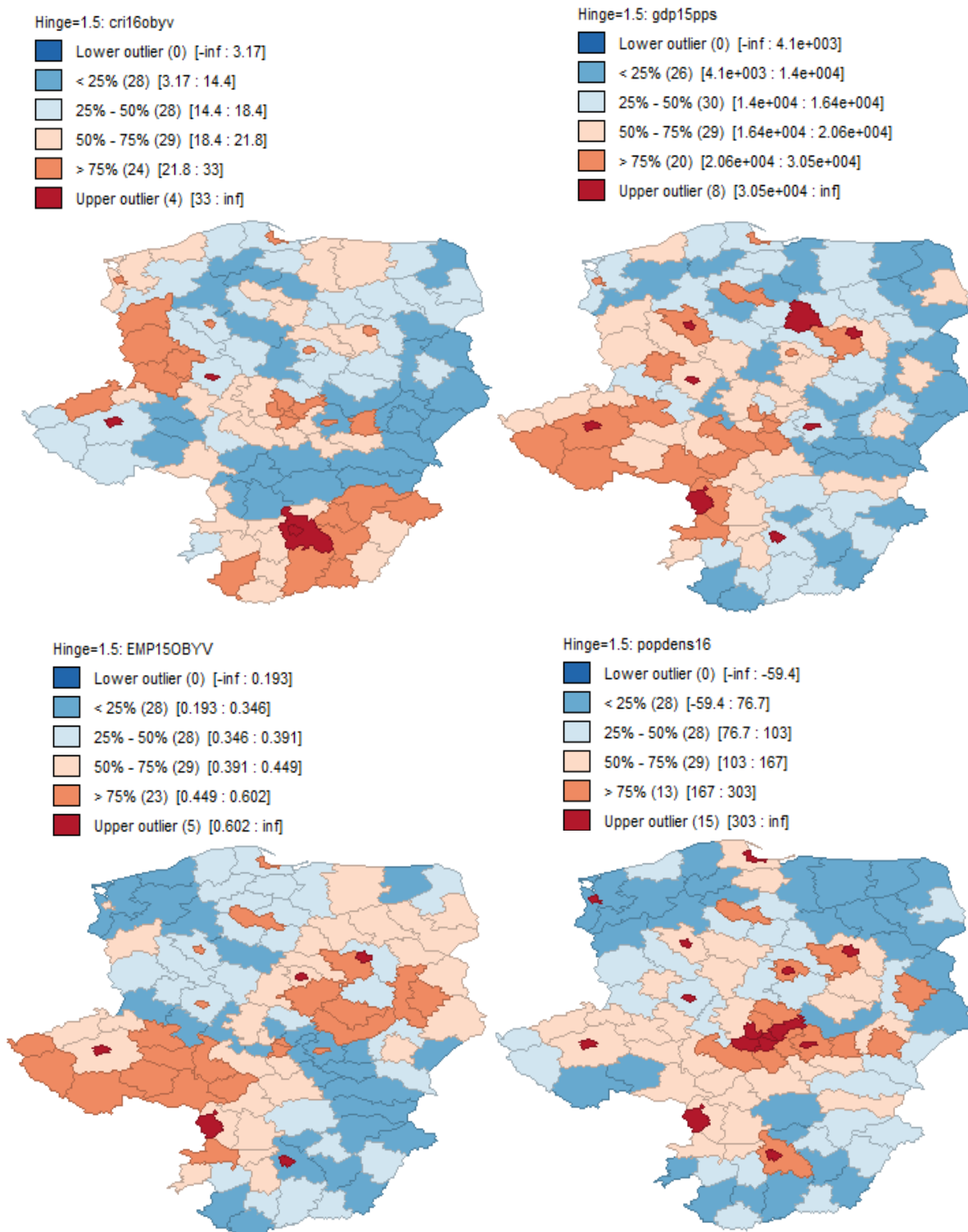
$$crime_i = \beta_{i0} + \beta_{i1} gdp_i + \beta_{i2} emp_i + \beta_{i3} dens_i + \varepsilon_i \quad (5)$$

(https://www.ksh.hu/docs/eng/xstadat/xstadat_annual/i_zji001b.html), Statistical Yearbook of the Regions - Poland 2017 (<https://stat.gov.pl/en/topics/statistical-yearbooks/statistical-yearbooks/statistical-yearbook-of-the-regions-poland-2017,4,12.html>) and from the DATAcube. database of the Statistical Office of the Slovak Republic

(http://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/VBD_SK_WIN/sk3003rr/Kriminalita%20pod%20C4%BEa%20z%20C3%A1%20kladn%20C3%BDch%20skup%20C3%ADn%20trestn%20C3%BDch%20C4%8Dinov%205Bsk3003rr%205D).

³ Retrieved from the Eurostat database (<http://ec.europa.eu/eurostat/web/rural-development/data/database>).

Fig. 1: Box maps of the crime per 1000 persons (*cri16obyv*), GDP per capita (*gdp15pps*), rate of employed persons (*emp15obyv*) and population density (*popdens16*)



Source: own calculations in GeoDa (box map of crime per 1000 persons see Chocholatá, 2018a)

The local parameters of model (5) were estimated based on GWR using the adaptive bi-square kernel (Nakaya, 2016, Chocholatá, 2018b). Selected GWR estimation results are presented in Tab. 1 (columns: GWR). Colour-coded maps of estimated local coefficients from the GWR fit together with the local coefficients of determination R_i^2 are collected in Fig. 2 and show the different model performance in individual regions. While the global and local coefficients for the intercept and population density had the same sign indicating (as expected) positive influence in both models, the influence of the remaining two variables – GDP per capita and rate of employed persons – was not so clear. As for the global model, the employment rate had expected negative impact indicating the decline of crime rates with increasing employment rate, but in case of GDP per capita the estimated sign was positive (for some explanations see e.g., Fajnzylber et al., 2002; Chocholatá, 2018a). In case of the GWR fit had both these variables (i.e., GDP per capita and rate of employed persons) positive influence in some areas, but negative in some other areas (Fig. 2). Comparing the estimation results of the global model (4) and the GWR fit of the local model (5) based on values of the adjusted coefficients of determination R^2 0.4229 and 0.5605, respectively (Tab. 1), indicates some improvement in the model performance. The comparison of the OLS and GWR results based on AICc values of 682.6450 and 668.9100, respectively (Tab. 1), confirms a strong evidence of an improvement in the GWR model fit as well. Moran's I for the residuals from the GWR fit of 0.180 indicates reduction in the degree of the spatial autocorrelation in comparison to the OLS model fit (Fotheringham et al., 2002). Based on the GWR ANOVA test with the test statistic $F = 2.539641$ it was proved the statistically significant improvement in the GWR model performance over the global model. Using the geographical variability tests of local coefficients it was confirmed that all coefficients exhibited statistically significant spatial variations in their values.

Table 1: Estimation results of OLS regression and of GWR

Model	Linear model	GWR				
		Minimum	Lower Quartile	Median	Upper Quartile	Maximum
β_0	23.5324	12.1094	17.1762	22.8277	26.5962	40.4771
β_1	0.0003	-0.0004	0.0001	0.000296	0.00047	0.0006
β_2	-27.5776	-77.0052	-40.2132	-26.9732	-9.8294	8.9730
β_3	0.0062	0.0030	0.0041	0.0062	0.0085	0.0109
AICc	682.6450	668.9100				
Adjusted R^2	0.4229	0.5605				

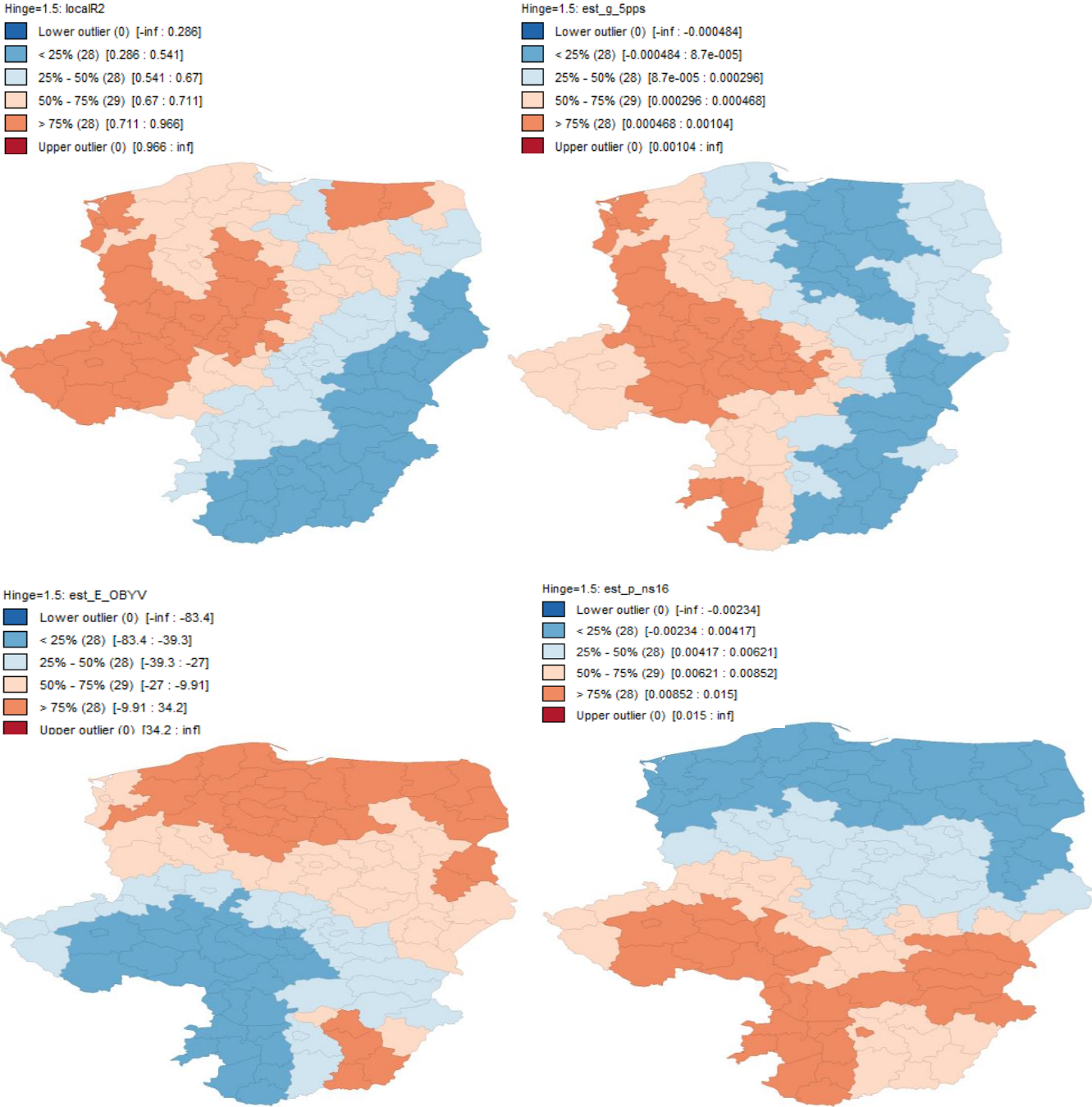
Source: own calculations in GeoDa and GWR 4

4 CONCLUSION

The analysis of crime determinants from the spatial perspective using the geographically weighted regression (GWR) approach was provided based on the regional data from 113 NUTS 3 regions of V4 countries. Taking the total number of crimes per 1000 persons as a dependent variable and variables GDP per capita, rate of employed persons and population density as independent variables (crime determinants) we applied both the global OLS estimation of the classical regression model as well as the local GWR approach to estimate the local varying coefficients. The results imply that the higher population density lead to increasing crime rates (in both models) since regions with higher concentration of population

are more attractive for committing a crime due to higher anonymity. The impact of GDP per capita is in global model as well as in majority of regions based on local model positive, i.e. the higher GDP per capita leads to increasing crime rate in a region. The interpretation is a little bit problematic since due to data unavailability there was no distinction in the character of crime (murders, thefts, etc.) taken into account. As for the employment rate variable, it can be concluded that in a global model as well as in majority of local coefficients from the local models, the relation is negative, i.e. the higher employment rate will imply the downward trend of the criminal acts. This paper enables to analyse the crime determinants taking into account the spatial heterogeneity of the analysed data set and to gain more detailed characterisation of the crime determinants from the spatial point of view.

Fig. 2: Local coefficients of determination R_1^2 and local coefficients of GDP per capita (est_g_5pps), rate of employed persons (est_E_OBYV) and population density (est_p_ns16) from the GWR fit



Source: own calculations in GWR4 and GeoDa

References

1. ALMEIDA, E.S., HADDAD, E.A. & HEWINGS, G.J.D et al. (2003). The spatial pattern of crime in Minas Gerais: an exploratory analysis. Retrieved June 8, 2018, from http://www.usp.br/nereus/wp-content/uploads/TDNereus_22_03.pdf.
2. ANSELIN, L., COHEN, J., COOK, D., GORR, W. & TITA, G. (2000). Spatial Analyses of Crime, *Criminal Justice*, 4, 213-262.
3. BIVAND, R. S., & BRUNSTAD, R. J. (2003). Regional Growth in Western Europe: An Empirical Exploration of Interactions with Agriculture and Agricultural Policy. In *European Regional Growth* (pp. 351-374). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
4. CHOCHOLATÁ, M. (2018a). Spatial econometric analysis of crime: Evidence from NUTS 3 regions of V4 countries. In *Proceedings of the 34th International Scientific Conference on Economic and Social Development – XVIII International Social Congress (ISC-2018)*. Moscow, 18-19 October 2018, Varazdin: Varazdin Development and Entrepreneurship Agency, 194-202.
5. CHOCHOLATÁ, M. (2018b). Spatial Analysis of Convergence in the Selected Regions of Central Europe. In *Proceedings of the 18th International Scientific Conference „AIESA – BUILDING OF SOCIETY BASED ON KNOWLEDGE“*. Bratislava, 25-26 October 2018, Bratislava: Letra Edu, 19-30.
6. CRACOLICI, M.F. & UBERTI, T.E. (2008). Geographical distribution of crime in Italian provinces: a spatial econometric analysis. Retrieved June 8, 2018, from <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10037-008-0031-1.pdf>.
7. CURRAN, D. (2009). British Regional Growth and Sectoral Trends – Global and Local Spatial Econometric Approaches. *NIRSA Working Paper Series*, No 49 – July 2009.
8. DELBECQ, B., GUILLIAN, R. & LEGROS, D. (2013). Analysis of crime in Chicago: new perspectives to an old question using spatial panel econometrics. Retrieved June 8, 2018, from http://www.rri.wvu.edu/wp-content/uploads/2013/07/Fullpaper_5.B.1.pdf.
9. FAJNZYLBER, P., LEDERMAN, D. & LOAYZA, N. (2002). Inequality and violent crime. *Journal of Law and Economics*, 45, 1-40.
10. FOTHERINGHAM, A. S., BRUNSDON, C., & CHARLTON, M. E. (2002). *Geographically Weighted Regression. The Analysis of Spatial Varying Relationships*. Chichester: Wiley.
11. FURKOVÁ, A. (2018). Spatial Heterogeneity of Regional Innovation Processes: Geographically Weighted Regression Approach. In *Proceedings of the International Scientific Conference Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XIX*. Bratislava: Letra Edu, 127-134.
12. GETIS, A. (2010). Spatial Autocorrelation. In *Handbook of Applied Spatial Analysis. Software Tools, Methods and Applications* (pp. 255-278). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
13. LEE, S. W., KANG, D.W. & KIMET, M.Y. (2009). Determinants of Crime Incidence in Korea: A Mixed GWR Approach. Retrieved June 8, 2018, from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.564.2500&rep=rep1&type=pdf>
14. LEUNG, Y., MEI, C., & ZHANG, W. (2000). Statistical Tests for Spatial Nonstationarity Based on the Geographically Weighted Regression Model. *Environment and Planning A*, 32(1), 9-32. doi:10.1068/a3162
15. MESSNER, S.F., ANSELIN L., BALLER, R.D., HAWKINS, D.F., DEANE, G. & TOLNAY, S.E. (1999). The spatial patterning of county homicide rates: an application

- of exploratory spatial data analysis. *Journal of Quantitative Criminology*, 15(4), 423-450.
16. NAKAYA, T. (2016). GWR4.09 User Manual. GWR4 Windows Application for Geographically Weighted Regression Modelling. Retrieved June 8, 2018, from <https://gwrtools.github.io/gwr4-downloads.html>
 17. PENCHEV, G.G. (2014). Exploring economic and spatial dependencies of crime rates in Europe at the NUTS-3 level. *Acta Universitatis Lodzianae Folia Oeconomica*, 5(307), 97-111.
 18. RATCLIFFE, J. (2010). Crime Mapping: Spatial and Temporal Challenges. In: A.R. Piquero and D. Weisburd (eds.), *Handbook of Quantitative Criminology*, Handbook of Quantitative Criminology, New York: Springer-Verlag, 5-24.
 19. WHEELER, D.C., & PÁEZ, A. (2010). Geographically Weighted Regression. In *Handbook of Applied Spatial Analysis. Software Tools, Methods and Applications* (pp. 461-486). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
 20. Police of the Czech Republic, Retrieved June 27, 2018, from <http://www.policie.cz/docDetail.aspx?docid=22346473&docType=ART>
 21. Hungarian Central Statistical Office, Retrieved June 27, 2018, from https://www.ksh.hu/docs/eng/xstadat/xstadat_annual/i_zji001b.html
 22. Statistical Yearbook of the Regions - Poland 2017, Retrieved June 27, 2018, from <https://stat.gov.pl/en/topics/statistical-yearbooks/statistical-yearbooks/statistical-yearbook-of-the-regions-poland-2017,4,12.html>
 23. Statistical Office of the Slovak Republic, DATAcube. Database, Retrieved June 27, 2018, from http://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/VBD_SK_WIN/sk3003rr/Kriminalita%20pod%C4%BEa%20z%C3%A1kladn%C3%BDch%20skup%C3%ADn%20trestn%C3%BDch%20C4%8Dinov%205Bsk3003rr%5D
 24. Eurostat, Retrieved June 20, 2018, from <http://ec.europa.eu/eurostat/web/rural-development/data/database>
 25. Eurostat, Retrieved June 20, 2018, from <http://ec.europa.eu/eurostat/web/gisco/geodata/reference-data/administrative-units-statistical-units>

Acknowledgements

This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA 1/0248/17 "Analysis of Regional Disparities in the EU based on Spatial Econometric Approaches" and VEGA 1/0294/18 "Short-run and long-run dynamic analysis of economic development of European post-communist countries and regions".

Contact address

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 832
 Email: michaela.chocholata@euba.sk

MEDZINÁRODNÁ INVESTIČNÁ POZÍCIA AKO INDIKÁTOR VONKAJŠEJ ROVNOVÁHY¹

INTERNATIONAL INVESTMENT POSITION AS EXTERNAL EQUITY INDICATOR

Miroslava Jánošová

Abstrakt

Príspevok je zameraný na popis vývoja hrubej zahraničnej zadlženosti Slovenska v období rokov 2008 až 2017 ako ekonomického ukazovateľa, ktorý je jednou zo zložiek medzinárodnej investičnej pozície. Tak ako platobná bilancia tak aj medzinárodná investičná pozícia poskytuje užitočné informácie na posúdenie ekonomických vzťahov krajiny so zvyškom sveta. Vývoj ukazovateľa hrubej zahraničnej zadlženosti na Slovensku popíšeme aj vo vzťahu k hrubému domácomu produktu a exportu ako pomerové ukazovatele. Práve tieto pomerové ukazovatele sú považované za možné indikátory vonkajšej rovnováhy.

***Kľúčové slová:** Medzinárodná investičná pozícia, Hrubá zadlženosť krajiny, zahraničný dlh*

Abstract

The paper is focused on the description of Slovakia's gross external debt development in the period 2008 to 2017 as an economic indicator, which is one of the components of the international investment position. Both the balance of payments and the international investment position provide useful information for evaluating the country's economic relations with the rest of the world. The development of the indicator of gross external debt in Slovakia will be described also in relation to the gross domestic product and export as ratios. The same ratios are considered as potential indicators of external equity indicators.

***Keywords:** International Investment Position, Gross External Debt, Foreign debt,*

1 ÚVOD

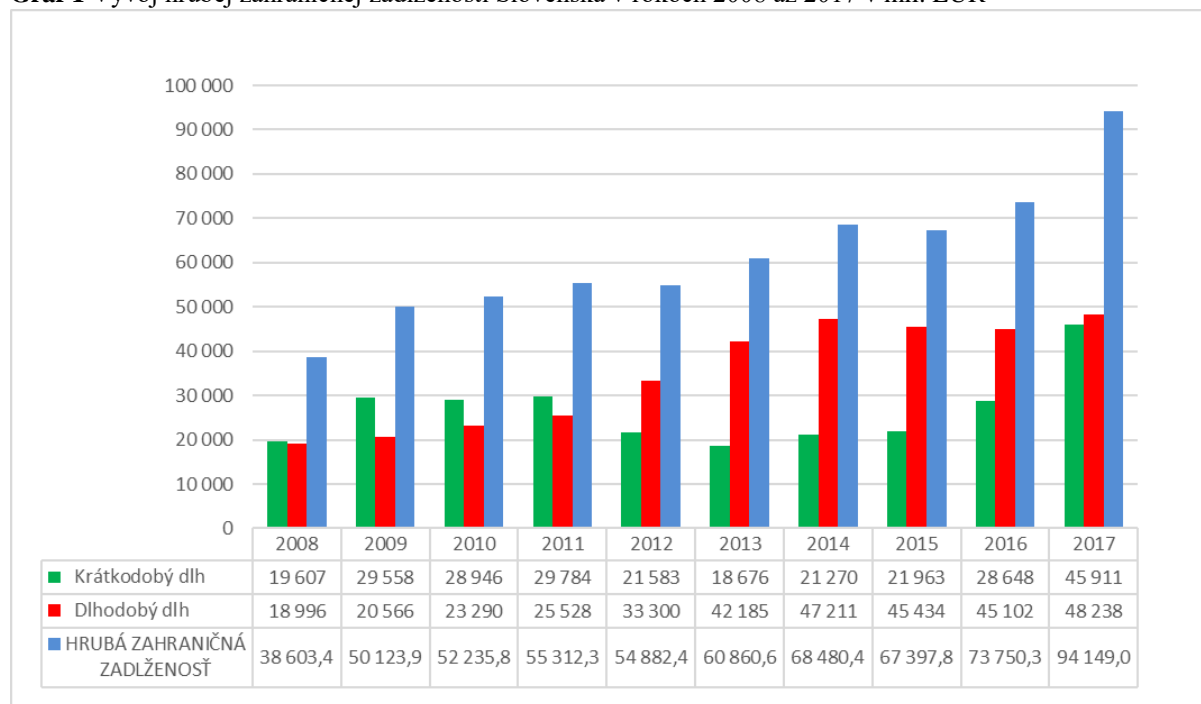
Ukazovateľ medzinárodnej investičnej pozície (MIP) predstavuje doplnkovú štatistiku platobnej bilancie a vzhľadom na túto skutočnosť sú niektoré jeho základné komponenty totožné s finančným účtom platobnej bilancie. Pre vykazovanie daného indikátora neexistovala ucelená medzinárodná metodika až do roku 1993, kedy bolo toto vykazovanie upravené 5. vydaním Manuálu platobnej bilancie Medzinárodného menového fondu. V súčasnosti prebieha implementácia upraveného manuálu platobnej bilancie z roku 2009. Údaje obsiahnuté v ukazovateli MIP sú jedným z najvýznamnejších ukazovateľov merajúcich stupeň otvorenosti ekonomiky krajiny. (Janošík, 2010) Okrem blízkeho prepojenia s platobnou bilanciou, môžeme toto prepojenie sledovať aj v spojitosti s inými štatistickými agregátmi, napr. hrubou zahraničnou zadlženosťou krajiny. Hrubá zahraničná zadlženosť krajiny tvorí podmnožinu indikátora medzinárodnej investičnej pozície a je tvorená všetkými pasívami s vynechaním majetkovej účasti v priamych ako aj portfóliových investíciách, reinvestovaného zisku a pasív vo finančných derivátoch.

¹ Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu APVV-17-0551 „Vyrovňovanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia“

2 HRUBÁ ZAHRANIČNÁ ZADLŽENOSŤ SLOVENSKA

Hrubá zahraničná zadlženosť Slovenska je v úzkom prepojení s platobnou bilanciou ako aj medzinárodnou investičnou pozíciou. Predstavuje celkový objem dlhu rezidentov, ktorý je vytvorený u zahraničných veriteľov.

Graf 1 Vývoj hrubej zahraničnej zadlženosti Slovenska v rokoch 2008 až 2017 v mil. EUR

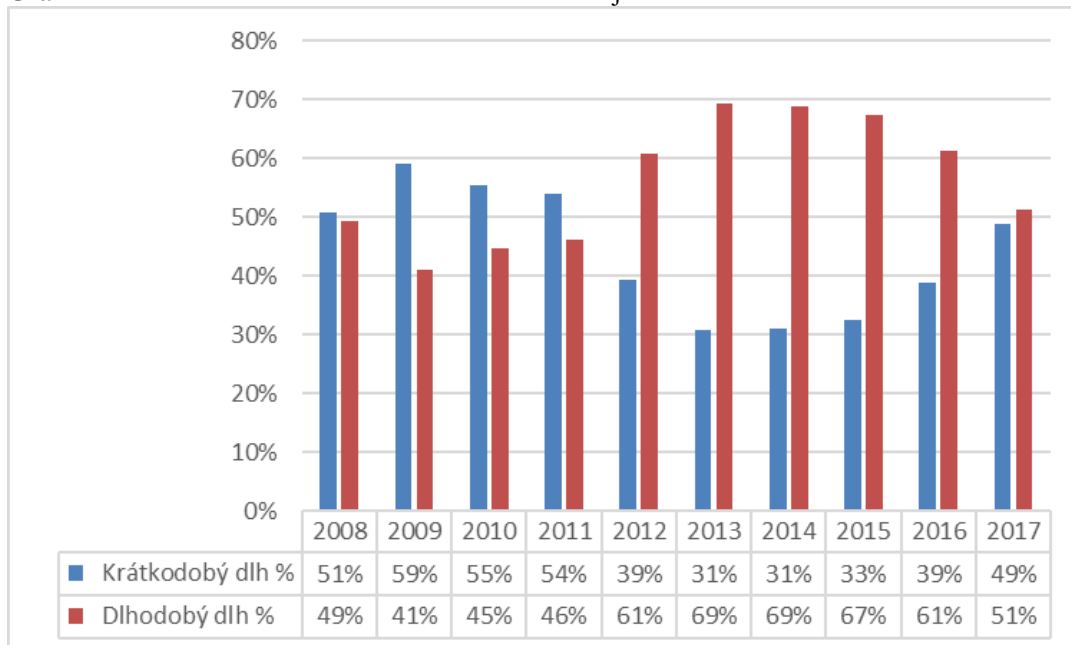


Zdroj: Vlastné spracovanie na základe dát NBS vykazovaných podľa metodiky BPM6

Na Grafe č. 1 môžeme vidieť, že počas celého obdobia hrubá zadlženosť krajiny má prevažne rastúcu tendenciu. Najvyššie hodnoty hrubej zadlženosti Slovenska voči zahraničiu sú zaznamenané v roku 2017 a to na úrovni 94 149 mil. EUR. Išlo o najvyšší medziročný nárast počas celého sledovaného obdobia a to o 20 398,7 mil. EUR oproti roku 2016. Najnižšie hodnoty hrubej zahraničnej zadlženosti boli vykazované v predkrízovom roku 2008, kedy dosahovali úroveň 38 603,4 mil. EUR. Samotný rast hrubej zahraničnej zadlženosti nemusí ešte znamenať nepriaznivý vývoj pre krajinu, dôležitý je aj pomer medzi krátkodobým a dlhodobým dlhom, pričom dlhodobý dlh by mal tvoriť viac než polovicu hrubého dlhu. Z hľadiska rozdelenia hrubej zahraničnej zadlženosti medzi krátkodobý a dlhodobý dlh môžeme vidieť, že od roku 2008 až do roku 2011 väčšiu časť celkovej zadlženosti krajiny predstavoval krátkodobý dlh. Tento stav môže byť v značnej miere spojený aj so vstupom Slovenska do eurozóny, keď Národná banka Slovenska (NBS) v rámci úhrady svojich záväzkov si finančné prostriedky požičala z Eurosystemu, a teda došlo k nárastu krátkodobého zahraničného dlhu NBS. Ekonomovia uvádzajú, že kritickou hranicou rozdelenia podielu krátkodobého dlhu a dlhodobého dlhu na hrubej zadlženosti krajiny je 40% pre krátkodobý dlh a 60% pre dlhodobý dlh. Na Grafe č. 2 môžeme vidieť, že táto kritická hranica a teda pomyselný limit pre krátkodobý dlh bol prekročený od roku 2008 až do roku 2011. Najväčší podiel bol zaznamenaný v roku 2009, kedy predstavoval krátkodobý dlh až 59% na celkovej zadlženosti krajiny, v nasledujúcich rokoch 2011 až 2016 bol tento dlh pod hranicou 40% avšak v roku 2017 ju opäť prekročil o 9%. Najvýraznejší nepomer medzi krátkodobým a dlhodobým dlhom bol v roku 2013, kedy dlhodobý dlh predstavoval až 63% z celkovej zadlženosti. Rovnako dôležitá je aj dynamika vývoja týchto ukazovateľov. Z pohľadu výrazne sa zväčšujúcej hrubej zadlženosti krajiny a zväčšujúcom sa podiele

krátkodobého dlhu na tejto celkovej zadlženosti nemôžeme hovoriť o priaznivom vývoji pre Slovensko.

Graf 2 Podiel krátkodobého dlhu a dlhodobého na hrubej zadlženosti Slovenska voči zahraničí v %



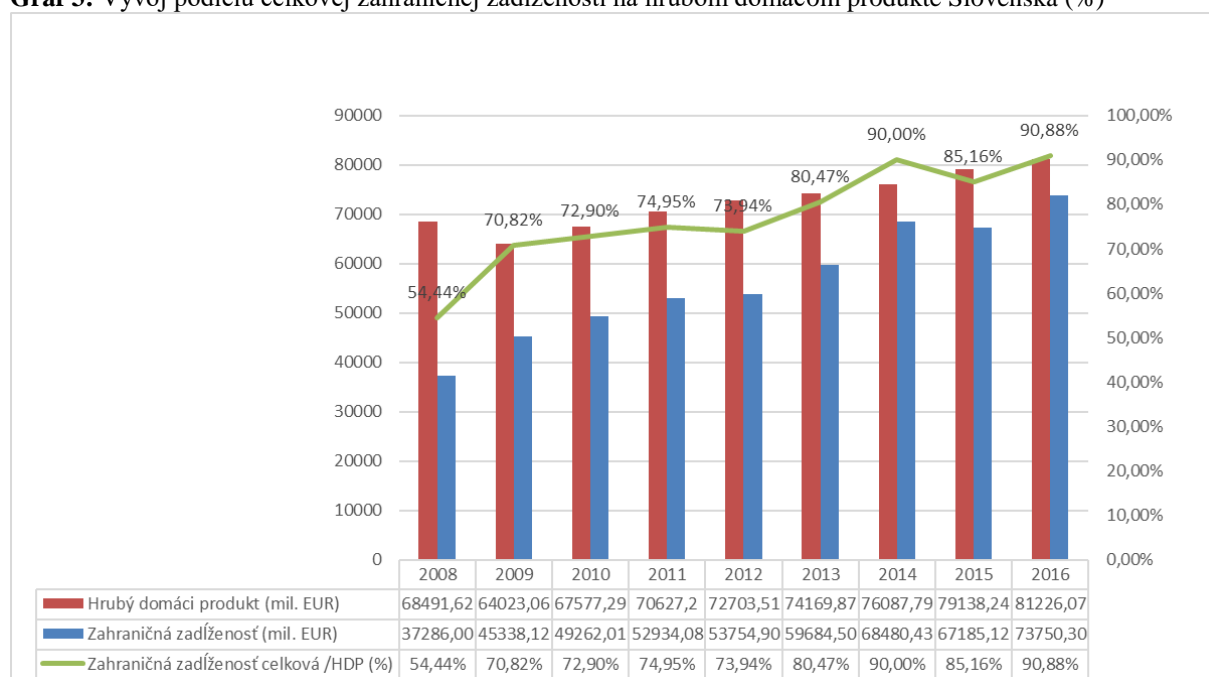
Zdroj: Vlastné spracovanie na základe dát NBS vykazovaných podľa metodiky BPM6

2.1 Vývoj hrubej zahraničnej zadlženosti vo vzťahu k hrubému domácomu produktu Slovenska

Veľmi dôležitými ukazovateľmi hodnotenia zahraničnej zadlženosti sú aj tzv. pomerové ukazovatele. Ide v zásade o určitý manuál, ktorý upravuje pri hodnotových údajoch aká miera zahraničnej zadlženosti je prípustná v medzinárodnom meradle. Môže ísť o štruktúru komponentov, ktoré tvoria celkový hrubý zahraničný dlh, podiel krátkodobého dlhu alebo porovnanie nárastu zahraničných pasív s aktívami. Vývoj týchto pomerových ukazovateľov môže naznačiť riziká, ktoré plynú zo zadlženosti krajiny voči zahraničiu. Hlavnou snahou je špecifikácia kritérií zaťaženia krajiny zahraničným dlhom tak, aby to nevedlo k zhoršovaniu pomerových ukazovateľov, ktoré slúžia na zachytenie vzťahu zahraničnej zadlženosti voči makroekonomickým ukazovateľom. Jedným z odporúčaní je aj neprekročenie hranice 60% výšky hrubého zahraničného dlhu vo vzťahu k hrubému domácomu produktu (HDP) v bežných cenách (Kyjac, 2014). Ak sledujeme tento pomerový ukazovateľ hrubú zahraničnú zadlženosť ako podiel na HDP môžeme povedať, že nám to popisuje aká časť HDP je potrebná na pokrytie záväzkov voči zahraničiu pri príleve kapitálu. Tak, ako vidíme na Grafe č. 3 vývoj podielu celkovej zahraničnej zadlženosti na hrubom domácom produkte, mal počas celého sledovaného obdobia rastúci trend. Daný pomerový ukazovateľ dosahoval hodnoty pod hranicou 60% do roku 2009, kedy došlo k výraznému zhoršeniu daného ukazovateľa kedy tento podiel hrubého zahraničného dlhu SR na HDP dosiahol úroveň 72,9%. Hranica 60% pri tomto pomerovovom ukazovateli bola prekročená aj v nasledujúcich rokoch až do konca sledovaného obdobia. K najvýraznejšiemu prekročeniu došlo v roku 2016, kedy táto hodnota predstavuje až 90,88%.

Takéto výsledky môžu byť čiastočne pripísané zmene štruktúry vykazovania krátkodobého zahraničného dlhu NBS. Ďalšie možné príčiny môžeme hľadať vo vykazovanom objeme prostriedkov SR v záchrannom eurovale, ale aj vo vykazovaní zahraničných pasív vlády vo forme dlhopisov a zmeniek (Kyjac, 2014).

Graf 3: Vývoj podielu celkovej zahraničnej zadlženosti na hrubom domácom produkte Slovenska (%)



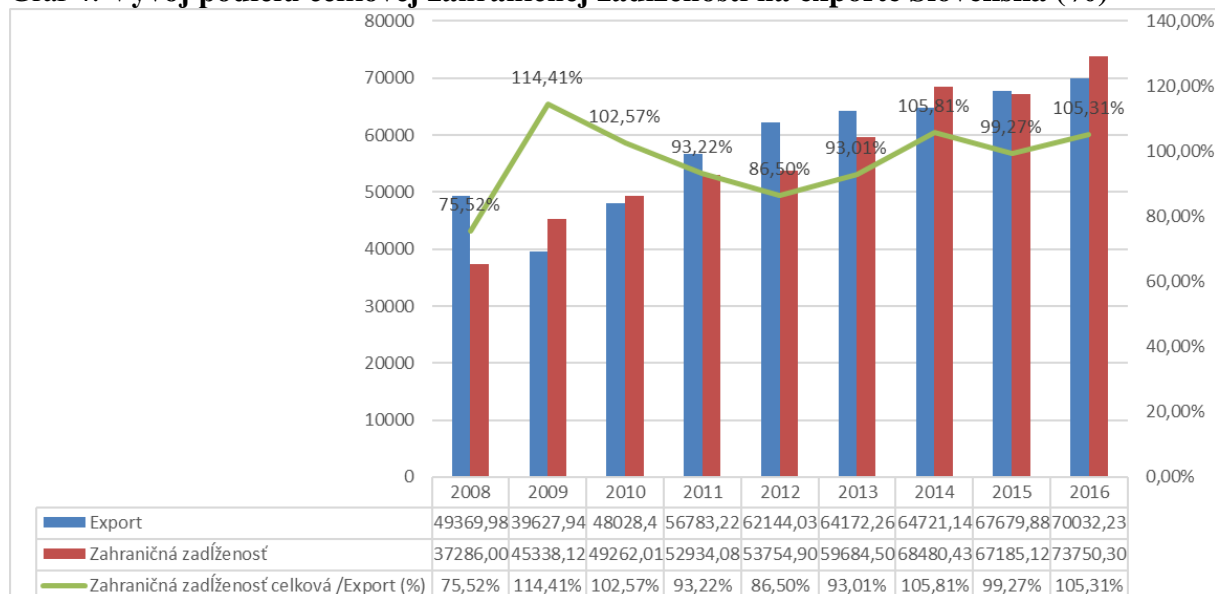
Zdroj: <https://www.nbs.sk/sk/menova-politika/makroekonomicka-databaza>

Negatívny dopad môže mať aj zvýšenie absolútnej hodnoty hrubej zahraničnej zadlženosti, ku ktorej došlo aj aktualizáciou údajov podľa manuálu BPM6, keďže úverové vzťahy medzi spriaznenými podnikmi sú vykazované brutto.

2.2 Vývoj hrubej zahraničnej zadlženosti vo vzťahu k exportu Slovenska

Podielový ukazovateľ hrubej zahraničnej zadlženosti na exporte predšavuje časť vývozu, ktorá je potrebná na úhradu existujúceho dlhu. Vo všeobecnosti je za bezpečnú hranicu považovaných 20%. Na Grafe č. 4 môžeme vidieť, že priebeh daného ukazovateľa je veľmi premenlivý, v roku 2008 podiel zahraničnej zadlženosti na exporte Slovenska dosahoval úroveň 75,52% a v nasledujúcom roku 2009 tento podiel vzrástol až o 38,89% na úroveň 114,41%, následne v roku 2010 došlo opäť k poklesu na úroveň 102,57%. Tento pokles nasledoval aj v roku 2012 na úroveň 86,50% následne znova došlo k rastu. Premennivosť tohto ukazovateľa môže byť spôsobená, že podiel dlhu na exporte vyjadrený percentuálne je závislý od medziročných zmien rastu alebo poklesu jednotlivých veličín. V roku 2016 na pokrytie celkového dlhu, by bol potrebný omnoho vyšší export než sa dosahoval v tomto roku a teda podiel hrubej zahraničnej zadlženosti na exporte predstavoval až 105,31%. Počas celého sledovaného obdobia je hodnota ukazovateľa výrazne vyššia ako je stanovená bezpečná hranica, pričom v niektorých rokoch dokonca prekročil 100%, čo by mohlo vyvolať obavy z novej vonkajšej nerovnováhy.

Graf 4: Vývoj podielu celkovej zahraničnej zadlženosti na exporte Slovenska (%)



Zdroj: <https://www.nbs.sk/sk/menova-politika/makroekonomicka-databaza>

3 ZÁVER

Z vývoja hrubej zahraničnej zadlženosti môžeme vidieť, že má neustále rastúcu tendenciu. Ukazovateľ podielu krátkodobého dlhu na celkovej zadlženosti v roku 2017 prekročil odporúčanú hranicu, čo môže Slovensko stavať do nepriaznivej pozície z pohľadu investorov. Rovnako túto skutočnosť naznačuje aj trend podielu hrubej zahraničnej zadlženosti na hrubom domácom produkte, ako aj podiel hrubej zahraničnej zadlženosti na exporte. Dané hodnoty zadlženosti sú vysoké a môžu byť určitou indikáciou rizika destabilizácie rovnováhy.

Použitá literatúra

1. Balance of Payments and International Investment Position Manual, Sixth Edition (BPM6) Dostupné na internete: <http://www.imf.org/external/pubs/ft/bop/2007/pdf/bpm6.pdf>
2. JÁNOŠÍK, P. 2010. Medzinárodná investičná pozícia. Biatec: Národná banka Slovenska, ročník 18, 5/2010. Dostupné na internete : www.nbs.sk/_img/Documents/PUBLIK/.../07_biatic0510_janosik.pdf
3. KYJAC, P. 2014. Vývoj zahraničnej zadlženosti SR v rokoch 1993 až 2012. In: Biatic, 22, č. 4, s. 16 – 20.
4. <https://www.nbs.sk/sk/menova-politika/makroekonomicka-databaza>

Kontaktné údaje

Ing. Miroslava Jánošová, PhD.

Ekonomický ústav SAV

Šancová č. 56

811 05 Bratislava

email: miroslava.dolinajcova@savba.sk

ANALÝZA VÝVOJE KORELACE MEZI HDP A VÝDAJI NA ZBROJENÍ

Marek Kawulok, Lukáš Frýd¹

Abstract

In this paper, we have analyzed the correlation between military expenditure and GDP. Analyzed were time series from Great Britain from 1900 to 2016. The methodology is based on the dynamic conditional correlation model. We have found that the correlation is not constant. What is more important is the positive correlation during the wars. This phenomenon supports the multiplicative effect of military expenditures.

Key words: military expenditure, dynamic conditional correlation model

1 ÚVOD

Jednou ze zásadních ekonomických otázek je v účinnosti fiskální politiky. Pokud vyjdeme z keynesiánské identity

$$HDP = C + I + G + NX,$$

kde HDP je hrubý domácí produkt, C je spotřeba, I jsou investice, G jsou vládní výdaje a NX je čistý export, potom změna G má vliv na HDP. Pod písmenem G jsou často myšleny výdaje na dálnice, produktovody atd. Otázkou je, jaké dopady mají výdaje na zbrojení. V literatuře nenajdeme jednoduchou odpověď na otázku, zdali výdaje na zbrojení mají pozitivní vliv na růst HDP. Jedna skupina podporuje myšlenku pozitivního dopadu výdajů na zbrojení skrze keynesiánský multiplikátor (Atesoglu, 2002; Mintz & Hicks, 1984). Další skupina se zaměřuje na spillover efekt, který vzniká vlivem armádního výzkumu, s následným dopadem na reálnou ekonomiku (Kollias, Manolas & Paleologou, 2004; Smith & Dunne, 2001). Relevantním předpokladem je také vůbec samotná existence armády, která má zajistit hranice země, a tím tak dát vůbec prostor pro ekonomický růst (Dunne, Perlo-Freeman and Smith 2008). Logickým příkladem může být stát Izrael, který by bez silné armády nemohl vůbec existovat. Ne všichni však souhlasí s pozitivním vlivem výdajů na zbrojení na hospodářský růst. Například Mylonidis (2006) uvádí, že armádní zakázky jsou spojeny s korupcí a neefektivním vynakládáním veřejných prostředků.

Cílem tohoto článku však není rozklíčovat vliv výdajů na zbrojení na ekonomický růst. Stanovili jsme si mnohem střízlivější cíl, a tím je popsat dynamiku korelace mezi změnou výdajů na zbrojení a hrubým domácím produktem pro Velkou Británii za období 1900 až 2016.

Článek je organizován následovně. Ve druhé části jsou představeny některé zajímavé studie, na které navazuje metodologická část představující model podmíněné korelace. Ve čtvrté části

¹ Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/78/2018 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

je popsána datová základna, na kterou navazuje stěžejní empirická část. Poslední kapitola je věnována závěrečnému schnutí.

1.1 Empirická literatura

Možnosti, jak zkoumat vztah mezi HDP a výdaji na zbrojení, se dají shrnout do dvou skupin. První skupina vychází z modelů ekonomického růstu např. Knight a kolektiv (1996) a Dunne et al. (2004). Druhá skupina je inspirovaná ekonometrickými modely. Jelikož je naše práce z oblasti aplikované ekonometrie, zaměříme se na skupinu číslo dvě.

Logickým ekonometrickým přístupem k danému problému je vektorová autoregrese. Mezi zajímavé články patří například práce Changa, Huanga a Yanga z roku 2011. Autoři zjistili, že mezi výdaji na zbrojení a ekonomickým růstem existuje Grangerova kauzalita v tom směru, že výdaje na zbrojení zpomalují ekonomický růst.

Podobný problém řešili i Dunne a Smith (2010). Zde autoři naopak docházejí k závěru, že vztah mezi výdaji na zbrojení a HDP není jednoznačný. Záleží na konkrétních datech, volbě proměnných. Výsledný vztah tak může být kladný, záporný nebo statisticky nevýznamný. V meziválečném období pomohlo zvýšení výdajů na obranu snížit nezaměstnanost. Především v rozvíjejících se státech výdaje na zbrojení snižují objem prostředků, které by mohly být využity efektivněji, a tudíž zpomalují ekonomický růst.

Standartní ekonomické modely předpokládají, že ekonomické efekty výdajů na zbrojení jsou relativně zanedbatelné, a proto jsou ignorovány. Výjimku tvoří případy financování válečného úsilí velkého rozsahu. V tom případě výdaje na zbrojení představují podstatnou část rozpočtu a vykazují mnohem větší volatilitu než ostatní rozpočtové kapitoly (Smith, 2009).

2 MODEL PODMÍNĚNÉ KORELACE

Model podmíněné korelace, který vytvořil Engle (2001), byl primárně určen k popisu vývoje korelace výnosů finančních aktiv v čase.

Nechť \mathbf{r}_t je vektor $k \times 1$, k časových řad, pro který platí:

$$\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (1)$$

kde \mathcal{F}_{t-1} představuje množinu informací v čase $t - 1$ a \mathbf{H}_t je podmíněná kovarianční matice v čase t , kterou lze rozložit následovně:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \quad (2)$$

kde \mathbf{D}_t je $k \times k$ diagonální matice podmíněných rozptylů, modelovaných pomocí modelu GARCH podle Bollersleva (1986). \mathbf{R}_t je podmíněná korelační matice, kterou dle Engla (2002) je možno dále rozložit jako:

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}(\sqrt{q_{11,t}}, \dots, \sqrt{q_{kk,t}}) \mathbf{Q}_t \text{diag}(\sqrt{q_{11,t}}, \dots, \sqrt{q_{kk,t}}), \quad (3)$$

kde \mathbf{Q}_t je podmíněná kvazi korelační matice, která se řídí vícerozměrným GARCH procesem:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{S}(1 - \alpha - \beta) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^T + \beta \mathbf{Q}_{t-1}, \quad (4)$$

kde \mathbf{S} je nepodmíněná korelační matice, $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}_t^{-1}\mathbf{r}_t$ je vektor standardizovaných časových řad, r_t a α, β jsou nezáporné skaláry, pro které z důvodu stacionarity platí $\alpha + \beta < 1$.

Odhad matice podmíněné korelace je rozdělen do 3 částí. Nejprve se pomocí vhodné zvolené jednorozměrného GARCH modelu odhadnou prvky matice \mathbf{D}_t . Poté se standardizované časové řady využijí k odhadu podmíněné kvazi korelační matice z rovnice (4). Nakonec se takto získaný odhad použije k výpočtu podmíněné korelační matice ze vztahu (3).

3 DATA

V analýze byly užity roční časové řady nominálního HDP Velké Británie od roku 1900². Problém nastává v započítávání irského HDP. Irsko bylo součástí Velké Británie od roku 1800 do 1920. Od roku 1920 je součástí Velké Británie pouze Severní Irsko. Aby byla časová řada konzistentní s dnešní podobou Velké Británie, je v HDP do roku 1920 z Irska zahrnutá pouze část Severního Irska. Druhou časovou řadou je roční časová řada výdajů na obranu Velké Británie od roku 1900³, taktéž v nominálních cenách.

4 EMPIRICKÁ ČÁST

V empirické části jsou představeny výsledky z modelu podmíněné korelace. P-hodnoty t-testů pro statistickou významnost parametrů jsou konstruovány pro jednostrannou alternativní hypotézu $H_1: \theta > 0$, kde θ představuje vektor neznámých parametrů z rovnice (4).

Z důvodu přítomnosti jednotkového kořene jak v časové řadě HDP, tak v časové řadě výdajů na zbrojení, byl odhad modelu podmíněné korelace proveden na prvních diferencích těchto řad. Prvky matice \mathbf{D}_t byly odhadnuty pomocí jednorozměrného GARCH(1,1) modelu. Výstup z modelu je zobrazen v tabulce 1. Stojí za povšimnutí, že oba parametry modelu podmíněné korelace (DCC) jsou na 5% hladině významnosti statisticky významné.

Tabulka 1: Výstup z modelu podmíněné korelace

Koeficient	Odhad	Směrodatná chyba	p-hodnota
α_{HDP}	0,792	0,098	<0,001
β_{HDP}	0,207	0,100	0,019
α_{O}	0,878	0,183	<0,001
β_{O}	0,120	0,091	0,094
α_{DCC}	0,094	0,037	0,005
β_{DCC}	0,678	0,099	<0,001

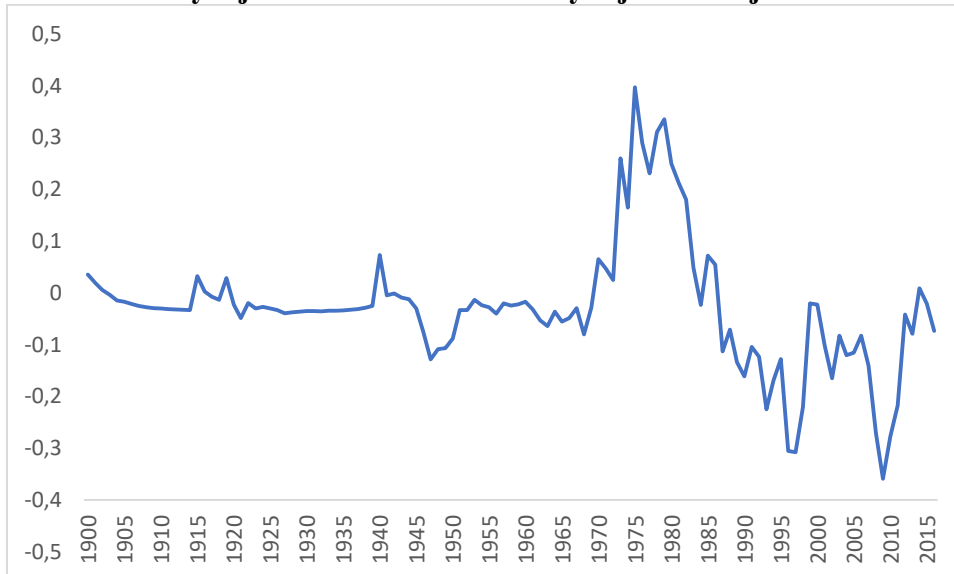
Zdroj: Vlastní zpracování

Pomocí modelu z rovnice (3) a (4) byl odhadnut vývoj korelace mezi prvními diferencemi HDP a výdaji na zbrojení v čase. Průběh korelace je zachycen na obrázku 1.

² Dostupné z: <https://www.measuringworth.com/datasets/ukgdp/>

³ Dostupné z: https://www.ukpublicspending.co.uk/download_multi_year_1700_2020UKb_17c1li111mcn_30t

Obrázek 1: Vývoj korelace mezi HDP a výdaji na zbrojení



Zdroj: Vlastní pracování

Průběh trajektorie nenasvědčuje tomu, že by v době válečného konfliktu, byla korelace mezi HDP a výdaji na zbrojení záporná. Připomeňme, že se ve sledovaném období Velká Británie zúčastnila 2 významných globálních konfliktů (1. a 2. světová válka). V obou případech se korelace pohybuje okolo nuly. Dalšími významnými konflikty za účasti Velké Británie byly válka o Falklandy (1982), 1. a 2. válka v Perském zálivu (1991, resp. 1998). Pouze v případě 2. války v Perském zálivu má korelace „vyšší“ zápornou hodnotu.

Druhým úkolem bylo prozkoumat, jestli je vývoj korelace v čase stabilní. Ze začátku období se korelace pohybuje okolo nuly, což může být způsobeno, že 1. difference časové řady výdajů na zbrojení jsou velmi blízké nule. V sedmdesátých a začátkem osmdesátých let je korelace ve významně kladných hodnotách. Jedná se také o období ropných šoků a vysoké inflace ve Velké Británii, a to mělo za následek prudký nárůst nominálního HDP a výdajů na zbrojení. Záporná hodnota korelace koncem devadesátých let je nejspíše způsobena úspornými opatřeními a snížením výdajů na obranu v té době. Poslední zaznamenaný významný pokles pochází z období finanční krize, kdy propad HDP nebyl následován snížením výdajů na zbrojení.

Jako poslední byl proveden Pearsonův, Kendallův a Spearmanův test významnosti korelace. Podle všech testů vyšla korelace mezi HDP a výdaji na zbrojení na 5% hladině významnosti statisticky významná.

5 ZÁVĚR

Tématem práce bylo analyzovat, zdali lze očekávat, že v době válečného konfliktu je mezi HDP a výdaji na zbrojení záporný vztah. Jako druhé bylo zkoumáno, jestli je vývoj korelace v čase stabilní. K analýze vývoje byl použitý model podmíněné korelace a zkoumána byla data za Velkou Británii od roku 1900.

Navzdory očekáváním se ukázalo, že v době válečného konfliktu není korelace mezi HDP a výdaji na zbrojení záporná. Jako příklad významných válečných konfliktů byly uvedeny: 1. a

2. světová válka, válka o Falklandy, 1. a 2. válka v Perském zálivu. Pouze v případě 2. války v Perském zálivu byla korelace výrazně záporná. Tento vývoj může ovšem být specifický právě pro Velkou Británii.

Dále se neprokázal předpoklad o stabilitě vývoje korelace v čase. Od roku 1900 po dobu půl století se korelace pohybovala v blízkosti nuly, patrně z důvodu velmi nízkých hodnot 1. diferencí časové řady výdajů na zbrojení. Ve zbytku období byl vývoj korelace o poznání bouřlivější. Za variabilitu vývoje korelace zřejmě mohly různé exogenní vlivy, jako například: ropné šoky v sedmdesátých letech, úsporná opatření ve výdajích na armádu nebo finanční krize.

LITERATURA

1. ATESOGLU, H. S. 2002. Defence spending promotes aggregate output in the United States—Evidence from cointegration analysis. *Defence and Peace Economics*, roč. 13, 2002, č. 1, s. 55–60.
2. BOLLERSLEV, T. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, roč. 31, 1986, č. 3, s. 307-327.
3. CHANG, H. C., HUANG, N. B., YANG, C. W. 2011. Military expenditure and economic growth across different groups: A dynamic panel Granger-causality approach. *Economic Modelling*, roč. 28, 2011, č. 6, s. 2416-2423.
4. DUNNE, J. P., SMITH, R. P. 2010. Military expenditure and Granger causality: A critical review. *Defence and Peace Economics*, roč. 21, 2010, č.5-6, s. 427-441.
5. ENGLE, R. F., SHEPPARD, K. 2001. Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH. NBER Working Papers 8554, National Bureau of Economic Research, Inc.
6. ENGLE, R. F. 2002. Dynamic Conditional Correlation. *Journal of Business & Economic Statistics*, roč. 20, 2002, č. 3, s. 339–350.
7. KOLLIAS, C., MANOLAS, N., PALEOLOGOU, S. M. 2004. Defence expenditure and economic growth in the European Union: A causality analysis. *Journal of Policy Modeling*, roč. 26, 2004, č. 5, s. 553–569.
8. MINTZ, A., HICKS, A. 1984. Military Keynesianism in the United States, 1949–1976: Disaggregating military expenditures and their determination. *American Journal of Sociology*, roč. 90, 1984, č. 2, s. 411–417.
9. MYLONIDIS, N. 2006. Revisiting the nexus between military spending and growth in the European Union. *Defence and Peace Economics*, roč. 19, 2006, č. 4, s. 265-272.
10. SMITH, R., DUNNE, P. 2001. Military expenditure growth and investment, *mimeograph*, Birbeck College and Middlesex University Business School, April.
11. SMITH, R. P. 2009. *Military Economics: The Interaction of Power and Money*. Princeton: Palgrave Macmillan UK. ISBN 978-0-230-2446-2.

Kontaktné údaje

Ing. Lukáš Frýd

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. Winstona Churchilla 1938/4,

Praha 3 130 67

Email: lukas.fryd@gmail.com

Kontaktné údaje

Bc. Marek Kawulok

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. Winstona Churchilla 1938/4,

Praha 3 130 67

Email: m.kawulok993@gmail.com

DETERMINANTY ZAHRANIČNÉHO OBCHODU KRAJÍN EUROZÓNY

FOREIGN TRADE DETERMINANTS IN THE EURO AREA COUNTRIES

Brian König

Abstrakt

Článok skúma determinanty ovplyvňujúce veľkosť exportu 19 krajín eurozóny a ich 180 obchodných partnerov v rokoch 2000-2015. Vplyv jednotlivých determinantov zahraničného obchodu bol odhadnutý na základe gravitačného modelu. Ako hlavné zistenie môžeme uviesť, že na základe odhadnutých parametrov vybrané vysvetľujúce premenné (HDP dovozcu na osobu, počet obyvateľov dovozcu, vzdialenosť medzi hlavnými mestami krajín, existencia spoločnej hranice medzi dvojicou krajín, členstvo v EÚ krajiny vývozu, členstvo v EÚ krajiny dovozu, dovozné clo, ekonomická odľahlosť, existencia obchodnej dohody medzi vývozcom a dovozcom) vplyvajú na export jednotlivých krajín v súlade s teóriou zahraničného obchodu.

***Kľúčové slová:** gravitačný model, zahraničný obchod, eurozóna*

Abstract

The article examines the determinants affecting the size of exports of 19 euro area countries and their 180 trading partners in 2000-2015. The impact of individual determinants of foreign trade was estimated on the basis of the gravity model. As a major finding, based on the estimated parameters, the selected explanatory variables (the importer's per capita GDP, the number of inhabitants of the importer, the distance between the capitals of the countries, the existence of a common border between the pair of countries, the EU membership of the country of export, the EU membership of the country of import, the import tariffs, the existence of a trade agreement between an exporter and an importer) affect the export of individual countries in accordance with the theory of foreign trade.

***Keywords:** Gravity mode, iInternational trade, Euro-area*

1 ÚVOD

Vo svete rýchleho rastu vplyvu globalizácie a vzájomnej spolupráce jednotlivých krajín sveta zohráva medzinárodný obchod dôležitú úlohu a to nie len na bilaterálnej úrovni, ale aj na multilaterálnej. Jeho analýza spolu s faktormi, ktoré ho priamo ovplyvňujú sú nevyhnutné pri skúmaní dopadov rôznych politík medzinárodného obchodu. Na analýzu zahraničného obchodu sa používa viacero nástrojov, avšak jedným z azda najčastejšie využívaných je práve gravitačný model, ktorý umožňuje skúmať efekty rôznych faktorov na zahraničný obchod. Pokiaľ ide o zahraničný obchod krajín EÚ, čoraz viac sa diskutuje o vplyve Brexitu na Európsku úniu. Vplyv Brexitu na krajiny EÚ ešte nebol jednoznačne uzavretý, ale vykonalo sa niekoľko analytických štúdií, ktoré opisovali možné scenáre ďalšieho vývoja a následne posúdili možné vplyvy na ďalší hospodársky vývoj v krajinách EÚ. Mnohí autori pri odhadovaní ekonomických dopadov Brexitu používajú vo svojich analýzach gravitačné modely (napríklad Gudgin a kol., 2017). Ako príklad iného spôsobu, ako používať gravitačný model, môžeme spomenúť autorov Grančay a kol. (2015), ktorí použili gravitačný model na

identifikáciu zmien determinantov zahraničného obchodu na Slovensku a v Českej republike. Autori tiež zdôraznili dôležitosť členstva v EÚ ako dôležitého determinantu bilaterálneho obchodu. Autori König a Dovál'ová (2018) využili gravitačný model na komparatívnu analýzu zahraničného obchodu krajín vyšehradskej štvorky. König (2018) použil gravitačný model za účelom skúmania faktorov zahraničného obchodu 212 krajín sveta. V tomto článku sa budeme zaoberať faktormi zahraničného obchodu 19 krajín eurozóny.

2 METODOLÓGIA

Gravitačné modely reprezentujú modelovací nástroj, ktorý je najmä často využívaný pri tvorbe empirických analýz medzinárodného obchodu. Pojem „gravitačný“ je prebratý z Newtonovho gravitačného zákona, ktorý popisuje vzťah dvoch vzájomne priťahovaných planét, ktorých vzájomné pôsobenie závisí od ich veľkosti a vzdialenosti medzi nimi. Ekonomická podoba Newtonovho zákona, v ktorej veľkosť vzájomného obchodu dvoch krajín závisí od ich ekonomickej veľkosti a vzdialenosti medzi nimi bola predstavená v roku 1962 holandským ekonómom Jánom Tinbergenom (Tinbergen, 1962). Základný gravitačný model vyzerá nasledovne:

$$X_{ij} = \alpha \left(\frac{Y_i^{\beta_1} \cdot Y_j^{\beta_2}}{D_{ij}^{\beta_3}} \right) \quad (1)$$

kde X_{ij} reprezentuje objem zahraničného obchodu medzi krajinami i a j ; α , β_1 , β_2 , β_3 sú neznáme parametre; Y_i a Y_j vyjadrujú veľkosť ekonomiky i a j ; D_{ij} je vzdialenosť medzi krajinami i a j . Existuje viacero spôsobov ako vyjadriť objem obchodu medzi dvomi krajinami, avšak vo všeobecnosti je vyjadrený veľkosťou exportu, importu alebo ich súčtom. Veľkosť ekonomiky býva štandardne vyjadrená objemom HDP alebo kombináciou HDP na obyvateľa a veľkosťou populácie. Druhá kombinácia umožňuje sledovať aj vplyv ekonomickej vyspelosti jednotlivých krajín na ich zahraničný obchod. Gravitačný model je zvyčajne vyjadrený v logaritmickej forme:

$$\ln X_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \ln Y_i + \beta_2 \ln Y_j + \beta_3 \ln D_{ij} + u_{ij} \quad (2)$$

kde u_{ij} je náhodná zložka.¹ Neskôr boli gravitačné modely vystavené kritike, že sú len ekonometrickým nástrojom bez dostatočného teoretického základu. Následný výskum však ukázal, že gravitačné modely môžu byť podporené celým radom teórií zahraničného obchodu (napr. Bergstrand (1985), Eaton a Kortum (2002), Chaney (2008) atď.) Následne bol model (2) rozšírený o mnohé ďalšie premenné ako napr. spoločná hranica, dovozné clá, spoločná mena, medzinárodné obchodné dohody, spoločný jazyk, ostrovná krajina, prímorská krajina, odľahlosť atď.).²

Vzhľadom na to, že údaje bilaterálneho obchodu obsahujú množstvo nulových hodnôt, keďže každá krajina neobchoduje so všetkými ostatnými krajinami sveta, metóda najmenších štvorcov (OLS) by vynechala takéto pozorovania, pretože logaritmus nuly nie je definovaný, čo by mohlo viesť ku skresleniu v dôsledku výberu vzorky, keďže nulové hodnoty nie sú normálne rozdelené v súbore. Z tohto dôvodu aplikujeme Poissonov odhad pseudo-maximálnej vierohodnosti (PPML), ktorý má viac výhod v porovnaní s odhadom parametrov pomocou OLS (Shepherd, 2016). PPML umožňuje odhad aj nelineárnych modelov a navyše

¹ V rovnici (2) predpokladáme zápornú hodnotu parametra β_3 .

² Viaceré rozšírenia gravitačného modelu môžu byť nájdené v práci Bacchetta et al (2012).

prirodzene zahŕňa do odhadu aj nulové hodnoty. Okrem toho, aj keď závislá premenná pri odhade parametrov pomocou PPML je vyjadrená v pôvodných hodnotách (nie v logaritme), interpretácia parametrov je rovnaká ako v prípade OLS (ako elasticity). Z týchto dôvodov sa v gravitačných modeloch veľmi často používa odhad parametrov pomocou PPML.

3 ÚDAJE

Za účelom našej analýzy boli použité údaje za roky 2000-2015 pre 180 krajín, s ktorými krajiny eurozóny počas týchto rokov obchodovali. Závislá premenná v našom modeli je reprezentovaná bilaterálnym nominálnym vývozom 19 krajín eurozóny (Rakúsko, Belgicko, Cyprus, Estónsko, Fínsko, Francúzsko, Nemecko, Grécko, Írsko, Taliansko, Lotyšsko, Litva, Luxembursko, Malta, Holandsko, Portugalsko, Slovensko, Slovinsko, Španielsko) v amerických dolároch, ktoré boli stiahnuté z databázy UNCTAD (UNITED NATIONS CONFERENCE ON TRADE AND DEVELOPMENT). Údaje o celosvetovom HDP a dovozných clách jednotlivých krajín boli stiahnuté z databázy svetovej banky (databáza indikátorov rozvoja krajín sveta – World Development Indicators). Zvyšok premenných je použitých z databázy pre gravitačné modely CEPIL, ktorá zhromažďuje údaje za účelom gravitačných modelov. HDP na obyvateľa je vyjadrený ako nominálny HDP v amerických dolároch vydelený počtom obyvateľov krajiny. Vzdialenosť je vyjadrená vzdušnou čiarou medzi hlavnými mestami jednotlivých krajín. Obyvateľstvo sa meria ako celková populácia v miliónoch. Do modelu sme zahrnuli aj premennú ekonomickú odľahlosť, ktorá sa stala nevyhnutnou súčasťou gravitačných modelov. Pod pojmom ekonomická odľahlosť rozumieme váženú vzdialenosť krajiny i od všetkých ostatných krajín sveta, pričom váhou je podiel HDP krajiny j na svetovom HDP_w. Dá sa očakávať, že čím je krajina odľahlejšia od ostatných krajín tým menší zahraničný obchod bude praktizovať. Štandardne za najodľahlejšie štáty sú považované ostrovné krajiny ako napr. Nový Zéland, Havajské ostrovy atď. Ekonomickú odľahlosť sme vypočítali na základe vzťahu:

$$ODL_i = \sum \left(\frac{HDP_j}{HDP_w} * DISTCAP_{ij} \right) \quad (3)$$

kde ODL_i je ekonomická odľahlosť i .tého štátu, HDP_j je HDP j .tého štátu, HDP_w je svetové HDP a $DISTCAP_{ij}$ vyjadruje vzdialenosť medzi hlavnými mestami štátov i a j .

Používali sme aj štandardné umelé premenné ako sú: spoločná hranica, obchodné zmluvy a členstvo v Európskej únii.

4 VÝSLEDKY

V našej analýze uvažujeme gravitačný model v tvare:

$$EXPORT_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \ln GDPCAP_j + \beta_2 \ln POP_j + \beta_3 \ln DISTCAP_{ij} + \beta_4 CONTIG_{ij} + \beta_5 \ln TAR_j + \beta_6 \ln ODL_i + \beta_7 FTA_WTO_{ij} + \beta_8 EU_O + \beta_9 EU_D + \beta_{10} YEAR_D_{2000} + \dots + \beta_{24} YEAR_D_{2014} + u_{ij} \quad (4)$$

kde $EXPORT_{ij}$ je nominálna hodnota vývozu z krajiny i (krajina eurozóny) do krajiny j (cieľová krajina); $GDPCAP_j$ je HDP dovozcu na osobu; POP_j vyjadruje počet obyvateľov dovozcu; $DISTCAP_{ij}$ je vzdialenosť medzi hlavnými mestami krajín i a j ; $CONTIG_{ij}$ je umelá

premenná pre spoločnú hranicu medzi krajinami i a j ; EU_O je umelá premenná pre členstvo v EÚ krajiny vývozu; EU_D je umelá premenná pre členstvo v EÚ krajiny dovozu; EU_OD je umelá premenná pre členstvo v EÚ krajiny dovozu a vývozu súčasne; TAR_j reprezentuje váženú hodnotu dovozného cla krajiny dovozu, počítanú ako priemer skutočne uplatňovaných colných sadziieb vážených dovážanými podielmi produktov zodpovedajúcimi každej partnerskej krajine;³ ODL_i vyjadruje ekonomickú odľahlosť vývozcu počítanú na základe vzťahu (3); FTA_WTO_{ij} je umelá premenná vyjadrujúca existenciu obchodnej dohody medzi vývozcom a dovozcom; $YEAR_D^*$ sú umelé premenné pre jednotlivé roky.

Tab. 1: Odhad parametrov gravitačného modelu exportu

	exp_o_d (1)	exp_o (2)	exp_od (3)
ln_gdpcap_d	0.724*** (11.71)	0.730*** (12.24)	0.722*** (11.44)
ln_pop_d	0.716*** (14.48)	0.729*** (14.38)	0.711*** (14.34)
ln_distcap	-0.297*** (-3.32)	-0.332*** (-3.94)	-0.264** (-2.99)
ln_tar	-0.199** (-2.66)	-0.227** (-3.27)	-0.182* (-2.31)
ln_odl	-15.08*** (-7.75)	-15.01*** (-7.65)	-16.08*** (-7.87)
fta_wto	0.456* (2.42)	0.590** (2.88)	0.425* (2.22)
contig	1.168*** (5.48)	1.158*** (5.36)	1.196*** (5.63)
eu_o	2.374*** (12.32)	2.361*** (12.39)	
eu_d	0.235 (1.27)		
eu_od			0.364 (1.95)
_cons	135.1*** (8.00)	134.7*** (7.91)	145.8*** (8.24)
N	42256	42256	42256

Poznámka: V zátvorkách sú hodnoty t-štatistík.

Význam hviezdíčiek: * $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$.

Zdroj: Vlastné výpočty

Na základe výsledkov uvedených v tabuľke 1 možno konštatovať, že väčšina efektov jednotlivých vysvetľujúcich premenných je v súlade s našimi očakávaniami a zároveň aj s teóriou medzinárodného obchodu. Parametre β_1 , β_2 prislúchajúce rastu HDP na obyvateľa a rastu populácie sú pozitívne, indikujú, že hospodársky vyspelejšie a väčšie ekonomiky sú často cieľom vývozu ostatných krajín. Opačná situácia je pri parametroch β_3 , β_4 , β_5 čo poukazuje na fakt, že s rastom vzdialenosti medzi dvomi krajinami, s rastom dovozných ciel

³ Pre viac info pozri web svetovej banky.

ako aj s rastom odľahlosti danej krajiny motivácia spoločného obchodu klesá. Odhad efektu odľahlosti sa zdá byť nadhodnotený, čo by mohlo byť spôsobené nižšou hodnotou odľahlosti krajín eurozóny voči ostatným krajinám sveta, avšak táto skutočnosť si vyžaduje potrebnú analýzu. Na základe odhadov parametrov β_6 , β_7 sa dá povedať, že v prípade existencie spoločnej hranice ako aj spoločnej obchodnej dohody medzi dvomi krajinami export medzi nimi rastie. Z parametra β_8 možno tvrdiť, že členstvo v EÚ má pozitívny dopad na rast exportu. Nakoľko parameter β_9 je štatisticky nevýznamný dá sa očakávať, že krajiny eurozóny nemajú tendenciu exportovať viac do krajín EÚ. Model (3) uvažuje so spoločným efektom členstva v EÚ exportéra aj importéra, avšak i tento sa ukázal ako štatisticky nevýznamný. Z tohto dôvodu volíme model (2) kontrolujúci iba efekt exportéra.

5 ZÁVER

Cieľom článku je skúmať hlavné determinanty exportu 19 krajín eurozóny s ich 180 obchodnými partnermi. K tomuto účelu bol použitý gravitačný model. Ako hlavné zistenia môžeme uviesť, že na základe odhadnutých parametrov vybrané vysvetľujúce premenné vplyvajú na export jednotlivých krajín v súlade s teóriou zahraničného obchodu. Z použitých premenných bola iba jedna štatisticky nevýznamná členstvo v EÚ krajiny importéra, avšak vplyv premennej odľahlost sa zdá byť nadhodnotený. Rovnako môže byť skreslený aj vplyv členstva v EÚ krajiny exportéra, nakoľko väčšina krajín bola počas skúmaného obdobia dlhšiu dobu členom EÚ.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy APVV-17-0551 „Vyrovňovanie nerovnováh: prehodnotenie ohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia.“ a VEGA 1/0248/17 „Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie“.

Literatúra

1. Bacchetta, M., Beverelli, C., Cadot, O., Fugazza, M., Grether, J.M., Helble, M., Nicita, A. and Piermartini, R. (2012). *A practical guide to trade policy analysis*. Geneva: World Trade Organization.
2. Bergstrand, J. H. (1985). The Gravity Equation in International Trade: Some Microeconomic Foundations and Empirical Evidence. *The Review of Economics and Statistics*, 67(3), 474.
3. Chaney, T. (2008). Distorted Gravity: The Intensive and Extensive Margins of International Trade. *American Economic Review*, 98(4), 1707-1721.
4. Eaton, J. & Kortum, S. (2002). Technology, geography and trade. *Econometrica*, 70(5): 1741–79.
5. Grančay, M., Grančay, N., Drutarovská, J. & Mura, L. (2015). Gravity Model of Trade of the Czech and Slovak Republics 1995-2012: How the determinants of Trade Changed. *Political Economy*, 63(6), pp. 759-777.
6. Gudgin, G., Coutts, K., Gibson, N. & Buchanan, J. (2017). The Role of Gravity Models in Estimating the Economic Impact of Brexit. Centre for Business Research, University of Cambridge, working paper no. 490. Available at: <https://ideas.repec.org/p/mde/wpaper/0077.html> [Accessed 27 March 2018].
7. Ivus, O. & Strong, A. (2007). Modelling approaches to the analysis of trade policy: computable general equilibrium and gravity models. In: *Handbook on International Trade Policy*. Edited by W.A. Kerr and J.D. Gaisford. Great Britain: Edward Elgar Publishing, pp. 44-54.
8. König, B. (2018).

9. König, B. & Dovál'ová, G. (2018). Determinants of Slovak Foreign Trade – Comparison Among V4 Countries Based on Gravity Model. In: *Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XIX. International Scientific Conference*. Bratislava: Letra Edu, pp. 179-185.
10. Shepherd, B. (2016). *The Gravity Model of International Trade: A User Guide*. 1st edn. Bangkok: United Nation Publication [pdf]. Available at: <http://www.unescap.org/resources/gravity-model-international-trade-user-guide-updated-version> [Accessed 27 March 2018].
11. Tinbergen, J. (1962). *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*. 1st edn. New York: The Twentieth Century Fund.

Kontaktné údaje

Ing. Brian König, PhD.,

a, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava,

b, Ekonomický ústav SAV,

Šancová 56,

811 05 Bratislava, SR;

e-mail: brian.konig@euba.sk

METODOLOGICKÉ PRÍSTUPY K MERANIU VEĽKOSTI STREDNEJ TRIEDY

METHODOLOGICAL APPROACHES TO THE MEASUREMENT OF THE MIDDLE CLASS SIZE

Brian König

Abstrakt

Článok poskytuje stručný prehľad spôsobov merania strednej triedy. Ako nástroj na meranie sú prezentované viaceré indexy polarizácie resp. bipolarizácie, ktoré umožňujú merať veľkosť strednej triedy. V článku venujeme pozornosť najmä indexom polarizácie, ktoré vo veľkej miere prispeli k rozvoju tejto problematiky (publikácie Wolfsona (1994) a Estabana, Raya (1994)).

Kľúčové slová: polarizácia, bipolarizácia, stredná trieda

Abstract

The article provides a brief overview of the middle class measurement methods. Several polarization and bipolarization indices are used as a measurement tool to measure the size of the middle class. In this paper we focus especially on the polarization indices, which have greatly contributed to the development of polarization (published by Wolfson (1994) and Estabana, Raya (1994)).

Keywords: Polarization, Bipolarization, Middle class

1 ÚVOD

Štruktúra a veľkosť strednej triedy sú dôležité z viacerých aspektov hospodárskeho, ale aj sociálneho rozvoja jednotlivých krajín. Stredná trieda je kľúčovým ukazovateľom zdravého hospodárstva, pretože poskytuje kvalifikovanú a dobre vzdelanú pracovnú silu, ktorá má za následok stabilnú domácu spotrebu a tým aj významný podiel daňových príjmov krajiny.

Existuje niekoľko prístupov týkajúcich sa merania veľkosti strednej triedy, ale väčšina z nich je založená na koncepte polarizácie, konkrétne na koncepte bipolarizácie. Bipolarizácia meria do akej miery je populácia rozdelená do dvoch oddelených skupín. Kľúčovou motiváciou pre vyvinutie konceptu bipolarizácie boli články Kolma (1969) a Loveho, Wolfsona (1976), ktoré poukázali na to, že veľkosť strednej triedy sa môže časom meniť, keďže znižujúca sa stredná trieda môže byť spojená s väčším separovaním dolnej a hornej časti rozdelenia príjmov ako aj väčšími vzdialenosťami medzi týmito dvoma skupinami.

Veľká časť úsilia výskumníkov zameraných na vývoj mier strednej triedy sa opiera o konštrukciu indexov. Väčšina indexov bola založená na pozícií dvoch hraničných bodov okolo mediánu. Podľa Thurow (1984) je stredná trieda reprezentovaná podielom obyvateľstva v rámci týchto dvoch bodov definovaných ako 75% a 125% mediánu. Levyho index (1987) definoval strednú triedu ako príjem pripadajúci stredným 60% populácie obyvateľstva, zatiaľ čo Leckie (1988) uviedol, že stredná trieda sa nachádza v príjmovom pásme 85 - 115% mediánu mzdy.

Publikácie Wolfsona (1994) a Estabana, Raya (1994) možno považovať za pravdepodobne najvýznamnejšie články v oblasti polarizácie. Wolfson odvodil index polarizácie založený na

jednoducho čitateľných štatistikách ako je Gini koeficient a Lorenzova krivka, zatiaľ čo Estaban a Ray sa pozerajú na problém polarizácie cez pohľad antagonizmov medzi jednotlivými príjmovými skupinami.

Okrem toho Foster a Wolfson (2010, 1992) navrhli dve bipolarizačné krivky a zároveň odvodili akýsi Gini index bipolarizácie. Prvá krivka ukazuje, že čím je menšia stredná trieda, tým väčšia je bipolarizácia a druhá poukazuje na fakt, že bipolarizácia rastie, keď sa priemerná vzdialenosť od mediánu na oboch stranách mediánu zvyšuje.

2 METODOLÓGIA

V tejto časti si stručne uvedieme indexy Fostera a Wolfsona (1992, 2010), Wolfsona (1994) a Estabana, Raya (1994), pretože sú považované za priekopnícke myšlienky v oblasti polarizácie.

Fosterov a Wolfsonov index (FW index)

Foster a Wolfson (1992) vo svojom článku reagovali na index Levyho (1987), ktorý vo svojej publikácii navrhuje meranie strednej triedy ako podiel príjmu pripadajúci stredným trom pätinám populácie (20. – 80. percentil). Tento index môže byť počítaný ako rozdiel medzi dvoma bodmi Lorenzovej krivky $L(0,8)$ - $L(0,2)$. Foster a Wolfson tvrdili, že Levy nemeria veľkosť strednej triedy resp. bipolarizáciu, pretože jeho index zlyháva pri zachytávaní rozpätia na okrajoch strednej triedy. Preto Foster a Wolfson navrhli index, ktorý tento nedostatok odstraňuje. Jedna z výhod FW indexu polarizácie spočíva v tom, že je možné ho skonštruovať zo štyroch ľahko pochopiteľných štatistických ukazovateľov: priemer, medián, Gini koeficient a relatívna medián odchýlka. Polarizácia rovnako ako aj nerovnosť má tendenciu rásť ak vzdialenosť v príjmoch medzi skupinou pod mediánom a nad mediánom rastie. Túto vzdialenosť môžeme vyjadriť pomocou T označujúcim relatívnu medián odchýlku, ktorá vyjadruje vzdialenosť medzi priemerným príjmom ľudí nad mediánom a priemerným príjmom ľudí pod mediánom.

$$T = (\mu^U - \mu^L) / \mu \quad (1)$$

Kde μ^U je priemer príjmu ľudí, ktorých príjem je nad mediánom $\mu^U = (1 - L(0,5)) / \mu$, μ^L priemer príjmu ľudí, ktorých príjem je pod mediánom $\mu^L = L(0,5) / \mu$ a μ je priemer príjmu celej populácie. T môžeme vyjadriť aj ako dvojnásobok plochy medzi dotyčnicou k Lorenzovej krivke v bode mediánu a 45 stupňovou priamkou vyjadrujúcou rovnosť príjmov v celej populácii (viď. obr. 1).

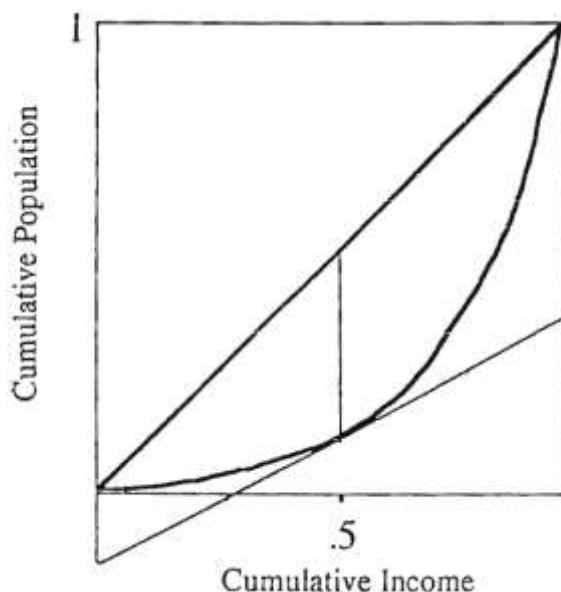
$$T = 2(0,5 - L(0,5)) / \mu \quad (2)$$

Pričom L reprezentuje Lorenzovu krivku. Potom FW index môžeme zapísať v nasledovnom tvare:

$$FW = (T - G) \frac{\mu}{m} \quad (3)$$

kde G vyjadruje Gini koeficient reprezentujúci dvojnásobok plochy medzi Lorenzovou krivkou a 45 stupňovou priamkou vyjadrujúcou rovnosť príjmov v celej populácii, m reprezentuje medián príjem. Z uvedeného vyplýva, že FW index vyjadruje rozdiel plochy medzi T a G škálovanej podielom $\frac{\mu}{m}$ (sklon dotyčnice k Lorenzovej krivke).

Obrázok č.1: Lorenzova krivka a relatívna medián odchýlka



Zdroj: Foster and Wolfson (1992) - Polarization and the decline of the middle class: Canada and the U.S.

Wolfsonov index – Wolfson (1994)

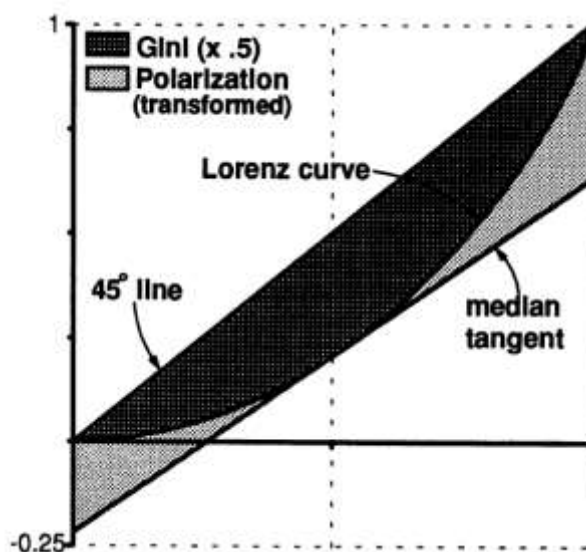
Wolfson (1994) upravil FW index tzv. Wolfsonov index polarizácie tak, aby podobne ako Gini koeficient nadobúdala hodnoty na intervale $[0,1]$. Keďže slabo vyšrafovaná plocha na obrázku č.2 medzi dotyčnicou k Lorenzovej krivke a Lorenzovou krivkou je rovná vzťahu v tvare:

$$\left(0,5 - L(0,5) - \frac{G}{2}\right) \frac{\mu}{m} \quad (4)$$

Vzťah (4) nadobúda minimum v bode 0 ak máme perfektne vyrovnanú distribúciu príjmu obyvateľstva a hodnotu 0,25 pre perfektne bimodálne rozdelenie príjmu, kedy polovica populácie má nulový príjem a druhá polovica dvojnásobok priemerného príjmu. Za účelom škálovania tohto indexu na intervale $[0,1]$ autor vynásobil vyššie uvedený vzťah hodnotou 4.

$$P = 4 \left(0,5 - L(0,5) - \frac{gini}{2}\right) \frac{\mu}{m} \quad (5)$$

Obrázok č.2: Lorenzova krivka a Gini koeficient



Zdroj: Wolfson (1994) – When inequalities diverge

Index Estabana a Raya (1994)

Jedným z kľúčových príspevkov k problematike polarizácie bola práca Estebana a Raya (1994), ktorí ako prví predstavili axiomatickú formalizáciu polarizácie. Podľa ich indexu polarizácie autori predpokladajú, že distribúcia príjmu môže byť rozdelená do konečného počtu príjmových skupín $i=1, \dots, n$, pričom všetci jednotlivci v skupine majú úplne rovnaký príjem y_i . Identifikácia jednotlivcov do skupín je rastúcou funkciou $I(n_i)$ počtu jednotlivcov n_i v príjmovej skupine i . Snaha autorov je zachytiť efektívny antagonizmus/nepriateľstvo medzi jednotlivcami i a j . Vzdialenosť medzi jednotlivcom i a j je definovaná vzťahom $\delta(y_i, y_j)$. Jednotlivec i s príjmom y_i cíti určité nepriateľstvo voči jednotlivcovi j s príjmom y_j vyjadrené ako $a[\delta(y_i, y_j)]$. Efektívny antagonizmus pociťovaný jednotlivcom i voči j je vyjadrený spojitou funkciou $T(I, a)$, kde $a = a[\delta(y_i, y_j)]$ a $I=I(p)$. Celková polarizácia v spoločnosti je podľa autorov vyjadrená ako suma všetkých efektívnych antagonizmov v spoločnosti v tvare:

$$P(n, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n_i n_j T \left(I(n_i), a \left(\delta(y_i, y_j) \right) \right) \quad (6)$$

Zo vzťahu (5) vyplýva, že polarizácia v spoločnosti vyplýva iba z rozdelenia efektívnych antagonizmov v spoločnosti. Uvedený vzťah autori upravili zavedením jednej podmienky a troch axiém, pričom výsledný vzťah nadobudol tvar:

$$P(n, \mathbf{y}) = K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n_i^{1+\alpha} n_j |y_i - y_j| \quad (7)$$

kde $K>0$ reprezentuje normalizačnú konštantu, ktorá nemá vplyv na zoradenie distribúcie a α je konštantou v intervale $(0, 1,6]$, ktorá reprezentuje tzv. konštantu polarizačnej averzie. Uvedený vzťah (6) má tú vlastnosť, že sa rovná Gini koeficientu ak $\alpha=0$. Nakoľko môže byť $\alpha>0$, táto konštantu oddeľuje príjmovú polarizáciu od nerovnosti. Čím väčšia je hodnota α tým väčšia je odchýlka vzťahu (6) od mier príjmovej nerovnosti.

3 ZÁVER

Cieľom článku je poukázať na niektoré metodické spôsoby merania polarizácie a bipolarizácie, ktorá umožňuje merať veľkosť strednej triedy. Okrem prehľadu literatúry

v oblasti merania strednej triedy a polarizácie, článok vysvetľuje základné indexy polarizácie, ktoré do veľkej miery prispeli k rozvoju tejto oblasti. V rámci ďalšieho výskumu by sme radi aplikovali tieto indexy na údaje SR.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy APVV 14-0787 „Zladenie verejných financií a starobného dôchodkového zabezpečenia (návrh udržateľného a rast podporujúceho dôchodkového systému pre starnúcu slovenskú ekonomiku)“.

Literatúra

1. Esteban, J. M. and D. Ray (1994) 'On the measurement of polarization', *Econometrica* 62, 819—851.
2. Duclos, J.-Y., & Taptué, A.-M. (2015). Polarization. In *Handbook of Income Distribution* (pp. 301–358). Elsevier.
3. Foster, J. and Wolfson, M. C. (1992, revised in August 2009). “*Polarization and the Decline of the Middle Class: Canada and the US.*” OPHI Working Paper 31, University of Oxford.
4. Kolm, S. C. (1969). *The optimal production of social justice*. In J. Margolis, H. Guitton (Eds.), *Public economics*. Macmillan, London and New York, pp145-200.
5. Leckie, N. (1988). *The declining middle and technological change: trends in the distribution of employment income in Canada, 1971-84*. Economic Council of Canada, Ottawa.
6. Levy, F. (1987). *The middle class: is it really vanishing?* *Brookings rev.* 5, 17-21.
7. Love, R., Wolfson, M. (1976) *Income Inequality: Statistical Methodology and Canadian Illustrations*. Statistics Canada, Ottawa, Canada.
8. Thurow, L.C., (1984). *The Disappearance of the Middle Class*. *New York Times*, 2, February .
9. Wolfson, M.C. (1994) *When Inequalities Diverge*. *The American Economic Review*, 84, 353-358.

Kontaktné údaje

Ing. Brian König, PhD.,

a, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava,

b, Ekonomický ústav SAV,
Šancová 56,
811 05 Bratislava, SR;
e-mail: brian.konig@euba.sk

PREVIAZANOSŤ AKCIOVÝCH TRHOV PRED A PO OHLÁSENÍ MAKROEKONOMICKEJ ZMENY

INTERACTIONS AMONG STOCK MARKETS BEFORE AND AFTER ANNOUNCEMENT OF MACROECONOMIC CHANGE

Stanislav Kováč

Abstrakt

Previazanosť akciových trhov je determinovaná viacerými faktormi a jedným z kľúčových faktorov je ekonomická a politická integrácia. Výsledok referenda o vystúpení Spojeného kráľovstva z Európskej únie predstavuje ohlásenie zmeny kľúčového faktora previazanosti. Za pomoci Markovho modelu prepínania režimov potvrdíme prítomnosť dvoch režimov volatility spojitého výnosu burzového indexu FTSE 100 a to pred a po referende. Prostredníctvom dynamických podmienených korelácií odhadneme silu previazanosti akciového trhu Spojeného kráľovstva a Českej republiky v individuálnych režimoch. Naš prístup potvrdí klesajúcu tendenciu vývoja previazanosti.

Kľúčové slová: *Markov model prepínania režimov, model dynamických podmienených korelácií, previazanosť*

Abstract

Interactions among stock markets are determined by many factors and one of the key factors is the economic and political integration. Referendum result about the United Kingdom leaving the European union represents an announced change of the key interaction factor. We confirm the presence of two volatile regimes at continuously compounded return of stock market index FTSE 100 using Markov switching model before and after the referendum. With dynamic conditional correlations for each individual regime we estimate the strength of interactions between the United Kingdom and the Czech Republic stock markets. Our approach affirms a decreasing evolution of interaction.

Keywords: *Markov switching model, dynamic conditional correlations, interactions*

1 ÚVOD

Interakcia predstavuje simultánne pôsobenie aspoň dvoch účastníkov systému. V našom prípade systém predstavuje globálny trh, účastníkmi sú jednotlivé burzy a faktorom interakcie je prenos informácií, šokov a teda prenos volatility¹ vo finančných časových radov. Sila interakcie rastie priamo úmerne so silou integrácie medzi jednotlivými trhmi. Sila (resp. stupeň, miera) integrácie predstavuje intenzitu závislosti (interdependencie) medzi trhmi. Je možné vyvodit' záver, že čím silnejšie je pôsobenie faktorov, tým interakcia búrz rastie a súčasne sa prehĺbuje integrácia. Nasledujúci princíp platí aj opačne, čím sú trhy integrovanejšie, tým silnejšie je pôsobenie faktorov interakcie medzi nimi. Úlohou zostáva kvantifikovať silu tejto previazanosti. Do akej miery náhodný šok (rozhodnutie o vystúpení Spojeného kráľovstva z Európskej únie) burzového indexu Spojeného kráľovstva FTSE 100

¹ Volatilita predstavuje variabilitu (rozkolísanie od priemeru merané prostredníctvom štandardnej odchýlky, resp. rozptylu).

ovplyvní nemecký index DAX a do akej miery sa táto skutočnosť prejaví na burzových indexoch Vyšehradskej štvorky (V4). Baumöhl a kol. (Baumöhl a kol., 2010) potvrdili existenciu previazanosti medzi nemeckým indexom a krajinami V4. Kováč (Kováč, 2018) potvrdil previazanosť medzi indexom Spojeného kráľovstva FTSE 100 a Nemecka DAX. Náš príspevok sa zameria na transmisiu šoku medzi indexom Spojeného kráľovstva FTSE 100 a českým indexom PX a dopadom na previazanosť.

Významnou makroekonomickou zmenou je rozhodnutie o odchode Spojeného kráľovstva z Európskej únie, ku ktorému sa priklonili obyvatelia v referende 23. júna 2016, pričom samotné vystúpenie sa má zrealizovať najneskôr do 29. marca 2019. V súčasnosti existuje viacero prác, ktoré upozorňujú na zmenu režimov pri zmene politiky, napr. zmena režimov pri zmene monetárnej politiky (Sims a Zha, 2006) či prítomnosť asymetrického výstupu produkcie ako reakciu na zmenu politiky (Lo a Piger, 2005) na podklade Markovho modelu prepínania režimov. Je preto žiadúce, aby sme v našom príspevku overili, či výsledok referenda spôsobil zmenu režimu.

Markov model prepínania režimov poskytuje účinný a systematický prístup na modelovania viacerých štrukturálnych zlomov a posunov medzi jednotlivými režimami výnosov finančných aktív. Existuje viacero úspešných aplikácií v oblasti financií, napr. modelovanie volatility režimov (Hamilton a Lin, 1996). Hamilton a Lin vo svojej práci vyslovili hypotézu o existencii skrytej premennej (stav ekonomiky), ktorá determinuje strednú hodnotu rastu priemyselnej produkcie a mieru volatility akcií. Predpokladali, že táto nenapozorovaná premenná nadobúda hodnotu z konečnej množiny a je možné ju determinovať prostredníctvom Markovho reťazca. Príspevok nadväzuje na práce (Schwert, 1989; Hamilton a Susmel, 1994). Medzi ďalšie úspešné aplikácie patria napr.: periodické prasknutie bublín (Hall a kol., 1999), či modelovanie stavovo-závislých výnosov (Perez-Quiros a Timmermann, 2000).

Silu a vývoj previazanosti medzi trhmi je možné merať rôznymi spôsobmi. My sme zvolili model dynamických podmienených korelácií (DCC), ktorý bol predstavený autormi Engle a Sheppard (Engle a Sheppard, 2001). Vo svojej práci ukázali, že problém viacrozmerneho podmieneného rozptylu môže byť zjednodušený do formy odhadovania jednorozmerných GARCH modelov pre každé individuálne aktívum, z ktorých si ponechali transformované reziduály a potom ich použili na odhad estimátora podmienenej korelácie. Teoretické východiská aplikovali na odhad matice podmienenej kovariancie 100 aktív používajúc S&P 500 sektorové indexy a Dow Jones Industrial Average aktíva. Zrealizovali viacero testov na porovnanie estimátora vytvoreného prostredníctvom DCC, ktorý preukázal silný výkon vo všetkých testoch, hlavne so zohľadnením jednoduchej implementácie.

Neskôr na ich prácu teoretických a empirických vlastností DCC modelu nadviazali viacerí autori. Baumöhl a kol. (Baumöhl a kol., 2010) použili DCC model na analýzu integrácie akciových trhov krajín Vyšehradskej skupiny (V4) s burzovým indexom Nemecka DAX. Zistili, že dynamická podmienená korelácia štatisticky významne rastie po vstupe krajín centrálnej a východnej Európy do Európskej únie. Jedine SAX (Slovenský akciový index) nerástol.

Celik (Celik, 2012) prostredníctvom DCC modelu potvrdil intenzívnejší efekt nákazy počas finančnej krízy v USA na rozvojové trhy než rozvinuté. Dopad krízy v rozvojových trhoch sa primárne prejavil spomalením ich hospodárskeho rastu, čím sa okrem iného znížila ich dopytová sila. Obdobnej problematike sa venovali (napr.: Boubaker a kol., 2016; Seth a Sighania, 2017).

Využitie DCC modelu nemožno zužovať len na analýzu väzieb medzi trhmi. Početné aplikácie sú v oblasti analýz portfólia (napr.: Cappiello a kol., 2006; Acatrinei a kol., 2013).

Príspevok má nasledovnú štruktúru: v prvej kapitole je stručný prehľad prác, ktoré sa venujú obdobnej problematike, resp. využívajú rovnaké metodologické východiská. V druhej kapitole je bližší popis použitej metodológie s potenciálnou interpretáciou jednotlivých výstupov. Tretia kapitola predstavuje praktickú časť práce a poslednou kapitolou je záver.

2 METODOLÓGIA

V nasledujúcej kapitole bližšie popíšeme matematický aparát príspevku. Východiskovým je Markov model prepínania režimov, za pomoci ktorého je možné rozdeliť sledovaný jav do viacerých režimov. Po ňom nasleduje model dynamických podmienených korelácií, ktorý predstavuje dvojkrovú analýzu. Prvým krokom je výpočet štandardných odchýlok jednorozmerných ARCH modelov, z ktorých predstavíme nami zvolené tri typy. Druhým krokom je dekompozícia matice podmienených korelácií.

2.1 Markov model prepínania režimov

Markov model prepínania režimov povoľuje, aby vysvetľujúce premenné boli závislé od stavu, tzn. tento prístup umožňuje zmenu parametrov regresie a rozptylu náhodnej zložky v závislosti od režimu (S_t) podľa príslušných pravdepodobností prechodu.

Model povoľuje, aby ekonomika bola v jednom z n rozličných režimov. Pravdepodobnosť prechodu zo stavu i v čase $t - 1$ do stavu j v čase t je ovplyvnená len stavom v čase $t - 1$ a nie predchádzajúcimi stavmi, čo môžeme zapísať nasledovne (Hamilton a Lin, 1996):

$$\begin{aligned} Prob\{S_t = j | S_{t-1} = i, S_{t-2} = h, \dots\} &= Prob\{S_t = j | S_{t-1} = i\} \\ &= p_{ij}. \end{aligned} \quad (1)$$

Tieto pravdepodobnosti prechodu sú zjednotené v matici $\mathbf{P} = (p_{ij})$. Markov reťazec je reprezentovaný náhodným vektorom ξ_t , ktorého i -ty prvok je rovný jednej, ak $S_t = i$, inak nule. Potom pre 2-stavový Markov reťazec platí, že $\xi_t = (0, 1)^T$ pre $S_t = 2$. Hodnoty Markovho reťazca sú nenapozorované, takže si nemôžeme byť istý režimom v čase t , ale môžeme jednotlivým režimom priradiť pravdepodobnosti. Podmienenú strednú hodnotu ξ_{t+1} s ohľadom na ξ_t je potom možné vypočítať pomocou vzorca (Alexander a Kaeck, 2008):

$$\begin{aligned} E(\xi_{t+1} | \xi_t) &= \xi_{t+1|t} \\ &= \mathbf{P}\xi_t. \end{aligned} \quad (2)$$

Za predpokladu normálneho rozdelenia náhodnej zložky pre oba stavy, podmienená funkcia hustoty je daná vzťahom (Alexander a Kaeck, 2008):

$$\begin{aligned} \eta_{i,t} &= f(y_t | S_t = i, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{(y_t - \mathbf{x}_t^T \boldsymbol{\beta}_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

kde $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{S_t=i,1}, \dots, \beta_{S_t=i,k})^T$, $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P}, \boldsymbol{\beta}_i, \sigma_i)$ a $\boldsymbol{\psi}_{t-1} = (y_t, y_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots)$ predstavuje informačnú množinu do času $t - 1$. Zo spojenia $\eta_{i,t}$ a pravdepodobností prechodov je možné odvodiť spoločnú funkciu hustoty y_t, S_t a S_{t-1} podmienenú \mathbf{x}_t a $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$ (Alexander a Kaeck, 2008):

$$\begin{aligned} f(y_t, S_t, S_{t-1} | \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) &= f(y_t | S_t, S_{t-1}, \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \\ &\cdot Prob\{S_t, S_{t-1} | \boldsymbol{\psi}_{t-1}\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Po sumácii cez všetky hodnoty S_t a S_{t-1} získame (Alexander a Kaeck, 2008):

$$f(y_t | \mathbf{x}_t, \boldsymbol{\psi}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{1}^T (\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_{i,t}), \quad (5)$$

kde \odot reprezentuje Hadamardov súčin. Podmienené pravdepodobnosti stavov získame riešením rekurzívnych vzťahov (Alexander a Kaeck, 2008):

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_{t|t} &= \frac{\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_{i,t}}{\mathbf{1}^T(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_{i,t})}, \\ \hat{\xi}_{t+1|t} &= \mathbf{P}\hat{\xi}_{t|t}.\end{aligned}\quad (6)$$

Vektor $\hat{\xi}_{t|t}$ je označovaný ako filtrovaná pravdepodobnosť a predstavuje najlepší odhad Markovho reťazca v čase t pri informačnej množine do času t . Iterácie vedú k podmienenému logaritmu funkcie vierohodnosti v tvare (Alexander a Kaeck, 2008):

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \log[\mathbf{1}^T(\hat{\xi}_{t|t-1} \odot \boldsymbol{\eta}_{i,t})]. \quad (7)$$

Optimálne parametre $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ získame maximalizáciou logaritmu funkcie vierohodnosti pri podmienkach, že súčet pravdepodobností je rovný jednej ($\mathbf{P}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}$) a štandardné odchýlky sú nezáporné ($\sigma_i \geq 0$).

S použitím Kimovho algoritmu (Kim, 1994) je možné získať vyhladené pravdepodobnosti, ktoré používajú informačnú množinu do času τ ($\tau > t$, zvyčajne $\tau = T$), na rozdiel od filtrovaných pravdepodobností, ktoré používajú informačnú množinu do času t . Kimov algoritmus rieši rekurzívne vzťahy pre $\hat{\xi}_{t|\tau}$ s východiskovým odhadom $\hat{\xi}_{\tau|\tau}$.

2.2 Vybrané jednorozmerné ARCH modely

V súčasnosti existuje široké spektrum ARCH modelov, ktorých prehľad poskytuje Bollerslev (Bollerslev, 2009). Popis všetkých modelov je nad rámec príspevku, preto sme s ohľadom na komplexnosť a softvérovú dostupnosť zúžili sledovanú skupinu na nasledovné jednorozmerné ARCH modely: GARCH(p,q), TGARCH(p,q,r) a EGARCH(p,q,r), kde p je rád ARCH člena, q je rád GARCH člena a r je rád asymetrie.

Vychádzame z modelu spojitého výnosu, kde nie je potrebné použiť AR ani MA členy (bližšie k problematike ARIMA modelov pozri (napr.: Cryer a Chan, 2011; Madsen, 2008)) a charakter náhodnej zložky je multiplikatívny. Úrovňový model má tvar:

$$\begin{aligned}r_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= h_t^{1/2} \eta_t,\end{aligned}\quad (8)$$

kde r_t je časový rad spojitého výnosu², μ_t je podmienená stredná hodnota, ε_t je náhodná zložka, h_t je podmienený rozptyl ε_t a η_t je stochastický časový rad, pre ktorý platí, že má nulovú strednú hodnotu a jednotkový rozptyl.

Model GARCH(p,q) má tvar (Bollerslev, 1986):

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (9)$$

kde $\omega, \alpha_i, \beta_j$ sú parametre modelu. Ak platí, že súčet odhadnutých parametrov pred ARCH a GARCH členmi je menší ako 1, model je stacionárny. Čím je súčet bližší hodnote jedna, tým vyššia je zotrvačnosť inovácií. Krátkodobé šoky sú zachytené v odhadnutých

² Pri analýzach nie sú použité denné hodnoty burzových indexov, ale časové rady spojitých výnosov, ktoré sú vypočítané ako prvé diferencie logaritmov hodnôt dvoch po sebe nasledujúcich dní.

parametroch pred ARCH členmi a dlhodobé šoky v odhadnutých parametroch pred GARCH členmi.

Model TGARCH(p,q,r) má tvar (Zakoïan, 1994):

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} + \sum_{k=1}^r \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 1_{\{\varepsilon_{t-k} < 0\}}, \quad (10)$$

kde novým členom oproti GARCH(p,q) je $1_{\{\varepsilon_{t-k} < 0\}}$, pre ktorý platí, že nadobúda hodnotu jedna, ak reziduál v čase $t - k$ je záporný, inak nadobúda hodnotu nula. Pre parameter asymetrie platí, že ak je kladný, tak negatívny šok zvyšuje volatilitu a je prítomný pákový efekt k -tého rádu. Zatiaľ čo pozitívny šok ovplyvní podmienený rozptyl len prostredníctvom parametra α_i , negatívny šok ovplyvní podmienený rozptyl prostredníctvom súčtu $\alpha_i + \gamma_k$. Ak $\gamma_k \neq 0$, potom dopad inovácií je asymetrický. V prípade nulového rádu asymetrie hovoríme o modeli GARCH(p,q), z čoho vyplýva, že model GARCH je špeciálnym prípadom TGARCH.

Model EGARCH(p,q,r) má tvar (Nelson, 1991):

$$\ln(h_t) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{h_{t-i}^{1/2}} \right| + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(h_{t-j}) + \sum_{k=1}^r \theta_k \frac{\varepsilon_{t-k}}{h_{t-k}^{1/2}}. \quad (11)$$

Ľavá strana je logaritmus podmieneného rozptylu, to znamená, že pákový efekt je exponenciálny a odhad je garantovane nezáporný. Ak platí $\theta_k < 0$, tak je prítomný pákový efekt. Dopad inovácií je asymetrický, ak $\theta_k \neq 0$.

2.3 Model dynamických podmienených korelácií (DCC)

Model patrí medzi dvojkrokové modely, pretože analýza spočíva v dvoch krokoch:

1. krok: výpočet rezíduí prostredníctvom vhodne zvoleného jednorozmerného modelu ARCH,
2. krok: výpočet dynamických podmienených korelácií.

Podstata DCC modelu spočíva v dekompozícií pozitívne definitnej podmienenej variančno-kovariančnej matice (\mathbf{H}_t) náhodnej zložky ($\boldsymbol{\varepsilon}_t$) spojitého výnosu n aktív (\mathbf{r}_t) na diagonálnu maticu s podmienenými štandardnými odchýlkami z jednorozmerných ARCH modelov (\mathbf{D}_t) a maticu s podmienenými korelačnými koeficientami (\mathbf{R}_t). Model DCC má tvar (Engle a Sheppard, 2001):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\eta}_t, \\ \mathbf{H}_t &= \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t. \end{aligned} \quad (12)$$

V prvom kroku vypočítame štandardné odchýlky $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, prvky matice \mathbf{D}_t , pomocou jednorozmerných modelov triedy ARCH. Za predpokladu, že použijeme GARCH(p,q) môžeme prvý krok zapísať v tvare:

$$\mathbf{H}_t = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{H}_{t-j}, \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} h_{11,t}^{1/2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{nn,t}^{1/2} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je vektor kladných parametrov, $\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{B}^{(j)}$ sú diagonálne matice kladných parametrov.

V druhom kroku vypočítame podmienené korelácie (dekompozícia \mathbf{R}_t). Pri dekompozícii je nevyhnutné zabezpečiť pozitívnu definitnosť matice podmienených korelačných koeficientov, aby aj podmienená variančno-kovariančná matica bola pozitívne definitná. Súčasne prvky matice \mathbf{R}_t musia byť menšie, nanajvýš rovné jednej. Pri výpočte použijeme inverznú maticu \mathbf{D}_t v nasledovných vzťahoch (Wang a Moore, 2008):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_t &= \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t), \\ \mathbf{Q} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T, \\ \mathbf{Q}_t &= (1 - a - b) \mathbf{Q} + a \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^T + b \mathbf{Q}_{t-1}, \\ \mathbf{R}_t &= \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_t \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

kde $\boldsymbol{\epsilon}_t$ je vektor štandardizovaných rezíduí, \mathbf{Q} je nepodmienená variančno-kovariančná matica $\boldsymbol{\epsilon}_t$, \mathbf{Q}_t je podmienená variančno-kovariančná matica $\boldsymbol{\epsilon}_t$, a, b sú kladné skalárne parametre. Ak $a = b = 0$, tak $\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}$ a matica s podmienenými korelačnými koeficientmi sa v čase nemení, tzn. $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}$. V tom prípade hovoríme o modeli konštantných podmienených korelácií. Z toho vyplýva podmienka pre DCC model: $a, b \neq 0$. Súčasne musí platiť $a + b < 1$ kvôli pozitívnej definitnosti matice \mathbf{H}_t . Prvky matice $\mathbf{R}_t = (\rho_{ij,t})$ musia byť menšie, nanajvýš rovné jednej, preto musí platiť $\left| q_{ij,t} / (q_{ii,t} q_{jj,t})^{1/2} \right| \leq 1$, čím je zabezpečená aj jej pozitívna definitnosť.

Pri predpoklade, že $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ má normálne rozdelenie, môžeme na odhad použiť metódu maximálnej virohodnosti, ktorej logaritmickej funkcia virohodnosti má tvar (Brooks, 2008):

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{Tn}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\ln |\mathbf{H}_t| + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t). \quad (15)$$

3 EMPIRICKÉ VÝSLEDKY

V prvej časti tretej kapitoly odhadneme Markov model prepínania režimov pre spojitý výnos burzového indexu Spojeného kráľovstva, ktorým potvrdíme nevyhnutnosť skúmania previazanosti pre dve individuálne obdobia, konkrétne pred a po referende o odchode Spojeného kráľovstva z Európskej únie.

V druhej časti použijeme model dynamických podmienených korelácií na odhad vývoja previazanosti medzi binárnou kombináciou spojitých výnosov vybraných burzových indexov.

Na analýzu použijeme burzový index Spojeného kráľovstva (FTSE 100) a Českej republiky (PX) od 1. januára 2015 do 31. decembra 2017, čo po zosynchronizovaní dát predstavuje 669 pozorovaní. Dáta boli získané z webovej stránky www.stooq.pl a Wolfram Mathematica – Financial Data.

3.1 Markov model prepínania režimov

Referendum o odchode Spojeného kráľovstva z Európskej únie predstavujú makroekonomickú zmenu. Je preto racionálne očakávať, že volatilita spojitých výnosov bude rozdielna v období pred a po voľbách. Tento predpoklad overíme prostredníctvom Markovho modelu prepínania režimov³ s dvomi stavmi, tzn. $S \in \{1, 2\}$. Volatilita a parametre sú odhadnuté metódou maximálnej vierohodnosti. Výsledky sú uvedené v Tab. 1 (v zátvorkách sú p-hodnoty).

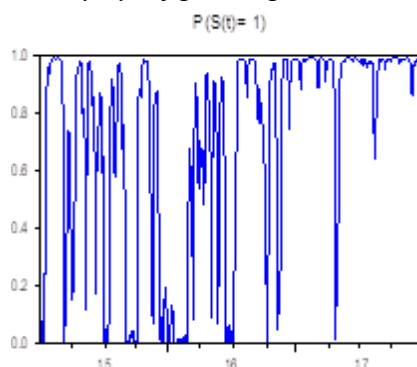
Tab. 1: Markov model prepínania režimov

	1. režim	2. režim
C	0,000486 (0,114)	-0,000250 (0,832)
LOG(SIGMA)	-5,152472 (0,000)	-4,162650 (0,000)
P(i, j)	0,952	0,881

Zdroj: Vlastné spracovanie s využitím softvéru EViews.

Z Tab. 1 je zrejmé, že v prvom režime je priemerný rast hodnoty burzového indexu 0,000486 % denne. V druhom režime je negatívny priemerný spojitý výnos, ktorý zodpovedá poklesu hodnoty burzového indexu o 0,00025 % denne a volatilita je vyššia než v prvom režime. Na 5 % hladine významnosti model nevykazuje autokoreláciu, ktorú sme testovali prostredníctvom Ljungovej-Boxovej Q testovacej štatistiky do 50. pozorovania. Režimy sú relatívne stabilné. Pravdepodobnosť zotrvania v predchádzajúcom režime je približne 90 %, pričom prvý stav je stabilnejší (95,2 %), čo je možné vidieť aj na Obr. 1, ktorý zobrazuje vyhladený vývoj pravdepodobností režimov.

Obr. 1: Vyhladený vývoj pravdepodobností pre 1. režim



Zdroj: Vlastné spracovanie s využitím softvéru EViews.

Premenlivé správanie vývoja burzového indexu sa zmenilo v 1. polovici roku 2016, kedy sa znížila volatilita a priemerný spojitý výnos bol kladný (1. režim). Model potvrdzuje prítomnosť dvoch období s rozdielnym vývojom, preto pri analýze previazanosti budeme sledovať obdobie pred júnom 2016 a po ňom (konkrétny deň delenia pozorovaní je 23. 6. 2016).

³ Alexander (Alexander, 2008) navrhuje, aby prvým krokom pred použitím Markovho modelu prepínania bolo testovanie štrukturálnych zlomov, ktoré indikuje zmenu koeficientov v rozdielnych časových obdobiach (režimoch). V našom prípade Chowov test na 5 % hladine významnosti nezamietol nulovú hypotézu o neprítomnosti zlomu pre nami zvolený dátum 23. 6. 2016. Odporúčaný deň štrukturálneho zlomu je 12. 2. 2016, kedy začali prípravy na referendum, preto budeme vychádzať z predpokladu, že samotný deň referenda je zlom. Prítomnosť štrukturálnych zlomov nie je nutnou podmienkou pre využitie Markovho modelu prepínania režimov.

3.2 Model dynamických podmienených korelácií

Prvým krokom aplikácie DCC modelu je výber optimálnych jednorozmerných modelov triedy ARCH pre jednotlivé úrovňové modely spojených výnosov. Vychádzame z konštantných úrovňových modelov, nakoľko na 1 % hladine významnosti nemôžeme zamietnuť nulovú hypotézu o neprítomnosti autokorelácie prostredníctvom Ljungovej-Boxovej Q testovacej štatistiky. Ljungova-Boxova Q testovacia štatistika štvorcov reziduálov (v Tab. 2 a 3 označená Q^2) indikuje prítomnosť ARCH efektu, ktorý sme potvrdili Englovou LM testovacou štatistikou. Na základe rozšíreného Dickeyho-Fullerovho testu (v Tab. 2 označený ADF) sme dospeli k záveru, že spojené výnosy sú stacionárne a integrované rádu nula v oboch režimoch. Výsledky testov pre úrovňové modely sú v Tab. 2.

Tab. 2: Testovanie autokorelácie, prítomnosti ARCH efektu pre úrovňové modely 1. a 2. režimu⁴ a stacionárnosti spojených výnosov

Test	1. režim		2. režim	
	dltse	dlp _x	dltse	dlp _x
Q(1)	0,078 (0,781)	0,007 (0,932)	6,219 (0,013)	1,734 (0,188)
Q(50)	58,11 (0,201)	53,51 (0,341)	65,09 (0,074)	65,86 (0,066)
Q ² (1)	3,377 (0,066)	5,778 (0,016)	64,72 (0,000)	64,14 (0,000)
Q ² (50)	126,6 (0,000)	138,7 (0,000)	158,2 (0,000)	109,2 (0,000)
ARCH(1)	3,353 (0,068)	5,778 (0,017)	104,1 (0,000)	185,8 (0,000)
ADF	-17,76 (0,000)	-18,15 (0,000)	-14,61 (0,000)	-17,10 (0,000)

Zdroj: Vlastné spracovanie s využitím softvéru EViews.

Pre jednotlivé úrovňové modely sme testovali nasledovné jednorozmerné modely triedy ARCH: GARCH(p,q), TGARCH(p,q,r) a EGARCH(p,q,r). Najvhodnejší model sme vybrali na základe významnosti parametrov, najnižších hodnôt informačného kritéria (AIC – Akaikeho informačné kritérium), neprítomnosti autokorelácie štvorcov reziduálov a neprítomnosti zvyškovej heteroskedasticity. Vybrané jednorozmerné ARCH modely, odhadnuté parametre s vybranými štatistikami sú uvedené v Tab. 3.

Tab. 3: Jednorozmerné ARCH modely, odhadnuté parametre a vybrané štatistiky

Model	1. režim		2. režim	
	dltse	dlp _x	dltse	dlp _x
Model	TGARCH(1,1,1)	EGARCH(1,1,1)	GARCH(1,1)	GARCH(1,1)
α_1	-0,102 (0,000)	-0,084 (0,000)	0,061 (0,159)	0,078 (0,004)
β_1	0,910 (0,000)	0,975 (0,000)	0,675 (0,000)	0,821 (0,000)
γ_1	0,308 (0,000)			
θ_1		-0,096 (0,000)		
AIC	-6,241	-6,381	-7,246	-7,313
Q(50)	44,72 (0,685)	43,66 (0,724)	68,93 (0,039)	60,50 (0,147)

⁴ 1. režim je obdobie od 1. 1. 2015 do 23. 6. 2016, 2. režim je obdobie od 24. 6. 2016 do 31. 12. 2017.

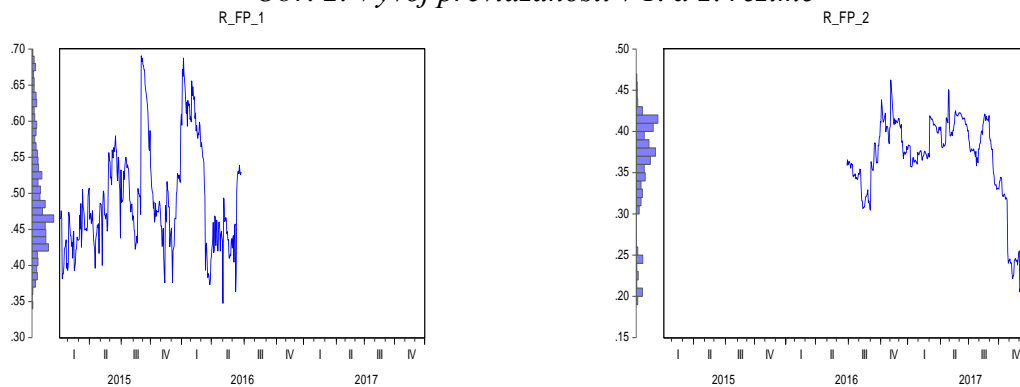
Q ² (50)	46,01 (0,634)	33,74 (0,962)	62,65 (0,108)	61,39 (0,130)
ARCH(1)	0,103 (0,749)	0,228 (0,633)	0,822 (0,365)	0,983 (0,322)

Zdroj: Vlastné spracovanie s využitím softvéru EViews.

Z Tab. 3 pre prvý režim spojitého výnosu burzového indexu Spojeného kráľovstva vyplýva, že pozitívny šok z predchádzajúceho obdobia zníži podmienený rozptyl o 10,2 % štvorca pozitívneho rezídua, zatiaľ čo negatívny šok z predchádzajúceho obdobia zvýši volatilitu o 20,6 % štvorca negatívneho rezídua. Parameter asymetrie je kladný ($\gamma_1 = 0,308$), čo potvrdzuje prítomnosť pákového efektu⁵. V prípade spojitého výnosu burzového indexu Českej republiky je tiež prítomný pákový efekt. Hodnota pred dlhodobými vplyvmi šokov je blízka hodnote jedna a teda môžeme hovoriť o vysokej zotrvačnosti. V druhom režime bol optimálnym GARCH(1,1) model pre obidva spojitý výnosy. Vyššiu zotrvačnosť náhodných šokov vykazuje český burzový index, nakoľko súčet parametrov je bližšie k hodnote jedna. Na 1 % hladine významnosti v modeloch nie je prítomná autokorelácia a ani zvyšková heteroskedasticita.

Druhým krokom je odhad DCC modelu za pomoci EViews kódu, ktorý je možné nájsť v práci Kováča (Kováč, 2018). Primárnym záujmom je vývoj podmienených korelácií v čase. Informácie o vývoji previazanosti prostredníctvom podmienených korelácií sú vhodným nástrojom pre rozhodovanie investorov o využití medzinárodnej diverzifikácii rizika portfólií. Nepodmienený koeficient korelácie, v čase sa nemeniaci konštanta, nehovorí nič o rastových tendenciách previazanosti. Podmienený koeficient korelácie, ktorý sa v čase vyvíja a je závislý od predchádzajúceho vývoja, indikuje zmeny správania previazanosti. Pokiaľ je koeficient vysoký, je pravdepodobné, že šoky z jedného trhu ovplyvnia aj druhý trh v sledovanej binárnej kombinácii. Nízky koeficient korelácie predstavuje relatívne nízku previazanosť, čo otvára dvere pre medzinárodnú diverzifikáciu. Vývoj previazanosti prostredníctvom podmieneného koeficienta korelácie je zobrazený na Obr. 2.

Obr. 2: Vývoj previazanosti v 1. a 2. režime



Zdroj: Vlastné spracovanie s využitím softvéru EViews.

Tab. 4: Koeficienty korelácie

	1. režim	2. režim
Nepodmienený koeficient korelácie	0,5885	0,4336
Priemerný podmienený koeficient korelácie	0,4928	0,3619

Zdroj: Vlastné spracovanie s využitím softvéru EViews.

⁵ Asymetria účinkov minulých pozitívnych a negatívnych hodnôt na súčasnú volatilitu.

Model dynamických podmienených korelácii odhalil nadhodnotenie previazanosti prostredníctvom nepodmieneného koeficienta korelácie (pozri Tab. 4). Oba prípady vykazujú spoločný trend vývoja a to je klesajúca previazanosť medzi skúmanými trhmi, pričom percentuálna zmena je v oboch prípadoch približne rovnaká a to 26 %. Zatiaľ čo prvý režim neposkytuje podklad o ustálenej vývojovej tendencii previazanosti, v druhom režime je možné spozorovať pokles previazanosti od 3. kvartálu roku 2017. Je možné zhodnotiť, že Česká republika po odchode Spojeného kráľovstva predstavuje relatívne stabilnú lokalitu (s ohľadom na prenos nákazy) pre realokáciu finančných inštitúcií, ktoré majú záujem zotrvať v Európskej únii.

4 ZÁVER

Napriek tomu, že Chowov test štrukturálneho zlomu nepotvrdil prítomnosť zmeny na finančnom trhu, vývoj vyhladených pravdepodobností naznačuje presun z neustáleného správania do 1. režimu po 2. kvartáli roku 2016. Zaujímavou skutočnosťou je, že prvý režim (obdobie po referende) má kladný priemerný spojený výnos a nižšiu volatilitu než druhý režim. Potvrdili sme pokles previazanosti medzi sledovanou binárnou kombináciou v priemere až o 26 % a zároveň klesajúci vývoj od 3. kvartálu roku 2017.

Príspevok poskytol stručný prehľad prác, ktoré využívajú Markov model prepínania režimov a model dynamických podmienených korelácií. Poukázal na možnosť súčinnosti oboch modelov pri analýze previazanosti akciových trhov pri zmene ekonomického správania (v našom prípade zmena zapríčinená referendom). V príspevku sme graficky znázornili vývoj previazanosti medzi burzovými trhmi Spojeného kráľovstva a Českej republiky. Informácie o priebehu previazanosti sú nevyhnutné pre racionálne rozhodnutie o diverzifikácii rizika portfólia investorov, odhalení možného prenosu nákazy medzi jednotlivými trhmi a tiež môžu slúžiť ako východiskový bod pre hlbšie analýzy dopadov samotného odchodu Spojeného kráľovstva z Európskej únie na finančné trhy krajín Vyšehradskej skupiny.

Použitá literatúra

1. ACATRINEI, M. - GORUN, A. - MARCU, N. 2013. A DCC-GARCH Model to Estimate the Risk to the Capital Market in Romania. In: *Journal for Economic Forecasting*, roč. 1, 2013, č. 1, s. 136-148.
2. ALEXANDER, C. - KAECK, A. 2008. Regime dependent determinants of credit default swap spreads. In: *Journal of Banking & Finance*, roč. 32, 2008, č. 6, s. 1008-1021.
3. ALEXANDER, C. 2008. Market Risk Analysis, Volume II, Practical Financial Econometrics. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008, 419 s.
4. BAUMÖHL, E. - FARKAŠOVSKÁ, M. - VÝROST, T. 2010. Integrácia akciových trhov: DCC MV-GARCH model. In: *Politická ekonomie*, roč. 2010, 2010, č. 4, s. 488-503.
5. BOLLERSLEV, T. 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. In: *Journal of Econometrics*, roč. 31, 1986, č. 3, s. 307-327.
6. BOLLERSLEV, T. 2009. Glossary to ARCH (GARCH). [online]. 41 s. [cit. 2018.10.31]. Dostupné na internete: <https://pdfs.semanticscholar.org/ea8e/a53721fbc28efec73e509259b00a9193ba12.pdf>.
7. BOUBAKER, S. - JOUINI, J. - LAHIANI, A. 2016. Financial contagion between the US and selected developed and emerging countries: The case of the subprime crisis. In: *The Quarterly Review of Economics and Finance*, roč. 61, 2016, č. C, s. 14-28.
8. BROOKS, CH. 2008. Introductory Econometrics for Finance. 2. edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, 648 s.

9. CAPPIELLO, L. - ENGLE, R. - SHEPPARD, K. 2006. Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns. In: *Journal of Financial Econometrics*, roč. 4, 2006, č. 4, s. 537-572.
10. CELIK, S. 2012. The more contagion effect on emerging markets: The evidence of DCC-GARCH model. In: *Economic Modelling*, roč. 29, 2012, č. 5, s. 1946-1959.
11. CRYER, J. D. - CHAN, K. 2011. *Time Series Analysis with Applications in R*. New York: Springer, 2011, 491 s.
12. ENGLE, R. - SHEPPARD, K. 2001. Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH. [online]. 44 s. [cit. 2018.10.31]. Dostupné na internete: <https://www.nber.org/papers/w8554.pdf>.
13. HALL, S. G. - PSARADAKIS, Z. - SOLA, M. 1999. Detecting Periodically Collapsing Bubbles: A Markov-Switching Unit Root Test. In: *Journal of Applied Econometrics*, roč. 14, 1999, č. 2, s. 143-154.
14. HAMILTON, J. D. - LIN, G. 1996. Stock Market Volatility and the Business Cycle. In: *Journal of Applied Econometrics*, roč. 11, 1996, č. 5, s. 573-593.
15. HAMILTON, J. D. - SUSMEL, R. 1994. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime. In: *Journal of Econometrics*, roč. 64, 1994, č. 1-2, s. 307-333.
16. KIM, CH. J. 1994. Dynamic linear models with Markov-switching. In: *Journal of Econometrics*, roč. 60, 1994, č. 1-2, s. 1-22.
17. KOVÁČ, S. 2018. Analýza interakcií burzových trhov Spojeného kráľovstva a Nemecka prostredníctvom DVECH modelu. [online]. s. 459-466. [cit. 2018.10.31]. Dostupné na internete: https://fhi.euba.sk/www_write/files/veda-vyskum/konferencie/aiesa/AIESA_2018/Zbornik_AIESA2018.pdf.
18. KOVÁČ, S. 2018. Analýza interakcií medzi akciovými trhmi na báze modelov MGARCH: diplomová práca. Školiteľ: Michaela Chocholatá. Bratislava, 2018, 71 s.
19. LO, M. CH. - PIGER, J. 2005. Is the Response of Output to Monetary Policy Asymmetric? Evidence from a Regime-Switching Coefficients Model. In: *Journal of Money, Credit and Banking*, roč. 37, 2005, č. 5, s. 865-886.
20. MADSEN, H. 2008. *Time Series Analysis*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008, 380 s.
21. NELSON, D. B. 1991. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. In: *Econometrica*, roč. 59, 1991, č. 2, s. 347-370.
22. PEREZ-QUIROS, G. - TIMMERMANN, A. 2000. Firm Size and Cyclical Variations in Stock Returns. In: *The Journal of Finance*, roč. 55, 2002, č. 3, s. 1229-1262.
23. SCHWERT, G. W. 1989. Why Does Stock Market Volatility Change Over Time? In: *Journal of Finance*, roč. 44, 1989, č. 5, s. 1115-1153.
24. SETH, N. - SIGHANIA, M. 2017. Financial market contagion: selective review of reviews. In: *Qualitative Research in Financial Markets*, roč. 9, 2017, č. 4, s. 391-408.
25. SIMS, CH. A. - ZHA, T. 2006. Were There Regime Switches in U.S. Monetary Policy? In: *American Economic Review*, roč. 96, 2006, č. 1, s. 54-81.
26. WANG, P. - MOORE, T. 2008. Stock market integration for the transition economies: time-varying conditional correlation approach. In: *Manchester School*, roč. 76, 2008, vol. 76, č. 1, s. 116-133.
27. ZAKOÏAN, J. M. 1990. Threshold heteroskedastic models. Manuscript, CREST, INSEE, Paris, 1990.

Kontaktné údaje

Ing. Stanislav Kováč
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
email: stanislav.kovac@euba.sk

PŘÍRAZOVÁNÍ ZAMĚSTNANCŮ KE KLIENTŮM V MALÉ FIRMĚ

AN ASSIGNMENT OF EMPLOYEES TO CLIENTS IN A SMALL BUSINESS

Karel Lebr, Ondřej Sokol

Abstrakt

Přirázování zaměstnanců ke klientům v sektoru služeb je problém často řešitelný pouhou zdravou intuicí a zkušenostmi, ale s rostoucím počtem zaměstnanců a klientů roste i náročnost celého problému. Pro tyto účely je možné využít metod operačního výzkumu, konkrétněji lineárního či nelineárního programování. Tato práce se zabývá otázkou, jak přiřadit zaměstnance ke klientům podle jejich časových preferencí s ohledem na politiku zkoumané firmy. Pro tyto účely byl vytvořen a implementován model v podobě obecného přiřazovacího problému s horními a dolními mezemi na počet klientů přiřazených k jednomu učiteli. Úloha využívá princip minimaxu. Model byl následně verifikován a implementován na reálný problém.

***Klíčová slova:** přiřazovací problém, princip minimaxu, lineární programování.*

Abstract

Employee assignment to clients in the service sector is often a problem with simple intuitive solution but with the growing number of employees and clients, the complexity of the problem is increasing. For these purposes it is possible to use methods of operational research, more specifically linear or non-linear programming. This thesis deals with the problem of assigning employees to clients according to their time preferences, taking into account the policy of the company surveyed. For this purpose, a model has been created and implemented in the form of a general assignment problem with upper and lower limits on the number of clients assigned to one teacher. The task uses the minimax principle. Resulting model was verified and was implemented on a real problem.

***Keywords:** assignment problem, minimax principle, linear programming.*

1 ÚVOD

Cílem práce je sestavit model, který přiřadí klienty k učitelům a zároveň respektuje jejich požadavky. Zároveň je nutné respektovat další podmínky týkající se vytížení jednotlivých učitelů. Někteří učitelé mají hlavní pracovní poměr, zatímco ostatní mají menší úvazky. V práci řešíme konkrétní problém na základě dat z praxe.

Na začátku příspěvku je sepsána hlavní myšlenka úlohy a jsou zde popsána data úlohy. Je popsáno, jak se řeší daný problém v praxi a proč je vhodné vytvořit model, který by danou realitu popisoval.

V čtvrté kapitole je řešen samotný model. Je zformulován a okomentován. Následuje empirická část celé práce, kde se aplikují metody a postupy z úvodní kapitoly na reálný

problém. Je zde vysvětleno, proč byla vybrána metoda řešení přiřazovacího problému. Dále jsou interpretovány, verifikovány a následně implementovány výstupy získané řešením úlohy v MPL for Windows. V závěru příspěvku je výsledek okomentován.

2 NÁPLŇ PRÁCE

Náplní práce je optimálně přiřadit klienty firmy k zaměstnancům podle jejich časových a kapacitních možností. V současné době firma řeší daný optimalizační problém intuitivně „na papíře“, a proto je tato práce zaměřena na efektivnější způsob řešení pomocí metod operačního výzkumu. Problém lze ale převést na úlohu lineárního programování [4-8], což nám zaručuje velmi rychlé nalezení optimálního řešení.

Pro náš problém je nejefektivnější použití modelů přiřazovacího problému [1,2,3]. Samotný model byl implementován v programu MPL for Windows [9]. MPL for Windows nabízí celou řadu přidružených řešitelů jako např. Gurobi, Lindo (což je řešitel programu Lingo) nebo LPSolve. Pro přiřazovací problém se nejvíce hodí řešitel Gurobi [10], který zvládne i velmi rozsáhlé úlohy v řádu vteřin.

3 DATA

Firma, jejíž data tato práce zpracovává, si nepřála být jmenována. Firma je zaměřena na přípravu klientů k řízení motorového vozidla. Data jsou získána od majitele firmy, jeho zaměstnanců a klientů. K dispozici máme 7 učitelů (A, \dots, G) a 35 klientů a jimi poskytnuté informace o denní době, kdy mohou absolvovat lekce. Učitelé taktéž poskytnou údaje o denní době, ve které mohou učit, a horní a dolní meze počtu klientů na jednoho učitele. V praxi probíhá výuka následovně: Učitel podle času a preferencí obdrží klienta, kterého si následně plánuje individuálně podle svých časových možností. Vedení firmy však musí optimálně přiřadit klienty k učitelům, jak podle jejich časových možností, tak podle firemní politiky. Jsou zde dva učitelé s hlavním pracovním poměrem (A, B). Ty považujeme za prioritní a dostávají maximum klientů, které zvládnou učit. Zbývající učitelé si nerozdělené klienty rozdělí podle časových preferencí.

Data jsou anonymizována z důvodu možného úniku interních informací firmy.

4 FORMULACE A ŘEŠENÍ MATEMATICKÉHO MODELU

V této kapitole se zabýváme faktickou prací s modelem. Presentujeme podobu matematického modelu a podmínek v něm obsažených.

4.1 Rozpoznání problému a jeho definice

Cílem je nalezení optimálního přiřazení klientů k učitelům s ohledem na splnění všech podmínek v podobě časových harmonogramů a firemní politiky. V realitě se problém řeší za chodu firmy. Učitelé mají už přiřazené klienty a k tomu rezervní čas pro přiřazení nově přichozích. Po příchodu je klient přiřazen ke konkrétnímu učiteli podle svých časových preferencí a druhu výcviku. Výcviky jsou rozděleny podle časové náročnosti v rozmezí od jednoho do tří měsíců. Vzhledem k malému počtu učitelů a neustále kontrolovatelnému stavu rozpracovanosti je snadné řešit daný problém heuristicky.

V práci se abstrahuje od posloupnosti přichozích klientů a od rozpracovanosti učitelů. Úloha je situována v takzvaném bodě nula, neboli učitelé nemají žádné klienty z dřívějšíka a předpokládá se, že všichni zkoumaní klienti přijdou v jeden konkrétní čas. V praxi by bylo možné model použít s konkrétními daty rozpracovanosti a stavu klientů a úloha by pak mohla

být účinným nástrojem na řešení přiřazování klientů k učitelům. Toho by mohlo být dosaženo jen přidáním podmínek s už přidělenými klienty.

4.2 Rozpoznání problému a jeho definice

- Cíl analýzy

Cílem je získat tabulku, kde bude podle předem zadaného klíče vidět, který klient bude studovat u kterého učitele.

- Popis procesů

Procesy jsou zde přiřazení klienta k učiteli, resp. klientů a intenzitou jsou konkrétní počty klientů přiřazených ke konkrétním učitelům. Vliv na cíl analýzy je zde maximalizace přidělených klientů k jednomu učiteli.

- Popis činitelů

Činitelé jsou zde maximální a minimální počet klientů přiřaditelných k jednomu konkrétnímu učiteli a podmínky jejich časového sladění.

- Popis vzájemného vztahu mezi procesy, činiteli a cílem analýzy

Vzhledem k předchozím informacím je vzájemný vztah následující. Klient může být přiřazen jen k učiteli, který v kýžený čas může učit a pokud má tento učitel stále volnou kapacitu klientů. Maximalizuje se počet klientů přiřazených k učiteli, a to pro celkovou spokojenost učitele a následně i firmy.

4.3 Formulace matematického modelu

- Cíl analýzy

$$D \rightarrow \max,$$

neboli maximalizuje se parametr D , který je definován jako nejvyšší spodní hranice počtu klientů na jednoho učitele.

- Popis procesů

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud učitel } i \text{ je přidělen klient } j, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro všechna } i, j.$$

- Popis činitelů

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \max a_i, \quad \text{pro všechna } i, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq \min a_i, \quad \text{pro všechna } i, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad \text{pro všechna } j, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq D, \quad \text{pro všechna } i, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^l a_{ik} b_{jk} \geq x_{ij}, \quad \text{pro všechna } i, j, \quad (5)$$

kde $maxima_i$ resp. $minima_i$ jsou maximální, resp. minimální počty klientů pro i -tého učitele, v našem případě se $minima_i$ u učitelů na hlavní pracovní poměr nastavuje na velikost úvazku, u ostatních je pak nastavena na 0.

D je výše zmíněná nejvyšší spodní hranice počtu klientů na jednoho učitele,

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pokud učitel } i \text{ má čas v období } k, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro všechna } i, k,$$

$$b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pokud klient } j \text{ má čas v období } k, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro všechna } j, k.$$

Data a_{ik} a b_{jk} jsou známa.

Podmínka (1) omezuje maximální počet klientů přidělených jednotlivému učiteli. Pokud by tato podmínka v modelu nebyla, tak by úloha neměla přípustné řešení, protože by každý učitel mohl dostat přiděleno až nekonečně mnoho klientů, a to je značně nereálné.

Druhá podmínka (2) omezuje minimální možný počet klientů na učitele. To se týká v našem případě pouze učitelů A, B , kteří mají hlavní pracovní poměr. U ostatních je možné buď podmínku vyřadit, nebo pravou stranu nastavit na 0.

Třetí podmínka (3) zopakuje klasickou podmínku přiřazovacího problému a v tomto konkrétním případě říká, že každý klient musí mít právě jednoho učitele.

Čtvrtá podmínka (4) je podmínka principu minimaxu (resp. v tomto případě maximinu) a řeší hlavní myšlenku účelové funkce. Tato podmínka konkrétně hledá spodní hranici počtu klientů na jednoho učitele, která se následně v účelové funkci maximalizuje.

Poslední podmínka (5) je nejdůležitější z celého modelu. Zajišťuje správné přiřazování klientů k učitelům tak, aby měl klient i učitel čas ve stejném časovém období a mohli tak absolvovat společné hodiny. Tato podmínka říká, že jestli je skalární součin části dne alespoň jedna, pak může být klient přiřazen k učiteli, ale pokud je tento skalární součin roven nule, pak k sobě nemohou být přiřazeni, protože by se časově nesešli.

Pro učitele mimo hlavní pracovní poměr se klienti budou volit pouze podle jejich časových preferencí a spodních a horních omezení na absolutní počet klientů. V případě možnosti přiřazení klienta k několika učitelům mimo hlavní pracovní poměr se klient přidělí ke konkrétnímu učiteli zcela náhodně.

4.4 Interpretace výsledků modelu a jejich verifikace

Výsledky jsou smysluplné a odpovídají vstupním podmínkám. Nejdříve budou interpretovány výsledky v Tabulce 1. Pro příklad bude uvedena jedna proměnná s hodnotou jedna a jedna s hodnotou nula. Jako první otestujeme hodnotu na pozici (3,4), která se rovná jedné. To znamená, že učitel C bude učit klienta 4.

Dále je potřeba interpretovat a ověřit výsledky v Tabulce 2. Učitelé A a B , neboli učitelé na hlavní pracovní poměr, jsou na svých maximech a jejich hodnoty jsou vyrovnané, protože

maximalizovaná spodní hranice D z principu maximinu musí být stejná hodnota. Pokud by učitelé A a B měli jiná maxima, pak by se hodnota D rovnala tomu nižšímu z nich. Zbytek učitelů si rozdělil klienty podle časových preferencí obou stran a ještě k tomu mezi všechny učitele mimo hlavní pracovní poměr takřka rovnoměrně podle jejich pracovních možností.

Tabulka 1: Přirazení klientů k učitelům

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
B	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
C	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35					
	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0					
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1					
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0					
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0					
	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0					
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					

Tabulka 2: Výsledné počty přiřazených klientů k učitelům

Učitel	Počet klientů
A	10
B	10
C	2
D	2
E	2
F	8
G	1

4.5 Implementace výsledků

Výsledky druhého modelu se nám povedlo úspěšně verifikovat, přistoupíme tedy k jejich implementaci. Pokud by se upravila data na stávající rozdělení učitelů a klientů v rámci firmy a noví klienti by byli dotazováni ohledně jejich časových preferencí před přiřazením k učiteli, pak by bylo možné vytvořený model aplikovat na zefektivnění rozřazování klientů k

učitelům, a to i poté, co by firma expandovala a měla více učitelů i žáků. S plnou verzí optimalizačního softwaru je tento model v reálném světě takřka neomezeně využitelný.

5 ZÁVĚR

V této práci bylo cílem vytvořit optimalizační model, který by efektivněji rozřazoval klienty k učitelům a pomohl tak výše zmíněné firmě s uvedeným problémem. Firma zaměstnává učitele jak na hlavní pracovní poměr, tak i na vedlejší pracovní poměr a dohodu o provedení činnosti. Tato situace samozřejmě vytváří různá pracovní plnění a tím pádem i různý počet klientů pro každého učitele na měsíc. V modelu se se maximalizovala spodní hranice počtu klientů jen pro učitele na hlavní pracovní poměr, u kterých firmě záleží na plném pracovním plnění. Tento model vytvořil reálné a v realitě uchopitelné a použitelné výsledky, které je možné použít do budoucna, pro zjednodušení práce firmy při rozřazení klientů k učitelům. Práce tedy přinesla kýžené výsledky a je pravděpodobné, že její závěry budou použity v praxi.

Poděkování. Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/78/2018 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

- [1] ÁSGEIRSSON, E.I. Bridging the gap between self schedules and feasible schedules in staff scheduling. In: Annals of Operation Research, 2014, č. 218, s. 51-69.
- [2] ALSHEDY, A.. Empowerment scheduling for a field workforce. In: Journal of scheduling, 2011, č. 14, s. 639-654.
- [3] ERNST, A.T.. Annotated Bibliography of Personnel Scheduling and Rostering, 2004, č. 127, s. 21-144.
- [4] JABLONSKÝ, J. Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
- [5] JABLONSKÝ, J. Programy pro matematické modelování. Vyd. 2., přeprac. Praha: Oeconomica, 2011. ISBN 978-80-245-1810-7.
- [6] FÁBRY, Jan. Management science. Praha: Oeconomica, 2003. ISBN 80-245-0586-x.
- [7] DEMEL, J.. *Operační výzkum* [online]. 2011, Dostupné z: <http://kix.fsv.cvut.cz/~demel/ped/ov/ov.pdf>.
- [8] KRAJNÍK, T.. *Úvod do lineárního programování* [online]. 2006, Dostupné z: <http://labe.felk.cvut.cz/~tkrajnik/sdu/slides/slides8.pdf>.
- [9] MPL Modeling System, J.. *Maximal Software - Optimization Modeling* [online]. 2016, Dostupné z: <http://www.maximalsoftware.com/mpl/>.
- [10] GUROBI for MPL, J.. *Maximal Software - Optimization Modeling* [online]. 2016, Dostupné z: <http://www.maximalsoftware.com/solvers/GUROBI.html>.

Kontaktní údaje

Bc. Karel Lebr

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Česká republika

Email: lebk00@vse.cz

Ing. Ondřej Sokol

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Czech Republic

Email: ondrej.sokol@vse.cz

ÚVOD DO ANALÝZY PANELOVÝCH DÁT V SYSTÉME R¹

INTRODUCTION TO PANEL DATA ANALYSIS WITH R SYSTEM

Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková

Abstrakt

Rozvoj ekonometrickej analýzy je v posledných rokoch úzko spojený s rozvojom výpočtovej techniky a zodpovedajúceho softvéru. Bez kvalitného programového vybavenia by sme nemohli realizovať takmer žiadne analýzy. Vďaka vzrastajúcemu rozsahu rovnakých údajov napozorovaných v čase pre rôzne entity sa rozšírila možnosť analýzy panelových dát. V tomto príspevku sme sa preto rozhodli predstaviť základy ekonometrickej analýzy panelových dát v programovacom systéme R, ktorý je voľne dostupný a predstavuje alternatívu komerčným špecializovaným softvérovým produktom.

Keľúčové slová: *ekonometrická analýza, panelové dáta, programovací systém R, RStudio*

Abstract

The development of econometric analysis is in recent years closely linked to the development of computers and appropriate software. Without quality software, we could not implement almost any analysis. Due to the growing range of the same data observed over time for different entities, the opportunity of panel data analysis has been expanded. In this paper, we decided to introduce the basics of econometric analysis of panel data with R programming system, which is freely available and it is an alternative to the commercial software product.

Keywords: *econometric analysis, panel data, R programming system, RStudio*

1 ÚVOD

Základy ekonometrickej analýzy panelových dát si vysvetlíme na príklade v učebnici prezentovaného modelu, pričom využijeme údaje týkajúce sa nákladových funkcií leteckých spoločností, ktoré uvádza Lukáčiková et al (2018). Údaje sa dajú stiahnuť napríklad na internetovej stránke http://fhi.sk/files/katedry/kove/ucebnice/UdEspE/uvod_do_ekon.xls.

Najskôr sa nastavíme na hárok *Kap7Tab28* stiahnutého súboru *uvod_do_ekon.xls*. Spustíme proces uloženia súboru vo formáte typu *.csv* pod názvom *letecke_spolocnosti.csv*. Program nás upozorní, že v tomto type súborov môže byť len jeden hárok a to aktívny. Súbor uložíme do pracovného priečinku programu *RStudio*. Súbor s dátami, ktoré sú podľa slovenských pravidiel (oddeľovač bodkočiarka a pre desatiny čiarka) importujeme podľa postupu Lukáčika et al (2016) a stiahneme a aktivujeme balíček na prácu s panelovými údajmi *plm* príkazmi:

```
> letspol <- read.csv(file = "letecke_spolocnosti.csv", header = T, sep = ";", dec = ",")
> class(letspol)                # potvrdenie, že načítané údaje sú v dátovom rámci
> attach(letspol)              # základné charakteristiky stĺpcov v dátovom rámci letspol
> install.packages("plm")      # stiahne a nainštaluje prídavný balík plm
> library(plm)                 # aktivácia prídavného balíka plm pre danú reláciu
```

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0294/18 "Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov" a VEGA 1/0248/17 "Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie".

Importované údaje sú nahraté v relácii systému R ako dátový rámec (potvrdí to príkaz `class(lets spol)`). Predstavuje zoznam vektorov s atribútmi, ako sú názvy stĺpcov. Príkaz `attach(lets spol)` umožní prístup priamo k stĺpcom dátového rámca.

Aktivovaný balíček pracuje s bežným dátovým rámcom bez akejkoľvek ďalšej transformácie za predpokladu, že prierezové indexy a časové indexy sú v prvých dvoch stĺpcoch, čo je v nami využívaných údajoch splnené, o čom nás presvedčí príkaz:

```
> head(lets spol) # zobrazí niekoľko prvých údajov všetkých premenných dátového rámca
```

Načítané údaje zahŕňajú celkové náklady leteckej spoločnosti *TC*, celkovú produkciu leteckej spoločnosti *Q*, cenu leteckého benzínu *P* a koeficient vyťaženia lietadiel *KV*, pričom máme k dispozícii údaje pre 6 firiem za 15 rokov.

V balíčku *plm* môžeme vytvoriť špeciálny typ panelového dátového rámca s indexom popisujúcim prierezovú jednotku v danom čase pomocou objektu `pdata.frame`:

```
> let <- pdata.frame(lets spol, index=c("i","t"), drop.index=TRUE, row.names=TRUE)
```

Využívajú sa dva logické argumenty: `drop.index = TRUE`, ktorý odstráni pôvodné prierezové a časové indexy *i* a *t* z dátového rámca a `row.names = TRUE`, ktorý vytvorí „panelový“ index z pôvodných prierezových a časových indexov. Pri prevode pôvodných časových radov z dátového rámca do `pdata.frame` sa vytvorí panelový časový rad *pseries*, čo je pôvodný časový rad s atribútom panelového indexu uľahčujúci ďalšie transformácie.

```
> head(let) # zobrazí niekoľko prvých údajov premenných panelového dátového rámca
```

```
> head(attr(let, "index")) # zobrazí niekoľko údajov pôvodných indexových premenných
```

Objekt `pdata.frame` využíva špecifické metódy: `summary` a `as.matrix`. Prvá z nich označuje celkovú odchýlku premennej a podiel tejto variability v dôsledku prierezových a časových rozmerov. Druhá metóda poskytuje maticovú reprezentáciu premennej, pričom štandardne sú zobrazené prierezové jednotky ako riadky a časové dáta ako stĺpce.

```
> summary(let$TC) # zobrazenie podielu variability premennej TC prierezovo a časovo
```

```
> head(as.matrix(let$TC)) # maticová reprezentácia premennej TC
```

```

D:/Prispevky/Praha2018/ > head(lets spol)
  i t   TC      Q      P      KV
1 1 1 1140640 0.952757 106650 0.534487
2 1 2 1215690 0.986757 110307 0.532328
3 1 3 1309570 1.091980 110574 0.547736
4 1 4 1511530 1.175780 121974 0.540846
5 1 5 1676730 1.160170 196606 0.591167
6 1 6 1823740 1.173760 265609 0.575417
> let <- pdata.frame(lets spol, index=c("i","t"),
+ drop.index=TRUE, row.names=TRUE)
> head(let)
      TC      Q      P      KV
1-1 1140640 0.952757 106650 0.534487
1-2 1215690 0.986757 110307 0.532328
1-3 1309570 1.091980 110574 0.547736
1-4 1511530 1.175780 121974 0.540846
1-5 1676730 1.160170 196606 0.591167
1-6 1823740 1.173760 265609 0.575417
> head(attr(let, "index"))
  i t
1 1 1
2 1 2
3 1 3
4 1 4
5 1 5
6 1 6
>

D:/Prispevky/Praha2018/ > summary(let$TC)
total sum of squares: 1.264727e+14
      id      time
0.5985220 0.2608576
> head(as.matrix(let$TC))
      1      2      3      4      5
1 1140640 1215690 1309570 1511530 1676730
2 569292 640614 777655 999294 1203970
3 286298 309290 342056 374595 450037
4 145167 170192 247506 309391 354338
5 91361 95428 98187 115967 138382
6 68978 74904 83829 98148 118449
      6      7      8      9     10
1 1823740 2022890 2314760 2639160 3247620
2 1358100 1501350 1709270 2025400 2548370
3 510412 575347 669331 783799 913883
4 373941 420915 474017 532590 676771
5 156228 183169 210212 274024 356915
6 133161 145062 170711 199775 276797
      11     12     13     14     15
1 3787750 3867750 3996020 4282880 4748320
2 3137740 3557700 3717740 3962370 4209390
3 1041520 1125800 1096070 1198930 1170470
4 880438 1052020 1193680 1303390 1436970
5 432344 524294 530924 581447 610257
6 381478 506969 633388 804388 1009500
>

```

Obrázok 1: Vytvorenie a narábanie s údajmi v panelovom dátovom rámci

2 TRANSFORMÁCIE PÔVODNÝCH PANELOVÝCH ÚDAJOV

Pri odhade modelov panelových dát niekedy potrebujeme transformovať pôvodné premenné. Bežne využívané funkcie na vytvorenie oneskorených premenných a diferencií premenných nie sú schopné identifikovať, kedy dochádza k zmene údajov z jednej prierezovej jednotky na ďalšiu. Preto boli vytvorené špeciálne metódy pre objekty typu panelový časový rad *pseries* v panelovom dátovom rámci, aby správne spracovali údaje panelu.

Na oneskorenie sa využíva funkcia *lag*, v ktorej je poradie oneskorenia označené kladným celým číslom, pričom aj 0 je relevantná hodnota, ktorá zobrazí neoneskorené údaje. Prvé diferenciencie získame pomocou funkcie *diff*.

```
> head(lag(let$TC, 0:2)) # zobrazí niekoľko údajov pôvodnej a oneskorených premenných
> head(diff(let$TC), 20) # zobrazí 20 prvých údajov prvej diferenciencie TC
> head(lag(let$TC, 2), 20) # zobrazí 20 prvých údajov TC oneskorených o 2 obdobia
```

Okrem funkcií pre oneskorené hodnoty a diferenciencie boli vytvorené aj ďalšie funkcie *between*, *Within* a *Between*. Funkcia *between* vráti vektor priemerných hodnôt pre každú prierezovú jednotku. Ak by sa v tejto funkcii nepoužila prednastavená hodnota argumentu *effect = "individual"* ale *effect = "time"*, získali by sme vektor priemerných hodnôt pre každú časovú jednotku. Funkcia *Between* vráti vektor priemerných hodnôt rozmeru rovnajúcom sa počtu pozorovaní, pričom priemernú hodnotu pre každú prierezovú jednotku opakuje, kým sa neposunie na ďalšiu prierezovú jednotku. Funkcia *Within* vráti vektor odchýlok od priemerných hodnôt. Pre rozsiahlosť vektory nezobrazujeme celé ale iba ich časť cez *head*.

```
> head(Within(let$TC), 18) # zobrazí 18 prvých údajov
> head(between(let$TC), 6) # zobrazí priemerné hodnoty pre 6 prierezových jednotiek
> head(Between(let$TC), 20) # zobrazí 20 prvých údajov
```

```
D:/Prispevky/Praha2018/ > head(lag(let$TC, 0:2))
      0      1      2
1-1 1140640 NA      NA
1-2 1215690 1140640 NA
1-3 1309570 1215690 1140640
1-4 1511530 1309570 1215690
1-5 1676730 1511530 1309570
1-6 1823740 1676730 1511530
> head(diff(let$TC), 20)
      1-1 1-2 1-3 1-4 1-5 1-6
      NA  75050 93880 201960 165200 147010
      1-7 1-8 1-9 1-10 1-11 1-12
199150 291870 324400 608460 540130 80000
      1-13 1-14 1-15 2-1 2-2 2-3
128270 286860 465440 NA 71322 137041
      2-4 2-5
221639 204676
> head(lag(let$TC, 2), 20)
      1-1 1-2 1-3 1-4 1-5
      NA NA 1140640 1215690 1309570
      1-6 1-7 1-8 1-9 1-10
1511530 1676730 1823740 2022890 2314760
      1-11 1-12 1-13 1-14 1-15
2639160 3247620 3787750 3867750 3996020
      2-1 2-2 2-3 2-4 2-5
      NA NA 569292 640614 777655
> head(Within(let$TC), 18)
      1-1 1-2 1-3 1-4 1-5
-1498363.3333 -1423313.3333 -1329433.3333
      1-4 1-5 1-6
-1127473.3333 -962273.3333 -815263.3333
      1-7 1-8 1-9
-616113.3333 -324243.3333 156.6667
      1-10 1-11 1-12
608616.6667 1148746.6667 1228746.6667
      1-13 1-14 1-15
1357016.6667 1643876.6667 2109316.6667
      2-1 2-2 2-3
-1558591.6667 -1487269.6667 -1350228.6667
> head(between(let$TC))
      1 2 3 4
2639003.3 2127883.7 723189.2 638088.4
      5 6
293275.9 313702.5
> head(Between(let$TC), 20)
      1 1 1 1 1 1
2639003 2639003 2639003 2639003 2639003
      1 1 1 1 1 1
2639003 2639003 2639003 2639003 2639003
      1 1 1 1 1 1
2639003 2639003 2639003 2639003 2639003
      2 2 2 2 2 2
2127884 2127884 2127884 2127884 2127884
```

Obrázok 2: Funkcie na transformáciu pôvodných panelových údajov

3 MODEL Y PANELOVÝCH DÁT – SPOJENÝ (POOL) MODEL

Za základný rámec pri regresných modeloch panelových dát označuje Greene (2003) model:

$$y_{it} = \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + \alpha_1 z_{i1} + \alpha_2 z_{i2} + \dots + \alpha_q z_{iq} + u_{it} \quad (1)$$

kde index i označuje prierezový rozmer $i = 1, \dots, n$, index t časový rozmer $t = 1, \dots, T$, premenné X_1 až X_k sú vysvetľujúce premenné nezahŕňajúce vektor jednotiek a premenné Z_1 až Z_q predstavujú individuálne efekty – rôznorodosť, ktorou sa môže odlišovať jednotlivec alebo celá skupina od ostatných entít – sem sa zaraďuje prípadný vektor jednotiek. Individuálne efekty sa považujú za časovo invariantné (nemienia sa s časom).

Na základe uvedeného rámca sa pri analýze najčastejšie využívajú tri základné prípady:

- *spojený regresný model* (Pooled Regression), ak individuálnym efektom je iba vektor jednotiek, čo znamená, že jediný parameter α je spoločnou konštantou:

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + u_{it} \quad (2)$$

- *model s fixnými efektmi* (Fixed Effects Model – *FEM*), ak individuálne efekty Z_1 až Z_q sú nepozorovateľné, ale korelované s vysvetľujúcimi premennými, tak riešením je zahrnúť všetky efekty do odhadnuteľného podmieneného priemeru $\alpha_i = \alpha_1 z_{i1} + \dots + \alpha_q z_{iq}$ (fixný efekt α_i znamená špecifickú konštantu pre každú prierezovú jednotku) a model má tvar:

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + u_{it} \quad (3)$$

- *model s náhodnými efektmi* (Random Effects Model – *REM*), ak individuálne efekty Z_1 až Z_q sú nepozorovateľné, ale nekorelované s vysvetľujúcimi premennými, tak riešením je zložená náhodná zložka $\varepsilon_i + u_{it}$, ktorá okrem pôvodnej predpokladá aj špecifickú náhodnú zložku pre každú prierezovú jednotku a model má tvar:

$$y_{it} = \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + (\alpha + \varepsilon_i) + u_{it} \quad (4)$$

Toto rozdelenie sa zameriava na rôznorodosť prierezových jednotiek. Podobným spôsobom by sa dal uvažovať aj efekt času.

Najjednoduchší prípad, ktorým je *spojený regresný model* (*pool*), predstavuje naivný prístup, v ktorom sa predpokladá, že absolútny člen aj všetky parametre pri vysvetľujúcich premenných sú pre všetky prierezové jednotky rovnaké. Odhad pomocou estimátora najmenších štvorcov navyše znamená očakávanie, že náhodné členy pre prierezové jednotky aj časové obdobia spĺňajú klasické predpoklady. Napriek tomu sa spojený regresný model používa pri testovaní ostatných modelov. Model môžeme zapísať v kompaktnom tvare, ak označíme T pozorovaní i -tej prierezovej jednotky \mathbf{y}_i a \mathbf{X}_i , s ktorými súvisia náhodné členy \mathbf{u}_i , lebo potom:

$$\mathbf{y}_i = \alpha + \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i \quad (5)$$

Spojením cez všetky prierezové jednotky dostaneme *model pool*:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \alpha + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \alpha + \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (6)$$

Odhad spojeného regresného modelu je v prípade panelových dát a funkcie *plm* analógiou odhadu lineárneho modelu v iných typoch údajov pomocou zabudovanej funkcie *lm*. Podrobnejšie sú možnosti funkcie *lm* popísané v Lukáčik (2016).

```
> nakl.pool <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol, model = "pooling") # odhad
> summary(nakl.pool) # komplexný výpis informácií o parametroch z odhadu
```

Rozdiel medzi funkciami *lm* a *plm* predstavuje argument *model*, ktorý sa v prípade panelových dát a spojeného regresného (*pool*) modelu nastaví na: *model = "pooling"*.

Výsledkom je odhadnutý spojený regresný model, ktorý potvrdzuje očakávania, lebo percentuálny nárast cien aj produkcie zvyšuje náklady o menej ako jedno percento a zvýšenie vyťaženia (priemernej hodnoty obsadených sedadiel v lietadle) znižuje náklady. Potvrdili sa úspory z rozsahu, lebo elasticita celkových nákladov vzhľadom na produkciu je menšia ako 1.

```

D:/Prispevky/Praha2018/ >
> nakl.pool <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol, model = "pooling")
> summary(nakl.pool)
Pooling Model

Call:
plm(formula = log(TC) ~ log(Q) + log(P) + KV, data = letspol,
     model = "pooling")

Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90

Residuals:
    Min.    1st Qu.    Median    3rd Qu.    Max.
-0.2631215 -0.0575660  0.0044011  0.0850025  0.3001454

Coefficients:
              Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.516922   0.229245  41.5143 < 2.2e-16 ***
log(Q)       0.882739   0.013255  66.5991 < 2.2e-16 ***
log(P)       0.453977   0.020304  22.3588 < 2.2e-16 ***
KV          -1.627510   0.345302  -4.7133  9.309e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares: 114.04
Residual Sum of Squares: 1.3354
R-Squared: 0.98829
Adj. R-Squared: 0.98788
F-statistic: 2419.34 on 3 and 86 DF, p-value: < 2.22e-16
>

```

Obrázok 3: Odhad parametrov spojeného (pool) modelu

4 MODEL Y PANELOVÝCH DÁT – MODEL S FIXNÝMI EFEKTMI

Model s fixnými efektmi (*FEM*) na rozdiel od spojeného regresného modelu predpokladá rôznorodosť prierezových jednotiek v absolútnych členoch. Odhad estimátorom najmenších štvorcov je pri splnených klasických predpokladoch efektívny, ale v prípade heteroskedasticity či prítomnosti nejakého typu korelácie medzi náhodnými zložkami je vhodnou metódou estimátor zovšeobecnenej metódy najmenších štvorcov.

Využitím značenia zavedeného pri predchádzajúcom modeli, ak označíme T -rozmerný vektor jednotiek \mathbf{i} , tak model (3) môžeme zapísať v kompaktnom tvare:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{i}\alpha_i + \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_i \quad (7)$$

Spojením cez všetky prierezové jednotky dostaneme *model FEM*:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{i} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \quad (8)$$

Vidíme, že v modeli (8) predstavujú stĺpce matice \mathbf{D} umelé premenné D_1 až D_n , ktoré nadobúdajú hodnotu $d_{it} = 1$ pre i -tú prierezovú jednotku, a hodnotu $d_{it} = 0$ pre všetky ostatné prierezové jednotky. Kvôli umelým premenným sa tento model nazýva aj *LSDV* (Least Squares Dummy Variable). Odhad modelu FEM sa získa funkciou *plm*, pričom argument *model* sa nastaví na: *model = "within"*:

```

> nakl.fem <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol, model = "within") # odhad
> summary(nakl.fem) # komplexný výpis informácií o parametroch z odhadu

```

```

D:/Prispevky/Praha2018/
> nakl.fem <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol, model = "within")
> summary(nakl.fem)
Oneway (individual) effect within Model

Call:
plm(formula = log(TC) ~ log(Q) + log(P) + KV, data = letspol,
     model = "within")

Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90

Residuals:
    Min.    1st Qu.    Median    3rd Qu.    Max.
-0.1560412 -0.0352173 -0.0093022  0.0349257  0.1658661

Coefficients:
            Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
log(Q)    0.919285   0.029890  30.7555 < 2e-16 ***
log(P)    0.417492   0.015199  27.4682 < 2e-16 ***
KV       -1.070396   0.201690  -5.3071  9.5e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares:    39.361
Residual Sum of Squares: 0.29262
R-Squared:                0.99257
Adj. R-Squared:          0.99183
F-statistic: 3604.81 on 3 and 81 DF, p-value: < 2.22e-16
> |

```

Obrázok 4: Odhad parametrov modelu s fixnými efektmi

Efekty jednotlivých prierezových jednotiek zobrazíme funkciou *fixef*, pričom si môžeme vybrať z trojice možností jej argumentu *type*. Ak zvolíme *type = "dmean"*, zobrazia sa efekty ako odchýlky každej prierezovej jednotky od priemeru. V prípade *type = "dfirst"* sa zobrazia efekty ako odchýlky od prvej prierezovej jednotky. Ak zvolíme *type = "level"*, získame vypočítané odhady priamo pre každú prierezovú jednotku.

- > *fixef(nakl.fem, type = "dmean")* # individuálne efekty ako odchýlky od priemeru
- > *summary(fixef(nakl.fem, type = "dmean"))* # komplexný výpis individuálnych efektov
- > *fixef(nakl.fem, type = "dfirst")* # individuálne efekty ako odchýlky od 1. prierezovej jednotky
- > *fixef(nakl.fem, type = "level")* # individuálne efekty vypočítané pre každú jednotku
- > *summary(fixef(nakl.fem, type = "level"))* # komplexný výpis individuálnych efektov
- > *mean(fixef(nakl.fem, type = "level"))* # priemer individuálnych efektov, rozdiely sú v *dmean*

```

D:/Prispevky/Praha2018/
> fixef(nakl.fem, type = "dmean")
      1      2      3      4      5      6
-0.00758599 -0.04882186 -0.21650710  0.17696999  0.01646899  0.07947598
> summary(fixef(nakl.fem, type = "dmean"))
      Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
1 -0.007586   0.193124  -0.0393  0.9688
2 -0.048822   0.198982  -0.2454  0.8068
3 -0.216507   0.224958  -0.9624  0.3387
4  0.176970   0.241763   0.7320  0.4663
5  0.016469   0.260942   0.0631  0.9498
6  0.079476   0.263662   0.3014  0.7639
> fixef(nakl.fem, type = "dfirst")
      2      3      4      5      6
-0.04123587 -0.20892111  0.18455598  0.02405498  0.08706197
> fixef(nakl.fem, type = "level")
      1      2      3      4      5      6
9.705942  9.664706  9.497021  9.890498  9.729997  9.793004
> summary(fixef(nakl.fem, type = "level"))
      Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
1  9.70594   0.19312  50.258 < 2.2e-16 ***
2  9.66471   0.19898  48.571 < 2.2e-16 ***
3  9.49702   0.22496  42.217 < 2.2e-16 ***
4  9.89050   0.24176  40.910 < 2.2e-16 ***
5  9.73000   0.26094  37.288 < 2.2e-16 ***
6  9.79300   0.26366  37.142 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> mean(fixef(nakl.fem, type = "level"))
[1] 9.713528
> |

```

Obrázok 5: Efekty jednotlivých prierezových jednotiek v modeli s fixnými efektmi

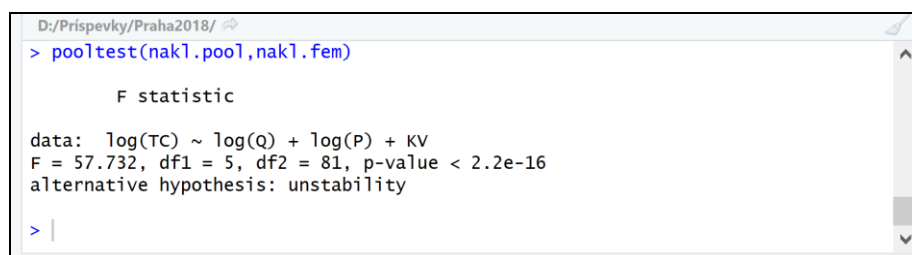
Napriek tomu, že komplexným výpisom získame aj t štatistiky individuálnych efektov, nebývajú tieto štatistiky dôležité pre rozhodnutie o preferencii modelu FEM. Rozdielnosť medzi jednotlivými prierezoými jednotkami je vhodnejšie testovať pomocou F -testu porovnávajúceho model bez ohraničení, ktorým je model FEM a model s ohraničeniami, ktorým je spojený regresný model (*pool*). Testovacia štatistika má tvar:

$$F = \frac{(RSS_{pool} - RSS_{FEM}) / (n-1)}{RSS_{FEM} / (nT - k - n)} \quad (9)$$

a porovnáваме ju s kritickou hodnotou na zvolenej hladine významnosti α . Ak je hodnota štatistiky (9) väčšia ako tabuľková hodnota, zamietame nulovú hypotézu, že prierezoé jednotky majú rovnaké absolútne členy.

Testovacia štatistika sa získa funkciou *pooltest*, pričom jej argumentmi sú odhady modelov pool a FEM. V našom prípade má štatistika hodnotu 57,732 a je väčšia ako kritická hodnota ktorá sa na hladine významnosti $\alpha = 5\%$ rovná 2,327. Môžeme zamietnuť nulovú hypotézu, že jednotlivé letecké spoločnosti majú rovnaké absolútne členy. Preferujeme FEM model.

> *pooltest(nakl.pool,nakl.fem)*



```

D:/Prispevky/Praha2018/ > pooltest(nakl.pool,nakl.fem)

      F statistic

data:  log(TC) ~ log(Q) + log(P) + KV
F = 57.732, df1 = 5, df2 = 81, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: unstability

> |
  
```

Obrázok 6: F test porovnávajúci model FEM a spojený regresný model

5 MODELÝ PANELOVÝCH DÁT – MODEL S NÁHODNÝMI EFEKTMI

V modeli s fixnými efektmi sa odlišnosť medzi prierezoými jednotkami uvažovala ako posun regresnej funkcie. Ak individuálne vplyvy pôsobiace na prierezoé jednotky nie sú korelované s vysvetľujúcimi premennými celého panelu, tak by bolo vhodnejšie modelovať jednotlivé absolútne členy pre prierezoé údaje ako náhodne rozdelené.

Model s náhodnými efektmi (*REM*) má tvar:

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \dots + \beta_k x_{itk} + \varepsilon_i + u_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \dots + \beta_k x_{itk} + v_{it} \quad (10)$$

kde spojením náhodnej zložky konkrétneho pozorovania v prierezovej jednotke u_{it} a náhodnej zložky špecifickej pre prierezoú jednotku ε_i dostávame zloženú náhodnú zložku v_{it} . Absolútny člen α predstavuje v modeli priemer prierezoých absolútnych členov a náhodná zložka špecifická pre prierezoú jednotku je náhodnou odchýlkou od tohto priemeru, pričom sa nemení s časom.

Z predpokladov o náhodných zložkách sa obvykle zameriavame na tieto dva. V rámci jednej prierezovej jednotky sa korelácia medzi dvoma ľubovoľne v čase vzdialenými náhodnými zložkami rovná tej istej hodnote a korelácia medzi dvoma ľubovoľnými náhodnými zložkami z rôznych prierezoých jednotiek je nulová. Z toho pre nás vyplýva, že kovariančná matica náhodných zložiek je blokovo diagonálna matica. Ignorovanie tejto skutočnosti a odhad modelu REM metódou najmenších štvorcov vedie k neefektívnemu odhadu. Adekvátnou metódou na odhad parametrov je zovšeobecnená metóda najmenších štvorcov.

Odhad modelu REM sa získa funkciou *plm* s argumentom *model = "random"*, kde si môžeme vybrať medzi jednotlivými spôsobmi výpočtu zložiek rozptylu argumentom *random.method* rovnajúcom sa jednej z dostupných možností: *"swar"* (je prednastavené) pre postup Swamyho a Aroru, *"amemiya"* pre prístup Amemiya, *"walhus"* pre postup Wallaceho a Hussaina alebo *"nerlove"* pre Nerlovov prístup. Podrobne sú prístupy popísané v Croissant a Millo (2018).

```
> nakl.rem <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol, model = "random",
  random.method="swar") # odhad
> summary(nakl.rem) # komplexný výpis informácií o parametroch z odhadu
```

```
D:/Prispevky/Praha2018/ >
> nakl.rem <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol, model = "random",ran
dom.method="swar")
> summary(nakl.rem)
Oneway (individual) effect Random Effect Model
(Swamy-Arora's transformation)

Call:
plm(formula = log(TC) ~ log(Q) + log(P) + KV, data = letspol,
     model = "random", random.method = "swar")

Balanced Panel: n = 6, T = 15, N = 90

Effects:
              var std.dev share
idiosyncratic 0.003613 0.060105 0.188
individual    0.015597 0.124889 0.812
theta: 0.8767

Residuals:
      Min.      1st Qu.      Median      3rd Qu.      Max.
-0.1385541 -0.0390391 -0.0045664  0.0365641  0.1774947

Coefficients:
              Estimate Std. Error t-value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.627909   0.210164  45.8114 < 2.2e-16 ***
log(Q)       0.906681   0.025625  35.3827 < 2.2e-16 ***
log(P)      0.422778   0.014025  30.1451 < 2.2e-16 ***
KV          -1.064498   0.200070  -5.3206 8.102e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares: 40.497
Residual Sum of Squares: 0.31159
R-Squared: 0.99231
Adj. R-Squared: 0.99204
F-statistic: 3697.12 on 3 and 86 DF, p-value: < 2.22e-16
> |
```

Obrázok 7: Odhad parametrov modelu s náhodnými efektmi

Odhad rozptylu jednotlivých zložiek, ktorý je zároveň súčasťou výpisu odhadu REM modelu získame funkciou *ercomp*. Efekty jednotlivých prierezných jednotiek zobrazíme funkciou *ranef*, pre ktorú zobrazenie pomocou *summary* už neponúka podobnú informáciu ako *fixef*.

```
> ercomp(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol) # výpis individuálnych efektov
> ranef(nakl.rem, type = "dmean") # individuálne efekty
```

```
D:/Prispevky/Praha2018/ >
> ercomp(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV, data = letspol)
              var std.dev share
idiosyncratic 0.003613 0.060105 0.188
individual    0.015597 0.124889 0.812
theta: 0.8767
> ranef(nakl.rem, type = "dmean")
      1          2          3          4          5
0.011055648 -0.033738683 -0.210202778  0.168592757  0.002275598
      6
0.062017459
> |
```

Obrázok 8: Efekty jednotlivých prierezných jednotiek v modeli s náhodnými efektmi

Celý doterajší postup sa zameriaval na rôznorodosť prierezných jednotiek. Ak by sme pracovali, či už v modeli REM alebo v modeli FEM, s časovými efektmi, museli by sme prednastavený argument *effect* zmeniť na *effect = "time"*. Podobne, ak by sme pracovali, či už v modeli REM alebo v modeli FEM, zároveň s priereznými aj s časovými efektmi, museli by sme prednastavený argument *effect* zmeniť na *effect = "twoways"*.

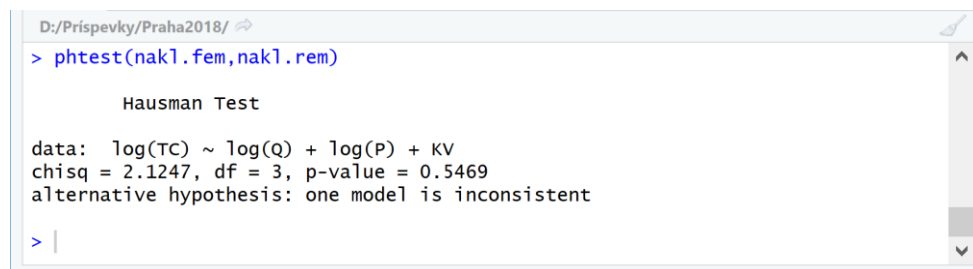
Pri rozhodovaní, ktorý z dvojice modelov s fixnými alebo s náhodnými efektmi použiť sa odporúča Hausmanov test. Nulová hypotéza predpokladá, že odhady parametrov zovšeobecnenej metódy najmenších štvorcov v modeli s náhodnými efektmi a metódy najmenších štvorcov v modeli s fixnými efektmi sú konzistentné, a tým odhad metódou najmenších štvorcov nie je efektívny. V alternatívnej hypotéze je len metóda najmenších štvorcov konzistentná. Testovacia štatistika Hausmanovho testu má tvar:

$$H = (\hat{\beta}_{FEM} - \hat{\beta}_{REM})^T (\hat{V}_{FEM} - \hat{V}_{REM})^{-1} (\hat{\beta}_{FEM} - \hat{\beta}_{REM}) \quad (11)$$

kde β je označenie pre vektory odhadnutých parametrov a V predstavujú odhady asymptotických kovariančných matíc parametrov jednotlivých modelov.

Hausmanov test, sa získa funkciou *phtest*, pričom jeho argumentmi sú odhady modelov FEM a REM. Testovacia štatistika $H = 2,1247$ z nášho príkladu je menšia ako $\chi^2(3) = 7,8147$, preto nemôžeme zamietnuť nulovú hypotézu testu a preferovaným bude model *REM*. Iná hodnota (nie záver testu) v porovnaní s inými programami je spôsobená odlišným výpočtom odhadu asymptotickej kovariančnej matice parametrov REM modelu.

> *phtest(nakl.fem,nakl.rem)*



```

D:/Prispevky/Praha2018/
> phtest(nakl.fem,nakl.rem)

Hausman Test

data: log(TC) ~ log(Q) + log(P) + KV
chisq = 2.1247, df = 3, p-value = 0.5469
alternative hypothesis: one model is inconsistent

> |
  
```

Obrázok 9: Hausmanov test porovnávajúci model FEM a REM

Individuálne vplyvy pôsobiace na letecké spoločnosti nie sú korelované s vysvetľujúcimi premennými celého panelu, preto je vhodnejšie uvažovať jednotlivé absolútne členy pre prierezové údaje ako náhodne rozdelené.

6 ODHADY PANELOVÝCH MODELOV ĎALŠÍMI METÓDAMI

Už pri modeli REM sme vysvetlili, že odhad metódou najmenších štvorcov v jeho prípade neposkytne najlepší odhad. Preto tvorcovia balíčka *plm* rozšírili možnosti odhadu parametrov aj o iné estimátory, ako je metóda najmenších štvorcov.

V prípade, ak je niektorá z vysvetľujúcich premenných endogénna, teda nie je nezávislá od náhodnej zložky, je vhodnou metódou odhadu estimátor inštrumentálnej premennej. Vo funkcii *plm* stačí za formulu odhadu zadať znak vertikálnej čiary |, za ktorý dáme bodku a špecifikujeme premenné, ktoré sú endogénne za znamienko mínus a inštrumenty za znamienko plus. Takže, ak by sme logaritmus celkovej produkcie $\log(Q)$ považovali za endogénnu premennú a chceli pre ňu použiť ako inštrument jej o 1 obdobie oneskorenú hodnotu, zapísali by sme nasledovné príkazy:

```
> nakl.reminst <- plm(log(TC)~log(Q)+log(P)+KV| . -log(Q) + lag(log(Q),1), data = letspol,
  model = "random")
```

Balíček *plm* ponúka 4 rôzne postupy odhadu metódou inštrumentálnou premennou, ktoré sa dajú nastaviť argumentom *inst.method* rovnajúcom sa jednej z dostupných možností: "bvk" (je prednastavené) pre postup Balestru a Varadharajana-Krishnakumara, "baltagi" pre Baltagiho

prístup, "am" pre postup Amemiya a MaCurdyho alebo "bms" pre Breuschov, Mizonov a Schmidtov prístup. Rozdiely sú popísané v Croissant a Millo (2018).

Druhou možnosťou je využiť odhad pomocou estimátora zovšeobecnenej metódy momentov. Funkciu *plm* vtedy nahradí funkcia *pgmm*.

Balíček *plm* ponúka aj odhad zovšeobecnenou metódou najmenších štvorcov. Funkciu *plm* vtedy nahradí funkcia *pggls*.

Autori balíčka *plm* pridali aj veľké množstvo testov. V prípade rozhodnutia o prierezových alebo časových efektoch sú to testy Hondu, Breuscha a Pagana, Kinga a Wua respektíve Gourierouxa, Hollyho a Monforta. Ďalej balíček *plm* obsahuje viacero testov autokorelácie, heteroskedasticity, jednotkového koreňa, nepozorovanej zložky alebo rôznych iných hypotéz. Pre rozsiahlosť problematiky sa nimi už v tomto príspevku nezaobráme.

7 ZÁVER

Vidíme, že ekonometrická analýza panelových dát je v programovacom systéme R plne podporovaná a balíček *plm* ponúka širokú variabilitu metód a postupov z tejto oblasti analýz. Okrem tohto balíčka sú k dispozícii aj ďalšie balíčky zaoberajúce sa panelovými dátami, medzi ktorými môžeme uviesť: *nlme*, *lme4*, *panelAR*, *ivpanel* a *pdR*. Tieto balíčky sa skôr špecializujú na špecifické typy modelov, preto je na každom analytikovi, aby zvažil ich použitie pri svojom výskume.

Použitá literatúra

1. ALBERT, J., RIZZO, M. 2012. *R by Example*. New York: Springer, 2012.
2. CRAWLEY, M. J. 2013. *The R Book, 2nd. ed.* Chichester: John Wiley & Sons, 2013.
3. CROISSANT, Y., MILLO, G. 2018. *Panel Data Econometrics with R*. Chichester: John Wiley & Sons, 2018.
4. GREENE, W. H. 2003. *Econometric Analysis, 4th ed.* New Jersey: Prentice-Hall, 2003.
5. LUKÁČIKOVÁ, A., LUKÁČIK, M., SZOMOLÁNYI, K. 2018. *Úvod do ekonometrie s programom EViews*. Bratislava: Letra Edu 2018.
6. LUKÁČIK, M. 2016. *Úvod do ekonometrickej analýzy so systémom R*. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2016.
7. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A., SZOMOLÁNYI, K. 2016. *Úvod do práce so systémom R*. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2016.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 822, (421 2) 67 295 829
email: lukacik@euba.sk, istvanik@euba.sk

PŘETRVÁVAJÍCÍ ROZDÍLY MEZI ZÁPADNÍM A VÝCHODNÍM NĚMECKEM: APLIKACE METOD PROSTOROVÉ EKONOMETRIE

PERSISTENT DIFFERENCES BETWEEN WESTERN AND EASTERN GERMANY: APPLICATION OF SPATIAL ECONOMETRIC METHODS

Simona Macková

Abstrakt

Brzy tomu bude třicet let od doby, kdy došlo ke znovusjednocení Německa. Rozdělení Německa na dvě části po dlouhá léta vedlo k rozdílnému vývoji obou částí. Následně východní část vstoupila do obnoveného spojení jako výrazně ekonomicky slabší člunek. Je zjevné, že tato ekonomická propast se zužuje, nicméně stále existuje. V tomto příspěvku se zaměříme na metody prostorové analýzy, abychom vyhodnotili, zda tento rozdíl je stále významný. Díky kartogramům budeme pozorovat ekonomickou situaci a její vývoj v čase. Budeme modelovat vztahy hrubého domácího produktu v závislosti na rozložení průmyslu v zemi na úrovni oblastí NUTS 2 a NUTS 3. Nesmíme opomenout analýzu takzvaných *hotspotů* a *coldspotů*. Vynecháním prostorových závislostí v ekonometrických modelech bychom mohli zanedbat některé důležité vztahy.

Klíčová slova: *prostorová analýza, ekonometrický model, analýza hotspotů a coldspotů*

Abstract

It is going to be thirty years soon since the reunion of Germany took place. The separation into two parts for many years led to divergent development of both parts. Then the eastern part entered the renewed union as a materially weaker member. It is obvious that this economic gap is narrowing but still existing. In this contribution, we will focus on methods of spatial analysis to evaluate whether the difference is still significant. Thanks to cartograms we will observe economical situation and also its development in time. We will model relations of gross domestic product depending on industrial diversity in the country on level of NUTS 2 and NUTS 3 regions. We should not forget the hotspot and coldspot analysis. Omitting spatial dependencies in econometrical model, we could neglect some important relations.

Keywords: *spatial analysis, econometric model, hotspot and coldspot analysis*

Geo-Data source and copyright acknowledgement

GISCO NUTS is a geographical dataset developed by the European Commission based on EuroBoundary Map (EBM) from EuroGeographics.

When the GISCO NUTS geographical dataset is used in any printed or electronic publication, the source data set shall be acknowledged in the legend of the map and in the introductory page of the publication.

The data source notice on the legend of the map and the introductory part of the publication is as follows:

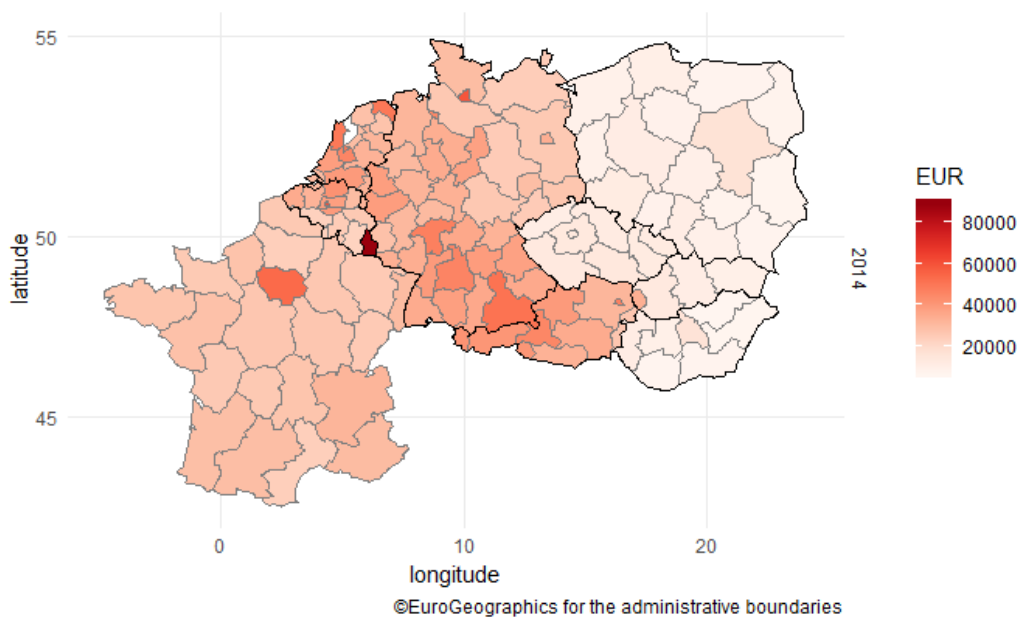
1 ÚVOD

Prostorová analýza využívá ekonometrických modelů, které zohledňují vztahy sousednosti mezi jednotlivými regiony. Účelem je přidat novou informaci do stávajících modelů a následně testovat, zda geografická poloha sledovaných jednotek potažmo pomyslná síť regionů je statisticky významná a může analýzu zlepšit. V tomto příspěvku se zaměříme na krátké shrnutí základní teorie a následné aplikaci na problematiku znovusjednocení Německa a rovnováhy mezi západní a východní částí, které se po dlouhá léta vyvíjely odděleně. Nápomocná nám bude i metoda shlukování, tak zvaná analýza hotspotů a coldspotů.

1.1 Motivace a pozorování

Nedílnou součástí prostorové analýzy jsou kartogramy. Tento nástroj slouží velice dobře pro prvotní pozorování problematiky a stanovení hypotéz, které budeme chtít posléze testovat. Volně dostupný statistický software **R** nabízí již přímo vestavěné balíčky, které jsou vhodným nástrojem na konstrukci potřebných kartogramů. Zároveň umožňuje přímé propojení s evropskou databází Eurostat, která bude naším zdrojem analyzovaných dat.

Nejprve se podívejme na kartogram 1, který zobrazuje státy západní a střední Evropy: Francii, Belgie, Lucembursko, Nizozemí, Německo, Rakousko, Českou republiku, Polsko, Slovensko a Maďarsko. Barevná škála rozlišuje výši HDP v roce 2014 v jednotlivých regionech úrovně NUTS 2. Čím tmavší oblast, tím vyšší HDP. Na první pohled si všimneme výrazně vyšší úrovně HDP v Lucembursku ve srovnání s ostatními regiony. Vyšší hodnotu též vykazuje oblast Paříže a jejího okolí a bez povšimnutí ani nezůstane rozdíl mezi bývalou západní částí Německa oproti té východní. Tento obrázek můžeme považovat jako výchozí motivaci pro další zkoumání a konstrukci hypotézy, že regiony bývalého území Spolkové republiky Německo jsou stále ekonomicky silnější než regiony dřívější Německé demokratické republiky.



Obrázek 1: Míra HDP v západní a střední Evropě na úrovni regionů NUTS 2

2 MODEL Y PROSTOROVÉ EKONOMETRIE

2.1 Prostorová matice vah W

Prvním krokem prostorové analýzy je určení prostorové matice vah, neboť tato matice W je deterministická a není modelem odhadována. Jedná se o matici $N \times N$, kde N je počet sledovaných regionů, a označuje, které regiony spolu sousedí a jaká je váha jejich vztahu sousednosti. Často požadujeme, aby matice byla řádkově normalizovaná, tedy řádky dávaly součet roven jedné.

Jak nejlépe tuto matici určit není jednoznačné a mnoho článků se zabývá touto problematikou. Možné přístupy jsou například metoda společné hranice, metoda založená na vzdálenosti regionů nebo metoda k -nejbližších sousedů. Inspirací pro stanovení matice vah nám může být například článek Formánek a Hušek (2016). Na druhé straně jiní autoři zpochybňují významnost tohoto aspektu modelování a tvrdí, že je mu věnováno příliš mnoho úsilí jako například LeSage a Pace (2014).

Následným krokem je prověření přítomnosti prostorové autokorelace za využití Moranova či Gearyho indexu. Pro důkladné vysvětlení této problematiky se odkážeme na knihu LeSage a Pace (2009).

2.2 Model SAR

K dispozici nám je celá varieta prostorových modelů pro analýzu průřezových dat. Od plného prostorového modelu, který využívá všechny typy interakcí prostorové matice vah, se postupným vypouštěním jednotlivých interakcí můžeme propracovat až k modelu klasické lineární regrese. My se však v tomto příspěvku zaměříme pouze na jeden z modelů, se kterým se lze setkat pravděpodobně nejčastěji, a to modelem SAR. Zkratka pochází z anglického *spatial autoregressive* neboť se jedná o prostorový autoregresní proces, kde interakce prostorové matice a vysvětlované proměnné, neboli prostorové zpoždění $\sum_{j=1}^N w_{ij}Y_j$, je brána v potaz. Model SAR lze zapsat následujícím způsobem

$$Y = \delta WY + \alpha I_N + X\beta + \epsilon,$$

kde α značí absolutní člen rovnice a spolu s koeficientem δ a vektorem koeficientů β nejsou známy a budeme je odhadovat. Součin WY představuje endogenní interakční efekt se závisle proměnnou. X jsou hodnoty exogenní proměnné a ϵ je vektor náhodné složky, respektive bílý šum.

Tento typ modelu zachycuje situaci, kdy endogenní proměnná ve vybraném regionu je závislá na endogenní proměnné v sousedících regionech a dále na exogenních proměnných v daném regionu, nikoli však na exogenních proměnných u sousedů.

Je třeba mít na paměti, že vzhledem k přítomnosti prostorové interakce endogenní proměnné, není možné odhadnuté koeficienty interpretovat stejným způsobem jako u klasických regresních modelů. Je třeba vyčíslit přímé a nepřímé efekty. Ty jsou počítány pro každou jednotku zvlášť, a proto není jednoduché na základě nich činit obecné závěry. V publikaci LeSage a Pace (2009) je navržen výpočet celkového identifikátoru jako průměr jednotlivých efektů. Nepřímé efekty, tak zvané *spillovers*, jsou zásadním výstupem prostorové analýzy. To je právě to, co analytici zajímá – jaký dopad má změna exogenní proměnné ve vybraném regionu na endogenní proměnnou v regionech sousedících.

Struktuře dalších modelů se věnuje například publikace Elhorst (2014). Podrobnějším teoretickým podkladem pro vhodné metody odhadování neznámých parametrů je například

knihy LeSage a Pace (2009). V tomto příspěvku využijeme nejčastěji aplikovaný přístup, a to metodu maximální věrohodnosti.

2.3 Analýza hotspotů a coldspotů

Při analyzování ekonomických ukazatelů často narazíme na signifikantní rozdíly mezi jednotlivými regiony. Jako klasický příklad bychom mohli zmínit prosperující a ekonomicky silnou severní Itálii a její protiváhu jižní Itálii, která ekonomicky zaostává. Jak již bylo zmíněno, stále pozorujeme i rozdíly na území Spolkové republiky Německo, kde je stále patrná hranice dřívějšího rozdělení na západní a východní část. Předem známé zkušenosti je možné využít při prostorové analýze zanesením umělé vysvětlující proměnné, která definuje, zda se region nachází v oblasti ekonomické prosperity, či naopak. Vhodným nástrojem pro tyto případy je analýza takzvaných *hotspotů* a *coldspotů*.

Jako hotspot označujeme shluk regionů, které se vyznačují nadprůměrnými hodnotami sledované proměnné. Opak vyjadřují coldspoty: shluky regionů s podprůměrnými napozorovanými hodnotami.

Hotspoty a coldspoty lze identifikovat na základě indexu G_i^* , označovaný jako Getis-Ordův index. Tento ukazatel byl uveden v článku Getis a Ord (1992) a lze ho zapsat následovně:

$$G_i^* = \frac{\sum_{j=1}^N w_{ij} X_j - \bar{X} \sum_{j=1}^N w_{ij}}{S \sqrt{\frac{N \sum_{j=1}^N w_{ij}^2 - (\sum_{j=1}^N w_{ij})^2}{N-1}}}$$

$$\text{kde } \bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N} \text{ a } S = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{N} - \bar{X}^2}.$$

Abychom statistiku G_i^* mohli použít, je třeba mít v datech prověřenou přítomnost pozitivní prostorové autokorelace. To znamená, že sledovaný region ovlivňuje své sousedící regiony kladně: stoupne-li hodnota vybrané proměnné v daném regionu, stoupne i u jeho sousedů. Getis-Ordův index je poměr, který udává statistickou významnost prostorového shlukování a je počítán pro jednotlivé prostorové jednotky zvlášť, tedy dolní index i značí i -tý region našeho výběru. Kladné vysoké hodnoty G_i^* indikují přítomnost hotspotu tedy koncentraci vyšších hodnot u sousedících jednotek. Negativní hodnoty naopak svědčí o možnosti výskytu coldspotu. Místa, kde je tento index blízký nule, nezařazujeme do žádného shluku.

Na základě této analýzy můžeme v modelu zohlednit novou vysvětlující proměnnou, která popisuje, zda daný region patří či nepatří do nějakého shluku. Po této úpravě se nám prostorové modely mohou výrazně zlepšit. Ovšem také se může ukázat, že taková proměnná je statisticky nevýznamná. K tomuto jevu často dochází, když se hodnoty proměnné ve všech regionech pohybují na úrovni průměru a nedochází k výrazným výkyvům. Další možností, kdy toto může nastat je případ, že extrémní hodnoty se vyskytují osamoceně a nejsou sdíleny se sousedícími regiony.

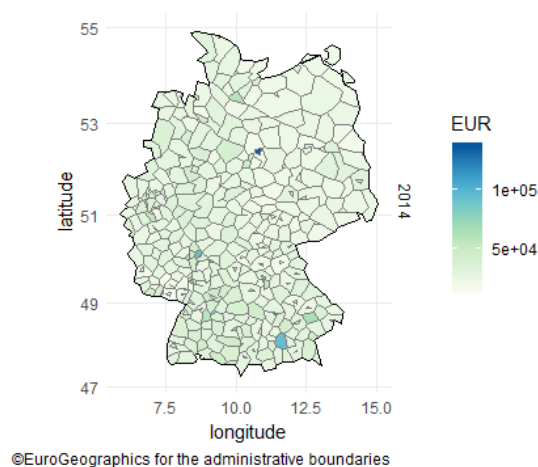
3 EMPIRICKÝ MODEL

Jak již bylo výše naznačeno, vhodným nástrojem pro prostorovou analýzu dat je statistický software **R**, o jehož využití pro účely prostorových modelů pojednává například Anselin (2003). Využijeme data z Eurostatu pro roky 2000 a 2014, abychom srovnali vývoj. Vycházíme z datových zdrojů *nama_10r_3gdp* a *nama_10r_3empers*. Naši vysvětlovanou proměnnou bude HDP na osobu v eurech a vysvětlující poměr osob zaměstnaných

v průmyslové výrobě k počtu všech zaměstnaných osob v regionu, tedy jakýsi indikátor rozšíření průmyslu v regionu.

3.1 Pozorování

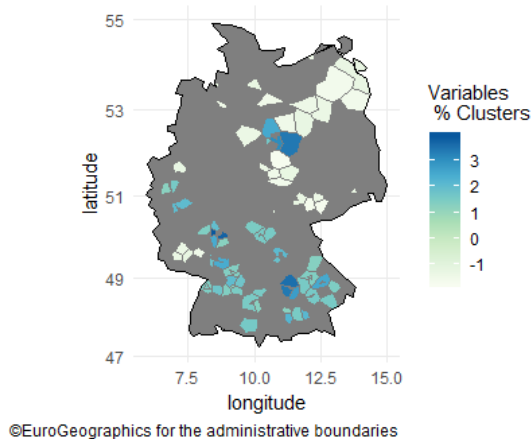
Zaměřujeme se pouze na území Německa, a proto zvolíme jemnější členění do regionů na úrovni NUTS 3. Země je rozdělena do 402 regionů. Jako přístup pro určení prostorové matice vah zvolme metodu k -nejbližších sousedů, kde k je rovno třem. Na základě tohoto přístupu dostáváme 181 relací sousednosti. Moranův i Gearyho index prokázal pozitivní prostorovou autokorelaci a tedy můžeme pokračovat v naší analýze. Na kartogramu 2 jsou barevnou škálou zobrazeny hodnoty HDP v jednotlivých NUTS 3 regionech v roce 2014. Zde již není tak zjevný rozdíl mezi jednotlivými částmi Německa jako na obrázku 1 a zdá se, že si regiony stojí ekvivalentně.



Obrázek 2: Míra HDP v Německu na úrovni regionů NUTS 3

3.2 Analýza hotspotů a coldspotů

Vezměme si na pomoc analýzu hotspotů a coldspotů, která je schopna detekovat shluky nižších a vyšších hodnot. Díky přítomnosti kladné prostorové autokorelace víme, že lze využít Getis-Ordův index. Výsledek můžeme zhodnotit na kartogramu 3. V jihozápadní části země se skutečně ukazují shluky vyšších hodnot hotspoty a na severovýchodě shluky nižších hodnot coldspoty, avšak situace rozhodně není jednoznačná.



Obrázek 3: Hotspoty a coldspoty HDP na území Německa

3.3 Prostorový model

Pro tento příspěvek jsme zvolili model vysvětlující výši HDP pomocí proměnné, která popisuje zaměření na průmysl v dané oblasti. Označme ji jako IND. Prověřili jsme, že tato jednoduchá závislost se díky klasickému lineárnímu modelu ukazuje statisticky významná. Přidejme do modelu umělou proměnnou WEST, která je rovna jedné, pokud se region nachází v oblasti bývalého západního Německa a nule naopak. Proměnná SPOT nabývá tří možných hodnot: nula, pokud region nepatří do žádného shluku; jedna, pokud patří do hotspotu a minus jedna, je-li součástí coldspotu. Náš prostorový model bychom mohli zapsat následujícím způsobem:

$$HDP = \alpha + \delta WHDP + \beta_1 IND + \beta_2 WEST + \beta_3 SPOT + \epsilon,$$

kde budeme odhadovat koeficienty α , δ , β_1 , β_2 , β_3 , ale především nás budou zajímat přímé a nepřímé efekty. Model aplikujeme na data za roky 2000 a 2014. Níže uvedená tabulka 1 porovnává odhadnuté výsledky získané metodou nejmenších čtverců z modelu lineární regrese. Tabulka 2 je výstupem prostorového modelu SAR a popisuje přímé a nepřímé efekty spočtené modelem.

Tabulka 1: Srovnání výsledků odhadnutých na datech z let 2000 a 2014

		2000	2014
OLS		Odhadnuté koeficienty	Odhadnuté koeficienty
	<i>Intercept</i>	18 793**	-197 773**
	<i>IND</i>	-4 784	7 549**
	<i>WEST</i>	7 928**	1 866
	<i>SPOT</i>	1 755	-3 547**

Tabulka 2: SAR

		2000		2014	
SAR		Přímý efekt	Nepřímý efekt	Přímý efekt	Nepřímý efekt
<i>IND</i>		-4 931	-187	7 702**	-762**
<i>WEST</i>		7 872**	56**	2 156	-213
<i>SPOT</i>		1 478	298	-2 626*	260*

**statistická významnost na hladině 5%, *statistická významnost na hladině 10%

Na základě modelu lineární regrese i prostorového modelu bychom mohli učinit obdobné závěry. Na datech z roku 2000 se projevila statistická významnost umělé proměnné WEST, kdežto ostatní proměnné IND a SPOT se ukázaly nevýznamné v obou typech modelů.

Pro rok 2014 je situace jiná. U lineárního regresního modelu jsou statisticky významné proměnné IND a SPOT, ale WEST nikoliv a mohla by být z modelu vyloučena. Totéž se projevilo i u prostorového modelu SAR. V roce 2000 bylo rozdělení bývalého západního a východního Německa stále významným ukazatelem a o 14 let později se ukazuje jako statisticky nevýznamný. Můžeme předpokládat, že tento rozdíl vycházející z historické situace se již setřel a obě části Německa jsou ekonomicky ekvivalentní.

4 ZÁVĚR

V příspěvku jsme se zabývali základními poznatky a teorií prostorové analýzy. Z prvotního pozorování jsme usoudili, že je stále znatelný ekonomický rozdíl mezi bývalými částmi Německa, neboť stále doznívá vliv let odděleného vývoje.

Empirickou analýzu jsme provedli na datech z databáze Eurostat na úrovni regionů NUTS 3 tedy jemnější úrovni členění, kde na první pohled není rozdíl tak znatelný. Využili jsme analýzu hotspotu a coldspotu, která detekovala shluky regionů s nižšími i vyššími hodnotami. Rozdělení do shluků potvrdilo naše očekávání rozdělení, proto byly zahrnuty umělá proměnná a analýza provedena na dvou datových vzorcích z let 2000 a 2014.

Náš předpoklad o statisticky významném rozdílu mezi západním a východním Německem se potvrdil pouze na starších datech. Na základě analýzy situace z roku 2014 tedy můžeme usoudit, že rozdíl již není statisticky významný.

Pro rozšíření této analýzy bychom mohli využít prostorové modely pro panelová data. Tím zohledníme časovou složku, pro lepší vyhodnocení vývoje, případně zlomu v čase.

Prohlášení

Tento výzkumný projekt je podporován grantem číslo IGA F4/60/2018, Fakulta informatiky a statistiky, Vysoká škola ekonomická v Praze.

Použitá literatura

1. ANSELIN, L. (2003). An Introduction to Spatial Regression Analysis in R. *Urban-Champaign*.
2. ELHORST, J. P. (2014). *Spatial Econometrics: from cross-sectional data to spatial panels*. Springer, Heidelberg. ISBN 978-80-200-1707-9.
3. EUROSTAT. European Commission: Your key to European statistics.
URL <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>.
4. FORMÁNEK, T. a HUŠEK, R. (2016). On the stability of spatial econometric models: Application to the Czech Republic and its neighbors. *34th International Conference Mathematical Methods in Economics MME 2016 Conference Proceedings*, 213-218.
5. GETIS, A. a ORD, J. K. (1992). The analysis of spatial association by use of distance statistics. *Geographical analysis*, (24.3), 189 – 206
6. LESAGE, J. a PACE, R.K. (2009). *Introduction to Spatial Econometrics*. CRC Press, U.S.A. ISBN 978-1-4200-6424-7.
7. LESAGE, J. a PACE, R.K. (2014). The biggest myth in spatial econometrics. *Econometrics*, 2(4), 217-249.

Kontaktní údaje

Ing. Simona Macková
Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3
email: simona.mackova@vse.cz

OHROZUJÚ IMIGRANTI VÝŠKU PLATOV NA SLOVENSKU?¹

DO THE IMMIGRANTS JEOPARDIZE ON SLOVAK WAGES?

Veronika Mitkova

Abstrakt

V článku sa venujeme imigrácii v krajinách Európskej únie a jej vplyvu na výšku miezd na Slovensku. Problém modelujeme prostredníctvom statického modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy (CGE model) otvorenej ekonomiky s dezagregáciou na osem produkčných sektorov, jednou reprezentatívnou domácnosťou, päť výrobných faktorov, s dôrazom na nekvalifikovanú pracovnú silu, regióny Slovenska, EÚ 28 a zvyšku sveta. Simulovaný bol nárast ponuky nekvalifikovanej pracovnej sily za rôznych podmienok: najprv za predpokladu vysokej elasticity substitúcie výrobných faktorov a následne pri predpoklade komplementarity výrobných faktorov. Sledovali sme dopady na Slovenskú ekonomiku v závislosti od lokácie prílevu imigrantov: výlučne na Slovensko, resp. na všetky krajiny Európskej únie. Výskum preukázal, že pri všetkých predpokladoch sa cena nekvalifikovanej pracovnej sily na Slovensku znížila, čo je v súlade so zisteniami Borjas (2003) a v rozpore s Ottaviano a Peri (2012).

Kľúčové slová: imigrácia, mzdy, Slovensko, CGE model

Abstract

In this article, we focus on immigration in the European Union countries and its impact on wage levels in the Slovak Republic. The problem is modeled by the open static general economic equilibrium (CGE) model of with disaggregation into eight production sectors, one representative household, five factors of production, with emphasis on unskilled labor, regions of Slovakia, the EU 28 and the rest of the world. An increase in the supply of unqualified labor force under various conditions was simulated: first, given the high elasticity of the substitution of the production factors and, consequently, the assumption of the complementarity of the production factors. We monitored impacts on the Slovak economy, depending on the location of the immigrant influx: exclusively in Slovakia and to all countries of the European Union. Research has shown that, under all assumptions, the price of unskilled labor in Slovakia has decreased, which is in line with the findings of Borjas (2003) and contrary to Ottaviano and Peri (2012).

Keywords: immigration, wages, Slovakia, CGE model

1 PROBLÉM IMIGRÁCIE

Problém imigrácie vo všeobecnosti v ostatných rokoch rezonuje v mnohých krajinách Európy. Je predmetom záujmu politikov, vedcov, mainstreamových ale aj okrajových médií a snáď aj decíznej sféry. Cieľom tohto príspevku je kvantifikovať a modelovať prílev nekvalifikovanej

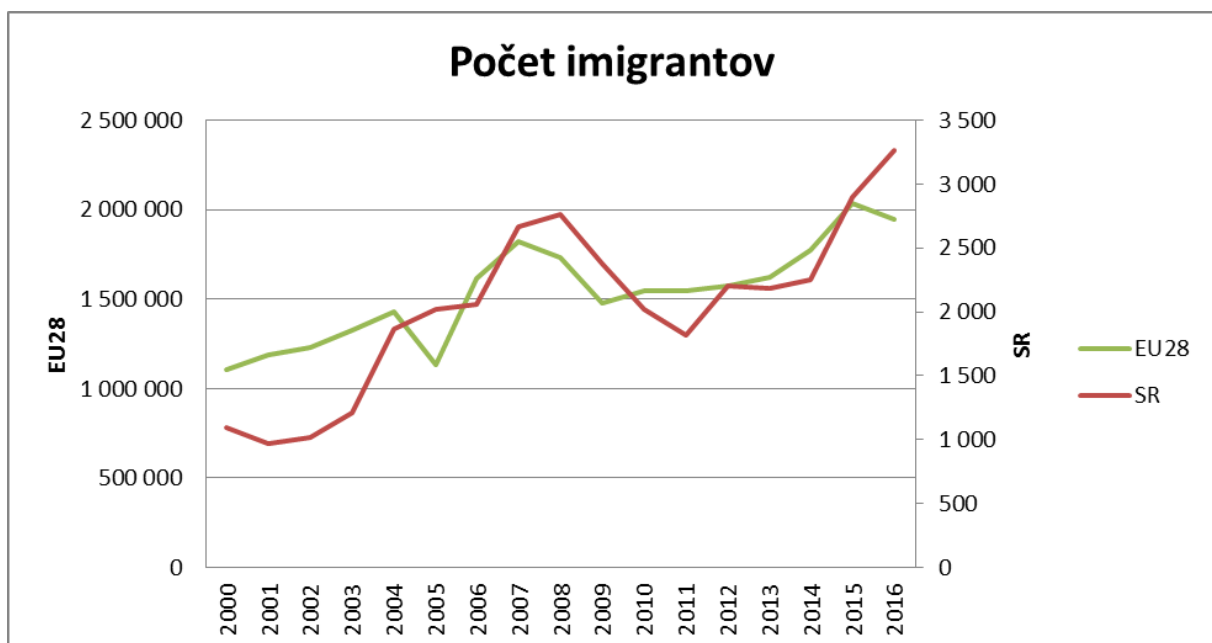
¹ Výskum bol podporený grantom VEGA 1/0795/18 „Komplexné prístupy k odhadu parametrov ekonomickej štruktúry modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy“ a APVV-17-0551 „Vyrovnávanie nerovnováh: prehodnotenie ohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia.“

pracovnej sily na Slovensko a do krajín Európskej únie, ako aj jej vplyv na výšku miezd, na dopyt po práci, celkový output v jednotlivých odvetviach a tiež na výšku HDP.

Vychádzame zo štúdie Borjas (2003), ktorý sledoval vplyv imigrácie do USA v osemdesiatych až deväťdesiatych rokoch 20. storočia a zistil, že znížila priemerné ročné mzdy o 4%. Stalo sa tak preto, že zamestnávateľia substituovali domácich pracovníkov imigrantmi s rovnakými pracovnými schopnosťami. Takzvané krížové cenové benefity, ktoré spôsobujú zvýšený dopyt po komplementárnych statkoch, sú však príliš nízke na to, aby zvýšili dopyt po kvalifikovaných domácich pracovníkoch. Ako príklad môžeme uviesť nárast ponuky nekvalifikovanej práce v poľnohospodárstve zo strany imigrantov, ktorí ale prichádzajú aj s rodinami a vytvárajú dopyt po statkoch vyžadujúcich kvalifikovanú pracovnú silu, ako napríklad jazykové kurzy. Borjas (2003) svojim výskumom potvrdil tvrdenia Samulesona (1964) o tom, že mzdy klesajú keď imigranti zvyšujú veľkosť pracovnej sily.

Ottaviano a Peri (2012) naopak tvrdia, že priemerné mzdy všetkých pracovníkov sa od deväťdesiatych rokov 20. storočia zvýšili o 1,8% a mzda domácich amerických pracovníkov sa dokonca zvýšila o 2,7%. Predkladajú dva argumenty: Ponuka práce domácich a imigrantov sú relatívne slabé substitúty. Aj v prípade rovnakého vzdelania si volia rôzne zamestnania s rôznymi požadovanými schopnosťami. Na rozdiel od Borjas (2004) zistili, že efekt krížovej cenovej elasticity je veľký, takže imigranti zvyšujú dopyt po výsledkoch práce komplementárnych, kvalifikovaných pracovníkoch. Dominantným efektom imigrácie je teda posun krivky dopytu po práci všetkých kvalifikácií a všetkých domácich pracovníkov na vyššiu úroveň.

Eurostat definuje imigráciu ako akt, ktorým osoba ustanoví svoj zvyčajný pobyt na území členského štátu po dobu, ktorá je, alebo je očakávaná, najmenej 12 mesiacov, pričom predtým bola rezidentom inej členskej krajiny alebo tretej krajiny. Žiadateľ o azyl žiada v danej krajine o azyl po prvý krát, pričom obdobie nie je ohraničené. Opakovaní žiadatelia o azyl sú z týchto počtov vylúčení ².



Obrázok 1: Vývoj počtu imigrantov v EÚ a SR

Na základe Obrázka 1 je evidentné, že počet imigrantov na Slovensku má rastúci trend, približne kopíruje priemerný vývoj v ostatných členských krajinách Európskej únie, avšak

² https://ec.europa.eu/eurostat/cache/metadata/en/migr_imm_i_esms.htm

v absolútnych číslach sa jedná o veľmi nízke hodnoty. Počet žiadateľov o azyl je na Slovensku zanedbateľný v porovnaní k počtu obyvateľov a na rozdiel od priemeru krajín Európskej únie má od roku 2012 klesajúci trend.



Obrázok 2: Vývoj počtu žiadateľov o azyl

2 DÁTA A METODOLÓGIA

Sledované ciele sme zodpovedali pomocou modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy vyvinutom cez Global Trade Analysis Project (GTAP). Model je štandardným viacsektorovým a viacregionálnym modelom všeobecnej rovnováhy s predpokladom dokonalej konkurencie a konštantnými výnosmi z rozsahu, viac Corong a kol. (2017). Databáza projektu využíva údaje z roku 2011, pomocou ktorých je skonštruovaná matica spoločenského účtovníctva, v ktorej bolo 57 sektorov agregovaných do desiatich, 8 výrobných faktorov do piatich a 140 regiónov do troch tak, ako to zobrazuje Tabuľka 1.

Tabuľka 1: Agregácia matice spoločenského účtovníctva

sektory	výrobné faktory	regióny
<ul style="list-style-type: none"> • obilniny a plodiny • mäso a dobytok • ťažba • spracované jedlo • textil • ľahký priemysel • ťažký priemysel • stavby • doprava a komunikácie • ostatné služby 	<ul style="list-style-type: none"> • pôda • nekvalifikovaná pracovná sila • kvalifikovaná pracovná sila • kapitál • prírodné zdroje 	<ul style="list-style-type: none"> • Slovenská republika • členské štáty Európskej únie s výnimkou SR • zvyšok sveta

Na modeli boli vykonané tri rôzne simulácie dopadu zvýšeného počtu imigrantov, a to po vzore dvoch rôznych štúdií s protichodnými výsledkami, ktoré opisujeme v predchádzajúcej kapitole. V prvom experimente sme po vzore Borjas (2004) predpokladali vysokú hodnotu

elasticity substitúcie výrobných faktorov vo všetkých sledovaných odvetviach (hodnota elasticity 12) a simulovali sme 10% zvýšenie nekvalifikovanej pracovnej sily. Druhý experiment je inšpirovaný prácou Ottaviano a Peri (2012), kde na rozdiel od Borjasa predpokladáme komplementaritu výrobných faktorov (tento predpoklad reprezentuje nízka hodnota substitúcie výrobných faktorov). V treťom experimente sme k predchádzajúcemu pridali súbežné zvýšenie kapitálu o 6%. Vo všetkých experimentoch sme zmeny v ponuke výrobných faktorov predpokladali a) v Slovenskej republike, b) v celej Európskej únii. Výsledky prezentujeme len pre Slovenskú republiku.

3 VÝSLEDKY A DISKUSIA

Experiment 1a so zvýšením nekvalifikovanej pracovnej sily na Slovensku o 10% preukázal, že ceny všetkých výrobných faktorov sa vo všetkých odvetviach znížia, najvýraznejší vplyv bol podľa očakávaní na cenu nekvalifikovanej pracovnej sily, a to -1,34%. Na základe takto nastavených podmienok môžeme teda potvrdiť, že imigranti zvyšujúcou ponukou pracovnej sily znižujú mzdu nielen nekvalifikovanej, ale aj kvalifikovanej pracovnej sily. Rovnako sa však znižuje aj cena pôdy, kapitálu a prírodných zdrojov. Zmeny sú vo všetkých sektoroch rovnaké, nakoľko predpokladáme plne mobilné všetky výrobné faktory. Výsledky zmeny ceny výrobných faktorov sumarizuje Tabuľka 2. Tabuľka 3 uvádza efekty dopytu na prácu v jednotlivých sektoroch ekonomiky Slovenska. Dopyt po nekvalifikovaných pracovníkoch sa vo všetkých sledovaných sektoroch zvýšil, k najvýznamnejšej zmene prišlo v sektore ťažby, a to až o 12%. Dopyt po kvalifikovaných pracovníkoch vo väčšine sektorov klesol, v rozmedzí -0,17% až -2,22%, v sektore ťažby a ostatných služieb však dopyt nepatrne vzrástol. Output vo všetkých sektoroch Slovenskej ekonomiky vzrástol, najvýraznejší rast bol zaznamenaný v sektoroch ťažby a textilu, nad 3%. Je prirodzené, že zmeny v ponuke pracovnej sily na Slovensku nespôsobili žiadne badateľné zmeny v outpute zvyšku sveta. Reálny GDP sa na Slovensku v dôsledku tejto zmeny zvýšil o 1,88%, v ostatných krajinách EÚ a zvyšku sveta nedošlo k zmene GDP.

Experiment 1b so zvýšením nekvalifikovanej pracovnej sily v celej EÚ preukazuje obdobné výsledky ako prvý experiment týkajúci sa zmien výlučne v objeme pracovnej sily na Slovensku, smery zmien sú identické. Cena výrobných faktorov na Slovensku klesla, pre nekvalifikovaných domácich pracovníkov o 0,93%, pre kvalifikovaných o 0,07%. Dopyt po nekvalifikovanej pracovnej sile sa vo všetkých sektoroch na Slovensku zvýšil, po kvalifikovanej pracovnej sile s výnimkou ťažby a ostatných služieb znížil – vid'. Tabuľka 3. Reálny GDP vzrástol, na Slovensku takmer zhodných 1,89%, v ostatných krajinách EÚ o 2,37% a vo zvyšku sveta o 0,01%.

Tabuľka 2: Cena výrobných faktorov (zmena v % oproti benchmarku)

pfe[**SK]	Experiment 1a	Experiment 1b	Experiment 2a	Experiment 2b
Land	-0,54	-0,18	2,24	-2,06
UnSkLab	-1,34	-0,93	-13,9	-13,36
SkLab	-0,49	-0,07	4,15	5,26
Capital	-0,52	-0,1	4,34	5,31
NatRes	-0,39	-0,04	4,3	0,37

Tabuľka 3: Dopyt po kvalifikovanej a nekvalifikovanej pracovnej sile (zmena v % oproti benchmarku)

qfe[**SK]	Experiment 1a		Experiment 1b		Experiment 2a		Experiment 2b	
	UnSkLab	SkLab	UnSkLab	SkLab	UnSkLab	SkLab	UnSkLab	SkLab
GrainsCrops	9,8	-0,88	8,54	-2,05	8,46	-1,38	3,87	-5,77

MeatLstk	10,59	-0,17	10,37	-0,4	9,6	-0,35	9,35	-0,79
Extraction	12,09	1,19	11,29	0,43	10,06	0,07	7,64	-2,35
ProcFood	8,32	-2,22	8,32	-2,25	8,66	-1,2	9,54	-0,62
TextWapp	9,23	-1,4	9,08	-1,57	16,77	6,17	14,42	3,8
LightMnfc	9,74	-0,94	9,66	-1,04	8,47	-1,37	8,58	-1,49
HeavyMnfc	9,51	-1,14	9,43	-1,25	9,16	-0,75	9,57	-0,6
Util_Cons	8,96	-1,64	9,24	-1,42	12,42	2,22	11,65	1,29
TransComm	10,5	-0,25	10,64	-0,16	9,59	-0,36	9,88	-0,31
OthServices	11,67	0,81	11,77	0,86	10,07	0,07	10,65	0,38

Tabuľka 4: Zmena reálneho GDP v % oproti benchmarku

qgdp	Experiment 1a	Experiment 1b	Experiment 2a	Experiment 2b
EU_28	0	2,37	0	2,26
SK	1,88	1,89	1,82	1,87
RestofWorld	0	0,01	0	-0,03

V druhej skupine experimentov predpokladáme zvýšenie nekvalifikovanej pracovnej sily o 10%, avšak tento krát za predpokladu komplementarity výrobných faktorov, elasticitu substitúcie výrobných faktorov vo všetkých odvetviach uvažujeme 0,5. Takto zmenené podmienky vedú k podstatne odlišným výsledkom.

Experiment 2a predpokladá zvýšenie nekvalifikovanej pracovnej sily na Slovensku. Cena nekvalifikovanej pracovnej sily klesne o 13,9% a ceny ostatných výrobných faktorov, vrátane kvalifikovanej pracovnej sily (o 4,15%), vzrastie. Výsledky v Tabuľke 2. Dopyt po nekvalifikovanej pracovnej sile vzrastie vo všetkých odvetviach, najvýraznejšie v textilnom sektore, o 16,8% a stavebníctve 12,4%. Dopyt po kvalifikovanej pracovnej sile vo väčšine odvetví klesne, s výnimkou textilného, stavebného priemyslu a služieb. Rovnako ako pri predpoklade substitučných výrobných faktorov, aj tu sa reálne GDP zvýši o 1,82% a GDP zvyšku sveta ostáva nezmenené.

Experiment 2b so zvýšením nekvalifikovanej pracovnej sily v celej EÚ za predpokladu komplementarity výrobných faktorov preukazuje obdobné výsledky ako predchádzajúci predpoklad. Výsledky sú sumarizované v Tabuľkách 2, 3 a 4.

Záverom môžeme konštatovať, že zvýšenie počtu imigrantov, pričom predpokladáme, že tvoria ponuky nekvalifikovanej pracovnej sily, vedie na Slovensku jednoznačne k zníženiu miezd nekvalifikovaných pracovníkov. K tomuto záveru sme dospeli ako za predpokladu substitučných, tak aj komplementárnych výrobných faktorov. Rozdiely sú v dopadoch na ceny ostatných výrobných faktorov: pri predpokladu substitúcie výrobných faktorov sa ich ceny tiež znížili, avšak pri komplementarite výrobných faktorov sa naopak, zvýšili (s výnimkou ceny pôdy). Pre Slovenskú republiku teda potvrdzujeme závery Borjas (2003) a vyvraciamе Ottaviano a Peri (2012).

Použitá literatúra

1. BORJAS, G. 2003. The Labor Demand Curve is Downward Sloping: Reexamining the Impact of Immigration on the Labor Market. In: The Quarterly Journal of Economics, roč. 118, 2003, č. 4, s.1335–1374.

2. CORONG, E., HERTEL, T., MCDUGALL, R., TSIGAS, M., a VAN DER MENSBRUGGHE, D. 2017. The Standard GTAP Model, Version 7. In: Journal of Global Economic Analysis, roč. 2, 2017, č. 1, s. 1-119.
3. OTTAVIANO, G. and PERI, G. 2012. Rethinking the Effect of Immigration on Wages: New Data and Analysis from 1980 – 2004. In: Journal of the European Economic Association, roč. 10, 2012, č. 1, s. 152- 197.
4. SAMUELSON, P.A. 1964. Economics. New York: McGraw-Hill.

Kontaktné údaje

Ing. Veronika Mit'ková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 820 05 Bratislava

Tel: (421 2)

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

NIEKTORÉ PRINCÍPY KOMPROMISU V ÚLOHE VÝBERU PORTFÓLIA¹

SOME COMPROMISE PRINCIPLES IN PORTFOLIO SELECTION PROBLEM

Vladimír Mlynarovič

Abstrakt

Článok prezentuje aplikáciu vybraných princípov kompromisu v dvojkritériálnom modeli výberu portfólia, ktoré hľadajú akceptovateľnú substitúciu medzi očakávaným výnosom a rizikom. Trieda L_p -metrik je použitá na identifikáciu podmnožiny efektívnych portfólií ako najlepších kompromisných portfólií.

Kľúčové slová: úloha výberu portfólia, substitúcia rizika a výnosu, princíp kompromisu, L_p -metriky

Abstract

The paper presents an application of selected compromise principles to bi-criterion portfolio selection problem where a reasonable trade-off between expected rate of return and risk is sought. The class of L_p -metrics is used to identify a subset of efficient portfolios as the best compromise portfolios

Keywords: portfolio selection problem, risk – return trade-off, compromise principles, L_p -metrics

1 ÚVOD

Markowitzova (1952) úloha výberu portfólia predstavuje fenomén, ktorý je stále predmetom teórie a praxe finančného investovania. Nové fakty vo svete financií však vedú k jej rozvinutiam, ktoré lepšie reflektujú nové zistenia a poznatky. Súčasné prístupy k úlohe výberu portfólia prijímajú menej prísne predpoklady o investorovom kontexte rozhodovania, o tvare funkcie užitočnosti a (alebo) o tvare rozdelenia pravdepodobnosti výnosov cenných papierov v porovnaní s *Markowitzovym* prístupom. Medzi kritériá výberu portfólia, ktoré predstavujú alternatívy k analýze v priestore priemer – rozptyl patria, napríklad, geometrický priemer výnosu, kritériá typu *safety first*, stochastická dominancia, analýza vlastnosti rozdelenia pravdepodobnosti, využitie mier dolného parciálneho rizika alebo minimalizácia očakávanej straty na stanovenej hladine významnosti.

¹ This paper research was supported by the Slovak Research and Development Agency, project No. APVV-17-0551: "Vyrovňovanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia" a project No. APVV-14-0020: "Pareto Optimal Interactions Modeling in the Financial and Business Adaptive Processes", and by the Slovak Ministry of Education, Science and Sport, project No. VEGA 1/0340/16: "Modelovanie efektívnosti financovania a kooperácie sektorov a regiónov slovenskej ekonomiky."

Možno tiež identifikovať zvýšený záujem implementovať do procesu výberu investičného portfólia aj dodatočné kritériá, ktoré presahujú zámery týkajúce sa očakávaného výnosu a rizika. Úloha výberu portfólia je potom skúmaná ako úloha viackriteriálneho programovania, kde kritériálny vektor obsahuje tri alebo viacero komponentov. Takéto prístupy analyzujú, napríklad, *Ogryczak (2000)*, *Steuer et al (2005)* a *Steuer et al (2013)*

V tomto príspevku sa úloha výberu portfólia skúma z hľadiska techník viackriteriálneho programovania. Vo všeobecnosti totiž existuje nekonečný počet efektívnych portfólií a investor stojí pred úlohou, ako vybrať najlepšie kompromisné efektívne portfólio, resp. podmnožinu najlepších kompromisných portfólií.

2 VÝBER PORTFÓLIA AKO BI-KRITERIÁLNY PROBLÉM

V tradičnom a široko akceptovanom prístupe k manažmentu portfólia opierajúcom sa o priemer a rozptyl sa predpokladá, že investori sa pokúšajú maximalizovať očakávanú užitočnosť výnosov investičného portfólia. Tento prístup je exaktný vtedy, ak zámerom investorov je maximalizácia očakávanej užitočnosti a investori preferujú viac pred menej, majú averziu k riziku a alebo majú výnosy cenných papierov normálne rozdelenie, alebo sú funkcie užitočnosti kvadratické.

Ak je obsahom úlohy výberu portfólia nájsť všetky portfólia na efektívnej hranici, potom túto úlohu možno zapísať ako úlohu vektorovej optimalizácie v tvare

$$\text{eff} \{E_P, V_P\} \tag{2.1}$$

za podmienok

$$\sum_{k=1}^n w_k = \mathbf{w}^T \mathbf{e} = 1$$

kde

$$E_P = \sum_{k=1}^n w_k E_k = \mathbf{w}^T \mathbf{E}$$

je očakávaný výnos portfólia, w_k je podiel investorových fondov investovaných do k -tého aktíva, E_k je očakávaný výnos k -tého aktíva, $k = 1, 2, \dots, n$, a

$$V_P = \sigma^2 = \sum_{k=1}^n w_k^2 \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1, l \neq k}^n w_k w_l \sigma_{kl} = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w}$$

je rozptyl výnosov portfólia, kde σ_k^2 je rozptyl výnosu k -tého aktíva a σ_{kl} je kovariancia medzi k -tým a l -tým aktívom.

Dá sa dokázať (Mlynarovič, 2001), že riešením úlohy (2.1) v priestore váh rizikových aktív je množina W_P vektorov váh efektívnych portfólií pre stanovené hranice očakávaného výnosu. kde

$$W_P = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{E} \ \mathbf{e}] \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} E_P \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = [\mathbf{E} \ \mathbf{e}]^T \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{E} \ \mathbf{e}], E_* \leq E_P \leq E^* \right\} \tag{2.2}$$

Úloha výberu portfólia je teda formulovaná ako dvojkriteriálny problém a možno ju riešiť v rámci metodológie viackriteriálneho rozhodovania. Metóda výberu optimálneho portfólia navrhnutá *Markowitzom* (Markowitz, 1952):

- (i) Identifikácia množiny investičných príležitostí ako ohraničenie problému odvolaním sa na efektívnu hranicu „priemer - rozptyl“ ($E-V$) a
- (ii) Maximalizácia očakávanej užitočnosti výnosov investora na efektívnej hranici $E-V$.

Prvá fáza nepredstavuje vážnejšie ťažkosti. Druhá fáza je však plná koncepčných a operačných ťažkostí. Ako už bolo spomenuté, exaktný výber efektívneho portfólia, ktoré maximalizuje očakávanú užitočnosť výnosov je možný len vtedy, ak výnosy všetkých cenných papierov sú normálne rozdelené, alebo ak je funkcia užitočnosti kvadratická. Normálne rozdelenie výnosov je však len hypotéza, ktorá nebola empiricky potvrdená a kvadratické funkcie užitočnosti implikujú mnoho logických nedostatkov (napríklad ich absolútna averzia k riziku rastie s úrovňou bohatstva). Okrem toho, predpoklad analytickej formulácie funkcie užitočnosti zo strany investora je nereálny.

3 PRINCÍPY KOMPROMISU

Použitím kritéria očakávaného výnosu a rozptylu výnosu možno úlohu výberu portfólia zapísať ako úlohu kompromisného programovania v tvare:

$$\min L_p = \left[\lambda_1^p |u_1 - f_1|^p + \lambda_2^p |u_2 - f_2|^p \right]^{1/p}$$

za podmienok (3.1)

$$\mathbf{w} \in W_p$$

kde λ_1, λ_2 sú nezáporné váhy priradené kritériám $f_1 = E_p$ a $f_2 = -V_p$. Pre $p = 1$ model (3.1) nadobúda tvar

$$\max \{ \lambda_1 E_p - \lambda_2 V_p \mid \mathbf{w} \in W_p \}$$
(3.2)

a riešením úlohy (3.1) získame najlepšie kompromisné portfólio L_1 . Pre $p = \infty$ sa zohľadňuje len najväčšia odchýlka, takže funkcia vzdialenosti v (3.1) nadobúda tvar

$$\max [\lambda_1(E^* - E_p), \lambda_2(V_p - V^*)]$$

kde $E^* = u_1$ a $V^* = -u_2$. Preto hranica L_∞ je daná úlohou

$$\min y = \min \max [\lambda_1(E^* - E_p), \lambda_2(V_p - V^*)]$$

za podmienok

$$\mathbf{w} \in W_p$$

ktorá je ekvivalentná s úlohou

$$\min y$$

za podmienok

$$\lambda_1(E^* - E_p) \leq y$$
(3.3)

$$\lambda_2(V_P - V_*) \leq y, \mathbf{w} \in W_P$$

Dá sa dokázať, že v dvojrozmernom priestore očakávaný výnos a rozptyl sú L_1 a L_∞ také dve hranice množiny efektívnych portfólií, že zostávajúce najlepšie kompromisné riešenia (portfóliá) zodpovedajúce hodnotám parametra $1 < p < \infty$ ležia medzi L_1 a L_∞ . Ako bolo uvedené vyššie L_1 a L_∞ možno vypočítať riešením úloh (3.2) a (3.3).

Priamemu riešeniu úloh (3.2) a (3.3) sa však možno vyhnúť. Štruktúra (3.2) predstavuje v priestore rozhodovacích premenných \mathbf{w} nelineárny model, ale jeho účelová funkcia je lineárna v priestore $E - V$. To znamená, že účelová funkcia úlohy (3.2) dosahuje maximum v bode dotyku medzi triedou úrovnových nadrovin $\lambda_1 E - \lambda_2 V = K$ a efektívnou množinou $E - V$. Tento bod dotyku reprezentuje hranicu L_1 . Hranicu L_∞ možno identifikovať pomocou výsledku, podľa ktorého platí

$$\lambda_1(E^* - E_P) = \lambda_2(V_P - V_*) \quad (3.4)$$

Váhy λ_1, λ_2 majú nasledujúcu dvoj úlohu: (a) normalizovanie dvoch kritérií $E - V$ a (b) meranie investorových preferencií vzhľadom na očakávaný výnos a riziko ($E - V$). Ako východiskový bod možno použiť váhy, pre ktoré platí

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-m_2 - V_*}{E^* - m_1} \quad (3.5)$$

a kroky potrebné na implementáciu procedúry výberu portfólia možno sumarizovať v tvare:

1. opísanie, resp. aproximácia efektívnej hranice (množiny) $E - V$,
2. výpočet váh pomocou vzťahu (3.5),
3. determinovanie L_1 aplikáciou modelu (3.2),
4. determinácia L_∞ prostredníctvom (3.3) alebo ako priesečník nadroviny (3.4) a hranice efektívnych portfólií,
5. výsledok: hranice L_1 a L_∞ predstavujú hranice kompromisnej množiny a body kompromisnej množiny sú potenciálne portfólia.

Použitá literatúra

1. MARKOWITZ, H. 1952. Portfolio Selection. *J. Finance* 7, 77 - 91
2. MLYNAROVÍČ, V. 2001. Finančné investovanie. Bratislava, IURA Edition.
3. OGRYCZAK, W. 2000. Multiple criteria linear programming model for portfolio selection. *Annals of Operations Research* 97, 143 - 162.
4. STEUER, R., Y. QI, and M. HIRSBERGER. 2005. Multiple objectives in portfolio selection. *Journal of Financial Decision Making* 1(1).
5. STEUER, R., M. WIMMER, and M. HIRSBERGER. 2013. Overviewing the transition of Markowitz bi-criterion portfolio selection to tri-criterion portfolio selection. *Journal of Business Economics* 83(1), 61- 85.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4 1/b, 821 05 Bratislava

Tel: +421 2 20 66 98 60

email: vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

ATTRITION ANALÝZA POMOCÍ METOD STROJOVÉHO UČENÍ

Mariya Oleynik, Lukáš Frýd¹

Abstract

In this paper, we utilize the credit scoring models in the attrition analysis. We focus on the banking industry and customers fluctuation. The benchmark model is logistic regression which is compared with the generalized additive model (GAM). The second one model belongs to the machine learning family and the most important pros are in the ability capture the nonlinearities in the data. We have found that nonlinearities are statistically significant and have an impact on the model predictions. The GAM model has better prediction abilities than traditional logistic regression model.

Keywords: *attrition model, generalized additive model, logistic regression*

1 ÚVOD

Tradičním ekonometrickým nástrojem užívaný k hodnocení kreditního rizika je logistická regrese. Zároveň se bankovní domy snaží vylepšit vlastní skoringové modely za pomoci metod strojového učení. Na druhou stranu čelí bankovní domy v ČR silnému konkurenčnímu tlaku, který vyústil k přetahování klientů mezi bankovními domy. My se v této práci zaměříme právě na tuto část bankovního businessu, který je znám jako attrition modeling. K tomuto modelování však využijeme nástroje užívané právě v hodnocení kreditního rizika. Jako základní metoda bude užita logistická regrese, jejíž výsledky budeme porovnávat se zobecněným aditivním modelem (GAM), který se řadí mezi metody strojového učení [4].

Podobný přístup byl již využit například pro predikci prodloužení předplatného časopisů největší Belgické vydavatelské společnosti [2], analýzy loajality klientů v telekomunikačním odvětví [7], nebo pro predikci ztráty klientů u společností se spotřebním zbožím [1].

Hlavním přínosem práce je, že stejně jako v případě skoringových modelů, jsou modely založené na strojovém učení schopny lépe predikovat binární závisle proměnnou.

Práce dále obsahuje následující části. V metodologii je popsána jak logistická regrese, tak princip modelu GAM. Následuje část s popisem datového souboru a definice „ztráty klienta“. Předposlední část obsahuje vlastní analýzu. Poslední část je věnována shrnutí a porovnání výsledků obou metod.

2 METODOLOGIE

2.1 Logistická regrese

V této práci budeme pracovat s modelem

¹ Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/78/2018 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

$$p(X) = P\{y = 1|X\} = F(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}), \quad (1)$$

kde P představuje podmíněnou pravděpodobnost úspěchu závislou na matici regresorů \mathbf{X} . Funkce F pak představuje distribuční funkci logistického rozdělení definovanou jako

$$F(\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}}}, \quad (2)$$

kde $\boldsymbol{\beta}$ je vektor představující neznámé parametry, které budou odhadnuty pomocí metody maximální věrohodnosti [3]. Pro interpretaci příspěvků jednotlivých proměnných jsme zvolili metodu průměrných mezních efektů definovanou jako [3]:

$$AME_j = \frac{1}{N} \sum_1^n f(\mathbf{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}) \hat{\beta}_j. \quad (3)$$

2.2 Zobecněný aditivní model

Jednou z nevýhod logistické regrese je předpoklad, že jednotlivé regresory mají lineární dopad na pravděpodobnost úspěchu, což může představovat přílišné zjednodušení reality. Možným řešením je zobecněný aditivní model:

$$E(Y|x_1, \dots, x_p) = \alpha + f_1(x_1) + \dots + f_p(x_p), \quad (4)$$

kde x_1, \dots, x_p jsou vysvětlující proměnné,

Y je vysvětlovaná proměnná,

α je intercept,

f_p jsou hladké neparametrické funkce.

Model z rovnice (4) je tak schopen zachytit i nelineární vztahy mezi závislou a nezávislými proměnnými právě pomocí vhodně zvolené funkce f_p .

Zobecněný aditivní model z rovnice (4) lze převést na model s binární závisle proměnnou. Využijeme k tomu model logistické regrese z rovnice (1) upravené do lineárního tvaru:

$$\ln\left(\frac{p(X)}{1-p(X)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_p X_p. \quad (5)$$

Zobecněný aditivní logistický model nahradí každou lineární složku obecnější funkční formou:

$$\ln\left(\frac{p(X)}{1-p(X)}\right) = f_0 + f_1(X_1) + f_2(X_2) + \dots + f_p(X_p), \quad (6)$$

kde X_1, \dots, X_p jsou vysvětlující proměnné,

f_p jsou hladké neparametrické funkce.

Hladké neparametrické funkce popisují trend závislosti vysvětlované proměnné jako funkci vysvětlujících proměnných.[5] Hladká funkce pak poskytuje odhad trendu. Jednou z nesporných výhod modelu (6) je pak možnost zachycení nelinearity v proměnné X_i , bez nutnosti užití polynomu n -tého stupně a tím pádem ztrátě stupňů volnosti.

V této práci bude jako funkce f_p užit vyhlazovací kubický splin. Tento typ splin funkce je pak definován jako funkce $g(x)$, která minimalizuje vztah:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2 + \lambda \int g''(x)^2 dx, \quad (7)$$

kde $\lambda \in (0, \infty)$ je vyrovnávací parametr. První složka vzorce (7) $\sum_{i=1}^N (y_i - g(x_i))^2$ představuje ztrátovou funkci a část $\lambda \int g''(x)^2 dx$ je penalizační částí. Vyrovnávací parametr λ určuje vyhlazení kubického splinu. V případě $\lambda = 0$ získáme křivky se výraznými skoky. Naopak pro $\lambda \rightarrow \infty$ získáme perfektně hladkou křivku. Pro odhad vhodné hodnoty vyrovnávacího parametru jsme užili metodu křížové validace [4].

Pro odhad aditivního logistického modelu bude užit lokální skoringový algoritmus. [4]

3 DATA

Analyzovaná data pocházejí z jedné z předních českých bank za období za období 2.2017-7.2017 a 8.2017-9.2017. Rozsah analyzované databáze obsahoval 5000 klientů. V práci bylo užito celkem sedm vysvětlujících proměnných. Proměnná *podil* je poměr průměrných počtů odchozích transakcí, *suma_podil_pr* představuje poměr průměrných sum příchozích transakcí. Další proměnnou *podil_pr* je poměr průměrných počtů příchozích transakcí. Proměnnou *client_age* se značí věk klienta. Délka vedení účtu je uvedena v rocích a je označena jako *hist_uctu*. Další dvě vysvětlující proměnné jsou binární. Proměnná *credit_card* nabývá hodnoty 1 v případě, že klient disponuje kreditní kartou. Pokud klient spadá do nějaké rizikové kategorie, bude proměnná *risk_category* nabývat hodnoty 1.

Pro definici ztráty zájmu v bankou poskytovaných služeb jsou použité celkové sumy odchozích transakcí. Takto definována ztráta zájmu byla zvolena z důvodu, že počet plateb může klesnout, ale celková odeslaná částka zůstane beze změny. Vysvětlovaná proměnná představuje poměr průměrných sum odchozích transakcí.

Odcházející klient bude snižovat celkovou měsíční částku odchozích plateb o 2 a vícekrát, což je dostatečně významný pokles aktivity ve využívání služeb. Pokud bude zaznamenán podobný pokles, dá se předpokládat, že chybějící platby klient pravděpodobně provede v jiné bance. Podobným klientům je v rámci binární vysvětlované proměnné přiřazena 1 a pro ostatní klienty, kteří mají výše zmíněný poměr menší než 2, což předpokládá stabilitu ve využívání bankovních služeb, je přiřazena 0. Táto vysvětlovaná proměnná je pojmenovaná jako Y . Datový soubor jsme náhodně rozdělili na trénovací a testovací v poměru 80/20.

4 EMPIRICKÁ ČÁST

4.1 Logistická regrese

Výsledky odhadu logistické regrese pro trénovací vzorek jsou zobrazeny v tabulce 4.1.

Proměnná	P-hodnota
podil	<0,001
podil_pr	<0,001
suma_podil_pr	0,005
client_age	<0,001
hist_uctu	<0,001
credit_card	<0,001
risk_category	0,044

Tabulka 4.1: Výsledky pro logistický model se všemi vysvětlujícími proměnnými

Na základě p-hodnot můžeme vidět, že kromě proměnné *risk_category* můžeme u všech ostatních proměnných zamítnout nulovou hypotézu na hladině významnosti 1%, že by dané proměnné neměly statisticky významný vliv. U proměnné *risk_category* lze nulovou hypotézu zamítnout na hladině významnosti 5%.

Pro interpretaci příspěvků jednotlivých regresorů k pravděpodobnosti odchodu z banky lze využít odhadnuté mezní efekty, zobrazené v tabulce 4.2.

Proměnná	AME efekt
podil	0,287
podil_pr	0,043
suma_podil_pr	0,004
client_age	-0,009
hist_uctu	0,014
credit_card	-0,159
risk_category	-0,048

Tabulka 4.2: AME pro logistický model se všemi vysvětlujícími proměnnými

Při zvýšení proměnné *podil* o jednotku se pravděpodobnost odchodu klienta zvýší o cca 28,7 %, nebo pravděpodobnost odchodu klienta z bankovního domu se zvýší o 28,7 % při jednotkovém růstu poměru průměrných počtů transakcí. Při jednotkovém růstu poměru průměrných počtů příchozích transakcí se pravděpodobnost ztráty klienta zvětšuje o 4,3 %. Zvýšení o jednotku poměru průměrných sum příchozích plateb zvětšuje pravděpodobnost

odchodu klienta o 0,4 %. Se zvýšením věku klienta o jednotku klesá pravděpodobnost odchodu klienta z banky o 0,9 %. Při zvýšení o jednotku délky vedení účtu se zvětšuje pravděpodobnost odchodu klienta o 1,4 %. Pokud klient vlastní kreditní kartu, pravděpodobnost odchodu klienta se snižuje o 15,9 %. Jestliže je klientovi přiřazena riziková kategorie, klesá pravděpodobnost odchodu o 4,8 %.

4.2 Zobecněný aditivní model

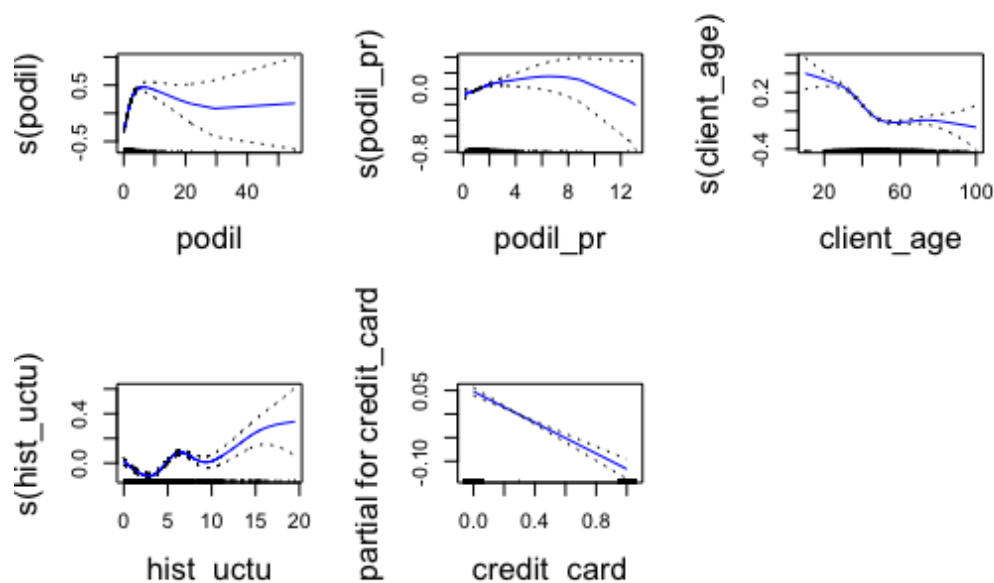
V první části jsme užili pro všechny kvantitativní proměnné (*podil*, *podil_pr*, *suma_podil_pr*, *client_age*, *hist_uctu*) vyhlazovací kubický splin definovaný vztahem (7). Pro zbylé kategoriální proměnné byla uvažována lineární závislost.

V tabulce 4.3 jsou zobrazené výsledky odhadu GAM modelu. P-hodnoty zde představují výsledky test, kde nulová hypotéza předpokládá lineární vztah mezi závisle a nezávisle proměnnou a alternativní hypotéza je spojena s nelineárním vztahem.

Proměnná	P-hodnota
s(podil)	<0,001
s(podil_pr)	<0,04
s(suma_podil_pr)	<0,001
s(client_age)	<0,001
s(hist_uctu)	<0,001
credit_card	
risk_category	

Tabulka 4.3: Odhad aditivního logistického modelu se všemi vysvětlujícími proměnnými

V tabulce 4.3 je vidět, že na hladině významnosti 5% lze zamítnout nulovou hypotézu pro všechny spojité proměnné. Jelikož se pro proměnné *credit_card* a *risk_category* nepoužívá vyhlazování kubickým splinem, tyto proměnné nemají v daném testu uvedenou P-hodnotu. Pro analýzu vztahů mezi závislou a nezávislými proměnnými lze užít grafického znázornění v grafu 4.1.



Graf 4.1: Závislost na vysvětlujících proměnných po finální úpravě modelu

V grafu 4.1 je na ose y uvedena pravděpodobnost odchodu z banky v závislosti na vývoji nezávislé proměnné. Graf 4.1 tak koresponduje s výsledky z tabulky 4.3. V případě proměnné *podil* můžeme spatřit, že na začátku zvětšení proměnné *podil* vede k růstu pravděpodobnosti odchodu klienta. Potom se postupně pravděpodobnost odchodu klienta s rostoucí hodnotou proměnné *podil* klesá a při hodnotách větší než 30 se pravděpodobnost odchodu klienta stabilizuje.

Podobně lze odvodit vztah pro další vysvětlující proměnnou *podil_pr*. Na grafu závislosti na vysvětlující proměnné *podil_pr* je vidět, že vysoké a nízké hodnoty vedou k menší pravděpodobnosti odchodu klienta, zatímco prostřední hodnoty zvyšují pravděpodobnost odchodu klienta. Tato proměnná je příkladem invertovaného U trendu.

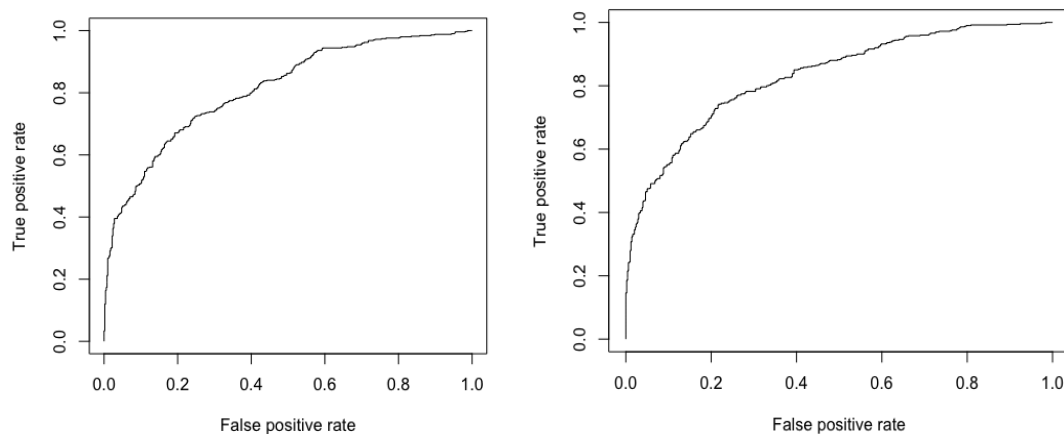
Další proměnná *client_age* také patří do skupiny proměnných, u kterých má závislost nelineární charakter. Nízké hodnoty proměnné *client_age* jsou spojeny s vyšší pravděpodobností odchodu klienta. S růstem věku klienta se tato pravděpodobnost snižuje.

Graf závislosti na proměnné *hist_uctu* představuje kategorii komplexního trendu. Na začátku se pravděpodobnost odchodu klienta mění. Následně s hodnotou vysvětlující proměnné větší než 10 roste pravděpodobnost odchodu klienta.

Pravděpodobnost odchodu klienta má nepřímou lineární závislost na proměnné *credit_card*. S rostoucí hodnotou vysvětlující proměnné klesá pravděpodobnost odchodu klienta, což znamená, že pokud klient disponuje kreditní kartou, jeho pravděpodobnost odchodu z banky významně klesá.

4.3 Hodnocení obou modelů

Nyní lze zhodnotit predikční schopnost logistického modelu a zobecněného aditivního modelu. Pro hodnocení predikční schopnosti obou modelů se zkoumá jejich schopnost správně přiřadit respondenta k binární vysvětlované proměnné. Pro tento účel slouží ROC a AUC. Hodnocení se provádí na druhé podmnožině datového souboru, který byl předem určen pro testovací část.



Graf 4.2: ROC pro logistický model a pro zobecněný aditivní model

Pro numerickou interpretaci ROC na grafu 4.2 se používá AUC. Ve výsledku se hodnota AUC pro logistický model rovná 0,8118962, což znamená, že logistický model byl schopen v 81,18 procentech správně přiřadit respondenta k příslušné vysvětlované proměnné.

AUC pro zobecněný aditivní model se rovná 0,8348942, což znamená, že výsledný zobecněný aditivní model může v 83,48 % případů předpovědět odchod klient.

5 ZÁVĚR

Cílem této práce byla analýza chování odcházejícího klienta. Odchodem klienta z banky bylo v této práci definováno jako snížení, nebo ukončení využívání služeb ze strany zákazníka. Vhodným nástrojem pro měření aktivity klienta bankovního domu je jeho využívání vlastního bankovního účtu, což jsou příchozí a odchozí transakce, které klient během určitého časového intervalu pravidelně provádí.

Pro analýzu chování odcházejícího a stávajícího klienta bylo využito metod z hodnocení kreditního rizika. Jako benchmark byla užitá metoda logistické regrese. Tato metoda pak byla porovnána s metodou z kategorie strojového učení zobecněným aditivním modelem (GAM).

Metoda GAM umožňuje zachytit i nelineární vztahy mezi závislou a nezávislou proměnnou, bez nutnosti užití zahrnutí polynomu n -tého stupně v regresní rovnici. V praktické části jsme zjistili, že námi zvolené spojité proměnné mají nelineární dopad na pravděpodobnost odchodu klienta z banky. Užitečnost této informace se pak projevila při porovnávání predikční schopnosti modelu logistické regrese a GAM modelu. Predikční schopnost byla měřena pomocí AUC na „out-of-sample“ vzorku, který představoval 20 % datového souboru. Model logistické regrese byl schopen správně přiřadit respondenta k příslušné hodnotě závislé proměnné v 81,18 %. V případě modelu GAM se toto číslo zvýšilo na 83,5 %. Ukazuje se tak, že stejně jako u skóringových modelů, lze vhodně využít modely strojového učení u attrition modelů.

Použitá literatura

- [1] BUCKINX, Wouter a Dirk VAN DEN POEL. Customer base analysis: partial defection of behaviourally loyal clients in a non-contractual FMCG retail setting. *European Journal of Operational Research* [online]. 2005, 27 February

- 2004, **164**(1), 252-268 [cit. 2018-03-29]. DOI: 10.1016/j.ejor.2003.12.010. ISSN 03772217.
- [2] COUSSEMENT, Kristof, Dries F. BENOIT a Dirk VAN DEN POEL. Improved marketing decision making in a customer churn prediction context using generalized additive models. *Expert Systems with Applications* [online]. 2010, **37**(3), 2132-2143 [cit. 2018-03-29]. DOI: 10.1016/j.eswa.2009.07.029. ISSN 09574174.
- [3] GREENE, William H. *Econometric analysis* [online]. 5th ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, c2003 [cit. 2018-11-09]. ISBN 01-306-6189-9.
- [4] HASTIE, Trevor, Robert TIBSHIRANI a J. H. FRIEDMAN. *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Corrected ed. New York: Springer, 2003. ISBN 03-879-5284-5.
- [5] LIU, Huimin. Generalized Additive Models. In: *StAtliNK* [online]. Department of Mathematics and Statistics University of Minnesota Duluth, Duluth, MN 55812, 2008 [cit. 2018-05-02].
- [6] OLEYNIK, Mariya. *Attrition analýza pomocí metod strojového učení*. Praha, 2018. Bakalářská práce. Vysoká škola ekonomická v Praze. Vedoucí práce Ing. Lukáš Frýd.
- [7] VAFEIADIS, T., K.I. DIAMANTARAS, G. SARIGIANNIDIS a K.Ch. CHATZISAVVAS. A comparison of machine learning techniques for customer churn prediction. *Simulation Modelling Practice and Theory* [online]. 2015, **2015**(55), 1-9 [cit. 2018-05-20].

Kontaktné údaje

Ing. Lukáš Frýd

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. Winstona Churchilla 1938/4,
Praha 3 130 67
Email: lukas.fryd@gmail.com

Kontaktné údaje

Bc. Mariya Oleynik

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. Winstona Churchilla 1938/4,
Praha 3 130 67
Email: inspiration728@mail.ru

EXAKTNÝ MODEL OPTIMALIZÁCIE TURNUSOV S DVOMA TYPMI VOZIDIEL

AN EXACT MODEL OF OPTIMAL VEHICLE SCHEDULING WITH TWO TYPES OF VEHICLES

Stanislav Palúch

Abstrakt

Existuje niekoľko modelov pre tvorbu suboptimálnych turnusov s dvoma typmi vozidiel. Tieto modely sú založené na modeloch teórie grafov a diskkrétnej heuristickej optimalizácii, ktorá však pri hľadaní lepšieho riešenia používa niektoré exaktné metódy ako napríklad priradovací problém. Tento článok navrhuje model bivalentného matematického programovania, ktorého výsledkom je exaktný optimálny obehový rozvrh s dvoma typmi vozidiel.

Príučové slová: spoj turnus vozidla, obehový rozvrh s dvoma typmi vozidiel

Abstract

There are several types of models for suboptimal vehicle scheduling with two type of vehicles. These models are based on graph theory and discrete heuristic optimization. However, mentioned heuristic optimizations makes use of several exact methods (e.g. as assignment problem) for searching better neighborhood solution. This paper proposes model of bivalent linear programming. The result of proposed model is an exact solution of vehicle scheduling problem with two types of vehicles.

Keywords: trip, running board, vehicle scheduling with two types of vehicles

1 ZÁKLADNÝ PROBLÉM OPTIMALIZÁCIE TURNUSOV

Je daná množina spojov $S = \{1, 2, \dots, N\}$, každý spoj definovaný štyrmi hodnotami, a to sú miesto odchodu, miesto príchodu, čas odchodu a čas príchodu. Okrem týchto povinných veličín môže informácia o spoji obsahovať identifikačné údaje ako číslo linky a číslo spoja a ďalšie dáta ako požadovaný typ vozidla, obsadenosť atď.

Na množine spojov S možno definovať binárnu reláciu precedencie $<$ takto: Spoj i predchádza spoj j , píšeme $i < j$, práve vtedy, ak ten istý autobus môže po spoji i vykonať aj spoj j .

S prechodom vozidla zo spoja i na spoj j sú spojené náklady c_{ij} obsahujúce najmä cenu prípadného prázdneho prejazdu z miesta príchodu spoja i do miesta odchodu spoja j , ale môže obsahovať aj pokutu za zmenu linky, nevhodný čas čakania atď.

Turnus vozidla T je postupnosť spojov

$$T = (s_1, s_2, \dots, s_r) \quad (1)$$

taká, že

$$s_1 < s_2 < \dots < s_r \quad (2)$$

Cena turnusu $T = (s_1, s_2, \dots, s_r)$ je súčtom cien nákladov na všetky prechody vozidla zo spoja na spoj:

$$c(T) = \sum_{i=1}^{r-1} c(s_i, s_{i+1}) \quad (3)$$

Obehový rozvrh danej množiny spojov S je množina turnusov $O = \{T_1, T_2, \dots, T_v\}$ taká, že každý spoj z množiny S sa vyskytuje práve v jednom turnuse množiny O .

Cena obehového rozvrhu $O = \{T_1, T_2, \dots, T_v\}$ je súčet siem všetkých jeho turnusov, t.j.:

$$c(O) = \sum_{i=1}^v c(T_i) \quad (4)$$

Základným problémom optimalizácie turnusov je zostrojiť obehový rozvrh s minimálnym počtom turnusov a minimálnou cenou.

Digraf následnosti spojov $G = (S, A, c)$ je digraf s množinou vrcholov S , množinou hrán A , kde

$$A = \{(i, j) \mid i \in S, j \in S, i < j\} \quad (5)$$

a cenou hrán c_{ij} .

Pre každú hranu $(i, j) \in A$ definujeme rozhodovaciu binárnu premennú x_{ij}

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak spoj } j \text{ je zaradený bezprostredne za spoj } i \text{ v niektorom turnuse} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (6)$$

V prípustnom rozvrhu môže byť za každý spoj i zaradený nanajvýš jeden spoj j , čo vyjadruje podmienka $\sum_j x_{ij} \leq 1$. Podobne pred každým spojom môže byť zaradený nanajvýš jeden spoj t.j. $\sum_i x_{ij} \leq 1$.

Ak začneme triviálnym obehovým rozvrhom, v ktorom má každý turnus iba jeden spoj, budeme potrebovať toľko vozidiel, koľko je spojov. Zaradením dvojice spojov $(i, j) \in A$ do jedného turnusu – prilinkovaním spoja j za spoj i – ušetríme jeden autobus. Minimalizovať počet vozidiel znamená minimalizovať číslo $N - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij}$.

Pri minimálnom poslednom výraze treba navyše minimalizovať celkový súčet cien prilinkovaní $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$. Toto vedie k nasledujúcej úlohe bivalentného programovania:

$$\text{Minimalizovať } R \cdot \left[N - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \right] + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (7)$$

$$\text{za podmienok: } \sum_j x_{ij} \leq 1, \quad \text{pre } i \in S \quad (8)$$

$$\sum_i x_{ij} \leq 1, \quad \text{pre } j \in S \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pre } (i,j) \in A \quad (10)$$

kde R je veľká konštanta.

2 OPTIMALIZÁCIA OBEHU S DVOMA TYPMI VOZIDIEL

Mnohé mestské hromadné dopravy používajú okrem bežných typov autobusov s kapacitou 40-60 cestujúcich aj veľkokapacitné kľbové autobusy s takmer dvojnásobnou kapacitou. Veľkokapacitné vozidlá sú určené pre silno zaťažené spoje. Označme symbolom $V \in S$ takú podmnožinu množiny S všetkých spojov, ktorej spoje nutne vyžadujú nasadenie veľkokapacitného autobusu. Spoje množiny V nazveme ťažké spoje, ostatné spoje z množiny $S - V$ nazveme ľahké spoje. Veľkokapacitné vozidlo však môže viesť aj ľahké spoje.

Problém optimalizácie turnusov by bolo možné dekomponovať na dva disjunktné problémy: a to samostatne optimalizovať turnusy ťažkých spojov a oddelene optimalizovať turnusy ľahkých spojov. Pri tomto prístupe by však mohla nastať situácia, kedy by zaradením niekoľkých ľahkých spojov do turnusu veľkokapacitného vozidla mohlo dôjsť k zníženiu počtu bežných autobusov. Takúto možnosť by však spomínaný dekomponovaný prístup nevyužil.

Označme:

c_{ij} cenu prilinkovania spoja j bezprostredne za spoj i v turnuse bežného vozidla a d_{ij} cenu prilinkovania spoja j bezprostredne za spoj i v turnuse veľkokapacitného vozidla.

Zrejme platí $c_{ij} < d_{ij}$.

Problém optimalizácie turnusov s dvoma typmi vozidiel možno formulovať nasledovne:

1. Minimalizovať počet veľkokapacitných autobusov
2. Pri minimálnom počte veľkokapacitných autobusov minimalizovať počet bežných autobusov.
3. Pri splnení podmienok v bodoch 1. a 2. minimalizovať celkový súčet cien prilinkovaní

Definujme binárne rozhodovacie premenné x_{ij} pre $(i, j) \in A$ vzťahom (6) a pre každý spoj $i \in S$ definujme rozhodovaciu binárnu premennú y_i :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{ak spoj } i \text{ bude obsluhovaný veľkým autobusom} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (6)$$

Aby premenné x_{ij} definovali obehový rozvrh, musia platiť ohraničenia (8) a (9).

Nasadenie veľkokapacitných autobusov na ťažké spoje zaručia podmienky

$$y_i = 1 \quad \text{pre } i \in V.$$

Pre spoje $j \in S - V$ necháme model rozhodnúť, akým typom vozidla budú obsluhované.

Ak bude spoj j prilinkovaný za spoj i , t.j. vo výslednom riešení bude $x_{ij} = 1$, potom musia mať oba spoje premennými y_i, y_j priradený rovnaký typ vozidla, čo je možné modelovať ohraničeniami

$$x_{ij} \leq 1 + y_i - y_j \quad \text{pre } (i, j) \in A$$

$$x_{ij} \leq 1 - y_i + y_j \quad \text{pre } (i, j) \in A$$

Počet spojov obsluhovaných veľkým autobusom bude $\sum_{i \in S} y_i$,

počet veľkých autobusov bude

$$\sum_{i \in S} y_i - \sum_{(i,j) \in A} y_i x_{ij}$$

počet spojov obsluhovaných bežným autobusom bude $N - \sum_{i \in S} y_i$,

počet bežných autobusov bude

$$N - \sum_{i \in S} y_i - \sum_{(i,j) \in A} (1 - y_i) x_{ij}$$

súčet cien prilinkovaní veľkých autobusov bude

$$\sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_i x_{ij}$$

súčet cien prilinkovaní bežných autobusov bude

$$\sum_{(i,j) \in A} (1 - y_i) c_{ij} x_{ij}$$

Nájsť optimálny rozvrh s dvoma typmi turnusov znamená

Minimalizovať:

$$R \cdot \left[N - \sum_{i \in S} y_i - \sum_{(i,j) \in A} (1 - y_i) x_{ij} \right] + M \cdot \left[\sum_{i \in S} y_i - \sum_{(i,j) \in A} y_i x_{ij} \right] + \sum_{(i,j) \in A} (1 - y_i) c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_i x_{ij} \quad (7)$$

$$\text{za podmienok: } \sum_j x_{ij} \leq 1, \quad \text{pre } i \in S \quad (8)$$

$$\sum_i x_{ij} \leq 1, \quad \text{pre } j \in S \quad (9)$$

$$y_i = 1 \quad \text{pre } i \in V \quad (10)$$

$$y_i \leq 1 \quad \text{pre } i \in S - V \quad (11)$$

$$x_{ij} \leq 1 + y_i - y_j \quad \text{pre } (i,j) \in A \quad (12)$$

$$x_{ij} \leq 1 - y_i + y_j \quad \text{pre } (i,j) \in A \quad (13)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pre } i \in S \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pre } (i,j) \in A \quad (15)$$

Kde R a M sú veľké čísla a $R \ll M$, t.j. R je podstatne menšie než M .

Prvý sčítanec prvého riadku kriteriálnej funkcie (7) je R -násobok počtu bežných vozidiel, druhý sčítanec je M -násobok počtu veľkokapacitných vozidiel.

Prvý sčítanec druhého riadku kriteriálnej funkcie (7) je celkový súčet prilinkovaní bežných vozidiel, druhý sčítanec je celkový súčet prilinkovaní veľkokapacitných vozidiel.

Prvý riadok kriteriálnej funkcie (7) možno upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} RN - R \sum_{i \in S} y_i - R \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} + R \sum_{(i,j) \in A} y_i x_{ij} + M \sum_{i \in S} y_i - M \sum_{(i,j) \in A} y_i x_{ij} = \\ = RN + (M - R) \sum_{i \in S} y_i - (M - R) \sum_{(i,j) \in A} y_i x_{ij} - R \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

Druhý riadok kriteriálnej funkcie (7) možno prepísať takto:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_i x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_i x_{ij} = \\ = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} (d_{ij} - c_{ij}) y_i x_{ij} \end{aligned} \quad (17)$$

Naša kriteriálna funkcia je teda súčtom výrazov (16) a (17), pričom možno vynechať konštantný člen RN :

$$(M - R) \sum_{i \in S} y_i - (M - R) \sum_{(i,j) \in A} y_i x_{ij} - R \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} (d_{ij} - c_{ij}) y_i x_{ij}$$

Posledný výraz možno ďalej upraviť takto:

$$(M - R) \sum_{i \in S} y_i + \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} - R) x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} (d_{ij} - c_{ij} - M + R) y_i x_{ij} \quad (18)$$

Problém optimalizácie obehového rozvrhu s dvoma typmi vozidiel možno teda formulovať ako minimalizovať kriteriálnu funkciu (18) za predpokladov (8) – (15).

Funkcia (18) však nie je lineárna funkcia. Možno ju však nahradiť zavedením novej binárnej premennej z_{ij} a zmenením kriteriálnej funkcie takto:

$$(M - R) \sum_{i \in S} y_i + \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} - R) x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} (d_{ij} - c_{ij} - M + R) z_{ij} \quad (18)$$

a zvedením ďalších ohraňení

$$2z_{ij} \leq x_{ij} + y_i \quad \text{pre } (i,j) \in A \quad (19)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pre } (i,j) \in A \quad (20)$$

Konečná formulácia optimalizácie obehového rozvrhu s dvoma typmi vozidiel modelom binárneho lineárneho programovania je teda takáto:

Minimalizovať (18) za predpokladov (8) – (15) a (19) a (20).

3 ZÁVER

V článku bol formulovaný problém optimalizácie obehového rozvrhu s dvoma typmi vozidiel, Pre formulovaný problém sme zostavili najprv model nelineárneho bivalentného programovania s pomerne zložitou kritériálnou funkciou. Túto funkciu sa podarilo zjednodušiť a následne zavedením ďalších bivalentných premenných preformulovať na model lineárneho bivalentného programovania.

Práce T. Majera ukázali, že súčasné solvery lineárneho programovania zvládnu bez problémov praktické úlohy rozsahu tisíc spojov. Ďalšie pokusy ukázali, že modely podobné modelu (18), (8) – (15) a (19) a (20) možno doplniť ďalšími lineárnymi ohraničeniami zakazujúcimi neprípustné časti turnusu (ako nedodržanie bezpečnostnej prestávky, prestávky na jedlo, dĺžku pracovnej zmeny apod.) Možno tak exaktne vyriešiť doteraz neriešiteľné problémy rozvrhovania opakovaným riešením rozšírenej celočíselnej úlohy.

Navrhnutý postup bude treba ešte doplniť konkrétnymi výpočtami

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0582/16 Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach.

Použitá literatúra

1. Czimmermann, P., & Peško Š. (2004). Autobusové rozvrhy s dvoma typmi vozidiel. *Proceedings of 3-rd International Conference APLIMAT*, 321-326.
2. Černá, A. (2001). Optimalizace regionální autobusové dopravy. *Proceedings of International Conference Věda o dopravě*, 70-75.
3. Engelthaller, D. (1987). *Uplatnenie systémov človek – stroj pri tvorbe obehového rozvrhu v osobnej doprave*. [Kandidátska dizertačná práca]. Žilina, Slovakia: VŠDS Žilina.
4. Palúch, S. (2001). Graph Theory Approach to Bus Scheduling Problem. *Studies of the faculty of management science and informatics*, 9(2), 53-57.
5. Palúch, S. (2003). Bus Scheduling as a Graph Coloring Problem. *Communications*, 2003(4),
6. Palúch, S., & Majer, T. (2016). Vehicle scheduling with roundabout routes to depot. *Proceedings of 34th international conference Mathematical methods in economics MME 2016*, 623-628.
7. Palúch, S., Peško, Š., & Majer, T. (2016). An exact solution of the minimum fleet size problem with flexible bus trips. *Proceedings of the international scientific conference Quantitative methods in economics 2016*, 278-282.
8. Peško, Š., Palúch, S., & Majer, T. (2016). A group matching model for a vehicle scheduling problem. *Proceedings of the international scientific conference Quantitative methods in economics 2016*, 59-65.
9. Vašek, K. (1985). Problém dekompozície pri optimalizácii obehových rozvrhov. *Zborník prác VÚD*, 1985(45), 148-154.

Kontaktné údaje

Doc. RNDr. Stanislav Palúch, CsC.

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline

Univerzitná 8215/1

01026 Žilina

Tel: +421 41 513 4250 Mobil: 0905441958

email: stanislav.paluch@fri.uniza.sk

VÝBER STRATÉGIE HRÁČA PRI INVESTOVANÍ DO AKCIE ¹

SELECTION OF THE PLAYER'S STRATEGY IN INVESTMENT IN THE SHARE

Juraj Pekár

Abstrakt

Problematika stanovenia stratégií pri konfliktných situáciách je rozpracovaná vo veľkom množstve publikácií. V príspevku chceme poukázať na prípad, ktorý môže spôsobiť rozpor pri stanovení stratégie hráča pri obchodovaní s akciami. Budeme uvažovať situáciu, keď na trhu pôsobia dvaja hráči, pričom jeden realizuje rozhodnutie na základe predpokladu o maximalizácii zisku a druhý na základe jeho finančných potrieb v danom čase. Problém, ktorý v takejto situácii nastane je v tom, že predpoklady prvého hráča o maximalizácii zisku ako cieľa druhého hráča nie sú dodržané, čo spôsobí nutnosť analyzovať protihráčovú finančnú situáciu a až následne realizovať rozhodovanie, ktoré vyplýva s klasickou teóriou.

Kľúčové slová: hra, stratégia

Abstract

The issue of setting strategies for conflicting situations is elaborated in a large number of publications. In the paper, we want to point to a case that may cause a contradiction in determining a player's strategy when dealing with shares. We will consider a situation where two players are on the market, one realizing a decision on the assumption of maximizing profits and the other on the basis of its financial needs at a given time. The problem that occurs in this situation is that the assumptions of the first player to maximize profit as the second player's goal are not met, which will cause the need to analyze the opponent's financial situation and then to make the decision that follows the classical theory.

Keywords: game, strategy

1 ÚVOD

V príspevku sa budeme zaoberať hrou dvoch hráčov, pričom uvedenú problematiku analyzovali mnohí autori (Askar and Alnowibet, 2016), (Nash 1953), (Kuhn, 2003). Príspevok sa zaoberá rozhodovaním hráča pri výbere stratégie na akciovom trhu. Budeme uvažovať s dvomi hráčmi, ktorý sa budú rozhodovať o kúpe a predaji akcii. V prvej časti stanovíme podmienky hry a definujeme jednotlivé parametre. Následne skonštruujeme rozhodovací model, kde je cieľom prvého hráča maximalizovať svoj zisk. Pri definovaných

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA No. 1/0351/17 Application of selected models of game theory to solve some economic problems of Slovakia

podmienkach riešime uvedenú úlohu, pričom následne analyzujeme zisky hráčov v dvoch stanovených prípadoch, ako aj ich možné stratégie.

2 VSTUPNÉ PARAMETRE MODELU

Predpokladajme existenciu dvoch hráčov na akciovom trhu s jedným cenným papierom. Nech uvedení hráči spolu nekooperujú. Hráči majú k dispozícii akcie. Prvý hráč má okrem akcií aj finančné prostriedky na kúpu dodatočného množstva akcií. Výnosy realizujú z nárastu ceny, ale taktiež im prináleží dividenda z ich držby. Všeobecne hráči sa snažia nakupovať také objemy akcií, aby im to prinášalo čo najväčší zisk. Prvý hráč stanovuje svoju stratégiu, tak aby maximalizoval zisk z akcií. Druhý hráč sa však nebude rozhodovať na základe maximalizácie zisku, ale podľa svojich potrieb, t. j. buď si nechá v držbe všetky akcie, alebo ich všetky predá, aby získal prostriedky na inú činnosť.

V modeli budeme predpokladať, že firmy realizujú nákup a predaj akcie pri cene 50 € (n). Ďalej predpokladajme, že dividenda je za akciu je 2 € (d). Zmena ceny akcie je stanovená na základe predaja a kúpy akcie, pričom nárast ceny v prípade vyššieho dopytu po akcii je na úrovni 0,3 € (r) za akciu. V prípade vyššej ponuky cena o uvedenú hodnotu klesne. Taktiež uvažujeme s poplatkom za nákup/predaj akcie, ktorý má hodnotu 11 % (t) z každej transakcie.

Jednotliví hráči vlastnili akcie pred obchodovaním, pričom prvý hráč vlastnil 100 akcií (a_1) a druhý hráč 200 akcií (a_2). Okrem uvedeného predpokladajme, že druhý hráč nepredá akcie alebo ich predá všetky, prvý hráč má k dispozícii prostriedky na kúpu 150 akcií (h_1), pričom môže maximálne uvedený počet akcií nakúpiť alebo predat svoje akcie. Na konci prvého obdobia obidvaja hráči predajú všetky zostávajúce akcie. Cieľom prvého hráča je dosiahnuť maximálny zisk po skončení hry.

3 FUNKCIA ZISKU

V tejto časti uvidíme postup konštrukcie modelu pre úlohu uvedenú v druhej časti. Výnos s nákupom akcií je zložený z dvoch položiek, a to dividendový výnos a výnos zo zmeny ceny akcie. Dividendový výnos je známy, pričom rast ceny akcie závisí od objemu nákupu príslušnej akcie. Keďže zvýšením záujmu o kúpu akcií sa zvyšuje ich cena, musíme skonštruovať funkciu zmeny ceny akcie v závislosti od objemu nákupu. Všeobecne možno funkciu ceny zapísať takto:

$$p = n + r \cdot q \quad (1)$$

kde p – cena akcie,

n – nákupná cena akcie,

r – nárast ceny akcie,

q – objem nakúpených akcií.

Na základe údajov v druhej časti, kde je stanovený trend nárastu ceny akcie v závislosti od celkového objemu nákupu akcie, možno skonštruovať funkciu ceny akcie:

$$p = 50 + 0,3q \quad (2)$$

Na druhej strane sú náklady, ktoré pozostávajú z poplatku za predaj a kúpu akcií, ktoré sú vo výške 11 % z každej transakcie.

Na základe uvedených vstupných údajov a skonštruovanej funkcie možno definovať rozhodovací problém, kde je cieľom maximalizovať zisk prvého hráča z držby akcie.

Predpokladajme, že objemy nakupovaných akcií pre každého hráča sú:

q_1 – objem nakúpených/predaných akcií prvým hráčom,

q_2 – objem predaných akcií druhým hráčom,

pričom platí $q = q_1 + q_2$.

Z uvedených informácií a po zohľadnení poplatku za nákup/predaj akcie možno zisk s držby akcií pre prvého hráča zapísať takto:

$$z_1(q_1) = d \cdot (q_1 + a_1) - n \cdot q_1 + (q_1 + a_1) \cdot p - |t \cdot (q_1 + a_1) \cdot p| - |t \cdot q_1 \cdot n|$$

$$-a_1 \leq q_1 \leq h_1 \quad (3)$$

kde q_1 – objem nakúpených akcií prvým hráčom,

d – dividenda za akciu,

a_1 – objem vlastnených akcií prvým hráčom pred obchodovaním,

p – predajná cena akcií,

t – poplatok za nákup/predaj akcie,

h_1 – maximálny možný počet akcií kúpených prvým hráčom,

n – nákupná cena akcií.

Pre druhého hráča je funkcia zisku definovaná takto:

$$z_2(q_2) = d \cdot (q_2 + a_2) - n \cdot q_2 + (q_2 + a_2) \cdot p - |t \cdot (q_2 + a_2) \cdot p| - |t \cdot q_2 \cdot n|$$

$$q_2 \in \{0, -a_2\} \quad (4)$$

kde q_2 – objem nakúpených akcií prvým hráčom,

d – dividenda za akciu,

a_2 – objem vlastnených akcií prvým hráčom pred obchodovaním,

p – predajná cena akcií,

t – poplatok za nákup/predaj akcie,

n – nákupná cena akcií.

Do úlohy (3) dosadíme funkciu ceny (1) a dostaneme:

$$z_1(q_1, q_2) = d \cdot (q_1 + a_1) - n \cdot q_1 + (q_1 + a_1) \cdot (n + r \cdot (q_1 + q_2)) +$$

$$- |t \cdot (q_1 + a_1) \cdot (n + r \cdot (q_1 + q_2))| - |t \cdot q_1 \cdot n|$$

$$-a_1 \leq q_1 \leq h_1$$

$$q_2 \in \{0, -a_2\} \quad (5)$$

Po dosadení cenovej funkcie, nákupnej ceny, množstva akcií v počiatočnej držbe prvým a druhým hráčom a hodnoty dividend do funkcie zisku (5) dostaneme finálnu funkciu:

$$\begin{aligned}
z_1(q_1, q_2) &= 2 \cdot (q_1 + 100) - 50 \cdot q_1 + (q_1 + 100) \cdot (50 + 0,3 \cdot (q_1 + q_2)) + \\
&\quad - \left| 0,11 \cdot (q_1 + 100) \cdot (50 + 0,3 \cdot (q_1 + q_2)) \right| - \left| 0,11 \cdot q_1 \cdot 50 \right| \\
&\quad - q_1 \leq 100 \\
&\quad q_1 \leq 150 \\
&\quad q_2 \in \{0, -200\}
\end{aligned} \tag{3}$$

Keďže boli stanovené dve stratégie druhého hráča, a to buď si ponechá všetky akcie alebo ich hneď predá (na základe jeho finančnej situácie), riešili sme dve optimalizačné úlohy. Riešením uvedených úloh pre dve možné stratégie druhého hráča získame nasledujúce výsledky:

Hráč 1/ Hráč 2	$q_2 = 0$	$q_2 = -200$
$q_1^* = 150$	$z_1^* = 13\,312,5; z_2 = 17\,310$	$z_1 = -37,5; z_2 = 8\,900$
$q_1^* = -100$	$z_1 = 4\,450; z_2 = 3\,960$	$z_1^* = 4\,450; z_2 = 8\,900$

Pri ponechaní si všetkých akcií ($q_2 = 0$) bola optimálna stratégia prvého hráča kúpa maximálneho množstva akcií ($q_1^* = 150$). V druhom prípade (predaj všetkých akcií druhým hráčom $q_2 = -200$) prvý hráč taktiež predá všetky akcie ($q_1^* = -100$). Na základe uvedených riešení v prípade, že poznáme situáciu druhého hráča, vieme jednoznačne stanoviť stratégiu. Taktiež pri rozhodovaní dvoch hráčov, ak obidvaja realizujú svoje rozhodnutie na základe maximalizácie zisku, sa javí uvedený problém jednoznačne riešiteľný. Optimálna stratégia je nákup maximálneho množstva akcií prvým hráčom a podržanie akcií druhým hráčom. Avšak v našej úlohe sa druhý hráč nerozhoduje na základe maximalizácie zisku, ale z aktuálnej situácie vo firme, t. j. či potrebuje okamžité finančné prostriedky alebo nie. Uvedený jav spôsobuje konfliktnú situáciu, kde neexistuje jednoznačné rozhodnutie.

4 ZÁVER

Predložený príspevok sa zaoberá problémom výberu výšky investícií do akcií. Cieľom bolo poukázať, že pri rozhodovaní je nutné brať aj faktory, ktoré nesúvisia priamo s obchodovaním s cennými papiermi, ale individuálna situácia hráča. Jeho rozhodovanie nemusí byť vždy založené na maximalizácii zisku, ale napríklad potreba získania finančných prostriedkov, ktorá razantne zmení rozhodovanie. Výsledok teda nie je vždy založený na racionálnych predpokladoch, ale na individuálnom posúdení protihráčov. V našom prípade musíme zväžiť aké sú pravdepodobnosti možných stavov (okamžitá potreba finančných prostriedkov) druhého hráča a rozhodnúť o zvolenej stratégii.

Použitá literatúra

1. Askar, S.S. and Alnowibet, K.: *Cooperation versus noncooperation: Cournot duopolistic game based on delay and time-dependent parameters*. Chaos, Solitons & Fractals, vol. 91, pp. 580–584, 2016
2. Kuhn, H.: *Lectures on the Theory of Games*. 1st ed. Princeton: Princeton (New Jersey): Princeton University Press, 2003. ISBN 0–691–02771–4
3. Nash, J. F.: *Two-person cooperative games*. Econometrica, vol. 21, pp. 128–140, 1953.

Kontaktné údaje

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

email: pekar@euba.sk

ROBUSTNÝ MODEL PRIVOL S DVOMA SCENÁRMÍ DOPYTU CESTUJÚCICH A DVOMA TYPMI VOZIDIEL

ROBUST MODEL PRIVOL WITH TWO PASSANGER DEMAND SCENARIOS AND TWO TYPES OF VEHICLES

Štefan Peško

Abstrakt

Súčasnú domáce i zahraničné modely linkotvorby vychádzajú prevažne z deterministických modelov, kde je dopyt cestujúcich modelovaný OD-maticami v príslušných obdobiach (špičkách a sedlách) dňa. V prípade neistého dopytu sa v stochastických modeloch predpokladá vhodné pravdepodobnostné rozdelenie s odhadovanými parametrami. V tomto príspevku uvažujeme dva spôsoby správania cestujúcich (dva scenáre), jedni uprednostňujú najkratšiu jazdu a druhí sa uspokojia z druhou najkratšou jazdou do cieľa. Formulujeme robustný model, ktorý je zovšeobecnením úspešného modelu PRIVOL. Model verifikujeme na údajoch z roku 2016 v trolejbusovej dopravnej sieti MHD Žilina pre kapacitne malé a veľké vozidlá.

KLúčové slová: Linkotvorba, scenáre, robustný model, PRIVOL

Abstract

Current domestic and foreign line planning models are based mostly on deterministic models where the passenger's demand is modeled by OD-matrices at surveyed times (in tops and saddles) of a day. In the case of an uncertain demand, a probabilistic distribution with estimated parameters is assumed in stochastic models. In this paper, we consider two ways of passengers behavior (two scenarios). Ones prefer the shortest ride and the others are satisfied by the second fastest ride. We formulate a robust model that generalizes the successful PRIVOL model. The model is verified on data of 2016 in the trolleybus network of the Žilina public transport network for small and large vehicles capacity.

Keywords: Line planning, scenarios, robust model, PRIVOL.

1 ÚVOD

Súčasnú domáce aj zahraničné modely linkotvorby v osobnej hromadnej doprave vychádzajú prevažne z deterministických modelov, kde je dopyt cestujúcich modelovaný OD-maticami (Origin-Destination) v príslušných obdobiach (špičkách a sedlách) dňa. Neisté počty cestujúcich, ktorí požadujú presun medzi východiskovou a cieľovou zastávkou možno modelovať stochasticky pomocou vhodných pravdepodobnostných rozdelení, čo ale navyše vyžaduje vierohodné odhady ich parametrov. Takýto postup bol zvolený v práci (Borndörfer a kol., 2007), kde autori modifikovali iteračnú metódu generovania stĺpcov, pričom stĺpec reprezentuje novú linku, ktorá sa navrhuje stochasticky z dočasne vytvorených liniek. Tento prístup je však časovo veľmi náročný nakoľko požaduje veľký počet iterácií. Stochastická metóda tvorby cestovných poriadkov jednej linky s viacerými intervalmi odchodov behom dňa bola navrhnutá v práci (Cheng, 2007). Heuristická metóda tvorby nových liniek založená na "pažravom princípe", je navrhnutá v práci (Majer, 2010). Tu sa vytvárajú linky na základe

čo najväčšieho dopytu cestujúcich. Výhodou tohoto prístupu je, že umožňuje nielen kontrolovať ďalšie obmedzujúce podmienky na linku napr. na pohodlie cestujúcich pomocou previsu dopytu nad ponukou ale i vytvárať viaceré alternatívne linky. Taktó môže vzniknúť široká množina alternatívnych liniek, z ktorej potrebujeme vybrať čo najefektívnejšiu podmnožinu liniek. Ďalším praktickým problémom, ktorý treba pri linkotvorbe vyriešiť je OD-matica. Počty cestujúcich jazdiacich v dobe úplného prieskumu medzi dvojicami zastávok máme ale takýto prieskum je finančne veľmi náročný (Palúch a kol., 2015). Inou možnosťou je využiť elektronické údaje z nákupu cestovných lístkov. V prípade MHD však dostane len informácie o počte nástupov cestujúcich na zastávkach. Táto problematika bola riešená v práci (Majer a kol., 2013) kde je navrhnutý gravitačný model, ktorý kladie tým väčší dopravný odpor čím sú vzdialenosti medzi zastávkami menšie no počty cestujúcich v reláciách sú úmerné súčinu počtov nastupujúcich cestujúcich na príslušných zastávkach. Metóda PRIVOL (PRiradenie VOzidiel Linkám), (Černý, 1983) bola vyvinutá v 80-tych rokoch a ako vidieť aj z novších publikácií bola vo viacerých verziách úspešne použitá pri linkotvorbe autobusov (Černý a kol., 1983, 2014), (Černá a kol., 2010), (Daněk a kol., 2010), (Palúch a kol., 2007), (Příbyl, 2009). Za Slovensko menujeme aspoň štúdie pre MHD Piešťany (2002), MHD Košice (2004), MHD Trenčín (2005), MHD Považská Bystrica (2005), MHD Martin (2006). Najnovšia práca (Majer a kol., 2018) umožňuje modelovať správanie cestujúcich pomocou distribúcie k-najkratších ciest a práca (Peško a kol., 2018) volí MILP model, v ktorom sú implicitne zahrnutá jazdy cestujúcich s cieľom minimalizovať dobu jazy a prestojov cestujúcich. Tieto prístupy však boli overované len na náhodne generovaných inštanciách a nie reálnych dátach.

V tomto príspevku riešime robustný model pre dva typy vozidiel, kde cestujúci si navyše volia jazdu po najkratšej trase (optimistický scenár) alebo druhej najkratšej jazde (pesimistický scenár) no v neznámom pomere. Ponúkame riešenie modelu MILP formulovaného ako rozšírený model PRIVOL s dvoma OD maticami, ktoré zodpovedajú uvažovaným scenárom generovania dopytu cestujúcich.

2 MODEL PRIVOL PRE DVA TYPY VOZIDEL

V dopravnej sieti modelovanej digrafom $D = (V, A)$ jazdia na linkách L dva typy vozidiel v počte najviac n_1, n_2 a s kapacitou (malé, veľké) C_1, C_2 ($C_1 \leq C_2$) cestujúcich. Pre každú linku $l \in L$ je daná doba obehu t_l [hod.]. V sledovanom období T hodín je na hranách $(u, v) \in A$ digrafu D daný dopyt - početnosti cestujúcich $f_{u,v}$. Nech $L_k(u, v)$ udáva množinu liniek, k -tého typu, ktoré obsahujú hranu (u, v) . Na linkách L_1 resp. L_2 môžu jazdiť len malé resp. len veľké trolejbusy ale na linkách z L_1 môžu jazdiť oba typy vozidiel. Požaduje sa, aby riešenie obsahovalo najviac m liniek.

Nech pomocná 01-premenná z_l udáva, či linka $l \in L$, $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ bude vybraná. Hľadajú sa také prípustné počty vozidiel x_{l1} pre vybrané linky $l \in L_1 \cup L_3$ jazdené typom 1 a x_{l2} pre vybrané linky $l \in L_2 \cup L_3$ jazdené typom 2 aby bol previs ponuky nad dopytom (počet voľných miest) y maximálny. Ak by $y < 1$ resp. $y > 1$ potom existuje nejaká hrana dopravnej siete na ktorej dopyt nie je pokrytý resp. je pokrytý a navyše $(1-y)\%$ je voľných miest.

Dostávame nasledujúcu úlohu zmiešaného lineárneho programovania (PRI2VOL):

$$y \rightarrow \text{maximum} \quad (1)$$

$$\sum_{l \in L_1(u,v) \cup L_3(u,v)} \frac{C_1}{t_l} x_{l1} + \sum_{l \in L_2(u,v) \cup L_3(u,v)} \frac{C_2}{t_l} x_{l2} \geq \frac{f_{uv}}{T} y \quad u, v) \in A \quad (2)$$

$$\sum_{l \in L_k \cup L_3} x_{lk} \leq n_k \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$x_{lk} \leq n_k z_l \quad \forall k \in K \quad \forall l \in L_k \cup L_3 \quad (4)$$

$$\sum_{l \in L} z_l \leq m \quad (5)$$

$$x_{lk} \in Z_0^+ \quad \forall k \in K \quad \forall l \in L_k \cup L_3 \quad (6)$$

$$z_l \in \{0,1\} \quad \forall l \in L \quad (7)$$

$$y \geq 0 \quad (8)$$

Cieľová funkcia (1) maximalizuje previs ponuky nad dopytom. Obmedzujúca podmienka (2) definuje previs na hrane siete. Podmienka (3) zaručí prípustný počet vozidiel. Podmienka (4) umožní priradenie vozidiel len pre vybrané linky navyše umožňuje i súčasné jazdy oboch typov vozidiel na linke. Prípustný počet vybraných liniek zabezpečí podmienka (5) Podmienky (6), (7) a (8) sú obligatórne.

3 ROBUSTNÝ MODEL RPRI2VOL

Nech sú splnené dané požiadavky na prípustný výber liniek ako v modeli PRI2VOL. Navyše budeme požadovať aby výber liniek vyhovoval obom OD maticiam t.j. v sledovanom období T hodín je na hranách $(u, v) \in A$ digrafu D daný dopyt cestujúcich f_{uv}^s , $s \in K$. Pre $s = 1$ sa hľadá ako kumulácia počtu cestujúcich po časovo najkratšej ceste v sieti a pre $s = 2$ ako kumulácia počtu cestujúcich po druhej časovo najkratšej ceste v sieti. Vopred ale nevieme s istotou zistiť, či bude $f_{uv}^1 \leq f_{uv}^2$ alebo $f_{uv}^1 > f_{uv}^2$, no naše experimenty ukazujú na častejší výskyt prvej nerovnosti.

Definujme dolnú y_{min} a hornú y_{max} hranicu previsu. Vyššie uvedené úvahy o hodnote premennej y v modeli PRI2OL platia aj pre robustný model. Realizovateľnosť výberu liniek, keď všetky požiadavky cestujúcich budú pokryté niektorou linkou však môžeme zabezpečiť podmienkou $y_{min} \geq 1$. Naším cieľom síce je spokojnosť cestujúcich vyjadrená previsom ale primoc veľký previs znamená aj jazdy poloprázdnych vozidiel.

Teraz už môžeme formulovať nasledujúcu úlohu zmiešaného lineárneho programovania (RPRI2VOL):

$$y_{max} + y_{min} \rightarrow \text{maximum} \quad (9)$$

$$\sum_{l \in L_1(u,v) \cup L_3(u,v)} \frac{C_1}{t_l} x_{l1} + \sum_{l \in L_2(u,v) \cup L_3(u,v)} \frac{C_2}{t_l} x_{l2} \geq \frac{f_{uv}^1}{T} y_{max} \quad \forall (u, v) \in A \quad (10)$$

$$\sum_{l \in L_1(u,v) \cup L_3(u,v)} \frac{C_1}{t_l} x_{l1} + \sum_{l \in L_2(u,v) \cup L_3(u,v)} \frac{C_2}{t_l} x_{l2} \geq \frac{f_{uv}^2}{T} y_{min} \quad \forall (u, v) \in A \quad (11)$$

$$1 \leq y_{min} \leq y_{max} \quad (12)$$

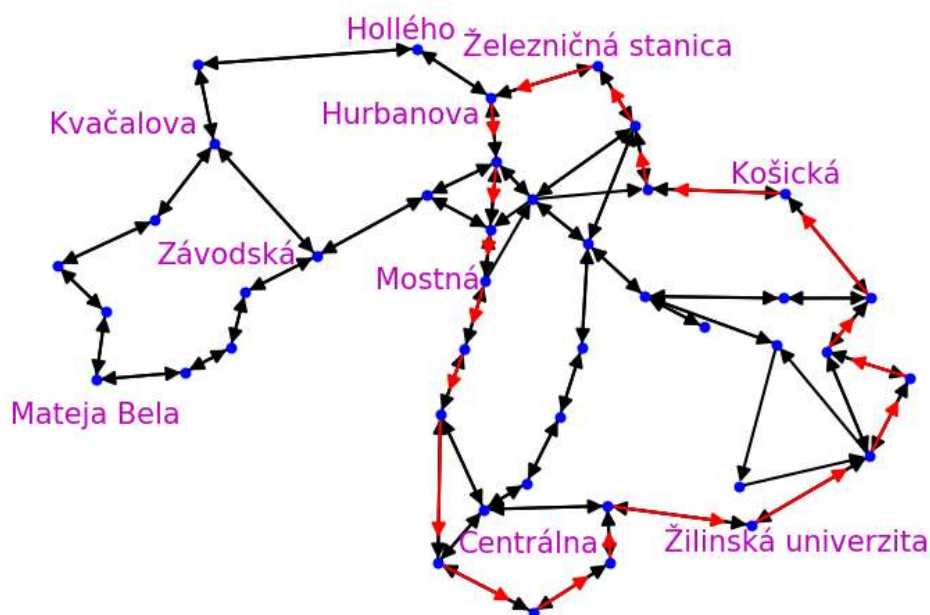
$$x_{l1}, x_{l2}, z_l \text{ ako} \quad (3)-(7)$$

Cieľová funkcia (9) udáva súčet previsu y_{max} pre cestujúcich požadujúcich najkratšiu cestu a previsu y_{min} pre cestujúcich akceptujúcich aj druhú najkratšiu cestu. Súčet sa maximalizuje a tak spôsobuje nepriamo rovnomernejšie previsy na hranách siete. Obmedzenia (10) - (11) je definíciou previsov. Nerovnosti (12) zabezpečia uspokojenie dopytu oboch typov cestujúcich, pričom očakávame, že previs pre prvý typ cestujúci je väčší, než previs pre druhý typ cestujúcich. Ostatné premenné a obmedzenia sú zhodné s modelom PRI2VOL.

4 POČÍTAČOVÝ EXPERIMENT

Model RPRI2VOL sme verifikovali na údajoch o nástupe a výstupe cestujúcich v čase rannej dopravnjej špičky v trolejbusovej dopravnej sieti MHD Žilina.

Experiment sme robili na HP XW600 Workstation (8-core Xenon 3GHz, Ram 16GB) pod operačným systémom Linux (Debian jessie). Použili sme rozhranie Pythonu pre komerčný riešič Gurobi (Gurobi, 2018) pre úlohy zmiešaného lineárneho programovania a knižnicu NetworkX (Aric a kol., 2008) pre prácu s grafovými štruktúrami a algoritmami.



Obr.1 Dopravná sieť MHD Žilina pre trolejbusy

Na obrázku obr.1 máme zobrazenú schematickú mapu dopravnej siete MHD Žilina, ktorá má 42 trolejbusových zastávok a 103 orientovaných hrán medzi susednými zastávkami, ktorú modelujeme ako časovo ohodnotený digraf G . Dopyt 6 635 cestujúcich mal 756 relácií (nenulové dvojice v OD matici). MHD má $n_1 = 12$ malých trolejbusov s kapacitou $C_1 = 62$ cestujúcich a $n_2 = 18$ veľkých kĺbových trolejbusov s kapacitou $C_2 = 62$ cestujúcich. Očakávalo sa, že počet vybraných liniek z 21 navrhnutých neprekročí 12.

Širšia množina liniek $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ bola navrhnutá doplnením súčasných "Lxx" liniek o nové "Xxx": $L_1=\{L1,L5\}$, $L_2=\{L3,L4,L7,L14,L16,X4,X14,X3a,X16,X20,X30,X7,X13a\}$, $L_3=\{L6,L6b,X6a,X6b,X6c,X6d\}$. Obrázok obr.1 obsahuje aj vedenie okružnej linky L4 – je vyznačená červenými šípkami. Poznamenajme, že vo vytvorenom programe je možnosť vizualizovať každú z liniek a aj týmto spôsobom verifikovať vstupné dáta.

Malé trolejbusy				Kľbové trolejbusy								
L1	L5	L6b	X6c	L3	L4	L14	L16	X4	X13	X30	X7	X6c
5	5	1	1	2	2	2	1	1	2	1	4	3

Tab.1 Vybrané linky a počty trolejbusov s prevismi $y_{min} = 1.18$ a $y_{max} = 1.93$

V tabuľke tab.1 vidíme, že 12 malých trolejbusov obsluhuje 4 linky a 18 kľbových trolejbusov obsluhuje 9 liniek. Linka X6c je obsluhovaná jedným malým tromi kľbovými trolejbusmi, čo model pripúšťa ale takéto riešenie by nemuselo byť akceptované hoci je technologicky realizovateľné. Stačí však doplniť model podmienkou ktorá vyberie práve jednu nenulovú hodnotu

MODEL.addSOS(GRB.SOS_TYPE1, [x["X6c",1],x["X6c",2]])

v Gurobi notácii (v rozhraní Pythonu) a dostávame riešenie v tabuľke tab.2.

Malé trolejbusy				Kľbové trolejbusy								
L1	L5	L6b	-	L4	L14	L16	X4	X3a	X13a	X30	X7	X6c
5	6	1	-	2	2	1	1	2	2	1	4	3

Tab.2 Vybrané linky s SOS1 podmienkou s prevismi $y_{min} = 1.18$ a $y_{max} = 1.80$

Počty malých a kľbových trolejbusov zostali zachované, no malé trolejbusy obsluhujú len tri linky. Na linke L5 sa vzrástol počet malých trolejbusov o jedno vozidlo. Linky L3 a X13 sú nahradené linkami X3a a X13a. Dodatočná SOS podmienka viedla k poklesu previsu v scenári 1 t.j. spôsobenú optimistickými cestujúcimi. Poznamenávame, že doba výpočtu riešičom ani v jednom prípade neprevýšila 10 sekúnd. Do jednej minúty boli vykonané všetky vstupno-výstupné operácie v rozhraní Pythonu.

ZÁVER

V príspevku je navrhnutá modifikácia overenej metódy PRIVOL pre hľadanie robustného riešenia linkotvorby v MHD. Uvažuje sa s dvoma typmi vozidiel a dvoma spôsobmi správania sa cestujúcich, ktoré vyvolávajú neistý dopyt cestujúcich na úsekoch dopravnej siete. Prezentovaný model možno prirodzeným spôsobom zovšeobecniť pre vozový park s viacerými typmi vozidiel. Ďalší rozvoj metódy vidíme v doplnení špecifickými obmedzujúcimi podmienkami nielen na výber liniek ale aj na koordináciu pri súbehu liniek v rámci integrovaného dopravného systému mesta.

Príspevok bol podporovaný grantovými úlohami APVVV-14-0658 *Optimalizácia mestskej a regionálnej verejnej dopravy* a VEGA 1/0582/16 *Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach*.

Použitá literatúra

1. Aric A. Hagberg, Daniel A. Schult and Pieter J. Swart, (2008). Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX, in *Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008)*, Gäel Varoquaux, Travis Vaught, and Jarrod Millman (Eds), (Pasadena, CA USA), Aug 2008, 11–15
2. Borndörfer, R., Grötschel, M. and Pfetsch, M.E. (2007): A column generation approach to line planning in public transport. *Transp. Sci.* 41, 123–132.
3. Černý, J. (1983). Poznámka k jednotným intervalom v systémoch MHD. *Zborník prác výskumného ústavu dopravného No. 39*, Žilina, Slovakia, 157-175.
4. Černý, J. and Černá, A. (1992). Linear optimization of urban bus routes and frequencies. *Czechoslovak Journal for Operations Research 1*, 207-217.
5. Černý, J. and Černá, A. (2013). Erlander Principle in Managerial Decision Making on Czech and Slovak Urban Transport Routes. *E&M Economics and Management 16*, 93-100.
6. Černá, A., Černý, J. and Peško Š. (2014). Modification of the method PRIVOL for optimal routing and frequencing. In: *Mathematical methods in economics 32nd international conference (MME 2014)*, Olomouc, Czech Republic, September 10-12 conference proceedings Olomouc Palacký university, 89-94.
7. Daněk, J., Plevný, M. and Teichmann D. (2010). The Rational Operation of the Urban Transport Line Network by Minimisation of the Needed Vehicles. *Ekonomie a management 13(2)*, 53-61.
8. Gurobi Optimization, LLC (2018). Gurobi Optimizer Reference Manual, Retrieved May 15, 2018, from <http://www.gurobi.com>
9. Cheng H. (2007), Stochastic Optimization in Computing Multiple Headways for a Single Bus Line. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, Vol. 24*, No. 5, 351-359.
10. Majer, T. (2010). Pažravá metóda na návrh liniek MHD. In: *Dopravná infraštruktúra v mestách, 7. medzinárodná konferencia*, Žilina, 20.-21.10.2010, zborník Žilinská univerzita, 15-21.
11. Majer, T. and Dzurek, I. (2013). Estimation of origin-destination matrix in urban public transport make using of gravity, *Transport problems*, V. international scientific conference, 26-28 June 2013, conference proceedings. Katowice: Silesian University of Technology, Faculty of Transport, 294-299.
12. Majer, T., Palúch, S. and Peško, Š. (2017). Model of Passengers to Line Assignment in Public Municipal Transport, *35th International Conference Mathematical Methods in Economics (MME 2017)*, Hradec Kralove, Czech Republic, September 13-15, 420-423.
13. Palúch, S. and Majer, T. (2007). K optimalizácii mestskej a prímestskej pravidelnej osobnej dopravy, In: *Vysoká škola jako facilitátor rozvoje spoločnosti a regionu, III. mezinárodní konference 2007*, 26. Ledna, Kunovice, Česká Republika, sborník, Kunovice, Evropský polytechnický institut, 245-248.
14. Palúch, S. and Majer, T. (2015). Súčasná možnosti zisťovania prúdov a požiadaviek cestujúcich, In: *AIESA - Budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach*, 16. medzinárodná vedecká konferencia, 5.-6. November 2015, Bratislava, zborník, EKONÓM, 681-686.
15. Peško, S. and Majer, T. (2018). Line Planning with Minimal Travel and Transit Times, *19th International Carpathian Control Conference (ICCC 2018)*, Szilvasvarad, Hungary, May 28-31, IEEE, Univ Miskolc, 191-195.
16. Příbyl, V. (2009). Solution of the bus route design problem. *Communications 11*, 25-28.

Kontaktné údaje

Doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (421 2) 67 295 824

email: stefan.pesko@fri.uniza.sk

RIEŠITEĽ LOCALSOLVER: POPIS A NOVÉ ROZHRAINIE

LOCALSOLVER: INTRODUCTION AND A NEW INTERFACE

Michal Pieter

Abstrakt

LocalSolver je riešiteľ pre úlohy matematického programovania, ktorý je v porovnaní s ostatnými menej známy. Jedným z dôvodov môže byť aj chýbajúca implementácia v populárnych nástrojoch MP či neexistujúce dedikované grafické rozhranie. Práve preto bola vytvorená nová aplikácia LISE, ktorá umožňuje využívať LocalSolver prostredníctvom oficiálneho modelovacieho jazyka, a to navyše spôsobom, ktorý je jednoduchý a intuitívny, a je tak vhodný aj pre použitie študentmi a v procese vzdelávania. Súčasťou práce je aj popis riešiteľa a jeho porovnanie s konkurenciou.

***Kľúčové slová:** LocalSolver, riešiteľ, grafické rozhranie, GUI*

Abstract

LocalSolver is a mathematical programming problem solver that is less known when compared to others on the market. One of the reasons may be a lack of implementation in popular MP tools or non-existent dedicated graphical user interface. That is why a new application, LISE, was created that allows one to utilize LocalSolver using its proprietary modelling language and in a way that is simple and intuitive, especially suitable for students and for other educational purposes. Included as well is an introduction to LocalSolver itself, its syntax and comparison with competition.

***Keywords:** LocalSolver, solver, graphical interface, GUI*

1 LOCALSOLVER

Záujemca na poli matematického programovania má k dispozícii na trhu pomerne širokú škálu programových prostriedkov na riešenie všetkých druhov úloh. Komponent v každom z týchto softvérov, ktorý má na starosti výpočet samotný a riešenie úlohy, sa nazýva riešiteľ (solver) a väčšinou je v danom softvéri inkorporovaný vo forme tzv. knižnice, pričom nie je výnimkou, že jedna aplikácia umožňuje voľbu medzi viacerými riešiteľmi. Medzi najznámejších riešiteľov patrí napríklad CPLEX, Gurobi, či XPRESS. V roku 2007 k ním pribudol nový, dodnes menej známy riešiteľ LocalSolver, vyvinutý vo firme Bouygues, v spolupráci s viacerými francúzskymi vedeckými inštitúciami. LocalSolver je svojimi tvorcami prezentovaný ako rýchly riešiteľ, schopný poradiť si s obrovským počtom premenných. Ako výhodu ďalej uvádzajú podporu komplikovaných funkcií prostredníctvom vlastného modelovacieho jazyka a tiež širokú škálu rozhraní, pomocou ktorých je možné LocalSolver využívať pri riešení konkrétnych problémov.

1.1 Licencovanie

LocalSolver je dostupný pre operačné systémy Windows, MacOS a Linux, a to v 64-bitovej aj 32-bitovej verzii. Na vyskúšanie po dobu 30 dní je voľne dostupný z oficiálnych stránok a to

s plnou funkcionalitou, bez nutnosti registrácie či vybavovania žiadostí. Pre individuálne akademické potreby je možné takýto typ voľnej licencie neobmedzene predlžovať po registrácii na oficiálnej stránke, vždy na ďalších 30 dní. Čo sa týka obecných licencií, je najprv nutné určiť, v akom rozsahu a akým spôsobom má byť LocalSolver využívaný. Existujú dve základné formy, od ktorých sa odvíja aj licencovanie. Nainštalovaný je buď na konkrétnom počítači, ktorý ho aj využíva, alebo sa nachádza na samostatnom serveri, na ktorý sa potom podľa potreby dopytujú vzdialení klienti. V tom druhom prípade je tak povolené naraz riešiť viacero úloh. Existuje tiež možnosť mať LocalSolver nainštalovaný na viacerých počítačoch so zdieľanou licenciou, pričom počet súčasne riešených úloh sa sčítava a je obmedzený podľa typu licencie. Možné kombinácie spolu s konkrétnymi licenciami sú uvedené v tab. 1.1. Pre potreby univerzity alebo inej väčšej vzdelávacej inštitúcie je vhodná licencia Site. Ceny za licencie nie je možné na žiadosť tímu LocalSolver v tejto práci zverejniť, záujemci ich však môžu obratom získať kontaktovaním prostredníctvom formulára na oficiálnej stránke, alebo cez email na contact@localsolver.com. V porovnaní s ostatnými populárnymi riešiteľmi sú však ceny rádovo násobne nižšie.

		Počet počítačov	
		1	neobmedzený
Počet súčasne riešených úloh	1	Desktop	Floating
	neobmedzený	Server	Site

Tab. 1.1 – Dostupné LocalSolver licencie

1.2 Základná syntax

LocalSolver je primárne navrhnutý na integráciu v ostatných aplikáciách prostredníctvom tzv. rozhrania API (Application Programming Interface). Napriek tomu umožňuje aj riešenie úloh definovaných v textovej podobe, pričom využíva vlastný modelovací jazyk LSP (LocalSolver Programming Language). LSP na rozdiel od väčšiny modelovacích jazykov pre matematické programovanie v mnohom pripomína bežné programovacie jazyky, najmä C++, C# či Java. Každý LSP model sa skladá z jednej či viacerých funkcií, definovaných formou `function mojaFunkcia(možnéParametre) { kód }`, pričom funkcia môže byť vlastná, alebo jedna z vyhradených, ktoré LocalSolver potrebuje pre definíciu úlohy. Medzi nich patrí najmä povinne použitá funkcia `model()`, kde sú definované obmedzujúce podmienky a účelová funkcia. Ďalej môžu byť použité funkcie `input()` a `output()` slúžiace na nastavenie či načítanie dát modelu, respektíve export riešenia, či funkcia `param()` kde sa dajú nastaviť možnosti riešiteľa, napr. obmedzenie času výpočtu či počtu iterácií. Vlastné funkcie pritom môžu vrátiť nejakú hodnotu (prostredníctvom príkazu `return hodnota;`), takže je ich možné využívať aj v ostatných funkciách za účelom zjednodušenia modelu.

Premenné sú definované vo funkcii `model()`, jednoducho ako `x`;, prípadne `x = 7`;, kde 7 je príklad východiskovej číselnej hodnoty. Binárne, resp. celočíselné premenné sú definované pomocou funkcií `x <- bool()`;, resp. `x <- int(0, 7)`;, pričom pre celočíselné premenné je vždy nutné definovať spodné a horné medze. Polia sa definujú ako `x[0..7]`;, pričom môžu byť aj viacrozmerné. Vo všetkých uvedených prípadoch je možné namiesto pevných hodnôt využiť aj vlastné konštanty, napríklad `n = 7`; `x[0..n]`;. Štruktúrne a cenové koeficienty a pravé strany je možné dať do modelu napevno, alebo ich načítať vo funkcii `input()` napríklad zo súboru ako

`koef[i..n] = mójSúbor.readInt();`, kde súbor je definovaný ako `local mójSúbor = io.OpenRead(cesta);`. Súbor je textový a jednotlivé hodnoty sú oddelené medzerami, funkcie `readInt()`, resp. `readDouble()` či `readString()` vždy automaticky prečítajú nasledujúcu hodnotu.

Vo funkcii `model()` sa definuje samotný matematický model, pričom obmedzujúce podmienky sú definované kľúčovým slovom `constraint` a používajú štandardnú syntax pre základné matematické operátory. Jednoduchá podmienka tak vyzerá napríklad ako `constraint 7*x1 + 10*x2 <= 240;`. Účelová funkcia je definovaná podobne, výrazmi `minimize`, resp. `maximize`. Samozrejme je možné využiť v podmienkach aj účelovej funkcii agregátne funkcie, a to vo forme napríklad `constraint sum[i in 0..n] (a[i]*x[i]) <= 240;`. Iterácia funguje podobne, vtedy sa celá podmienka vloží do funkcie ako `for[i in 0..n] = { podmienka }`.

Ako už je asi zrejmé, všetky príkazy musia byť ukončené znakom bodkočiarky `;`, podobne ako v Lingu či MPL. Komentáre je možné definovať pridaním dvojice lomiek `//` na začiatok riadku (nie je nutné ukončiť bodkočiarkou), prípadne viacriadkový komentár pridaním `/*` na začiatok a `*/` na koniec zvoleného textu. Čísla sa zadávajú v americkom formáte a bez oddeľovačov tisícov. Dôležité je ešte spomenúť, že keď LocalSolver dokončí výpočet, okrem hodnoty účelovej funkcie nezobrazí získané riešenie. Na to slúži práve funkcia `output()`, kde je možné všetky potrebné hodnoty vypísať pomocou funkcie `print` (resp. `println` pre samostatný riadok), napríklad ako `for[i in 0..n] { print(x[i].value + " "); }`.

Všetky spomínané pravidlá samozrejme popisujú len základnú syntax nevyhnutne potrebnú pre zápis jednoduchých modelov. Pokročilá syntax, nutná pre zápis komplikovanejších modelov je príliš rozsiahla na to, aby tu bola uvedená, záujemca však môže nájsť kompletnú dokumentáciu pre LSP na adrese <https://www.localsolver.com/documentation/lspreference/index.html>.

1.3 Rozhrania

LocalSolver je možné využívať pomocou viacerých rozhraní, pričom primárne je určený na využívanie iným softvérom prostredníctvom tzv. rozhrania API (Application Programming Interface). To spočíva v tom, že daná aplikácia odkazuje na LocalSolver knižnicu a pomocou pevne presne daných funkcií s ňou komunikuje. V tomto režime bohužiaľ nie je v súčasnosti možné jednoducho poslať LSP model a nechať ho vyriešiť. Aplikácia musí najprv definovať celý model programaticky prostredníctvom presne definovaných objektov a funkcií. To umožňuje vynikajúcu flexibilitu pri riešení konkrétnych problémov, pre ktoré bola daná aplikácia vyvinutá, ale znemožňuje rozumným spôsobom vytvoriť nové grafické rozhranie pomocou API.

LocalSolver je možné tiež spustiť ako bežnú aplikáciu v príkazovom riadku, resp. konzole. Pre to je však nutné najprv požadovaný LSP model uložiť na disk ako textový súbor a spustiť príkaz `localsolver "cesta k súboru"`. Následne je spustený výpočet, ktorého priebeh a výsledok je zobrazovaný v okne príkazového riadku. Prebiehajúci výpočet je možné zastaviť klávesmi `ctrl+C`. Tento spôsob využitia dokáže spracovať ľubovoľný model vo formáte LSP, predtým vytvorený v bežnom textovom editore, preto je vhodný pre riešenie obecných problémov ľuďmi, ktorí programovať nevedia alebo dokážu rýchlejšie zostaviť LSP model než naprogramovať aplikáciu využívajúcu API. LocalSolver totiž nemá vlastné grafické rozhranie a preto jeho využitie nemusí byť pre ľudí s menšou znalosťou počítačov, napríklad študentov, úplne jednoduché. Aj preto bolo ako súčasť tejto práce vytvorené nové grafické rozhranie, predstavené v ďalšej kapitole.

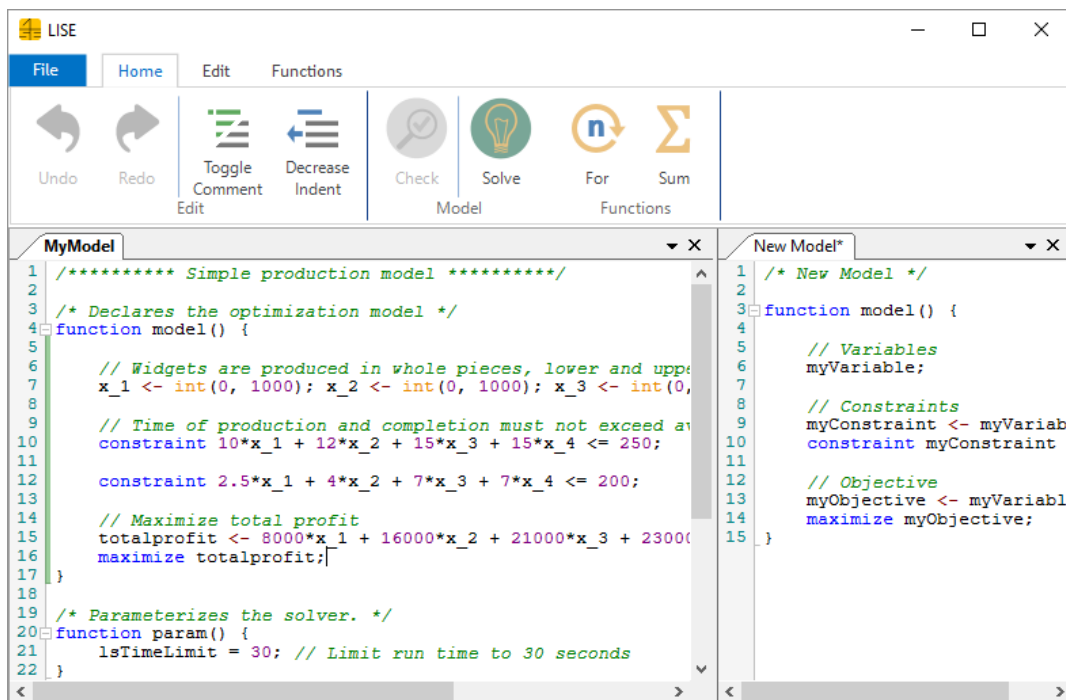
2 ROZHRIANIE LISE

Ako už bolo spomenuté, pre LocalSolver neexistuje žiadne natívne grafické rozhranie. Napriek tomu, že spustenie cez príkazový riadok je jednoduchá operácia, pre mnohých, ktorí používajú počítač len na bežnú prácu sa aj toto môže zdať ako zbytočne komplikované. Grafické rozhranie je tak nielen jednoduchšie a komfortnejšie na používanie, ale umožňuje aj využitie doplnkových funkcií, ako je napríklad editor špecificky určený pre modely LSP. Práve takéto nové grafické rozhranie predstavuje aplikácia **LISE** (LocalSolver Integrated Environment).

2.1 Inštalácia

V súčasnej dobe je aplikácia LISE k dispozícii na vyžiadanie u autora (viď kontaktné údaje nižšie). Pre akademické potreby bude obratom zaslaný skomprimovaný súbor ZIP, ktorý pre nainštalovanie stačí jednoducho rozbaľiť a všetky súbory skopírovať do ľubovoľnej zložky. Aplikácia vyžaduje na spustenie platformu .NET Framework 4.5.2, ktorá sa nachádza na všetkých operačných systémoch Windows 10, pričom na predchádzajúce verzie je ju možné nainštalovať z oficiálnych stránok spoločnosti Microsoft. LISE sa spúšťa spustením programu LISE.exe. Na spustenie a písanie modelu nie je nutné mať nainštalovaný LocalSolver, na vyriešenie úlohy však už áno, a to s platnou licenciou, v opačnom prípade ohlásí LISE chybu. LISE je zadarmo pre akademické použitie, pre iné použitie, ako aj pre šírenie aplikácie tretím stranám je nutné kontaktovať autora pre získanie individuálnej ponuky. Presné znenie podmienok je možné nájsť v dokumente EULA.

2.2 Rozhranie a funkcie



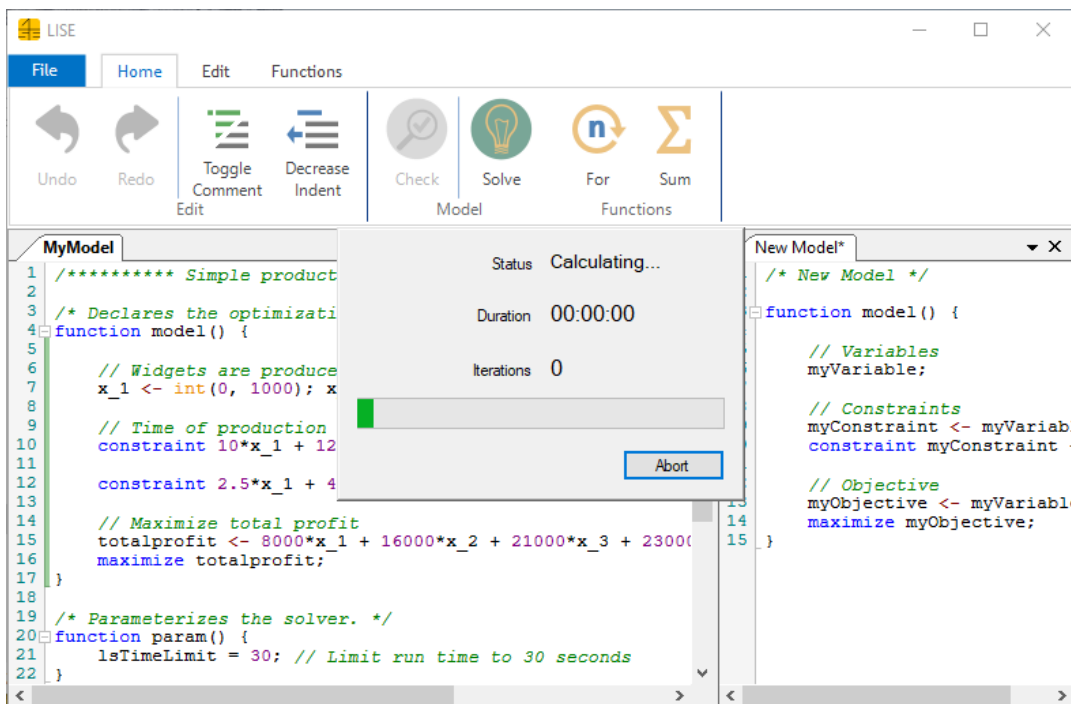
Obr. 2.1 – Dve vedľa seba zobrazené okná modelov, záložka Home s najbežnejšou funkcionalitou

Aplikácia LISE sa vizuálne delí na dve časti. V hornej sa nachádza ovládacia lišta s tlačidlami roztriedenými podľa kategórií a v spodnej sa nachádza priestor pre okná jednotlivých modelov či výsledkov, pričom po spustení sa vždy otvorí nové okno s prednastaveným modelom. O aký model sa jedná je možné zvoliť v nastaveniach. Okná je možné v tomto priestore ľubovoľne

preskupovať potiahnutím za názov okna. Okno modelu slúži ako textový editor pre modely LSP, pričom umožňuje zvýrazňovanie častí modelu podľa ich typu, čo uľahčuje orientáciu v modeli. Zvýrazňovanie sa dá vypnúť v nastaveniach, kde je tiež možné prepínať zobrazovanie čísiel riadkov, čo je užitočné najmä pri identifikácii syntaktických chýb. V ďalšej verzii je plánovaná tiež automatická predikcia písaných príkazov, tzv. IntelliSense, ktorá pri napísaní pár začiatkových znakov ponúkne používateľovi zoznam vhodných príkazov, funkcií a podobne.

Lišta s tlačidlami je roztriedená v súčasnej verzii podľa kategórií do troch záložiek, pričom na prvej záložke **Home** sa okrem najbežnejších funkcií z ostatných záložiek nachádza aj najdôležitejšie tlačidlo – **Solve** – ktorým sa spustí výpočet modelu pomocou LocalSolveru. Vedľa neho sa nachádza tlačidlo na kontrolu správnosti syntaxe, táto funkcionálnosť však v súčasnej verzii nie je podporovaná. Na záložke **Edit** sa nachádzajú tlačidlá pre zakomentovanie a odkomentovanie zvolených riadkov (**Comment/Uncomment**) aj pre zmenu ich odsadenia (**Decrease/Increase Indent**). Vo väčších modeloch sa zide možnosť skryť všetky funkcie do ich definícií (**Collapse**). Samozrejmosťou je možnosť vrátiť späť zmeny v modeli či ich znovu obnoviť (**Undo/Redo**). História zmien je pritom úplná, v názve modelu je navyše indikované znakom hviezdiky, či je model upravený oproti stavu, v ktorom bol naposledy uložený. Na záložke **Functions** sa nachádzajú tlačidlá pre zjednodušené vkladanie niektorých bežných funkcií jazyka LSP. Napríklad tlačidlo **Sum** vloží na miesto kurzoru definíciu funkcie súčtu ako `sum[in in collection]()` a automaticky vyznačí výraz `collection`, takže používateľ ho môže rovno nahradiť požadovanou hodnotou. Ostatné funkcie fungujú obdobne. V prípade, že je pri stlačení vyznačený kus textu, je tento automaticky vložený do tela funkcie. Nakoniec v ľavom hornom rohu okna sa nachádza štandardné tlačidlo File, kde je možnosť uložiť či otvoriť model, vytvoriť model nový, upraviť nastavenia, zobrazíť informácie o aplikácii či ju zavrieť. Pred zatvorením aplikácie, prípadne okna konkrétneho modelu, je používateľ vždy upozornený na prípadné neuložené zmeny.

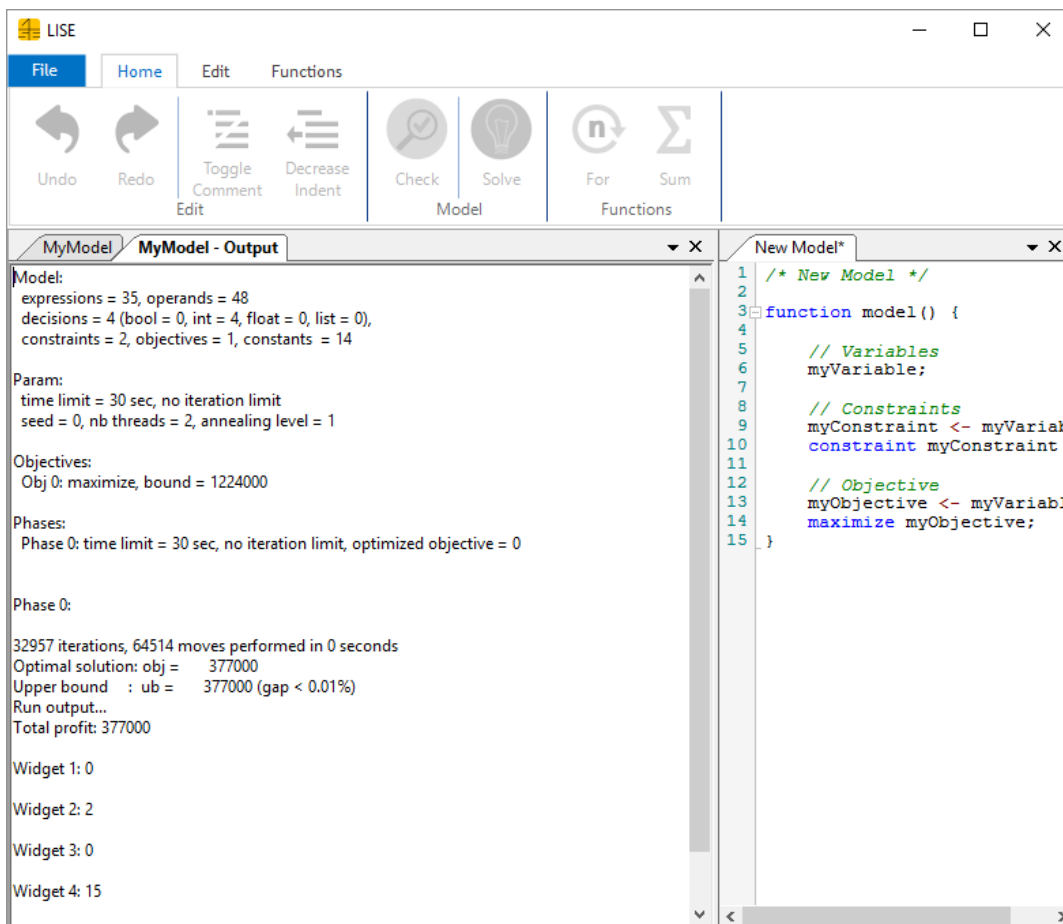
2.3 Výpočet a výsledky



Obr. 2.2 – Dialógové okno prebiehajúce výpočtu, kde je možné príliš dlhý výpočet zrušiť

Ako už bolo uvedené v kapitole 1.3, LocalSolver nedovoľuje poslať model vo formáte LSP na riešenie prostredníctvom API. Aby bolo možné zadaný model nechať vyriešiť priamo z aplikácie LISE teda existovali dve možnosti. Jednou z nich by bolo prečítať model a priamo v LISE na základe neho vytvoriť zodpovedajúcu štruktúru úlohy prostredníctvom objektov LocalSolver API. To by však bolo nesmierne komplikované, aspoň bez reštrikcie bohatej syntax jazyku LSP. Bola preto zvolená druhá možnosť, kedy sa LocalSolver zavolá prostredníctvom príkazového riadku, avšak programaticky a bez vedomia používateľa. Výstup z konzoly je presmerovaný naspäť do LISE, kde je tak možné sledovať priebeh a prečítať výsledky riešenia.

Výpočet sa spúšťa kliknutím na tlačidlo Solve na záložke Home. Keďže LocalSolver potrebuje odkaz na súbor na disku, model musí byť pred výpočtom vždy uložený. Následne aplikácia skontroluje, či je na počítači nainštalovaný LocalSolver, a ak nie, vyhodí chybu s výzvou na jeho stiahnutie a inštaláciu. Ak však je, zavolá ho a nechá na pozadí riešiť, pričom otvorí nové dialógové okno, kde je možné sledovať priebeh výpočtu. V prípade, že používateľ chce výpočet zastaviť, môže tak urobiť stlačením tlačidla Abort. Keď je výpočet ukončený, alebo našiel LocalSolver chybu v modeli, otvorí nové okno, kde je vypísaný celý výstup. Po úspešnom výpočte obsahuje uplynutý čas, počet iterácií, ale najmä hodnotu účelovej funkcie. Ako už bolo spomenuté, hodnoty premenných, či už štruktúrnych alebo prídavných, LocalSolver sám od seba vo výstupe neuvádza, je ich nutné exportovať vo funkcii `output()`. Pravdepodobne z dôvodu, že LocalSolver je zameraný najmä na riešenie nelineárnych úloh, neuvádza ani redukované či tieňové ceny.



Obr. 2.3 – Okno s výsledkami a informáciami o priebehu výpočtu

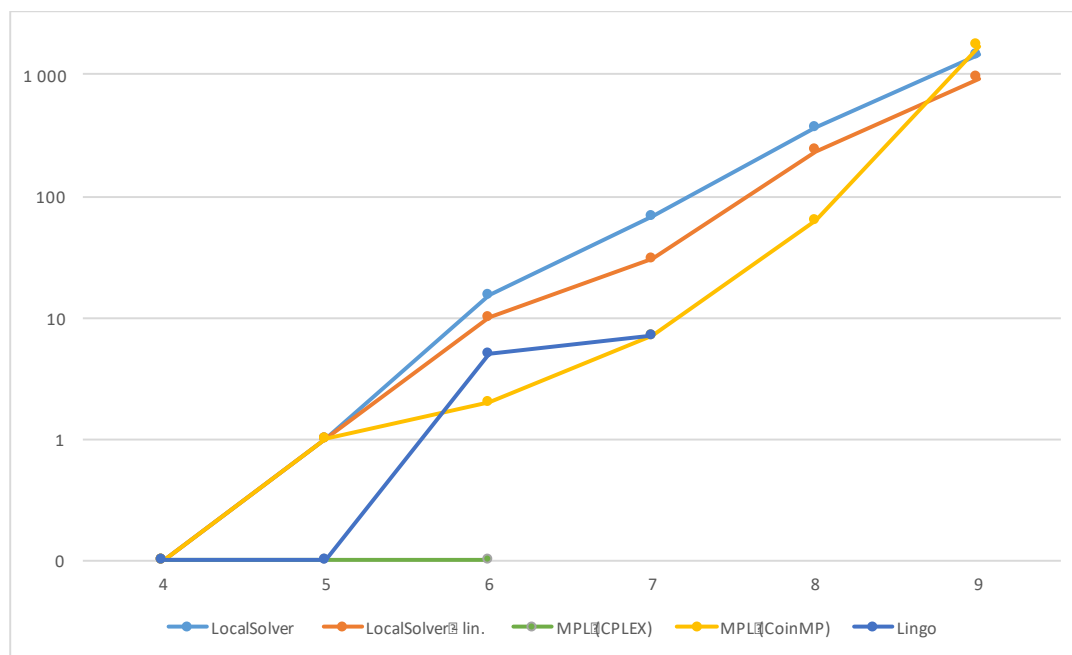
3 POROVNANIE S INÝMI RIEŠITEĽMI

Posledným z cieľov tejto práce je stručné porovnanie riešiteľa LocalSolver s inými riešiteľmi. Ako modelový príklad pre porovnanie bol zvolený kvadratický priradovací problém a to z dôvodu rýchleho nárastu výpočtovej náročnosti so zvyšujúcim sa rozmerom úlohy. Rýchlosť riešiteľov je tak možné porovnať aj pomocou relatívne malých úloh. LocalSolver bol porovnaný s viacerými riešiteľmi, menovite CPLEX, Gurobi a CoinMP v aplikácii MPL, a tiež v aplikácii Lingo. Test prebiehal na počítači Apple MacBook Pro s procesorom Intel Core i7 @ 3,10 GHz so 4 GB dostupnej pamäte pre aplikácie. Skutočný využiteľný výkon bol však mierne nižší, pretože s výnimkou Linga boli aplikácie spustené vo virtuálnom operačnom systéme Windows 10. Použité modelové úlohy majú všetky známe optimálne riešenie. Konkrétne dáta boli získané zo stránok ďalšieho riešiteľa, NEOS, a odkaz k ich získaniu je uvedený v internetových zdrojoch. Pre LocalSolver boli modely testované v nelineárnej aj linearizovanej podobe. Výsledky sú uvedené v tab. 3.1 a na obr. 3.1. Ako je vidno, nie u všetkých riešiteľov mohli byť spustené úlohy všetkých rozmerov, a to z dôvodu obmedzenej licencie. Vidno že LocalSolver je pomalší ako ostatní testovaní riešitelia, pričom však si viedol výrazne lepšie pri riešení linearizovaného modelu. Až pri najväčšom rozmere úlohy, s 9 zariadeniami a miestami, je výrazne rýchlejší ako riešiteľ CoinMP. Jedna z možných príčin je optimalizácia algoritmu pre úlohy veľkých rozmerov,

ako uvádza LocalSolver na svojej stránke. Možné je aj vidieť, že v prepočte na jednu operáciu je LocalSolver výrazne rýchlejší než CoinMP.

Rozmer	LocalSolver		LocalSolver linearizovaný		MPL (CPLEX)		MPL (CoinMP)		Lingo (branch & bounds)	
	Čas	Iterácie	Čas	Iterácie	Čas	Iterácie	Čas	Iterácie	Čas	Iterácie
4	0	120 000	0	277 450	0	225	0	2 730	0	672
5	1	238 906	1	216 987	0	459	1	2 726	0	1 205
6	15	1 687 478	10	1 560 000	0	2 462	2	11 322	5	6 640
7	67	5 406 354	30	2 886 052			7	45 314	7	6 374
8	363	18 060 416	235	15 583 715			63	627 325		
9	1 465	60 894 643	934	55 312 614			1 723	8 020 031		

Tab. 3.1 – Čas v sekundách a počet iterácií riešenia kvadratického prirad'ovacieho problému riešiteľmi
* Pre rozmer 7 zariadení a miest našlo Lingo suboptimálne riešenie



Obr. 3.1 – Časy riešenia (v sekundách, na logaritmickej škále) riešiteľmi podľa rozmeru úlohy

Pod'akovanie

Autor chce vyjadriť pod'akovanie Internej grantovej agentúre Fakulty informatiky a štatistiky Vysokej školy ekonomickej v Prahe, ktorá podporila túto prácu grantom č. IGA F4/57/2017.

Internetové zdroje

<https://www.localsolver.com/>

<https://www.localsolver.com/documentation/lspreference/index.html>

<https://neos-guide.org/content/quadratic-assignment-problem>

Kontaktné údaje

Ing. Michal Pieter

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

Tel: (+420) 224 09 5445

email: michal.pieter@vse.cz

ANALÝZA INDEXU BURZY CENNÝCH PAPIEROV PRAHA POMOCOU METODOLÓGIE SKRYTÉHO MARKOVVHO MODELU

ANALYSIS OF THE PRAGUE STOCK EXCHANGE INDEX USING HIDDEN MARKOV MODEL METHODOLOGY

Marian Reiff

Abstrakt

V príspevku aplikujeme Skrytý Markovov model na finančnom časovacom rade zatváracieho kurzu akciového indexu Burzy cenných papierov Praha, označovaného skratkou PX. Model je odhadnutý pomocou softvéru Matlab konkrétne Statistics and Machine Learning Toolbox™. Odhadnuté skryté stavy, ich historický vývoj, pravdepodobnosti prechodov, popisné štatistiky, prípadne pravdepodobnostné rozdelenia pre príslušné emisie percentuálnej zmeny kurzu podmienené skrytým stavom môžu slúžiť ako podporný nástroj pri rozhodovaní investora.

KLúčové slová: Skrytý Markovov model, Finančné časové rady, Finančné modelovanie

Abstract

In this paper we apply the Hidden Markov model on closing price time series of Prague Stock Exchange index (PX). The model parameters are estimated using the Matlab software, specifically Statistics and Machine Learning Toolbox™. Estimated hidden states, their historical values, transition probabilities, descriptive statistics, or probability distributions for the relevant percentage change of closing price conditioned by the hidden states may serve as a tool for investor decision making.

Keywords: Hidden Markov Model, Financial Time Series, Financial Modelling

1 SKRYTÝ MARKOVV MODEL

Skrytý Markovov model je matematický model, v ktorom sa dá analyzovaný systém popísať pomocou skrytej Markovovskej vlastnosti, teda stavov popísaných pomocou Markovovho reťazca, ktoré nie je možné priamo pozorovať. Parametre modelu sú neznáme a musia byť odhadnuté na základe pozorovateľných údajov. Hlavná myšlienka skrytého Markovovho modelu je, že latentné stavy systému a ďalšie neviditeľné informácie sú skryté v pozorovanom procese, ktorý je poškodený určitým šumom. V kontexte finančného modelovania môže byť pozorovateľný proces časový rad finančných dát obsahujúci skryté informácie, ktorých dynamika sa dá popísať pomocou Markovovho reťazca s konečným počtom skrytých stavov. Túto informáciu je možná extrahovať pomocou techník skrytého Markovovho modelu.

Podľa definície (MacDonald a Zucchini 1997), skrytý Markovov reťazec je stochastický proces pozostávajúci z dvoch častí, kde prvá základná časť je nepozorovateľný proces $\{x_t\}$, ktorý spĺňa Markovovskú vlastnosť $P\{x_t|x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t_0}\} = P\{x_t|x_{t-1}\}$ a druhá časť je pozorovateľný proces $\{y_t\}$ spĺňajúci $P\{y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t_0}, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t_0}\} = P\{y_t|x_t\}$, čo je

označované ako podmienené nezávislá vlastnosť. Nezávislá preto, lebo nezávisí od historických hodnôt $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_0$ a je podmienená iba x_t . Potom dvojicu stochastických procesov $\{x_t, y_t\}$ nazývame skrytý Markovov model s m stavmi. Podmienenú nezávislú vlastnosť môžeme vysvetliť nasledovne. V prípade, ak poznáme stav x_t , hodnota y_t závisí len od x_t a nie je závislá od predchádzajúcich historických stavov systému a predchádzajúcich pozorovaní premennej y (emisií), teda je podmienené nezávislá.

Možno poznamenať, že aj napriek tomu, že prechody medzi skrytými stavmi x_t splňajú Markovovskú vlastnosť, pri časovom rade pozorovaní y_t to neplatí, v časovom rade pozorovaní y_t môžeme identifikovať autokorelácie ľubovoľného stupňa, nakoľko pravdepodobnostné rozdelenie y_t je podmienené iba súčasným stavom Markovovho reťazca.

Skryté Markovove modely majú široké aplikačné možnosti, všetky však zvyčajne zahŕňajú tri základné úlohy, ktoré sú v súčasnej literatúre uvedené pod pojmom úloha hodnotenia (angl. Evaluation problem), úloha dekodovania (angl. Decoding problem) a úloha učenia sa (angl. Learning problem). Tieto základné úlohy a ďalšie aspekty skrytého Markovovho modelu sú v súčasnej literatúre podrobne popísané napríklad v (Rabiner 1989) a (Ibe 2009), väčšinou však pre Markovove reťazce prvého rádu. Teória, implementácie a aplikácie skrytého Markovovho modelu vyššieho rádu sú relatívne zložitejšie s menším množstvom publikovaných prác (Stanke a Waack 2003), (Hadar 2009).

- Úloha učenia sa (angl. Learning problem): Majme množinu pozorovaných sekvencií $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$. Úlohou je určiť parametre skrytého Markovovho modelu λ , ktoré najlepšie vystihujú pozorované sekvencie. Teda určiť λ , ktorá maximalizuje vierohodnosť $P(Y|\lambda)$. Ide o problém odhadu najpravdepodobnejších parametrov skrytého Markovovho modelu pre danú sadu pozorovacích sekvencií
- Úloha dekodovania (angl. Decoding problem): Majme skrytý Markovov model so známymi parametrami λ a množinu pozorovaní $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Úlohou je určiť najpravdepodobnejšie poradie skrytých stavov $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, ktoré generuje pozorované sekvencie $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Teda nájsť sekvenciu $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, ktorá maximalizuje pravdepodobnosť pozorovania $P(Y, Q|\lambda)$.
- Úloha hodnotenia (angl. Evaluation problem): Majme skrytý Markovov model so známymi parametrami skrytého Markovovho modelu λ a množinu pozorovaní $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Úlohou je určiť, aká je pravdepodobnosť, že pozorovaná sekvencia Y bola generovaná modelom, teda určiť pravdepodobnosť $P(Y|\lambda)$.

2 SKRYTÝ MARKOVOV MODEL INDEXU PX SO ŠTYRMI STAVMI

V príspevku analyzujeme dynamické správanie indexu Burzy cenných papierov Praha, a. s. pomocou jedného ukazovateľa „zatvárací kurz“. Časový rad denných údajov o zatváracíj cenne je spracovaný za obdobie od 16.11.1998 do 16.11.2018. Zdroj údajov je platená databáza Thomson Reuters Eikon (2018), kde je akciový index Burzy cenných papierov Praha vedený pod označením PX. V príspevku je analyzovaný časový rad percentuálnej zmeny zatváracieho kurzu PX oproti zatváraciemu kurzu predchádzajúceho dňa. Keďže všeobecný model skrytého Markovovho modelu vyžaduje, aby analyzované pozorovateľné symboly boli diskretnou množinou symbolov, je potrebné previesť spojité hodnoty časového radu percentuálnej zmeny zatváracieho kurzu na diskretné hodnoty. V našom prípade je celkový

možný interval hodnôt denných percentuálnych zmien kurzu v rozsahom s minimálnou hodnotou -100% a maximálnou hodnotou 100% rozdelený do ôsmich intervalov.

Všetky odhady boli vykonané pomocou zodpovedajúcich funkcií softvéru Matlab R2015a, konkrétne toolboxu Statistics and Machine Learning Toolbox™ (MathWorks 2018). Pre tento model prezentujeme nasledovné výsledky:

- maticu **A** pravdepodobností prechodov medzi skrytými stavmi systému,
- maticu **B** pravdepodobností pozorovania emisií systému,
- postupnosť najpravdepodobnejších stavov systému v zvolenom časovom úseku,
- postupnosť pravdepodobností skončenia v skrytých stavoch systému.

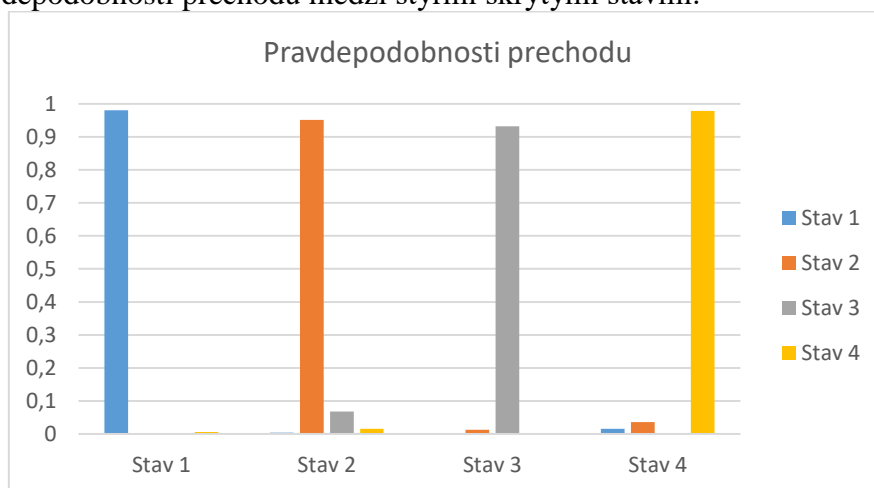
Postupnosť pozorovateľných emisií y , ktorú sme použili na učenie sa skrytého Markovovho modelu, je tvorená diskretizovanými hodnotami percentuálnej zmeny zatváracieho kurzu indexu PX za obdobie od 16.11.1998 do 16.11.2018. Spojité hodnoty sú diskretizované na hodnoty y_1, y_2, \dots, y_8 podľa príslušnosti do ôsmich intervalov -100% až -3%, -3% až -1,5%, -1,5% až -0,5%, -0,5% až 0%, 0% až 0,5%, 0,5% až 1,5%, 1,5% až 3%, 3% až 100%. Možný prístup k diskretizácii možno nájsť v práci (Lajos et al. 2011) Výsledky úlohy učenia sa sú hodnoty matic a to matice **A** pravdepodobností prechodov medzi skrytými stavmi a matice **B** pravdepodobností pozorovania emisií systému a sú sumarizované v tabuľkách číslo 1 a 2 a na k nim prislúchajúcich obrázkoch číslo 1 a 2.

Tab. 1: Hodnoty matice **A** pravdepodobností prechodov medzi štyrmi skrytými stavmi.

	Stav 1	Stav 2	Stav 3	Stav 4
Stav 1	0.97988101	4.16E-03	1.23E-35	0.015961533
Stav 2	5.51E-16	0.951671504	0.012302391	0.036026105
Stav 3	8.37E-96	0.067970599	0.932029401	2.52E-17
Stav 4	0.006182938	0.015108525	1.80E-12	0.978708538

Zdroj: vlastné spracovanie.

Obr. 1: Pravdepodobnosti prechodu medzi štyrmi skrytými stavmi.



Zdroj: vlastné spracovanie

Tab. 2: Hodnoty matice **B** pravdepodobností pozorovania jednotlivých emisií v systéme s štyrmi skrytými stavmi.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
Stav 1	2.49E-168	0.00303957	0.140383887	0.315724491	0.341794804	0.193249613	0.005807635	1.86E-196
Stav 2	0.03343	0.1619994	0.23771	0.11833	0.10553	0.17722	0.1380	0.0277

	5314	96	4316	5889	7928	1575	01688	53792
Stav 3	0.21000 1233	0.1455041 65	0.04349 1738	0.08279 2923	0.09024 3286	0.06523 5934	0.1845 62475	0.1781 68246
Stav 4	4.11E- 05	0.0440070 91	0.20569 4811	0.19696 0012	0.21230 8475	0.28118 1721	0.0578 829	0.0019 23923

Zdroj: vlastné spracovanie.

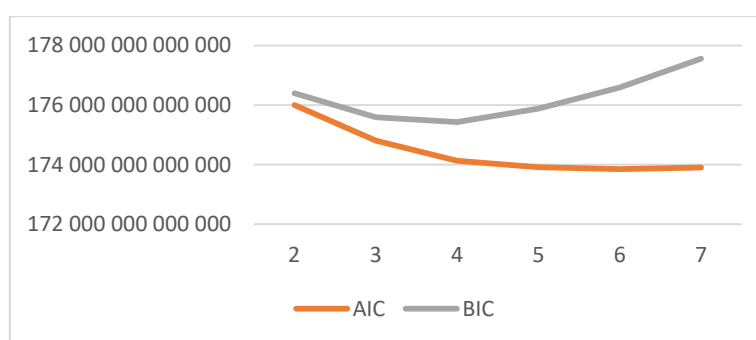
Obr. 2: Pravdepodobnosti pozorovania emisií podmienené stavom systému.



Zdroj: vlastné spracovanie

Model so štyrmi stavmi sme pre ďalšiu analýzu zvolili na základe porovnania odhadnutých modelov s rôznym počtom skrytých stavov a to na základe minimálnej hodnoty BIC informačného kritéria. Horizontálna os na obrázku číslo 3 zobrazuje počet stavov a vertikálna os hodnotu AIC a BIC informačného kritéria.

Obr. 3: Validácia a špecifikácia skrytého Markovovho modelu PX na základe Akaikeho (AIC) a Bayesovského (BIC) informačného kritéria.



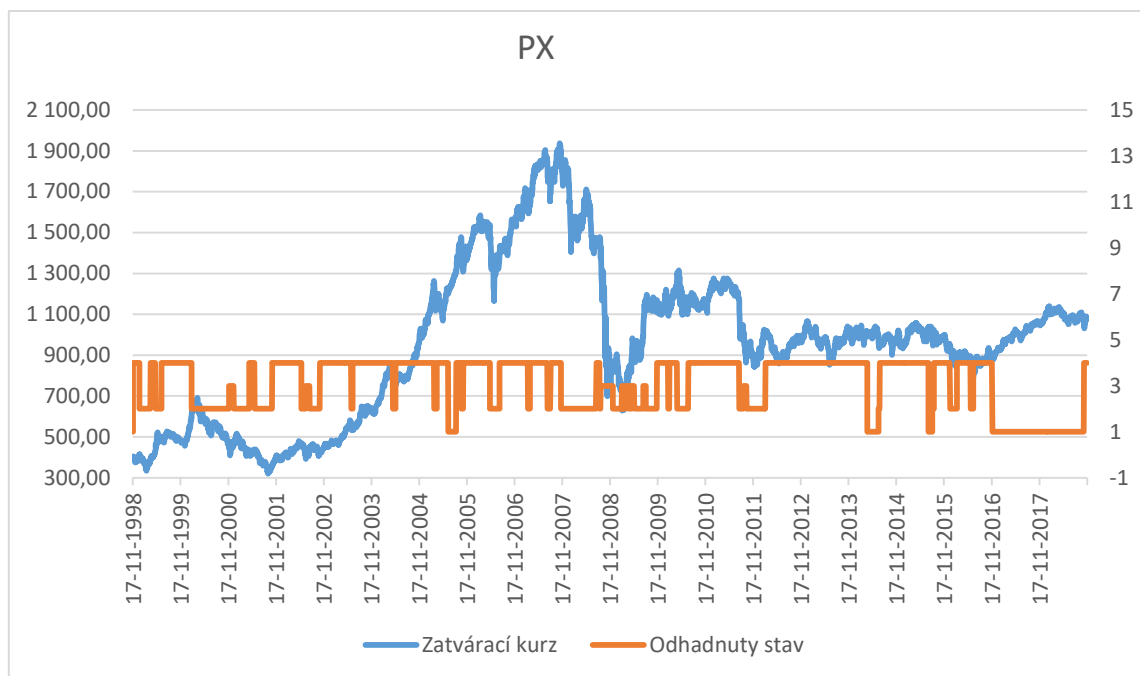
Zdroj: vlastné spracovanie.

Následne môžeme prejsť k druhej úlohe a to k popisu výsledkov úlohy dekódovania skrytého Markovovho modelu: výpočet najpravdepodobnejšieho poradia skrytých stavov \mathbf{q} pre dané poradie pozorovaní emisií \mathbf{y} .

Vstupné parametre úlohy dekódovanie sú matice \mathbf{A} a \mathbf{B} odhadnuté v prvej úlohe, úlohe učenia sa. Výsledky druhej úlohy sú vizualizované na obrázku číslo 4Obr. Na obrázku je v hornej

časti zobrazený vývoj zatváracieho kurzu indexu PX za obdobie od 16.11.1998 do 16.11.2018, ktorý predstavuje pozorovateľný stav systému a v dolnej časti sú zobrazené príslušné odhadnuté skryté stavy, v ktorých sa nachádzal systém modelovaný pomocou skrytého Markovovho modelu s dvoma stavmi.

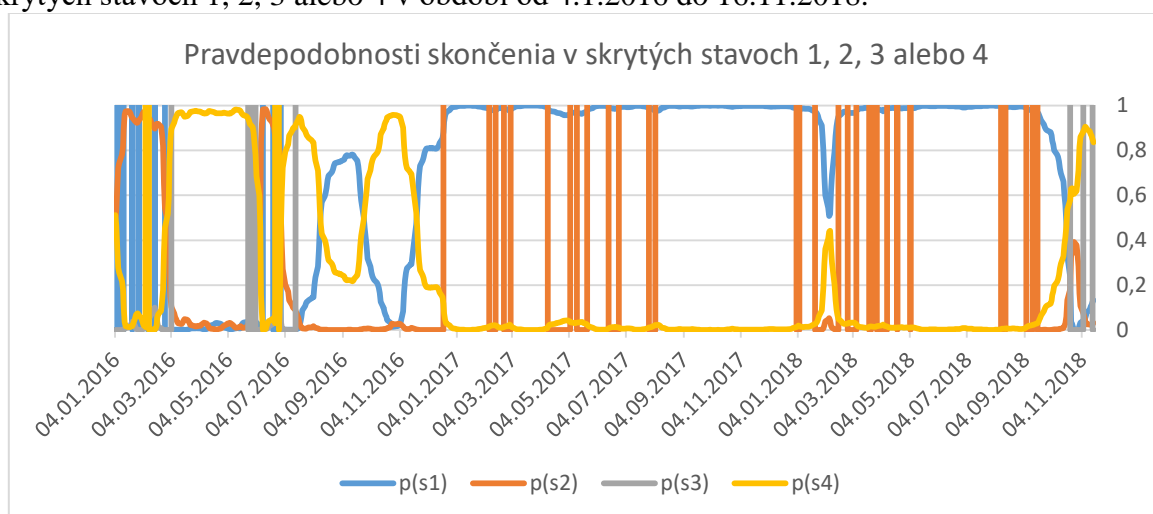
Obr. 4: Skrytý Markovov model s dvoma stavmi a hodnota zatváracieho kurzu indexu PX za obdobie od 16.11.1998 do 16.11.2018.



Zdroj: vlastné spracovanie.

V ďalšom kroku prejdeme k tretej úlohe, úlohe hodnotenia skrytého Markovovho modelu, teda odhadu postupnosti pravdepodobností, že systém bude v príslušnom skrytých stave, a to na základe postupnosti pozorovaných stavov y . Vstupné parametre sú rovnaké ako v úlohe dekódovania. Výsledok je zobrazený na obrázku číslo 5.

Obr. 5: Skrytý Markovov model s štyrmi stavmi a pravdepodobnosti skončenia v jednotlivých skrytých stavoch 1, 2, 3 alebo 4 v období od 4.1.2016 do 16.11.2018.



Zdroj: vlastné spracovanie.

Nakoniec, v tabuľke číslo 3 sú popisné štatistiky príslušných stavov s_1 , s_2 , s_3 a s_4 skrytého Markovovho modelu s štyrmi stavmi sumarizujúce hodnoty zatváracieho kurzu indexu PX.

Popisné štatistiky uvádzajú ako priemernú dennú zmenu a smerodajnú odchýlku záverečného kurzu indexu PX v jednotlivých stavoch s_1, s_2, s_3 a s_4 . Minimálnu a maximálnu zmenu, koľko dní v týchto stavoch zotrval, celkovú zmenu záverečného kurzu, o ktorú index PX narástol alebo klesol v jednotlivých stavoch s_1, s_2, s_3 a s_4 .

Tab. 3: Popisné štatistiky indexu PX skrytého Markovovho modelu s štyrmi stavmi.

	Priemerná zmena	Smerodajná odchýlka	Najmenšia zmena	Najväčšia zmena	Počet dní v danom stave	Celková zmena
Stav 1	0.280	7.205	-35	26.2	605	169.68
Stav 2	0.509	16.500	-156.1	138.2	1295	658.76
Stav 3	-1.951	23.489	-100.2	92.1	180	-351.2
Stav 4	0.072	11.682	-96.5	86.9	2940	210.58

Zdroj: vlastné spracovanie.

Použitá literatúra

HADAR, U. High-order Hidden Markov Models-estimation and implementation. Statistical Signal Processing, 2009. SSP'09. IEEE/SP 15th Workshop, 2009, 249-252

IBE, O. C. Markov Processes for Stochastic Modeling. Elsevier Academic Press Inc, 2009.

LAJOS, J., GEORGE, K. M., PARK, N. A Six State HMM for the S&P 500 Stock Market Index. In.: The Steering Committee of The World Congress in Computer Science, Computer Engineering and Applied Computing (WorldComp), 2011, p. 1.

MACDONALD, I. L., ZUCCHINI, W. Hidden Markov and other models for discrete-valued time series. Chapman and Hall/CRC, 1997. ISBN 0412558505.

MATHWORKS. Statistics and Machine Learning Toolbox™ User's Guide. In., 2018.

RABINER, L. R. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(2), 257-286.

Thomson Reuters Eikon, 2018, <https://eikon.thomsonreuters.com/index.html>

STANKE, M., WAACK, S. Gene prediction with a hidden Markov model and a new intron submodel. Bioinformatics, 2003, 19(suppl_2), 1460-2059.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0368/18 Cenové stratégie v prostredí pôsobenia efektívnych regulačných mechanizmov na nadnárodných trhoch sieťových odvetví slovenskej ekonomiky. (2018-2020)) Projekt Vedeckej grantovej agentúry MŠ SR a SAV.

Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823 email: marian.reiff@euba.sk

TEÓRIA HIER A MECHANIZMUS DOBROVOLNÉHO PRÍSPEVKU

GAME THEORY AND MECHANISM OF VOLUNTARY CONTRIBUTION

Allan Jose Sequeira Lopez

Abstrakt

Tento príspevok má za cieľ analyzovať systém mechanizmu dobrovoľného príspevku a na tomto základe načrtnúť hru pre N hráčov, čo nám umožňuje nájsť možné alternatívy pre situácie, v ktorých vláda potrebuje realizovať sociálne projekty, ale potrebuje zamedziť pocitu dobročinnosti v spoločnosti¹. Hra bola navrhnutá tak, aby sa zistila miera spolupráce, aby sa vytvorili politiky, ktoré zvyšujú mieru spolupráce, a aby sa optimalizovala komunikácia medzi vládou a spoločnosťou.

Kľúčové slová: teória hier, verejné statky, riadenie, experimentálna ekonomika

Abstract

The objective of this paper is to analyze the system of voluntary contribution mechanism and based on this describe a game for n players, which allows us to find possible alternatives to situations in which the government needs to carry out social projects but needs to avoid the charitable feeling in the community. The game was designed to analyze the degree of cooperation, generate policies that increase the degree of cooperation and optimize communication between the government and the community.

Keywords: game theory; public goods; management; experimental economy

1 HRA VEREJNÝCH STATKOV

Hra verejných statkov je konvenčne známa ako mechanizmus dobrovoľného prínosu alebo vďaka jej anglickému názvu VCM – Voluntary Contribution Mechanism (Marwell, a iní, 1981) (Camilo Cárdenas, a iní, 2006). V tejto práci zavedieme jednu premennú pre n hráčov. Títo hráči predstavujú jednotlivcov spoločnosti, ktorí súhlasia zaplatiť peniazmi, prostredníctvom daní alebo hodnotou odpracovaného času, aby vytvorili verejný statok. Každý hráč sa zaviazne prispieť sumou cc peňazí (predpokladá sa, že táto suma je získaná z inej ekonomickej činnosti) alebo tým, čo zodpovedá práci. Avšak každý hráč si môže voľne vybrať, či daný záväzok naozaj splní, toto rozhodnutie je osobné a tajné. Suma, ktorú hráč i zaplatí je cr_i , je to celé číslo spadajúce do intervalu $[0, cc]$. Celkový vklad spoločnosti ct získame sčítaním vkladov všetkých hráčov. Tento celkový vklad je vynásobený faktorom návratnosti f projektu, a takto vygenerované výnosy sa rovnomerne rozdelia medzi hráčov. A preto matematický model, ktorý určuje výnos g_i hráča i je daný nasledovne:

$$ct = \sum_{i=1}^n cr_i \quad (1)$$

$$ip = \frac{f \cdot ct}{n} \quad (2)$$

$$g_i = cc - cr_i + ip \quad (3)$$

¹ Kvôli charitatívnemu efektu chápeme tento fenomén ako ten, kde celá spoločnosť alebo jej časť ničí verejné statky, pretože sa necítia byť súčasťou projektu, a preto je to v súčasnosti jeden z najväznejších problémov v mnohých projektoch so sociálnym zameraním.

kde ip je výnos, ktorý získa každý hráč za vyhotovenie projektu.

V tomto modeli bod Nashovej rovnováhy (kedy si ani jeden hráč neželá zmeniť svoje jednostranné konanie) nastáva, keď nikto nič nevkladá $cr_i = 0 \forall i$. V tomto prípade výnosy hráčov budú rovnaké ako cc a spoločnosť získa ncc (obdrží sa sčítaním výnosov všetkých hráčov). Na druhej strane Paretovo optimum (sociálne optimum, kde je nemožné zlepšiť situáciu hráča bez toho, aby uškodil ďalšiemu) nastáva, keď všetci vložia dohodnutú sumu $cr_i = cc \forall i$. V tomto prípade každý hráč získa fc , zatiaľ čo výnos spoločnosti bude $nfcc$. A preto aby bol projekt prospešný pre spoločnosť, faktor návratnosti f projektu musí spĺňať túto podmienku: $f > 1$.

Aby projekt bol naozaj prospešný pre spoločnosť, musí sa dodržať aj nasledujúca podmienka:

$$ct > ctc \tag{5}$$
$$ctc = \frac{ncc}{f}$$

Pod týmto rozumieme: vložená suma ct spoločnosťou sa musí nachádzať pod kritickou úrovňou ctc , ktorá zaručuje, že výnosy projektov budú vyššie ako investície zodpovedných ľudí, t. j. $ip > cc$. Ak táto podmienka neplatí, tí, čo splnia záväzok vkladov cc , nebudú mať z projektu benefit (bude rovnaký alebo horší ako predtým). V tomto prípade musí vláda projekt zrušiť alebo ho dotovať.

Na druhej strane index spolupráce spoločnosti ic je definovaný nasledovne:

$$ic = \frac{ct}{ncc} \tag{6}$$

Tento index je reálna hodnota, ktorá spadá do intervalu $[0, 1]$ a predstavuje časť dohodnutej sumy, ktorá spoločnosti reálne prispieva. Nulová hodnota predstavuje absolútne egoistickú spoločnosť (ničím neprispieva a bude sa nachádzať v Nashovej rovnováhe), jednotková hodnota predstavuje absolútne spolupracujúcu spoločnosť (úplne prispieva dohodnutou sumou a bude sa nachádzať v Paretovom optime) a stredné hodnoty predstavujú stredné úrovne spolupráce (prispieva časť dohodnutej sumy). Hodnota tohto indexu je užitočná na dokonalé plánovanie a programovanie spomenutého projektu (PEKÁR J., 2012). Tento index pre danú spoločnosť predpovedá, že ak sa nedosiahne kritická hodnota ctc , vláda bude musieť projekt zrušiť alebo ho dotovať. Nestálosť Paretovho optima rozumieme ako analýzu pokušenia, ktorú má každý hráč, keď zvyšuje svoje výnosy (Čičková, a iní, 2017), aj keď neprispel dohodnutou sumou. V skutočnosti každý hráč vie, že ak prestane platiť, jeho výnosy porastú, pretože sa ušetrí vklad cr . Avšak, návratnosť projektu ip sa znižuje pre absenciu tejto sumy. Kvôli tomu, že sa hráči rozhodnú prestať prispievať, ip bude stále klesať, až kým projekt nepríde do takého bodu, že prestane generovať výnosy a dosiahne Nashovu rovnováhu, kedy nikto neprispieva, projekt sa nezrealizuje a všetci vykazujú stratu. Inak povedané, kvôli základným vlastnostiam hry, hráči majú s časom tendenciu znižovať svoje vklady (Jablonský, a iní, 2004). Keď raz prestanú platiť, už sa k tomu nikdy nevrátia. Toto správanie je závažná hrozba pre projekt, a preto je dôležité spoločnosti vytvoriť a odkomunikovať správne pravidlá riadenia.

2 EKONOMICKÝ MODEL PRE NAVRHNUTÚ HRU

V tejto práci chceme načrtnúť modelový variant, ktorý vzniká, keď realizácia projektu vyžaduje, aby spolupráca spoločnosti bola minimálne $ctmin$, aby bol projekt realizovateľný.

Ak vklad spoločnosti nedosiahne túto minimálnu úroveň, projekt sa nezrealizuje a všetci hráči o vklad prídu. V tomto prípade sa výpočty pre ip upravujú nasledovne:

$$ip = \begin{cases} 0 & ct < ctmin \\ \frac{fct}{n} & ct \geq ctmin \end{cases} \quad (7)$$

Podľa návrhu, ak $ctmin = 0$, hra je základná. V tomto variante, ak $g_i > cc \quad \forall i$, existuje nekonečne veľa Nashových bodov definovaných:

$$\sum_{i=1}^n cr_i = ctmin \quad (8)$$

V tomto prípade, výnosy spoločnosti budú $cc + (f - 1) ctmin$. Musíme mať na zreteli, že:

$$g_i > cc \Leftrightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n cr_j > \frac{(n-f)}{f} cr_i \quad \forall i \quad (9)$$

Posledná podmienka vyjadruje, že budú existovať nekonečné Nashove body, ak každý jedinec potvrdí, že vklad, ktorý realizuje zvyšok spoločnosti, prevyšuje istú hranicu, ktorá závisí od jeho vkladu cr a faktora návratnosti f projektu. Tým, že vklad každého spoločníka nie je negatívna suma, spomínaná podmienka sa automaticky splní pre $f > n$, nezávisle od vkladu jedincov a vytvorí sa nekonečné množstvo bodov Nashovej rovnováhy.

Naopak, ak $\exists i / g_i < cc$, jediný bod Nashovej rovnováhy sa vytvorí, keď nikto neprispieva, $cr_i = 0 \quad \forall i$, v tomto prípade výnosy hráčov budú rovnaké ako cc a spoločnosť zarobí $n cc$. Na druhej strane, na Paretovej rovnováhe (ak všetci zaplatia cc), každý hráč získa $f cc$, zatiaľ čo zisk spoločnosti bude $nf cc$. Nakoniec, ak $\exists i / g_i = cc$, tento hráč nie je dôležitý pre uskutočnenie projektu a môže si zvoliť hocikáky typ analyzovaných Nashových rovnováh.

Existencia nekonečných Nashových bodov umožňuje, aby sa hra stabilizovala v bodoch s týmito vlastnosťami:

- Situácia s maximálnou nespravodlivosťou: iba jedna skupina jednotlivcov realizuje svoje dohodnuté vklady cc , ktoré predstavujú minimálnu sumu $ctmin$, ktorú vyžaduje projekt; zatiaľ čo zvyšok nespolupracuje, no vykazuje výnos z tohto projektu. Pretože sa jedná o Nashov bod, zodpovední jednotlivci nemôžu prestať spolupracovať, pretože by boli poškodení pre neuskutočnenie projektu. Tento bod nastáva, keď $ctmin > ctc$.
- Nespravodlivá situácia: všetci jednotlivci spolupracujú, no každý v inej miere. Tí, čo spolupracujú menej, majú vyššie výnosy. Ak sa opäť jedná o rovnováhu, nikomu sa neoplatí znižovať svoje vklady, pretože sa projekt nezrealizuje.
- Spravodlivá situácia: Všetci jednotlivci vkladajú rovnakú sumu $ctmin/n$. Opäť hovoríme o stabilnom bode, ktorý je možno dosiahnuť rokovaním. Tento bod môže byť predložený vládou, aby medzi hráčmi nastala zhoda.
- Začiatková situácia: nik neprispieva, projekt sa nerealizuje a všetci sú na tom rovnako.

Inými slovami, táto hra má tri stavy:

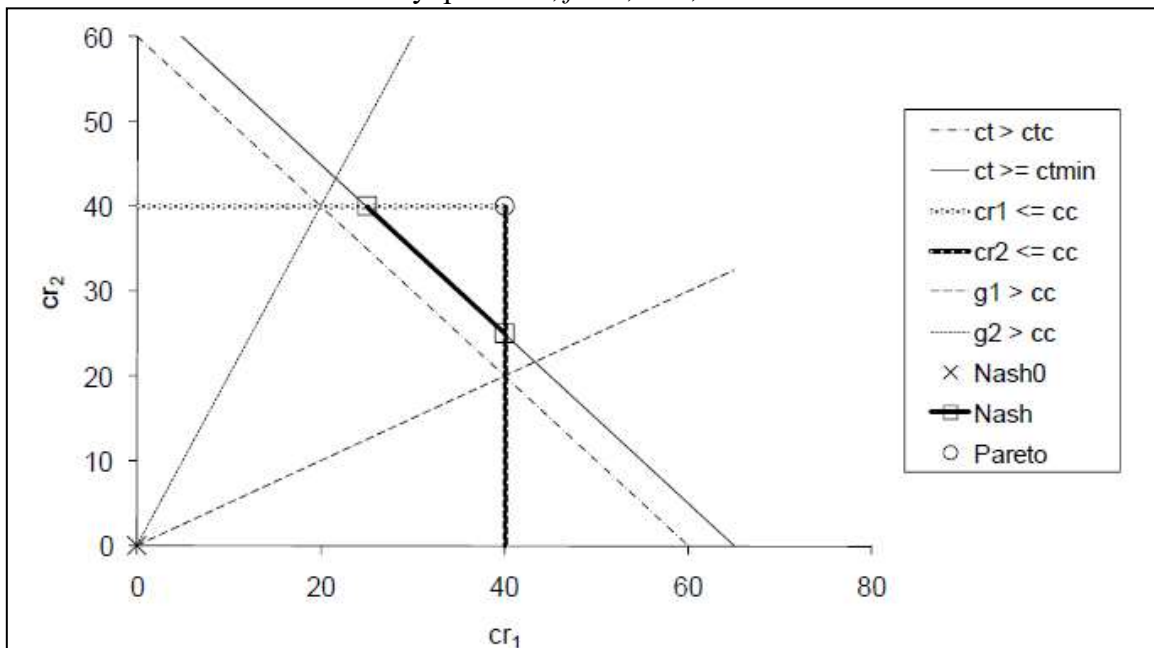
- Stav egoizmu: Hra prirodzene napreduje, hráči majú tendenciu prestať prispievať, t.j. hráči sa správajú egoisticky. V tomto štádiu nikto neplatí, projekt sa neuskutočňuje a všetci na tom strácajú.
- Ideálny stav: je taký, v ktorom všetci hráči platia všetky body, ktoré majú. Projekt sa realizuje a spoločnosť z toho vyťaží čo najviac. Všetci hráči majú rovnaké výnosy. Je to ideálny stav, no hráči chcú prestať platiť, aby zvýšili svoje individuálne výnosy, a preto sa časom dostávame do stavu egoizmu. Takže sa jedná o želaný stav, ktorý je ale nestabilný.
- Reálny stav: Tento stav dosahujeme vďaka pravidlám, ktoré sú navrhnuté matematickým modelom. V tomto stave všetci hráči platia minimálnu sumu, ktorú

navrhujú pravidlá. Projekt sa uskutoční, hráči generujú výnosy rovnako. Spoločnosť na tom nezíska toľko, koľko by mohla, ale hráči neprestanú prispievať, pretože vedia, že ak jeden pochybí, projekt sa neuskutoční a všetci na tom stratia.

3 ILUSTRÁČNÝ PRÍKLAD

Nižšie uvedený obrázok 1 vysvetľuje body rovnováhy pre $n = 2$, $f = 1.333$, $cc = 40$ a $ctmin = 65 > ctc = 60$. Tento obrázok znázorňuje bod Paretoho optima a dva typy Nashovej rovnováhy. Pretože minimálna suma $ctmin$ na realizáciu projektu je vyššia ako kritická suma ctc , Nashov segment je ohraničený začiatočným kapitálom cc jednotlivcov. Obrázok 2 predstavuje podobný prípad, ale tentokrát $ctmin=55 < ctc = 60$. Pretože minimálna suma je menšia ako tá kritická, Nashov segment je ohraničený faktorom návratnosti f .

Obrázok 1 Rovnovážne body pre $n=2$, $f = 1,333$, $cc = 40$ a $ctmin = 65 > ctc = 60$



6. PEKÁR J., (2012). *Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier. Modelovanie rozmiestňovania recyklačných centier. 2012.*

Kontaktné údaje

Ing. Allan Jose Sequeira Lopez

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (+421) 918528099

email: allan.lopez@euba.sk

NEOFISHEROVSKÁ TEÓRIA MONETÁRNEJ POLITIKY¹

NEOFISHERIAN THEORY OF MONETARY POLICY

Karol Szomolnyi

Abstrakt

V jednoduchom súčasnom keynesovskom modeli sa za predpokladu racionálnych očakávaní inflácia správa podľa Fischerovej rovnice. Zvýšenie nominálnej úrokovej miery o 1 % vedie k zvýšeniu inflácie o 1 %. Vyplýva to z analýzy modelu s IS krivkou, Phillipsovou krivkou a racionálnymi očakávaniami. Výsledok je v rozpore so zaužívaným chápaním monetárnej politiky vo svete, ktoré možno formulovať Taylorovým pravidlom monetárnej politiky. Ukážeme, že za predpokladu racionálnych očakávaní, aplikovanie Taylorovho pravidla vedie k pasci likvidity, ak je štartovacia hodnota inflácie nižšia ako inflačný cieľ stanovený monetárnou politikou, alebo k hyperinflácii, ak štartovacia inflácia je vyššia ako inflačný cieľ. Záver je doplnený o krátku diskusiu, v ktorej podporíme hypotézu racionálnych očakávaní v monetárnej politike.

Kľúčové slová: *Fischerova rovnica, racionálne očakávania, súčasná keynesovská teória*

Abstract

In the simple New Keynesian Model, assuming rational expectations, inflation is governed by the Fischer Equation. An increase in the nominal interest rate by 1% leads to an increase in inflation of 1%. This results from an analysis of the model with IS curve, Phillips curve and rational expectations. The result is inconsistent with the conventional understanding of monetary policy in the world, which can be formulated by Taylor's monetary policy. We show that, assuming rational expectations, the application of Taylor's rule leads to a liquidity trap if the starting inflation rate is lower than the inflation target set by monetary policy or hyperinflation if starting inflation is above the inflation target. The conclusion is accompanied by a brief discussion in which we support the hypothesis of rational expectations in monetary policy.

Keywords: *Fischer equation, rational expectations, New Keynesian Theory*

1 ÚVOD

Podľa zaužívaného chápania monetárnej politiky vo svete infláciu možno zvýšiť politickou akciou, ktorá zníži nominálnu úrokovú mieru. Medzi takéto akcie patria nákupy a predaje aktív na voľnom trhu alebo zmeny diskontnej sadzby centrálnej banky. Toto chápanie vyplýva z mnohých súčasných konkurenčných monetárnych teórií, aj keď vedú k rôznym interpretáciám monetárnej teórie. Medzi najdôležitejšie považujeme súčasnú keynesovsku teóriu a teóriu rozličného vnímania cien.

Ak by sa však inflácia mala riadiť skôr Fischerovou rovnicou, výsledok by bol opačný. Uvažujme Fischerovú rovnicu v tvare:

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov 1/0294/18 " Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov" a tiež s podporou projektu VEGA 1/0248/17 „Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie“.

$$\pi = R - \rho \quad (1)$$

kde použité symboly označujú:

R – nominálna úroková miera,

ρ – reálna úroková miera,

π – (očakávaná) inflácia.

Podľa Fischerovej rovnice zvýšením nominálnej úrokovej miery R o 1 % sa zvýši inflácia π o 1 %. Podľa pozorovaní existuje štatisticky významný odhad fischerovského vzťahu medzi infláciou a nominálnou úrokovou mierou (Williamson, 2018a, s. 468).

Podľa Neofischerovskej teórie (Williamson, 2018b) sa inflácia za predpokladu racionálnych očakávaní správa podľa Fischerovej rovnice (1). Tento poznatok možno odvodiť na jednoduchých modeloch súčasnej keynesovskej teórie monetárnej politiky aj teórie rozličných vnímaním cien. V tejto práci odvodíme neofischerovskú charakteristiku inflácie vychádzajúcu z jednoduchého súčasného keynesovského modelu.²

Využijeme jednoduchý model s IS krivkou, Phillipsovou krivkou a racionálnymi očakávaniami. Ukážeme, že výsledkom modelu je dynamika inflácie opísaná Fischerovou rovnicou (1) v rozpore s konvenčnými zaužívanými pravidlami tvorby monetárnej politiky. Túto konvenciu možno formulovať Taylorovým pravidlom monetárnej politiky. Ukážeme, že za predpokladu racionálnych očakávaní, aplikovanie Taylorovho pravidla vedie k pasci likvidity, ak je aktuálna inflácia nižšia, ako je inflačný cieľ stanovený monetárnou politikou alebo k hyperinflácii, ak aktuálna inflácia je vyššia ako inflačný cieľ.

2 MODEL

Uvažujme súčasný keynesovský model, ktorý pozostáva z IS krivky rovnováhy na trhu statkov a z Phillipsovej krivky. Ukážeme, že za predpokladu racionálnych očakávaní je správanie inflácie opísané Fischerovou rovnicou.

Funkciu rovnováhy na trhu produktov IS možno odvodiť z jednoduchého mikroekonomického konceptu dynamického správania spotrebiteľa charakterizovaného optimálnym výberom spotreby a množstva práce v každom období.³ Za predpokladu uzavretej ekonomiky sa v rovnováhe výroba zhoduje so spotrebou a IS krivku možno vyjadriť v tvare

$$y_t = y_{t+1} - \frac{1}{\alpha} (R_t - \pi_{t+1} - \rho) \quad (2)$$

kde použité symboly označujú:

y – prirodzený logaritmus produkčnej medzery (v terminológii súčasnej keynesovskej teórie),

R – prirodzený logaritmus indexom vyjadrenej nominálnej úrokovej miery,

ρ – prirodzený logaritmus indexom vyjadrenej reálnej úrokovej miery,

π – prirodzený logaritmus indexom vyjadrenej miery inflácie,

α – konštantný koeficient rizikovej averzie, $\alpha > 0$,

t – obdobie, posunom $t + 1$ zodpovedajú očakávané hodnoty.

Pre jednoduchšiu orientáciu uvažujme zjednodušenú konvenciu označenia symbolov:

² Pre odvodenie z modelu rozličného vnímania cien pozri Williamson (2018b, s. 143–148)

³ Pozri Williamson (2018b, s. 131) pre viac detailov.

y – produkcia,

R – nominálna úroková miera,

ρ – reálna úroková miera,

π – inflácia.

V koncepcii súčasného keynesovského modelu je reálna úroková miera ρ *prirodená* (rovnovážna) a predpokladáme, že je konštantná (Williamson, 2018, s. 132). Znamená to, že abstrahujeme od ponukových šokov.

Súčasnú keynesovskú Phillipsovu krivku uvažujeme vo veľmi jednoduchom tvare:

$$\pi_t = \gamma y_t \quad (3)$$

kde $\gamma > 0$ vyjadruje mieru konštantnosti cien podľa súčasného keynesovského konceptu. Vo Phillipsovej krivke (3) abstrahujeme od inflačných očakávaní. Tento predpoklad je bez straty na všeobecnosti modelu a zjednoduší ďalšie operácie (Williamson, 2018, s. 132).

Predpokladáme, že centrálna banka dokáže monetárnou politikou kontrolovať nominálnu úrokovú mieru R . Preskúmame dva koncepty. V prvom uvažujeme nominálnu úrokovú konštantnú, centrálna banka ju stanoví raz a navždy. V druhom preveríme Taylorovo pravidlo monetárnej politiky.

2.1 Konštantná nominálna úroková miera

Kombináciou IS krivky (2) a Phillipsovej krivky (3) možno zjednodušený keynesovský model opísať rovnicou v tvare:

$$\pi_{t+1} = \frac{\gamma}{\alpha + \lambda} (\rho - R) + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \pi_t \quad (4)$$

Za predpokladu racionálnych očakávaní v deterministickom modeli sa očakávaná inflácia rovná budúcej a rovnica (4) je lineárna autonómna diferenčná rovnica s konštantnými koeficientmi prvého rádu, ktorá opisuje dynamické správanie inflácie π . Jej riešenie je v tvare:

$$\pi_t = \left[\pi_0 - (R - \rho) \right] \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \right)^t + R - \rho \quad (5)$$

kde π_0 je štartujúca hodnota inflácie. Inflácia rovnomerne konverguje k hodnote:

$$\pi = R - \rho$$

teda dlhodobá je determinovaná Fischerovou rovnicou (1). Dlhodobá, ak centrálna banka chce zvýšiť infláciu o percento, potrebuje *zvýšiť* nominálnu úrokovú mieru o percento.

Ukážeme, že takéto pravidlo monetárnej politiky platí aj krátkodobá. Uvažujme začiatočnú rovnováhu:

$$\pi_0 = \pi^{(0)} = R^{(0)} - \rho \quad (6)$$

kde $\pi^{(0)}$ je začiatočná rovnovážna inflácia. Ak centrálna banka monetárnou politikou zvýši nominálnu úrokovú mieru z $R^{(0)}$ na $R^{(1)}$, správanie inflácie v ďalších obdobiach $t = 1, 2 \dots$ získame dosadením (6) za štartovaciu hodnotu inflácie π_0 a $R^{(1)}$ za monetárnou politikou stanovenú nominálnu úrokovú mieru R do riešenia (5):

$$\pi_t = \left(R^{(1)} - R^{(0)} \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \right)^t + R^{(1)} - \rho$$

Po zvýšení nominálnej úrokovej miery z hodnoty $R^{(0)}$ na hodnotu $R^{(1)}$, inflácia začne okamžite rásť a rovnomerne konvergovať do novej rovnovážnej hodnoty:

$$\pi^{(1)} = R^{(1)} - \rho$$

Zvýšením úrokovej miery sa inflácia zvýši aj krátkodobo.

2.2 Taylorovo pravidlo monetárnej politiky

Model rozšírime o Taylorovo pravidlo monetárnej politiky v tvare:

$$R_t = \max \{0, \rho + \delta \pi_t + (1 - \delta) \pi^*\} \quad (7)$$

kde

δ – parameter Taylorovho pravidla monetárnej politiky,

π^* – cieľová hodnota inflácie. Inflácia, ktorú centrálna banka potrebuje monetárnou politikou dosiahnuť.

Taylorove pravidlo (7) je zdola ohraničené nulovou nominálnou úrokovou mierou. Podľa zaužívaného chápania tvorby monetárnej politiky cieľová hodnota nominálnej úrokovej miery nie je záporná.

Rovnako podľa zaužívaného chápania monetárnej politiky, $\delta > 1$ – ak je inflácia π nižšia vyššia ako cieľ π^* o 1 %, centrálna banka zvolí monetárnu politiku, po ktorej sa nominálna úroková miera R zvýši o viac ako 1 %. Z doterajšej analýzy však vyplýva, že za predpokladu racionálnych očakávaní sa zvýšením nominálnej úrokovej miery inflácia naopak zvýši.

Dosadením Taylorovho pravidla (7) za R do diferenčnej rovnice (4) a po úprave získame po častiach lineárnu diferenčnú rovnicu prvého rádu s konštantnými koeficientmi v tvare:

$$\pi_{t+1} = \max \left\{ -\frac{\rho\gamma}{\alpha + \gamma} + \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \pi_t; \frac{(1 - \delta)\gamma}{\alpha + \gamma} \pi^* + \frac{\delta\gamma + \alpha}{\alpha + \gamma} \pi_t \right\} \quad (8)$$

Diferenčná rovnica (8) má dve partikulárne riešenia:

$$\bar{\pi} = -\rho \quad (9)$$

$$\hat{\pi} = \pi^* \quad (10)$$

Partikulárne riešenie (10) zodpovedá inflačnému cieľu, avšak je nestabilné, keďže:

$$\frac{\delta\gamma + \alpha}{\alpha + \gamma} > 1$$

Naopak partikulárne riešenie (9) je stabilné, keďže:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} < 1$$

Podľa Fischerovej rovnice (1) partikulárnemu riešeniu (9) zodpovedá nulová nominálna úroková miera, $R = 0$. Dynamika inflácie sa líši podľa toho či štartovacia hodnota inflácie π_0 je vyššia alebo nižšia ako cieľová hodnota inflácie π^* .

Ak $\pi_0 < \pi^*$, inflácia rovnomerne konverguje do hodnoty $-\rho$ a nominálna úroková miera rovnomerne konverguje k 0. Centrálnaj banke sa nepodarí Taylorovým pravidlom dosiahnuť inflačný cieľ, nastane situácia, ktorá sa nazýva *pasca likvidity* a je sprevádzaná príliš nízkymi

nominálnymi úrokovými mierami. Do tejto situácie sa v ostatnom čase dostali monetárne politiky v Japonsku, USA, Kanady, ECB, Veľkej Británii, Švédska, Švajčiarka ...

Ak $\pi_0 > \pi^*$, inflácia aj nominálna úroková miera rovnomerne divergujú. Centrálna banka sa nepodarí Taylorovým pravidlom dosiahnuť inflačný cieľ, naopak iniciujú hyperinfláciu. Tento modelový príklad môže slúžiť ako alternatívne vysvetlenie problému monetárnej politiky v krajinách s vysokou infláciou.

3 ZÁVER

Za predpokladu racionálnych očakávaní súčasný keynesovský model generuje dynamiku inflácie, ktorá sa správa podľa Fischerovej rovnice (1). Zvýšenie nominálnej úrokovej miery o 1 % spôsobí zvýšenie inflácie o 1 %. Rovnaký výsledok možno dosiahnuť využitím modelu s rozličným vnímaním cien (Williamson, 2018b, s. 143–148). Tento výsledok je v rozpore so zaužívaným chápaním tvorby monetárnej politiky, podľa ktorej infláciu možno zvýšiť znížením nominálnej úrokovej miery. Taylorovo pravidlo tvorby monetárnej politiky reflektujúce zaužívaný koncept a generuje pascu likvidity alebo hyperinfláciu podľa toho, či štartujúca inflácia je nižšia alebo vyššia ako inflačný cieľ. Neofischerovská teória by mohla vysvetliť súčasné problémy monetárnej politiky v západných menových úniách ako USA, Japonsko, Kanada, EMÚ, Veľká Británia, Švédsko, Švajčiarsko ... ktoré sa dostali do pasce likvidity, ale tiež v menových úniách, ktoré majú problém s vysokou infláciou.

Ako sme uviedli v Úvode, neofischerovská teória zodpovedá pozorovaniu. Na druhej strane, kritici neofischerovskej teórie považujú za problematický predpoklad racionálnych očakávaní (Williamson, 2018b, s. 140). Ak rozšírime súčasný keynesovský model z druhej časti tejto práce o čiastočne konštantné očakávania, zaužívané chápanie monetárnej politiky je správne.

Formulácie modelu a jeho predpoklady by mali zodpovedať zmysluplnej teórii. Podľa hypotézy racionálnych očakávaní pripúšťame omyly, ktoré však nie sú systematické – ich stredná hodnota sa rovná 0. Samozrejme, v reálnom svete ľudské omyly môžu byť a pravdepodobne sú systematické. Ak je to tak, teória by mala vysvetliť, prečo by mali byť ľudské omyly vychýlené iba tým smerom, ktorý vyhovuje zaužívanému chápaniu tvorby monetárnej politiky. Prečo by subjekty mali meniť svoje očakávania iba čiastočne k svojim predchádzajúcim omylom? Prečo neuvažovať naopak hypotézu, pri ktorej sú výchyľky očakávaní variabilnejšie od minulých omylov, pri ktorých by výsledok zas zodpovedal neofischerovskej teórii? Od hypotézy racionálnych očakávaní sa možno odkloniť iba so zmysluplnou teóriou, ktorá dokáže vysvetliť smer a dôvod systematických chýb v ekonomickom rozhodovaní. Dovtedy považujeme hypotézu racionálnych očakávaní, ktorá viac zodpovedá ostatným pozorovaniu za lepší výber.

Použitá literatúra

1. Williamson, S. 2018a. *Macroeconomics*. Pearson, 6. vydanie. ISBN: 978-1-29-221576-1.
2. Williamson, S. 2018b. *Inflation Control: Do Central Bankers Have It Right?* In: *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, roč. 100, č. 2, s. 127-150.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 822
email: karol.szomolanyi@euba.sk

POROVNANIE ALTERNATÍVNYCH METÓD PRÁCE S CHÝBAJÚCIMI HODNOTAMI V REGRESNÝCH MODELOCH A COMPARISON OF DIFFERENT METHODS FOR HANDLING MISSING DATA IN REGRESSION MODELS

Barbora Šicková, Ondřej Sokol

Abstrakt

Cieľom práce je porovnať vybrané techniky práce s chýbajúcimi hodnotami prostredníctvom Monte Carlo experimentov. Výber techník práce s chýbajúcimi hodnotami sa zameriava na porovnanie postupov využívajúcich viacnásobnú imputáciu. Jednotlivé techniky porovnáваме pomocou normovanej odmocniny strednej štvorcovej chyby, normovaného vychýlenia a pokrytia intervalov spoľahlivosti jednotlivých odhadnutých regresných koeficientov. Modely, ktorými sa zaoberáme zahŕňajú spojitú závislú premennú, interakcie, štvorce a binárne premenné. Cieľom práce je preskúmať možnosti pri práci s dátami, ktoré obsahujú chýbajúce hodnoty a doposiaľ neboli v literatúre podrobne rozobrané.

Ключевые слова: chýbajúce hodnoty, viacnásobná imputácia, simulácia.

Abstract

We aim to survey different methods for handling missing data in regression models by Monte Carlo experiments. Data generating processes used in simulation experiments are based on widely used real data set. The choice of missing data techniques aims to compare simpler conventional methods and modern multiple imputations. We compare these approaches according to normalized root mean square deviation, normalized bias and coverage probability of confidence intervals. Fitted regression models contain continuous dependent variable, squares, interactions and binary variables. This paper aims to survey these methods and their application in regression models.

Keywords: missing data, conventional methods, multiple imputations

1 ÚVOD

V štúdiách sa bežne stretávame s rozsiahlymi dátovými súbormi, ktoré zväčša obsahujú množstvo chýbajúcich hodnôt. Podľa Kinga s kolektívom [2] v priemere polovica respondentov neodpovie na jednu alebo viac otázok zahrnutých v prieskumoch politického charakteru. Napriek tomu, že teória i softvér sú široko dostupné, mnohé dátové analýzy predpokladajú, že proces, ktorý zapríčiňuje chýbajúce hodnoty môžeme ignorovať. Tento predpoklad však nemusí byť vždy správny. Prípad, kedy do analýzy zahrnieme iba jednotky s úplnými pozorovaniami je vo všeobecnosti nevhodný. Zvyčajne máme totiž záujem o analýzu celej cieľovej skupiny, nie iba jej časti.

Motiváciou k článku je skutočnosť, že chýbajúce hodnoty sa v dátových množinách bežne vyskytujú. Pri malom percente chýbajúcich hodnôt nemusí spôsobovať vynechanie takých hodnôt problém. Avšak pri vyššom počte chýbajúcich hodnôt vynechaním neúplných

pozorovaní strácame získané informácie. Toto môže byť problém nielen z hľadiska skresleného výsledku, ale tiež z hľadiska finančnej náročnosti prieskumu.

V práci využívame reálne dáta, ktoré už obsahujú chýbajúce hodnoty, ale aj simulované dáta. Ako reálne dáta používame údaje z národného výskumu zdravia a výživy (*NHANES*). Tieto dáta sme zvolili pretože sú dobre dostupné, ľahko pochopiteľné vďaka vypracovanej dokumentácii a v neposlednom rade kvôli tomu, že sa využívajú v mnohých analýzach. Simulované dáta potom vychádzajú z dátového setu *NHANES*. V prvej fáze simulujeme úplné dátové množiny. V druhej fáze vynechávame dáta, aby sme zanesli chýbajúce hodnoty do množiny. Cieľom je porovnávať výsledky jednotlivých prístupov pri rôznych podieloch chýbajúcich hodnôt. Preto v jednotlivých úplných dátových množinách vynechávame dáta viac krát. Začíname vynechávať percento dát, ktoré je zhodné s percentom chýbajúcich dát v *NHANES*. Ďalšie percentá vynechaných pozorovaní vždy zvyšujeme.

2 SIMULAČNÍ EXPERIMENT

V nasledujúcej kapitole zhrnieme postupy pri Monte Carlo simulácií a spôsob akým boli dátové množiny generované. Taktiež popíšeme spôsob akým dáta z úplnej množiny vynechávame.

2.1 Dáta generujúci proces

Simulované dáta sa operajú o reálne dáta *NHANES*. Dáta generujúci proces je založený na modeli odhadnutom na dátach *NHANES*. Model je nasledujúci:

$$\log(\text{BMI}) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{muž} + \alpha_2 \text{vek} + \alpha_3 \text{chudoba} + \alpha_4 \text{USA} + \alpha_5 \text{chudoba}^2 + \alpha_6 \text{vek} \times \text{USA} + \alpha_7 \text{muž} \times \text{USA} + \varepsilon_1$$

Z úplných dát potom vynechávame rôzne percentá hodnôt. Takýmto spôsobom vytvoríme tri skupiny dát s chýbajúcimi hodnotami. V prvej skupine hodnoty vynechávame podľa percenta chýbajúcich hodnôt v *NHANES*. V ďalších dvoch skupinách percento vynechaných hodnôt zvyšujeme.

2.2 Monte Carlo

Simuláciu Monte Carlo využívame k tomu, aby sme porovnali jednotlivé prístupy k imputácií chýbajúcich hodnôt.

Monte Carlo experiment je navrhnutý tak, že generujeme štyri nezávislé premenné a jednu závislú premennú. Závislú premennú generujeme na základe známeho dáta generujúceho procesu, ktorý odhadujeme pomocou reálnych dátach *NHANES*. Experiment obsahuje 100 replikácií a veľkosť jednotlivých vzoriek je 4500 pozorovaní. Takýmto spôsobom získame 100 úplných dátových matíc, z ktorých každá obsahuje 4500 pozorovaní u každej z piatich premenných.

Ďalším krokom v experimente je vynechávanie hodnôt. Hodnoty vynechávame v závislej premennej a v dvoch nezávislých premenných. Sú to premenné, ktoré obsahujú chýbajúce hodnoty i v reálnych dátach. Motiváciou k tomu, aby sme vynechali dáta v spojitaj závislej premennej je i skutočnosť, že sme sa s obdobným prístupom v štúdiách nestretli. Modely pre mechanizmus generujúci chýbajúce hodnoty odhadujeme na základe dát *NHANES*. K výpočtu pravdepodobnosti výskytu chýbajúcej hodnoty používame logistickú regresiu. Z množiny úplných dát vytvoríme tri množiny s rôznym percentuálnym zastúpením chýbajúcich hodnôt.

Vytvárame viac množín s chýbajúcimi dátami, pretože okrem iného chceme skúmať ako sa správajú jednotlivé metódy pri zvyšujúcom sa percente chýbajúcich hodnôt.

Na konci celého experimentu máme k dispozícii množinu úplných dát a tri množiny s rôznym percentuálnym zastúpením chýbajúcich hodnôt. Množinu s najmenším (MIN), stredným (MED) a najvyšším (MAX) percentuálnym podielom chýbajúcich hodnôt. Jednotlivé množiny s chýbajúcimi dátami vychádzajú z tej istej množiny úplných dát. Takto pripravené množiny ďalej používame k imputácií chýbajúcich hodnôt a následnému odhadu modelu.

2.3 Odhadovaný regresný model

Potom ako imputujeme zvolenou metódou chýbajúce dáta zo simulovanej množiny (MIN, MED, MAX) môžeme prejsť k odhadu regresného modelu.

Keďže regresný model obsahuje štvorce a interakcie môžeme k jeho odhadu pristupovať dvomi spôsobmi.

V prvom prístupe využijeme tradičný regresný model. Teda najskôr imputujeme chýbajúce hodnoty v premenných bez štvorcov a interakcií. Takto získanú množinu použijeme k odhadu regresného modelu. Štvorce a interakcie sa spočítajú až pri odhade modelu.

Druhý prístup z anglického *just another variable*, označujeme JAV. Na rozdiel od tradičného prístupu imputujeme chýbajúce hodnoty v interakciách a štvorcoch ešte pred samotným odhadom modelu. Potom keď odhadujeme regresný model na takto získaných dátach, interakcie a štvorce nemusia byť dopočítané pri odhade, regresný model s nimi pracuje akoby to bola ďalšia premenná.

2.4 Kritéria pre porovnanie alternatívnych techník práce s chýbajúcimi hodnotami

K porovnaniu jednotlivých prístupov k chýbajúcim hodnotám využívame normovanú odmocninu strednej štvorcovej chyby (*NRMSE*), normované vychýlenie (*NB*) a percentuálne pokrytie 95% intervalov spoľahlivosti odhadnutých koeficientov.

Východiskovým modelom pre odhadnuté koeficienty je nasledujúci model:

$$y_i = X_i \beta_i + u_i,$$

kde indexom i označujeme i -tú replikáciu z Monte Carlo simulácie. y_i je vektor závislej premennej z i -tej replikácie. X_i je matica nezávislých premenných s prvým stĺpcom obsahujúci nulový vektor z i -tej replikácie. β_i je vektor odhadovaných koeficientov pre i -tu replikáciu a u_i je vektor disturbancií z i -tej replikácie.

Normovanú strednú štvorcovú odchýlku spočítame ako:

$$B_j = \frac{\sum_{i=1}^{100} \widehat{\beta}_{ij} - \beta_j}{100}, \quad NB_j = \frac{B_j}{\beta_j}, \quad j = 0, \dots, 7,$$

a normované vychýlenie spočítame ako:

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} \widehat{\beta}_{ij} - \beta_j}{100}}, \quad NRMSE_j = \frac{RMSE_j}{\beta_j}, \quad j = 0, \dots, 7.$$

V oboch prípadoch používame rovnaké koeficienty β_j a β_{ij} . β_j koeficient je skutočný koeficient z procesu generujúceho dáta fig. 2.1. β_{ij} je príslušný koeficient z i -tého odhadnutého modelu.

Pri pokrytí intervalov spoľahlivosti sledujeme percento, v ktorom skutočný koeficient β_j spadá do odhadnutého 95% intervalu spoľahlivosti pre príslušný koeficient.

Dané ukazovatele počítame pre všetky koeficienty odhadnuté v modeli.

2.5 Implementácia a výpočty

Pomocou Monte Carlo experimentu získame 3 množiny s rôznym percentuálnym zastúpením chýbajúcich hodnôt, z ktorých každá obsahuje 100 replikácií a veľkosť vzorky je 4500 pozorovaní. Chýbajúce hodnoty sa vyskytujú u 3 premenných. Avšak v prípade prístupu JAV musíme imputovať hodnoty u 6 premenných, keďže ku štvorcom a interakciám pristupujeme ako k samostatným premenným.

dáta imputujeme viackrát, v našom prípade 5-krát. Viacerí autori sa zaoberali štúdiom optimálneho počtu imputácií. Na základe experimentov sa zhodli na tom, že počet imputácií závisí na veľkosti chýbajúcich dát a zvyčajne už malý počet imputácií ako 3 alebo 5 je dostačujúci [1,4,5,6]. Časová náročnosť imputácie taktiež závisí od zvolenej metódy. Väčšina viacnásobných imputácií prebehla do niekoľko hodín. Avšak imputácie v množinách s vyšším percentuálnym podielom chýbajúcich hodnôt a s prístupom JAV trvali o poznanie dlhšie.

2.6 Výsledky

V článku porovnávame výsledky z 10 metód viacnásobnej imputácie. Preto jednotlivé metódy rozdelíme do skupín, aby bolo porovnanie prehľadnejšie.

Ako prvé medzi sebou porovnáme prístupy PMM, SAMPLE, CART a MEAN. So zvyšujúcim sa percentom chýbajúcich hodnôt sa odhady vo všeobecnosti zhoršujú. V metóde PMM produkuje JAV horšie výsledky a to najmä u premennej chudoba a jej kvadrátu. I podľa štúdie Whita a kolektívu [7] môže JAV prístup viesť k vychýleným koeficientom.

Metóda PMM sa však osvedčila pri imputovaní binárnych premenných. U metódy CART sa vyplatí používať JAV prístup. Odhadnuté koeficienty sú menej vychýlené a majú menší rozptyl. Problém u CART s prístupom JAV nastáva pri imputácii binárnych premenných a interakcii medzi binárnymi premennými. Pri použití metód PMM, SAMPLE, CART a MEAN bol najväčší problém s imputáciou premennej a jej kvadrátu.

Ďalej porovnáme medzi sebou výsledky z metód, ktoré k imputácii využívajú lineárnu regresiu. Sú to metódy NORM, NORM.BOOT, NORM.NOB a NORM.PREDICT. Výsledky získané pri použití imputačných metód s lineárnou regresiou sú medzi sebou veľmi podobné. V prípade zvyšujúceho sa percenta chýbajúcich hodnôt sa výsledky zo všetkých metód s prístupom JAV zhoršujú. Avšak prípad, kedy nepoužívame JAV prístup prináša lepšie výsledky, dokonca i v prípade zvyšujúceho sa percenta chýbajúcich hodnôt. Najlepšie výsledky podáva metóda NORM.BOOT i v prípade, kedy do modelu zahrnieme premennú s kvadrátom.

Nakoniec medzi sebou porovnáme výsledky z metód, ktoré k imputácii binárnych premenných využívajú logistickú regresiu. Sú to metódy LOGREG a LOGREG.BOOT. Metóda LOGREG.BOOT prináša lepšie výsledky než metóda LOGREG. Viacnásobné imputácie môžu viesť v prípade binárnych premenných k podhodnoteným premenným [3].

3 ZÁVER

Cieľom článku bolo porovnať jednotlivé prístupy k chýbajúcim hodnotám. Prístupy sme aplikovali na dátové množiny s rôznym percentom chýbajúcich hodnôt (MIN, MED, MAX). Regresný model, ktorý sme odhadovali na simulovaných dátach obsahuje štvorce, interakcie i binárne premenné. Okrem klasického prístupu k štvorcem a interakciám sme využívali i prístup JAV (*just another variable*). Všetky vymenované faktory môžu mať vplyv na výsledky získané na základe jednotlivých prístupov k chýbajúcim hodnotám. Jednotlivé metódy a prístupy sme porovnávali medzi sebou pomocou normovanej odmocniny strednej štvorcovej chyby, normovaného vychýlenia a pokrytia intervalov spoľahlivosti.

V článku sa podarilo preskúmať rôzne prístupy k chýbajúcim premenným. Podarilo sa nám ukázať, že okrem iného je pri výbere imputačnej metódy dôležité brať do úvahy či sa jedná o binárnu premennú alebo nie. Taktiež sa ukázalo, že ak sa v modeli vyskytujú interakcie alebo štvorce, prístup JAV podáva odhady, ktoré majú meší rozptyl, ale sú vychýlenejšie než u klasického regresného modelu. V prípade binárnych premenných sa ukázalo, že je lepšie imputovať diskretnými hodnotami 1 a 0. U viacnásobných imputácií podáva najlepšie výsledky metóda sample a u binárnych premenných metóda LOGREG.BOOT.

Vo všeobecnosti veľmi dobré výsledky získame použitím metódy NORM.BOOT. Metóda sa osvedčila ako najlepšia metóda pre prípad, kedy sa v modeli vyskytuje premenná a jej štvorec. Na základe nášho experimentu môžeme povedať, že metódy, ktoré využívajú bootstrap podávajú najlepšie výsledky.

Na základe všetkých zistení doporučujeme kombinovať rôzne imputačné techniky. Pri výbere imputačnej metódy treba brať do úvahy charakter odhadovaných premenných a štruktúru odhadovaného modelu. V rámci praktických doporučení, ktoré vyplynuli z experimentu je zrejmé, že imputácia chýbajúcich hodnôt prináša lepšie výsledky, než práca s dátami s vynechanými chýbajúcimi hodnotami. Neexistuje však imputačná metóda, ktorá by bola najlepšia pre všetky premenné a prístupy. Vzhľadom k tomu doporučujeme používať rôzne imputačné metódy.

Pod'akovanie. Článok vznikol s podporou projektu IGA F4/58/2017 Interné grantovej agentúry Vysoké školy ekonomickej v Prahe.

Literatúra

- [1] GRAHAM, J. W., OLCHOVSKI, A. E., GILREATH, T. D. How many imputations are really needed? Some practical carifications of multiple imputation theory. *Prevention science* **8**, 2007, s. 206–213.
- [2] KING, G., HONAKER, J., JOSEPH, A. SCHEVE, K. Analyzing Incomplete Political Science Data: An Alternative Algorithm for Multiple Imputation. *American Political Science Review* **95**, 2001, s. 49–69.
- [3] MA, J., AKTHAR-DANESH, N., DOLOVICH, L. THABANE, L. Imputation strategies for missing binary outcomes in cluster randomized trials. *BMC medical research methodology* **11**, 2011, s. 11–18.
- [4] ROYSTON, P. Multiple imputation of missing values. *Stata journal* **4**, 2004, s. 227– 241.
- [5] RUBIN, D. B. *Multiple imputation for nonresponse in surveys*. 2. vydanie. John Wiley & Sons, 2004. ISBN 0-471-65574-0.

- [6] VAN BUUREN, S., VAN BOSHUIZEN, H. C., KNOOK, D. L. Multiple imputation of missing blood pressure covariates in survival analysis. *Statistics in medicine* **18**, 1999, s. 681–694.
- [7] WHITE, I. R., ROYSTON, P., WOOD, A. M. Multiple imputation using chained equations: issues and guidance for practice. *Statistics in medicine* **30**, 2011, s. 377– 399.

Kontaktné údaje

Ing. Barbora Šicková

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Česká republika

Email: barbora.sickova@gmail.com

ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD VÝNOSŮ VYBRANÝCH FIREM Z INDEXU S&P 500 POMOCÍ METODY CUSUM

ANALYSIS THE TIME SERIES OF SELECTED COMPANIES' EARNINGS FROM THE S&P 500 INDEX USING THE CUSUM METHOD

Petr Štourač

Abstrakt

Práce se zabývá analýzou časových řad z pohledu výskytu bodů změny na vybraném časovém intervalu, s cílem zjistit, zda existují vztahy mezi výskyty těchto bodů u více časových řad. Zda lze tedy z výskytu bodu změny v jedné časové řadě usuzovat, že dojde k výskytu bodu změny i v jiných časových řadách a o případné hladině významnosti, že se tento bod objeví. Jako nástroj pro nalezení bodů změny v časové řadě je použita Change-point analýza metodou CUSUM. Pro praktickou ověření jsou vybrána data IT a telekomunikačních firem z indexu S&P 500, kdy jsou sledovány výskyty bodů změny u log výnosů těchto firem.

***Klíčová slova:** Change-point analýza, CUSUM, S&P 500*

Abstract

The thesis deals with the analysis of time series from the point of view of occurrence of change points at the selected time interval, in order to find out whether there are relations between occurrences of these points in more time series. Whether it can be assumed from the occurrence of the change point in a time series that the change point occurs in other time series and the possible level of significance that this point will appear. As a tool for finding change points in the time series, CUSUM change-point analysis is used. For practical verification, IT and telecommunications data from the S&P 500 are selected to monitor the occurrence of change points in the company's revenue log.

***Keywords:** Change-point analysis, CUSUM, S&P 500*

1 ANALÝZA BODU ZMĚNY

Analýza bodu změny je silným nástrojem pro určení, zda došlo v rámci časové řady ke změně. Metoda analýzy bodu změny je schopna detekovat i drobné změny, lépe charakterizuje tyto změny, je vhodná k detekci více změn, je odolná vůči odlehlým hodnotám, je flexibilní a je jednoduchá k použití. Pro každou změnu poskytuje podrobné informace včetně úrovně spolehlivosti, která udává pravděpodobnost, že k takové změně došlo, a interval spolehlivosti udávající, kdy k této změně došlo. Základním předpokladem pro použití analýzy bodu změny touto metodou je stacionarita zpracovávané časové řady.

Postup, který používá Taylor pro provádění analýzy změnových bodů, iterativně používá pro zjištění změn kombinaci kumulativních součtových grafů (CUSUM) a metodu bootstrapping.

Analýza začíná konstrukcí CUSUM grafu a výpočtem estimátoru velikosti změny. Dalším krokem je určení úrovně spolehlivosti zjištěné změny provedením analýzy bootstrap a celý postup končí výpočtem estimátoru okamžiku, kdy došlo ke změně. Po nalezení významného

bodů změny je možné požit tento postup opakovaně na intervaly nacházející se vlevo a vpravo od tohoto bodu, což umožňuje nalézt více bodů změny v rámci časové řady.

1.1 Konstrukce CUSUM grafu

Nechť y_1, y_2, \dots, y_n reprezentuje jednotlivé body. Kumulativní součet je počítán následovně:

1. Výpočet průměru: $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.
2. Nastavení kumulativního součtu na 0: $S_0 = 0$.
3. Výpočet ostatních kumulativních částek přidáním rozdílu mezi aktuální hodnotou a průměrem k předchozí částce: $S_i = S_{i-1} + (y_i - \bar{y})$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

1.2 Výpočet estimátoru velikosti změny

Jedním z možných estimátorů, který funguje dobře bez ohledu na distribuci a přes několik změnových bodů, je S_{diff} , který je definován následovně:

$$S_{diff} = S_{max} - S_{min}$$

kde $S_{max} = \max_{i=0, \dots, n} S_i$,

$$S_{min} = \min_{i=0, \dots, n} S_i.$$

1.3 Výpočet úrovně spolehlivosti

Úroveň spolehlivosti může být určena provedením analýzy bootstrap. Jeden krok (vzorek bootstrap) je proveden následovně:

1. Vytvoření vzorku bootstrapu n jednotek, označený jako $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$, náhodným přeskupením původních hodnot. Toto se nazývá vzorkování bez náhrady.
2. Na základě vzorku bootstrapu je vypočítán bootstrap CUSUM označený jako $S_0^0, S_1^0, \dots, S_n^0$.
3. Výpočet maximální, minimální hodnoty a jejich rozdílu bootstrapu CUSUM označené S_{max}^0, S_{min}^0 a S_{diff}^0 .
4. Určení, zda je rozdíl S_{diff}^0 menší než původní rozdíl S_{diff} .

Analýza bootstrap spočívá v provedení velkého počtu vzorků bootstrap a počítání počtu těch vzorků, u nichž je hodnota S_{diff}^0 menší než hodnota S_{diff} . Nechť N je počet provedených vzorků bootstrap a nechť X je počet vzorků bootstrap, pro které $S_{diff}^0 < S_{diff}$. Úroveň spolehlivosti pro nalezený bod změny se vypočte následovně:

$$ConfidenceLevel = 100 \frac{X}{N} \%$$

Obvykle se pro identifikaci významného bodu změny požaduje 90% nebo 95% spolehlivost.

1.4 Výpočet estimátoru okamžiku změny

Provedení odhadu okamžiku, ve kterém došlo ke změně v chování časové řady lze použít následující estimátory:

a) CUSUM

Definujme $|S_m|$ následovně:

$$|S_m| = \max_{i=0, \dots, n} |S_i|,$$

kde S_m je nejvzdálenější bod od nuly v CUSUM grafu. Tento bod m je odhadem posledního bodu před výskytem změny.

b) MSE (Mean Square Error)

Definujme $MSE(m)$ následovně:

$$MSE(m) = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=m+1}^n (y_i - \bar{X}_2)^2,$$

$$\text{kde } \bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=m+1}^n y_i}{n-m}$$

Hodnota m , která minimalizuje $MSE(m)$ je nejlepším odhadem posledního bodu před změnou.

Detailní popis analýzy bodu změny lze najít např. v článku (Taylor, 2000).

2 PRAKTICKÁ ČÁST

V praktické části jsou pro vybrané časové řady log výnosů IT a telekomunikačních firem z indexu S&P 500 spočítány body změny a navzájem porovnán jejich výskyt a spolehlivost. Program pro výpočet bodů spolehlivosti Change-Point analýzou (CUSUM) je napsán v jazyce Python.

2.1 Data

Ke zpracování byla použita data z indexu Standard & Poor's 500 (S&P 500). S&P 500 je americký index akciových trhů založený na tržních kapitalizacích 500 velkých společností, které mají společné akcie uvedené na burze NYSE nebo NASDAQ a pokrývá přibližně 80 procent amerického akciového trhu kapitalizací. S&P 500 je navržen tak, aby odrážel americké trhy s cennými papíry a prostřednictvím trhů americkou ekonomiku. Tento index je považován za nejlepší měřítko velkých amerických akcií.

Byla vybrána data osmi společností pohybujících se na IT a telekomunikačním trhu pro období 1.1.2008 až 31.12.2011. Časová řada pro každou společnost a období byla zkonstruována z denních uzavíracích hodnot akcií v obchodovatelných dnech, ty byly logaritmovány a následně z nich byly vypočítány výnosy. Vstupem do zpracování jsou tedy výnosy logaritmu hodnot akcií následujících společností:

Tabulka 1: Zpracované společnosti

Kód	Název	Sektor	Dat. přidání
AAPL	Apple Inc.	Information Technology	1982-11-30
T	AT&T Inc.	Telecomm. Service	1983-11-30
ADSK	Autodesk Inc.	Information Technology	1989-12-01
CSCO	Cisco Systems	Information Technology	1993-12-01
IBM	International Business Machines	Information Technology	
INTC	Intel Corp.	Information Technology	1976-12-31
MSFT	Microsoft Corp.	Information Technology	1994-06-01
NVDA	Nvidia Corporation	Information Technology	2001-11-30

2.2 Výpočet bodů změny

Pro každou časovou řadu výnosů vybraných společností byly nalezeny body změny. Pokud nalezený bod změny byl významný, řada byla rozdělena na dvě další, na kterých byl opakovaně spočítán další bod změny.

Při zpracování byly použity následující parametry:

- Hranice pro identifikaci významnosti 0,9
- Počet opakování bootstrap 1000

Apple Inc.

Tabulka 2: Body změny společnosti Apple Inc.

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,752	-1,09381907	20.1.2009	0,719348568	25.1.2008

AT&T Inc.

Tabulka 3: Body změny společnosti AT&T Inc.

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,243	-0,55396516	9.3.2009	0,328834481	10.10.2008

Autodesk Inc.

Tabulka 4: Body změny společnosti Autodesk Inc.

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,915	-1,28331155	9.3.2009	1,036489856	9.3.2009
3.1.2008	6.3.2009	0,542	0,558346621	26.9.2008	0,51978894	13.2.2009
10.3.2009	30.12.2011	0,507	0,717151675	23.4.2010	0,498309141	9.4.2009

Cisco Systems

Tabulka 5: Body změny společnosti Cisco Systems

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,293	-0,55173694	9.3.2009	0,584942185	6.2.2008

International Business Machines

Tabulka 6: Body změny společnosti International Business Machines

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		Hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,522	-0,5050003	20.11.2008	0,305943051	20.11.2008

Intel Corp.

Tabulka 7: Body změny společnosti Intel Corp.

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,23	-0,72081842	23.2.2009	0,596312448	15.1.2008

Microsoft Corp.

Tabulka 8: Body změny společnosti Microsoft Corp.

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,569	-0,75500494	9.3.2009	0,443154698	9.3.2009

Nvidia Corporation

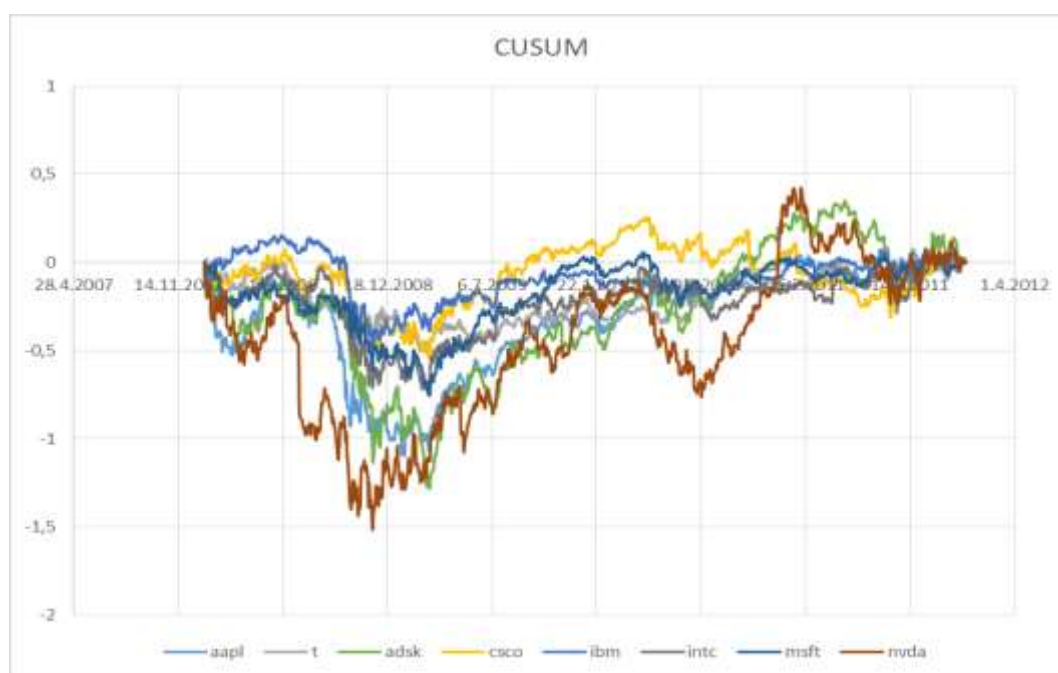
Tabulka 9: Body změny společnosti Nvidia Corporation

Interval		Koefic. významnosti	estimátor CUSUM		estimátor MSE	
od	do		hodnota	datum	hodnota	datum
3.1.2008	30.12.2011	0,842	-1,5165808	20.11.2008	1,657179225	20.11.2008

2.3 Shrnutí

Z grafu je vidět, že konec roku 2008 a především první čtvrtletí roku 2009 znamenalo změnu ve vývoji výnosů akcií ve sledovaných IT a telekomunikačních společnostech.

I když nejsou body změny, až na výjimku společnosti Autodesk Inc., významné, lze vysledovat obrat směrem ke kladným hodnotám výnosů akcií uvedených společností. Tato situace může být důsledkem končící recese, která postihla USA v roce 2007.



Obrázek 1: Graf CUSUM sledovaných společností

3 ZÁVĚR

V první části práce byly popsány teoretické základy nutné pro praktické použití Change-Point analýzy na časových řadách. V praktické části byl pomocí této analýzy nalezeny body změny v časových řadách osmi společností pohybujících se na IT a telekomunikačním trhu pro období 1.1.2008 až 31.12.2011. Časová řada pro každou společnost a období byla zkonstruována z denních uzavíracích hodnot akcií v obchodovatelných dnech, ty byly logaritmovány a následně z nich byly vypočítány výnosy. Vzhledem k tomu, že u většiny časových řad byly nalezeny pouze nevýznamné body změny, nebylo možné zabývat se otázkou vzájemného vlivu výskytu těchto bodů mezi jednotlivými řadami. Z výsledků však lze vyzorovat na podobné chování výnosů akcií (dochází k jeho zvyšování) vzhledem k výskytu prvního bodu změny (ať významného nebo nevýznamného), který se pro všechny řady objevuje v průběhu jednoho čtvrtletí na přelomu roků 2008 a 2009 v době, kdy končila v USA recese.

Použitá literatura

1. CIPRA, Tomáš. Finanční ekonometrie. Praha: Ekopress, 2013. ISBN 978-80-86929-93-4.
2. HUŠEK, Roman. Aplikovaná ekonometrie. Teorie a praxe. Praha: Oeconomica, 2009. ISBN 978-80-245-1623-3.
3. TAYLOR, Wayne A. Change-Point Analysis: A Powerful New Tool For Detecting Changes. In variation.com [online]. 2000. Dostupné z: <http://www.variation.com/cpa/tech/changepoint.html>.

Kontaktní údaje

RNDr. Petr Štourač

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3 - Žižkov

Tel: +420 224 095 423

email: stop02@vse.cz

ROBUSTNÍ ODHADY STOCHASTICKÉ VOLATILITY: ANALÝZA S&P 500

ROBUST ESTIMATORS OF STOCHASTIC VOLATILITY: ANALYSIS OF S&P 500

Petra Tomanová, Adam Krčál

Abstrakt

Cílem této práce je porovnat odhady volatility výnosů akcií S&P 500 za použití modelu stochastické volatility předpokládající t rozdělení náhodných chybových složek. První jsou parametry modelu odhadnuty pomocí Kalmanova filtru. Poté je volatilita odhadnuta pomocí metody Kalman filter smoother, Importance sampling a Particle filter. Odhadnutá volatilita na základě t rozdělení a normálního rozdělení je porovnány na výnosech S&P 500 v letech 2005 až 2014.

Klíčová slova: Stochastická volatilita, S&P 500, Kalman filter smoother, Importance sampling

Abstract

The aim of this paper is to compare different volatility estimates of returns of S&P 500 based on stochastic volatility model assuming Student's t distributed error term of the observation density. First, the parameters are estimated using Kalman filter. Then the volatility is estimated using Kalman filter smoother, Importance sampling and Particle filter method. The approaches based on Student's t distributed and normally distributed error terms are compared using S&P 500 returns of the period which spans from 2005 to 2014.

Keywords: Stochastic Volatility, S&P 500, Kalman filter smoother, Importance sampling

1 ÚVOD

Tato práce navazuje na články [3] a [4], které se zabývají porovnáním odhadů volatility výnosů akcií S&P 500 na základě modelů stochastické volatility. První jsou parametry modelu odhadnuty pomocí Kalmanova filtru a dále je volatilita modelována pomocí metody Kalman filter smoother (KFS) a Importance sampling (IS). Odhady však nejsou robustní vůči extrémním pozorováním zejména během krize.

Robustní parametrické metody mohou být obecně specifikovány dvěma způsoby:

- navržením estimátorů tak, aby bylo dosaženo předem zvoleného chování dané cílové funkce;
- nahrazením estimátorů, které jsou optimální za předpokladu normálního rozdělení, odhady, které jsou optimální pro jiné typy rozdělení: například pomocí t rozdělení s nízkými stupni volnosti, které reflektuje leptokurtické vlastnosti dat (vysoká špičatost, tlusté konce) nebo pomocí kombinace dvou či více rozdělení.

V této práci jsou porovnány robustní odhady modelů stochastické volatility předpokládající t rozdělení náhodných chybových složek.

2 MODELOVÁNÍ FINANČNÍCH CEN A VÝNOSŮ

V této sekci vycházíme ze základních modelů stochastické volatility použitých v [3] a [4], které dále upravíme o předpoklad, že náhodná chybová složka z modelů stochastické volatility není normálně rozdělená, ale sleduje t rozdělení. Tato úprava by měla vést k přesnějším odhadům volatility.

2.1 Model stochastické volatility

Nechť P_t značí uzavírací cenu obchodního dne t . Pak denní výnos r_t lze spočítat jako

$$r_t = \log(P_t/P_{t-1}) = \Delta \log P_t = \Delta p_t.$$

p_t lze chápat jako diskretizovanou realizaci spojitého procesu logaritmické ceny $\log P_t$,

$$d \log P(t) = \mu dt + \sigma(t) dW(t),$$

kde μ je střední hodnota výnosu, $\sigma(t)$ je spojitý proces volatility a $W(t)$ je standardizovaný Brownův pohyb. Nechť $\log \sigma(t)^2$ je generován Ornstein-Uhlenbeckovým procesem

$$\log \sigma(t)^2 = \xi + H(t), \quad dH(t) = -\lambda H(t) dt + \sigma_\eta dB(t),$$

kde ξ je konstanta, $0 < \lambda < 1$, σ_η je volatilita volatility (striktně pozitivní) a $B(t)$ je standardizovaný Brownovský pohyb nezávislý na $W(t)$ [1].

V souladu s [1] za použití Euler-Maruyama diskretizační metody lze pro denní výnosy y_t specifikovat model stochastické volatility následovně

$$y_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \log \sigma_t^2 = \xi + H_t, \quad H_{t+1} = \phi H_t + \sigma_\eta \eta_t,$$

kde $\phi = 1 - \lambda$, $0 < \phi < 1$. Tento nelineární model lze transformovat pomocí substituce $x_t = \log(y_t - \mu)$ na

$$x_t = h_t + u_t, \quad h_{t+1} = \omega + \phi h_t + \sigma_\eta \eta_t, \quad (1)$$

kde $u_t = \log \varepsilon_t^2$, $\omega = (1 - \phi)\xi$ a $h_t = H_t + \xi$.

Stochastický model pro časové řady finančních výnosů y_t s $\mu = 0$ lze tedy zapsat jako

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \exp(h_t), \quad \varepsilon_t \sim \text{NID}(0, 1),$$

kde logaritmická volatilita h_t sleduje stacionární autoregresní proces

$$h_{t+1} = \omega + \phi h_t + \sigma_\eta \eta_t, \quad \eta_t \sim \text{NID}(0, 1)$$

pro $t = 1, \dots, n$ s $h_1 \sim N(\omega/1 - \phi, \sigma_\eta^2/1 - \phi^2)$, se vzájemně a sériově nezkorelovanými ε_t a η_t .

2.2 Kalman filter smoother

Mějme lineární Gaussovský stavově-prostorový model definován podle [1], [2]

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1} &= T_t \alpha_t + R_t \zeta_{1t}, & \zeta_{1t} &\sim \text{NID}(0, Q_t), \\ y_t &= Z_t \alpha_t + \zeta_{2t}, & \zeta_{2t} &\sim \text{NID}(0, H_t) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$. ζ_{1t} a ζ_{2s} jsou nezávislé pro všechny t, s a nezávislé od α_1 . Vektor α_t je nepozorovaný a matice T_t, Z_t, R_t, Q_t, H_t jsou fixní v čase t .

Nepozorovaný vektor α_t lze odhadnout z pozorování za použití Kalmanova filtru [1]:

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - Z_t a_t, \\ F_t &= Z_t P_t Z_t' + H_t, \\ K_t &= T_t P_t Z_t' F_t^{-1}, \\ a_{t+1} &= T_t a_t + K_t v_t, \\ P_{t+1} &= T_t P_t T_t' + R_t Q_t R_t' - K_t F_t K_t' \end{aligned}$$

pro $t = 1, \dots, n$ a počáteční hodnoty a_1 a P_1 . Platí $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ a dále

$$a_{t+1} = \mathbb{E}(\alpha_{t+1} | Y_t), \quad P_{t+1} = \mathbb{V}\text{ar}(\alpha_{t+1} | Y_t).$$

Poté co jsou filtrované odhady spočítány, lze použít následující rekuzi, tzv. Kalman filter smoother (KFS) začínající posledním pozorováním a končící prvním [1]:

$$\begin{aligned} r_{t-1} &= F_t^{-1} v_t + L_t r_t, \\ N_{t-1} &= F_t^{-1} + L_t' N_t L_t, \\ \hat{\alpha}_t &= a_t + P_t r_{t-1}, \\ V_t &= P_t - P_t N_{t-1} P_t. \end{aligned}$$

Pro výpočet odhadu vyrovnaného modusu h_t lze použít následující rovnice vycházející z Newton-Raphson algoritmu

$$A = \text{diag} \left. \frac{2 \times \exp(h)}{Y_n} \right|_{h=g}, \quad z = g - \frac{1}{2} A + \iota,$$

kde $\iota = (1, 1, \dots, 1)^T$. Položením $H = A$ a $Y_n = z$ a za použití KFS lze pak získat odhady modusu.

2.2.1 Robustifikace aproximativní metody maximální věrohodnosti

V této kapitole předpokládáme, že náhodná složka u_t modelu (1) sleduje t rozdělení místo Gaussovského. Na základě [1, s. 228] logaritmičká věrohodnostní funkce je definována jako

$$\begin{aligned} \log L &= \sum_{i=1}^T \log p(y_i | Y_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^T \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \pi(\nu-2) - \frac{\nu+1}{2} \log \left(1 + \frac{(x_i - h_i)^2}{\nu-2} \right) \right] \end{aligned}$$

a je maximalizována na základě parametrů $\omega, \phi, \sigma_\eta$ a ν pomocí Kalmanova filtru.

2.3 Importance sampling

Cílem Importance sampling (IS) je odhadnout podmíněnou střední hodnotu $\bar{x}_t = \mathbb{E}[x_t(\alpha_{1:t}) | Y_t]$. Nechť $g(\alpha_{1:t} | Y_t)$ je gaussovská "importance" hustota:

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= \int x_t(\alpha_{1:t}) p(\alpha_{1:t} | Y_t) d\alpha_{1:t} \\ &= \int x_t(\alpha_{1:t}) \frac{p(\alpha_{1:t} | Y_t)}{g(\alpha_{1:t} | Y_t)} g(\alpha_{1:t} | Y_t) d\alpha_{1:t} \\ &= \mathbb{E}_g \left[x_t(\alpha_{1:t}) \frac{p(\alpha_{1:t} | Y_t)}{g(\alpha_{1:t} | Y_t)} \right], \end{aligned}$$

kde \mathbb{E}_g značí střední hodnotu vzhledem k "importance" hustotě $g(\alpha_{1:t}|Y_t)$. Jelikož $p(\alpha_{1:t}, Y_t) = p(Y_t)p(\alpha_{1:t}|Y_t)$, pak

$$\bar{x}_t = \mathbb{E}_g \left[x_t(\alpha_{1:t}) \frac{p(\alpha_{1:t}|Y_t)}{g(\alpha_{1:t}|Y_t)} \right] = p(Y_t)^{-1} \mathbb{E}_g [x_t(\alpha_{1:t}) \tilde{w}_t],$$

kde

$$\tilde{w}_t = \frac{p(\alpha_{1:t}, Y_t)}{g(\alpha_{1:t}|Y_t)}.$$

Položením $x_t(\alpha_{1:t}) = 1$ dostaneme $p(Y_t) = \mathbb{E}_g(\tilde{w}_t)$ a

$$\bar{x}_t = \frac{\mathbb{E}_g [x_t(\alpha_{1:t}) \tilde{w}_t]}{\mathbb{E}_g(\tilde{w}_t)}.$$

Monte Carlo odhad \bar{x}_t je pak dán rovnicí

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^N x_t(\alpha_{1:t}^{(i)}) w_t^{(i)},$$

kde

$$\tilde{w}_t^{(i)} = \frac{p(\alpha_{1:t}^{(i)}, Y_t)}{g(\alpha_{1:t}^{(i)}|Y_t)}, \quad w_t^{(i)} = \frac{\tilde{w}_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \tilde{w}_t^{(j)}}$$

a $\alpha_{1:t}^{(i)}$ je nezávislý výběr z $\alpha_{1:t}^{(i)} \sim g(\alpha_{1:t}|Y_t)$, $i = 1, \dots, N$. Řada $w_t^{(1)}, \dots, w_t^{(N)}$ se skládá z normalizovaných IS vah [1].

2.3.1 Robustifikace simulované věrohodnostní funkce

Simulovanou logaritmickou věrohodnostní funkci lze spočítat jako

$$\bar{L} = g(Y_n) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i,$$

kde $w_i = w(h^{(i)}, Y_n)$ jsou váhy získané na základě IS algoritmu upraveného o předpoklad, že náhodná složka u_t sleduje t rozdělení. Váhy jsou dány podílem hustoty t rozdělení a Gaussovské hustoty rozdělení, tj.

$$w(h^{(i)}, Y_n) = \frac{p(Y_n|h^{(i)})}{g(Y_n|h^{(i)})},$$

kde

$$p(Y_n|h) = \exp \left\{ T \log \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi(\nu-2)} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \right] - \frac{1}{2} [\tilde{h} + (\nu+1) \log q] \right\}. \quad (2)$$

q je tvořeno prvky: $q_t = 1 + \exp(-\tilde{h}) \times y_t^2 / (\nu-2)$ pro $t = 1, 2, \dots, T$ a \tilde{h} je získáno na základě smoother simulací. Pro smoother simulace definujme matici A jako $A = \text{diag}(A_t)$ a $y^* = z$, kde

$$A_t = 2(\nu+1)^{-1}(\hat{q}_t - 1)^{-1} \hat{q}_t^2, \quad z_t = \hat{h}_t + \hat{q}_t^2 - \frac{1}{2} A_t.$$

\hat{q}_t značí q_t spočítané na základě modusu \hat{h}_t . $g(Y_n)$ je získáno za použití KFS, kde $H = A$ a $Y_n = y^*$.

2.3.2 Particle filter

Velkým problémem sekvenčního importance samplingu (IS) je fakt, že algoritmus degeneruje, tj. konverguje k jedné nenulové váze $w^{(i)} = 1$, přičemž ostatní váhy jsou rovny nule. Řešením je tzv. *resampling*, který zabraňuje degeneraci algoritmu. Sekvenční IS algoritmus s dodatečným krokem (resampling) se nazývá *particle filtering*. V této práci použijeme IS algoritmus upravený o bootstrap filtr s opětovným vzorkováním.

Vyberme náhodně N hodnot $\tilde{h}_t^{(i)}$ z $p(h_t|h_{t-1}^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$, kde $h_{t+1}^{(i)} = \omega + \phi h_t^{(i)} + \eta_t^{(i)}$. Hodnota $\eta_t^{(i)}$ je získána samplováním z $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$. Váhy jsou tvořeny z hustoty pravděpodobnosti t rozdělení (2) a následně jsou normalizovány. Poté je vyrovnaná střední hodnota spočítána jako

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \tilde{h}_t^{(i)}.$$

3 ANALÝZA S&P 500

3.1 Data

V této práci jsou analyzovány ceny akcií S&P 500 od začátku roku 2005 do konce roku 2014. Upravené uzavírací ceny byly použity z článků [3] a [4] (původní zdroj: www.finance.yahoo.com). Logaritmické výnosy jsou transformovány pro účely linearizace modelu, tj. pracujeme s x_t na místo výnosů y_t , kde $x_t = \log(y_t - \mu)^2$.

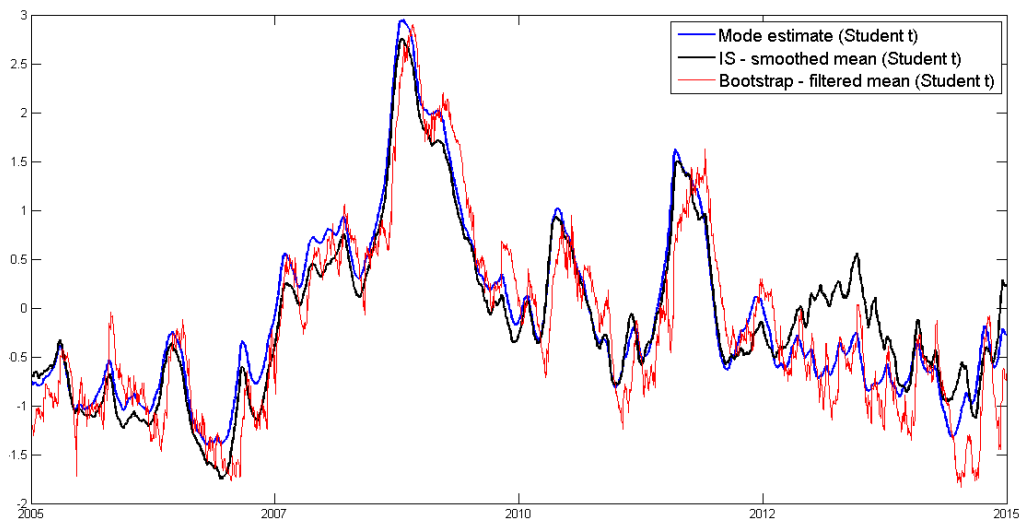
3.2 Výsledky

Pro odhady koeficientů nahrazujeme předpoklad o normálním rozdělení $u_t = \log \varepsilon_t^2 \sim \text{NID}(0, \sigma_u^2)$ předpokladem t rozdělení, tj. $u_t = \log \varepsilon_t^2 \sim t(\nu)$. Je třeba odhadnout následující koeficienty: σ_η^2 , ω , ϕ a ν . Hodnoty odhadnutých koeficientů na základě IS jsou následující:

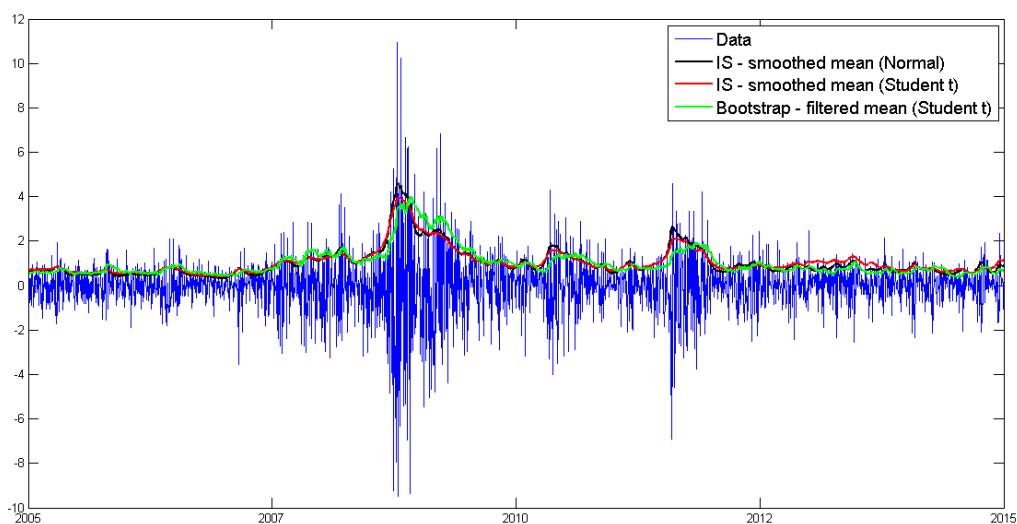
$$\sigma_\eta^2 = 0.00596, \quad \omega = 9.34e - 07, \quad \phi = 0.99997, \quad \nu = 25.59611.$$

kde ν je stupně volnosti t rozdělení náhodné složky u_t , σ_η^2 může být interpretováno jako váha přisouzená časově specifickému šoku volatilitu, neboli volatilita volatilitu, θ je efekt volatilitu z předcházejícího časového okamžiku na současnou hodnotu volatilitu, neboli parametr měřící autokorelaci. ω je střední hodnota volatilitu a je součástí výrazu pro nepodmíněnou volatilitu, $\omega/(1 - \theta)$.

Na obrázku 1 je zobrazen výstup z modelů stochastické volatilitu předpokládající t rozdělení: vyrovnaný modus h_t získaný pomocí KFS algoritmu, vyrovnaná střední hodnota h_t odhadnutá pomocí IS a filtrovaná střední hodnota h_t z bootstrap filtru (kde $N = 100$). Na obrázku 2 jsou zobrazeny logaritmické výnosy spolu s logaritmickou volatilitou vypočítanou na základě vyrovnané střední hodnoty odhadnuté pomocí IS předpokládající jak normalitu, tak t rozdělení náhodných složek u_t , a na základě bootstrap filtru předpokládající t rozdělení složky u_t . Z obou obrázků je patrné, že všechny odhady se vyvíjejí velmi podobně, ale můžeme pozorovat jisté rozdíly. Mezi roky 2005 a 2012 pozorujeme, že odhadnutý modus je mírně vyšší než vyrovnaná střední hodnota, ale mezi roky 2012 a 2014 se hodnoty výrazně rozcházejí (obrázek 1). Také lze pozorovat, že volatilita na základě t rozdělení nereaguje tak prudce na vysoké nebo velmi nízké hodnoty výnosů na rozdíl od volatilitu odhadnuté na základě předpokladu normálního rozdělení. Odhad na základě t rozdělení dává více smysl, jelikož tyto extrémnější hodnoty výnosů nastávají díky těžkým koncům rozdělení charakteristickým pro finanční data a ne díky velkému zvýšení hodnoty rozptylu.



Obrázek 1: Odhad modusu h_t získaného na základě Newton-Raphson algoritmu (modrá), odhad vyrovnané střední hodnoty h_t z importance sampling (černá) a odhad filtrované střední hodnoty h_t z bootstrapu. Všechny odhady jsou na základě SV modelu předpokládající t rozdělení.



Obrázek 2: Logaritmičké výnosy (modrá), odhad vyrovnané volatility $\exp(h_t/2)$, kde h_t je odhadnuto jako: vyrovnaná střední hodnota z importance sampling předpokládající normální rozdělení (černá) a t rozdělení (červená); filtrovaná střední hodnota h_t z bootstrapu předpokládající t rozdělení (zelená).

4 ZÁVĚR

Tato práce reportuje a srovnává výsledky pro odhad volatility výnosů akcií S&P 500 pro roky 2005 až 2014. K tomuto účelu byl použit model stochastické volatility využívající Kalman filter smoother, Importance sampling a Particle filter předpokládající t rozdělení náhodné chybové složky namísto normálního rozdělení. Empirická studie ukazuje, že předpoklad t rozdělení je rozumnější a lépe reflektuje leptokurtickou povahu dat. Odhad volatility na základě t rozdělení je robustnější vůči extrémním pozorováním. Naproti tomu model předpokládající normální rozdělení nadhodnocuje odhad volatility v obdobích krize.

Poděkování

Tento článek byl napsán v rámci grantu IGS F4/93/2017 Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

- [1] DURBIN, James; KOOPMAN, Siem Jan. Time series analysis by state space methods. Oxford University Press, 2012.
- [2] GHYSELS, Eric; HARVEY, Andrew C.; RENAULT, Eric. Stochastic volatility. Handbook of statistics, 1996, 14: 119-191.
- [3] TOMANOVÁ, Petra. Analýza S&P 500 pomocí modelu stochastické volatility. In Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu. Bratislava: Ekonóm, 2016, s. 162–166.
- [4] TOMANOVÁ, Petra. Porovnání odhadů stochastické volatility: Analýza S&P 500. In Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu. Bratislava: Ekonóm, 2017, s. 158–163.

Kontaktní údaje

Ing. Petra Tomanová, MSc
Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta statistiky a informatiky
nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3
Tel: (420) 224 09 5445
email: petra.tomanova@vse.cz

ANALÝZA ZÁVISLOSTI PRŮMĚRNÉ MZDY NA HDP VE STÁLÝCH CENÁCH

ANALYSIS OF THE AVERAGE WAGE DEPENDENCE ON GDP AT FIXED PRICES

Petra Zýková

Abstrakt

Tento článek se zabývá analýzou závislosti průměrné mzdy na HDP ve stálých cenách v České republice. Analyzovány jsou čtvrtletní časové řady od roku 2000 do roku 2017. Cílem je zjistit vztah mezi průměrnou mzdou a HDP ve stálých cenách při použití kointegrační analýzy. Postupně je zkoumána sezónnost a stacionarita časových řad. Podle zjištěných vlastností je uveden výsledný vztah mezi řadami.

Klíčová slova: časové řady, mzdy, HDP

Abstract

This article deals with the analysis of the average wage dependence on GDP at fixed prices in the Czech Republic. Quarterly time series from 2000 to 2017 are analysed. The aim is to determine the relationship between average wage and GDP at fixed prices using co-integration analysis. Gradually the seasonality and the stationarity of the time series are examined. Depending on the properties found, the resulting relationship between series is shown.

Keywords: time series, wages, GDP

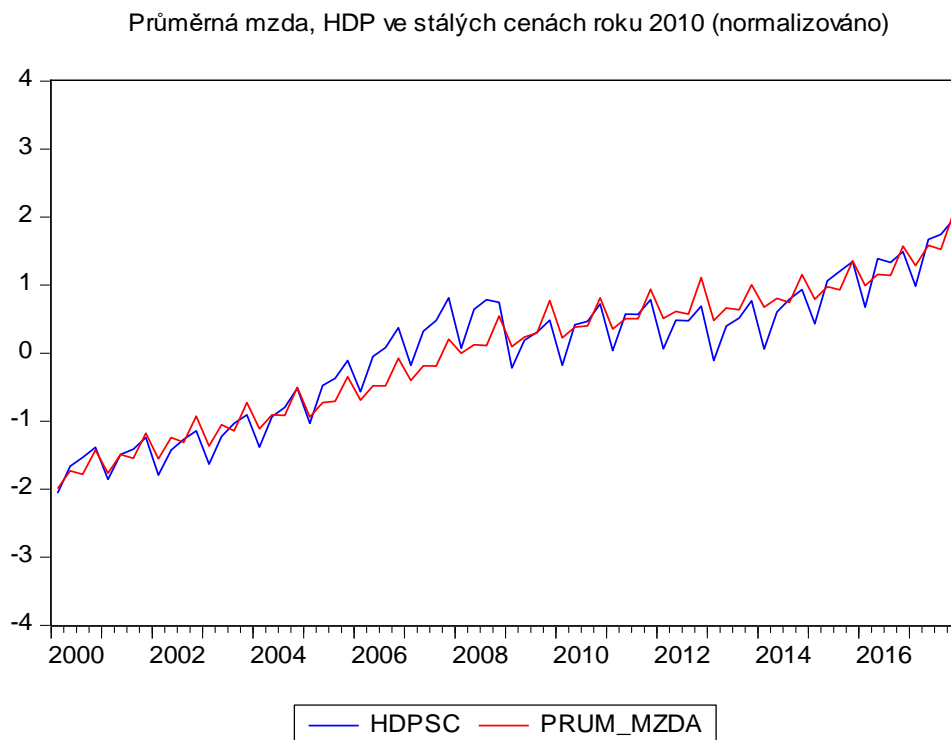
1 ÚVOD

V novinách se často píše, že se máme dobře, a že naše země bohatne. Je tomu ale opravdu tak? Tento článek si dává za cíl vyzkoumat vztah mezi průměrnou mzdou a HDP. Pokud se prokáže závislost průměrné mzdy na HDP, tak mají novináři pravdu. Pokud se prokáže opak, tak jsou takové zprávy v novinách zavádějící. Snaží se nás navnadit, abychom nakupovali, nakupovali a podporovali růst HDP. HDP budu považovat jako zástupce bohatství v dané analýze.

Článek je rozdělen několika kapitol. V následujících kapitolách zkoumám data použitá pro analýzu, jejich sezónnost a stacionaritu. Následně zjišťuji vztah mezi průměrnou mzdou a HDP ve stálých cenách roku 2010 (dlouhodobý i krátkodobý). Závěrečná kapitola je věnována shrnutí výsledků.

2 DATA

Pro analýzu jsem použila data dostupná z [4]. K dispozici mám čtvrtletní časové řady od I/2000 do IV/2017. První časová řada je průměrná mzda v Kč (prum_mzda), druhá časová řada je hrubý domácí produkt ve stálých cenách roku 2010 v milionech Kč (hdpssc). V grafu 1 je vidět průběh těchto časových řad. Z grafu 1 je vidět, že obě časové řady mají podobný vývoj a jsou sezónní. Proto časové řady sezónně očistím.



Graf 1: Vstupní data analýzy – průměrná mzda, HDP. Zdroj [4], vlastní tvorba.

3 TESTOVÁNÍ SEZÓNNOSTI

Pro analýzu jsou použity čtvrtletní časové řady a tudíž je velká pravděpodobnost, že periodicky systematicky kolísají, tj. vykazují sezónnost, kterou je třeba otestovat. Pokud jsou časové řady sezónní, je třeba je očistit o sezónní výkyvy a dále pracovat se sezónně očištěnou časovou řadou.

3.1 Průměrná mzda

Testujeme nulovou hypotézu H_0 , která předpokládá, že střední hodnota průměrné mzdy je všech čtvrtletí shodná oproti alternativě H_1 .

$$H_0: \mu_I = \mu_{II} = \mu_{III} = \mu_{IV}$$

$$H_1: \text{non } H_0$$

Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ i na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ se podařilo prokázat, že zamítáme nulovou hypotézu H_0 ve prospěch alternativní hypotézy H_1 . To znamená, že časová řada prum_mzda vykazuje sezónnost. Proto bude dále pracovat se sezónně očištěnou časovou řadou prum_mzda_d11, kterou jsem získala v EViews pomocí metody X-13 ARIMA-SEATS.

3.2 HDP ve stálých cenách roku 2010

Testujeme nulovou hypotézu H_0 , která předpokládá, že střední hodnota HDP ve stálých cenách roku 2010 je ve všech čtvrtletí shodná oproti alternativě H_1 .

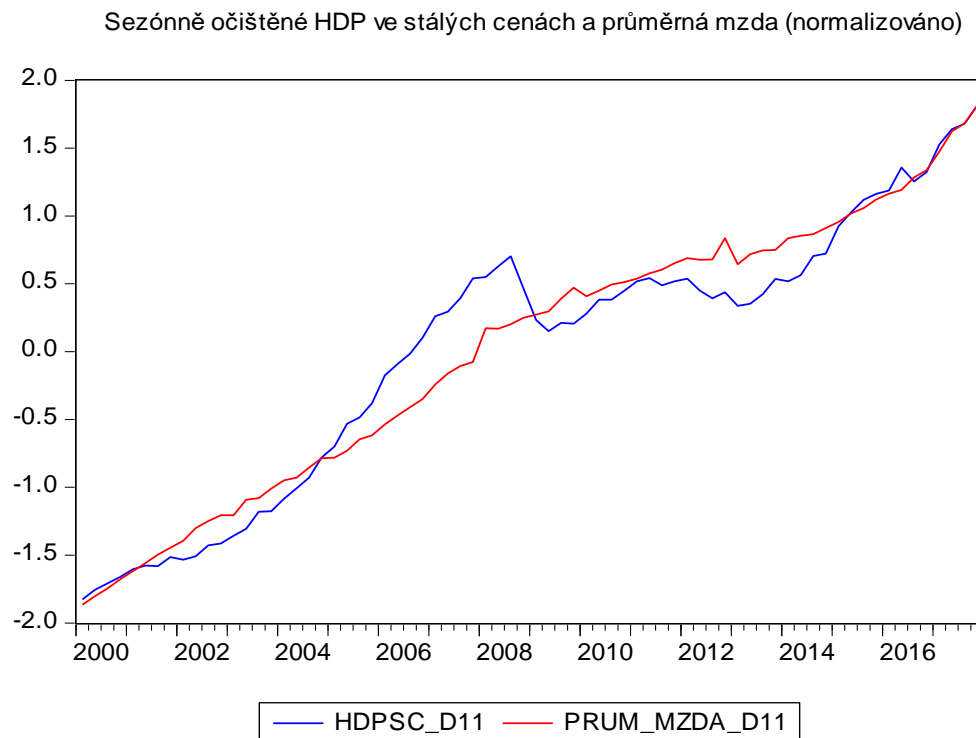
$$H_0: \mu_I = \mu_{II} = \mu_{III} = \mu_{IV}$$

$$H_1: \text{non } H_0$$

Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ i na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ se podařilo prokázat, že zamítáme nulovou hypotézu H_0 ve prospěch alternativní hypotézy H_1 . To znamená, že časová řada $hdpsc$ vykazuje sezónnost. Proto bude dále pracovat se sezónně očištěnou časovou řadou $hdpsc_d11$, kterou jsem získala v EViews pomocí metody X-13 ARIMA-SEATS.

4 TESTOVÁNÍ STACIONARITY SEZÓNNE OČIŠTĚNÝCH ČASOVÝCH ŘAD

Zkoumám, zda očištěné časové řady v grafu 2 jsou stacionární či nikoli.



Graf 2: Sezónně očištěné HDP ve stálých cenách a průměrná mzda.

Testování stacionarity se provádí pomocí testu jednotkového kořene. Použiji Dickey-Fullerův test, který vychází ze tří modelů:

- a) $X_t = \phi_a X_{t-1} + a_t$ model bez konstanty,
- b) $X_t = C_b + \phi_b X_{t-1} + a_t$ model s konstantou,
- c) $X_t = C_c + \gamma_c t + \phi_c X_{t-1} + a_t$ model s konstantou a trendem.

Nulová hypotéza H_0 říká, že testovaná časová řada je nestacionární.

$$H_0: \phi_i = 0 \quad i = a, b, c$$

$$H_1: \phi_i < 0 \quad i = a, b, c$$

4.1 Průměrná mzda

Testuji nulovou hypotézu H_0 , která předpokládá, že časová řada `prum_mzda_d11` má jednotkový kořen oproti alternativě H_1 .

H_0 : *prum_mzda_d11 má jednotkový kořen*

H_1 : *non H_0*

prum_mzda_d11		p-value
a)	model bez konstanty	0,8905
b)	model s konstantou	0,7774
c)	model s konstantou a trendem	1,0000

Tabulka 1: Testy jednotkového kořene pro časovou řadu `prum-mzda_d11`.

V tabulce 1 jsou hodnoty p-value pro testy jednotkového kořene pro průměrnou mzdu. Z tabulky je vidět, že na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ se nepodařilo zamítnout nulovou hypotézu H_0 o tom, že časová řada `prum_mzda_d11` má jednotkový kořen. Dále budu předpokládat, že časová řada `prum_mzda_d11` je nestacionární.

4.2 HDP ve stálých cenách roku 2010

Testuji nulovou hypotézu H_0 , která předpokládá, že časová řada `hdpsc_d11` má jednotkový kořen oproti alternativě H_1 .

H_0 : *hdpsc_d11 má jednotkový kořen*

H_1 : *non H_0*

hdpsc_d11		p-value
a)	model bez konstanty	0,9052
b)	model s konstantou	0,8294
c)	model s konstantou a trendem	0,9993

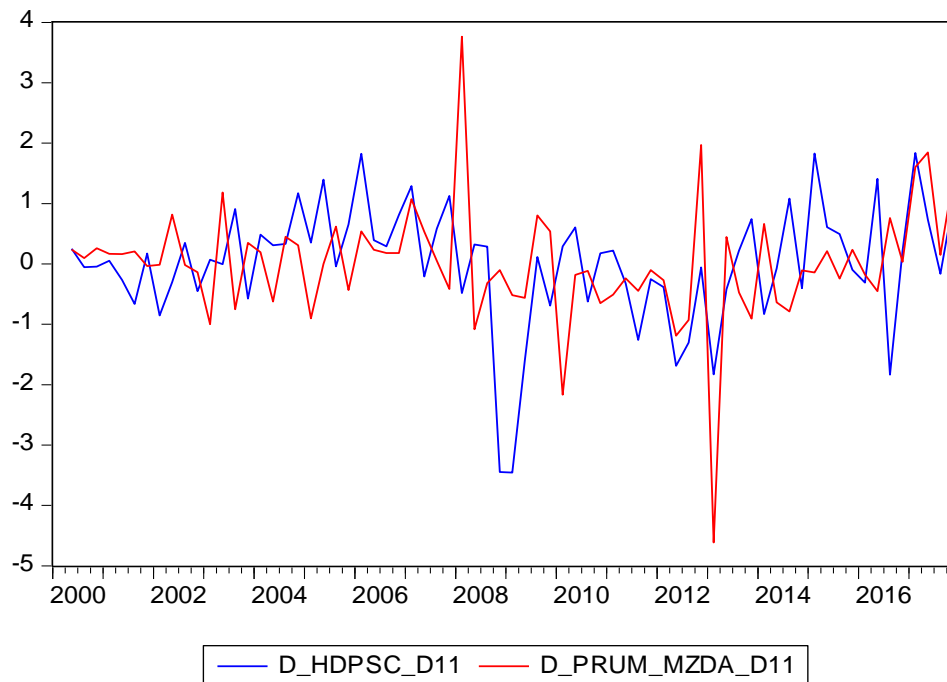
Tabulka 2: Testy jednotkového kořene pro časovou řadu `hdpsc_d11`.

V tabulce 2 jsou hodnoty p-value pro testy jednotkového kořene pro HDP ve stálých cenách roku 2010. Z tabulky je vidět, že na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ se nepodařilo zamítnout nulovou hypotézu H_0 o tom, že časová řada `hdpsc_d11` má jednotkový kořen. Dále budu předpokládat, že časová řada `prum_mzda_d11` je nestacionární.

5 TESTOVÁNÍ STACIONARITY SEZÓNĚ OČIŠTĚNÝCH DIFERENCOVANÝCH ČASOVÝCH ŘAD

Zkoumám, zda očištěné diferencované časové řady v grafu 3 jsou stacionární či nikoli.

Sezónně očištěné a zdiferencované HDP ve stálých cenách a průměrná mzda (normalizováno)



Graf 3: Sezónně očištěné a diferencované HDP ve stálých cenách a průměrná mzda.

5.1 Průměrná mzda

Testuji nulovou hypotézu H_0 , která předpokládá, že časová řada $d_prum_mzda_d11$ má jednotkový kořen oproti alternativě H_1 .

H_0 : $d_prum_mzda_d11$ má jednotkový kořen

H_1 : *non* H_0

	d_prum_mzda_d11	p-value
a)	model bez konstanty	0,5078
b)	model s konstantou	0,0001
c)	model s konstantou a trendem	0,0000

Tabulka 3: Testy jednotkového kořene pro časovou řadu $d_prum_mzda_d11$.

V tabulce 3 jsou hodnoty p-value pro testy jednotkového kořene pro průměrnou mzdu. Z tabulky je vidět, že na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ se podařilo zamítnout nulovou hypotézu H_0 o tom, že časová řada $d_prum_mzda_d11$ má jednotkový kořen pro model s konstantou a pro model s trendem a konstantou. Pro model bez konstanty se nepodařilo

zamítnout nulovou hypotézu H_0 . Dále budu předpokládat, že časová řada $d_prum_mzda_d11$ je stacionární.

5.2 HDP ve stálých cenách roku 2010

Testuji nulovou hypotézu H_0 , která předpokládá, že časová řada d_hdpsc_d11 má jednotkový kořen oproti alternativě H_1 .

H_0 : $hdpsc_d11$ má jednotkový kořen

H_1 : $non H_0$

d_hdpsc_d11		p-value
a)	model bez konstanty	0,0403
b)	model s konstantou	0,0000
c)	model s konstantou a trendem	0,0000

Tabulka 4: Testy jednotkového kořene pro časovou řadu d_hdpsc_d11 .

V tabulce 4 jsou hodnoty p-value pro testy jednotkového kořene pro HDP ve stálých cenách roku 2010. Z tabulky je vidět, že na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ se podařilo zamítnout nulovou hypotézu H_0 o tom, že časová řada d_hdpsc_d11 má jednotkový kořen. Dále budu předpokládat, že časová řada d_hdpsc_d11 je stacionární.

6 ANALÝZA VZTAHU MEZI ČASOVÝMI ŘADAMI

Zkoumám závislost sezónně očištěné průměrné mzdy na sezónně očištěném HDP ve stálých cenách roku 2010:

$$prum_mzda_d11 = C + \beta_1 hdpsc_d11 + a_t \quad (1)$$

Provedu Engle-Grangerův test kointegrace [2] zabudovaný v EViews. Testuji nulovou hypotézu H_0 , o tom, že zkoumané časové řady nejsou kointegrované.

H_0 : časové řady nejsou kointegrované

H_1 : $non H_0$

závislá proměnná	p-value
prum_mzda_d11	0,7268

Tabulka 5: Engle-Grangerův test kointegrace pro model (1).

V tabulce 5 je uvedena hodnota p-value pro Engle-Grangerův test kointegrace časových řad. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ se nepodařilo zamítnout nulovou hypotézu H_0 o tom, že časové řady nejsou kointegrované. Tudíž časové řady $hdpsc_d11$ a $prum_mzda_d11$ nejsou kointegrované a neexistuje mezi nimi dlouhodobý vztah. Pokud bych prováděla regresi podle

modelu (1), jednalo by se o tzv. zdánlivou regresi. Mohu zkoumat pouze tzv. krátkodobý vztah – vztah mezi diferencovanými časovými řadami. Analyzuji model (2):

$$\Delta prum_mzda_d11 = C_2 + \beta_2 \Delta hdpsc_d11 + a_{2t} \quad (2)$$

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob
C	215,9872	34,6962	6,2251	0,0000
D(HDPSC_D11)	0,0047	0,0028	1,6613	0,1012

Tabulka 6: Výstup odhadu modelu (2).

V tabulce 6 je uvedena hodnota p-value pro konstantu a regresní koeficient β_2 . Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ vyšla konstanta jako statisticky významná. Regresní koeficient β_2 vyšel statisticky nevýznamný. Z toho vyplývá, že průměrná mzda nezávisí na HDP ve stálých cenách roku 2010 krátkodobě. Průměrná mzda tedy nezávisí na HDP ve stálých cenách roku 2010 jak dlouhodobě, tak ani krátkodobě.

Toto zjištění odpovídá tomu, že i když nám v televizi a v novinách tvrdí, jak jako země bohatneme, tak na našich mzdách se to neprojevuje. Rozhodně se to neprojevuje tolik, jak oni tvrdí. Tudíž nejsme „bohatší“ z pohledu velikosti mzdy.

7 ZÁVĚR

V článku byla provedena analýza závislosti průměrné mzdy na HDP ve stálých cenách roku 2010 v České republice. Nejprve jsem testovala sezónnost zkoumaných časových řad. Sezónnost jsem z časových řad očistila a dále jsem je testovala na stacionaritu/nestacionaritu pomocí testu jednotkového kořene. Zjistila jsem, že obě časové řady jsou nestacionární. Následně jsem testovala stacionaritu/nestacionaritu diferencovaných časových řad. Zjistila jsem, že první diference zkoumaných časových řad jsou stacionární. Při analýze jsem zjistila, že průměrná mzda a HDP ve stálých cenách roku 2010 nejsou kointegrované časové řady, tudíž mezi nimi není tzv. dlouhodobý vztah. Při analýze krátkodobého vztahu jsem zjistila, že průměrná mzda nezávisí na HDP ve stálých cenách roku 2010 ani krátkodobě. Z toho vyplývá, že články v novinách, které obyvatelstvu tvrdí, že bohatne, jsou zavádějící. Růst HDP nemá vliv na výši našich mezd.

Všechny testy, analýzy a odhady modelů byly provedeny v programu EViews.

Použitá literatura

1. ARLT, J., ARLTOVÁ, M. *Ekonomické časové řady*. Praha: Professional Publishing, 2009
2. ENGLE, R, GRANGER, C. Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. *Econometrica*, 55, 1987
3. HUŠEK, R. *Aplikovaná ekonometrie: Teorie a praxe*, Praha: Oeconomica, 2009
4. https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr

Kontaktní údaje

Ing. Bc. Petra Zýková.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

email: petra.zykova@vse.cz