

Katedra ekonometrie  
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie  
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum

**MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ  
NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII  
A OPERAČNÍM VÝZKUMU**

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Slovenskej spoločnosti pre operačný výskum

ZBORNÍK

27. november – 29. november 2019

27. listopad – 29. listopad 2019

Praha

### **Programový výbor – recenzenti:**

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava  
doc. dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD., VŠE Praha  
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha  
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava  
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

### **Organizačný výbor:**

Ing. Jan Zouhar, PhD.  
Ing. Brian König, PhD.

**Náklad: 50 ks**  
**AH 9,82**

**Kontakt:** [brian.konig@euba.sk](mailto:brian.konig@euba.sk)

**Editor:** Ing. Brian König, PhD.

**Web editor:** doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Praze,  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,  
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,  
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2019

ISBN: 978-80-225-4650-8

# Obsah

<i>Ivan Brezina, Pavel Gežík:</i> <u>METÓDA PERT VERSUS METÓDA GERT</u>	5
<i>Zuzana Čičková, Patrícia Holzerová:</i> <u>PRIESTOROVÝ MODEL DUOPOLU S RÔZNYMI DOPYTMI</u>	13
<i>Petr Fiala, Renata Majovská:</i> <u>KOORDINAČNÍ HRY</u>	19
<i>Dana Figurová:</i> <u>UTILITARNE RIEŠENIE PRI ALOKACII ÚSPOR Z KOOPERATÍVNEJ HRY</u>	25
<i>Lukáš Frýd:</i> <u>MÁ VÝZNAM ANALYZOVAT FELDSTEIN-HORIOKŮV MODEL V ČASOVĚ FREKVENČNÍ DOMÉNĚ?</u>	31
<i>Jiří Georgiev:</i> <u>VÝBĚR POČTU ZPOŽDĚNÍ VE VÍCEROZMĚRNÝ MODELECH ČASOVÝCH ŘAD POMOCÍ KŘÍŽOVÉ VALIDACE</u>	37
<i>Pavel Gežík:</i> <u>PYGMALIOS ANALYTICS AKO NÁSTROJ ZBERU DÁT SÚVISIACICH SO ZÁKAZNÍCKYM SPRÁVANÍM SA V KAMENNÝCH PREDAJNIACH</u>	43
<i>Marián Goga:</i> <u>NIEKTORÉ ASPEKTY KEYNESOVEJ A LEONTIEFOVEJ KONCEPCIE MULTIPLIKÁTORA</u>	50
<i>Jakub Hanousek:</i> <u>ANALÝZA CENOVÉHO DNA AUTOMOBILŮ POMOCÍ KVANTITATIVNÍCH METOD</u>	56
<i>Patrícia Holzerová, Zuzana Čičková:</i> <u>OCHRANA HOSPODÁRSKEJ SÚŤAŽE A PROTIMONOPOLNÁ POLITIKA V PODMIENKACH EÚ A SR</u>	63
<i>Michaela Chocholatá:</i> <u>ANALÝZA CITLIVOSTI POHYBU VYBRANÝCH MIEN NA POHYBY EURA A AMERICKÉHO DOLÁRA</u>	70
<i>Miroslava Jánošová:</i> <u>INDEXY PRE VÝPOČET VOLEBNEJ SILY</u>	75
<i>Stanislav Kováč, Alexander Frasch, Hana Palušková:</i> <u>ANALÝZA MONETÁRNEHO TRANSMISNÉHO MECHANIZMU NA SLOVENSKU</u>	80

<i>Radoslav Lacko:</i> <u>ELASTICITA DOPYTU PO POHONNÝCH HMOTÁCH V ČESKEJ REPUBLIKE</u>	90
<i>Martin Lukáčik:</i> <u>ODHAD VEKTOROVÝCH MODELOV S KOREKČNÝM ČLENOM V SYSTÉME R</u>	96
<i>Veronika Miťková:</i> <u>ANALÝZA DAŇOVÉHO BREMENA NA SLOVENSKU A V ČECHÁCH</u>	102
<i>Vladimír Mlynarovič:</i> <u>PLATFORMA PRE OPTIMALIZÁCIU PORTFÓLIA</u>	109
<i>Juraj Pekár, Mário Pčolár:</i> <u>FINANČNÉ DÁTA A ICH GRAFICKÉ ZOBRAZENIE V JAZYKU R</u>	114
<i>Jan Pelikán, Petr Štourač, Michal Černý:</i> <u>HEURISTICS FOR NON-SPLIT DELIVERY VRP WITH UNIFORM PRIVATE FLEET AND COMMON CARRIER: A COMPUTATIONAL STUDY</u>	121
<i>Marian Reiff:</i> <u>PREHĽAD METODOLÓGIE SKRYTÉHO MARKOVOVHO MODELU</u>	128
<i>Allan Jose Sequeira Lopez, Zuzana Čičkova:</i> <u>EVOLUČNÉ ALGORITMY A BIMATICOVÉ HRY</u>	133
<i>Ondřej Sokol:</i> <u>ODHAD VLIVU MARKETINGOVÝCH AKCÍ NA MALOOBCHODNÍ PRODEJE</u>	139
<i>Petra Zýková:</i> <u>APLIKACE ANALÝZY ČASOVÝCH OKEN</u>	145

# METÓDA PERT VERSUS METÓDA GERT

## PERT METHOD VERSUS GERT METHOD

*Ivan Brezina, Pavel Gežík*

### **Abstrakt**

Grafická reprezentácia rôznych typov technických a ekonomických rozhodovacích problémov vo forme grafu zvyčajne veľmi názorne zobrazuje taký reálny problém, ktorého vlastnosti môžu byť reprezentované bodmi a čiarami ich spájajúcimi. Sieťová analýza vo všeobecnosti analyzuje vlastnosti takých problémov, ktoré umožňujú prehľadne prezentovať ich štruktúru, predovšetkým vzájomné interakcie medzi jednotlivými prvkami tvoriacimi analyzovaný systém. Najznámejšími aplikáciami sieťovej analýzy sú metódy hľadania kritickej cesty v sieti, z ktorých najznámejšou a vo všeobecnosti aj najpoužívanejšou metódou je CPM (*Critical Path Method*), ale tiež metódy PERT (*Program Evaluation and Review Technique*), MPM (*Metra Potential Method*), GERT (*Graphical Evaluation and Review Technique*), PDM (*Precedence Diagramming Method*) či CCPM (*Critical Chain Project Management*) a ďalšie.

Príspevok porovnáva možnosti situácií, pri ktorých je vhodné použiť metódu PERT, resp. metódu GERT, ktoré sa zvyčajne označujú ako stochastické metódy. Avšak štruktúra vstupných údajov a teda aj postupy výpočtu a získané výsledky sú diametrálne odlišné.

***Kľúčové slová:*** sieťová optimalizácia, PERT, GERT

### **Abstract**

The graphical representation of different types of technical and economic decision-making problems in the form of a graph usually depicts such a real problem whose properties can be represented by points and lines connecting them. Network analysis generally analyzes the characteristics of such problems, which enable to present their structure in a transparent way, especially the interactions between individual elements forming the analyzed system. The most well-known applications of network analysis are methods of searching for the critical path in the network, from which the most known and generally used method is CPM (*Critical Path Method*), but also methods PERT (*Graphical Evaluation and Review Technique*), PDM (*Precedence Diagramming Method*), CCPM (*Critical Chain Project Management*), and more.

The paper compares the possibilities of situations where it is appropriate to use the PERT method or GERT method, commonly referred to as stochastic methods. However, the structure of the input data and hence the calculation procedures and results obtained are diametrically different.

***Keywords:*** Network Optimization, PERT, GERT

## **ÚVOD**

Medzi efektívne nástroje v oblasti riadenie projektov patrí aj skupina špeciálnych analytických metód použiteľných pri analýze alebo optimalizácii vzájomne prepojených a súvisiaceho prvkov, ktoré majú medzi sebou nejakú súvislosť, metódy sieťovej analýzy.

Metódy sieťovej analýzy sa využívajú na zosúladenie časovej nadväznosti rôznych, vzájomne sa podmieňujúcich a na seba nadväzujúcich činností pri riadení rozsiahlych projektov. Sieťová analýza sa orientuje na zostavenie matematických modelov zodpovedajúcich projektov, ktoré sú tvorené na seba nadväzujúcimi technickými, technologickými a organizačnými procesmi (väzbami), poskytuje nástroje na riešenie reálnych problémov a ich aplikáciu. Základnými metódami sieťovej analýzy sú metóda kritickej cesty CPM (*Critical Path Method*) a metóda PERT (*Program Evaluation and Review Technique*), ako aj metódy MPM (*Metra Potential Method*) a GERT (*Graphical Evaluation and Review Technique*), z novších metód PDM (*Precedence Diagramming Method*) a metóda CCPM (*Critical Chain Project Management*) a ďalšie.

## 1 HĽADANIE KRITICKEJ CESTY

Cieľom hľadania kritickej cesty je určenie doby trvania projektu na základe hodnoty (dĺžky, trvania) tzv. kritickej cesty, ktorú predstavuje sled vzájomne na seba nadväzujúcich a vzájomne súvisiacich závislých činností s najmenšou časovou rezervou. Kritickú cestu možno definovať ako časovo najdlhšiu možnú cestu zo začiatočného uzlu sieťového grafu<sup>1</sup> do jeho koncového bodu, pričom v každom projekte sa dá nájsť minimálne jedna kritická cesta.

Činnosti v sieťovom grafe sa musia realizovať v stanovenom a logickom poradí na základe určitých časových, technických, technologických, alebo organizačných nadväzností. Pritom v rámci projektu môžu viaceré činnosti prebiehať súbežne. Množinu všetkých činností projektu možno rozdeliť na podmnožiny, kde činnosti jednej podmnožiny sú usporadúvané podľa nadväznosti (časovej, technickej, technologickej či organizačnej) v stanovenom poradí. Takéto podmnožiny sa nazývajú vetvami činností, pričom jednotlivé činnosti patriace do rôznych skupín vetiev prebiehajú relatívne nezávisle.

V rámci sieťového grafu projektu sa rozlišujú „cesty“ spájajúce začiatok a koniec projektu (začiatočný a koncový uzol sieťového grafu), ktoré zodpovedajú práve vetvám činností projektu. Čas potrebný na realizáciu všetkých činností obsiahnutých v rámci jednej vetvy, teda trvanie vetvy zodpovedá „dĺžke cesty“. Najdlhšia cesta v grafe (cesta zodpovedajúca vetve s najdlhším trvaním činností na nej ležiacich) určuje predpokladaný čas ukončenia projektu, resp. jeho celkové trvanie od začiatku projektu. Takáto cesta sa nazýva „kritická cesta“.

Hľadanie kritickej cesty sa používa predovšetkým na určenie harmonogramu výstavby rôznych projektov, na riadenie výrobných činností z hľadiska ich časového rozvrhovania, na riešenie úloh o maximálnej priepustnosti komunikačného systému a iné. Každá kritická cesta sa skladá zo súboru činností, na ktoré by sa mal projektový manažér zamerať predovšetkým, ak chce zabezpečiť včasné dokončenie realizácie projektu. Kritická cesta sa premietá do časového plánovania a riadenia projektu vo všetkých životných fázach jeho životného cyklu.

Výpočet kritickej cesty spočíva v časovej analýze činností projektov a môže sa realizovať rôznymi metódami v závislosti od parametrov sieťového grafu, ktorý zobrazuje činnosti projektu.

V prípade, ak sú parametre jednotlivých činností presne definované, ide o deterministickú úlohu kritickej cesty v sieti, na ktorej riešenie sa používa metóda CPM (*Critical Path Method*), ak sú parametre činností určené len s určitou pravdepodobnosťou, ide o stochastickú

---

<sup>1</sup> Neorientovaným grafom nazývame usporiadanú dvojicu  $G = (U, H)$ , pre ktorú  $U = \{u_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) je konečná neprázdna množina  $n$  vrcholov a  $H = \{h_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) je množina hrán grafu  $G$ , hrany  $h_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) pritom tvorí množina dvojprvkových podmnožín množiny  $U$  ( $H$  je ľubovoľná podmnožina množiny všetkých kombinácií druhej triedy prvkov množiny  $U$ ).

úlohu kritickej cesty v sieti, na riešenie možno použiť metódu PERT (*Program Evaluation and Review Technique*). Ak pribudne stochastická štruktúra sieťového grafu a k činnostiam pribudnú pravdepodobnosti, možno použiť metódu GERT (*Graphical Evaluation and Review Technique*).

Tieto všetky metódy sa používajú na hranovo orientované sieťové grafy. Ak ide o uzlovo orientovaný graf, tak je vhodná metóda MPM (*Metra Potencial Method*). Prehľadné použitie týchto metód poskytuje tabuľka 1.

Tabuľka 1 Metódy hľadania kritickej cesty

Sieťový graf	Štruktúra grafu	Interpretácia ohodnotenia	Druh ohodnotenia	Metóda
Hranovo orientovaný	Deterministická	Čas	Deterministické	CPM
			Stochastické	PERT
		Náklady	Deterministické	CPM/COST
		Zdroje	Deterministické	Sumarizácia, rozvrhovanie a vyrovnanie
	Stochastická	Čas	Deterministické	GERT
		Náklady	Deterministické	
Pravdepodobnosť		Stochastické		
Uzlovo definovaný	Deterministické	Čas	Deterministické	MPM
		Náklady	Deterministické	Počítačové systémy
		Zdroje	Deterministické	

## 2 METÓDA PERT

Metóda PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) je svojou technikou založená na najpoužívanejšej metóde sieťovej analýzy hľadania kritickej cesty, na metóde CPM (*Critical Path Method*). Metóda CPM vychádza z časovej analýzy údajov spojených s riadením projektu, resp. jeho realizáciou. Jedná sa najmä o termíny realizácie jednotlivých činností, pričom sa zameriava na určovanie začiatkov a koncov jednotlivých činností. Najdôležitejší je pritom koniec poslednej činnosti, ktorý hovorí o konci, resp. termíne ukončenia projektu.

Najdôležitejšou úlohou všetkých metód rozvrhovania na seba nadväzujúcich činností je určovanie začiatkov a koncov činností, určenie najskôr možného termínu dokončenia projektu alebo vymedzenie časových rezerv v projekte, teda *časová analýza*. Na časovú analýzu nadväzuje *nákladová analýza*, ktorá sa nezaobera len samotným trvaním jednotlivých činností, ale viaže sa na náklady spojené s danými činnosťami. Nákladová analýza sa používa na určenie najvhodnejšieho priebehu projektu z hľadiska vzájomného vzťahu trvania projektu a nákladov spojených s projektom. *Analýza zdrojov* predstavuje plánovanie zdrojov a rieši otázku časového rozvrhu využívania zdrojov. A nakoniec *analýza rizika* alebo pravdepodobnostná analýza vychádza z faktu, že nie všetky činnosti musia mať presne (deterministicky) stanovené ich trvanie, ale môžu byť stanovené s istou pravdepodobnosťou trvania (stochasticky), ktoré udáva podmienené pravdepodobnosti realizácie jednotlivých

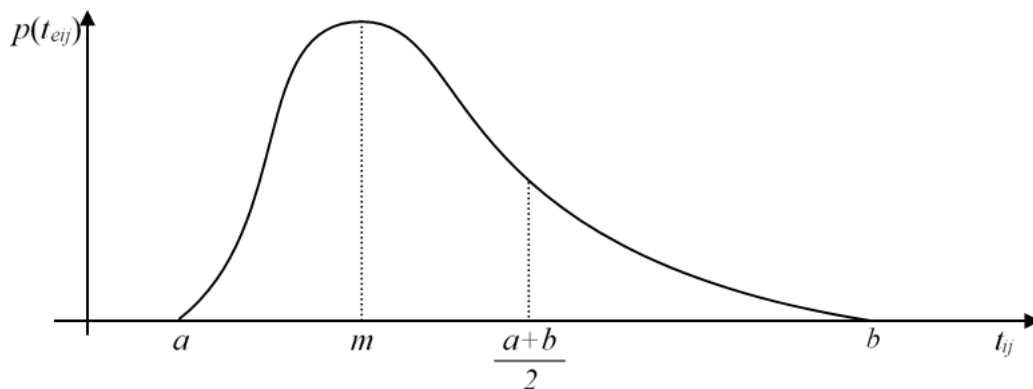
činností. Práve rozborom týchto činností sa zaoberá pravdepodobnostná analýza, ktorá umožňuje sledovať, s akou pravdepodobnosťou sa budú realizovať dané činnosti a s akou pravdepodobnosťou budú splnené parametre projektu. Keďže so splnením týchto činností je spojené isté riziko oneskorenia, resp. pravdepodobnosť umožňuje, že niektoré činnosti môžu s malou pravdepodobnosťou meškať, táto analýza sa môže označovať i ako analýza rizika.

Plánovanie projektov pozostáva predovšetkým z časového plánovania, ktoré vychádza z postupného zostavovania priebehu realizácie činností a určuje tak postupnosť vykonávania týchto činností. Jednu z hlavných charakteristík projektu reprezentuje najčastejšie odhad doby trvania jednotlivých činností ako aj pevné zadanie štruktúry a časov (deterministické hodnoty), ktoré sú charakteristické pre metódu CPM.

Metóda PERT sa od metódy CPM líši stochastickým odhadom časov jednotlivých činností, pričom štruktúra sieťového grafu je deterministická. Medzi základné stochastické metódy odhadu doby trvania činností patria simulácie (napr. metóda Monte Carlo), resp. skupinové techniky (napr. metóda Delphi).

Označenia časových charakteristík sú zhodné s označeniami v metóde CPM, odlišnosti sú len pri dvoch charakteristikách, a to pri vypočítanom čase trvaní projektu a pri trvaní činnosti ( $i, j$ ). Vypočítaný čas trvaní projektu (dĺžka vypočítanej kritickej cesty), označovaný v CPM ako  $T_1$  alebo  $T_n$ , sa pri PERT označuje ako  $T_e$  a predstavuje odhadovaný čas trvania projektu, resp. odhadovaný termín skončenia projektu, kde je jeho dodržanie dané pravdepodobnosťou 50 %, t. j., že pravdepodobnosť dodržania a porušenia tohto termínu je rovnaká.

Trvanie činnosti ( $i, j$ ), označované v CPM ako  $t_{ij}$ , sa v PERT označuje  $t_{eij}$ . Pri určovaní trvania činnosti  $t_{eij}$  sa používa rozdelenie  $\beta$  s pravdepodobnosťou  $p(t_{eij})$  trvania činnosti  $t_{eij}$ , ktoré najlepšie vyhovuje požiadavkám na určenie strednej hodnoty, a rozptyl trvania činnosti z údajov, ktoré možno pomerne ľahko získať ako expertné odhady. Rozdelenie  $\beta$  je asymetrické rozdelenie, definované na uzavretom intervale ( $a, b$ ), kde modus  $m$  neleží v strede tohto intervalu a nie je totožný ani so strednou hodnotou rozdelenia. Rozdelenie  $\beta$  sa označuje aj ako rozdelenie trvania činnosti a je znázornené na obrázku 1.



Obr. 1 Rozdelenie trvania činnosti

Rozdelenie trvania činností vychádza z troch odhadov:

$a_{ij}$  optimistický odhad dĺžky trvania činnosti ( $i, j$ ) - predstavuje dolnú hranicu variačného rozpätia rozdelenia  $\beta$ ,

$b_{ij}$  pesimistický odhad dĺžky trvania činnosti ( $i, j$ ) - ide o hornú hranicu variačného rozpätia rozdelenia  $\beta$ ,

$m_{ij}$  najpravdepodobnejší odhad dĺžky trvania činnosti ( $i, j$ ) - predstavuje vrchol diagramu rozdelenia  $\beta$ .



Na základe uvedených odhadov sa trvanie činnosti určí zo vzťahu:

$$t_{eij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

ako aj smerodajná odchýlka činnosti:  $\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}$

či rozptyl činnosti:  $\sigma_{ij}^2 = \left( \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2$

Tak, ako miera pravdepodobnosti, že celý projekt bude zrealizovaný za čas kratší alebo za čas dlhší, ako je vypočítané odhadované trvanie projektu, je 50 %, tak i pre činnosti na kritickej ceste platí pravdepodobnosť 50 %, teda že činnosť sa vykoná za čas  $t_{eij}$ , resp. že sa činnosť za tento čas nepodarí zrealizovať.

Postup výpočtu je zhodný s postupom výpočtu pre CPM. Dôležitý údaj je smerodajná odchýlka trvania projektu  $\sigma(T_e)$ , ktorá sa vypočíta ako  $\sigma(T_e) = \sqrt{\sum_{i,j \in K} \sigma_{ij}^2}$ , kde sa pod

odmocninou nachádza súčet rozptylov pre činnosti z kritickej cesty, pričom kritická činnosť sa určí rovnako ako v CPM.

### 3 METÓDA GERT

V roku 1966 bol prezentovaný kvalitatívne nový prístup k projektom, ktorý zahŕňa stochastické prvky do štruktúry sieťového grafu, metóda GERT (*Grafical Evaluation and Review Technique*) autorov A. B. Pritskera a G. E. Whitehousea na základe teoretických výsledkov S. E. Elmaghrabyho. Predstavuje zovšeobecnenie metód riadenia objektov, pričom je táto metóda so stochastickou grafovou štruktúrou založená na predpoklade, že celý projekt a aj jednotlivé činnosti sú realizované na základe určitej podmienenej pravdepodobnosti a všetky navrhnuté činnosti nemusia byť aj zrealizované. Metóda GERT sa realizuje na hranovo orientovanom sieťovom grafe so stochastickou štruktúrou, čo znamená, že aspoň jeden uzol má interpretáciu odlišnú ako konjuktívno-deterministickú.

Aj v rámci metódy GERT sa takisto realizujú používajú tri druhy analýz, a to pravdepodobnostná analýza, časová analýza a nákladová analýza. Na rozdiel od ostatných metód je pre metódu GERT charakteristické, že pri realizácii projektu nie je nutné, aby boli zrealizované všetky činnosti, ktoré boli navrhnuté. Jednotlivé činnosti a celý projekt sa pritom realizujú na základe určitej podmienenej pravdepodobnosti.

Metóda GERT podľa A. B. Pritskera (1968) predstavuje postup slúžiaci na popis a analýzu skúmaného systému prostredníctvom grafického prístupu. Okrem skutočnosti, že je to metóda vychádzajúca z teórie sietí, jej matematická podstata je založená na algebre a teórii náhodných procesov. Postup použitý pri uplatňovaní metódy GERT je podľa A. B. Pritskera (1968) nasledovný:

1. Popis skúmaného problému sa prevedie na model, ktorý je zobrazený v podobe sieťového grafu typu GERT.
2. Získanie informácií potrebných na opísanie jednotlivých činností v sieťovom grafe typu GERT.
3. Získanie ekvivalentnej funkcie medzi dvoma uzlami v sieťovom grafe.

4. Prevedenie ekvivalentnej funkcie do výkonnostných mier, ktoré sa vzťahujú na konkrétny sieťový graf.
5. Vyvodenie záveru o skúmanom probléme na základe nadobudnutých informácií z predchádzajúcich krokov.

Zovšeobecnené sieťové grafy typu GERT pozostávajú z rozhodovacích uzlov a z orientovaných hrán, pričom uzly v sieťovom grafe reprezentujú udalosti a hrany predstavujú jednotlivé činnosti. Pre všetky hrany  $(i, j)$  je charakteristické, že všetky majú priradenú podmienenú pravdepodobnosť  $p_{ij}$  jej realizácie. Činnosť je realizovaná v tom prípade, ak bol realizovaný uzol, z ktorého hrana vystupuje. Okrem pravdepodobnosti realizácie je pre každú hranu priradená aj doba jej trvania  $t_{ij}$  a/alebo náklady s ňou spojené  $c_{ij}$ .

Rozhodovacie uzly zovšeobecného sieťového grafu v metóde GERT pozostávajú zo vstupnej a výstupnej časti. Vstupná časť uzla predstavuje realizáciu jednej činnosti, niekoľkých činností alebo všetkých činností, ktorých hrany smerujú do daného uzla (realizácia uzla). Vo všeobecnosti existujú tri vstupy uzlov:

- konjunktívny vstup – uzol sa realizuje práve vtedy, keď sa realizujú všetky činnosti, ktoré do uzla vstupujú, ich realizácia nemusí prebiehať súčasne, uzol je realizovaný po realizácii poslednej zo všetkých vstupujúcich činností,
- disjunktívny vstup – uzol sa realizuje práve vtedy, keď sa realizuje práve jedna z činností, ktoré do uzla vstupujú, pričom jej realizácia vylučuje možnosť realizácie ostatných činností,
- inkluzívny vstup – uzol sa realizuje práve vtedy, keď sa realizuje aspoň jedna z činností, ktoré do uzla vstupujú.

Výstupnú časť uzla predstavuje realizáciu všetkých alebo aspoň jednej zo všetkých činností, ktorých hrany smerujú z daného uzla. Realizácia jednotlivých činností je podmienená realizáciou uzla, z ktorého činnosť vystupuje. Vo všeobecnosti existujú dva druhy výstupov uzlov:

- deterministický výstup – realizácia uzla vyvolá realizáciu všetkých činností z neho vystupujúcich,
- stochastický výstup – realizácia uzla vyvolá realizáciu práve jednej z činností z neho vystupujúcej. Súčet všetkých podmienených činností musí byť rovný jedenej.

V sieťovom grafe typu GERT sa postupne realizuje najskôr pravdepodobnostná analýza, na ktorú nadväzuje časová a nákladová analýza sieťového grafu. Pravdepodobnostná analýza je založená na skutočnosti, že všetky činnosti  $(i, j)$  sú špecifikované údajom o podmienenej pravdepodobnosti  $p_{ij}$  ich realizácie. Činnosť je realizovaná iba vtedy, ak bol realizovaný uzol  $i$ , z ktorého činnosť vystupuje. Určenie pravdepodobnosti realizácie uzla  $j$  predstavuje hlavný cieľ pravdepodobnostnej analýzy. Pri výpočte pravdepodobnosti realizácie  $p_j$  sa vychádza z hodnôt  $p_{ij}$  a z teórie pravdepodobnosti.

Časová analýza je založená na výsledkoch získaných v pravdepodobnostnej analýze. Na realizáciu časovej analýzy musí byť určený termín začatia realizácie projektu  $T_0$ , podmienené pravdepodobnosti realizácie činnosti  $p_{ij}$  a doba trvania jednotlivých činností  $t_{ij}$ . Jej hlavným cieľom je vypočítať termíny realizácie uzla a zistiť dĺžku trvania projektu. Časová analýza prebieha v dvoch etapách – výpočet vpred a výpočet vzad. Výpočet vpred je závislý od typu vstupnej časti uzla (konjunktívny, disjunktívny a inkluzívny) a výpočet vzad súvisí s výstupnou časťou uzla (deterministická a stochastická). Výsledkom výpočtu vpred nie sú v dôsledku použitia pravdepodobností presné termíny, ale iba tzv. očakávané termíny.

Očakávaný termín pritom predstavuje statický údaj, ktorého hodnota určuje, aký priemerný termín je možné dosiahnuť pri dostatočnom množstve opakovaní realizácie projektu v určitých podmienkach. V praxi sa uskutočňuje iba výpočet vpred, nakoľko pri výpočte vzad je problematické určiť časové rezervy jednotlivých činností.

Nákladová analýza nie je v súčasnosti natoľko prepracovaná ako nákladová analýza konjunktívne-deterministických sieťových grafov, preto sa používa najmä tzv. statická nákladová analýza. Cieľom tejto analýzy je výpočet očakávaných nákladov na realizáciu ľubovoľného uzla  $j$ . Pri výpočte vychádza z pravdepodobnostnej analýzy, z ktorej využíva podmienenú pravdepodobnosť realizácie činnosti  $p_{ij}$ , pričom sú známe aj náklady na príslušnú činnosť  $c_{ij}$ . Výsledné očakávané náklady na realizáciu jednotlivých uzlov predstavujú istú statickú hodnotu, ktorá zodpovedá priemerným nákladom, ktoré možno dosiahnuť iba dostatočným množstvom opakovaní jednotlivých činností.

#### 4 METÓDA PERT VS. METÓDA GERT

Spoločným znakom metódy GERT s metódou PERT je, že každá z týchto metód využíva predovšetkým hranovo definované sieťové grafy (metóda PERT využíva aj uzlovo definované sieťové grafy). Avšak zásadný rozdiel spočíva v počte typov uzlov. Metóda PERT používa v hranovo definovaných sieťových grafoch iba jeden typ uzla, nazývaný konjunktívne-deterministický uzol, metóda GERT vo svojich zovšeobecných sieťových grafoch používa až šesť typov rozhodovacích uzlov.

Pre metódu PERT je charakteristické, že jednotlivé uzly sú realizované iba vtedy, ak boli realizované všetky činnosti do nich vstupujúce, pre metódu GERT táto podmienka neplatí. Metóda GERT umožňuje viacvariantný priebeh realizácie projektu, čo metóda PERT neumožňuje. Pre samotnú realizáciu projektu metóda GERT nevyžaduje, aby každá z uvažovaných činností bola aj realizovaná. Taktiež pre ňu platí, že na realizáciu nasledujúceho uzla sa nemusia realizovať všetky činnosti, ktoré mu predchádzajú. Z uvedeného vyplývajú aj ďalšie zásadné rozdiely medzi metódou GERT a vo všeobecnosti s metódami s deterministickou štruktúrou sieťového grafu, teda aj s metódou PERT, napr. metóda GERT oproti metóde PERT využíva na výpočet týchto termínov odlišný postup výpočtu vpred a výpočtu vzad.

#### ZÁVER

Metóda CPM alebo metóda PERT využívajú hranovo definované sieťové grafy, pre ktoré je typický iba jeden typ uzla, a to konjunktívne-deterministický. Zovšeobecnené hranovo definované sieťové grafy metódy GERT používajú až šesť typov rozhodovacích uzlov a navyše jednotlivým činnostiam priradujú podmienené pravdepodobnosti ich realizácie. Prostredníctvom týchto možností nám poskytuje rozmanitejšie prostriedky vhodné na analyzovanie a modelovanie skúmaného systému.

#### Použitá literatúra

1. Brezina, I., Čičková, Z., & Gežík, P. (2012). *Sieťová analýza*. Bratislava: EKONÓM.
2. Critical Path Analysis and PERT Charts. Retrieved September 05, 2018 from <https://www.mindtools.com/pages/article/critical-path-analysis.htm>
3. Fiala, P. (2014). *Řízení projektů*. 3. Praha: Nakladatelství Oeconomica.

4. Nelson, R., Azaron, A., & Aref, S. (2016). *The Use of a GERT Based Method to Model Concurrent Product Development Processes*. European Journal of Operational Research, 250(2), 566–578.
5. Pitel, J. (1988). *Ekonomicko-matematické metódy*. Bratislava: Príroda.
6. Pritsker, A. B. (1968). *Gert: graphical evaluation and review technique*. California: The Rand Corporation.
7. Simmons, L. F. (2002). *Project management-critical path method (CPM) and PERT simulated with ProcessModel*. Retrieved September 05, 2018 from <https://ieeexplore.ieee.org/document/1166468/>
8. Surbhi, S. (2015). *Difference Between PERT and CPM*. Retrieved September 05, 2018
9. Taylor, B. W. (1978). *Project management using GERT analysis*. Project Management Quarterly, 9(3), 15–20.

### **Kontaktné údaje**

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 2 67 295 821

email: [ivan.brezina@euba.sk](mailto:ivan.brezina@euba.sk)

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 2 67 295 820

email: [pavel.gezik@euba.sk](mailto:pavel.gezik@euba.sk)

# PRIESTOROVÝ MODEL DUOPOLU S RÔZNYMI DOPYTMI<sup>1</sup>

## DUOPOL SPATIAL MODEL WITH DIFFERENT DEMAND

*Zuzana Čičková, Patrícia Holzerová*

### Abstrakt

Modely priestorovej konkurencie sú modelmi teórie hier. Umožňujú analyzovať situácie, kde sa dvaja a viac hráčov rozhoduje o svojej polohe s cieľom maximalizovať svoj podiel na trhu. Tento príspevok pojednáva o probléme maximalizácie podielu na trhu, pričom priestorová štruktúra je popísaná grafom. Uzly grafu sú sídla zákazníkov a každý z hráčov rozhoduje o uzle, z ktorého bude zákazníkov obsluhovať. Zákazníci sa tak rozhodujú o presune k jednému z dvoch hráčov. Pričom ich náklady tvoria jednak cena produktu (každý hráč ponúka identický výrobok, cena sa však môže líšiť) a jednak náklady na presun. Tiež uvažujeme s rôznou úrovňou dopytu v jednotlivých uzloch. Navrhovaná úloha bude riešená v systéme GAMS.

*Kľúčové slová: teória hier, priestorová konkurencia, duopol*

### Abstract

Models of spatial competition are models of game theory. They allow you to analyze situations where two or more players decide on their location to maximize their market share. This paper discusses the problem of maximizing market share, with the spatial structure described by graph. The graph nodes are the customers' location, and each player decides on the nodes from which to serve customers. Customers decide to move to one of the two players. Their costs consists of the price of the product (each player offers an identical product, but the price may vary) and the cost of moving. Also different levels of demand in each node is considered. The proposed problem will be solved in GAMS.

*Keywords: game theory, spatial competition, duopol*

## 1 ÚVOD

Otázky lokácie v rámci teórie hier sú nesporne zaujímavé a študované už v minulosti. Začiatky priestorovej analýzy siahajú až do Cournotovej práce (Cournot, 1838), ktorý vyvinul model s konkurenčnými spoločnosťami ponúkanými množstvami, a Bertrand (1883), ktorý založil svoj prístup na modeli s konkurenčnými cenami. V roku 1924 formuloval Fetter (1924) zákon o trhových oblastiach, kde uvažoval ceny a náklady na dopravu pre každú výrobnú spoločnosť predtým, ako sa rozhodol kúpiť tovar od jednej z nich. V dôsledku toho je prahová hodnota trhového podielu medzi týmito spoločnosťami definovaná umiestnením tých spotrebiteľov, pre ktorých je celková kúpna cena ľahostajná pre jednu zo spoločností alebo inú. Táto práca mala významný vplyv na teóriu súťaženia v sieti, ale nebola taká dôležitá ako následná práca Hotellinga (1929). Hotelling vytvoril lineárny trh, na ktorom

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol ako súčasť výskumného projektu VEGA 1/0351/17 Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska

konkurenčné spoločnosti predávajú homogénny produkt, kde sú spotrebitelia rovnomerne rozdelení v priestore a dopyt je nepružný, čo znamená, že každý spotrebiteľ dostane iba jednu jednotku tovaru. Výrobok je v oboch spoločnostiach homogénny, a preto sa v prvej etape líšia iba umiestnením a druhou etapou ceny. Ďalšie rozšírenie tohto prístupu možno nájsť v (Gabszwich a Thisse, 1986), (Hamoudi a Risueño, 2012) a (Hamoudi a Bustamante, 2011).

V tomto príspevku popíšeme model duopolu v priestore, ktorý je charakterizovaný grafom. Budeme vychádzať z článku (Lopez, Čičková 2018), pričom dané úvahy rozšírime uvažovaním rôzneho dopytu v jednotlivých uzloch grafu.

## 2 ÚVOD

Nech  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , je množina zákazníkov a nech je daný graf  $G = (V, H)$ , kde  $V$  predstavuje uzly grafu, a  $H \subset V \times V$  predstavuje množinu hrán  $h_{ij} = (v_i, v_j)$  z uzla  $v_i$  k uzlu  $v_j$ , pričom každej orientovanej hrane  $h_{ij}$  je priradené reálne číslo  $o(h_{ij})$ , ktoré sa označuje ako ocenenie alebo hodnota  $h_{ij}$ . Priestorová hra bude formulovaná v takzvanom úplnom hodnotenom grafe  $\bar{G} = (V, \bar{H})$  s rovnakou množinou uzlov ako graf  $G$ , kde  $\bar{H}$  je množina hrán medzi každou dvojicou uzlov  $v_i$  a  $v_j$ , pričom ich ocenenie je rovné minimálnej cene medzi uzlami  $v_i$  a  $v_j$  v pôvodnom grafe,  $i, j \in V$ . Často možno predpokladať, že  $o(h_{ij}) = d_{ij}$  kde  $d_{ij}$  predstavuje minimálnu vzdialenosť (najkratšiu dĺžku cesty) medzi uzlami  $v_i$  a  $v_j$ , potom matica  $\mathbf{D}_{n \times n} = (d_{ij})$  je matica najkratších vzdialeností medzi uzlami  $v_i$  a  $v_j$ .

Predpokladajme, že existujú dve spoločnosti (hráči)  $P = \{1, 2\}$ , ktoré ponúkajú homogénny produkt (tovar alebo službu) a tieto spoločnosti majú možnosť umiestniť svoje pobočky v jednom z uzlov, to znamená v akomkoľvek prvku množiny  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , ktoré sú zároveň sídlom zákazníkov. Uvažujeme o konštantnom (jednotkovom) dopyte v každom uzle. Hoci obaja hráči ponúkajú identický produkt v neobmedzenom množstve, cena produktov je odlišná. Označíme  $p^{(1)}$  cenu produktu hráča 1 a  $p^{(2)}$  cenu produktu hráča 2. Neuvažujeme o žiadnych obmedzeniach kapacity, pričom každý zákazník si môže kúpiť produkt ktorejkoľvek spoločnosti. Predpokladáme tiež, že zákazník vždy uskutočňuje nákup. Zákazníci však berú do úvahy celkové náklady na kúpu produktu, ktoré pozostávajú z ceny produktu a nákladov na prepravu k vybranej spoločnosti. Náklady na dopravu sú vyjadrené ako  $t$  na jednotku vzdialenosti, takže predpokladáme, že zákazník musí platiť cenu produktu a dopravné náklady ku každej spoločnosti ( $n_{ij}^{(1)}$  a  $n_{ij}^{(2)}$ ). Ďalej predpokladáme, že ak hráč 1 umiestni svoju pobočku v  $j$ -tom uzle, získa zákazníka z  $i$ -teho uzla len v prípade, ak  $n_{ij}^{(1)} < n_{ij}^{(2)}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . V prípade, že  $n_{ij}^{(1)} = n_{ij}^{(2)}$ , hráči zdieľajú dopyt v rovnakej miere. V opačnom prípade je zákazník z  $i$ -teho uzla obslužený hráčom 2.

Je zrejmé, že záujem hráča o daný uzol je vo všeobecnosti podmienený aj „veľkosťou“ dopytu daného uzla, pričom z hľadiska tohto kritéria sú niektoré uzly pre hráča zaujímavejšie ako iné. Veľkosť dopytu môže súvisieť napríklad s počtom obyvateľov. Ďalej sformulujeme priestorovú hru zohľadňujúcu dopyt jednotlivých uzlov. Dopyt uzlov označíme vektorom  $\mathbf{g} = (g_i)$ ,  $i \in V$ . Predpokladáme, že obsluha uzla zahŕňa obsluhu celého jeho dopytu a v prípade rovnakých obstarávacích nákladov si hráči podelia dopyt rovnako.

Maticu platieb pre hráča 1 ( $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) a maticu platieb hráča 2 ( $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) možno zapísať formou takýchto pseudokódov

**LET**  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{D}_{n \times n} = (d_{ij})$ ,  $t$ ,  $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$ ,  $\mathbf{g}_n = (g_i)$

**LOOP** ( $i, j \in V$ ) **DO**

$$n_{ij}^{(1)} = t * d_{ij} + p^{(1)};$$

$$n_{ij}^{(2)} = t * d_{ij} + p^{(2)};$$

$$a_{ij} = 0;$$

$$b_{ij} = 0;$$

```

LOOP (k,i,j = 1,2,...n) DO
IF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + g_k$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} = n_{kj}^{(2)}$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 0,5g_k$ ;
ENDIF

```

(4)

```

LOOP (k,i,j = 1,2,...n) DO
IF  $n_{ki}^{(2)} < n_{kj}^{(1)}$  DO  $b_{ij} = b_{ij} + g_k$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(2)} = n_{kj}^{(1)}$  DO  $b_{ij} = b_{ij} + 0,5g_k$ ;
ENDIF

```

(5)

Je zrejmé, že ide o hru s nekonštantným súčtom.

### 3 ILUSTRÁČNÝ PRÍKLAD V JAZYKU GAMS

Uvažujme s grafom s piatimi uzlami ( $N = \{1,2,\dots,5\}$ ), pričom každý z nich je súčasne sídlom zákazníkov. Hráčov predstavujú dve firmy (hráčov 1 a 2), z ktorej každá má možnosť vybudovať si pobočku v jednom z uzlov. Firmy ponúkajú homogénny produkt, ceny produktu sa však líšia. Hráč 1 ponúka produkt za cenu  $p^{(1)} = 3$  a hráč 2 ponúka produkt za cenu  $p^{(2)} = 3,6$ . Je známa matica najkratších vzdialeností  $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, 5$  medzi všetkými uzlami:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 0 & 12 & 15 & 14 \\ 7 & 12 & 0 & 11 & 17 \\ 9 & 15 & 11 & 0 & 19 \\ 10 & 14 & 17 & 19 & 0 \end{bmatrix}$$

Jednotkové prepravné náklady sú vo výške  $t = 0,3$ .

Uvažujme, že dopyt jednotlivých uzlov je daný vektorom  $\mathbf{g} = (100,80,20,120,150)^T$ . Model možno formulovať v jazyku GAMS takto:

```

$title Priestorovy model duopolu s roznymi dopytmi uzlov
$ontext
Deklaracia a vstupne data
$offtext

Sets
i index uzla /1*5/
alias (i,j,k);
set offdiag(i,j,k)
offdiag1(i,j);
offdiag(i,j,k)=yes;

```

```

offdiag(i,i)=no;
offdiag1(i,j)=yes;
offdiag1(i,i)=no;
Table d(i,j) matica najkratsich vzdialenosti
  1  2  3  4  5
1  0  6  7  9  10
2  6  0  12 15 14
3  7  12 0  11 17
4  9  15 11 0  19
5  10 14 17 19 0
;
scalar p1 cena vyrobku 1 hraca /3/;
scalar p2 cena vyrobku 2 hraca /3.6/;
scalar km naklady prepravy na km /0.3/;
parameter dop(i) dopyt uzla /1 100,2 80,3 20,4 120, 5 150/;
Parameters a(i,j) matica platieb hraca 1;
parameters n1(i,j) matica nakladov hraca 1;
parameters n2(i,j) matica nakladov hraca 2;
n1(i,j)=km*d(i,j)+p1;
n2(i,j)=km*d(i,j)+p2;
display d,p1,n1,p2,n2;

*Vypocet matic nakladov
loop ((i,j), a(i,j)=0;)
loop ((k,i,j), if ((n1(k,i) < n2(k,j)), a(i,j)=a(i,j)+dop(k);
                elseif (n1(k,i) = n2(k,j)), a(i,j)=a(i,j)+0.5*dop(k);));
display a;
$ontext
Uloha LP na vypocet rovnovaznych strategii
$offtext
positive variables x(i) strategie prveho hraca;
variable f,w;
$ontext
model lp
$offtext
equations jeden(j) strategie druheho hraca, sucet, uf;
jeden(j).. sum(i,a(i,j)*x(i))=g=w;
sucet.. sum(i,x(i))=e=1;
uf.. f=e=w;
model th /all/;
solve th using lp maximizing f;
display x.l,jeden.m,w.l;

```

Matica platieb hráča 1 je potom takáto:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 470 & 390 & 450 & 350 & 320 \\ 80 & 470 & 330 & 350 & 320 \\ 80 & 240 & 470 & 350 & 320 \\ 120 & 140 & 295 & 470 & 320 \\ 150 & 150 & 150 & 330 & 470 \end{bmatrix}$$



Matica  $A$  nemá sedlový bod. Rovnovážne riešenie v zmiešaných stratégiách reprezentuje vektor  $\mathbf{x}^{(0)} = (0.653, 0.133, 0, 0.022, 0.192)^T$  pre hráča 1 a pre hráča 2 je zmiešaná stratégia reprezentovaná vektorom  $\mathbf{y}^{(0)} = (0.033, 0.159, 0, 0.427, 0.381)^T$ . Hodnota hry je 348,85 pre hráča 1 a 121,15 pre hráča 2 (z celkového dopytu 470).

## 4 ZÁVER

V každom konkurenčnom modeli dochádza medzi hráčmi k situácii, kde si konkurujú, aby získali viac klientov a väčší trhoví podiel. Príspevok sa zaoberá modelovaním situácie, kde dve konkurujúce spoločnosti ponúkajú identický produkt, ktorého cena sa môže líšiť. Hráči tak rozhodujú o svojej polohe berúc do úvahy podiel získaného celkového dopytu. Trh je pritom charakterizovaný grafom. Uvedený prístup je ilustrovaný príkladom formulovaným v jazyku GAMS.

### Použitá literatúra

1. BERTRAND, J. 1983. *Review of Walras's Théorie mathématique de la richesse sociale and Cournot's Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. In *Journal des Savants*, vol. 67, pp. 499-508.
2. COURNOT, A. A. 1838. *Recherches sur les principes Mathématiques de la théorie des richesses* (Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth). Paris: L'Université Royale de France.
3. FETTER, F. A. 1924. *The Economic Law of Market Areas*. In: *The Quarterly Journal of Economics*, 38(3), 520–529. <https://doi.org/10.2307/1882335>.
4. GABSZWICZ, J. and THISSE, J.F. (1986). *On the Nature of Competition with Differentiated Products*. In: *The Economic Journal*, 96(381), 160–172. <https://doi.org/10.2307/2233431>
5. HAMOUDI, H. and BUSTAMANTE, M.S.M. (2011). *Revisiting price Equilibrium Existence in the Linear-city Model of Spatial Competition*. In: *Regional Science*, 90(1), 179–196. <https://doi.org/10.1111/j.1435-5957.2010.00308>.
6. HAMOUDI, H. and RISUEÑO, M. (2012). *The Effects Of Zoning In Spatial Competition*. In: *Journal of Regional Science*, 52(2), 361-374 <https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.2011.00744>.
7. SEQUEIRA LOPEZ, A., J.- ČIČKOVÁ, Z. *Price Policy in Games in Spatial Competition*. In *Quantitative Methods in Economics : Multiple Criteria Decision Making XIX*. International Scientific Conference. *Quantitative Methods in Economics : Multiple Criteria Decision Making XIX : Proceedings of the International Scientific Conference : 23rd May - 25th May 2018, Trenčianske Teplice, Slovakia*. - Bratislava : Letra Edu, 2018. ISBN 978-80-89962-07-5, pp. 313-319.

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

University of Economics in Bratislava, Faculty of business informatics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

email: [cickova@euba.sk](mailto:cickova@euba.sk)

**Kontaktné údaje**

Ing. Patrícia Holzerová

University of Economics in Bratislava, Faculty of business informatics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

email: [holzerovap@gmail.com](mailto:holzerovap@gmail.com)

# KOORDINAČNÍ HRY

## COORDINATION GAMES

*Petr Fiala, Renata Majovská*

### **Abstrakt**

Existují různé přístupy pro modelování a analýzu síťových efektů. Tento příspěvek je věnován modelování koordinace sítí pomocí koordinačních her. V uvedeném modelu jsou použity důležité vlastnosti přístupů teorie her. Kombinace modelování síťové struktury a modelování koordinačních procesů může být účinným nástrojem pro analýzu výkonnosti sítí.

*Klíčová slova: sítě, koordinace, teorie her*

### **Abstract**

There are various approaches for modeling and analyzing network effects. This paper is devoted to modeling of network coordination using coordination games. In this model, important properties of game theory approaches are used. The combination of network structure modeling and coordination process modeling can be an effective tool for analyzing network performance.

*Keywords: networks, coordination, game theory*

## **1 ÚVOD**

Ekonomie tradičně uvažovala interakce mezi ekonomickými agenty, které se odehrávají v rámci anonymních institucí, typicky v rámci trhů. Avšak v posledních desetiletích se zaměřila pozornost na zkoumání strategických interakcí mezi ekonomickými agenty. Sítě jsou prezentovány jako prostředí, ve kterém probíhají strategické interakce. Topologie sítí a charakteristiky vazeb následně ovlivňují strategie všech agentů a následně ekonomické výsledky. Sítě hrají rozhodující roli při formování ekonomických struktur, při toku informací a při vzniku konkurence a kooperace mezi ekonomickými agenty (Fiala, 2016).

Koordinace je proces řízení vzájemných závislostí mezi aktivitami. Ekonomický agent je subjekt, který má určité znalosti o situaci a může vykonávat aktivity. Problém koordinace vzniká tehdy, když ekonomický agent má výběr ve svých aktivitách a tento výběr, pořadí a čas, ve kterém budou aktivity vykonávány, ovlivní výkonnost. Multiagentní systém je soubor ekonomických agentů, kteří současně existují v nějakém prostředí, jsou ve vzájemné interakci a snaží se optimalizovat míry výkonnosti. Výzkum multiagentních systémů se zaměřuje na vytvoření principů konstrukce komplexních systémů, obsahujících více nezávislých agentů a zaměřuje se na otázky chování v takových systémech. Klíčové hledisko v takových systémech je problém koordinace, tj. proces, který zajistí, aby individuální rozhodnutí agentů vyústila v optimální rozhodnutí pro celou skupinu. Pro řešení koordinačního problému mohou být použity techniky teorie her. Jestliže mohou agenti vybrat identické aktivity pro dosažení lepší výkonnosti, potom se hovoří o koordinační hře. Typickým příkladem jsou konkurující si technické standardy. Pokud jsou agenti schopni se dohodnout na používání stejné techniky či technologie, potom je výkonnost systému vysoká. Jestliže chybí společné technické standardy, výkonnost je nižší.

## 2 MODELOVÉ NÁSTROJE

Mezi základní modelové nástroje pro analýzy síťové koordinace patří:

- modely teorie her,
- modely oligopolu,
- modely vyjednávání.

Teorie her poskytuje soubor nástrojů pro predikci výstupů pro skupinu jednotek v interakci. Tento soubor je základem pro vývoj modelů síťové koordinace, jak kooperativní, tak i nekooperativní. Pro analýzu kooperativního a nekooperativního chování jednotek v systému je možno použít hry v normálním tvaru i v extenzivním tvaru. U her v normálním tvaru vybírají všechny jednotky své aktivity současně, zatímco u her v extenzivním tvaru mohou jednotky vybírat své aktivity v různých časových periodách. Existují určité speciální typy her pro zachycení problémů síťové ekonomiky jako koordinační hry. Koordinační hra je situace se vzájemně závislými rozhodnutími, s alespoň částečným souladem zájmů a s alespoň dvěma koordinačními rovnovážnými řešeními. Je použita koncepce Nashova rovno-vážného řešení pro modely nekooperativních her. Reprezentací oligopolistického chování agentů jsou Cournotův, Stackelbergův a Bertrandův model. Modely kartelu jsou reprezentací kooperativního chování agentů. Vyjednávání probíhá při kooperativním řešení problémů. Existují přístupy založené na teorii her a další přístupy, včetně přístupů využívajících vícekriteriální hodnocení vyjednávacích pozic. Teoretický rámec slouží jako společná základna pro vývoj speciálních modelů pro analyzování specifických vlastností síťové koordinace.

## 3 ZÁKLADNÍ MODEL KOORDINAČNÍ HRY

Koordinační hry přitahují mnoho teoreticky a experimentálně orientovaných ekonomů (např. Shy, 2001). Tento základní model je nekooperativní symetrická hra  $2 \times 2$  v normálním tvaru, která je charakteristická tím, že má dvě rovnovážná řešení v ryzích strategiích (např. Dlouhý a Fiala, 2015). V koordinačních hrách jsou rovnovážná řešení v ryzích strategiích charakterizována požadavkem výběru stejných strategií oběma hráči. Obě symetrická rovnovážná řešení mohou být kandidáty pro výběr strategie. Hra je charakterizována výplatní tabulkou Tab. 1.

**Tab. 1.** Výplatní tabulka

	X	Y
X	$b, b$	$c, d$
Y	$d, c$	$a, a$

Pro hodnoty platí

$$a > b > c > d > 0, (b - d) > (a - c),$$

tj. řešení  $(Y, Y)$  je paretoovsky dominantní rovnovážné řešení a řešení  $(X, X)$  je rizikově dominantní rovnovážné řešení.

Nechť  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  je množina agentů. Agenti hrají hru  $n$  hráčů. Agenti jsou zachyceni v neohodnoceném grafu  $G = (N, H)$ , kde uzly reprezentují jednotlivé agenty a hrany reprezentují vztah partnerství. Tento neohodnocený graf  $G$  je možno zapsat pomocí matice sousednosti o rozměru  $(n, n)$ :

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

kde

$a_{ij} = 1$ , jestliže agenti  $i$  a  $j$  jsou partneři,

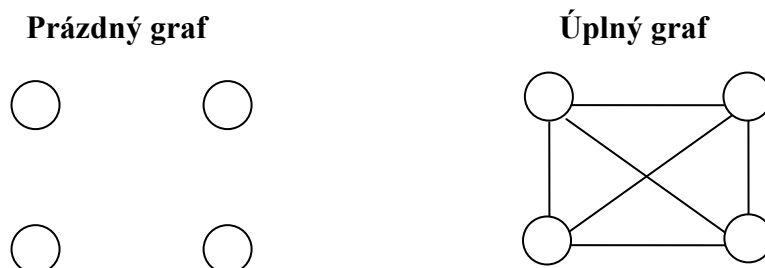
$a_{ij} = 0$ , jinak.

Hra je hrána ve velké populaci agentů, kteří jsou párově spojeni v síťové struktuře. Hráči si mohou sami vybrat své sousedy a současně jejich sousedy v síti a strategii v základní hře.

Předpokládá se, že rozhodování je deterministické. Vytvoření nové vazby se členem populace generuje konstantní náklady na spojení pro agenta, který inicioval toto spojení. Nechť  $k$  označuje náklady na toto spojení. Relativní velikost nákladů na spojení ve srovnání s hodnotami ve výplatní matici hry má velký vliv na výslednou rovnovážnou síť v populaci. Výsledné rovnovážné sítě jsou charakterizovány neorientovanými grafy.

V závislosti na velikosti nákladů na spojení  $k$  dostáváme různé rovnovážné grafy pro koordinační hry:

- 1) Jestliže platí  $k > a$ , potom jedinou rovnovážnou sítí  $G$  je prázdný graf a není určen výběr akce pro hráče v koordinační hře.
- 2) Jestliže  $k < d$ , potom jedinou rovnovážnou sítí  $G$  je úplný graf a všichni hráči vyberou v koordinační hře rovnovážnou strategii  $X$  nebo všichni hráči vyberou rovnovážnou strategii  $Y$ .
- 3) Jestliže platí  $d < k < c$ , potom je buď rovnováha jako v případě 2) nebo existuje taková rovnováha, že výsledná síť je charakterizována grafem  $G$  se dvěma množinami uzlů  $N_1$  (agenti hrají strategii  $X$ ) a  $N_2$  (agenti hrají strategii  $Y$ ), kde všechny uzly z  $N_1$  jsou spojeny se všemi uzly z  $N_2$ , ale ne s každým uzlem z  $N_1$ , zatímco všechny uzly z  $N_2$  jsou také propojeny navzájem.
- 4) Jestliže platí  $c < k < b$ , potom je buď rovnováha jako v případě 2) nebo rovnováha nastává pro nesouvislý graf  $G$  se dvěma komponentami, kdy každá komponenta je úplný graf a hráči v jedné komponentě ( $N_1$ ) vybírají strategii  $X$ , hráči v druhé komponentě ( $N_2$ ) vybírají strategii  $Y$ .
- 5) Jestliže platí  $b < k < a$ , potom jedinou rovnovážnou sítí  $G$  je úplný graf a všichni hráči vyberou v koordinační hře rovnovážnou strategii  $Y$ . Alternativní rovnováhou je prázdný graf a všichni hráči vyberou rovnovážnou strategii  $X$ .



**Obr. 1.** Typické rovnovážné sítě

Přístupy pro analýzu koordinačního problému a procesu formování sítě mohou být rozděleny do dvou skupin: kooperativní a nekooperativní přístupy.

## 4 KOOPERATIVNÍ PŘÍSTUPY

Důležitým prvním článkem v této oblasti je článek (Myerson, 1977). Myerson vycházel z kooperativní teorie. Modelem je hra v normálním tvaru  $(N; v)$ , kde  $N$  je množina hráčů a  $v$  je charakteristická funkce, určující hodnotu  $v(S)$  každé koalice  $S$ . Definuje kooperační strukturu jako neorientovaný graf  $G$ , zachycující vazby mezi agenty. Graf reprezentuje seznam agentů, kteří jsou propojeni navzájem, jestliže je v grafu agent  $i$  spojen s agentem  $j$ , potom mohou spolu komunikovat a spolupracovat. Síť  $G$  tedy rozděluje množinu agentů do různých skupin, ve kterých jsou vzájemně propojeni. Hodnota koalice  $S$  na síti  $G$  je součet hodnot subkoalice  $S$  přes všechna rozdělení  $S$ , určená  $G$ .

Kooperativní přístup, zavedený Myersonem (1977), může být považován za přirozené rozšíření teorie formování koalic. Tato teorie analyzuje externí strukturu koalic zaměřením se na alokaci hráčů uvnitř různých skupin. Kooperativní přístup jde dále a uvažuje množinu komunikačních komponent uvnitř každé koalice.

Myersonův přístup byl rozvinut Aumannem a Myersonem (1988), kteří zavedli dvoustupňovou hru. V prvním stupni se vytvářejí spojení a v druhé fázi dostávají hráči výplatní hodnoty, které jsou závislé na hodnotě sítě, podle exogenního pravidla. Používají hru v extenzivním tvaru a předpokládají, že hráči neplatí žádné náklady za vytváření spojení.

Jackson a Wolinsky (1996) zavedli koncept párové stability pro analýzu procesu formování sítě. Hra je dána konečnou množinou hráčů  $N$ , funkcí  $v : G \rightarrow R$ , která přiřazuje hodnotu sítě  $G$ , alokačním pravidlem  $\pi(G, v)$ , které popisuje způsob rozdělení hodnoty sítě mezi hráče. Síť  $G$  je párově stabilní, jestliže pro každé dva propojené agenty žádný z nich nezíská odstraněním spojení a jestliže pro každé dva nespojené agenty nemůže být výhodné takové spojení vytvořit.

Nechť  $G$  je síť;  $(i, j) \in G$  znamená, že hráči  $i$  a  $j$  jsou vzájemně spojeni,  $(i, j) \notin G$  znamená opak. Graf  $G + (i, j)$  je síť, která vznikla přidáním spojení mezi  $i$  a  $j$ ,  $G - (i, j)$  znamená opak.

Síť je párově stabilní jestliže platí obě následující podmínky:

$$(i) \quad \forall (i, j) \in G, \pi_i(G, v) \geq \pi_i(G - (i, j), v), \pi_j(G, v) \geq \pi_j(G - (i, j), v)$$

$$(ii) \quad \forall (i, j) \notin G, \text{jestliže } \pi_i(G + (i, j), v) \geq \pi_i(G, v),$$

$$\text{potom } \pi_j(G + (i, j), v) < \pi_j(G, v).$$

Koncept párové stability je velmi užitečný pro ohodnocení dané síťové topologie a určení množiny rovnovážných řešení, ale neříká nic o jejich vhodnosti. Párově stabilní síť nejsou vždy efektivní.

## 5 NEKOOPERATIVNÍ PŘÍSTUPY

Bala a Goyal (2000) studovali strategické efekty lokální interakce pro koordinační hru s agenty exogenně umístěnými v uzlech sítě. Pro tento postup platí následující předpoklady. Hráči mohou přidat nebo odebrat spojení jednostranně. Není potřeba souhlas mezi hráči pro vytvoření spojení. Jsou uvažovány dva různé typy přenosu informací. V jednosměrných modelech toků jdou informace od agenta  $j$  k agentovi  $i$ , zatímco v obousměrných modelech toků jdou informace mezi oběma agenty navzájem.

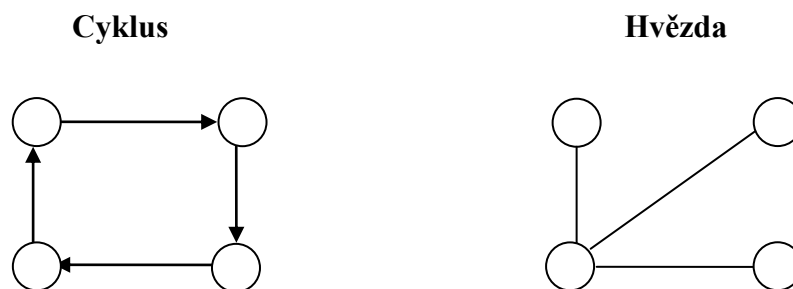
Je zaveden koncept Nashovy sítě, který je založen na aplikaci Nashovy rovnováhy pro síť  $G$ . Uvedeme základní výsledky:

- V jednosměrných modelech toků Nashova síť je buď prázdný graf, nebo minimálně souvislý graf.
- V obousměrných modelech toků Nashova síť je buď prázdný graf, nebo minimálně párově souvislý graf.

Bala a Goyal ukazují, že obecně počet Nashových sítí velice rychle roste s počtem agentů  $n$ . To vede k zaměření se na ostré Nashovy sítě, což jsou sítě, používající koncepci ostré Nashovy rovnováhy.

Množina ostrých Nashových sítí je podstatně více omezena:

- V jednosměrných modelech toků je ostrá Nashova síť buď prázdný graf, nebo orientovaný cyklus.
- V obousměrných modelech toků je ostrá Nashova síť buď prázdný graf, nebo hvězda.



*Obr. 2. Typické ostré Nashovy sítě*

## 6 ZÁVĚR

Předpoklady základních koncepcí mohou být rozšířeny, abychom získali realističtější modely koordinačních problémů. Přístupy pro analýzy koordinačních problémů mohou být rovněž modifikovány.

Zmíníme jen některá možná rozšíření:

- nepřímé vazby,
- nedokonalá spolehlivost,
- náklady a přínosy,
- systémová dynamika,
- kombinované přístupy.

Důležitost výše uvedených výsledků je zeslabena silným předpokladem, že informace, získaná pomocí nepřímých vazeb, má stejnou hodnotu jako informace získaná pomocí přímých vazeb. Jsou určité možnosti jak modelovat závislost hodnoty informace od agenta  $j$  pro agenta  $i$  na vzdálenosti mezi  $i$  a  $j$ . Koncept informačního útlumu zavádí parametr útlumu pro modifikaci hodnoty informace podle vzdálenosti mezi agenty.

Pro reprezentaci nedokonalé spolehlivosti je možné konstruovat stochastické síťové modely. Zavedením pravděpodobnostního parametru  $p$  ve stochastickém síťovém modelu pracuje každé spojení s pravděpodobností  $p$  a toto spojení selže s pravděpodobností  $1-p$ .

Standardní modely mohou být modifikovány zavedením struktury nákladů a přínosů podle reálné situace. Situace se může lišit podle toho, kdo se bude podílet na nákladech a přínosech vytvoření spojení a podle jakých pravidel se toto sdílení bude řídit.

Problémy koordinace na sítích jsou velmi často dynamické problémy. Například síťové externality ať pozitivní či negativní jsou dynamickými efekty. Situace může být popsána standardními nástroji, jako jsou diferenční a diferenciální rovnice. Síťová struktura problémů přináší možnost popsání dynamických procesů pomocí her v extenzivním tvaru a opakovaných her. Kombinované přístupy pro analýzy koordinačních problémů jsou velmi slibné, protože mohou využít předností obou přístupů, kooperativních i nekooperativních.

### **Poděkování**

Článek je výsledek interního projektu č. IGA F4/66/2019, Fakulty informatiky a statistiky VŠE a interního projektu č. 7429/2018/08 „Analýza ICT startupů“ podpořeného Vysokou školou finanční a správní.

### **Použitá literatura**

1. AUMANN, R. J., MYERSON, R. 1988. Endogenous Formation of Links between Players and of Coalitions: An Application of the Shapley Value. In: Roth, A. E. (ed.): The Shapley Value. Cambridge University Press, Cambridge, 175-191.
2. BALA, V., GOYAL, S. 2000. A strategic analysis of network reliability. Review of Economic Design, 5(3), 205-228.
3. DLOUHÝ, M., FIALA, P. 2015. Teorie ekonomických a politických her. Oeconomica, Praha.
4. FIALA, P. 2016. Dynamické vytváření cen a alokace zdrojů v sítích. Professional publishing, Praha.
5. FIALA, P., MAJOVSKÁ, R. 2018. Modely koordinace technologií. In: Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu. Bratislava: Vydavatel'stvo Ekonóm, 20–33
6. JACKSON, M. O., WOLINSKY, A. 1996. A strategic model of social and economic networks. Journal of economic theory, 71(1), 44-74.
7. MYERSON, R. 1977. Graph and cooperation in games. Mathematics of Operation Research 2, 225-229.
8. SHY, O. 2001. The Economics of Network Industries. Cambridge University Press, Cambridge.

### **Kontaktní údaje**

Prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA  
Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
Nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
Tel: (420 2) 24 095 447  
email: pfiala@vse.cz

PaedDr. Renata Majovská, PhD.  
Vysoká škola finanční a správní, Fakulta ekonomických studií  
Estonská 500, 101 00 Praha 10  
Tel: (420 2) 10 088 831  
email: [renata.majovska@gmail.com](mailto:renata.majovska@gmail.com)



# UTILITARNE RIEŠENIE PRI ALOKACII ÚSPOR Z KOOPERATÍVNEJ HRY

## UTALITARIAN SOLUTION OF COST SAVINGS ALLOCATION FROM COOPERATIVE GAME

*Dana Figurová*

### **Abstrakt**

Základnou dilemou každej kooperatívnej hry je pre každého hráča voľba vhodnej spolupráce, pretože v koalíciách môžu hráči získať väčšie výhody (v našom prípade sú tieto výhody vo forme usparených nákladov zo spolupráce), než by získali samostatným postupom. Tieto výhody by mali nasledovne hráči medzi sebou rozdeliť, pričom existujú rôzne spôsoby ich následnej alokácie. V tomto príspevku sa budeme zaoberať rozdelením usparených nákladov vyplývajúcich zo vzájomnej spolupráce medzi hráčmi vo vnútri koalícií. Pri rozdeľovaní výhier medzi jednotlivých hráčov budeme vychádzať z teórie vyjednávania, pričom predpokladáme prenositeľnosť výhry. V tomto príspevku sa zameriame na utilitárne riešenie ako jedného z mnohých spôsobov rozdelenia výhry, pričom tento spôsob aplikujeme na kooperatívnu úlohu rozvozu, v ktorej dodávatelia (majitelia jednotlivých skladov) spolu spolupracujú a získavajú tým určité benefity vo forme úspor prepravných nákladov vyplývajúcich zo spolupráce.

***Kľúčové slová:** kooperatívna hra, rozdelenie usparených nákladov, utilitárne riešenie*

### **Abstract**

The primary dilemma of any cooperative game is to choose the right cooperation for each player because in coalitions they can gain more benefits (in our case cost savings from cooperation) than they would gain by an individual way of playing. These advantages should then be distributed among these players. In general, there are various ways of the “winnings” allocation. In this paper, we will discuss the distribution of the cost savings resulting from the cooperation between players within the coalitions. The distribution of cost savings among individual players will be based on negotiation theory, assuming the transferability of cost savings. This paper focuses on utilitarian solution as one of many ways of redistribution which is applied on the cooperative vehicle routing problem in which suppliers (owners of individual depots) work together and gain some benefits in the form of cost savings.

***Keywords:** cooperative game, redistribution of cost savings, utilitarian solution*

## **1 ÚVOD**

Teória hier, ako vedný odbor skúma širokú škálu rozhodovacích situácií účastníkov hry (hráčov). Jedným zo spôsobov je práve akceptácia možnosti kooperácie medzi jednotlivými hráčmi. Hra je kooperatívna, ak hráči môžu vytvárať koalície, ktoré rešpektujú vopred stanovené požiadavky a tým následne profitovať z tohto spoločného prístupu hrania hry. V prípade nekooperatívnych hier hráči konajú pri rozhodovaní nezávisle od seba a teda možnosť spolupráce je tým nezohľadnená.

Teóriu kooperatívnych hier (CGT<sup>1</sup>) možno charakterizovať aj ako “teóriu, ktorá sa zaoberá predovšetkým vzájomnou kooperáciou hráčov, ktorí skoordingujú svoje činnosti s cieľom dosiahnuť ďalší benefit”. CGT sa následne zaoberá aj redistribúciou týchto výhod zo spolupráce. Väčšina aplikácii CGT v teórii hier sa vyskytuje v oblastiach plánovania, úspory nákladov a vyjednávania (Barron, 2013; Jindal & Newsberry, 2018).

Tento príspevok sa zameriava na prerozdelenie výhod medzi jednotlivých hráčov založenej na teórii vyjednávania. Jedným z perspektívnych spôsobov analyzovania načrtnutého problému je teória redistribučných systémov, ktorá je pôvodným variantom, aplikáciou a rozšírením teórie hier. Aplikácia teórie hier na otázku redistribúcie v rámci rôznych sociálnych systémov možno nájsť v mnohých dielach. Napríklad Osborne (2004) sa podrobne zaoberá otázkou teórie vyjednávania smerom k redistribúcii. Prehľad literatúry o otázke vzťahu medzi prerozdeľovaním výhod (výplat) podľa výkonu hráča a výkonu systému možno nájsť v (Štedron, 2007). Z pohľadu teórie hier bola táto otázka diskutovaná v Maňase (2002). Existujú viaceré spôsoby prerozdelenia výhod medzi hráčov, a to napr. rovnostárske, Kalai-Smorodinského, Nashovo alebo utilitárne riešenie, ktoré je predmetom tohto príspevku. O ďalších prístupoch, ktoré sú založené na viackriteriálnej optimalizácii diskutovala Tichá(2016). V nasledujúcej kapitole sa zameriame na jeden spôsob prerozdelenia výhod v prípade problému kooperatívneho smerovania vozidiel s homogénnym dopravným parkom, v ktorom uvažujeme o prerozdelení usparených nákladov vyplývajúcich zo vzájomnej spolupráce logistických spoločností (hráčov).

## 2 ALOKÁCIA ÚSPOR V KOOPERATÍVNEJ HRE

V nasledujúcom texte sa zameriame na jeden z prístupov prerozdelenia usparených nákladov medzi majiteľmi skladov (hráčov) v koalíciách, ktorí spolupracujú na základe vzájomného využívania vozidiel. Nech  $P = \{1, 2 \dots n\}$  je množina všetkých hráčov a koalícia  $S$  je ľubovoľnou podmnožinou množiny  $P$ ,  $S \subseteq P$ . Predpokladajme ďalej, že každý hráč má nejaký zaručený úžitok, inými slovami jedná sa o úžitok každého hráča hrajúceho hru individuálne (jednočlenné koalície).

Vo všeobecnosti je zrejme účelné uzatvoriť dohodu vtedy, ak hráči vzájomnou spolupracou získajú viac ako samostatným postupom. Jadro kooperatívnej hry potom tvorí množina prijateľných rozdelení, pričom každé rozdelenie má nasledujúce vlastnosti (Chobot a kol., 1991):

- Hráči si rozdelia celú spoločnú výhru
- Každý z hráčov požaduje aspoň toľko, koľko by si zabezpečil samostatným postupom bez spolupráce s druhým hráčom.

Uvažujme teraz dvoch hráčov (dodávateľov) 1 a 2 s charakteristickou funkciou s hodnotami  $v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{1,2\})$ .

Z daných hodnôt môžeme určiť zaručený úžitok hráčov, t.j. ich úžitok v prípade, že sa nachádzajú v jednočlennej koalícii.

$$\begin{aligned} u_1(\{1\}) &= v(\{1\}) \\ u_2(\{2\}) &= v(\{2\}). \end{aligned}$$

Najprv je potrebné rozdeliť usparené náklady koalície medzi hráčov tak, aby rozdelenie nákladov bolo nezáporné, aby bolo rozdelené v plnej čiastke a aby si oba hráči polepšili oproti jednočlennej koalícii. Koalícia je teda pre hráča výhodná a vznikne vtedy, keď existuje riešenie spĺňajúce nasledujúce podmienky.

---

<sup>1</sup> Cooperative Game Theory

- nezáporné rozdelenie koalície  $S(\{1,2\})$ ,

$$x_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (2)$$

- výhra koalície je rozdelená

$$x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) \quad (3)$$

- hráč 1, resp. 2 má z koalície si polepšil o hodnotu  $\varepsilon$  (konštantu) oproti jednočlennej koalícii

$$u_1(\{1,2\}) \leq u_1(\{1\}) - \varepsilon \quad (4)$$

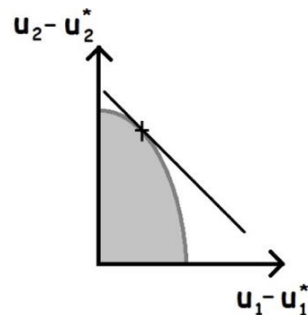
$$u_2(\{1,2\}) \leq u_2(\{2\}) - \varepsilon. \quad (5)$$

V našom prípade sa budeme zaoberať prerozdelením usporovaných nákladov (nie zisku) a preto účelová funkcia takéhoto druhu úlohy musíme upraviť vyjadrením úžitkovej funkcie v tvare:

$$f(u(S) - u^*) = -f(u(S) - u^*) \quad (6)$$

Kde  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)^T$  je vektor zaručených úžitkov (získaný kooperáciou), ktorý maximalizujeme. V nasledujúcom texte opíšeme utilitárne riešenie ako jeden zo spôsobov alokácie usporovaných nákladov v prípade kooperatívnej hry rozvozu pri podmienkach uvedených vyššie. Pokiaľ uvažujeme utilitárne riešenie prijímame predpoklad o rozdelení koalície výhry  $v(S)$  medzi jednotlivých hráčov koalície  $S$ : hráči si výhru rozdelia tak, že budú maximalizovať celkový úžitok koalície (súčet úžitkov jednotlivých hráčov). Budú teda maximalizovať všeobecný blahobyt bez ohľadu na jednotlivých členov koalície. Pritom prijímame predpoklad, že si každý z hráčov musí polepšiť aspoň o nejakú hodnotu  $\varepsilon$  (malé kladné číslo) oproti menším koalíciám. Grafické zobrazenie rozdelenia výhry v dvojčlennej koalícii môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku č 1.

Obr. 1: Utilitárne riešenie v prípade dvojčlennej koalície



Zdroj: vlastné spracovanie

### 3 NUMERICKÝ PRÍKLAD UTILITÁRNEHO RIEŠENIA ALOKÁCIE ÚSPOR V KOOPERATÍVNEJ HRE

V empirickej časti tohto príspevku vychádzame z výsledkov (vyčíslené prepravné a usporené náklady) kooperatívnej dopravnej úlohy, ktoré boli prezentované v (Čičková a Figurová, 2019) Akceptujeme predpoklad, že vlastníkami jednotlivých skladov sú rôzne subjekty (hráči), pričom každý z nich vlastní jeden sklad a má svoju množinu zákazníkov, ktorých musí obslúžiť. Hráči sú schopní navzájom spolupracovať a vytvárať koalície a tým znižovať svoje prepravné náklady.

Model kooperatívnej dopravnej úlohy a dáta boli získané z (Čičková a Figurová, 2019). V úlohe treba obslúžiť 10 zákazníkov dvomi logistickými spoločnosťami  $P = \{1,2\}$  z

Bratislavy<sup>2</sup>. Každý z hráčov vlastní jeden sklad s jedným vozidlom (s rovnakou kapacitou). Zákazníci sú na začiatku úlohy striktné pridelení k jednotlivým hráčom:  $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$  hráča 1,  $\{c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}\}$  hráča 2. Konštatujeme, že počet koalícií, ktoré môžu vzniknúť sú 3 (vrátane jednočlenných koalícií) a to koalície  $S$ :  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{1, 2\}$ . V nasledujúcej tabuľke môžeme vidieť optimálne trasy pre všetky koalície.

Tabuľka 1: Optimálne trasy v prípade kooperatívnej dopravnej úlohy

Koalície	$v(\{S\})$ =prepravné náklady	Optimálna cesta hráča 1	Optimálna cesta hráča 2
$S=\{1\}$	22,98	1 - $c_3$ - $c_5$ - $c_4$ - $c_2$ - $c_1$ - 1	-
$S=\{2\}$	15,32	-	2 - $c_8$ - $c_{10}$ - $c_9$ - $c_7$ - $c_6$ - 2
$S=\{1,2\}$	33,1	1 - $c_2$ - $c_1$ - 1	2 - $c_6$ - $c_3$ - $c_5$ - $c_8$ -2 - $c_7$ - $c_9$ - $c_4$ - $c_{10}$ - 2

Zdroj: vlastné spracovanie

Hodnota charakteristickej funkcie hry je v tomto prípade kooperatívneho správania v hodnote:  $v(\{1,2\}) = 33,1$ . Na základe výsledných hodnôt individuálnych prepravných nákladov  $v(\{1\})$  a  $v(\{2\})$  jednočlenných koalícií vieme odvodiť zaručené. Napríklad hráč 1 má zaručený úžitok vo výške  $v(\{1\}) = u_1(\{1\}) = 22,98$  a hráč 2 má zaručený úžitok  $v(\beta) = u_\beta(\{\beta\}) = 15,32$ . Na základe týchto výsledkov následne vyčíslujeme hodnotu usporených nákladov  $c^S$  jednotlivých koalícií v tabuľke č. 2.

Tabuľka 2: Vyčíslenie usporených nákladov z kooperácie

Koalície	Prepravné náklady $v(\{S\})$	Individuálne náklady $\sum_{p \in S} v(\{S\})$	Usporené náklady $c^S$	Individuálne náklady hráčov v koalícii $u(\{1, 2\})$	
				Hráč 1	Hráč 2
$S=\{1\}$	22,98	22,98	0	-	-
$S=\{2\}$	15,32	15,32	0	-	-
$S=\{1,2\}$	33,10	38,30	5,20	12,30	20,80

Zdroj: vlastné spracovanie

Z tabuľky č. 2 môžeme konštatovať viacero záverov. Prepravné náklady hráča 1 v prípade kooperatívneho správania sa sú vo 12,3 jednotiek, zatiaľ čo prepravné náklady hráča 2 sú výške 20,8 jednotiek. V nasledujúcom texte vypočítame hodnotu usporených nákladov  $c^S$ , t.j. môžeme konštatovať, že hráči vzájomnou spoluprácou ušetria 5,2 jednotiek nákladov oproti nekooperatívne pristupu.

V prípade utilitárneho riešenia hráči prerozdedia usporené náklady tak, aby sa maximalizoval súčet individuálnych usporených nákladov pre hráčov v koalícii. Podmienkou je, že si hráči nezhoršia svoju situáciu v hre vstupom do koalície. V prípade utilitárneho riešenia prerozdelenia ušetrovaných nákladov možno problém lineárneho programovania na základe (1)-(6) napísať nasledovne:

$$\max_{x_1, x_2} -(u_1(\{1,2\}) + u_1(\{1\})) - (u_2(\{1,2\}) + u_2(\{2\}))$$

<sup>2</sup> K dispozícii od autora tohto príspevku

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= v(\{1,2\}) \\
 u_1(\{1,2\}) &\leq u_1(\{1\}) - \varepsilon \\
 u_2(\{1,2\}) &\leq u_2(\{2\}) - \varepsilon \\
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

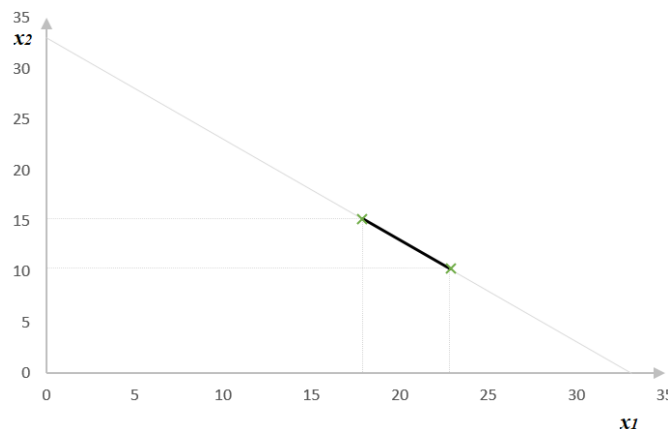
Prezentovaná úloha lineárneho programovania predstavuje prístup alokácie usporených nákladov v prípade kooperatívneho správania. Výsledky môžeme zapísať prostredníkom hraničných bodov:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})^T = (22.88, 10.32)^T \\
 \mathbf{x}^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})^T = (17.88, 15.22)^T
 \end{aligned}$$

A optimálne riešenie je reprezentované lineárnou kombináciou hraničných bodov:  
 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)}$ .

Kde  $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ . Potom sa optimálne riešenie nachádza na celej priamke v intervale  $\langle 17,88; 22,88 \rangle$  pre hráča 1 a v intervale  $\langle 10,3; 15,22 \rangle$  pre hráča 2. Grafické riešenie môžeme vidieť na nasledujúcom grafe č. 1.

*Graf 1: utilitárne riešenie alokácie úspor zobrazené na grafe*



Zdroj: vlastné spracovanie

Na výpočet optimálneho riešenia úlohy lineárneho programovania uvedenej vyššie sme používali solver Cplex 12.2.0.0 v rámci GAMSu na počítačovom zariadení INTEL® Core (TM) 2 CPU, E8500 @ 3.16 GB RAM pre Windows 10<sup>3</sup>. Ak hráč 1 má individuálne prepravné náklady vo výške 21,89 jednotiek a hráč 2 vo výške 11,21 jednotiek, ich usporené náklady  $c^S$  sú vo výške 5,2 jednotiek v porovnaní s nekooperatívnym správaním. Na základe toho potom utilitárne riešenie prerozdelenia týchto úspor je 1,09 jednotiek úspor pre hráča 1 a 4,11 jednotiek úspor pre hráča 2.

## 4 ZÁVER

Základným cieľom tohto príspevku bolo prezentovanie a následné aplikovanie rovnostárskeho riešenia kooperatívnej hry, ktorý sa považuje za jeden z mnohých prístupov riešenia prerozdelenia výhry v kooperatívnych hrách. V tomto príspevku sme sa zameriavali na

<sup>3</sup> Kód je k dispozícii od autora tohto príspevku

kooperatívnu hru úlohy rozvozu s cieľom minimalizácie celkových prepravných nákladov s tým, že hráči majú tendenciu medzi sebou spolupracovať. Našou úlohou bolo základe dosiahnutých výsledkov optimálnych trás poukázať na to, ako je možné rozdeliť ušetrené prepravné náklady, ktoré vyplývajú zo vzájomnej spolupráce medzi hráčmi (majiteľmi skladov). Vyčíslili sme náklady jednotlivých hráčov, či už jednotlivo alebo v spolupráci s iným hráčom, ktoré sme následne na základe úlohy lineárneho programovania utilitárneho riešenia prerozdělili medzi jednotlivých hráčov.

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17 *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska.***

### **Použitá literatúra**

1. CHOBOT, M., TURNOVEC, F., a ULAŠÍN, V. 1991. *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa. ISBN: 80-05-00702-7.
2. BARRON E. N. 2013. *Game Theory: An introduction*. New York: John Wiley & Sons Inc. ISBN 978-1118216934.
3. JINDAL, P. a NEWBERRY, P. 2018. To bargain or not to bargain: The role of fixed costs in price negotiations. *Journal of Marketing Research*, roč.55, č. 6,s. 832-851.
4. MAS-COLLEL, A., WHINSTON, M. D. a GREEN J. F. 1995. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press. ISBN 978-0195073409.
5. OSBORNE, J. 2002. *An Introduction to Game Theory*. New York : Oxford. University Press. ISBN 978-0195128956.
6. ŠTEDRON, B. 2007. *Manažerské řízení a informační technologie*. Praha : Grada. ISBN 8024720524.
7. TICHÁ, M. 2016. Multicriteria Coalitional Games and Bargaining Theory. In *Quantitative Methods in Economics : Multiple Criteria Decision Making XIX. International Scientific Conference.: 23rd May - 25th May 2018, Vrátna, Slovakia*. Bratislava : Letra Edu, s. 393-397. ISBN 978-80-972328-0-1.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Dana Figurová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: dana.figurova@euba.sk

# MÁ VÝZNAM ANALYZOVAT FELDSTEIN-HORIOKŮV MODEL V ČASOVĚ FREKVENČNÍ DOMÉNĚ?

## IS IT MEANINGFULL TO ANALYSE FELDSTEIN-HORIOKA MODEL IN TIME FREQUENCY DOMAIN?

*Lukáš Frýd*

### Abstrakt

Feldstein-Horiokův model pro měření kapitálové mobility patří mezi nejvýznamnější paradoxy v mezinárodní ekonomii. V tomto článku testujeme, zdali má význam analyzovat tento model v časově frekvenční doméně. Analýza je provedena na čtvrtletních datech pro Českou republiku za období 1995–2017. Transformace dat do časově frekvenční domény je provedena pomocí waveletové transformace. V práci docházíme k závěru, že různé škály reprezentující rozdílné časové intervaly nesou rozdílnou míru informace a z tohoto důvodu je vhodné analyzovat tento model v časově frekvenční doméně.

**Klíčová slova:** *wavelet, Feldstein-Horioka, MODWT*

### Abstract

Feldstein-Horioka model for measurement of capital mobility has been classified as one of the most important puzzles in international economics. In this paper, we test the usefulness of the time-frequency analysis of this puzzle. We analyze data for the Czech Republic from 1995 to 2017 with the utilization of wavelet transformation. We have found that different time scales represent different information. For this reason, we support the idea of analysis of Feldstein-Horioka in the time-frequency domain.

**Keywords:** *wavelet, Feldstein-Horioka, MODWT*

## 1 ÚVOD

V ekonomické teorii existují příklady tzv. paradoxů, kdy empirické výsledky neodpovídají očekávání založeném na ekonomické teorii. Jedním z takových paradoxů je Feldsteinův-Horiokův (FH) model. Feldstein a Horioka v roce 1980 publikovali model pro odhad kapitálové mobility vycházející z jednoduché regrese ve tvaru:

$$I_i = \alpha + \beta S_i + u_i, u \sim i. i. d(0, \sigma^2), \quad (1)$$

kde  $I = (I/HDP)_i$  a  $S_i = (S/HDP)_i$  představují poměry investic a úspor k hrubému domácímu produktu pro zemi  $i=1,2,\dots,N$ , a  $\alpha$  a  $\beta$  jsou neznámé parametry. Autoři vyšli z předpokladu, že kapitál proudí do zemí s nejvyšším očekávaným výnosem. Potom pro případ otevřené ekonomiky bude hodnotou parametru  $\beta$  nízká, nebo parametr  $\beta$  nebude statisticky významný. Naopak v případě uzavřené ekonomiky je zřejmé, že bude platit  $\beta = 1$ . Feldstein a Horioka provedli analýzu na průřezových datech šestnácti OECD ekonomik pro období 1960–1974 s výsledkem  $\hat{\beta} = 0,887$ . Navzdory očekávání tento závěr znamenal, že OECD země vykazují

velmi nízkou kapitálovou mobilitu. Tento výsledek pak následně podnítl zájem odborné veřejnosti a rovnice 1 byla podrobena jak ekonomické, tak ekonometrické kritice a diskuzi. V současné době však stále neexistuje jednotný názor, zdali lze nahlížet na rovnici 1 jako na indikátor kapitálové mobility. Z tohoto důvodu Obstfeld a Rogoff (2000) zařadili FH model mezi šest nejvýznamnějších paradoxů v mezinárodní ekonomii.

V této práci podrobíme rovnici 1 analýze v tzv. časově frekvenční doméně. Budeme testovat předpoklad, že ekonomiku tvoří heterogenní agenti, kteří přijímají rozhodnutí v rozdílných časových obdobích. Například domácnosti se rozhodují o svých úsporách v kratších časových intervalech než firmy a firmy se zase rozhodují rychleji než veřejný sektor. Stejná myšlenka je spojena i s investicemi, kdy firmy představují flexibilnější komponentu celkových investic, nežli veřejný sektor. Z tohoto důvodu uijeme waveletovou transformaci schopnou desagregovat původní data generující proces do dílčích procesů, které reprezentují heterogenní agenty, kdy analýza bude provedena pro Českou republiku.

Jedním z prvních průkopníků užití waveletové analýzy v ekonomii byl Ramsey, kdy například ve své studii z roku 1998 testoval, vztah mezi spotřebou a důchodem pro rozdílné časové škály. Waveletová analýza se dále prosadila ve finanční ekonomii např. Baruník a Vácha (2015).

Samotná rovnice 1 se také dočkala analýzy v časově frekvenční doméně. Například Zargar et al. (2019) analyzovali FH pro patnáct asijských ekonomik v období 1972–2016. Autoři v analýze odhadli vzájemný vztah mezi investicemi a úsporami pomocí spojitě waveletové transformace, kdy zjišťují, že statisticky významné změny probíhají na škálách reprezentující interval osm a více let. Naopak škály spojené s intervalem 2 až 4 roky nevykazují statistickou významnost. Waveletovou transformaci při analýze FH modelu užil Ko a Funashima (2019). Autoři analyzovali 9 zemí v období 1885–2010. Stejně jako Zargar et al. (2019) zjistili, že vztah mezi  $I$  a  $S$  závisí na časové škále. Závislost parametru  $\beta$  z rovnice 1 na zvolené škále dále demonstrovali např. Aguiar-Conraria, Azevedo a Soares (2008), Rua (2010, 2013).

Článek je organizován následovně. V druhé části krátce představíme waveletovou transformaci. Třetí část obsahuje popis dat a empirickou analýzu na kterou navazuje závěr analýzy.

## 2 METODOLOGIE

Základním prvkem waveletové analýzy je funkce definována jako:

$$f_{k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t-k}{s}\right) \quad (1)$$

kde  $k$  představuje parametr posunutí,  $s$  je škálovací parametr a  $t$  je čas. Pokud funkce  $f(t)$  splňuje podmínky podle Daubechies (1992):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 1,$$



pak funkci  $f(t)$  nazveme waveletovou funkcí. V časově frekvenční analýze tato funkce slouží jako filtr, schopný zachytit rozdílné frekvence v časové řadě a zároveň je i v této časové řadě lokalizovat. Zároveň waveletová analýza rozeznává dva typy waveletových funkcí, mateřská wavelet a otcovský wavelet. Mateřská wavelet reprezentuje tzv. vysoko propustný filtr a naopak otcovský wavelet představuje nízko propustný filtr.

V tomto článku bude užitá tzv. MODWT (Maximal overlap discrete wavelet transform), která umožňuje desagregovat původní signál (časovou řadu) o délce  $L$  na  $J$  časových řad o téže délce  $L$ . Zároveň platí, že součtem  $k$  časových řad získáme původní signál. MODWT transformace pak má následující tvar:

$$\tilde{w}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} x_{(t-l) \bmod N}, \quad (3)$$

kde  $\tilde{h}_{j,l}$  je mateřský MODWT filtr,  $x$  je analyzovaná (originální) časová řada a  $\bmod$  je modulo. Filtrace časové řady pomocí otcovského MODWT filtru ( $\tilde{g}$ ) je dána jako:

$$\tilde{v}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{g}_{j,l} x_{(t-l) \bmod N}. \quad (4)$$

Při přepsání do maticové podoby získáme

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{X}, \quad (5)$$

kde  $\mathbf{\Gamma}$  je reálná orthonormální matice o velikosti  $N \times N$ ,  $\mathbf{W}$  je matice MODWT koeficientů o velikosti  $(J+1) \times N$ . Rovnici 5 lze přepsat do podoby:

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{W}. \quad (6)$$

Na základě rovnic 5 a 6 můžeme zapsat originální signál jako:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \mathbf{\Gamma}_j^T \mathbf{W}_j + \mathbf{A}_J^T \mathbf{V}_J = \sum_{j=1}^J \mathbf{D}_j + \mathbf{S}_J, \quad (7)$$

kdy

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{\Gamma}_j^T \tilde{\mathbf{w}}_j \quad (8)$$

a

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{\Gamma}_j^T \tilde{\mathbf{v}}_j \quad (9)$$

Z rovnice 7 pak lze odvodit důležitou vlastnost waveletové transformace:

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \mathbf{W}^T \mathbf{W} = (\mathbf{\Gamma} \mathbf{X})^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \|\mathbf{X}\|^2. \quad (10)$$

Rovnice 10 říká, že druhá mocnina normy vektoru  $\mathbf{X}$  představuje energii, nebo také míru informace v signálu  $\mathbf{X}$  (Percival a Walden, 2000). Percival v roce 1995 dokázal, že lze

konzistentně odhadnout rozptyly desagregovaných časových řad pomocí výběrového rozptylu:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} (X_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \|W\|^2 - X^2 \quad (11)$$

kdy  $\|W\|^2 = \sum_{j=1}^J \|w_j\|^2 + \|A_j\|^2$  a  $X^2 = \frac{1}{N} \|A_j\|^2$  potom

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|w_j\|^2 \quad (12)$$

### 3 DATA A EMPIRICKÁ ČÁST

Časově frekvenční analýza rovnice 1 je provedena na čtvrtletních datech pro ČR pro období 1995–2017. Proměnné jsou v cenách roku 2010, sezónně i kalendářně očištěné. Jako investice byla užita tvorba hrubého fixního kapitálu a jako úspory hrubé domácí úspory. Data byla získána z Eurostatu. Jednotlivé časové škály reprezentující časové intervaly jsou zobrazeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Intervaly spojené s jednotlivými škálami

Škála	<i>D1</i>	<i>D2</i>	<i>D3</i>	<i>D4</i>	<i>D5</i>	<i>S5</i>
Čtvrtletí	2-4	4-8	8-16	16-32	32-64	64+

MODWT transformace byla provedena pomocí LA (8) filtru Daubechies (1992) a to do úrovně  $J=5$ . Následně byl pro každou úroveň odhadnut rozptyl za pomoci estimátoru z rovnice 12. Výsledky odhadu rozptylu jsou zobrazeny v tabulce 2.

Tabulka 2: Odhad rozptylu pro jednotlivé signály

Škála	<i>I</i>	<i>S</i>
Originál	0,000979	0,000496
<i>D1</i>	0,000060	0,000050
<i>D2</i>	0,000055	0,000036
<i>D3</i>	0,000056	0,000020
<i>D4</i>	0,000123	0,000049
<i>D5</i>	0,000164	0,000097
<i>S5</i>	0,000241	0,000079

Z tabulky 2 vidíme, že míra energie (informace) pro investice roste s časovou škálou. Zejména škály  $D4$ ,  $D5$  společně s doplňkem  $S5$  obsahují nejvíce informací. Naopak pro úspory není zřetelná struktura v časově frekvenční doméně.

V tabulce 3 jsou zobrazeny výsledky ANOVA testu. Druhý řádek označený jako „Originál  $I$ “ představuje ANOVA pro originální časovou řadu  $I$  a jednotlivé škály  $D$ . Třetí řádek představuje stejný test, ale pro úspory.

Tabulka 3: ANOVA test pro investice a úspory

	$D1$	$D2$	$D3$	$D4$	$D5$	$S5$
Originál $I$	0	0	0	0	0	0
Originál $S$	0	0	0	0	0	0

Z tabulky 3 je zřejmé, že ani v jednom případě jsme nezamítli nulovou hypotézu o shodě dvou rozptylu. Z tohoto výsledku usuzujeme, že data svědčí ve prospěch hypotézy, že jednotlivé škály jsou spojeny s rozdílnou mírou informace, než jakou představuje originální časová řada.

## 4 ZÁVĚR

V tomto článku jsme testovali, zdali má význam studovat Feldstein-Horiokův modelu v časově frekvenční doméně. Podkladová data pro analýzu byla získána pro Českou republiku pro období 1995–2017. Pomocí MODWT transformace byly desagregovány časové řady představující míru investic a úspor k hrubému domácímu produktu. Následně byl pro každou časovou řadu odhadnut rozptyl, který ve waveletové analýze představuje množství energie v signálu. Pomocí ANOVA testu jsme otestovali, zdali se liší množství energie v originální časové řadě oproti množství energie v desagregovaných časových řadách. V práci bylo zjištěno, že existuje statisticky významný rozdíl mezi množstvím energie v originálním signálu a v desagregovaných signálech. Dále bylo zjištěno, že míra investic vykazuje rostoucí míru energie s narůstající škálou (s delším časovým horizontem). Zároveň bylo zjištěno, že míra úspor nevykazuje zřetelný trend v chování množství energie na škálách. Výsledkem článku tak je, že data generující proces jak pro míru investic, tak pro míru úspor vykazuje heterogenní chování pro rozdílné škály (časové intervaly). Z tohoto důvodu se jeví analýza FH modelu pro Českou republiku, v časově frekvenční doméně jako vhodný nástroj pro pochopení vztahu mezi oběma proměnnými.

### Použitá literatura

1. AGUIAR-CONRARIA, L., AZEVEDO, N., and SOARE, M. J. 2008. Using wavelets to decompose the time-frequency effects of monetary policy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 387, pp. 2863–2878.
2. BARUNIK, J. and VACHA, L. 2015. Realized wavelet-based estimation of integrated variance and jumps in the presence of noise. *Quantitative Finance*, 15(8), pp.1347-1364.
3. DAUBECHIES, I.1992. Ten lectures on wavelets, volume 61. Siam.
4. FELDSTEIN, M., HORIOKA, C. 1980. Domestic saving and international capital flows. *Economic Journal*, 90, 314–329.
5. KO, J.H. and FUNASHIMA, Y., 2019. On the Sources of the Feldstein–Horioka Puzzle across Time and Frequencies. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 81(4), pp.889-910.

6. PERCIVAL, D. P. 1995. On estimation of the wavelet variance. *Biometrika* 82(3), pp. 619–631.
7. PERCIVAL, D. B. & A. T. WALDEN. 2000. *Wavelet methods for time series analysis*, Volume 4. Cambridge university press.
8. RAMSEY, J.B. and LAMPART, C. 1998. The decomposition of economic relationships by time scale using wavelets: expenditure and income. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 3(1).
9. RUA, A. 2010. Measuring comovement in the time–frequency space. *Journal of Macroeconomics*, Vol. 32, pp. 685–691.
10. RUA, A. 2013. Worldwide Synchronization since the Nineteenth Century: A Wavelet-Based View. *Applied Economics Letters*, 20 (8), 773–776. doi:10.1080/13504851.2012.744129.
11. ZARGAR, F.N., TIWARI, A.K. and OLAYENI, O.R., 2019. Testing for the Feldstein-Horioka hypothesis in Asia using wavelet analysis. *Applied Economics Letters*, 26(12), pp.999-1006.

### **Kontaktní údaje**

Ing. Lukáš Frýd

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Email: lukas.fryd@vse.cz

Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/78/2018 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

# Výběr počtu zpoždění ve vícerozměrných modelech časových řad pomocí křížové validace

## Lag Order Selection for Multivariate Time Series Models by Cross-validation

Ing. Jiří Georgiev

### **Abstrakt**

K tvorbě kvalitních predikcí pomocí vektorového autoregresního modelu je zásadní správná specifikace, a tedy zvolení náležitého počtu zpoždění. Nejčastěji se za tímto účelem používají informační kritéria. Tento příspěvek má za cíl porovnat predikční chyby inflace, nezaměstnanosti a hrubého domácího produktu pro modely zvolené pomocí informačních kritérií a pomocí výpočetně náročnější křížové validace. Za tímto účelem byla použita data za 21 evropských zemí. Pro tato data se jako jediné informační kritérium vhodné pro predikční model jeví BIC. Metoda křížové validace má ve většině případů oproti informačním kritériím vyšší tendenci volit počty zpoždění s nižší predikční chybou na validační sadě dat.

**Klíčová slova:** VAR, informační kritéria, křížová validace

### **Abstract**

Correct specification is crucial for predictive capabilities of vector autoregressive model and therefore correct selection of lag order. Information criterion is most often used for this purpose. This contribution aims to compare the predictive performance for models selected by information criterion and by computationally more demanding cross-validation. Data for 21 European countries are used for this purpose. Only information criterion suitable for selecting predictive models seems to be BIC. Cross-validation, in most cases has higher tendency to select lag order with lower predictive error on the validation set compared to information criterion.

**Keywords:** VAR, information criterion, cross-validation

## **Úvod**

Pro správnou specifikaci vektorového autoregresního modelu je zásadní výběr vhodného počtu zpoždění. Obecný přístup je odhadnout sadu modelů s různými zpožděními a následně volit takové zpoždění, které minimalizuje vybraná kritéria. Mezi nejpoužívanější patří Akaikeho informační kritérium, Schwarz-Bayesovo informační kritérium a Hannan-Quinn. Tento příspěvek si klade za cíl porovnat výběr pomocí informačních kritérií a výběr na základě křížové validace časových řad, a to na predikcích za skutečná makroekonomická data za 21 evropských zemí.

Struktura článku je následující. Nejdříve jsou stručně představeny vícerozměrné modely časových řad, informační kritéria a metoda křížové validace pro časové řady. Následně je popsána metodologie výpočtu predikčních chyb a porovnány dosažené výsledky. K výpočtům byl použit programovací jazyk R.

## 1 Metodologie a data

### 1.1 Vektorový autoregresní model

VAR model je populárním a flexibilním modelem, který je vhodný pro zachycení dynamického chování vícerozměrných časových řad, často je však nutné tyto řady rozšířit o exogenní proměnné. Takto rozšířený VAR( $p$ ) model lze definovat následovně

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{c} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \mathbf{\Pi}_p \mathbf{Y}_{t-p} + \mathbf{\Phi} \mathbf{D}_t + \mathbf{G} \mathbf{X}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{Y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$  je  $(n \times 1)$  vektor časových řad,  $\mathbf{D}_t$  je  $(l \times 1)$  matice deterministických proměnných,  $\mathbf{X}_t$  je  $(m \times 1)$  je matice stacionárních exogenních proměnných a  $\mathbf{\Phi}, \mathbf{G}, \mathbf{\Pi}$  jsou matice parametrů. Podrobný popis například v Zivot et al., 2007.

### 1.2 Informační kritéria

Zásadním rozdílem mezi kritérii je přístup k penalizaci složitosti modelu neboli k počtu zpoždění  $p$ . Jednotlivá informační kritéria Akaikeho (2) (AIC), Schwarz-Bayesovo (3) (BIC) a Hannan-Quinnovo (4) (HQ) lze definovat následovně

$$AIC(p) = \ln |\bar{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + \frac{2}{T} pn^2 \quad (2)$$

$$BIC(p) = \ln |\bar{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + \frac{\ln T}{T} pn^2 \quad (3)$$

$$HQ(p) = \ln |\bar{\boldsymbol{\Sigma}}(p)| + \frac{2 \ln \ln T}{T} pn^2 \quad (4)$$

kde  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}(p)$  je odhad kovarianční reziduální matice,  $T$  je počet pozorování,  $p$  je počet zpoždění a  $n$  je rozměr modelu. Podrobný popis poskytuje například Lütkepohl, 2005, Zivot et al., 2007.

### 1.3 Použití křížové validace k výběru délky zpoždění

Pro zvolení vhodného počtu zpoždění, by mělo být možné použít křížovou validaci časových řad, kde časová řada je rozdělena na trénovací a testovací sadu. Následně je model odhadnut na trénovací sadě a pro požadovaný predikční horizont  $h$  jsou provedeny predikce, které lze

porovnat s testovací sadou. K výpočtu predikční chyby lze použít například Mean Absolute Scaled Error (MASE) dle Hyndman; Koehler, 2006, který je definován jako

$$MASE = \frac{1}{h} \sum_{t=1}^h \frac{e_t}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |y_i - y_{i-1}|}. \quad (5)$$

Tato míra pak nezávisí na původních hodnotách, a tedy pro vyjádření chyby pro vícerozměrný model je míra spočtena pro všechny uvažované časové řady a následně zprůměrována. Pro zvýšení robustnosti procesu lze použít takzvaný “rolling forecasting origin” dle Hyndman, 2014, v rámci kterého je konec trénovací sady posouván a odhad modelu, tvorba predikcí a výpočet chyby se opakuje dokud není dosaženo konce testovací sady. Všechny takto získané chyby se následně agregují. Další vhodné míry popisuje například Shcherbakov et al., 2013.

## 1.4 Data

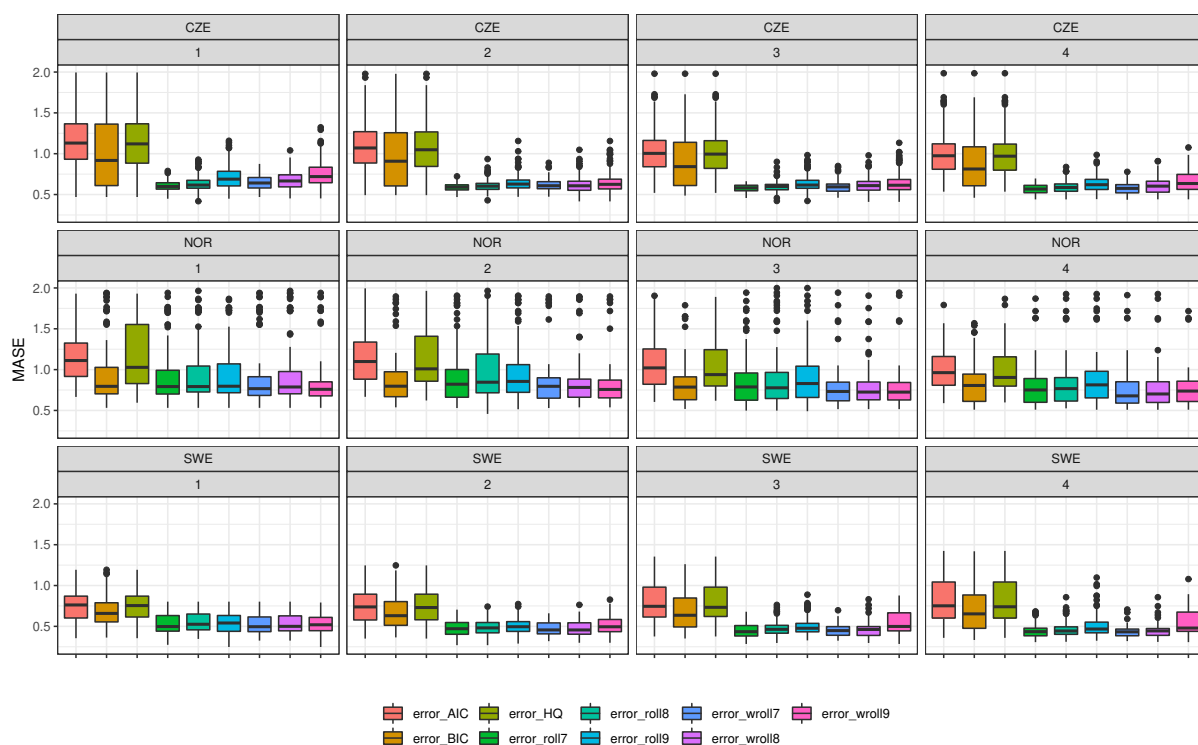
Veškerá data použitá v tomto příspěvku byla získána z OECD databáze<sup>1</sup>. pomocí R balíčku `OECD`<sup>2</sup> Celkově byla použita data za 21 evropských zemí: Belgie, Británie, Česká republika, Dánsko, Estonsko, Finsko, Francie, Nizozemsko, Irsko, Itálie, Lucembursko, Maďarsko, Německo, Norsko, Polsko, Portugalsko, Řecko, Rakousko, Slovensko, Španělsko, Švédsko. Predikované byly konkrétně řady za inflaci měřenou jako index spotřebitelských cen, hrubý domácí produkt a nezaměstnanost. Dále byly do modelů zahrnuty krátkodobé úrokové sazby, import zboží, náklady práce, peněžní zásoba M1, M3 a velikost aktivní populace. K posouzení stacionarity byl použit Rozšířený Dicker Fullerův test a nestacionární řady byly stacionarizovány pomocí prvních diferencí.

## 2 Výsledky

Pro všechny uvažované země byly časové řady rozděleny na trénovací, testovací a validační sadu, tak aby validační sada obsahovala alespoň 70 % pozorování. Následně byly vybrány různé kombinace proměnných, tak aby výsledné modely zahrnovaly predikovanou časovou řadu a 4 a méně dalších časových řad. Celkově pro všechny země bylo tedy odhadnuto 3730 modelů pro predikci inflace, nezaměstnanosti a hrubého domácího produktu. Pro každý takovýto model byl nalezen počet zpoždění minimalizující predikční chybu na testovací sadě dle sekce 1.3, a to pro predikční horizont 1, 2, 3 a 4 tak, aby rozdělení mezi testovací a trénovací sadou bylo 70 %, 80 % a 90 %. Dále byla uvažována predikční chyba pouze za sledovanou řadu (ve výsledcích uvedeno jako *wroll*). Pro porovnání byl počet zpoždění nalezen také pomocí in-

<sup>1</sup>OECD database -<https://data.oecd.org/>

<sup>2</sup><https://cran.r-project.org/web/packages/OECD/OECD.pdf>



Obrázek 1: Porovnání predikčních chyb pro horizont (1,2,3 a 4) pro Českou republiku, Norsko a Švédsko

formačních kritérií AIC, BIC a HQ, pro které byla trénovací a testovací sada spojena. Predikční chyba zvolených modelů pro požadovaný horizont byla pak vyhodnocena na validační sadě opět pomocí míry MASE a „rolling forecasting horizon“. Výsledek pro predikci inflace pro Českou republiku, Norsko a Švédsko je zobrazen na obrázku 1. Zde je patrné, že pro tyto země výběr zpoždění na základě křížové validace dosahuje lepších výsledků. Tedy bez ohledu na predikční horizont jsou chyby délky zpoždění zvolených křížovou validací v průměru nižší. Pro predikci inflace všech zemí je výsledek uveden v tabulce 1, kde jednotlivá čísla udávají podíl, kdy se dané metodě podařilo určit počet zpoždění s nejnižší chybou ze všech zvolených metod výběru. Například tedy pro Českou Republiku a predikční horizont 1 určila křížová validace *roll* v 86 % případů počet zpoždění s nejnižší chybou, zatímco AIC pouze ve 3 % modelů. Obdobné výsledky lze pozorovat napříč zeměmi a i v rámci modelů pro predikci nezaměstnanosti (tabulka 2) a hrubého domácího produktu (tabulka 3). Zde jsou pro stručnost uvedeny pouze predikční horizonty 1 a 2. Dále při porovnání jednotlivých rozdělení trénovací a testovací sady se jako nejvhodnější jeví 70 % rozdělení a pro krátkost jsou tedy ve výsledcích zobrazeny pouze podíly pro toto rozdělení.



$h$	error	AUT	BEL	CZE	DEU	DNK	ESP	EST	FIN	FRA	GBR	GRC	HUN	IRL	ITA	LUX	NLD	NOR	POL	PRT	SVK	SWE
1	AIC	0.26	0.12	0.03	0.40	0.27	0.04	0.24	0.06	0.00	0.22	0.10	0.02	0.34	0.60	0.16	0.12	0.07	0.10	0.40	0.24	0.07
	BIC	0.26	0.34	0.28	0.44	0.25	0.44	0.84	0.16	0.30	0.16	0.52	0.35	0.62	0.20	0.16	0.44	0.66	0.25	0.28	0.24	0.21
	HQ	0.30	0.20	0.06	0.56	0.38	0.08	0.36	0.10	0.02	0.19	0.24	0.14	0.30	0.28	0.16	0.26	0.19	0.14	0.44	0.20	0.07
	roll 70%	0.30	0.40	0.86	0.18	0.19	0.64	0.80	0.58	0.80	0.35	0.42	0.59	0.64	0.36	0.76	0.48	0.75	0.40	0.16	0.44	0.64
	wroll 70%	0.64	0.60	0.62	0.24	0.49	0.76	0.80	0.74	0.78	0.66	0.70	0.60	0.62	0.12	0.44	0.52	0.88	0.66	0.32	0.52	0.64
2	AIC	0.18	0.08	0.03	0.30	0.29	0.12	0.36	0.06	0.00	0.20	0.06	0.03	0.34	0.44	0.16	0.10	0.08	0.10	0.36	0.20	0.05
	BIC	0.38	0.36	0.29	0.44	0.14	0.52	0.68	0.20	0.34	0.14	0.50	0.35	0.62	0.20	0.16	0.32	0.53	0.21	0.32	0.20	0.19
	HQ	0.30	0.22	0.06	0.54	0.40	0.08	0.52	0.16	0.06	0.14	0.20	0.12	0.30	0.32	0.16	0.24	0.19	0.14	0.52	0.16	0.04
	roll 70%	0.44	0.44	0.83	0.14	0.21	0.52	0.64	0.50	0.84	0.45	0.46	0.70	0.64	0.36	0.76	0.32	0.76	0.46	0.16	0.44	0.52
	wroll 70%	0.58	0.62	0.57	0.16	0.58	0.72	0.64	0.74	0.76	0.62	0.78	0.45	0.64	0.08	0.52	0.60	0.73	0.64	0.24	0.48	0.55
3	AIC	0.18	0.06	0.05	0.22	0.27	0.08	0.32	0.02	0.00	0.13	0.02	0.02	0.28	0.48	0.16	0.06	0.09	0.06	0.32	0.28	0.04
	BIC	0.44	0.42	0.26	0.46	0.10	0.52	0.72	0.16	0.34	0.18	0.52	0.22	0.64	0.20	0.16	0.34	0.48	0.16	0.32	0.28	0.15
	HQ	0.30	0.22	0.08	0.38	0.42	0.04	0.48	0.16	0.06	0.13	0.20	0.15	0.36	0.28	0.16	0.20	0.16	0.10	0.56	0.24	0.03
	roll 70%	0.48	0.46	0.78	0.30	0.30	0.60	0.68	0.42	0.88	0.48	0.42	0.66	0.66	0.32	0.72	0.48	0.68	0.39	0.12	0.40	0.64
	wroll 70%	0.60	0.58	0.59	0.22	0.63	0.56	0.68	0.72	0.86	0.67	0.72	0.65	0.66	0.12	0.64	0.56	0.67	0.81	0.24	0.44	0.64
4	AIC	0.18	0.06	0.05	0.16	0.27	0.08	0.32	0.04	0.00	0.09	0.02	0.03	0.26	0.32	0.20	0.08	0.10	0.06	0.32	0.16	0.02
	BIC	0.40	0.42	0.28	0.38	0.10	0.52	0.76	0.16	0.36	0.14	0.52	0.21	0.66	0.28	0.24	0.24	0.43	0.14	0.28	0.20	0.13
	HQ	0.28	0.22	0.08	0.28	0.40	0.04	0.44	0.14	0.08	0.09	0.16	0.16	0.34	0.24	0.20	0.22	0.13	0.09	0.56	0.16	0.04
	roll 70%	0.52	0.42	0.71	0.44	0.33	0.68	0.72	0.36	0.76	0.51	0.34	0.66	0.68	0.52	0.60	0.42	0.63	0.37	0.20	0.52	0.63
	wroll 70%	0.62	0.62	0.66	0.24	0.60	0.44	0.72	0.72	0.82	0.75	0.68	0.76	0.68	0.16	0.52	0.66	0.67	0.84	0.28	0.64	0.68

Tabulka 1: Četnost určení počtu zpoždění s nejnižší predikční chybou pro inflaci

$h$	error	AUT	BEL	CZE	DEU	DNK	ESP	EST	FIN	FRA	GBR	GRC	HUN	IRL	ITA	LUX	NLD	NOR	POL	PRT	SVK	SWE
1	error_AIC	0.06	0.02	0.05	0.14	0.23	0.40	0.08	0.14	0.12	0.32	0.06	0.11	0.18	0.16	0.12	0.24	0.09	0.05	0.28	0.40	0.22
	BIC	0.56	0.30	0.25	0.64	0.29	0.12	0.80	0.28	0.24	0.21	0.22	0.31	0.66	0.44	0.16	0.42	0.58	0.29	0.60	0.52	0.29
	HQ	0.12	0.20	0.06	0.58	0.46	0.48	0.32	0.20	0.10	0.30	0.20	0.11	0.30	0.32	0.12	0.26	0.13	0.08	0.44	0.40	0.23
	roll7	0.62	0.68	0.66	0.22	0.41	0.16	0.88	0.32	0.48	0.51	0.44	0.66	0.68	0.20	0.80	0.30	0.58	0.72	0.32	0.36	0.20
	wroll7	0.58	0.58	0.69	0.28	0.56	0.52	1.00	0.56	0.66	0.60	0.72	0.37	0.60	0.72	0.52	0.46	0.23	0.55	0.32	0.28	0.65
2	error_AIC	0.02	0.02	0.06	0.12	0.17	0.56	0.12	0.16	0.10	0.23	0.04	0.08	0.20	0.08	0.00	0.24	0.05	0.01	0.36	0.16	0.27
	BIC	0.58	0.24	0.25	0.52	0.27	0.12	0.76	0.34	0.26	0.22	0.26	0.33	0.66	0.40	0.12	0.38	0.54	0.20	0.60	0.36	0.29
	HQ	0.14	0.18	0.08	0.46	0.42	0.60	0.28	0.24	0.08	0.21	0.22	0.12	0.34	0.32	0.00	0.30	0.15	0.04	0.60	0.20	0.25
	roll7	0.56	0.80	0.62	0.24	0.48	0.08	0.84	0.26	0.52	0.58	0.38	0.64	0.70	0.24	0.76	0.20	0.53	0.80	0.32	0.52	0.25
	wroll7	0.50	0.60	0.81	0.52	0.58	0.36	0.96	0.48	0.66	0.60	0.82	0.41	0.60	0.80	0.60	0.46	0.32	0.59	0.28	0.32	0.57

Tabulka 2: Četnost určení počtu zpoždění s nejnižší predikční chybou pro nezaměstnanost

$h$	error	AUT	BEL	CZE	DEU	DNK	ESP	FRA	GRC	HUN	IRL	NLD	POL	SVK
1	error_AIC	0.22	0.26	0.16	0.60	0.18	0.14	0.08	0.14	0.35	0.02	0.38	0.34	0.88
	error_BIC	0.46	0.34	0.31	0.42	0.31	0.62	0.30	0.42	0.40	0.90	0.52	0.42	0.68
	error_HQ	0.38	0.28	0.20	0.52	0.34	0.30	0.14	0.26	0.36	0.22	0.48	0.37	0.84
	error_roll7	0.12	0.18	0.06	0.04	0.35	0.14	0.26	0.26	0.15	0.88	0.22	0.08	0.04
	error_wroll7	0.62	0.58	0.77	0.22	0.53	0.50	0.80	0.80	0.68	0.86	0.22	0.64	0.08
2	error_AIC	0.22	0.28	0.09	0.54	0.21	0.08	0.08	0.12	0.38	0.02	0.42	0.34	0.64
	error_BIC	0.54	0.26	0.29	0.46	0.29	0.50	0.36	0.40	0.43	0.92	0.56	0.46	0.60
	error_HQ	0.40	0.32	0.12	0.40	0.38	0.22	0.14	0.24	0.44	0.22	0.52	0.37	0.60
	error_roll7	0.16	0.02	0.03	0.18	0.46	0.20	0.30	0.26	0.08	0.94	0.20	0.07	0.16
	error_wroll7	0.46	0.60	0.86	0.30	0.50	0.60	0.78	0.80	0.59	0.80	0.20	0.61	0.24

Tabulka 3: Četnost určení počtu zpoždění s nejnižší predikční chybou pro hrubý domácí produkt

### 3 Závěr

Různé přístupy pro určení počtu zpoždění pro VAR model byly porovnány na skutečných datech za 21 evropských zemí. Z informačních kritérií se jako nevhodnější pro volbu zpoždění k tvorbě predikcí jeví BIC. Podobných výsledků dosáhl i Gredenhoff et al., 1997, který dále podotýká, že AIC a HQ odhadují správnou délku zpoždění pro statistickou inferenci častěji než BIC, který ale díky své tendenci podhodnocovat je vyhovujícím kritériem pro predikční modely. Křížová validace se prokázala jako vhodný nástroj pro výběr počtu zpoždění, a to jak přístup uvažující chybu za všechny řady, tak přístup uvažující pouze chyby za predikovanou řadu. Avšak rozdíl mezi těmito dvěma přístupy je nutné posoudit individuálně pro každou zkoumanou zemi.

### Použitá literatura

- GREDEHNOFF, Mikael; KARLSSONY, Sune, 1997. Lag-Length Selection in VAR-Models Using Equal and Unequal Lag-Length Procedures. *Working Paper Series in Economics and Finance*.
- HYNDMAN, Rob J., 2014. Measuring Forecast Accuracy.
- HYNDMAN, Rob J.; KOEHLER, Anne B., 2006. Another Look at Measures of Forecast Accuracy. *International Journal of Forecasting* [online]. Roč. 22, č. 4, s. 679–688 [cit. 2019-08-10]. ISSN 0169-2070. Dostupné z DOI: 10.1016/j.ijforecast.2006.03.001.
- LÜTKEPOHL, Helmut, 2005. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer.
- SHCHERBAKOV, Maxim; BREBELS, Adriaan; SHCHERBAKOVA, N.L.; TYUKOV, Anton; JANOVSKY, T.A.; KAMAIEV, V.A., 2013. A Survey of Forecast Error Measures. *World Applied Sciences Journal*. Roč. 24, s. 171–176. Dostupné z DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.24.itmies.80032.
- ZIVOT, Eric; WANG, Jiahui, 2007. *Modeling Financial Time Series with S-PLUS®*. Springer New York.

### Kontaktní údaje

Ing. Jiří Georgiev

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3

email: jiri.georgiev@vse.cz

Tento příspěvek byl vytvořen za podpory projektu č. IGA F4/60/2018 Interní grantové agentury, Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze.

## **Pygmalios analytics ako nástroj zberu dát súvisiacich so zákazníckym správaním sa v kamenných predajniach**

### **Pygmalios analytics as a tool for collection of customer behavior data in brick stores**

*Pavel Gežik*

#### **Abstrakt**

Spoznanie preferencií zákazníkov patrí medzi základne piliere úspešného predaja, resp. správneho oslovenia zákazníkov. Správna voľba predajnej stratégie a marketingovej stratégie vychádza práve z analýz správania sa zákazníkov a ich preferencií. Analistický prístup pri týchto analýzach sa ukázal ako najlepší prístup kvôli jeho exaktnosti a presnej kvantifikovateľnosti sledovaných metrik. Analýzy zákazníkov, štatistiky návštevnosti, identifikácia nákupných procesov zákazníkov sa stali hlavnými ukazovateľmi správania sa zákazníka a zároveň sa stali hlavnými nástrojmi plánovania predaja a prispôbovania predaju zákazníkom.

Pygmalios analytics je výborný nástroj poskytujúci adekvátne možnosti na získavanie týchto informácií a analýz. Ponúka zber dát založený na najnovších technológiách, ich základne ilustrovanie v prehľadných zobrazeniach ako aj možnosti získavania nie len agregovaných ale aj nazbieraných dát, ktoré môžu poslúžiť na hlbšiu analýzu na strane predajcu.

***KLúčové slová:** Preferencie zákazníkov, analýza správania zákazníkov, zber údajov.*

#### **Abstract**

Knowing customers preferences is one of the pillars of successful sales, respectively getting onto the right customers. The right choice of sales strategy and marketing strategy is based on analyses of customer behavior and their preferences. An analogous approach in these analyzes is the best approach because of its exactness and the accurate quantifiability of the metrics of visitors. Customer analyzes visitors' traffic statistics, customer purchasing patterns identification have become the main indicators of customer behavior, and have also become the main tools of the sales planning and customization.

Pygmalion analytics is an excellent tool providing adequate opportunities for obtaining this information and analysis. It offers data collection based on the latest technologies, their illustration in simple views, as well as the possibility of acquiring aggregated and also raw data that can serve for the next analysis for the seller

***Keywords:** Customers Preferences, Customer behavior analyses, Data Collection*

## **ÚVOD**

Spoznanie preferencií zákazníkov patrí medzi základne piliere úspešného predaja, resp. správneho oslovenia zákazníkov. Správna voľba predajnej stratégie a marketingovej stratégie vychádza práve z poznania zákazníkov a ich preferencií.

Týmto spoznávaním sa zväčša zaoberá, každý predajca a to bez ohľadu na veľkosť obchodu. Od malého predajcu, kde o to zaujíma majiteľ alebo ním poverená osoba až pod veľké predajné siete, kde sú na spoznávanie preferencií zákazníkov zamerané cele tímy alebo oddelenia.

V procese vývoja obchodu vzniklo množstvo metód, nástrojov alebo stratégií zameraných na spoznávanie zákazníkov ale až s príchodom predaja prostredníctvom internetu dostalo analyzovanie správania sa zákazníkov „iný rozmer“. Kamenné predajne boli a stále sú spojené s minimálnou mierou identifikácie zákazníka a jeho správania sa na predajnej ploche.

Identifikácia správania sa zákazníka ako identifikácia jeho samotného, spoznávanie jeho návykov a procesov, ktoré sú spojené s jeho nákupom ako aj jeho nákupná história sú základné informácie pre správne zistenie jeho preferencií a teda správne nastavenie spomínanej predajnej a marketingovej stratégie. Právne spomínané nástroje sú typické pre internetový predaj, ktorý zaznamenáva masívny rozmach a práve on je za poklesom objemu predaja v kamenných predajniach.

Internetový predaj spôsobuje zmenu aj v správaní sa predajcov. Pre mnohých predajcov sa stal predaj cez internet dominantným predajom a množstvo predajcov znížilo kvôli tomu aj objem tovarov v predajniach alebo zredukovalo predajnú sieť. Kamenný obchod ale stále nekončí a existuje ešte stále veľké množstvo zákazníkov, ktorí tento striktné preferujú nákup v kamennom obchode.

## 1 ANALÝZA ZÁKAZNÍCKEHO SPRÁVANIA

Analistický prístup pri identifikácii správania sa zákazníka a spoznaní jeho preferencií sa ukázal ako najlepší prístup kvôli jeho exaktnosti a presnej kvantifikovateľnosti sledovaných metrik. Nákup na internete je v princípe rovnaký ako nákup v kamennej prevádzke, zákazník prichádza do obchodu/na web stránku predajcu a začne si prehliadať tovar. Prechádza rôznymi časťami obchodu/webovými podstránkami podľa sortimentu a nakupuje „do košíka“. Následne nakúpený tovar uhradí a odchádza. Kým počas nákupu na internete má predajca možnosť celý priebeh nákupu sledovať a následne vyhodnotiť, v kamennej prevádzke je toto sledovanie skoro nemožné.

Princíp analytik správania je pritom jednoduchý a vychádza z „Spoznajte svojho používateľa. Zistite ako sa správa, kam kliká a čo ho najviac zaujíma. Ponúknite mu to, čo naozaj chce.“<sup>1</sup> Najznámejší nástroj na analýzu zákazníckeho správania v online prostredí, teda na web stránke predajcu, je Google Analytics. Google Analytics je služba, ktorá napomáha zistiť predajcovi ako sú používané jeho stránky a ako vyzerá virtuálny pohyb zákazníka po jednotlivých podstránkach. Jedná sa o obsiahlu a prepracovanú službu, ktorá umožňuje množstvo analýz vychádzajúc zo základných metrik spojených s návštevnosťou a analýzou zákazníkov až po komplexné analýzy a detailne zobrazovanie správania sa zákazníkov prostredníctvom jednotlivých pohľadov nazývaných ako predajný lievik. Aj skutočnosť, že sa jedná o bezplatnú službu pomohla k obľúbenosti a čoraz častejšiemu využívaniu analytických nástrojov na identifikáciu preferencií zákazníka.

Práve v súvislosti s popularitou spomínaných analytických prístupov vznikla potreba skúmať správanie zákazníkov aj v prostredí kamenných prevádzok. Prehľadné výstupy a zistenia, štatistiky návštevnosti, či „lievikový pohľad“ (z angl. funnel view) na nákupne procesy zákazníkov sa stali hlavnými ukazovateľmi správania sa zákazníka a zároveň sa stali hlavnými nástrojmi plánovania predaja a prispôbovania sa predaju zákazníkom.

---

<sup>1</sup> <https://www.ui42.sk/web-analytics>

Tieto osvedčené prístupy začali byť potrebné aj pre plánovanie predaja zákazníkom, ktorí preferujú kamenne prevádzky. Jedným z nástrojov umožňujúcich sledovanie zákazníckeho správania je aj Pygmalios Analytics.

## 2 PYGMALIOS ANALYTICS

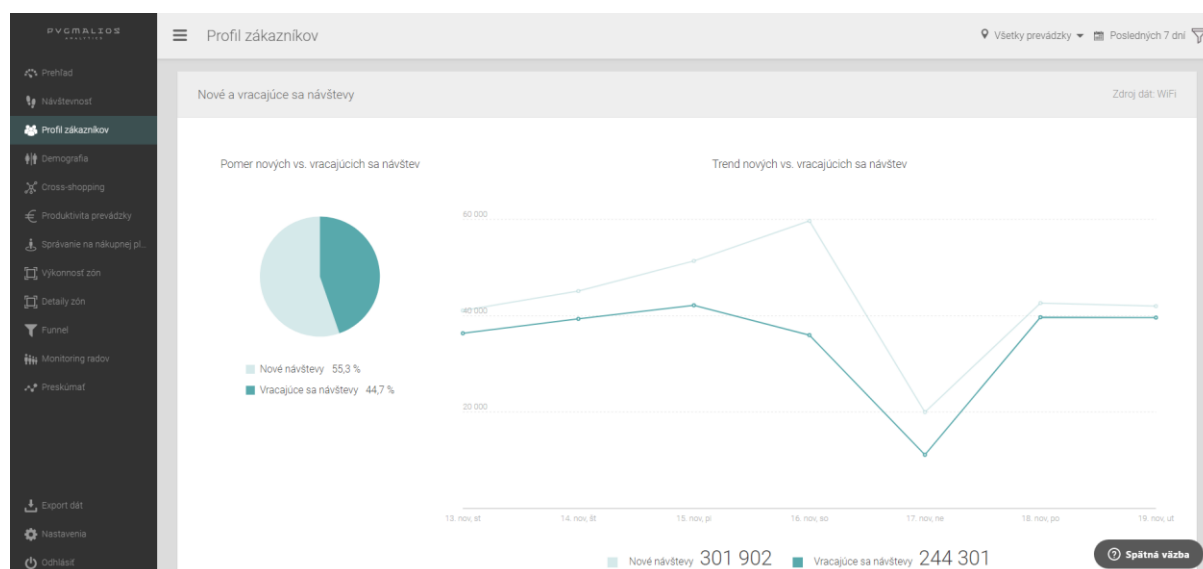
Pygmalios analytics (ďalej len „PA“) je nástroj spojený z viacerých častí označovaných ako moduly. Každý jeden modul predstavuje tak špecifické zariadenia na zber dát ako aj špecifické algoritmy spojené so zberom, výpočtom, vyhodnocovaním, agregovaním a interpretovaním dát. Uvedené zariadenia sú umiestnené na prevádzke a zbierajú informácie a údaje o návštevníkoch prevádzky. Niektoré zariadenia robia základné výpočty, iné zasielajú dáta priamo na spracovanie do PA. Všetky dáta sú pred ďalším spracovaním, teda výpočtami a agregáciou kontrolované. Sleduje sa ich správnosť a konzistentnosť a tak isto funkčnosť zariadenia, ktoré ich zbiera. Následne sú vyhodnotené, sú nad nimi vykonané preddefinované štatistiky a interpretácie. Ďalej sú tieto dáta doplnené o externé faktory a údaje od predajcu. Takto upravené informácie je možné zobraziť v aplikácii na web stránke alebo je možné z nich vytvárať rôzne reporty či ich exportovať pre ďalšie použitie.

Aplikácia teda obsahuje nasledujúce moduly: návštevnosť, profil zákazníkov, demografia, cross-shopping, produktivita prevádzky, správanie na nákupnej ploche, výkonnosť zón, detaily zón, predajný lievik, monitoring radov.

Práca v aplikácii je intuitívna a ponúka kumulatívne zobrazenie za všetky prevádzky alebo jednotlivo za zvolené prevádzky alebo prevádzku. Rovnako variabilné je obdobie zobrazenia dát s rôznymi predvolenými dĺžkami či porovnávanie období. V aplikácii sú zobrazované najčastejšie stredné hodnoty jednotlivých metrik ale aj grafy trendov (obr. 1) alebo maticové zobrazenie pre dni týždňa po hodinách (obr. 2).

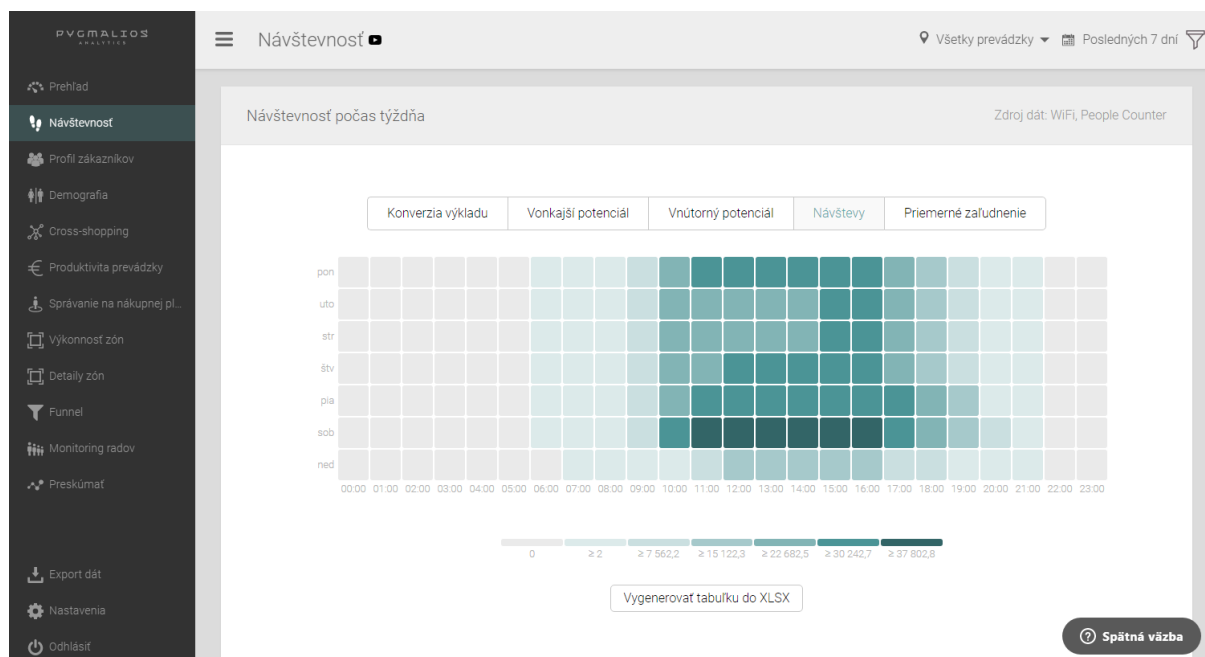
Aplikácia ponúka v každej svojej časti export dát jednotlivých metrik daného modulu do formátu .xlsx alebo .csv pre vybrané prevádzky a zvolené obdobie. Komplexný export dát je možný cez záložku „export dát“.

Obr. 1 – Zobrazenie trendov v PA



Zdroj: <https://analytics.pygmalios.com>

Obr. 2 – Maticové zobrazenie v PA



Zdroj: <https://analytics.pygmalios.com>

## 2.1 Moduly dát z počítačiel vstupu a wifi dát

Návštevnosť ponúka metriky ako konverzia výkladu, ktorá pozostáva z porovnanie vonkajšieho a vnútorného potenciálu predajne. Tieto dve metriky sú zobrazené osobitne v trendovom grafe ako trend návštevnosti. Hlavným ukazovateľom je sumárna hodnota návštevnosti za zvolené obdobie doplnená histogramom po dňoch v týždni a po hodinách kumulatívne za všetky dni. Rovnako zobrazená je aj metrika zaľudnenosť. Všetky uvedené metriky sú následne vyobrazené v maticovom zobrazení. Pod týmto zobrazením je aj prehľadná tabuľka s uvedenými hodnotami pre jednotlivé zvolené prevádzky.

Profil zákazníkov ponúka informáciu o percentuálnom zastúpení nových a stálych návštevníkoch, trendy ich návštevnosti a priebeh v zvolenom období. Ďalej je zobrazená lojalita, teda histogram opakujúcich sa návštev a priemerný čas strávený v prevádzke jednotlivými návštevníkmi ako aj zobrazenie jeho distribúcie podľa dĺžky a početnosti.

Z wifi údajov vychádza aj časť cross-shopping, ktorá poskytuje informáciu o tom, koľko percent z návštevníkov navštívilo aj inú prevádzku v rámci predajnej siete.

## 2.2 Demografické údaje

Demografické dáta sú zbierané špeciálnymi kamerami a identifikácia návštevníka podľa pohlavia a veku je realizovaná priamo danou kamerou. Kamery nezhotovujú záznam ale odosielajú len uvedené informácie.

V PA sú zobrazované informácie o priemernom veku návštevníkov podľa pohlavia aj spoločne počas sledovaného obdobia a rovnako distribučné rozdelenie podľa vekových skupín (18-26, 27-35, 36-50, 51-65, 66+) a percentuálny podiel všetkých návštevníkov podľa pohlavia.

## 2.3 Sledovanie pohybu návštevníka po prevádzke

Všetky ostatné metriky okrem produktivity prevádzky sú zbierané na základe sledovania pohybu návštevníka po prevádzke. Produktivita prevádzky predstavuje hlavné metriky vypočítavané z transakčných informácií predajcu, ktoré sú doplnené o metriky z časti návštevnosť, resp. prepočítavané spoločne s týmito metrikami.

Na zber údajov o pohybe návštevníka sa využívajú rôzne technológie a algoritmy ale zbierané údaje sú zväčša vyhodnocované v rovnakých metrikách. Jedna sa o ukazovatele priemerného nákupného času, prejdenej vzdialenosti, rýchlosti pohybu a počte trás. Následne sú zobrazené tieto nazbierané trasy, tzv. tepelné mapy (z angl. „heatmaps“), ktoré vizualizujú pohyb po prevádzke a je umožnené rôzne filtrovanie týchto pohybov.

Ak je prevádzka rozdelená do zón, tak ďalšia časť poskytuje podrobné štatistiky týchto zón pre rôzne metriky a umožňuje ich porovnávanie alebo zobrazenie vzájomných vzťahov prostredníctvom percent. Jedná sa o metriky: návštevnosť zóny, návštevníci zóny, prechody zónou, príbuznosť zón, čas v zóne a zachytnosť zóny.

Prechody medzi zónami prehľadne zobrazuje časť predajný lievik, kedy pomocou „sankey“ diagramu možno určiť najčastejší pohyb po predajni s jeho kvantifikovaným vyjadrením.

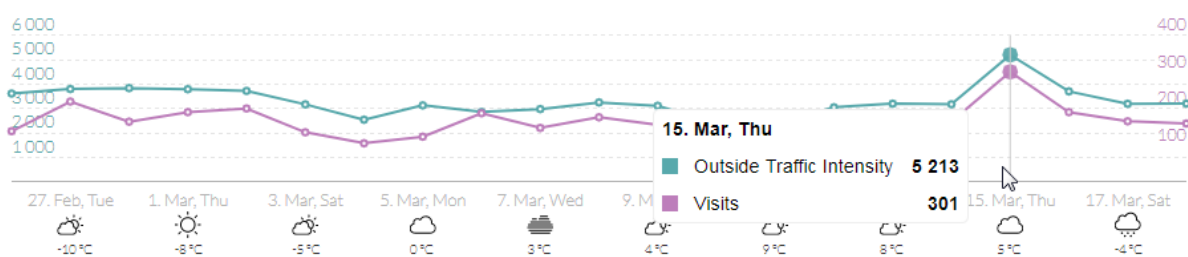
Špecifická časť je monitoring radov, ktorá obdobným spôsobom sleduje pohyb zákazníka v rade a zbiera informácie o množstve návštevníkov v rade pri pokladni. V tejto časti sú metriky: dĺžka radov, maximálna dĺžka radu, priemerný čas v rade a bežný čas v rade.

## 3 RÔZNE PRÍKLADY A PRÍPADY POUŽITIA

V závislosti od zakúpeného modulu môžu byť prípady použitia rôzne. Každý predajca je jedinečný a ma vlastnú predstavu, čo a ako chce sledovať na prevádzke. Analytické pohľady v aplikácii sú len základne a v princípe poskytujú len stredné hodnoty jednotlivých metrik.

Najčastejší pohľad je ale na trendy jednotlivých metrik a následné hľadanie cyklov, zmien alebo najvyšších hodnôt. Najčastejšie je skúmanie návštevnosti v porovnaní s vonkajším potenciálom (obr. 3).

Obr. 3 – Zobrazenie „preskúmať“ v PA

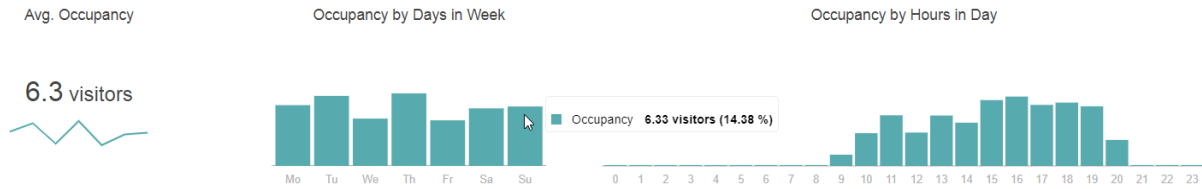


Zdroj: <https://analytics.pygmalios.com>

Tieto sledovania možno doplniť o externé faktory, ako napr. počasie alebo porovnávanie s transakčnými údajmi, či porovnávanie medzi jednotlivými obdobiami alebo prevádzkami. Práve pri porovnávaní medzi obdobiami možno sledovať reakcie návštevníkov na sviatky a dni pracovného pokoja, ako sa menia ich návyky a ako sa správajú v jednotlivých lokalitách. Rovnako podľa PA je možné vyhodnocovať úspešnosť kampaní podľa návštevníkov, či príde do prevádzky rovnaké množstvo návštevníkov alebo sa zvýšil záujem. Porovnanie tohto trendu s transakčnými údajmi je nápomocné aj k vyhodnoteniu predajnej stratégie počas kampane (dátum 15. marca v obr. 3).

Pre väčšinu predajcov sú potrebné aj analýzy zaľudnenosti, ich prepojenia na tzv. mieru otočenia na pate, ktoré je v prevádzke silným negatívnym faktorom. Vysoká zaľudnenosť prevádzky je problém, ktorý je nutné vyriešiť, nakoľko hrozí strata zákazníka a je nutné identifikovať dôvody, prečo v prevádzke vzniká (obr.4).

Obr. 4 – Zaľudnenosť v PA



Zdroj: <https://analytics.pygmalios.com>

Základné metriky ako návštevnosť, vonkajší potenciál, transakčné údaje slúžia ako vstupy do modelu overujúceho správnosť otváracích hodín prevádzky. Správne nastavenie otváracích hodín môže priniesť nemalé navýšenie tržieb bez navýšenia nákladov (za predpokladu nezmenenej doby otvorenia prevádzky).

Skúmanie tepelných máp pomáha odhaliť teplé a studené zóny v prevádzke. Teplá zóna predstavuje problém z dôvodu, že na malej ploche je množstvo nakupujúcich a tí sú následne nespokojní, resp. nenakúpia produkty, ktoré by si inak kúpili. Rozloženie sortimentu z teplej zóny do studenej a naopak prispieva k plynulému pohybu po prevádzke.

Sledovanie najčastejších trás slúži na identifikáciu tzv. hrdiel fľaše (z angl. bottleneck), teda miest, kde sa zbiehajú všetky trasy. Toto miesto môže byť problém, ktorý komplikuje prechod prevádzkou, ktorý je nutné odstrániť. Ak je to ale spôsobené prirodzeným pohybom po prevádzke, je nájdenie týchto miest výhodné pre marketingové účely, keďže sa jedná o miesta okolo ktorých sa pohybuje najväčšie množstvo návštevníkov.

Monitoring radou a analýza tvorby radov na prevádzke je podstatná pre optimalizáciu počtu otvorených pokladní ako aj pre plánovanie potreby pracovníkov, resp. pokladníkov na prevádzke. Už spomínaná zaľudnenosť a čakanie v rade tvoria najčastejšie problémy prevádzky, pre ktoré si návštevník vyberie inú prevádzku predajcu alebo rovno zvolí iného predajcu.

Vyššie uvedený prehľad príkladov použitia predstavuje iba malý zlomok všetkých možností. PA disponujem aj možnosťou upozornovania predajcu prostredníctvom notifikácií, kedy je možné nechať si zasielať správy v okamihu, kedy na prevádzke vznikne predajcom definovaný neželaný stav.

## ZÁVER

Štúdia spoločnosti Google<sup>2</sup> uvádza, že až 50% vyhľadávaní prostredníctvom smartfónu vedie k návšteve danej predajne už v ten istý deň. Takmer 18% týchto návštev pritom končí nákupom. Z uvedeného je zjavné, že predaj prebiehajúci v kamenných prevádzkach ešte nekončí a stále sa jedná o veľké množstvo zákazníkov, ktoré možno analyzovať a teda lepšie spoznávať ich preferencie. Na základe získaných informácií prispôbovať tieto predajne v závislosti od ich štruktúry a lokality. Hľadať modely, šablóny, či vzory v správaní sa zákazníka, podľa ktorých je možné pripraviť danú prevádzku tak, aby vyhovovala presne daným typom zákazníkov a ich preferenciám.

<sup>2</sup> [https://think.storage.googleapis.com/docs/how-advertisers-can-extend-their-relevance-with-search\\_research-studies.pdf](https://think.storage.googleapis.com/docs/how-advertisers-can-extend-their-relevance-with-search_research-studies.pdf)



Pygmalios analytics je výborný nástroj poskytujúci adekvátne možnosti na získavanie týchto informácií. Ponúka zber dát založený na najnovších technológiách, ich základne ilustrovanie v prehľadných zobrazeniach ako aj možnosti získavania nie len agregovaných ale aj nazbieraných dát, ktoré môžu poslúžiť na hlbšiu analýzu na strane predajcu.

Možnosti, ktoré tento nástroj poskytuje sú vhodné pre široké spektrum predajcov, tak ako bolo v úvode uvedené od malého predajcu až po celú sieť predajni, teda tak pre majiteľa obchodu ako aj pre celé oddelenie zamerané na analýzu správania sa zákazníkov.

Uvedený príspevok obsahuje iba stručný popis Pygmalios analytics a možnosti, aké ponúka pre identifikáciu spotrebiteľského správania a preferencií zákazníkov.

### **Použitá literatúra**

1. Fašiang, T. (2012). *Komunikačné stratégie maloobchodu* Trnava : Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave, Fakulta masmediálnej komunikácie, 2012. - 117 s. - ISBN 978-80-8105-466-2
2. <https://pygmalios.com/>
3. <https://www.ui42.sk/web-analytics>
4. [https://think.storage.googleapis.com/docs/how-advertisers-can-extend-their-relevance-with-search\\_research-studies.pdf](https://think.storage.googleapis.com/docs/how-advertisers-can-extend-their-relevance-with-search_research-studies.pdf)

### **Kontaktné údaje**

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 2 67 295 820

email: [pavel.gezik@euba.sk](mailto:pavel.gezik@euba.sk)

# NIEKTORÉ ASPEKTY KEYNESOVEJ A LEONTIEFOVEJ KONCEPCIE MULTIPLIKÁTORA

## SOME ASPECTS OF KEYNES AND LEONTIEF'S CONCEPT OF MULTIPLIERS

*Marián Goga<sup>1</sup>*

### **Abstrakt**

Autor sa v článku zameriava na niektoré metodologické problémy súvisiace s Keynesovou a Leontiefovou koncepciou multiplikátora a vzájomne ich porovnáva. Matematické vzťahy v uvedených koncepciách zachytávajú systémy so spätnými väzbami. Poukazuje na okolnosť, pri ktorej existuje zhoda medzi Keynesovým modelom multiplikátora a otvoreným statickým Leontiefovým modelom. Porovnáva štrukturálny input-output model s agregátnym dynamickým modelom, ktorý je založený na princípe multiplikátora – akcelerátora, pričom vidieť isté podobnosti, ale aj rozdielnosti oboch modelov.

**KLúčové slová:** *Leontiefov model, Keynesov multiplikátor, spätná väzba, agregátny model, štrukturálny akcelerátor, princíp multiplikátora, princíp akcelerátora*

### **Abstract**

The article focuses on some methodological issues related to Keynesa and Leontief's concept multiplier and compares them mutually. Mathematical relationships in the above concepts capture systems with feedback. It points to the circumstance in which there is a discrepancy between the Keynesmodel multiplier and the open static Leontief's model. It compares the structural input-output model with an aggregate dynamic model, based on the principle of a multiplier-accelerator, with the possibility to see some similarities, but also the differences between the two models.

**Keywords:** *Leontief's model, Keynes multipliers, feedback, aggregate model, structural accelerator, multiplier principle, accelerator principle*

## **1 POROVNANIE KEYNESOVEJ A LEONTIEFOVEJ KONCEPCIE**

Analýza medziodvetvových vzťahov (input–output analýza) sa v súčasnosti úspešne aplikuje takmer vo všetkých hospodársky vyspelých štátoch, ale aj v mnohých menej rozvinutých krajinách. Z uplatňovania na národohospodárskej úrovni neskoršie vznikali aplikácie na úrovni podniku (firmy), odvetvia, regiónu a potom sa začala táto metóda využívať aj na úrovni medzinárodnej. Je prirodzené, že uplatňovanie input–output analýzy v rôznych ekonomických systémoch viedlo k rozvinutiu alebo modifikácii niektorých zložiek tejto metódy.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0248/17: *Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie.*

<sup>2</sup> DUCHIN, F. – STEENGE, A. E. 2007. *Mathematical Models in Input-Output Economics.* New York: Rensselaer, 2007.

V článku sa v obmedzenom rozsahu zameriame na niektoré metodologické problémy súvisiace s Keynesovou a Leontiefovou koncepciou multiplikátora a vzájomne ich porovnáme.

V otvorenom input-output modeli sa dá analyzovať nielen existujúci stav, ale ak sú dané technické koeficienty, je možné tiež vypočítať objem celkovej produkcie jednotlivých odvetví k ľubovoľne zadanej veľkosti a štruktúre konečnej spotreby. Ináč povedané, model môže poslúžiť k analyzovaniu toho, aká zmena v celkovej produkcii jednotlivých odvetví nastane, ak sa zmení dopyt po finálnych produktoch. Súvislosť s teoretickou analýzou účinkov zmien v efektívnom dopyte W. Leontief vyjadruje takto: „Je nevyhnutné interpretovať národné hospodárstvo skôr ako otvorený, než uzatvorený systém ... v otvorenom modeli je možné »fixovať« istý počet premenných ľubovoľne, zatiaľ čo ostatné budú vyplývať z nutnosti neporušiť štrukturálne vzťahy. Všeobecná logika tohto postupu je v podstate totožná s tou, ktorá vyplýva vo viac či menej presnej forme z rôznych modelov keynesovskej analýzy multiplikátora.“<sup>3</sup>

W. Leontief sa o multiplikátore nezmieňuje iba náhodou. Existuje totiž určitá zásadná zhoda medzi Leontiefovým otvoreným input-output modelom a Keynesovou koncepciou multiplikátora. Táto zhoda sa však netýka všetkých podrobností, pretože v určitých črtách je medzi týmito dvoma modelmi značný rozdiel. Uvedieme teraz určité paralelné porovnanie oboch modelov.

Pre názornosť porovnáme vzájomne rovnice Keynesovho multiplikátora a rovnice Leontiefovho input-output modelu. Pri multiplikátore predpokladáme konštantný sklon k spotrebe. Symbolika v multiplikátore vyjadruje čísla a v Leontiefovom modeli vektory a matice.<sup>4</sup>

a) Keynesova koncepcia multiplikátora:

1.  $\mathbf{Y} = \mathbf{C} + \mathbf{I}$   
- základná rovnica, ktorá vyjadruje vzťah: konečný produkt (národný dôchodok, národný príjem) sa rovná súčtu spotreby a investícií,
2.  $\mathbf{C} = a \cdot \mathbf{Y}$   
- spotrebná funkcia: spotreba je úmerná dôchodku (príjmu) podľa sklonu k spotrebe,
3.  $\mathbf{Y} = (1 - a)^{-1} \cdot \mathbf{I}$   
- závislosť národného dôchodku (príjmu) od investícií.

b) Leontiefov input-output model:

1.  $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{y}$   
- základná bilančná rovnica, ktorá vyjadruje vzťah: celková produkcia sa rovná súčtu medziproduktu (medzispotreby) a konečnej spotreby,
2.  $\mathbf{m} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

---

<sup>3</sup> LEONTIEF, W. 1951. *The Structure of American Economy 1919 – 1929*. New York: Oxford University Press, 1951, s. 206.

<sup>4</sup> GOGA, M. 2009. *Input-output analýza*. Bratislava: IURA EDITION, 2009, ISBN 978-80-8078-293-1.

- nákladová funkcia: medziprodukt je úmerný celkovej produkcii, získanej násobením vektora celkovej produkcie a matice technických koeficientov,

3.  $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}$

- závislosť celkovej produkcie a konečnej spotreby.

Matica  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  sa v Leontiefovom modeli tiež nazýva maticovým multiplikátorom, ktorý transformuje zmeny v konečnej spotrebe na zmeny v objeme výroby.

Uvedené matematické vzťahy zachytávajú systémy so spätnými väzbami. Rozdiel medzi nimi je v tom, že v multiplikátore je len jedna spätná väzba, naproti tomu, v Leontiefovom modeli ich je celý rad. Preto je na jednej strane multiplikačný koeficient vyjadrený číslom a na druhej strane sú spätné väzby vyjadrené celou maticou – maticou koeficientov celkovej spotreby.

Aj napriek podobnosti je predsa len vidieť, že uvedené vzťahy vyjadrujú iné súvislosti. V Keynesovom multiplikátore je vyjadrená závislosť národného dôchodku (národného príjmu, konečnej produkcie) od investícií, v Leontiefovom modeli je to závislosť celkovej produkcie od konečnej spotreby. Vieme, že v keynesovských modeloch sa pracuje len s rastom národného dôchodku (národného príjmu) a medziprodukt do nich vôbec nevstupuje. V Leontiefovom modeli vystupuje celková produkcia a tiež medziprodukt (medzispotreba).

Ak by sme analyzovali rovnice oboch modelov, ich klasická interpretácia by bola jednoduchá.

- a) Keynesov model: ak je daný národný dôchodok (konečná produkcia) a marginálny sklon k spotrebe, z toho vyplýva, koľko zostane na investície. Objem investícií a marginálny sklon k spotrebe určuje úroveň národného dôchodku (konečnej produkcie).
- b) Leontiefov model: ak je daná celková produkcia a matica technických koeficientov, z toho vyplýva, koľko zostáva na konečnú spotrebu. Dopyt v konečnej spotrebe a matica technických koeficientov určuje dopyt po celkovej produkcii. Dopyt po celkovej produkcii je väčší ako dopyt v konečnej spotrebe. Zvyšovanie dopytu je vyjadrené práve koeficientmi celkovej spotreby.

Koeficienty celkovej spotreby  $r_{ij}$  (ide o koeficienty matice  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ) kvantitatívne vyjadrujú istý druh multiplikačného procesu, ktorý prebieha v národnom hospodárstve a ktorými sa zosilňuje efektívny dopyt. Ide však o multiplikačný proces, ktorý je trochu odlišný, ale koncepčne je podobný, ako chápanie investičného násobiteľa (multiplikátora). Uvedme príklad: predpokladajme, že na trhu vznikne dodatočný dopyt po textile. Aby mohol byť tento textil vyrobený, treba do textilných firiem dodať viacej suroviny, elektriny, vlny, bavlny a pod. Teda dodatočný dopyt po textile generuje dopyt po celom rade rôznych iných medziproduktov. Tým sa však proces nekončí. Na to, aby sa v iných odvetviach (elektrárňach, poľnohospodárstve, ...) mohlo vyrobiť viacej produkcie (elektriny, vlny, ...) na zvýšenie výroby textilu, je nevyhnutné do týchto odvetví dodať viacej výrobných prostriedkov a materiálov, medziiným tiež textilu. Potom celkový vyvolaný dopyt po textile bude väčší ako pôvodný dodatočný dopyt. Celý proces postupuje takto ďalej. Koeficienty celkovej spotreby  $r_{ij}$  vyjadrujú stav, ku ktorému sa dospeje po úplnom „vyčerpaní“ tohto multiplikačného procesu.

Podobnosť aj rozdiel oproti Keynesovmu multiplikátoru je zjavný. Tu je zachytený v celej štruktúrálnej bohatosti proces násobenia dopytu po medziproduktoch (medzispotrebe), ktorý

v Keynesovom modeli nemôže byť zachytený, pretože zo svojich vzťahov medziprodukt vynecháva. Na druhej strane tu však nie je zachytená jedna zásadná vec, ktorá je osou Keynesovho multiplikačného procesu. A to, že dodatočný dopyt, ktorý vedie k zvýšeniu výroby, vyvoláva zvýšenie zamestnanosti, dôchodku a pri danom sklone k spotrebe zároveň aj k zvýšeniu dopytu po spotrebných predmetoch. Toto zvýšenie dopytu po spotrebných predmetoch v Leontiefovom input-output modeli nie je. Dopyt v konečnej spotrebe je v ňom považovaný za daný exogénny vstup.

Všimnime si ešte jednu dôležitú okolnosť, pri ktorej existuje zhoda medzi Keynesovým modelom multiplikátora a otvoreným statickým Leontiefovým modelom. Ide o to, že v modeli multiplikátora vystupujú investície len ako dopytotvorný činiteľ a neberie sa do úvahy ich výrobná funkcia. Podobne v input-output modeli figurujú investície len ako súčasť konečného dopytu, a je skúmaný len ich dopytotvorný efekt. V prvom, ani v druhom modeli nie je zachytený proces investovania, ktorý vedie k prírastku výrobných kapacít v hospodárstve. Preto sa pri odvodzovaní objemu národného dôchodku (konečnej produkcie), investícií, alebo celkovej produkcie do konečnej spotreby musí predpokladať, že v hospodárstve existuje dostatok výrobných kapacít, aby mohla byť príslušná produkcia vyrobená. Táto okolnosť je veľmi významná, pretože ukazuje na statický charakter oboch modelov.<sup>5</sup>

## 2 POROVNANIE AGREGÁTNEHO MODELU A INPUT-OUTPUT MODELU

W. Leontief rozšíril uvedené myšlienky a k statickému otvorenému modelu pripojil spätné väzby, ktoré zachytávajú štrukturálnu závislosť investičného procesu. Ide o štrukturálny akcelerátor. Namiesto jedného investičného koeficienta sa v ňom vyskytuje celá matica investičných koeficientov. Koeficienty tejto matice vyjadrujú množstvo investičných statkov, ktoré je treba dodať z jednotlivých odvetví do určitého odvetvia, aby sa v ňom vytvorili kapacity nevyhnutné na zabezpečenie jednotkového prírastku výroby.

Štrukturálny input-output model, ktorý W. Leontief založil na týchto myšlienkach obsahoval prvky dynamického modelu.<sup>6</sup> Ak ho porovnáme s agregátnym dynamickým modelom, ktorý je založený na princípe multiplikátora – akcelerátora, uvidíme isté podobnosti, ale aj rozdielnosti oboch modelov. Oproti predchádzajúcemu výkladu urobíme malé zmeny vo východiskových predpokladoch. Predovšetkým zavedieme do základnej rovnice agregátneho modelu okrem spotreby a vyvolaných investícií ešte autonómne výdavky štátnej správy na nákup tovarov a služieb. V input-output modeli rozdelíme konečnú spotrebu na investície (hrubú tvorbu kapitálu) a spotrebu (domácností a štátnej správy). Ďalej zavedieme vzťah na výpočet investícií; je to vzťah akcelerátora, podľa ktorého sa investície musia rovnať prírastku národného dôchodku (konečnej produkcie), resp. celkovej produkcie násobenému investičným koeficientom, resp. maticou investičných koeficientov. Obidva modely sú vyjadrené pomocou diferenciálnych rovníc.<sup>7</sup>

<sup>5</sup> HUSÁR, J. 1998. *Makroekonómia*. Bratislava: Kartprint, 1998.

<sup>6</sup> LEONTIEF, W. 1953. *Studies in the Structure of the American Economy*. New York: Oxford University Press, 1953.

<sup>7</sup> KEYNES, J. M. 1966. *Obecná teorie zaměstnanosti, úroku a peněz*. Praha: SNPL, 1966.

a) Agregátny model:

1.  $Y = C + I + G$

- základná rovnica, ktorá vyjadruje vzťah: konečný produkt (HDP, národný dôchodok) sa rovná súčtu spotreby domácností, investícií a spotreby štátnej správy,

2.  $C = a Y$

- spotrebná funkcia: spotreba je úmerná národnému dôchodku (HDP) podľa sklonu k spotrebe,

3.  $I = b \frac{dY}{dt}$

- investičná funkcia: investície sa rovnajú prírastku národného dôchodku (HDP) násobenému investičným koeficientom,

4.  $Y - aY - b \frac{dY}{dt} = G$

- diferenciálna rovnica modelu.

b) Input-output model:

1.  $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{i} + \mathbf{c}$

- základná bilančná rovnica: celková produkcia sa rovná súčtu medziproduktu, investícií a spotreby,

2.  $\mathbf{m} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

- nákladová funkcia: medziprodukt sa získa vynásobením vektora celkovej produkcie maticou technických koeficientov,

3.  $\mathbf{i} = \mathbf{B} \frac{d\bar{x}}{dt}$

- investičná funkcia: vektor investícií sa rovná vektoru prírastku celkovej produkcie vynásobenej maticou investičných koeficientov,

4.  $\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B} \frac{d\bar{x}}{dt} = \mathbf{c}$

- sústava diferenciálnych rovníc.

V uvedených modeloch sa dá pozorovať analógia v matematickom zobrazení. Spätná väzba vyjadrená prvým a druhým vzťahom zachytáva princíp multiplikátora, spätná väzba vyjadrená prvým a tretím vzťahom zase princíp akcelerátora. V agregátnom modeli vystupuje jedna diferenciálna rovnica prvého rádu, v input-output modeli je to celá sústava lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu. Riešením agregátneho modelu sa získa rast národného dôchodku (HDP, konečnej produkcie), naproti tomu input-output modelom sa získa rast celkovej produkcie. Agregátny model nezachytáva multiplikáciu dopytu po medziproduktoch, input-output model zase nezachytáva multiplikáciu dopytu po spotrebných predmetoch. Rozdiel je aj v koncepcii investičných koeficientov, a to nielen v tom, že v input-output modeli sú rozdelené podľa odvetví pôvodu a určenia, ale tiež v tom, že v input-output modeli sú investičné koeficienty chápané ako nevyhnutné množstvo investícií na jednotkový prírastok celkovej výroby. Naproti tomu v agregátnom modeli vyjadrujú nevyhnutné

množstvo investícií na jednotkový prírastok národného dôchodku (konečnej produkcie) alebo HDP.<sup>8</sup>

### **Použitá literatúra**

1. CIASCHINI, M. 2001. *Input-Output Analysis. Current Developments*. New York: Springer, 2001.
2. DUCHIN, F. – STEENGE, A. E. 2007. *Mathematical Models in Input-Output Economics*. New York: Rensselaer, 2007.
3. GOGA, M. 2009. *Input-output analýza*. Bratislava: IURA EDITION, 2009, ISBN 978-80-8078-293-1.
4. HUSÁR, J. 1998. *Makroekonómia*. Bratislava: Kartprint, 1998.
5. KEYNES, J. M. 1966. *Obečná teorie zaměstnanosti, úroku a peněz*. Praha: SNPL, 1966.
6. KÝN, O. 1967. *Strukturální modely růstu*. In: *Eseje o teoriích ekonomického růstu*. Mnichov: MPRA, 1967.
7. LEONTIEF, W. 1953. *Studies in the Structure of the American Economy*. New York: Oxford University Press, 1953.
8. LEONTIEF, W. 1951. *The Structure of American Economy 1919 – 1929*. New York: Oxford University Press, 1951.

### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Marián Goga, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

Tel.: +4212/67295824

e-mail: [goga@uba.sk](mailto:goga@uba.sk)

---

<sup>8</sup> KÝN, O. 1967. *Strukturální modely růstu*. In: *Eseje o teoriích ekonomického růstu*. Mnichov: MPRA, 1967, s. 247-281.

# ANALÝZA CENOVÉHO DNA AUTOMOBILŮ POMOCÍ KVANTITATIVNÍCH METOD

## ANALYSIS OF A PRICE BOTTOM OF CARS BY QUANTITATIVE METHODS

*Jakub Hanousek*

### Abstrakt

Článek se zabývá nalezením cenového dna u automobilů BMW M5. Hledání cenového dna je prováděno pomocí vícerozměrného regresního modelu. Cena vozu je vysvětlována prostřednictvím najetých kilometrů a konkrétní generaci vozu. Nákup vozu, který se nachází na cenovém dnu představuje zajímavou alternativní investici.

***Klíčové slova:*** *cenové dno, BMW M5, regresní analýza*

### Abstract

This paper deals with a price bottom of BMW M5. The price bottom of BMW M5 is found by multidimensional regression model. The price is explained by mileage and the generation of a car model. Purchase a car at the bottom of the price is an interesting alternative investment.

***Keywords:*** *price bottom, BMW M5, regression analysis*

## 1 ÚVOD

V současné době, kdy spořicí účty vykazují prakticky nulové zhodnocení a další konvenční bankovní produkty jsou na tom velice podobně, je stále větší poptávka po netradičních investicích, které přinášejí daleko efektivnější zhodnocení finančních prostředků. Jednou z možných nekonvenčních investic je nákup automobilu, jehož cena se bude zhodnocovat. Nejvýhodnější je nákup automobilu, když se nachází na „cenovém dnu“. Existenci cenového dna jsem se rozhodl otestovat na jednom konkrétním modelu. Kritéria pro výběr modelu byla dvě. Vozidlo by mělo být vyráběno dostatečně dlouhou dobu a jeho konkrétní vozy v rámci generace by měly být maximálně homogenní. Tyto kritéria dobře splňuje BMW M5. Je vyráběno nepřetržitě od roku 1984 a zároveň vozy v jednotlivých generacích mají prakticky stejnou výbavu (vždy stejný motor, stejnou převodovku, stejné sportovní doplňky).

## 2 DATA, PROMĚNNÉ A VÝCHOZÍ MODEL

Data byla převzata z internetových stránek [www.autoscout24.de](http://www.autoscout24.de), dne 23.10.2017. Autoscout24 je největší evropský inzertní server, který inzeruje ojeté automobily z celé Evropy. K dni 23.10.2017 zde bylo inzerováno 2 353 357 ojetých osobních automobilů, z toho bylo 360 BMW M5.

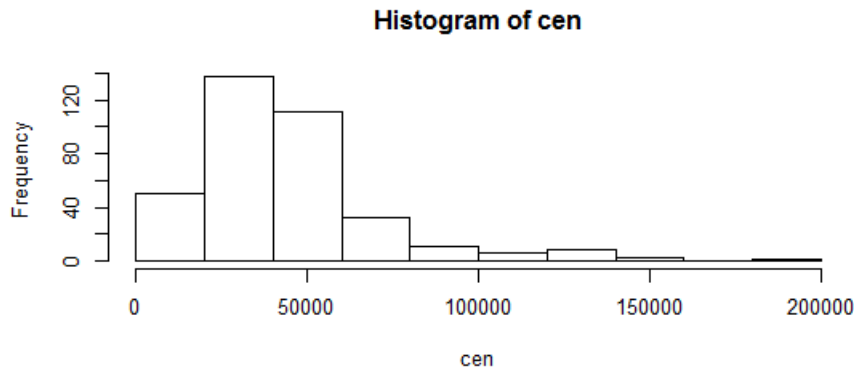
Vysvětlovaná proměnná *cen* je kvantitativní spojitá. Vysvětlující proměnná *km* je také kvantitativní spojitá. Vysvětlující proměnná generace je kvalitativní. Tato proměnná bude představovat konkrétní generaci (e28, e34, e39, e60, f10 a f90). Do modelu bude zahrnuta



pomocí 5 regresorů, které mohou nabývat hodnot pouze 0, nebo 1 tzv. dummy regresory. Regresor  $f_{90}$  v regresním modelu nebude zahrnut, aby nedošlo k perfektní multikolinearitě.

## 2.1 Vysvětlovaná proměnná

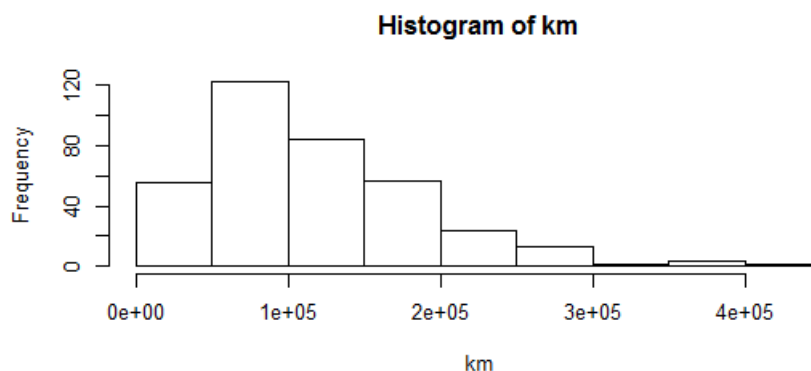
Vysvětlovaná proměnná je cena v Eurech. Průměrná hodnota vysvětlované proměnné je 44 545,2. Medián vysvětlující proměnné je 39440.



Obrázek 1: Histogram proměnné cen (výstup z R)

## 2.2 Vysvětlující proměnné

Vysvětlující proměnná  $km$  vyjadřuje počet ujetých kilometrů. Průměrná hodnota vysvětlující proměnné je 116 264. Medián vysvětlující proměnné je 104 000. Směrodatná odchylka je 73 191,43. Vysvětlující proměnná generace značí generaci modelu. Regresor  $e_{28}$  nabývá hodnoty 1 celkem 6krát, což znamená, že v datech se BMW M5 e28 vykytuje celkem 6krát,  $e_{34}$  36krát,  $e_{39}$  97krát,  $e_{60}$  97krát,  $f_{10}$  152krát. Zbývá pozorování, u kterých žádný dummy regresor nenabývá hodnoty 1 je generace  $f_{90}$ , v datech je celkem 14krát.



Obrázek 2: Histogram proměnné km (výstup z R)

## 2.3 Výchozí model

Výchozí rovnice modelu má tvar:

$$cen_i = \beta_0 + \beta_1 * km_i + \beta_2 * e_{28}_i + \beta_3 * e_{34}_i + \beta_4 * e_{39}_i + \beta_5 * e_{60}_i + \beta_6 * f_{10}_i + e_i$$

### 3 ODHAD MODELU METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Model ve tvaru  $cen_i = \beta_0 + \beta_1 * km_i + \beta_2 * e28_i + \beta_3 * e34_i + \beta_4 * e39_i + \beta_5 * e60_i + \beta_6 * f10_i + e_i$  odhadneme metodou nejmenších čtverců v softwaru R.

```
Call:
lm(formula = cen ~ km + e28 + e34 + e39 + e60 + f10, data = BMW)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-31798  -6647  -1287   3972 118567

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.240e+05  3.458e+03  35.865 < 2e-16 ***
km           -1.447e-01  1.380e-02 -10.484 < 2e-16 ***
e28          -5.180e+04  7.150e+03  -7.244 2.75e-12 ***
e34          -6.938e+04  4.838e+03 -14.341 < 2e-16 ***
e39          -7.693e+04  4.601e+03 -16.718 < 2e-16 ***
e60          -7.658e+04  4.064e+03 -18.845 < 2e-16 ***
f10          -5.323e+04  3.735e+03 -14.253 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12940 on 353 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7802,    Adjusted R-squared:  0.7765
F-statistic: 208.9 on 6 and 353 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Obrázek 4: výstup z R

Na obrázku 4 jsou výsledky odhadovaného modelu. U všech regresorů zamítáme  $H_0$  o nevýznamnosti regresních parametrů. Zamítáme také  $H_0$  o nevýznamnosti modelu jako celku ( $p$ -value  $< 2.2e^{-16}$ ). Koeficient determinace je 0,7802, tzn., že se podařilo vysvětlit modelem 78,02% hodnot vysvětlované proměnné. Reziduální rozptyl je  $12\,940^2$ . Pokud bychom regresní parametry vypočítali explicitně dle vztahu  $b = (X^T X)^{-1} X^T y$  dospěli bychom ke stejnému výsledku (viz. R script).

#### 3.1 Požadavky na chybovou složku modelu

Chybová složka by měla splňovat silnou sadu předpokladů

- 1) Regresní matice  $X$  má plnou hodnost, tzn. striktně nezávislá.

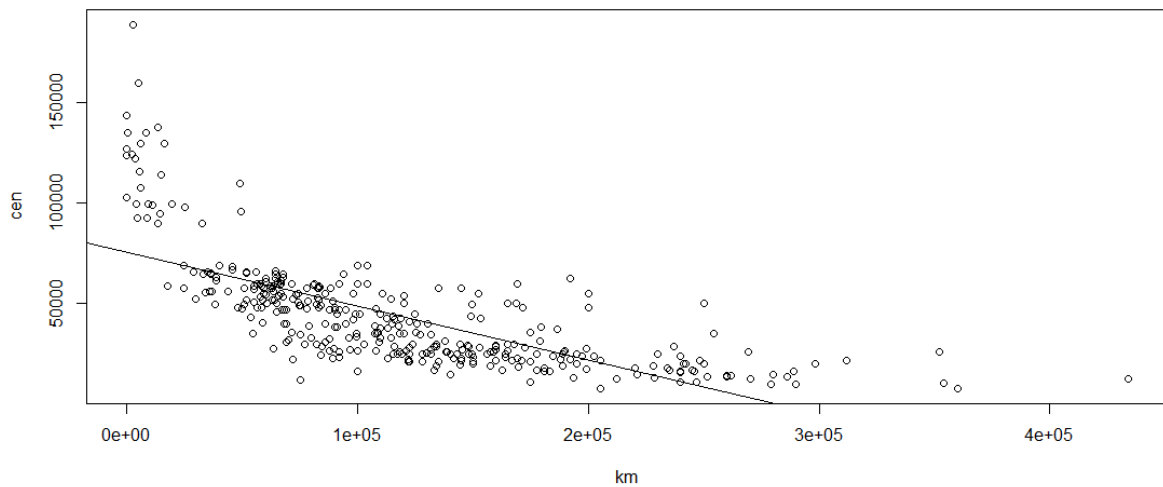
Pokud by nebyl splněn tento předpoklad, v modelu by se objevila silná multikolinearita či dokonce perfektní kolinearita.

- 2)  $\varepsilon_i \approx NID(0; \sigma^2)$

Tento výraz v sobě dokonce zahrnuje hned několik předpokladů.  $E(\varepsilon_i) = 0$ , při porušení se promítne nenulová střední hodnota náhodné složky do odhadu úrovnové konstanty. Odhad úrovnové konstanty bude vychýlený.  $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$  při porušení tohoto předpokladu vzniká heteroskedasticita a autokorelace. Odhady parametrů zůstanou nestranné a konzistentní, ale nebudou vydatné ani asymptoticky vydatné (nebudou mít nejmenší rozptyl). Dále budou odhady směrodatných chyb parametrů a odhad rozptylu náhodné složky vychýlené, takže se na ně nelze spolehnout při statistických testech a při konstrukci intervalů spolehlivosti.

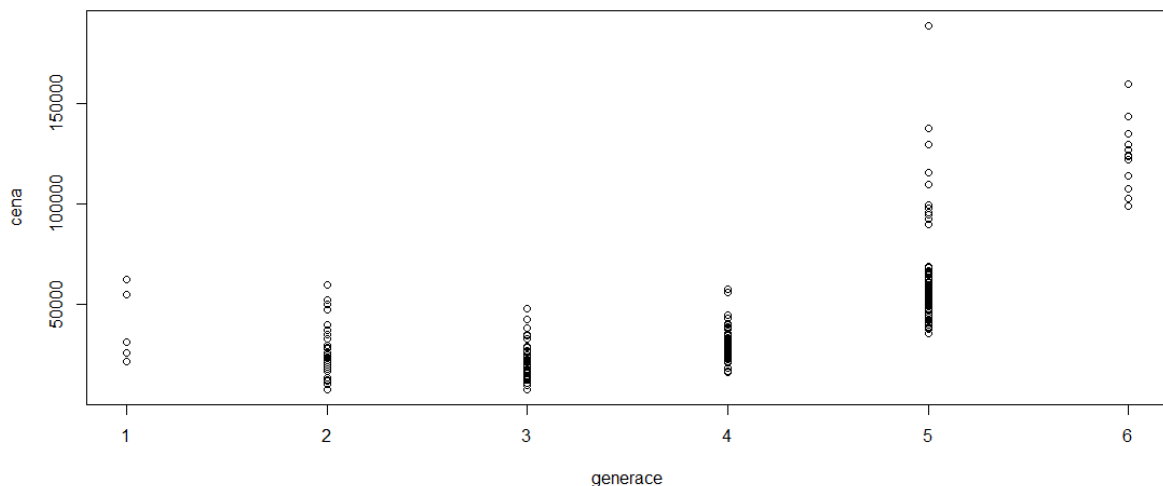
### 3.2 Rezidua modelu

V programu R vykreslíme závislosti jednotlivých proměnných.



Obrázek 5: závislost ceny na počtu najetých km.

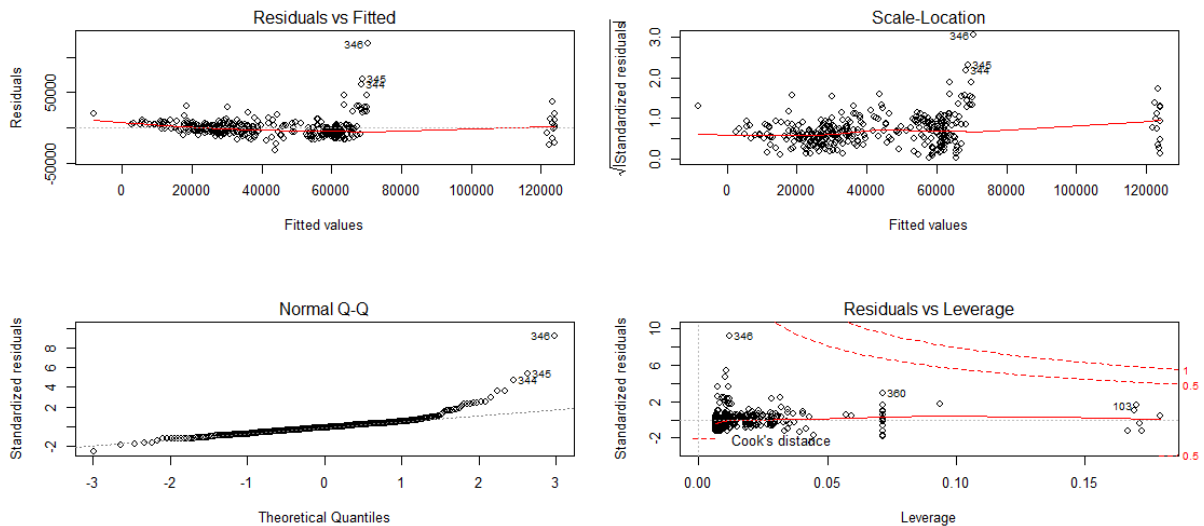
Z obrázku vidíme, že pokud bychom uvažovali pouze tento vztah model, by nebyl příliš dobrý. Cenu vozidel s málo najetými km do 20 000 km a vozidla s hodně najetými km, s více než 230 000 km, model podhodnocuje. V případě hodně ojetých vozů nad 280 000 km by cena takového vozu byla dokonce záporná. Vozidla s proběhem okolo 100 000 km naopak model nadhodnocuje.



Obrázek 6: cena oproti generacím

Na obrázku jsou zobrazeny všechny generace, které jsou v modelu oproti ceně. Na ose X, hodnota 1 představuje generaci e28, hodnota 2 = e34, 3 = e39, 4 = e60, 5 = f10, 6 = f90. Tento obrázek je pouze ilustrativní a v žádném případě na takto specifikovaných datech nemůžeme dělat regrese v kontextu našeho modelu. Z obrázku je patrné, že v průměru nejvyšších cen nabývá generace f90, která je v tomto obrázku vyjádřena hodnotou 6. Nejnižších cen naopak

nabývá generace e 39, která je v obrázku vyjádřena hodnotou 3. Toto je v souladu s naším modelem. V modelu je zvolena f90 jako referenční proměnná, oproti f90 mají všechny dummy regresory záporný parametr. Z těchto regresorů má nejvíce záporný parametr regresor e39 (-76 930). To je také v souladu s obrázkem.



Obrázek 7: Souhrnné grafy modelu

Graf „Residuals vs Fitted“ zobrazuje rezidua ( $e_i = y_i - \hat{y}_i$ ) oproti vyrovnaným hodnotám ( $\hat{y}$ ).

Graf „Scale - Location“ zobrazuje standardizovaná rezidua ( $e_{si} = \frac{e_i}{\sigma \sqrt{1 - H_{ii}}}$ ) oproti

vyrovnaným hodnotám. Graf „Normal Q - Q“ zobrazuje standardizovaná rezidua oproti teoretickým kvantilům normálního rozdělení. Graf „Residuals vs Leverage“ zobrazuje tzv. vlivná pozorování. Vlivná pozorování jsou pozorování, při jejichž vyloučení by se změnil tvar regresní přímky a také hodnoty odhadnutých regresních koeficientů. Tyto pozorování jsou nejdále od přerušované čáry, tzn. v pravém horním a dolním rohu. V našem grafu žádná taková pozorování nejsou. Vlivná pozorování jsou měřena Cookovou vzdáleností.

Z grafů vidíme, že rozložení reziduí určitě není ideální. Na druhou stranu nevykazuje žádnou systematickou chybu, která by byla způsobena specifikací modelu. Nedostatky spíše tkví v ojedinělých pozorování, která jsou hodně odlehlá. Nejvíce odlehlé pozorování je pozorování 346. Podíváme se na toto pozorování do našeho datasetu. Pozorování číslo 346 je BMW M5 f10, které má najeto 2540km a jeho cena 189 000eur. Toto je naprosto neadekvátní cena. Můžeme se bavit proč je u tohoto kusu takto přemrštěná cena. V úvahu připadá chyba inzerujícího. Například místo 89 000eur napsal 189 000eur, případně cenu mohl napsat omylem v jiné měně. Nebo cena může být správně, ale tento konkrétní vůz je skutečně něčím výjimečný. Může například jednat o přestavěný vůz na závody WTCC (*World Touring Car Championship*) apod., ale žádné tyto další parametry náš model nezahrnuje. V kontextu našeho modelu se toto pozorování skutečně vymyká a určitě by bylo namístě uvažovat o vyloučení takového pozorování z datasetu.

## 4 INTERPRETACE ODHADNUTÝCH PARAMETRŮ

V našem modelu jsou všechny parametry statisticky významné. Odhadnutý model má tvar:

$$cen_i = 124034 - 0,144706 * km_i - 51796 * e28_i - 69383 * e34_i - 76925 * e39_i - 76580 * e60_i - 53233 * f10_i$$

Každý najetý kilometr sníží hodnotu vozu BMW M5 o 0,144706 eur. U proměnné generace byla vybrána jako referenční proměnná nejnovější generace f90. Všechny ostatní generace hodnotu vozu BMW M5 oproti této generaci f90 snižují. Generace e28 snižuje hodnotu BMW M5 o 51796 eur, e34 o 69383 eur, e39 o 76925 eur, e60 o 76580 eur, f10 o 53233 eur.

## 5 ZÁVĚR

Tento článek se zabýval analýzou cenového dna automobilů BMW M5. Analýza byla prováděna pomocí vícerozměrného regresního modelu. Cena vozu byla vysvětlována pomocí počtu najetých kilometrů a generace modelu. Podle čekávání cena vozu s počtem najetých kilometrů klesala. Všechny regresory u dummy proměnné generace vyšly se záporným parametrem. To bylo způsobeno nastavením referenční proměnné, která představovala nejnovější generaci modelu, která je nejdražší. Z modelu je patrné, že neplatí, čím starší generace vozidla, tím nižší cena. Vidíme, že zde platí určitý nelineární vztah, který by se dal dobře vyjádřit konvexní parabolou. Cena vozidel nejdříve klesá a až dosáhne svého „cenového dna“ opět roste. Podle naformulovaného modelu představuje cenové dno generace e39. Z hlediska investice je tedy nejvýhodnější koupit tento vůz.

### Poděkování:

Článek vznikl za podpory projektu IGA F4/66/2019 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze.

### Použitá literatura:

1. HEBÁK P., HUSTOPECKÝ J., MALÁ I.; *Vícerozměrné statistické metody 2*; Informatorium, 2005; Třebíč
2. HUŠEK, Roman. *Ekonometrická analýza*. Vyd. 1. Praha: Oeconomica, 2007, 367 s. ISBN 978-80-245-1300-3.
3. WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introductory econometrics: a modern approach*. 5th ed. Mason, OH: South-Western Cengage Learning, c2013, xxv, 881 p. ISBN 9781111531041.
4. R- Help/manual

### Internetové zdroje:

5. [www.autoscout.de](http://www.autoscout.de)

**Kontaktné údaje**

Ing. Jakub Hanousek

Vysoká škola ekonomická v Praze, fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

Email: xhanj52@vse.cz

# OCHRANA HOSPODÁRSKEJ SÚŤAŽE A PROTIMONOPOLNÁ POLITIKA V PODMIENKACH EÚ A SR<sup>1</sup>

## PROTECTION OF COMPETITION AND ANTITRUST POLICY IN EU AND SR

*Patricia Holzerová, Zuzana Čičková*

### **Abstrakt**

Existencia funkčného konkurenčného prostredia je základom pre dosiahnutie vlastných záujmov firiem a zvyšovanie blahobytu spoločnosti. Podstatou politiky hospodárskej súťaže je zabezpečiť a chrániť konkurenčné podmienky, nakoľko ekonomický systém je založený práve na sile súťaže. Tá tiež podnecuje podniky ponúkať produkty čo najviac zodpovedajúce dopytu, čo jednak pozitívne vplyva na úžitok spotrebiteľa, no zároveň podporuje proces zavádzania inovácií do procesu výroby. Príspevok sa zameriava na prehľad základných prístupov k problematike protimonopolnej politiky a umožňuje získať základný prehľad o činnostiach Európskej komisie ako autority v riešení nedovoleného správania sa, a Protimonopolného úradu Slovenskej republiky, predstavujúceho ústredný orgán štátnej správy Slovenskej republiky pre ochranu hospodárskej súťaže a koordináciu štátnej pomoci.

***Kľúčové slová:** protimonopolná politika, hospodárska súťaž, konkurenčné prostredie*

### **Abstract**

The existence of a functional competitive environment is the basis for achieving the company's own interests and increasing the welfare of society. The essence of competition policy is to ensure and protect competitive conditions. The competition also encourages firms to offer products corresponding to the demand, what has a positive impact on the consumer's utility and it supports the process of introducing innovations into production. This paper focuses on an overview of basic approaches to antitrust policy and provides a basic overview of the activities of the European Commission as an authority in dealing with illicit behavior, and the Antimonopoly Office of the Slovak Republic, the independent central body of state administration of Slovak Republic for protection of competition.

***Keywords:** antitrust policy, competition, competitive environment*

## **1 ÚVOD**

Konkurenčné podmienky patria medzi najlepšie mechanizmy na organizovanie ekonomických aktivít, dosahovanie cieľov firiem a zvyšovanie blahobytu spoločnosti. Podstatou politiky hospodárskej súťaže je zabezpečiť a chrániť konkurenčné podmienky a prostredie, ktoré zaisťujú na jednej strane odliv menej výkonných podnikov, na druhej strane zvyšovanie efektivity ekonomiky. Na úlohu hospodárskej politiky možno pozeráť jednak z pohľadu spotrebiteľa, nakoľko ten na trhu predstavuje jeden z kľúčových subjektov, ale súčasne aj z pohľadu samotného trhu. Prítomnosť konkurencie núti výrobcov znižovať ceny, respektíve ponúkať svoje výrobky za čo najvýhodnejšie ceny, ktoré motivujú spotrebiteľov k ich nakupovaniu. Existencia funkčného konkurenčného prostredia zároveň núti výrobcov zvyšovať efektívnosť výroby, s čím súvisí aj zavádzanie inovácií do procesu výroby, ktoré

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol ako súčasť výskumného projektu VEGA 1/0351/17 Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska

výrobcom umožňujú prinášať na trh stále lepšie a kvalitnejšie produkty. Takéto kvalitné výrobky môžu taktiež zaujať čoraz väčší podiel spotrebiteľov, čo vedie k rastu trhového podielu danej firmy. Výsledkom inovatívneho myslenia všetkých firiem na trhu, a ich snahy o neustály progres a zlepšovanie sa, je prítomnosť diferencovaných produktov, čo znamená, že spotrebiteľia majú možnosť výberu. Navyše platí, že zvyšujúci sa počet nakupujúcich spotrebiteľov neprispieva len k lepšej pozícii výrobcu na trhu, ale aj k pozitívnemu vývoju trhu ako takého a k celkovému rastu hospodárstva.

Konkurenčné prostredie však vyžaduje prítomnosť regulátora ako autority, ktorá dohliada na zachovanie konkurenčného prostredia a dodržiavanie podmienok súťaže. Na ochranu voľnej hospodárskej súťaže je vytvorený súbor prísnych pravidiel, ktoré určujú, ktoré postupy sa považujú za nepovolené. V prípade trhu nedokonalnej konkurencie možno sledovať zásahy regulačného subjektu, ktorý sleduje určitý celospoločenský zámer a rieši situácie spojené s nedovoleným správaním sa na trhu. Pod nedovoleným správaním v tomto prípade rozumieme tvorbu nezákonných kontaktov a dohôd, tvorbu kartelových dohôd, dohody o fúzii podnikov, rozdelenie trhu a zneužívanie monopolného a dominantného postavenia na trhu. Súbor nástrojov, ktorými štát zabezpečuje odstraňovanie bariér vstupu na trh, sledovanie obmedzovania súťaže a samotnú ochranu spotrebiteľov nazývame Protimonopolná politika.

Aj napriek tomu, že sa protimonopolná politika, konkurenčná politika a ochrana hospodárskej súťaže považujú za synonymá, v ich význame je značný rozdiel. Politika ochrany hospodárskej súťaže sa od protimonopolnej politiky odlišuje svojim širším zameraním (Hošoff, 2008). Ako aj Hošoff vo svojom príspevku uvádza, toto zameranie sa týka rôznych ekonomických aktivít, ako je ochrana spotrebiteľa a jeho práv, životné prostredie, energetika, rozvoj priemyslu a podnikania, ochrany duševného a priemyselného vlastníctva, problematika sociálnych práv, daní, finančných služieb, spoločnej dopravnej politiky, telekomunikácií a informačných technológií. Ochrana hospodárskej súťaže je teda všeobecne širším pojmom. Hospodársku súťaž možno považovať za podmienku funkčnosti trhového mechanizmu. Súčasťou politiky ochrany hospodárskej súťaže je ochrana proti jej obmedzovaniu a uplatňovanie pravidiel podporujúcich konkurenciu a vzájomnú súťaž jednotlivých subjektov, ktoré sú touto konkurenciou a jej tlakom motivované k neustálemu progresu. Posledným pojmom, ktorý sa často považuje za synonymum oboch predchádzajúcich je aj pojem konkurenčná politika, ktorý vznikol prekladom anglického „*competition policy*“, používaný Európskou úniou (EÚ). Na jeho nejednoznačnosť poukazuje Ľubomír Dogloš, ktorý konštatuje, že „*neobsahuje informáciu o tom, že je zameraná proti obmedzovaniu konkurencie trhovou silou, a nie proti nekalej konkurencii*“ (Dolgoš, 2006).

Hlavnú úlohu ochrany pred protikonkurenčným správaním zohráva už spomínaný regulátor. Každá krajina má vlastný vnútroštátny orgán zaoberajúci sa porušovaním pravidiel hospodárskej súťaže – Protimonopolný úrad (PMÚ). Na Slovensku je takýmto orgánom zastrešujúcim oblasť ochrany hospodárskej súťaže a protimonopolnej politiky Protimonopolný úrad Slovenskej republiky, a to formou zásahov, ktoré sa týkajú štruktúry, správania alebo výstupu (Protimonopolný úrad SR, 2004). Štruktúra trhu ovplyvňuje samotné správanie sa subjektov na ňom pôsobiacich, čo núti regulátor k prevencii pred vznikom dominantného postavenia a predchádzať (a riešiť) jeho zneužívaniu v dôsledku nedostatočného tlaku konkurencie. Ak dôjde k takémuto nepovolenému správaniu sa, regulátor je nútený zasiahnuť, a to v súlade s legislatívou. Napríklad v prípade prirodzených monopolov môže ísť o kontrolu výstupov, pod ktorými rozumieme ceny produktov a služieb. V dôsledku globalizácie však často dochádza k nadnárodným porušeniam hospodárskej súťaže. Riešenie takýchto celoeurópskych prípadov je pod záštitou Európskej komisie (EK) (Európska komisia, 2014).



## 2 HOSPODÁRSKA SÚŤAŽ V PODMIENKACH EÚ

Pravidlá Európskej únie na ochranu hospodárskej súťaže platia rovnako vo všetkých jej členských krajinách a vzťahujú sa na podniky, ale aj iné organizácie zapojené do hospodárskej činnosti. Snahou Európskej komisie je vzájomná spolupráca s orgánmi nie len jednotlivých členských krajín Európskej únie, ale aj orgánmi pôsobiacimi po celom svete a to so spoločným cieľom - pracovať na tvorbe účinných noriem a právnych predpisov a ich následná implementácia v oblasti hospodárskej súťaže. Očakávaným výsledkom je následne udržateľný a inkluzívny rast, zvyšovanie efektívnosti na trhoch a zlepšovanie podmienok pre spotrebiteľov. V rámci Komisie má základné právomoci na presadzovanie pravidiel hospodárskej súťaže Generálne riaditeľstvo pre hospodársku súťaž vykonávajúce asistenciu komisárovi pre hospodársku súťaž. V súčasnosti je komisárkou Margarethe Vestagerová z Dánska.

Medzi základné pravidlá EU, ktoré vyplývajú zo Zmluvy o fungovaní Európskej únie, patria nasledujúce:

1. podniky sa nesmú dohadovať na cenách a rozdelení trhu,
2. podniky nesmú zneužívať svoje dominantné postavenie na trhu a tým vytláčať menších konkurentov,
3. podniky pôsobiace na trhu Európskej únie sa nesmú zlučovať s cieľom ovládnuť trh; k zlúčeniu môže dôjsť len v dôsledku súhlasu Európskej komisie (aj v prípade, že ide o podniky sídliace mimo územia Európskej únie) (Európska komisia, 2014).

K porušovaniu a obchádzaniu podmienok hospodárskej súťaže dochádza u subjektov na strane ponuky predovšetkým s cieľom ovládnuť trh svojimi výrobkami. Formy protisúťažného správania, ktoré sleduje EÚ sú:

- *Kartely* – ide o formu protisúťažného správania sa, v ktorom dochádza k vytváraniu dohôd medzi podnikmi s cieľom vyhnúť sa súťaži a riadiť sa pravidlami, ktoré samé nastolia. Takéto dohody sa prejavujú rozdelením si trhu alebo zákazníkov či umelým určením pevných cien výrobkov a služieb. K dohodám môže dochádzať aj medzi výrobcami a distribútormi. Nakoľko je v takomto prípade obmedzená prítomnosť konkurencie a súťaže, výrobcovia nie sú nútení do výroby zavádzať inovácie či zefektívňovať ju. Dôsledkom je ponuka menej kvalitných výrobkov. Zároveň ceny, na ktorých sa kartelové spoločnosti dohodnú, sú vysoké nakoľko nie sú motivované k ich znižovaniu. Suma sumárum, spotrebiteľovi sú ponúkané menej kvalitné výrobky za privysoké ceny.

Európska komisia takéto protizákonné dohody prísne sleduje a pri zistení ich prítomnosti ukladá kartelovým spoločnostiam vysoké pokuty. Proces zisťovania kartelových dohôd umožňuje implementáciu uplatňovania tzv. „politiky zhovievavosti“ (anglicky *Leniency Programme*). Tento program má Komisii uľahčovať tento proces, a to čiastočným alebo úplným odpustením pokuty spoločnostiam podieľajúcim sa na kartelových dohodách po priznaní a doručení relevantných dôkazov. K takejto dohode so spolupracujúcou spoločnosťou dochádza za podmienky, že Komisia už disponuje dôkazmi o existencii predmetnej dohody (Európska komisia, 2014).

Kartely však môžu byť aj povolené, a to v prípade, že:

1. má kartel pozitívny vplyv na trh, čo môže znamenať aj možnosť zlepšenia ponuky (či už samotných výrobkov a služieb, alebo spôsobu ich ponúkania),
  2. dohoda nie je uzatvorená medzi konkurentmi,
  3. dohoda je uzatvorená medzi podnikmi s malým trhovým podielom (Európska komisia, 2014).
- *Zneužívanie dominantného postavenia* – ide o také konanie spoločnosti, ktoré vedie k vytlačeniu konkurencie z trhu. EK uvádza nasledovné prejavy zneužívania postavenia:
    - účtovanie neprimerane vysokých cien,
    - predaj za umelo nízke ceny,

- odmietnutie určitej skupiny spotrebiteľov alebo ponúkание zliav spotrebiteľom, ktorí nakúpia prevažnú väčšinu alebo všetok tovar dominantnej firmy,
- podmieňovanie predaja jedného výrobku súčasným predajom ďalšieho výrobku (Európska komisia, 2014).

- *Štátna pomoc* – predstavuje prípad, kedy sa vláda rozhodne pomôcť niektorej spoločnosti, čoho dôsledkom môže byť zdeformovanie súťaže na trhu. Komisia sa v rámci svojich kompetencií zameriava aj na kontrolu štátnej pomoci, ktorá môže viesť k podpore protikonkurenčného správania. Z toho dôvodu sa Komisia zameriava na pôžičky a granty, daňové úľavy, zvýhodnené poskytovanie tovarov a služieb, štátne záruky a štátnu pomoc upadajúcich spoločností, ktorých zánik sa už nedá odvrátiť (Európska komisia, 2014). Štátna pomoc je preto vo všeobecnosti podľa Zmluvy o fungovaní EÚ (ZFEÚ) zakázaná. Výnimkou pre jej akceptovanie je jedine prípad, keď prispieva k celospoločenskému záujmu, záujmu hospodárstva alebo ak je ziskovosť daného podniku v súlade so záujmami EÚ (Európska komisia, 2014). Členské štáty EÚ sú povinné EK o jednotlivých plánovaných dotáciách informovať. Tá ich môže schváliť alebo zamietnuť podľa výsledku ich vyhodnotenia. Komisia pri rozhodovaní rieši nasledujúce otázky:

1. *Bola podpora štátnymi orgánmi poskytnutá za zvýhodnených podmienok?*
2. *Ovplyvní táto pomoc obchod medzi krajinami EÚ?*
3. *Je táto pomoc selektívna?*
4. *Došlo, alebo môže dôjsť, k porušeniu hospodárskej súťaže?*

Pri kladných odpovediach na tieto otázky nesmie Komisia danú pomoc podporiť (Európska komisia, 2014).

Rovnako platí, že Komisia prešetruje aj pomoc, ktorá jej nebola oficiálne oznámená.

Okrem týchto všeobecných pravidiel existujú pravidlá týkajúce sa špecifických odvetví, akými sú poľnohospodárstvo, doprava (konkrétne železničná, cestná a vnútrozemská) či energetika, ktoré si svojím charakterom vyžadujú zvýšenú pozornosť.

Podmienky hospodárskej súťaže Európskej únie, platné pre všetky členské štáty, umožňujú spoločnostiam v nich pôsobiacich uspieť aj na globálnom trhu.

Všetky spomínané pravidlá sú súčasťou ZFEÚ v článkoch 101 až 109. Ich základ je obsiahnutý v hlave VII ZFEÚ. Ako píše Mária T. Patakyová vo svojej publikácii „*Ludskoprávne aspekty hospodárskej súťaže*“ ZFEÚ, „*nástupkyňa Zmluvy o EHS, neskôr Zmluvy o ES, ťažila zo skúseností získaných zo Zmluvy o ESUO*“. Okrem ZFEÚ sa hospodárskej súťaži venujú aj články ZEÚ. Napríklad čl. 3, venujúci sa aj trvalo udržateľnému rozvoju založenom na sociálnom trhovom hospodárstve (ktoré súvisí s hospodárskou súťažou) a tvorbe vnútorného trhu súvisiaceho s celoúniou súťažou, čl. 4 zameriavajúci sa na lojálnu spoluprácu či čl. 5.

### **3 HOSPODÁRSKA SÚŤAŽ V PODMIENKACH SR**

Ústredným orgánom štátnej správy Slovenskej republiky pre ochranu hospodárskej súťaže a koordináciu štátnej pomoci je Protimonopolný úrad Slovenskej republiky. Ide o nezávislý orgán, ktorý vznikol v roku 1991 a okrem slovenského uplatňuje aj európske súťažné právo. Základným právnym predpisom upravujúcim proces ochrany hospodárskej súťaže je Zákon z 27. februára 2001 o ochrane hospodárskej súťaže a o zmene a doplnení zákona Slovenskej národnej rady č. 347/1990 Zb. o organizácii ministerstiev a ostatných ústredných orgánov štátnej správy Slovenskej republiky v znení neskorších predpisov, pričom „*Účelom tohto zákona je ochrana hospodárskej súťaže (ďalej len „súťaž“)* pred jej obmedzovaním, ako aj vytváranie podmienok na jej ďalší rozvoj v prospech spotrebiteľov a úprava právomoci a pôsobnosti Protimonopolného úradu Slovenskej republiky (ďalej len „úrad“) pri dohľade nad dodržiavaním ustanovení tohto zákona.“ (pozri Zákon č. 136/2001).

V rámci Európskej siete pre hospodársku súťaž plní predovšetkým úlohy vyplývajúce z členstva SR v EÚ. Z toho vyplýva, že najväčší podiel jeho zahraničnej spolupráce tvorí práve spolupráca s EK. Vzhľadom na globalizáciu trhu, rast nadnárodných spoločností, medzinárodných transakcií a kartelov, je dôležitá aj vzájomná spolupráca jednotlivých štátov (predovšetkým s krajinami z oblasti strednej Európy), a to prostredníctvom výmeny informácií, skúseností a poznatkov, možnosti konzultácií či tvorba kontaktov s cieľom zvýšiť efektivitu ochrany a podpory hospodárskej súťaže (Protimonopolný úrad SR, 2019). Súčasťou aktivít zahraničnej spolupráce sú medzinárodné konferencie, ktorých sa úrad pravidelne zúčastňuje. Medzi najdôležitejšie zahraničné fóra, ktorých sa úrad zúčastňuje patria:

1. Organizácia pre hospodársku spoluprácu a rozvoj (OECD),
2. Medzinárodná sieť úradov pre ochranu hospodárskej súťaže (ICN),
3. Európske súťažné úrady (ECA),
4. Stredoeurópska súťažná iniciatíva (CECI).

Rovnako ako všetky orgány, ktorých cieľom je prispievanie k vytváraniu priaznivých podmienok pre podporu konkurencie a zásahy proti zakázaným praktikám, aj PMÚ SR sa zameriava na posudzovanie dohôd, zneužívania dominantného postavenia, koncentrácií a konania orgánov štátnej správy a samospráv. Proces rozhodovania o porušení pravidiel prebieha v správnom konaní, pričom výsledkom je rozhodnutie, ktoré tento proces ukončuje. Správne konanie, podľa zákona, začína na základe vlastného podnetu úradu. V súčasnosti úrad v prvej fáze procesu posudzuje charakter podnetu a nutnosť zásahov úradu. V druhej fáze sa venuje spôsobu riešenia tohto podnetu (možnosťou je okrem správneho konania aj súťažná advokácia). Ak je dokázané porušenie zákona, úrad ukladá subjektu pokutu až do výšky 10% z jeho obratu za predchádzajúce účtovné obdobie. Takúto pokutu môže úrad uložiť danému subjektu aj opakovaně a rovnako môže uložiť povinnosť zdržať sa protiprávneho konania a odstrániť protiprávny stav (Protimonopolný úrad SR, 2019).

Protimonopolný úrad SR sa snaží zlepšiť konkurenčné prostredie a odstrániť potenciálne prekážky efektívnej súťaže nielen svojou rozhodovacou činnosťou, ale aj ďalšími aktivitami.

Medzi aktivity, ktorými úrad zabezpečuje konkurenčné prostredie a efektívnu súťaž, patrí:

- preventívne pôsobenie na politiky ovplyvňujúce hospodársku súťaž (napríklad pripomienkami k návrhom zákonov v medzirezortnom pripomienkovom konaní),
- podpora ochrany hospodárskej súťaže prostredníctvom konferencií, seminárov, prednášok a diskusií a rôznych analýz;
- zastupovanie SR na medzinárodných rokovaníach a medzinárodných fórach v oblasti hospodárskej súťaže a ako už bolo spomínané,
- navrhovanie opatrení na ochranu a podporu súťaže (Protimonopolný úrad SR, 2019).

Ďalšie činnosti a právomoci úradu sú súčasťou § 22 Zákona o ochrane hospodárskej súťaže a to v nasledovnom znení:

„Úrad:

- a) vykonáva prešetrovanie v jednotlivých odvetviach hospodárstva na účel získania informácií o stave súťaže v danom odvetví,
- b) vykonáva prešetrovanie na účel zistenia, či je dôvod na začatie konania podľa tohto zákona,
- c) vykonáva vyšetrovacie úkony a iné úkony právnej pomoci na žiadosť orgánu hospodárskej súťaže iného štátu na základe osobitného predpisu<sup>1aa)</sup> alebo medzinárodnej zmluvy, ktorou je Slovenská republika viazaná,
- d) vydáva rozhodnutie o tom, že konanie alebo činnosť podnikateľa je zakázaná podľa tohto zákona alebo podľa osobitného predpisu<sup>22a)</sup>; rozhoduje o uložení povinnosti zdržať sa takého konania a o povinnosti odstrániť protiprávny stav,

- e) vydáva rozhodnutie o tom, že orgán štátnej správy pri výkone štátnej správy, obec alebo vyšší územný celok pri výkone samosprávy a pri prenesenom výkone štátnej správy a záujmová samospráva pri prenesenom výkone štátnej správy porušili tento zákon, rozhoduje o uložení povinnosti zdržať sa takeého konania a o povinnosti odstrániť protiprávny stav,
- f) postupuje a rozhoduje vo veciach ochrany súťaže vyplývajúcich z ustanovení tohto zákona alebo z osobitných predpisov,<sup>18a)</sup>
- g) kontroluje dodržiavanie rozhodnutí vydaných v konaní pred úradom,
- h) vydáva stanovisko podľa osobitného predpisu,<sup>22b)</sup>
- i) zabezpečuje medzinárodné vzťahy v oblasti ochrany súťaže na úrovni orgánov s právomocou v tejto oblasti,
- j) podáva návrh na súd na vydanie súhlasu s inšpekciou pre Komisiu na výkon jej činností podľa osobitného predpisu<sup>18a)</sup>,
- k) podáva návrh na súd na vydanie súhlasu s inšpekciou na výkon svojich činností podľa § 22a ods. 8,
- l) navrhuje ďalšie opatrenia na ochranu a podporu súťaže,
- m) vydáva súhlas s osobou správcu alebo určuje osobu správcu podľa § 12 ods. 8 a § 38f ods. 4.
- n) poskytuje súdu stanovisko k návrhu na predloženie dôkazov z jeho spisu, k primeranosti takeého návrhu, k otázke sprístupnenia týchto dôkazov v súdnom konaní o náhradu škody podľa osobitného predpisu<sup>22ba)</sup> a v rozsahu svojej pôsobnosti poskytuje ďalšiu spoluprácu súdu v konaní o náhradu škody, ak to uzná za vhodné“ (pozri Zákon č. 136/2001)

Protimonopolný úrad sa pri napĺňaní svojich úloh a cieľov zameriava aj na určenie priorít svojich činností, nakoľko jeho prostriedky sú viazané na štátny rozpočet keďže ide o verejné zdroje, ktoré zabezpečujú jeho činnosť. Z toho dôvodu sa úrad musí zamerať na spôsob prerozdelenia týchto zdrojov tak, aby ich vynaloženie malo čo najväčší prospech, predovšetkým pre spotrebiteľ'a. To znamená, že sa rozhoduje, ktorými problémami sa bude prioritne zaoberať, či už vzhľadom na spôsob riešenia problému alebo oblasť (sektory alebo odvetvia), do ktorej budú jeho prostriedky smerované. Celkovo rozlišujeme krátkodobé a dlhodobé priority úradu, na ktoré sa zameriava. Pre rok 2019 si Protimonopolný úrad stanovil krátkodobé ciele zamerané na prioritné sledovanie protisúťažných praktík: kartely, bid rigging vo verejnom obstarávaní a neoznamené koncentrácie. Zo sektorov medzi jeho priority na tento rok patria verejná osobná doprava, sektor motorových vozidiel a potravinárstvo (Protimonopolný úrad SR, 2019).

#### **4 ZÁVER**

V ekonomike voľného trhu platí, že každá spoločnosť sa snaží maximalizovať svoj zisk. Základným prvkom otvoreného trhového hospodárstva je voľná hospodárska súťaž, ktorá zabezpečuje odliv menej výkonných podnikov a zvyšovanie efektívnosti hospodárstva. Cieľom príspevku bolo priblížiť si koncepty a prístupy protimonopolnej politiky a získať základný prehľad o činnostiach Európskej komisie ako autority zameriavajúcej sa na problematiku hospodárskej súťaže a Protimonopolného úradu Slovenskej republiky, ktorý predstavuje ústredný orgán štátnej správy Slovenskej republiky pre ochranu hospodárskej súťaže a koordináciu štátnej pomoci. Cieľom činnosti orgánu v súlade so zákonom je zabezpečenie prítomnosti funkčného konkurenčného prostredia a ochrana a podpora súťaže, ktoré vedú nie len k zlepšeniu pozície samotného podniku, ale aj k zefektívneniu ekonomiky, rastu hospodárstva, a to všetko so zameraním sa na prospech spotrebiteľ'ov.

## Použitá literatúra

1. Činnosť. 2019. Protimonopolný úrad SR [online] [cit. 29.10.2019]. Dostupné na: <https://www.antimon.gov.sk/cinnost/>
2. DOLGOŠ, L. 2006. *Kriteriálny problém protimonopolnej politiky*. Bratislava: Iris.
3. GENERÁLNE RIADITEĽSTVO PRE KOMUNIKÁCIU (EURÓPSKA KOMISIA). 2014. *Hospodárska súťaž: zlepšovanie fungovania trhov* [online]. Luxemburg: Úrad pre vydávanie publikácií Európskej únie. ISBN 978-92-79-41502-9. [Cit. 29.10.2019]. Dostupné na: <https://op.europa.eu/sk/publication-detail/-/publication/9f857b2e-e25a-4fc3-9550-81a9de3b0429>
4. HOŠOFF, B. 2008. *Úloha štátu pri vytváraní konkurenčných podmienok*. [online]. Bratislava: Ekonomický ústav SAV. [Cit. 29.10.2019]. ISSN 1337-5598. Dostupné na: <http://www.ekonom.sav.sk/uploads/journals/WP12.pdf>
5. PATAKYOVÁ, M. T. 2019. *Ludskoprávne aspekty hospodárskej súťaže*. Bratislava: Wolters Kluwer.
6. PMÚ SR. 2004. *Výročná správa 2004* [online]. [Cit. 29.10.2019]. Bratislava. Dostupné na: <https://www.antimon.gov.sk/data/att/91.pdf>
7. *Prioritizačná politika*. 2019. Protimonopolný úrad SR [online]. [Cit. 29.10.2019]. Dostupné na: <https://www.antimon.gov.sk/prioritizacna-politika/>
8. *Stratégia – PMÚ SR, jeho náplň a smerovanie pre ďalšie obdobie*. 2019. Protimonopolný úrad SR [online]. [Cit. 29.10.2019]. Dostupné na: <https://www.antimon.gov.sk/strategia-pmu-sr-jeho-napl-n-a-smerovanie-pre-dalsie-obdobie/>
9. Zákon č. 136/2001 Z. z. o ochrane hospodárskej súťaže a o zmene a doplnení zákona Slovenskej národnej rady č. 347/1990 Zb. o organizácii ministerstiev a ostatných ústredných orgánov štátnej správy Slovenskej republiky v znení neskorších predpisov

## Kontaktné údaje

Ing. Patrícia Holzerová

University of Economics in Bratislava, Faculty of business informatics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

email: [holzerovap@gmail.com](mailto:holzerovap@gmail.com)

## Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

University of Economics in Bratislava, Faculty of business informatics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

email: [cickova@euba.sk](mailto:cickova@euba.sk)

# ANALÝZA CITLIVOSTI POHYBU VYBRANÝCH MIEN NA POHYBY EURA A AMERICKÉHO DOLÁRA<sup>1</sup>

## SENSITIVITY OF SELECTED CURRENCIES TO MOVEMENTS OF THE EURO AND THE US DOLLAR

*Michaela Chocholatá*

### Abstrakt

Predmetom príspevku je analýza citlivosti pohybu českej koruny (CZK), maďarského forintu (HUF) a poľského zlotého (PLN) na pohyb tzv. globálnych mien, t.j. eura (EUR) a amerického dolára (USD). Analýza je realizovaná pre denné dáta v období január 1999 – máj 2019. Súčasťou príspevku je tiež separátna analýza pre štyri časové intervaly, a to: pre obdobie pred vstupom Českej republiky, Maďarska a Poľska do Európskej únie (EÚ) v máji 2004; po vstupe týchto krajín do EÚ do začiatku finančnej krízy v októbri 2008; v krízovom období (október 2008 – september 2012) a v období po kríze (október 2012 – máj 2019). Kým pre CZK a HUF sa preukázala vysoká citlivosť na zmeny vo vývoji EUR vo všetkých analyzovaných obdobiach, v prípade PLN sa v období pred vstupom do EÚ potvrdila vyššia citlivosť na pohyby USD. Jednoznačne najviac citlivé boli analyzované tri meny na vývoj EUR počas krízového obdobia.

*Kľúčové slová: citlivosť, mena, euro, americký dolár*

### Abstract

This paper deals with the analysis of sensitivity of movements of the Czech koruna (CZK), Hungarian forint (HUF) and Polish zloty (PLN) to the movement of so-called global currencies, i.e. Euro (EUR) and US Dollar (USD). The analysis is based on the daily data for the period January 1999 – May 2019. The paper further includes the separate analyses for the four subperiods: for the period before the entrance of the Czech Republic, Hungary and Poland to the European Union (EU) in May 2004; after the entrance of these countries to the EU till the outbreak of the financial crisis in October 2008; in the crisis period (October 2008 – September 2012) and in the post-crisis period (October 2012 – May 2019). Since for the CZK and the HUF the high sensitivity to the changes in the development of the EUR was confirmed during the all analysed periods, in case of the PLN the higher sensitivity to the USD movements was identified during the period preceding the entrance to the EU. Clearly most sensitive were the analysed three currencies to the EUR development during the crisis period.

*Keywords: sensitivity, currency, Euro, US dollar*

## 1 ÚVOD

Analýza vývoja jednotlivých mien, ako aj skúmanie ich citlivosti na pohyby iných mien sú v centre pozornosti mnohých analytikov. Z pohľadu diania v Európe je známe, že proces

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0248/17 „Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie“ a grantovej úlohy VEGA 1/0294/18 „Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov“.

európskej integrácie trvajúcej niekoľko desaťročí kulminoval v januári 1999 prijatím spoločnej európskej meny eura, čím vznikla po USA druhá ekonomicky najväčšia oblasť s rovnakou menou. V súčasnosti Európska únia (EÚ) predstavuje jednu z najväčších ekonomík na svete, pričom ju tvorí 28 členských štátov, z ktorých 18 používa spoločnú menu euro. Najväčšie rozšírenie EÚ sa uskutočnilo 1. mája 2004, keď do EÚ tvorenej v tom čase skupinou 15 krajín vstúpilo 10 nových krajín (Cyprus, Česká republika, Estónsko, Litva, Lotyšsko, Maďarsko, Malta, Poľsko, Slovensko a Slovinsko). 1. januára 2007 pribudli ďalšie dve nové členské krajiny Bulharsko a Rumunsko a 1. júla 2013 Chorvátsko. Kým niektoré z nových členských krajín euro už používajú, väčšinu týchto krajín tento dôležitý krok v procese integrácie ešte čaká. Značný význam má teda skúmanie nielen výmenného kurzu eura (EUR) voči americkému doláru (USD), ale tiež skúmanie vývoja národných mien jednotlivých krajín voči tejto dvojici globálnych mien.

Problematika analýzy spoločného pohybu vybraných mien je v literatúre pomerne široko rozpracovaná a možno nájsť množstvo štúdií venovaných rôznym menám využívajúcich rôzne modelové prístupy. Doman (2010) vo svojej rozsiahlej štúdií analyzovala citlivosť vývoja 20 vybraných mien (austrálsky dolár, švajčiarsky frank, kanadský dolár, česká koruna, brazílsky real, novozélandský dolár, maďarský forint, indická rupia, juhokórejský won, mexické peso, nórska koruna, poľský zlotý, rumunský lei, švédsko koruna, singapurský dolár, slovenská koruna, turecká líra, juhoafrický rand, britská libra, mexické peso) na pohyby EUR a USD v období apríl 1997 – apríl 2008 využívajúc metodologický prístup uvedený v Eun and Lai (2004). Chung (2006) skúma zmeny vo vývoji spoločného pohybu won-yen a won-americký dolár pred a po menovej kríze v roku 1997. Poskytuje prehľad rôznych prístupov k analýze spoločného pohybu mien, s dôrazom na prístupy publikované vo Frankel a Wei (1994) a Engle (2002). Analýzu problematiky citlivosti vybraných mien (austrálsky dolár, kanadský dolár, švajčiarsky frank, čínsky yuan, cyperská libra, česká koruna, dánska koruna, estónska koruna, britská libra, hongkonský dolár, maďarský forint, juhokórejský won, litovský litas, lotyšský lats, maltská líra, nórska koruna, poľský zlotý, švédsko koruna, singapurský dolár, slovinský tolar a slovenská koruna) na vývoj EUR a USD možno nájsť v mesačnom bulletine ECB (2006). Skúmaniu vplyvu vývoja USD a EUR na vybrané výmenné kurzy ako aj posúdeniu vplyvu efektu podmienenej heteroskedasticity sa venovala Chocholatá (2011). Problematikou spoločného pohybu čínskeho renminbi s inými menami vybraných rozvojových krajín sa zaoberá publikácia McCauley a Shu (2018), pričom vychádza z metodológie uvedenej vo Frankel a Wei (1994). Posúdenie vývoja českej koruny a japonského yenu v závislosti od pohybu globálnych mien – EUR a USD je predmetom príspevku Chocholatá (2019).

Cieľom tohto príspevku je analýza citlivosti pohybu českej koruny (CZK), maďarského forintu (HUF) a poľského zlotého (PLN) na pohyb eura (EUR) a amerického dolára (USD) pre denné dáta v období január 1999 – máj 2019 vychádzajúc z regresnej rovnice publikovanej v ECB (2006). Ako referenčná mena bol zvolený japonský yen (JPY). Štruktúra príspevku je nasledujúca: po úvode nasleduje v druhej časti popis teoreticko-metodologického prístupu k analýze citlivosti pohybu jednotlivých mien. Tretia časť je venovaná použitým dátam a empirickým výsledkom analýz, štvrtá časť predstavuje záver príspevku.

## **2 TEORETICKO-METODOLOGICKÝ PRÍSTUP K ANALÝZE CITLIVOSTI POHYBU MIEN**

Modelovanie spoločného pohybu dvojice mien prostredníctvom dvojice výmenných kurzov si vyžaduje stanovenie tzv. tretej meny (referenčnej meny, resp. z angl. „numeraire currency“), voči ktorej výmenné kurzy príslušných mien vyjadrujeme. Práve špecifikácia tejto „numeraire currency“ zohráva v analýze významnú úlohu (Doman, 2010; McCauley a Shu, 2018 ).

Vychádzajúc z vlastností finančných časových radov (predovšetkým z nestacionarity časových radov úrovne výmenných kurzov) sa analýza výmenných kurzov obvykle realizuje na časových radoch prvých diferencií logaritmovaných časových radov označovaných aj ako časové rady logaritmických výnosov výmenných kurzov. Ak označíme symbolom  $P_t$  výmenný kurz v čase  $t$ , potom logaritmický výnos  $r_t$  má tvar (Tsay, 2005):

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \quad (1)$$

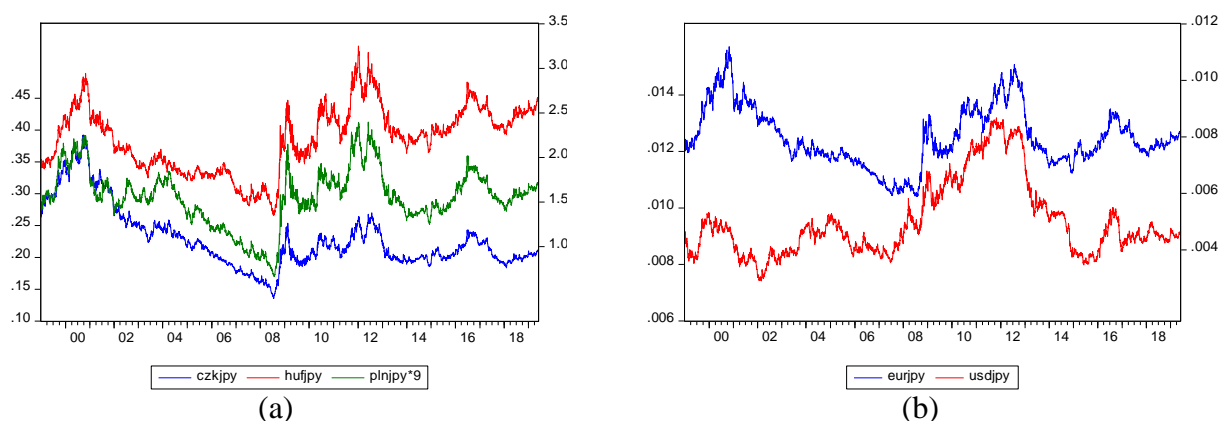
Jednou z možností ako posúdiť spoločný pohyb meny "X" s EUR a s USD je odhadnúť parametre elasticity na pohyby vo vývoji EUR a USD voči tretej mene („numeraire currency“) "A" vychádzajúc z regresnej rovnice (ECB, 2006):

$$r(X/A)_t = \alpha + \beta r(EUR/A)_t + \gamma r(USD/A)_t + \varepsilon_t \quad (2)$$

kde  $r(X/A)_t$  označuje logaritmický výnos výmenného kurzu meny "X" (CZK, HUF, resp. PLN), t.j. meny, ktorej spoločný pohyb s EUR a USD skúmame, voči referenčnej mene "A" (JPY). Parametre z regresnej rovnice (2) odhadneme metódou najmenších štvorcov. Parameter  $\beta$  v rovnici (2) udáva senzitivitu meny "X" na pohyby vo výmennom kurze EUR a parameter  $\gamma$  vypovedá o senzitivite na pohyby vo výmennom kurze USD. Hodnoty parametrov  $\beta$  a  $\gamma$  blízke hodnote 1 indikujú silný spoločný pohyb analyzovanej meny "X" s EUR, resp. s USD. Ako zdôrazňujú ECB (2006), dôležitú úlohu pri interpretácii výsledkov zohráva hodnota koeficienta determinácie  $R^2$ .

### 3 DÁTA A EMPIRICKÉ VÝSLEDKY ANALÝZY

Predmetom analýzy boli denné údaje výmenných kurzov CZK/JPY, HUF/JPY, PLN/JPY, EUR/JPY a USD/JPY za obdobie 4. január 1999 – 31. máj 2019, čo predstavovalo 5225 pozorovaní. Dáta boli získané z webovej stránky Európskej centrálnej banky <http://www.ecb.int/stats/eurofxref/eurofxref-hist.zip>. Priebeh analyzovaných výmenných kurzov je znázornený v grafoch na obrázku 1, pričom je zřejmý synchronizovaný pohyb kurzov mien CZK, HUF a PLN voči JPY. Podobný pohyb ako táto trojica mien vo vzťahu k JPY vykazujú aj mena EUR, pohyb USD voči JPY je odlišný.



Obrázok 1 Priebeh výmenných kurzov (a) CZK/JPY, PLN/JPY\*9 (ľavá os grafu)<sup>2</sup>, HUF/JPY (pravá os grafu), (b) EUR/JPY (pravá os grafu) a USD/JPY (ľavá os grafu)

<sup>2</sup> Za účelom prehľadnosti sú znázornené hodnoty výmenného kurzu PLN/JPY vynásobené hodnotou 9.



Analýza bola vykonaná na časových radoch logaritmických výnosov jednotlivých výmenných kurzov vypočítaných podľa vzťahu (1). Odhady parametrov regresnej rovnice (2) pre jednotlivé výmenné kurzy boli zrealizované v ekonometrickom softvéri EViews. Predmetom príspevku je tiež separátna analýza pre štyri časové intervaly celkového obdobia, a to: obdobie pred vstupom Českej republiky, Maďarska a Poľska do Európskej únie (EÚ) v máji 2004, ďalej obdobie po vstupe krajín do EÚ až do začiatku finančnej krízy v októbri 2008, obdobie finančnej krízy (október 2008 – september 2012) a obdobie po kríze (október 2012 – máj 2019).

Výsledky odhadov parametrov z rovnice (2) pre všetky štyri časové intervaly ako aj celé analyzované obdobie vrátane koeficientov determinácie sú uvedené v tabuľke 1. Kým v období pred vstupom analyzovanej trojice krajín (Česká republika, Maďarsko a Poľsko) do EÚ boli CZK a HUF veľmi silno naviazané na EUR, PLN bol v tomto období citlivejší na zmeny v USD. Dominantná funkcia USD vo vzťahu PLN bola tiež potvrdená pre obdobie 1999-2002 v analýzach Chocholatá (2011) a ECB (2006), resp. až do apríla 2004 v štúdiu Doman (2010). V nasledujúcich dvoch časových intervaloch (máj 2004 – september 2008 a október 2008 – september 2012) sa citlivosť tejto trojice mien na pohyby EUR zvyšovala, v pokrízovom období síce mierne poklesla, naďalej však zostáva na hodnotách presahujúcich hodnotu 1, t.j. vysoko elastický vplyv. Kým analýza za celkové obdobie (január 1999 – máj 2019) preukazuje vysoký stupeň prepojenosti medzi CZK, HUF, PLN a EUR, na rozdiel od analýzy v čiastkových intervaloch neodzrkadľuje rôznorodosť spoločného pohybu mien počas určitých úsekov analyzovaného obdobia (predovšetkým v prípade PLN). Vysoká citlivosť na zmeny vo výmennom kurze EUR bola pre CZK a HUF v jednotlivých rokoch obdobia 1999-2010 potvrdená v Chocholatá (2011), v období apríl 1997 – apríl 2008 v Doman (2010) a v obdobiach január 1999 – august 2002 a august 2002 – marec 2006 v štúdiu ECB (2006).

Tabuľka 1 Odhady parametrov regresnej rovnice (2)

Obdobie	Jan99_Apr04	May04_Sep08	Oct08_Sep12	Oct12_May19	Jan99_May19
<b>Česká koruna</b>					
$\beta$ (DLEURJPY)	0.9030***	0.9675***	1.1485***	1.0402***	1.0329***
$\gamma$ (DLUSDJPY)	0.1131***	0.0050	-0.0477*	-0.0273**	-0.0069
R-squared	0.8175	0.7372	0.8347	0.9093	0.8294
<b>Maďarský forint</b>					
$\beta$ (DLEURJPY)	0.9049***	1.0669***	1.4833***	1.0854***	1.1793***
$\gamma$ (DLUSDJPY)	0.1100***	0.0380*	-0.1827***	-0.0628***	-0.0407***
R-squared	0.7756	0.6411	0.7828	0.7651	0.7447
<b>Poľský zlotý</b>					
$\beta$ (DLEURJPY)	0.4849***	0.8104***	1.4322***	1.0724***	1.0136***
$\gamma$ (DLUSDJPY)	0.5557***	0.2155***	-0.0829**	0.0045	0.1329***
R-squared	0.5561	0.5216	0.7902	0.8203	0.6703

Poznámka: Symboly \*\*\*, \*\*, \* označujú zamietnutie hypotézy  $H_0$  na hladine významnosti 1 %, 5 % a 10 %.

Zdroj: Vlastné výpočty pomocou ekonometrického softvéru EViews.

## 4 ZÁVER

Príspevok analyzuje intenzitu previazanosti pohybov vybraných mien (CZK, HUF a PLN) s globálnymi menami EUR a USD. Vychádzajúc z logaritmickej výnosov výmenných kurzov (s referenčnou menou JPY) bol počas celého analyzovaného obdobia (január 1999 – máj 2019) potvrdený vysoko elastický vplyv pohybov EUR na pohyby všetkých troch mien CZK, HUF ako aj PLN. Analýzy pre separátne intervaly celkového obdobia (január 1999 – apríl 2004, máj 2004 – september 2008, október 2008 – september 2012 a október 2012 – máj 2019) umožnili detailnejšie preskúmanie vývoja citlivosti pohybov analyzovaných mien na zmeny vo vývoji EUR a USD. Kým pre CZK a HUF sa potvrdila vysoká citlivosť na zmeny EUR počas všetkých štyroch analyzovaných časových intervalov, v prípade PLN výsledky také jednoznačné neboli. V období pred vstupom do EÚ bol totiž PLN citlivejší na zmeny vo vývoji USD v porovnaní s EUR, počas nasledujúcich časových intervalov však už PLN (rovnako ako CZK a HUF) bol citlivejší na zmeny vo vývoji EUR.

### Použitá literatúra

1. DOMAN, M. 2010. Does the Weakening of the US Dollar Change the Pattern of the Currency Co-Movement? *Forecasting Financial Markets and Economic Decision Making (FindEcon)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 8, s. 27-41.
2. ENGLE, R. F. 2002. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. In *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, vol. 20, s. 339–350.
3. EUN, C.S. – LAI, S.S. 2004. Currency Comovement. Georgia Institute of Technology, Working Paper.
4. EUROPEAN CENTRAL BANK (ECB). 2006. How close are the co-movements of main currencies? *ECB Monthly Bulletin*, April 2006, s. 54-56.
5. FRANKEL, J.A. – WEI, S.-J. 1994. Yen Bloc or Dollar Bloc? Exchange Rate Policies of the East Asian Economies. In *Macroeconomic Linkages: Savings, Exchange Rates, and Capital Flows*, edited by Takatoshi Ito and Anne Krueger, University of Chicago Press, s. 295-329.
6. CHOCHOLATÁ, M. 2011. Analýza vplyvu USD a EUR na výmenné kurzy vybraných mien a vplyv existencie GARCH efektu. *Ekonomika a informatika*, 9(1), s. 31-44.
7. CHOCHOLATÁ, M. 2019. Co-movements of the selected currencies. In *Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XIII. Medzinárodný vedecký seminár. Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XIII : zborník príspevkov z medzinárodného vedeckého seminára, 18.–20. júna 2019, (Zuberec, Slovensko)*. - Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2019, s. 5-10.
8. CHUNG, C. H. 2006. Characterizing Co-Movement of the Won with the Yen Before and After the Currency Crisis. *Korea Review of International Studies*, 9(2), p. 3–18.
9. MCCAULEY, R. N. – SHU, C. 2018. Recent RMB policy and currency co-movements. BIS Working Papers No 727, June 2018 ([www.bis.org](http://www.bis.org)), 22 s.
10. TSAY, R.S. 2005. *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 605 s.
11. <http://www.ecb.int/stats/eurofxref/eurofxref-hist.zip> (cit. 10-06-2019)

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 832  
email: [michaela.chocholata@euba.sk](mailto:michaela.chocholata@euba.sk)

# INDEXY PRE VÝPOČET VOLEBNEJ SILY

## VOTING POWER INDICES

*Miroslava Jánošová*

### Abstrakt

Stále aktuálnou a zaujímavou témou je rozdelenie volebnej sily, ktorej definícia je veľmi nejednoznačná. Častokrát sa stretávame s vyjadrením tejto volebnej sily ako miery vplyvu, ktorú má konkrétny volič na výsledok celkového hlasovania. Vhodne zvolený postup hlasovania je mechanizmom verejnej voľby v rôznych organizáciách. Naším cieľom je poukázať na možnosť zmenšovania rozdielov v hlasovacích schopnostiach, a teda aj skupina s rôznym počtom hlasovacích práv môže mať rovnakú hlasovaciu silu. V predkladanom príspevku si kladieme za cieľ teoreticky vymedziť niektoré z vybraných indexov sily a to konkrétne Shapley-Shubikov index sily, Johnstonov index sily, Banzhofov index sily a Deegen-Packelov index sily.

**KLúčové slová:** *Hlasovacie hry, Shapley-Shubikov index, Johnstonov index sily, Banzhofov index sily, Deegen-Packelov index sily*

### Abstract

The distribution of the voting power is a current and interesting topic, the definition of which is very unclear. The voting power is often seen to be expressed as a measure of the influence that a particular voter has on the outcome of the overall vote. An appropriately chosen voting procedure is a public choice mechanism in different organizations. Our goal is to point out the possibility of reducing the differences in voting abilities, and therefore a group with different numbers of voting rights may have the same voting power. We aim to theoretically define some of the selected voting power index in this paper, namely the Shapley-Shubik power index, the Johnston power index, the Banzhof power index and the Deegen-Packel power index.

**Keywords:** *The Voting Game, Shapley Shubik Power Index, Johnstonov Power Index, Banzhof Power Index, Deegen-Packel Power Index*

## 1 ÚVOD

Sila resp. moc je najčastejšie spomínaným pojmom spoločenských vied ale zároveň bez presnej definície. Ide o teoretický pojem, ktorý môže byť zastúpený rôznou formou. Teóriu hier môžeme považovať ako jeden z významných analytických nástrojov, ktoré možno využiť pri štúdií rôznych ekonomických, sociálnych ale aj politických situácií. Jednou z významných oblastí kde bola teória hier aplikovaná je volebné správanie, kde sa analyzuje správanie či už voličov alebo samotných volených subjektov. Daný typ hier môžeme zaradiť medzi koalíčné a konkrétne hlasovacie hry. Oblasť uplatnenia poznatkov z hlasovacích hier je veľmi široká. Autori Jelnov A. and Jelnov P. (2019) sa vo svojej práci venovali otázke prežitia vládnucej politickej strany v dôsledku vzniknutej koalíčnej krízy. Konkrétne ako je hlasovacia sila,

ktorou disponuje najsilnejšia politická strana v rámci koalície ohrozená stratou moci. „Zdroje moci členských štátů v Radě Evropské unie Současný stav“ výzkum od autora Zbíral R. (2008) je rovnako zaujímavou štúdiou, kde si kladie za cieľ popísať súčasný stav moci a jej výkonu v Rade Európskej únie. Autor sa ďalej v práci venuje viacerým štúdiám, ktoré sa nastolenej otázke venovali a vzájomne porovnáva niekoľko rôznych indexov sily. Rovnako otázkou porovnania hlasovacej sily jednotlivých členských krajín EÚ v Európskej rade sa zaoberala aj autorka Vaňková, K. (2017), ktorá porovnáva zmenu v pravidlách hlasovania, ku ktorej došlo v roku 2014 kedy sa prešlo od pravidiel zo zmluvy z Nice na pravidlá prijaté Lisabonskou zmluvou. Porovnanie realizuje prostredníctvom výpočtov dvoch najznámejších indexov a to Shapley-Shubikovo a Penrose-Banzhafovo indexu sily. Autori Ben-Shahar D., Sulganik E., a Tsang D (2016) si vo svojom príspevku kladú za cieľ posúdiť platnosť Medzinárodného štandardu finančného výkazníctva (IFRS) 10 z ekonomickej perspektívy. Na dané posúdenie ich naviedla svetová finančná kríza z roku 2007, ktorá odhalila práve nedostatky vo finančnom vykazovaní. Na získanie výsledkov použili Shapley-Shubikov index ako aj Banzhafov index, ktoré sú používané na posudzovanie akcionárskej sily. Kirsch, W. (2016) vo svojej publikácii s názvom „Brexit and the distribution of power in the council of the EU“ prostredníctvom využitia Banzhafovo indexu volebnej sily demonštroval vplyv Brexitu nielen na hospodárstvo a každodenný život ale aj na preskupenie a rozdelenie moci v inštitúciách EÚ predovšetkým v Rade EÚ. Autor Göllner, R. T. (2017) rovnako skúmal prostredníctvom Banzhafovo indexu sily prestúpenie moci jednotlivých krajín v rámci EÚ po odchode Veľkej Británie avšak primárne sa zameril na krajiny V4. Z jeho výsledkov vyplýva, že hlasovacie právo všetkých štátov V4 sa zosilnilo, pričom najväčší nárast zaznamenalo Poľsko. Avšak či bude mať z tejto štatisticky zvýšenej volebnej moci Vyšehradská skupina úžitok závisí od koordinácie ich volebného správania v budúcnosti. V ďalších častiach predkladaného príspevku sa budeme venovať teoretickým východiskám vybraných indexov sily.

## 2 INDEXY NA VÝPOČET VOLEBNEJ SILY

V nasledujúcej časti predstavíme indexy výpočtu volebnej sily v hlasovacích systémoch, ktoré fungujú na princípe pre a proti. Uvádzané indexy pri výpočte nevychádzajú len zo základných informácií o váhe hlasov a pomere hlasov ale berú do úvahy aj postupnosť s akou sa formujú jednotlivé koalície a teda uvažujú o jednotlivých členoch koalície ako o kritických a teda či svojim príchodom resp. odchodom z koalície ovplyvnia či koalícia bude víťazná alebo prehrávajúca.

### 2.1 Shapley-Shubikov index sily

Koeficientom merania volebnej sily je Shapley Shubikov index sily, ktorý bol predstavený Shapleyom, L. S. a Shubikom, M. (1954), ktorý je založený na postupnom tvorení koalície.

*Definícia 1:* Predpokladáme hlasovací systém kde pre  $n$  voličov je počet možných hlasovacích spôsobov daný počtom permutácií  $n! = n(n - 1) \dots (1)$ . V každej postupnosti hlasovania je práve 1 kľúčový volič, ktorého hlasovanie zvyšuje celkový počet hlasov nad úroveň potrebnú na dosiahnutie víťazstva. Shapley-Shubikov index sily je potom možné zapísať ako:

$$S_i = \frac{p_i}{\sum_{k=1}^n p_k} = \frac{p_i}{n!} \quad (1)$$

kde  $p_k$  reprezentuje počet koľko krát je volič kľúčovým a  $p_i$  predstavuje koalíciu s účasťou  $i$ -tého člena.

## 2.2 Banzhafov index sily

Jedným z možných prostriedkov na vyčíslenie volebnej sily predstavuje Banzhafov index, ktorý bol uverejnený Banzhafom J. F. (1965). Daný koeficient si nezakladá na postupnom vytváraní jednotlivých koalícií ale rieši otázku, či prípadným odchodom člena z koalície by toto zoskupenie stratilo svoje postavenie víťaznej koalície. Pojednáva teda o tom, či daný volič je kľúčovým voličom na dosiahnutie víťazstva.

*Definícia 2:* Predpokladáme hlasovací systém, ktorý spĺňa nasledujúce tri podmienky:

- $i$  je členom koalície  $K$
- koalícia  $K$  je víťaznou koalíciou
- v prípade odchodu člena  $i$  z koalície  $K$  koalícia sa stane prehrávajúcou

Samotný Banzhafov index volebnej moci pre člena  $i$ , ktorý je členom koalície  $K$  môžeme zapísať nasledovne:

$$BI_i = \frac{c_i}{c_i + \dots + c_i} \quad (2)$$

kde  $c_i$  reprezentuje koľkokrát je člen  $i$  vo víťaznej koalícii  $K$  vystupuje ako kritický a teda v prípade jeho odchodu by sa koalícia stala nevíťaznou.

Pričom platí:

$$\sum_{i \in N} BI_i = 1 \quad (3)$$

## 2.3 Deegan-Packelov index sily

Deegan-Packelov index sily bol uverejnený Deeganom, J., a Packel, E. W. (1978), ktorý je špecifický v tom, že prihliada iba na minimálne víťazné koalície, a teda neberieme člena koalície ako kritického, pretože v takejto koalícii je každý člen kritickým a pri odchode hociktorého člena z koalície by sa koalícia stala prehrávajúcou.

Pre uplatnenie daného indexu je potrebné splnenie troch podmienok a to:

- uvažujeme len s minimálnymi koalíciami, v ktorých každý člen je kritickým členom
- každá z týchto minimálnych koalícií je utvorená s rovnakou pravdepodobnosťou
- jednotliví členovia víťaznej koalície majú rovnaký podiel na víťazstve

*Definícia 3:* Predpokladáme hlasovací systém, kde pre  $i$  – tého člena je daný vzťahom:

$$DPI_i = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} \quad (4)$$

kde  $M(v)$  predstavuje počet všetkých minimálnych víťazných koalícií pričom  $M_i(v)$  predstavuje minimálnu koalíciu s účasťou  $i$  – tého člena.

## 2.4 Johnstonov index sily

Johnstonov index sily je určitou variáciou Banzhafovho indexu sily. V tomto indexe berie do úvahy aj veľkosť koalície, pre ktorú je člen koalície kritický. Tento index bol uverejnený Johnstonom, R. J. (1978).

*Definícia 4:* Predpokladáme hlasovací systém, kde pre  $i$  – tého člena je daný vzťahom:

$$J_i = \frac{W_i}{\sum_{k=1}^n W_k} \quad (5)$$

kde  $W_k$  je množina všetkých možných víťazných koalícií hlasovacieho systému a  $W_i$  predstavuje kvázivíťaznú koalíciu, v ktorej sa nachádza  $i$  – ty člen.

## 3 ZÁVER

Cieľom príspevku je charakterizovať z metodického hľadiska niektoré vybrané indexy na výpočet volebnej moci v rámci hlasovacích hier. V úvode príspevku sme spracovali prehľad literatúry, v ktorej sú dané indexy používané vo viacerých oblastiach ako napríklad v oblasti porovnania volebnej moci po a pred odchodom Veľkej Británie z EÚ ako aj iné. V rámci nášho ďalšieho výskumu je našim zámerom dané indexy použiť na analýzu dát SR pričom sa zameriame na finančnú oblasť, kde by analýza mohla predstavovať prínos v predpovedaní vzniku možných ekonomických nerovnováh.

*Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu APVV-17-0551 „Vyrovnávanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia“ a riešenia projektu VEGA 1/0795/18 „Komplexné prístupy k odhadu parametrov ekonometrickej štruktúry modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy“*

### Použitá literatúra

1. Alonso-Meijidea, J.M., Casas-M'endeza B., Holler M.J., Lorenzo-Freire S.: Computing power indices: Multilinear extensions and new characterizations, European Journal of Operational Research 188, 2008, pp. 540-554
2. Banzhaf, III., J. F. (1965): "Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis," Rutgers Law Review, 19(2), 317–343.
3. Ben-Shahar D., Sulganik E., and Tsang D. (2016) „Does IFRS 10 on Consolidated Financial Statements Abandon Accepted Economic Principles?“ Australian Accounting Review. Volume 26. Issue 4. Pages 341-345
4. Deegan, J. and Packel, E.W. (1979) „A new index of power for simple n-person games“ in: International Journal of Game Theory 7, pp. 113-123.
5. Göllner, R. T. (2017): „The Visegrád Group—A Rising Star Post-Brexit? Changing Distribution of Power in the European Council. Open Political Science, 1, 1–6.

6. Jelnov A. and Jelnov P. (2019): „Voting Power and Survival: The Case of a Ruling“ in: IZA Discussion Papers, No. 12354, Dostupné na: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/202700/1/dp12354.pdf>
7. Johnston, R. J. (1978): “On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver,” *Environment and Planning A*, 10(8), 907–914.
8. Kirsch, W. (2016): „Brexit and the Distribution of Power in the Council of the EU.“ CEPS Commentary
9. Shapley, L. S., and M. Shubik (1954): “A method for evaluating the distribution of power in a committee system,” *American Political Science Review*, 48(3), 787–792
10. Vaňková, K. (2017): „Teorie her v Radě EU“ Dostupné na: [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~tuma/Aplikace17/Prace/VankovaK\\_TeorieHer.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~tuma/Aplikace17/Prace/VankovaK_TeorieHer.pdf)
11. Zbíral, R. (2008): „Zdroje moci členských států v Radě Evropské unie: Současný stav výzkumu.“ *Mezinárodní vztahy*, roč. 43, č. 4, s. 32-51.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Miroslava Jánošová, PhD.  
Ekonomický ústav SAV  
Šancová č. 56  
811 05 Bratislava  
email: [miroslava.dolinajcova@savba.sk](mailto:miroslava.dolinajcova@savba.sk)

# ANALÝZA MONETÁRNEHO TRANSMISNÉHO MECHANIZMU NA SLOVENSKU

## ANALYSIS OF THE MONETARY TRANSMISSION MECHANISM IN SLOVAKIA

*Stanislav Kováč, Alexander Frasch, Hana Palušková*

### Abstrakt

Správne porozumenie monetárneho transmisného mechanizmu je rozhodujúce pre tvorcov monetárnej politiky. Teória monetárnej politiky navrhuje preskúmať kanál úrokovej sadzby, výmenných kurzov, úverov a iných aktív. Na analýzu kanálov použijeme vektorovo-autoregresný (VAR) model. Nie len spôsob, akým je monetárne rozhodnutie prenesené do ekonomiky, je dôležité, ale aj aký dlhý čas prejde od rozhodnutia po jeho viditeľný efekt. Na časovú analýzu použijeme funkciu impulzu a reakcie. Hlavný prínos štúdie je poskytnutie podkladu o významnosti vybraných kanálov buď v silnej, alebo v slabej forme v kontexte Slovenskej republiky

**Kľúčové slová:** *monetárna politika, VAR, transmisia*

### Abstract

The correct understanding of the monetary transmission mechanism is crucial to monetary policy decision-makers. The theory of monetary policy suggests to examine the channels of interest rate, exchange rate, credit and other asset prices. We use the vector autoregression (VAR) model to analyse such channels. But not only the way, that monetary policy is transmitted to the economy, is important, but also the time it needs to take effect. We use impulse response function to analyse this time effect. The main contribution of this study is the evidence of significance of chosen channels in either strong or weak form in Slovakia's context.

**Keywords:** *monetary policy, VAR, transmission*

## 1 ÚVOD

Monetárna politika je účinný nástroj ovplyvňujúci hospodárstvo krajiny, preto determinovanie kanálov, cez ktoré je politika prenesená do ekonomiky, zohráva dôležitú úlohu v rozhodovaní či už politických subjektov, alebo nezávislých monetárnych organizácií. Východiskovým bodom pre začlenenie monetárnej politiky pre stabilizáciu domáceho produktu a inflácie možno datovať do 70-tych rokov v USA, kedy voľná monetárna politika viedla k dvojcifernému číslu inflácie medzi rokmi 1979 a 1980 (v Európe možno považovať za prvý krok založenie Európskej centrálnej banky v roku 1998). Reakciou Federálneho rezervného systému bolo zvýšiť úroveň monetárnej kontroly, čo viedlo k recesii. Na tejto krátkej ukážke je vidieť, že hoci je monetárna politika účinným nástrojom, často so sebou nesie neočakávané a nechcené dôsledky. Je preto nevyhnutné, aby autority vedeli o potenciálnych efektoch ich rozhodnutí.

Jedny z prvých modelov, ktoré sa zaoberali do istej miery transmisným mechanizmom, boli predstavené Baumolom (1952), Tobinom (1956), Clowerom (1967) a Grossmanom a Weissom (1983). Problémom ich modelov je okrem iného neaktuálna úvaha o funkčnosti



bankového systému. Prezentovaní autori sa vo všeobecnosti snažia maximalizovať celožitovnú diskontovanú užitočnosť s ohľadom na ohraničenie disponibilných možností agenta.

Gavura a Reľovský (2005) prezentovali model transmisného mechanizmu pre Slovensko pozostávajúci z dvoch blokov a to modelu štvrťročnej projekcie, ktorý zachytáva monetárny cyklus a druhý model viacrozmerneho filtru s nenapozorovanými komponentami, ktorý zachytáva trend v ekonomických premenných. Konečný model pozostával z viac než 100 rovníc, čo na záver môže v praxi viesť k problémom pri limitovaných dátach.

V našom príspevku sa zameriame na empirický rámec predstavený Mishkinom (1995) a spojíme ho s vektorovo-autoregresným (VAR) modelom. Obdobné práce empirických štúdií zameraných na monetárny transmisný mechanizmu možno nájsť napríklad u Poddara et al (2006) či Morsinka a Bayoumiho (2001). Hlavné otázky, ktoré sme si položili, sú: ovplyvňuje nárast peňazí produkciu a úroveň cien na Slovensku, cez aké kanály a aká je dĺžka reakcia, resp. stabilizácie.

Je potrebné poznamenať, že Slovenská republika vstúpila v roku 2004 do Európskej únie, 28. novembra 2005 bola slovenská koruna začlenená do Mechanizmu výmenných kurzov ERM II a v roku 2009 vstupuje do eurozóny. Vstupom do eurozóny sa stala Európska centrálna banka primárnym rozhodovateľom v monetárnej politiky a Národná banka Slovenska sekundárnym. Bez ohľadu na zmenu autority, základným cieľom zostala cenová stabilita.

Práca má nasledovnú štruktúru: v prvej kapitole sa venujeme motivácii štúdia transmisného mechanizmu monetárnej politiky, v druhej kapitole zhrnieme poznatky o potenciálnych kanáloch transmisie, tretia kapitola poskytne stručný prehľad o použitej metodológii, v štvrtej kapitole prezentujeme výsledky monetárneho transmisného mechanizmu na Slovensku a piata kapitola zhrnie vybrané výsledky.

## 2 TEÓRIA TRANSMISNÉHO MECHANIZMU

Centrálna banka reguluje krátkodobé (operatívne) ciele, aby dosiahla svoj dlhodobý (konečný) cieľ. Transmisný mechanizmu je teda spôsob, ako pôsobia operatívne ciele vplývajú na konečný cieľ. Podľa Mishkina (1995) sa stretávame s kanálmi transmisie<sup>1</sup>:

- úrokovej sadzby,
- výmenných kurzov,
- úverov.

### 2.1 Kanál úrokovej sadzby

Expanzívna monetárna politika (rast peňažnej ponuky,  $M$ ) spôsobuje pokles úrokovej sadzby ( $i_r$ ). Pokles úrokovej sadzby motivuje súkromný sektor k zvýšeniu investícií a obdobne aj v prípade domácností. Zvýšenie investičných výdavkov ( $I$ ) má za následok rast agregovaného dopytu a domáceho produktu ( $Y$ ). Proces možno znázorniť schematicky:

$$\uparrow M \Rightarrow \downarrow i_r \Rightarrow \uparrow I \Rightarrow \uparrow Y.$$

---

<sup>1</sup> Kanál aktív nebudeme analyzovať z dôvodu relatívne nízkeho počtu aktív akciového trhu na Slovensku.

## 2.2 Kanál výmenných kurzov

Opäť vychádzajme z expanzívnej monetárnej politiky. Rast peňažnej ponuky ( $M$ ) spôsobuje pokles úrokovej sadzby ( $i_r$ ). Preto aktíva, ktoré sú ocenené v domácej mene sú menej atraktívne než tie, ktoré sú ocenené v zahraničnej – depreciácia domácej meny ( $E$ ). Znehodnotenie domácej meny spraví domáce tovary relatívne lacnejšie oproti zahraničným, čo vedie k rastu čistého exportu ( $NX$ ) a teda produkcie ( $Y$ ). Proces možno znázorniť schematicky:

$$\uparrow M \Rightarrow \downarrow i_r \Rightarrow \downarrow E \Rightarrow \uparrow NX \Rightarrow \downarrow Y.$$

## 2.3 Kanál úverov

Kanál úverov má opäť dva efekty: efekt pôžičiek bánk a efekt súvahy. Pokles ponuky peňazí vedie k poklesu vkladov, čo má za následok zníženie peňažnej zásoby banky na úvery. To vedie k poklesu investícií a nakoniec aj k poklesu agregovaného dopytu. Schematicky:

$$\downarrow M \Rightarrow \downarrow \text{prijatých vkladov} \Rightarrow \downarrow \text{poskytnutých úverov} \Rightarrow \downarrow I \Rightarrow \downarrow Y.$$

Pokles čistej hodnoty firmy vedie investorov k redukcii investovaných prostriedkov kvôli redukovanej istote splatnosti dlhu. Vzniká problém morálneho hazardu, nakoľko firmy s nižšou čistou hodnotou a nízkym vlastným kapitálom sú motivované realizovať rizikové projekty. Schematicky:

$$\downarrow M \Rightarrow \downarrow P_e \Rightarrow \uparrow \text{nepriaznivého výberu a morálneho hazardu} \Rightarrow \downarrow \text{úverov} \Rightarrow \downarrow I \Rightarrow \downarrow Y.$$

## 3 METODOLÓGIA

Prvým krokom analýzy je otestovanie Mishkinových (1995) predpokladov prezentovaných v časti 2.1 – 2.3. Na potvrdenie použijeme Grangerov test kauzality, ktorý intuitívne hovorí o tom, že ak máme dve premenné  $X$  a  $Y$ , tak  $X$  Grangerovo pôsobí na  $Y$ , ak predikované hodnoty  $Y$  na základe oneskorených hodnôt  $Y$  a  $X$  sú dôveryhodnejšie než tie, ktoré sú predikované len na základe oneskorených hodnôt  $Y$ .

Ďalej v analýze použijem základnú formu vektorovo-autoregresného (VAR) modelu s  $K$  endogénnymi premennými, ktoré v čase  $t$  tvoria vektor  $\mathbf{y}_t = (y_{1,t}, \dots, y_{K,t})$ . Potom VAR( $p$ ) proces je definovaný ako:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{C} \mathbf{X}_t + \mathbf{u}_t, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{A}_i, [K \times K]$  sú matice koeficientov pre  $i = 1, \dots, p$ ;  $\mathbf{C}, [K \times M]$  matica koeficientov exogénnych premenných,  $\mathbf{X}_t, [M \times 1]$  vektor  $M$  exogénnych premenných v čase  $t$  a  $\mathbf{u}_t, [K \times 1]$  je vektor bieleho šumu s časovo-nemennou, pozitívne definitnou variančno-kovariančnou maticou.

Dôležitú charakteristiku, ktorú je nutné skontrolovať v prípade VAR modelov, je stabilita – stacionárne časové rady s časovo-nemennými strednými hodnotami, rozptylmi a kovariančnou štruktúrou. Stabilitu možno testovať riešením charakteristického polynómu:

$$\det(\mathbf{I}_K - \mathbf{A}_1 z - \dots - \mathbf{A}_p z^p) \neq 0, \quad \text{pre } |z| \leq 1. \quad (2)$$

Ak polynóm má aspoň jeden koreň  $z = 1$ , potom nejaké alebo všetky premenné sú integrované prvého rádu.

Okrem stability je nutné rozhodnúť o vhodnom oneskorení VAR( $p$ ). Jednou z možností je rozhodnúť sa na základe informačných kritérií, typicky Akaikeho, Hannanove-Quinnove, resp. Schwarzove kritérium (pre viac informácií pozri napr. Tsay, 2014).

Po odhade modelu je nutné otestovať reziduály, konkrétne prítomnosť sériovej korelácie, heteroskedasticity a normálne rozdelenie. Prítomnosť sériovej korelácie testujeme LM testom, ktorého nulová hypotéza predpokladá neprítomnosť sériovej korelácie. Na otestovanie heteroskedasticity použijeme Englov ARCH LM test a normálne rozdelenie otestujeme Jarqueovym-Berovym testom.

## 4 EMPIRICKÉ VÝSLEDKY

V nasledujúcej kapitole si opíšeme dáta, s ktorými budeme pracovať. Odhadneme bázický model, z ktorého budeme ďalej vychádzať. Upravené modely budú reprezentovať jednotlivé kanály opísané v 2. kapitole.

### 4.1 Opis dát

V našej analýze monetárneho transmisného mechanizmu Slovenskej republiky použijeme sezónne očistené štvrťročné údaje od prvého štvrťroku 2009 do druhého štvrťroku 2019. Naša databáza zahŕňa premenné prezentované v tabuľke 1. Analýzu zrealizujeme v programe EViews.

*Tab. 1: Zahrnuté premenné v analýze monetárneho transmisného mechanizmu*

Premenná	Opis	Zdroj
OUTPUT	HDP vypočítané produkčnou metódou v stálych cenách (mil. EUR).	www.nbs.sk
HICP	Harmonizovaný index spotrebiteľských cien (index 2015Q1 = 100).	www.nbs.sk
M2	Peňažný agregát M2, tzv. široko definovaná ponuka peňazí (mil. EUR).	www.nbs.sk
IRATE	Úroková sadzba (v percentách).	www.nbs.sk
REER	Reálny efektívny výmenný kurz (index 2010Q1 = 100).	www.imf.org
CREDIT	Celková hodnota úverov (v mil. EUR).	www.nbs.sk
OIL	Svetová cena ropy (v USD/barell).	fred.stlouisfed.org

Zdroj: vlastné spracovanie.

Rozdielne merné jednotky a nestacionárnosť premenných boli eliminované použitím percentuálnej zmeny<sup>2</sup> namiesto absolútnej hodnoty. Sumárne štatistiky premenných sú prezentované v tabuľke 2.

*Tab. 2: Sumárna štatistika premenných*

	OUTPUT1	HICP1	M21	IRATE1	REER1	CREDIT1	OIL1
Priemer	0,0078	0,0038	0,0134	-0,0095	-0,0011	0,0165	0,0181
Medián	0,0078	0,0037	0,0129	-0,0056	0,0009	0,0165	0,0267
Maximum	0,0195	0,0223	0,0431	0,0093	0,0177	0,0384	0,3892
Minimum	-0,0019	-0,0070	-0,0219	-0,0362	-0,0239	-0,0073	-0,3335
Št. odch.	0,0052	0,0055	0,0153	0,0132	0,0077	0,0098	0,1426
Šikmosť	0,4224	0,9278	-0,0910	-0,3648	-0,4488	0,0343	0,1052
Špicatosť	2,7390	5,1389	3,0959	1,8711	4,2416	2,9029	3,9127
Jarque-Bera	1,3357 (0,5128)	3,698 (0,1660)	0,0724 (0,9645)	3,0868 (0,2137)	4,0099 (0,1347)	0,0241 (0,9880)	1,4989 (0,4726)

<sup>2</sup> Označenie premennej percentuálnej zmeny je "premenná1".

ADF	-3,2638 (0,0241)	-3,9319 (0,0049)	-7,1522 (0,0000)	-4,1485 (0,0023)	-4,3537 (0,0013)	-3,9150 (0,0044)	-6,4009 (0,0000)
-----	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

Pozn.: v zátvorkách sú uvedené pravdepodobnostné hodnoty.

Zdroj: vlastné spracovanie.

Z tabuľky 2 vidíme, že na 5 % hladine významnosti majú premenné normálne rozdelenie a sú stacionárne. Normálne rozdelenie sme testovali prostredníctvom Jarquovho-Berovho testu a stacionárnosť rozšíreným Dickey-Fullerovým testom (ADF).

Prvým krokom našej analýzy je potvrdenie kauzálnych vzťahov, ktoré prezentoval Mischkin (1995), pomocou Grangerovho testu. Výsledky sú prezentované v tabuľke 3.

Tab. 3: Grangerov test kauzality

Kanál úrokovej sadzby $\uparrow M \Rightarrow \downarrow i_r \Rightarrow \uparrow Y$	Kanál výmenných kurzov $\uparrow M \Rightarrow \downarrow i_r \Rightarrow \downarrow E \Rightarrow \downarrow Y$	Kanál úverov $\downarrow M \Rightarrow \downarrow \text{credit} \Rightarrow \downarrow Y$
$M \nRightarrow i_r : F = 6,1981$ (0,0051)	$i_r \nRightarrow E : F = 2,2119$ (0,0302)	$M \nRightarrow \text{credit} : F = 2,7651$ (0,0280)
$i_r \nRightarrow Y : F = 1,1492$ (0,3289)	$E \nRightarrow Y : F = 0,4500$ (0,6414)	$\text{credit} \nRightarrow Y : F = 0,1222$ (0,8864)

Zdroj: vlastné spracovanie.

Grangerov test potvrdil len polovicu z predpokladaných vzťahov. Limitom Grangerovho testu je, že nám nepovie nič o intenzite kauzálneho vzťahu.

## 4.2 Základný model

Východiskový model obsahuje endogénne premenné (*output1*, *hicp1*, *m21*) a exogénnu premennú (*oil1*). Výber premenných vychádza z predpokladu, že šok monetárnej politiky je prenášaný cez hrubý domáci produkt a úroveň cien. Zahnutím exogénnej premennej sa snažíme zachytiť externé šoky. Výsledky sú prezentované v bloku č. 1. Model obsahuje jedno oneskorenie na základe konečne predikčnej chyby (FPE) a súčasne v modeli nie je prítomná sériová korelácia do 4. oneskorenia na 5 % hladine významnosti.

### Blok č. 1

Tab. 4: VAR základný model

Sample (adjusted): 2009Q3 2019Q2			
Included observations: 40 after adjustments			
T-statistics in [ ]			
	OUTPUT1	HICP1	M21
OUTPUT1(-1)	-0,030022 [-0,18914]	-0,039197 [-0,27674]	-0,990381 [-2,10958]
HICP1(-1)	-0,133842 [-0,89333]	0,470638 [ 3,52025]	-0,251173 [-0,56681]
M21(-1)	-0,101200 [-1,93190]	0,035558 [ 0,76069]	-0,182363 [-1,17701]
C	0,009625 [ 5,13751]	0,001850 [ 1,10642]	0,025239 [ 4,55460]
OIL1	-0,004227 [-0,68356]	0,020835 [ 3,77549]	-0,017857 [-0,97627]
R2	0,112220	0,428170	0,161062
F-statistic	1,106047	6,551752	1,679852
Akaike AIC	-7,674710	-7,902506	-5,505868
Akaike information criterion		-21,14216	
Schwarz criterion		-20,50883	

Tab. 5: Štatistiky VAR základný model

Root	Modulus
0,481623	0,481623
-0,421389	0,421389
0,198019	0,198019

Lag	LogL	LR	FPE
1	412,9841	17,69903*	9,16e-14*

Null Hypothesis: no serial correlation at lag order h		
Lags	LM-Stat	Prob
1	17,21928	0,0554
2	12,30504	0,1967
3	16,40972	0,0588
4	9,319240	0,4083

Zdroj: vlastné spracovanie.

Monetárna teória navrhuje<sup>3</sup>, že rast peňazí vedie k rastu produkcie a cenovej úrovne. V našej analýze použijeme funkciu impulzu a reakcie východiskového modelu, ktorý je na grafe č. 1. Vidíme, že pozitívny šok v ponuke peňazí vedie k negatívnemu šoku v produkcii do 3. kvartálu. V prípade úrovne cien pozitívny šok peňazí vedie k pozitívnemu šoku v úrovni cien až do 8. kvartálu, avšak nie štatisticky významne.

Na základe dekompozície rozptylu vieme povedať, že šok v ponuke peňazí je významným zdrojom fluktuácie produkcie, nakoľko 10 % šokov je pripisovaných práve peniazom. Cenová hladina nie je štatisticky významná a jej vplyv na produkciu je len minoritný.

Graf č. 1: Impulz a reakcia základný model



Zdroj: vlastné spracovanie.

### 4.3 Kanál úrokovej sadzby

Za účelom analýzy efektu úrokovej sadzby pridáme endogénnu premennú *irate1* do základného modelu. Tento kanál vychádza z tradičnej keynesiánskej ekonómie, kde predpokladáme, že rast reálnej úrokovej sadzby odradzuje od investovania a eventuálne vedie k poklesu produkcie. Výsledky odhadu sú prezentované v bloku č. 2.

#### Blok č. 2

Tab. 6: VAR úroková sadzba

	OUTPUT1	HICP1	M21	IRATE1
Sample (adjusted): 2009Q3 2019Q2				
Included observations: 40 after adjustments				
T-statistics in [ ]				
OUTPUT1	-0,081966	0,066413	-1,104557	0,051975
(-1)	[-0,52599]	[ 0,39425]	[-2,44339]	[ 0,14220]
HICP1(-1)	-0,038124	0,408601	0,107283	-0,187157
	[-0,24787]	[ 2,45761]	[ 0,24045]	[-0,51881]
M21(-1)	-0,114988	0,008735	-0,239469	0,079043
	[-2,23239]	[ 0,15687]	[-1,60263]	[ 0,65426]
IRATE1(-1)	0,040293	0,034547	0,343558	0,174207
	[ 0,56350]	[ 0,44694]	[ 1,65626]	[ 1,03872]
C	0,016452	-0,000543	0,052047	-0,028494
	[ 3,79512]	[-0,11580]	[ 4,13875]	[-2,80234]
OIL	-8,54E-05	3,60E-05	-0,000320	0,000280
	[-1,80516]	[ 0,70394]	[-2,33592]	[ 2,52722]
R2	0,186208	0,230786	0,260241	0,323754
F-statistic	1,555948	2,040191	2,392181	3,255517
Akaike AIC	-7,711729	-7,555978	-5,581680	-6,006755
Akaike information		-27,00321		
Schwarz criterion		-25,98989		

Zdroj: vlastné spracovanie.

Tab. 7: Štatistiky VAR úroková sadzba

Root	Modulus
-0,561610	0,561610
0,357629	0,357629
0,288286	0,288286
0,177069	0,177069

Lag	LogL	LR	FPE
1	518,3514	27,35232	1,41e-17*

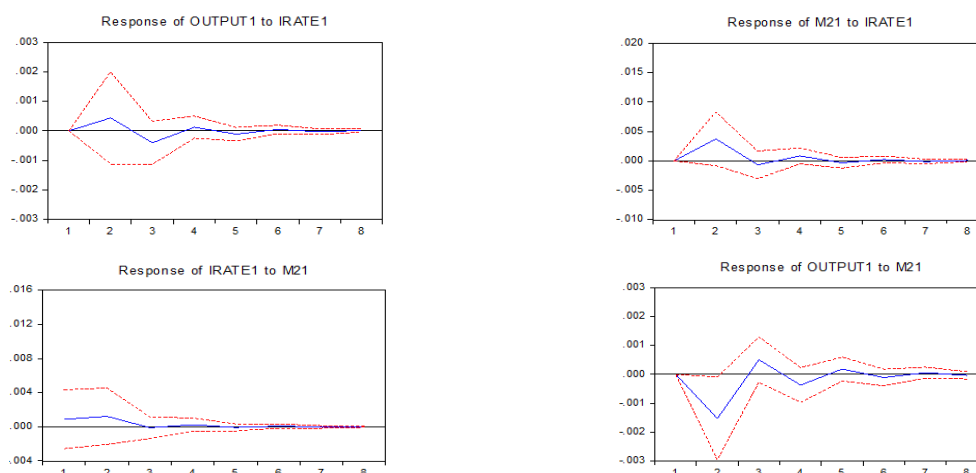
Null Hypothesis: no serial correlation at lag order h		
Lags	LM-Stat	Prob
1	22,52825	0,1269
2	19,16178	0,2604
3	19,78136	0,2302
4	25,33922	0,0641

Monetárna teória navrhuje, že expanzívna monetárna politika spôsobí pokles úrokovej sadzby a preto stimuluje investície, čo zvyšuje dopyt a v konečnom dôsledku produkciu. V našom prípade sa nepotvrdilo, že šok v peňažnej báze (expanzívna monetárna politika), spôsobí pokles úrokovej sadzby (pozri graf č. 2), práve naopak, do 3. kvartálu vidíme pozitívnu

<sup>3</sup> Pre viac informácií pozri napr.: McCallum (1989), Mischkin (1995), Walsh (2017).

reakciu úrokovej sadzby. Opačný jav je vidieť aj v prípade reakcie produkcie na expanzívnu monetárnu politiku poklesom produkcie do 2. kvartálu. Napriek tomu, šok v úrokovej sadzbe pôsobí pozitívne aj na peňažnú bázu, aj na produkciu, čo je podľa očakávaní, avšak, v prípade produkcie nevýznamne.

Graf č. 2: Impulz a reakcia modelu úrokovej sadzby



Zdroj: vlastné spracovanie.

#### 4.4 Kanál výmenných kurzov

Obdobným spôsobom ako v prípade kanálu úrokovej sadzby analyzujeme kanál výmenných kurzov zaradením exogénnej premennej *reer1* do základného modelu. Odhad modelu je prezentovaný v bloku č. 3. Napriek tomu, že FPE navrhuje nula oneskorení, zahrnieme do modelu dynamiku.

#### Blok č. 3

Tab. 8: VAR výmenný kurz

Sample (adjusted): 2009Q3 2019Q2				
Included observations: 40 after adjustments				
T-statistics in [ ]				
	OUTPUT1	HICP1	M21	REER1
OUTPUT1	-0,117124	0,079256	-1,006701	-0,241618
(-1)	[-0,72395]	[ 0,45272]	[-2,10787]	[-0,98124]
HICP1(-1)	-0,038495	0,383846	-0,121920	0,309333
	[-0,25090]	[ 2,31203]	[-0,26919]	[ 1,32467]
M21(-1)	-0,105537	0,009975	-0,222370	0,038351
	[-2,06103]	[ 0,18002]	[-1,47108]	[ 0,49208]
REER1(-1)	-0,062705	0,045878	0,387034	0,245617
	[-0,58795]	[ 0,39754]	[ 1,22932]	[ 1,51313]
C	0,015066	-0,001805	0,039549	0,002660
	[ 4,29097]	[-0,47498]	[ 3,81566]	[ 0,49779]
OIL	-7,03E-05	4,92E-05	-0,000189	-4,01E-05
	[-1,81468]	[ 1,17356]	[-1,65135]	[-0,68036]
R2	0,186876	0,229846	0,234577	0,215402
F-statistic	1,562803	2,029407	2,083973	1,866864
Akaike	-7,712549	-7,554758	-5,547576	-6,872490
Akaike information	-27,85479			
Schwarz criterion	-26,84147			

Tab. 9: Štatistiky VAR výmenný kurz

Root	Modulus
-0,487026	0,487026
0,468505	0,468505
0,325832	0,325832
-0,017343	0,017343

Lag	LogL	LR	FPE
0	516,2763	NA*	6,41e-18*

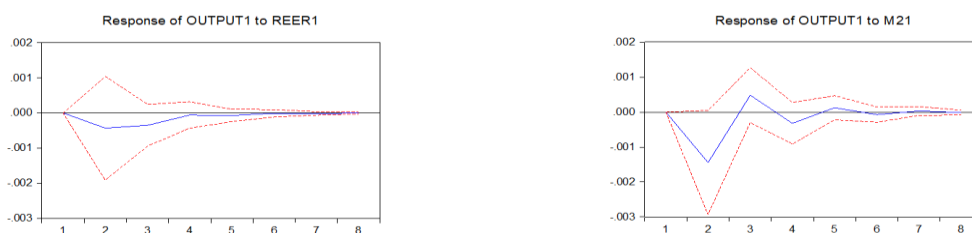
  

Null Hypothesis: no serial correlation at lag order h		
Lags	LM-Stat	Prob
1	12,05528	0,7402
2	9,287683	0,9011
3	19,94216	0,2228
4	19,92266	0,2237

Zdroj: vlastné spracovanie.

Teória tvrdí, že podhodnotenie meny vedie k poklesu produkcie. Na základe funkcie impulzu a reakcie grafu č. 3 tento predpoklad potvrdíme, nakoľko šok v *reer1* vedie k poklesu produkcie od 1. do 6. kvartálu. Na druhú stranu, oneskorená premenná *reer1* nie je štatisticky významná v prípade produkcie. Šok v peňažnej báze vedie k poklesu produkcie až do 2. kvartálu, čo je podľa očakávaní teórie.

Graf č. 3: Impulz a reakcia modelu výmenného kurzu



Zdroj: vlastné spracovanie.

#### 4.5 Kanál úverov

Na záver zrealizujeme analýzu kanálu úverov začlenením exogénnej premennej *credit1* do základného modelu. Odhad modelu je prezentovaný v bloku č. 4. Rovnako ako v prípade kanálu výmenného kurzu, zahrnieme do modelu dynamiku.

#### Blok č. 4

Tab. 10: VAR úvery

Sample (adjusted): 2009Q3 2019Q2				
Included observations: 40 after adjustments				
T-statistics in [ ]				
	OUTPUT1	HICP1	M21	CREDIT1
OUTPUT1	-0,105731	0,069549	-1,085931	-0,296535
(-1)	[-0,68230]	[ 0,41265]	[-2,40922]	[-1,07986]
HICP1(-1)	-0,028989	0,379071	-0,166434	0,222719
	[-0,19001]	[ 2,28445]	[-0,37505]	[ 0,82379]
M21(-1)	-0,104161	0,009467	-0,227622	0,091502
	[-2,05430]	[ 0,17167]	[-1,54338]	[ 1,01837]
CREDIT1	-0,076465	0,049247	0,428451	0,336767
(-1)	[-0,91363]	[ 0,54101]	[ 1,75998]	[ 2,27067]
C	0,017256	-0,003211	0,027303	0,020154
	[ 4,05151]	[-0,69318]	[ 2,20388]	[ 2,67027]
OIL	-8,40E-05	5,80E-05	-0,000113	-0,000115
	[-2,02963]	[ 1,28857]	[-0,93793]	[-1,57231]
R2	0,198291	0,232871	0,267307	0,330090
F-statistic	1,681877	2,064214	2,480826	3,350622
Akaike	-7,726687	-7,558692	-5,591278	-6,582386
Akaike information	-27,52978			
Schwarz criterion	-26,51645			

Tab. 11: Štatistiky VAR úvery

Root	Modulus
0,547699	0,547699
-0,505457	0,505457
0,359183	0,359183
-0,018941	0,018941

Lag	LogL	LR	FPE
0	537,4647	NA*	9,29e-18*

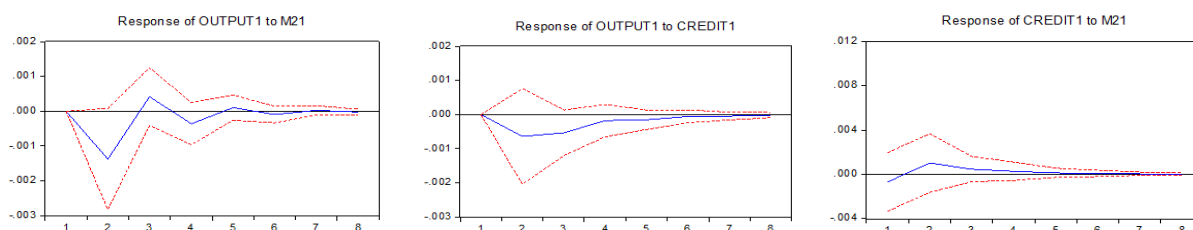
  

Null Hypothesis: no serial correlation at lag order h		
Lags	LM-Stat	Prob
1	19,39866	0,2485
2	12,39413	0,7164
3	25,44517	0,0624
4	20,61681	0,1937

Zdroj: vlastné spracovanie.

Teória tvrdí, že rast peňažnej bázy spôsobí rast celkovo poskytnutých úverov, čo naštartuje agregovaný dopyt a celkovú produkciu. Z grafu č. 4 môžeme povedať, že šok v úveroch má negatívny dopad na produkciu, čo je v protiklade s teóriou. Šok v peňažnej báze má opäť negatívny dopad produkciu až do 3. kvartálu a pozitívny dopad na úvery.

Graf č. 4: Impulz a reakcia modelu úverov



Zdroj: vlastné spracovanie.



## 5 ZÁVER

Naša analýza poukázala čiastočnú významnosť vybraných kanálov transmisie. Primárne potvrdila významnosť peňažnej bázy v jednotlivých modeloch zakomponovaním dodatočnej endogénnej premennej do modelu a jej negatívny vplyv na produkciu. Štúdia poskytla podklad o vplyve úverov a úrokovej sadzby na objem peňažnej bázy a jej prenos do celkovej produkcie. Služiť môže najmä rozhodovateľom monetárnej politiky, ale aj ako podklad pre ďalšie štúdie venujúce sa transmisného mechanizmu.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0248/17 *Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie* a I-19-103-00 *Udržateľné princípy ekonomických subjektov ako nástroj eliminácie globálnych a environmentálnych rizík*.

### Použitá literatúra

1. BAUMOL, W. J. (1952). The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach. In: *The Quarterly Journal of Economics*, roč. 66, 1952, č. 4, s. 545-556.
2. CLOWER, R. (1967). A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory. In: *Economic Inquiry*, roč. 6, 1967, č. 1, s. 1-8.
3. GAVURA, M. – RELOVSKÝ, B. 2004. A Simple Model of the Transmission mechanism of Slovakia's Economy, Its Structure and Properties. In: *BIATEC*, roč. 13, 2005, č. 3, s. 15-23.
4. GROSSMAN, S – LAURENCE, W. (1983). A Transactions-Based Model of the Monetary Transmission Mechanism. In: *The American Economic Review*, roč. 73, 1983, č. 5, s. 871-880.
5. MCCALLUM, B. T. (1989). *Monetary Economics, Theory and Policy*. New York: Macmillan Publishing Company, 356 s.
6. MISHKIN, F. S. (1995). Symposium on the Monetary Transmission Mechanism. In: *Journal of Economic Perspectives*, roč. 9, 1995, č. 4, s. 3-10.
7. MORSINK, J. – BAYOUMI, T. (2003). A Peek Inside the Black Box: The Monetary Transmission Mechanism in Japan. In: *IMF Staff Papers*, roč. 48, 2003, č.1.
8. PODDAR, T. et al. (2006). The Monetary Transmission mechanism in Japan. In: *IMF Staff Papers*, roč. 48, 2006, č. 1.
9. TOBIN, J. (1956). The Interest-Elasticity of Transactions Demand for Cash. In: *The Review of Economics and Statistics*, roč. 38, 1956, č. 3, s. 241-247.
10. TSAY, R. S. (2014). *Multivariate Time Series Analysis*. New Jersey: Wiley, 2014, 492 s.
11. WALSH, C. E. (2017). *Monetary Theory and Policy*, 4th ed. Cambridge: The MIT Press, 661 s.

### Kontaktné údaje

Ing. Stanislav Kováč

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [stanislav.kovac@euba.sk](mailto:stanislav.kovac@euba.sk)

Ing. Alexander Frasch, Ing. Hana Palušková

Ekonomická univerzita v Bratislave, Obchodná fakulta

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [alexander.frasch@euba.sk](mailto:alexander.frasch@euba.sk), [hana.palusková@euba.sk](mailto:hana.palusкова@euba.sk)

# ELASTICITA DOPYTU PO POHONNÝCH HMOTÁCH V ČESKEJ REPUBLIKE

## ELASTICITY OF DEMAND FOR FUEL IN THE CZECH REPUBLIC

*Radoslav Lacko*

### Abstrakt

Skúmanie cenovej citlivosti dopytu po palivách je populárnou témou medzi výskumníkmi. Cenová elasticita sa používa na predpovedanie daňových príjmov ale aj spotreby paliva za rôznych okolností. Práca sa zameriava na odhad elasticity pre Českú republiku s použitím vysoko frekvenčných dát. České dáta boli získané procesom data miningu. Pozorovaná elasticita sa líši podľa úrovne agregácie dát. Odhadnutá dlhodobá elasticita bola medzi  $-0.38$  a  $-0.68$  pre používateľov benzínu a medzi  $-0.43$  a  $-0.54$  pre dieselových používateľov. Odhadnutá krátkodobá elasticita bola omnoho nižšia, čo potvrdzuje ekonomickú teóriu.

**Kľúčové slová:** *elasticita, palivo, mikrodata*

### Abstract

Studying the price responsiveness of the fuel demand is popular topic among researchers. The price elasticity is used for predicting future tax revenues, or fuel consumption under various situations. This thesis focuses on elasticity estimation for the Czech Republic using high frequency evidence. We use the process of data mining to get the Czech evidence. Observed elasticity differs by the data aggregation level. Estimated long-run elasticity range between  $-0.38$  and  $-0.68$  for gasoline users and between  $-0.43$  and  $-0.54$  for diesel users. Much lower elasticity was estimated in the short-run that confirms economic theory.

**Keywords:** *elasticity, fuel, microdata*

## 1 DÔLEŽITOSŤ TRHU POHONNÝCH HMÔT

Existuje mnoho dôvodov prečo sa usilovať o odhadnutie cenovej citlivosti dopytu na trhu s pohonnými hmotami. Dôvody, ktoré určite stoja za spomenutie sú napríklad dosiahnutie optimálnych daňových príjmov, nastavenie energetického mixu s prihliadnutím na ekologickú ale aj ekonomickú udržateľnosť.

### 1.1 Motivácia

Vo všeobecnosti vieme, že cenová elasticita sa môže a vo väčšine prípadov sa aj naozaj líši vzhľadom na analyzovanú krajinu. Rozdiely v odhadovanej elasticite vznikajú predovšetkým z rozdielného správania naprieč krajinami napr. Čína (Lin Zeng, 2013) alebo Švajčiarsko (Baranzini a Weber, 2013), kde s narastajúcou cenou spotreba klesala a bola ľahko predikovateľná. Podľa analyzovaných štúdií (hastings shapiro) vieme, že rastúca cena nemusí vyústiť len ku klesajúcemu dopytu ale aj k substitúcií rámci trhu pohonných hmôt. Spotrebitelia môžu začať používať lacnejšiu variantu (menej oktánové palivo, prípadne alternatívy ako LPG, CNG alebo v iných krajinách využívaný etanol).

Väčšina uskutočnených štúdií bola vykonaná na dátach rozvinutých krajín a to predovšetkým Veľká Británia, alebo USA. Dôvodom malého počtu štúdií v iných krajinách je nedostatočná

transparentnosť a dostupnosť dát vhodných pre zostavenie ekonometrického modelu. Podľa mojích informácií elasticita dopytu nebola v Česku analyzovaná na dátach o českých spotrebiteľoch.

## 1.2 Fiškálny vplyv

Príjmy na dani z predaja pohonných hmôt tvoria približne 11% z celkových príjmov štátneho rozpočtu, čo v absolútnom vyjadrení predstavovalo niečo okolo 81 miliárd Kč v roku 2017. Je to viac ako polovica všetkých daňových príjmov zo spotrebných daní.

## 1.3 Enviromentálny vplyv

Daňové príjmy vybrané na dani z pohonných hmôt by mali slúžiť na pokrytie škôr spôsobených jeho spotrebou. Aj mimo ekologických externalít by sme tam mohli začleniť aj ostatné externality ako napríklad opotrebovanie ciest, hluk a pod.

Na základe dát zo štatistického úradu vieme že produkcia celkových emisií v doprave na obyvateľa od roku 2008 klesala, čo má priamu súvislosť s finančnou a následne aj ekonomickou krízou. Až v roku 2016 sa produkcia emisii CO<sub>2</sub> na obyvateľa dostala znovu na predkrízovú úroveň. Počas celého obdobia viac ako 60% z celkových emisií tvorila spotreba benzínu v osobných autách.

Legislatívna norma týkajúca sa pohonných hmôt sa upravuje a reguluje na celoeurópskej úrovni, vďaka čomu museli miestni producenti a predajcovia benzínu a nafty zredukovať obsah ťažkých kovov a síry. Nahradené mali byť aditívami, ktorý spaľovaním produkujú menej emisii a znižujú opotrebenie vozidla.

## 2 LITERÁRNA REŠERŠ

Na základne našich informácií žiadna štúdia elasticity nebola postavená priamo na českých dátach o spotrebe pohonných hmôt od českých vodičov. Štúdia, ktorá skúmala elasticity v krajinách EU-28 (Zelege, 2016), nevynechala ani Českú republiku. Mimo cenovej elasticity bola odhadnutá aj príjmová elasticita. Významnosť výsledkov bola  $p < 0,05$  pre benzín, pre naftu výsledky významné neboli.

Inšpiráciou pre našu prácu môže byť štúdia od Levina et al. (2017), ktorý mal k dispozícii panelové data s vysokou frekvenciou od spoločnosti VISA Inc. týkajúcu sa nákupov na čerpacích staniciach v 234 metropolitných oblastiach v USA v období medzi februárom 2006 a decembrom 2009. Z dôvodu zníženia potenciálnej endogenity použil fixed effects model. V modeli brané do úvahy dva efekty a to individuálny efekt pre metropolitnú oblasť a druhý efekt bol časový.

## 3 DATA

V tejto časti budú opísané typy a zdroje dát, ktoré v našom odhade elasticity použijeme. Nie všetky dáta boli v podobe, ktorú potrebujeme pre zostavenie modelu nie sú voľne dostupné a preto ich potrebujeme zozbierať. Voľne dostupné data:

- Týždenné ceny benzínu a dieslu (Český štatistický úrad),
- Priemerná nominálna mzda (Český štatistický úrad),
- HDP a národné účty (Český štatistický úrad),
- Ropa Brent denné ceny (Federal Reserve Economic Data).

Dáta, ktoré budú reprezentovať spotrebu su taktiež dostupné na Českom štatistickom úrade, ale sú iba za štvrťročné obdobia čo za posledných 10-15 rokov nevytvorí podklad pre zostavenie robustného modelu na skúmanie cenovej citlivosti.

Vhodné data na vytvorenie robustného modelu sme objavili na stránke [www.spotreby.cz](http://www.spotreby.cz), kde si registrovaní užívatelia zapisujú informácie o ich tankovaniach v čase a jednotkovej cene. Vytvorili sme si preto zjednodušený dataminingový model na zber dát zo spomínanej stránky.

Rozhodli sme sa pre obdobie medzi januárom 2007 a decembrom 2018. Za ten čas bolo na stránke zaevidovaných viac ako 428 tisíc tankovaní. Mnoho pozorovaní sa týkalo aj iných pohonných hmôt ako benzín alebo diesel a preto sme ich museli vylúčiť.

Keďže vstupy neboli nijako regulované, medzi pozorovania sa dostali aj záznamy ktoré sme vyhodnotili ako nevhodné pre ďalšie spracovanie. Preto sme pozorovania odstránili a to v nasledujúcich krokoch:

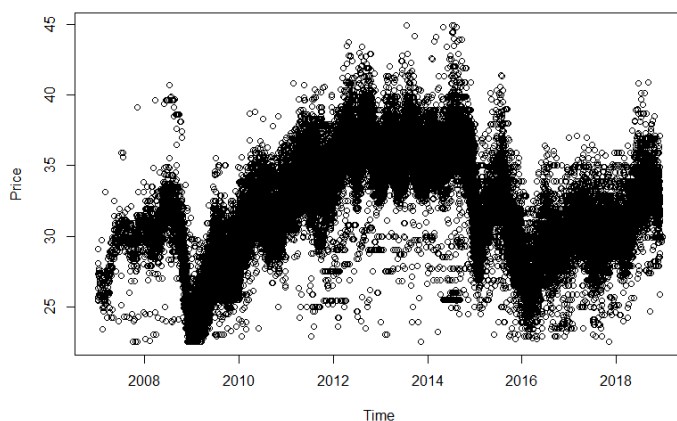
- Vylúčenie benzínu s 91, 98 a 100 oktánmi,
- Vylúčenie premiovej nafty,
- Stanovenie minimálnej kvantity na 5 litrov za jedno tankovanie,
- Stanovenie maximálnej kvantity na 60 litrov za jedno tankovanie,
- Stanovenie spodnej cenovej hranice na 21 Kč za liter nafty a 22,5 Kč za liter benzínu.
- Stanovenie hornej cenovej hranice na 45 Kč za jeden liter paliva.

Týmto postupom sme odstránili takmer 40 tisíc záznamov.

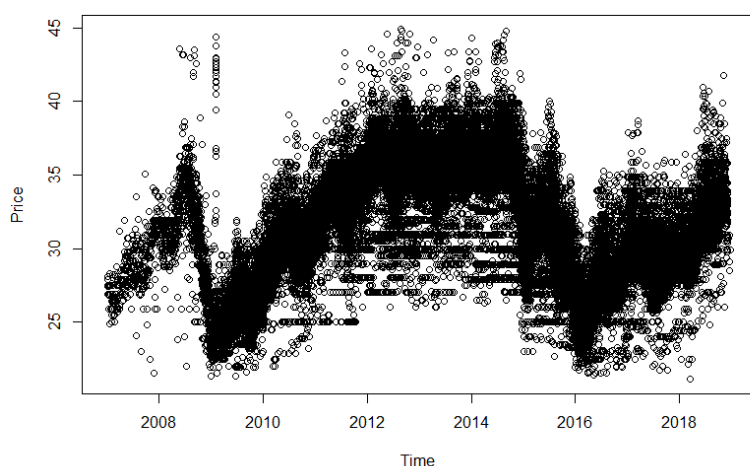
### 3.1 Analýza a statistika dát

Pozorovanie sme rozdelili do dvoch skupín, dieslovej a benzínovej. Dieselový dataset pozostáva z 3193 registrovaných áut (rozdiel medzi užívateľmi a autami vyplýva z toho, že jeden registrovaný užívateľ môže na stránke evidovať spotrebu viacerých áut) a približne 97 tisíc pozorovaní. Benzínový dataset zahŕňal 4693 registrovaných áut s viac ako 140 tisícmi pozorovaní. Pozorovania priradené k jednotlivým autám neboli obmedzené, datasety preto považujeme za nevyrovnané tzv. unbalanced.

Nasledujúce grafy ukazujú rozloženie pozorovaní v jednotlivých datasetoch. Môžeme zhodnotiť, že benzínový dataset pôsobí konzistentnejší s menším počtom pozorovaní mimo hlavný trend.



Obrázok 1 Individuálne nákupy benzínu vzhľadom k cene. (zdroj: [www.spotreby.cz](http://www.spotreby.cz))



**Obrázok 2 Individuálne nákupy nafty vzhľadom k cene. (zdroj: [www.spotreby.cz](http://www.spotreby.cz))**

Pre zhodnotenie relevantnosti nášho datasetu s realitou sme porovnali distribúciu áut podľa značiek nášho datasetu s centrálnym registrom vozidiel v Českej republike. Porovnanie piatich najpočetnejších značiek v absolútnom a relatívnom vyjadrení môžete vidieť v najsledujúcej tabuľke. V ľavej strane tabuľky je náš dataset, v pravej strane sa nachádza rozloženie podľa centrálnego registra vozidiel. Môžeme zhodnotiť, že síce percentuálne rozdelenie nie je identické, ale podobné s rovnakým usporiadaním podľa početnosti a preto hodnotíme získaný dataset ako relevantný a vhodný pre ďalšie spracovanie.

Značka	Počet	Podiel	Značka	Počet	Podiel
Škoda	1 871	22,08%	Škoda	1 947 047	22,34%
Volkswagen	1 113	13,14%	Volkswagen	565 711	6,49%
Ford	699	8,25%	Ford	491 796	5,64%
Renault	544	6,24%	Renault	374 731	4,30%
Peugeot	497	5,87%	Peugeot	359 397	4,12%

**Tabuľka 1 Porovnanie rozdelenia značiek podľa zastúpenia.**

## 4 METÓDA

Vzhľadom na charakter dát, ktoré pozostávajú z tisícov pozorovaní pre tisíce áut (užívateľov) sme sa na rozhodli použiť metódu známu ako fixed effects na panelových datach s cieľom preskúmať individuálne efekty každého auta (užívateľa).

Pre otestovanie ekonomickej teórie sme používali data bez agregácie (základný model) ale aj data ďalej agregované (agregovaný model). Data boli agregované vzhľadom k času, kde sme všetky pozorovania jednotlivých užívateľov sčítali a dopočítali váženú cenu. Použité rovnice uvádzam nižšie.

$$\log \text{Quantity}_{it} = \log \text{Price}_{it} \beta + c_i + u_{it}$$

$$\log \text{Quantity}_{it} = \log \text{Price}_{it} \beta_1 + \log \text{Oil}_{it} \beta_2 + c_i + u_{it}$$

$$\log \text{Quantity}_{it} = \log \text{CSOprice}_{it} \beta + c_i + u_{it}$$

$$\log \text{Quantity}_{it} = \log \text{CSOprice}_{it} \beta_1 + \log \text{Oil}_{it} \beta_2 + c_i + u_{it}$$

**Rovnica 1 Základný model**

$$\log \text{Quantity}_{it} = \log \text{Weightedprice}_{it} \beta_1 + \log \text{Income}_{it} \beta_2 + \log \text{GDP}_{it} \beta_3 + c_i + u_{it}$$

$$\log \text{Quantity}_{it} = \log \text{Weightedprice}_{it} \beta_1 + c_i + \lambda_t + u_{it}$$

**Rovnica 2 Agregovaný model**

## 5 VÝSLEDKY

Najprv sme odhadovali elasticitu pre základný model, kde premenná *Price* znamená cenu, za ktorú nakúpovali užívatelia a *CSOprice* je cena štatistického úradu. Premenná *Weightedprice* v agregovanom modeli znamená váženú cenu za ktorú nakupovali spotrebitelia.

Odhadnutá dlhodobá elasticita pre spotrebiteľov benzínu bola -0,382 a -0,231 pri použití premennej *Price* resp. *CSOprice* s prihliadnutím na individuálne efekty. Zatiaľ čo krátkodobá elasticita bola odhadnutá na -0,311 a -0,224.

Dlhodobá cenová elasticita nafty bola -0,430 a -0,242 pri použití premennej *Price* resp. *CSOprice* s prihliadnutím na individuálne efekty. Odhadnutá krátkodobá elasticita bola -0,396 a -0,241. Všetky výsledky boli odhadnuté na hladine významnosti  $p < 0,01$ .

Pre model používajúci agregované data boli výsledky významné iba v dlhodobom horizonte. Dlhodobá elasticita bola odhadnutá na úrovni -0,681 a -0,542 pre benzín resp. naftu s hladinou významnosti  $p < 0,01$ . Model bral v úvahu individuálne ale aj časové efekty, tzv. „two-way effects“ model.

Klesajúca krátkodobá elasticita v porovnaní s dlhodobou elasticitou potvrdzuje ekonomickú teóriu.

### **Použitá literatúra**

1. BARANZINI, A. a WEBER S. 2013. Elasticities of gasoline demand in switzerland. *Energy Policy* 63, s. 674-680.
2. ANDERSON, S. T. 2012 The demand for ethanol as a gasoline substitute. *Journal of Environmental Economics and Management* 63(2), s. 151-168.
3. HASTINGS, J. S. a SHAPIRO J. M. 2013. Fungibility and consumer choice: Evidence from commodity price shocks. *The Quarterly Journal of Economics* 128(4), s. 1449-1498.
4. LEVIN, L. a LEWIS M. S. a WOLAK F. A. 2017. High frequency evidence on the demand for gasoline.” *American Economic Journal: Economic Policy* 9(3), s. 314–347.
5. ZELEKE, A. 2016. Gasoline and diesel demand elasticities: a consistent estimate across the eu-28. Working paper series / Swedish University of Agricultural Sciences, Department of Economics (1401-4068).

### **Kontaktné údaje**

Radoslav Lacko

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3-Žižkov

Tel: +421 948 321 340

Email: rl.lacko@gmail.com

# ODHAD VEKTOROVÝCH MODELOV S KOREKČNÝM ČLENOM V SYSTÉME R<sup>1</sup>

## ESTIMATE OF VECTOR ERROR CORRECTION MODELS WITH R

*Martin Lukáčik*

### Abstrakt

Rozvoj ekonometrickej analýzy je v posledných rokoch úzko spojený s rozvojom výpočtovej techniky a zodpovedajúceho softvéru. Bez kvalitného programového vybavenia by sme nemohli realizovať takmer žiadne analýzy. Vďaka rastúcemu počtu analýz využívajúcich vektorové modely s korekčným členom sa rozšírili aj možnosti ich odhadu v jednotlivých programoch. V príspevku sme sa preto rozhodli predstaviť možnosti analýz pomocou vektorových modelov s korekčným členom v programovacom systéme R, ktorý je voľne dostupný a predstavuje alternatívu komerčným špecializovaným softvérovým produktom.

**Kľúčové slová:** ekonometrická analýza, VEC modely, programovací systém R, RStudio

### Abstract

The development of econometric analysis is in recent years closely linked to the development of computers and appropriate software. Without high-quality software, we could hardly make any analysis. Thanks to the increasing number of analyzes using vector error correction models, their possibilities in software have been extended. In paper, we decided to present the possibilities of analysis using vector error correction models in R, which is freely available and it is an alternative to the commercial software product.

**Keywords:** econometric analysis, VEC models, R programming system, RStudio

## 1 VEKTOROVÉ MODELY S KOREKČNÝM ČLENOM

Vektorovo autoregresný model rádu  $p$ , v ktorom sú všetky premenné endogénne, ich počet je  $n$  a každá je vysvetľovaná zvyšnými premennými toho istého obdobia a o 1 až  $p$  období oneskorenými hodnotami všetkých premenných modelu:

$$\Gamma \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 t + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{B}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t, \quad E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t^T) = \boldsymbol{\Sigma}_u = \text{diag} \quad (1)$$

nazývame štruktúrnym tvarom modelu. Prenásobením (1) maticou  $\Gamma^{-1}$  zľava získame redukovaný tvar modelu, ktorý možno odhadovať metódou najmenších štvorcov:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 t + \boldsymbol{\Pi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Pi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{v}_t, \quad E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T) = \boldsymbol{\Sigma}_v \quad (2)$$

Postupnými úpravami z neho môžeme získať vektorový model s korekčným členom:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 t + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_{p-2} \Delta \mathbf{y}_{t-p+2} + \boldsymbol{\Phi}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{v}_t \quad (3)$$

pričom platí:

$$\boldsymbol{\Omega} = -(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_1 - \boldsymbol{\Pi}_2 - \dots - \boldsymbol{\Pi}_p) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\Phi}_j = -\sum_{i=j+1}^p \boldsymbol{\Pi}_i \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, p-1$$

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0294/18 "Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov" a VEGA 1/0248/17 "Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie".



Všetky prvky  $\mathbf{y}_t$  sú integrované rádu 1, potom sú všetky  $\Delta\mathbf{y}_{t-j}$  stacionárne. Ak sú prvky  $\mathbf{y}_t$  kointegrované, tak  $\Omega\mathbf{y}_{t-1}$  je tiež stacionárne a model (3) môže byť konzistentne odhadnutý.

Dlhodobé vlastnosti systému charakterizujú vlastnosti matice  $\Omega$ .

- Ak sa hodnosť matice  $\Omega$  rovná nula, potom všetky prvky tejto matice sú nulové. V systéme (3) neexistuje korekčný mechanizmus  $\Omega\mathbf{y}_{t-1}$  a ani dlhodobý vzťah. Premenné nie sú kointegrované a odhadovaný VAR model by mal byť formulovaný pomocou prvých diferencií ako model (3) bez člena  $\Omega\mathbf{y}_{t-1}$ .
- Ak sa hodnosť matice  $\Omega$  rovná  $n$  (plná hodnosť), všetky jej riadky sú lineárne nezávislé a vektorový proces  $\mathbf{y}_t$  je stacionárny, lebo všetky premenné musia byť integrované rádu 0. Odhadovaný VAR model by mal byť formulovaný v pôvodných úrovniach premenných, ako (2).
- Ak sa hodnosť matice  $\Omega$  rovná  $k$ , pričom  $0 < k < n$ , potom jej riadky nie sú lineárne nezávislé a maticu  $\Omega$  môžeme rozpísať v tvare  $\Omega = \alpha\beta^T$  ako súčin kointegrujúcej matice  $\beta$ , ktorej stĺpce zodpovedajú vektorom kointegrácie a matice prispôsobenia  $\alpha$ . Ak je  $\mathbf{y}_t \sim I(1)$ , tak  $\beta^T\mathbf{y}_t \sim I(0)$  a hodnosť matice  $\Omega$  je určená počtom kointegrujúcich vektorov, preto sa nazýva hodnosť kointegrácie. Odhadovaný VAR model by mal byť formulovaný ako vektorový model s korekčným členom, teda model (3):

$$\Delta\mathbf{y}_t = \Phi\mathbf{D}_t + \alpha\beta^T\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_1\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-2}\Delta\mathbf{y}_{t-p+2} + \Phi_{p-1}\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{v}_t$$

Problémom identifikácie v tomto type modelov je, že matice  $\alpha$  a  $\beta$  nie sú jedinečné. Existuje viacero súčinov matíc, ktoré spĺňajú kointegrujúci vzťah. Parametre kointegrujúcich vzťahov nie sú bez ďalších podmienok konzistentné, lebo pomocou jednoduchej transformácie:  $\alpha^* = \alpha\mathbf{K}^{-1}$  a  $\beta^{T*} = \mathbf{K}\beta^T$  získame:

$$\Omega = \alpha\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\beta^T = \alpha\beta^T$$

Identifikujúce ohraničenia môžeme zaviesť buď normalizáciou, ako je to obvyklé v softvéri, že prvú časť  $\beta^T$  tvorí zodpovedajúca jednotková matica, teda  $\beta^T = [\mathbf{I}_k \ \beta_{((n-k) \times k)}^T]$ , alebo pomocou ohraničení vyplývajúcich z teórie.

Johansen, ktorý odvodil prezentované závery o hodnosti matice  $\Omega$ , navrhol procedúru na zisťovanie počtu kointegrujúcich vektorov. Tá je založená na tom, že hodnosť matice sa rovná počtu jej nenulových charakteristických koreňov. Na testovanie Johansen navrhol dve štatistiky koeficientov vierohodnosti. Prvou štatistikou je test stopy (lambda trace) a druhou štatistikou je test maxima (lambda max).

## 2 ODHAD PARAMETROV VEC MODELOV

Na klasický odhad parametrov vektorovo autoregresného modelu sa v programovacom systéme R môžu využiť viaceré prídavné balíčky. Zvolíme si balíček *vars*. Po jeho stiahnutí a nainštalovaní ukážeme odhad, ktorý prezentovali Leeper, Sims a Zha (1996). Aby získali dostatočné množstvo údajov, skúmali mesačné údaje od januára 1960 do marca 1996, čo je vyše 400 údajov v každom rade<sup>2</sup>. Z ich analýzy vyberáme VAR model, kde v trojrozmernom systéme je využitý rad logaritmov sezónne očisteného *CPI* označený *LP*, rad logaritmov sezónne očisteného *HNP* označený *LY* a rad logaritmov sezónne očistenej peňažnej zásoby *LM*. Autori štúdie odhadovali model so 6 oneskoreniami.

```
> install.packages("vars")
```

```
# stiahne a nainštaluje vars
```

<sup>2</sup> Údaje autorov nie sú priamo k dispozícii, preto využívame údaje, ktoré uvádza profesor Nicola Viegi na stránke: <http://www.nvegi.net/teaching/master/sims.xls>

```
> library(vars) # aktivácia prídavného balíka vars
> Sims <- read.csv(file = "sims.csv", header = T, sep = ";", dec = ",") # dáta
```

Načítanie údajov z csv súboru uvádza Lukáčik, Lukáčiková a Szomolányi (2016). Pri odhade parametrov autoregresných modelov a aj VAR modelov je výhodné previesť používané údaje na objekt typu *ts*, teda časový rad pomocou funkcie *ts*. V nej sa špecifikuje frekvencia aj rozsah dostupných údajov. Viac sa o tomto type objektu dá nájsť v Lukáčik (2016).

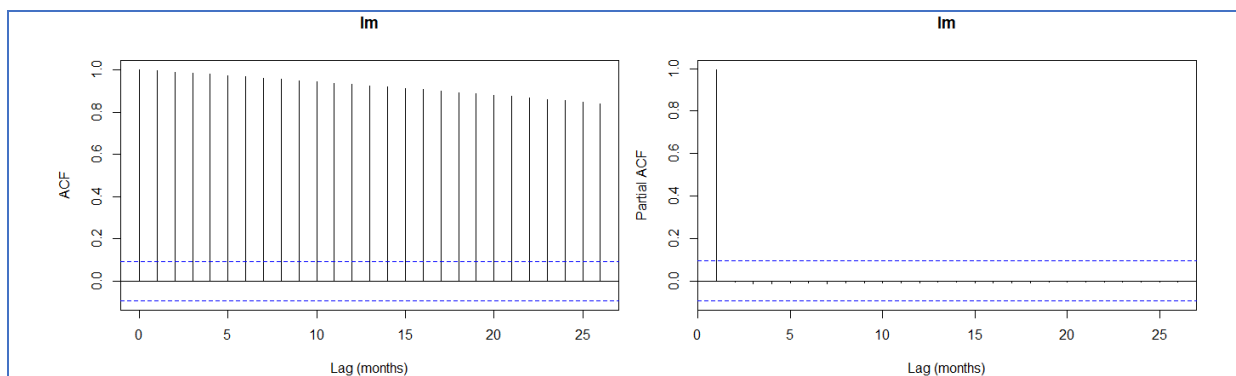
```
> Sims.ts <- ts(Sims, start=c(1959,7), frequency=12) # prevod dát na typ ts
```

Pri každom type údajov ale obzvlášť pri časových radoch je podstatná ich vizualizácia, ktorá môže pomôcť pri mnohých rozhodnutiach.

```
> ts.plot(Sims.ts[, "lp"], Sims.ts[, "lm"], Sims.ts[, "ly"], type="l", lty=c(1,2,3), col=c(1,2,3))
# čiarové grafy použitých časových radov
> legend("topleft", border=NULL, legend=c("lp", "lm", "ly"), lty=c(1,2,3), col=c(1,2,3))
# popisky zobrazených časových radov
```

Zistenie, či je analyzovaný proces stacionárny, je dôležitou nielen pri Boxovej Jenkinsonovej metodológii ale aj pri výbere premenných vo VAR modeli a type modelu (pri kointegrácii namiesto VAR zvolíme VECM). Základnými nástrojmi na identifikáciu stacionarity sú grafy autokorelačnej funkcie ACF a parciálnej autokorelačnej funkcie PACF.

```
> plot(acf(coredata(Sims.ts[, "lm"])), main="ly", xlab="Lag (months)") # acf
> plot(pacf(coredata(Sims.ts[, "lm"])), main="ly", xlab="Lag (months)") # pacf
```



Obrázok 1: Grafy autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie

Rozlíšenie, či sa v procese nachádza stochastický, deterministický trend alebo oba, potrebné pri výbere typu modelu sa obvykle získava testovaním jednotkového koreňa a deterministických členov v testovacej rovnici typu:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + (\gamma_1 - 1)y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + u_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \lambda y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + u_t$$

*Rozšírený Dickeyho-Fullerov test (ADF)* skúma štatistickú významnosť parametra  $\lambda$ , pričom kritické hodnoty  $\tau$ -štatistiky závisia od deterministickej schémy skúmaného modelu (či obsahuje aj trend, iba konštantu alebo je bez oboch). Rozhodnutie o počte autoregresných členov  $p$ , ktoré eliminujú problém autokorelácie, sa vykonáva pomocou informačných kritérií Akaikeho (AIC) alebo Schwarz (BIC). Nižšia hodnota znamená vhodnejší model.

Aby na rozhodovanie o parametri  $\lambda$  nevlplyvali  $\alpha_0$  a  $\alpha_1$ , testujú sa kombinácie združených hypotéz o parametroch pomocou  $\Phi$ -rozdelení, pričom testovaná hodnota  $\Phi$  sa vypočíta rovnako ako  $F$ -štatistika. Rozdelenie  $\Phi_2$  sa používa pri združenej hypotéze  $\alpha_0 = \alpha_1 = \lambda = 0$  a rozdelenie  $\Phi_3$  pri združenej hypotéze  $\alpha_1 = \lambda = 0$  v modeli s trendom a rozdelenie  $\Phi_1$  sa používa pri združenej hypotéze  $\alpha_0 = \lambda = 0$  v modeli s konštantou.

```

> # adf test s testovacou rovnicou obsahujúcou trend
> summary(ur.df(Sims.ts[, "lm"], type="trend", lags=12, selectlags="BIC"))
> # adf test s testovacou rovnicou obsahujúcou konštantu
> summary(ur.df(Sims.ts[, "lm"], type="drift", lags=12, selectlags = "BIC"))
> # adf test s testovacou rovnicou bez trendu a konštanty
> summary(ur.df(Sims.ts[, "lm"], type="none", lags=12, selectlags = "BIC"))
> # prípadná diferenciacia sa vytvorí príkazom      d.lm <- diff(Sims.ts[, "lm"])

```

Výpis testu ADF na obrázku 2 okrem odhadu testovacej rovnice s trendom obsahuje v dolnej časti zvýraznené hodnoty testovacích štatistík a kritické hodnoty rôznych hladín významnosti. Hodnota tau štatistiky  $-2,6936$  nie je menšia ako kritické hodnoty, teda nezamietame jednotkový koreň. Hodnota  $\Phi_2$  štatistiky  $9,6982$  je väčšia ako kritické hodnoty, parametre pri trende a konštante sa súčasne nerovnejú 0 a testovacia rovnica je vhodne zvolená.

```

#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression trend
Call:  lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.0187269 -0.0024087 -0.0000786  0.0023968  0.0145917

Coefficients:  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.883e-02  1.390e-02  2.792  0.00547 **
z.lag.1       -7.984e-03  2.964e-03  -2.694  0.00735 **
tt            4.476e-05  1.618e-05  2.767  0.00591 **
z.diff.lag1   3.892e-01  4.760e-02  8.176 3.50e-15 ***
z.diff.lag2  -4.976e-02  5.091e-02  -0.977  0.32897
z.diff.lag3   2.208e-01  4.989e-02  4.426 1.23e-05 ***
z.diff.lag4  -1.299e-01  5.102e-02  -2.546  0.01125 *
z.diff.lag5   2.014e-01  4.786e-02  4.208 3.15e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.004184 on 420 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2764, Adjusted R-squared:  0.2644
F-statistic: 22.92 on 7 and 420 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -2.6936 9.6982  3.9864

Critical values for test statistics:
    1pct 5pct 10pct
tau3 -3.98 -3.42 -3.13
phi2  6.15  4.71  4.05
phi3  8.34  6.30  5.36

```

Obrázok 2: Výpis ADF testu testovacej rovnice s trendom balíčka vars

Vhodná dĺžka maximálneho oneskorenia použitého v modeli závisí od rozhodnutia tvorcu modelu. Na výber dĺžky maximálneho oneskorenia sa používajú informačné kritériá Akaikeho, Schwarz, Hannana a Quinna alebo chyba prognózy FPE.

```
> VARselect(Sims.ts, lag.max = 12, type = "const") # výber oneskorenia
```

Odhad parametrov si vyžaduje voľbu maximálneho oneskorenia  $p$  a typu deterministickej schémy ("const", "trend", "both" alebo "none"). Zároveň umožňuje zadať exogénne premenné pomocou argumentu *exogen*, čo ale v našom prípade nevyužívame. Vzhľadom na rozsiahlosť výpisu je výhodné zobrazovať ho po jednotlivých rovniciach prípadne zvoliť úspornejší výpis. Zobrazit' môžeme aj graf pre odhad jednej rovnice VAR modelu.

```
> Sims.VAR <- VAR(Sims.ts, p = 6, type = "const") # odhad VAR modelu
```

```
> summary(Sims.VAR, equation = "lm") # výpis odhadu VAR modelu
```

```
> plot(Sims.VAR, names = "lm") # graf vyrovnaných hodnôt a reziduálov
```

Úspornejší výpis odhadnutých parametrov môžeme získať príkazom:

```
> round(rbind(coef(Sims.VAR)[[1]][,1:2],coef(Sims.VAR)[[2]][,1:2]),2)
```

Pri výbere VAR modelu sa používajú diagnostické testy reziduálov. Na testovanie sériovej korelácie odporúča Lütkepohl (2005) portmanteau test, v ktorom sa vypočítava Ljung-Boxova štatistika a na testovanie autokorelácie odporúča test Lagrangeových multiplikátorov. Ďalej testujeme normalitu reziduálov a autoregresne podmienenú heteroskedasticitu alebo môžeme zobrazit' výsledok CUSUM testu stability.

```
> serial.test(Sims.VAR, lags.pt = 12, type = "PT.asymptotic") # portmanteau
```

```
> serial.test(Sims.VAR, lags.bg = 6, type = "BG") # Ljungovej-Boxov test
```

```
> normality.test(Sims.VAR) # Jarqueov-Beraov test normality
```

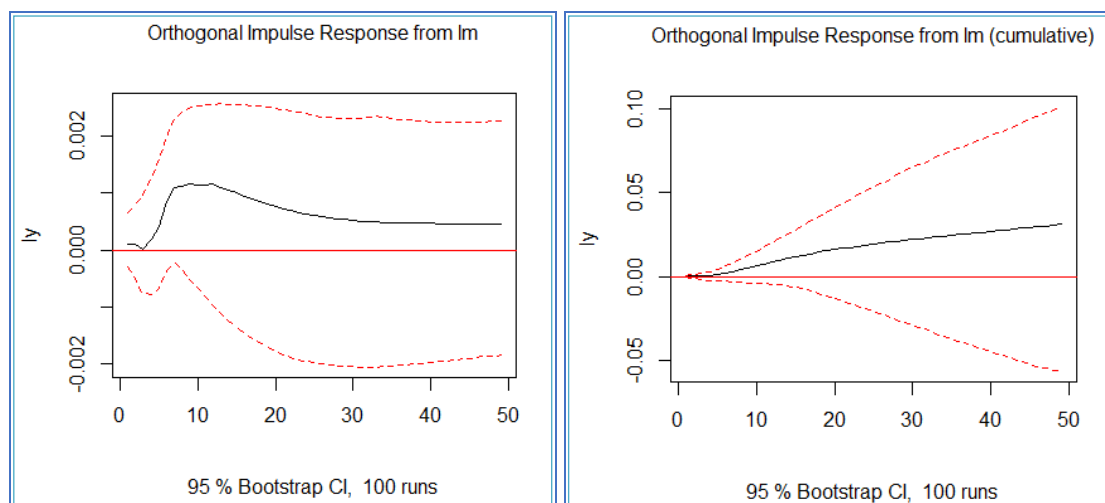
```
> arch.test(Sims.VAR, lags.multi = 4) # testovanie ARCH(4)
```

```
> plot(stability(Sims.VAR)) # graf výsledkov CUSUM testu stability
```

Výsledkom odhadu VAR modelu bývajú najčastejšie funkcie reakcie na impulz, ktoré zobrazujú dynamiku vývoja po zavedení analyzovaného šoku. Reakcia na monetárny impulz aj keď na prvý pohľad vyzerá byť kladná, je nulová, lebo v konfidenčnom intervale sa pre všetky obdobia nachádza 0.

```
> plot(irf(Sims.VAR, impulse="lm", response="ly", n.ahead=48, boot=TRUE))
```

```
> plot(irf(Sims.VAR, impulse="lm", response="ly", n.ahead=48, boot=TRUE,
cumulative = TRUE)) # kumulatívna funkcia reakcie ly na impulz v lm
```



### 3 ZÁVER

Vidíme, že odhad VAR modelov je v programovacom systéme R plne podporovaný a balíček *vars* vytvorený Pfaffom (2008) ponúka širokú variabilitu postupov z tejto oblasti analýz. Okrem nich sú k dispozícii aj ďalšie balíčky zaoberajúce sa VAR modelmi, medzi ktorými môžeme uviesť *MTS*, *mAr*, *VARsignR* alebo *BigVAR*, balíček *svars* rozširujúci možnosti identifikácie, balíčky *urca* a *ecm* na analýzu kointegrácie vo vektorových modeloch, balíček *BMR* na bayesovský odhad vektorovo autoregresných modelov, ktorého možnosťami sa zaoberá Lukáčik, Lukáčiková a Szomolányi (2019) alebo *varpanel* a *pco* na prácu s panelovými VAR modelmi. Každý analytik by mal zvážiť použitie daného balíčka a jeho možností pri svojom výskume.

#### Použitá literatúra

1. JOHANSEN, S., JUSELIUS, K. 1990, Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration – with Applications to the Demand for Money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, roč. 52, č. 2, s. 169-210.
2. LUKÁČIK, M. 2016. *Úvod do ekonometrickej analýzy so systémom R*. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
3. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A., SZOMOLÁNYI, K. 2016. *Úvod do práce so systémom R*. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
4. LUKÁČIK, M. 2019. *Odhad vektorovo autoregresných modelov v R*. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
5. LÜTKEPOHL, H. 2005. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlín: Springer.
6. PFAFF, B. 2008. VAR, SVAR and SVEC Models: Implementation Within R Package vars. *Journal of Statistical Software*, roč. 27, č. 4, s. 1-32.

#### Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: lukacik@euba.sk

# ANALÝZA DAŇOVÉHO BREMENA NA SLOVENSKU A V ČECHÁCH

## THE TAX BURDEN ANALYSIS FOR THE SLOVAK REPUBLIC AND THE CZECH REPUBLIC

*Veronika Mitkova*

### Abstrakt

Článok sa zaoberá simultánnym zvýšením daňových sadzieb o 1% na Slovensku a v Čechách. Analýza je vykonaná prostredníctvom modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy na dátach z roku 2014. Cez výšku priameho daňového bremena a alokačnej efektívnosti vyčíslime hraničnú zmenu blahobytu, na základe ktorej môžeme konštatovať, že efekty v oboch krajinách sú protichodné – na Slovensku generujú celkové náklady blahobytu - 53,4 mil. USD a v Čechách sa naopak, 2,53 mil. USD.

*Kľúčové slová: alokačná efektívnosť, umrtnená strata, daňové bremeno*

### Abstract

The paper deals with simultaneous tax rates increase by 1% in the Slovak Republic and the Czech Republic. The analysis is made by computable general equilibrium model with 2014 dataset. Through direct tax burden and allocative efficiency the marginal welfare burden is quantified, based on which we can conclude that the effects are in both countries antagonistic – in Slovakia generates the total welfare costs 53,4 mil. USD, while in the Czech Republic 2.53 mil. USD.

*Keywords: allocative efficiency, deadweight loss, tax burden*

## 1 MOTIVÁCIA

Cieľom tohto článku je analyzovať výšku daňového bremena pri simultánnej zmene daňových sadzieb na Slovensku a v Čechách. Priame daňové zaťaženie je celková daň, ktorá je platená domácnosťami, firmami, výrobnými faktormi a pod. Spoločnosti nespôsobuje žiadne straty, keďže v celej výške plynie vláde. Nadmerné daňové zaťaženie, tzv. alokačná neefektívnosť alebo umrtnená strata, predstavuje stratu efektívnosti v dôsledku zmeny správania spotrebiteľov (domácností) alebo výrobcov s cieľom znížiť daňové bremeno. Pri zmene daňovej sadzby môžeme vypočítať nielen veľkosť straty efektívnosti, ale aj hraničnú záťaž blahobytu, ktorá závisí od veľkosti pôvodnej daňovej sadzby a zmeny v obchodovanom množstve (1).

$$\text{hraničná zmena blahobytu} = \frac{\text{celkové náklady zmeny blahobytu}}{\text{zmena v príjmoch vlády}} \cdot 100 \quad (1)$$

Štúdia vychádza z článku Ballarda, Shovena a Whalleyho [1], ktorí pomocou modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy analyzovali zmeny v blahobyte v dôsledku daňových zmien.

## 2 MODEL

Pomocou modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy (CGE – Computable General Equilibrium) simulujeme zvýšenie daňovej sadzby uvalenej na primárne výrobné faktory, na domácu a zahraničnú spotrebnú daň, na domáce a zahraničné nákupy domácností a vlády, importné dane (clá) a exportné dotácie.

Na analýzu bude využitý statický model všeobecnej ekonomickej rovnováhy viacerých krajín, vytvorený v Global Trade Analysis Project (GTAP) [2]. Model predpokladá jednu agregovanú domácnosť, jednu centrálnu vládu, zahraničie s endogénnymi vzťahmi k domácej krajine, päť výrobných faktorov: pôda, nekvalifikovaná práca, kvalifikovaná práca, kapitál a prírodné zdroje, a jedenásť produkčných sektorov: Zrná a plodiny (P1), Hospodárske zvieratá a mäsové výrobky (P2), Ťažba (P3), Spracované potraviny (P4), Textil a odevy (P5), Ľahký priemysel (P6), Motorové vozidlá (P7), Ťažký priemysel (P8), Stavebníctvo (P9), Doprava a komunikácia (P10) a Ostatné služby (P11).

Údaje čerpáme z matice spoločenského účtovníctva z roku 2014, čo sú posledné dostupné dáta z GTAP. Všetky stavové veličiny, ak nie je uvedené inak, sú v miliónoch USD.

### 2.1 Elasticity v modeli

Hodnoty elasticít sme rešpektovali tak, ako sú defaultne nastavené tvorcom modelu.

- **ESUBD** Elasticita substitúcie medzi domácimi a importovanými statkami v Armingtonovej štruktúre,
- **ESUBM** Elasticita substitúcie medzi importmi z rôznych regiónov v Armingtonovej agregovanej štruktúre,
- **ESUBVA** Elasticita substitúcie medzi primárnymi faktormi pri výrobe danej komodity,
- **ESUBT** Elasticita substitúcie medzi zloženým (kompozitným) dopytom po medzistatkoch a pridanej hodnote pri výrobe danej komodity. Pre tento model je hodnota nastavená na 0 pre všetky komodity,
- **ESUBDR** Konštantná elasticita substitúcie v Armingtonovej produkčnej funkcii pre domáce/dovezené medzistatky,
- **ESUBMR** Konštantná elasticita substitúcie v Armingtonovej produkčnej funkcii pre dovezené medzistatky,
- **SUBPAR** Substitučný parameter v CDE funkcii minimálnych výdavkov,
- **INCPAR** Expanzný parameter v CDE funkcii minimálnych výdavkov.

Hodnoty elasticít pripájame v Prílohe 1.

### 2.2 Daňové sadzby

V experimente predpokladáme simultánne zvýšenie nasledovných daňových sadzieb vo všetkých sektoroch a všetkých primárnych výrobných faktoroch o 1%:

- *tf* daň z primárnych výrobných faktorov,
- *tfd* dane z domácich nákupov firiem,
- *tfm* daň za dovozy firiem,
- *tgd* vládne dane z domácich nákupov,

- *tgm* vládne dane z dovozu,
- *tms* dovozné dane, clá,
- *to* daň z príjmu,
- *tpd* súkromné domáce spotrebné dane,
- *tpm* súkromné dovozné spotrebné dane,
- *txs* vývozné subvencie, dotácie.

Hodnoty pôvodných daňových sadziieb pripájame v Prílohe 2.

### 3 EXPERIMENT

V opísanom modeli preskúmame experiment, v ktorom budeme simulovať 1% zvýšenie všetkých daňových sadziieb súčasne, a to pre Slovenskú republiku a Českú republiku. V dôsledku takejto zmeny sa príjmy vlády na Slovensku zvýšia z 26.190 na 27.119, čiže zmena v príjmoch vlády je 929. V Čechách sú pôvodné vládne príjmy z daní na úrovni 35.824 a daňové príjmy po zvýšení daňovej sadzby 35.833, teda zmena v príjmoch českej vlády je 9. Analýza blahobytu, vykonaná podľa [3] a[4].

**Tabuľka 1: Dekompozícia ekvivalentnej zmeny**

<b>Efekt blahobytu</b>	<b>SK</b>	<b>CZ</b>
Alokačná efektívnosť	<b>-25,70</b>	<b>2,08</b>
Výrobné faktory	0,00	0,00
Technológia	0,00	0,00
Populácia	0,00	0,00
„Terms of trade“ v tovaroch a službách	-0,93	0,12
„Terms of trade“ v investíciách a úsporách	-26,80	0,33
Preferencie	0,00	0,00
<b>Celkové náklady blahobytu</b>	<b>-53,40</b>	<b>2,53</b>

Alokačná efektívnosť, teda umrtnená strata je 25,7 a celkové náklady blahobytu 53,4 pre Slovensko a 2,08 resp. 2,53 pre Čechy, vid'. Tabuľka 1. Teraz môžeme podľa vzťahu (1) vypočítať hraničnú záťaž blahobytu:

$$\text{marginal welfare burden}_{SR} = \frac{-53,4}{929} \cdot 100 = -5,75 \quad (2)$$

$$\text{marginal welfare burden}_{CZ} = \frac{2,53}{9} \cdot 100 = 28,11 \quad (3)$$

Na Slovensku by zvýšenie daňovej sadzby muselo vygenerovať aspoň 105,75% svojich nákladov, aby sa blahobyt neznížil. V Čechách naopak, zmeny daňových sadziieb môžu generovať až 28,11% zníženie daňových príjmov pri zachovaní predchádzajúcej úrovne blahobytu.

Podrobnejšia analýza umrtnenej straty obsahuje Tabuľka 2, v ktorej vidíme, že najviac sa daňové zmeny na Slovensku dotknú ťažkého priemyslu a spracovaných potravín. Podľa typu dane nastanú najväčšie skreslenia pri súkromných domácich spotrebných daniach. V Čechách sa zmeny v daniach najviac prejavujú vlastníkom kapitálu a následne rovnako ako na Slovensku, v ťažkom priemysle a v odvetví spracovaných potravín. Rovnaký výsledok poskytuje časť b) tejto tabuľky, kde vidno, že najväčšie skreslenia nastanú pri daniach z výrobných faktorov.



**Tabuľka 2: Dekompozícia umŕtvenej straty a) podľa komodít, b) podľa druhu dane**

	a) Komodita		b) Typ dane		
	SK	CZ	SK	CZ	
Pôda	-0,007	0,057	Daň z výr. faktorov	-0,806	1,850
Nekvalifik. prac. sila	-0,042	0,103	Daň z príjmu	0,849	0,003
Kvalifik. prac. sila	-0,430	0,275	Dovozná daň	-1,980	0,089
Kapitál	-0,327	1,410	Súkr. domáce spotr. dane	-24,100	0,192
Prírodné zdroje	0,000	0,000	Vládna daň	1,170	0,001
Zrná a plodiny	-0,095	0,000	Vývozná daň	-0,549	0,000
Hosp. zvieratá a mäsové výrobky	-0,095	0,016	Clo	-0,354	-0,051
Ťažba	-0,768	0,002	<b>Spolu</b>	<b>-25,700</b>	<b>2,080</b>
Spracované potraviny	-6,120	0,063			
Textil a odevy	-1,320	0,000			
Ľahký priemysel	-1,720	0,005			
Motorové vozidlá	-0,462	0,008			
Ťažký priemysel	-7,350	0,089			
Stavebníctvo	-2,730	0,027			
Doprava a komunikácia	-0,897	0,011			
Ostatné služby	-2,490	0,014			
<b>Spolu</b>	<b>-25,700</b>	<b>2,080</b>			

## 4 ZÁVER

Na základe vykonaných simulácií pomocou modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy môžeme konštatovať, že v dôsledku simultánneho zvýšenia daňových sadzieb o 1% na Slovensku a v Čechách, je dopad diametrálne odlišný. Efektívnosť, čiže umŕtvená strata je na Slovensku vo výške 53,40, kým v Čechách táto hodnota vykazuje nie stratu, ale zvýšenie o 2,53. Pre Slovensko to znamená, že takto uvalená daň by musela generovať dodatočné daňové príjmy vo výške 105,75%, aby neklesol blahobyt, a naopak v Čechách, môžu klesnúť až o 28,11%. V ďalšom výskume pomocou analýzy citlivosti overíme, nakoľko robustné sú dosiahnuté výsledky vzhľadom na zmeny vybraných parametrov modelu.

### PodĎakovanie

Výskum bol podporený grantovou schémou Ministerstva školstva, vedy a výskumu Slovenskej republiky grantom VEGA 1/0795/18 „Komplexné prístupy k odhadu parametrov ekonometrickej štruktúry modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy” a grantovou schémou Agentúry pre výskum a vývoj grantom APVV-17-0551 “Vyrovňovanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia”.

### Použitá literatúra

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. BALLARD, C. L., J. B. SHOVEN a J. Whalley, 1985. General Equilibrium Computations of the Marginal Welfare Costs of Taxes in the United States. In: The American Economic Review, 75 (1), 128-138.
2. HERTEL, T,W, a TSIGAS, M,E, 1997, Structure of GTAP, In: Global Trade Analysis: Modeling and Applications, Cambridge: Cambridge University Press,

3. HUFF, K, a Hertel, T,W, 2001, Welfare Changes in the GTAP Model, GTAP Technical Paper No, 5, Center for Global Trade Analysis, Purdue University, West Lafayette, IN,
4. MCDUGALL, R, 2001, A New Regional Household Demand System for GTAP, GTAP Technical Paper No, 20, Center for Global Trade Analysis, Purdue University, West Lafayette, IN,

### Kontaktné údaje

Ing. Veronika Mit'ková, PhD,

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied, Ústav ekonómie

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

Tel: (421 2) 669863

email: [veronika.mitkova@fses.uniba.sk](mailto:veronika.mitkova@fses.uniba.sk)

## PRÍLOHA 1

	SUBPAR		INCPAR		ESUBVAR		ESUBDR		ESUBMR	
	SR	CZ	SR	CZ	SR	CZ	SR	CZ	SR	CZ
1 GrainsCrops	0,972	0,961	0,004	0,008	0,261	0,286	2,38	2,54	4,40	4,94
2 MeatLstk	0,525	0,525	0,581	0,527	0,490	0,503	3,51	3,11	7,44	7,41
3 Extraction	0,372	0,363	1,110	1,070	0,200	0,200	7,08	5,21	16,50	12,8
4 ProcFood	0,587	0,595	0,461	0,407	1,120	1,120	2,07	2,11	4,23	4,37
5 TextWapp	0,531	0,531	0,566	0,511	1,260	1,260	3,72	3,73	7,44	7,44
6 LightMnfc	0,439	0,390	0,879	0,973	1,260	1,260	3,64	3,54	7,32	7,27
7 Auto	0,369	0,353	1,120	1,100	1,260	1,260	2,86	3,15	5,72	6,35
8 HeavyMnfc	0,377	0,366	1,080	1,040	1,260	1,260	3,64	3,46	7,71	7,38
9 Util_Cons	0,368	0,355	1,120	1,100	1,360	1,360	2,13	2,16	5,07	4,64
10 TransComm	0,362	0,350	1,170	1,140	1,570	1,600	1,90	1,90	3,80	3,80
11 OthServices	0,350	0,337	1,220	1,200	1,260	1,260	1,90	1,90	3,80	3,80

	ESUBVA	ESUBD	ESUBM
1 GrainsCrops	0,286	2,54	4,94
2 MeatLstk	0,503	3,11	7,41
3 Extraction	0,200	5,21	12,80
4 ProcFood	1,120	2,11	4,37
5 TextWapp	1,260	3,73	7,44
6 LightMnfc	1,260	3,54	7,27
7 Auto	1,260	3,15	6,35
8 HeavyMnfc	1,260	3,46	7,38
9 Util_Cons	1,360	2,16	4,64
10 TransComm	1,600	1,90	3,80
11 OthServices	1,260	1,90	3,80

## PRÍLOHA 2

<b>rTF(SR)</b>	<b>Land</b>	<b>UnSkLab</b>	<b>SkLab</b>	<b>Capital</b>	<b>NatRes</b>
1 GrainsCrops	-30,8	16,1	18,8	-44,10	0,00
2 MeatLstk	-29,0	25,3	25,6	-18,90	0,00
3 Extraction	0,0	64,4	64,4	0,43	0,43
4 ProcFood	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
5 TextWapp	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
6 LightMnfc	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
7 Auto	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
8 HeavyMnfc	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
9 Util_Cons	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
10 TransComm	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00
11 OthServices	0,0	64,4	64,4	0,43	0,00

<b>rTF(CZ)</b>	<b>Land</b>	<b>UnSkLab</b>	<b>SkLab</b>	<b>Capital</b>	<b>NatRes</b>
1 GrainsCrops	-52,9	9,51	19,2	-55,800	0,000
2 MeatLstk	-97,6	-81,7	-29,1	-95,300	0,000
3 Extraction	0,0	70,5	70,5	0,495	0,495
4 ProcFood	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
5 TextWapp	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
6 LightMnfc	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
7 Auto	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
8 HeavyMnfc	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
9 Util_Cons	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
10 TransComm	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000
11 OthServices	0,0	70,5	70,5	0,495	0,000

<b>rTO</b>	<b>SR</b>	<b>CZ</b>
1 Land	-3,970	-4,390
2 UnSkLab	-14,000	-17,500
3 SkLab	-14,000	-17,500
4 Capital	-3,970	-4,390
5 NatRes	-3,970	-4,390
6 GrainsCrops	0,457	-0,009
7 MeatLstk	0,147	-0,153
8 Extraction	-0,646	1,240
9 ProcFood	1,090	0,308
10 TextWapp	0,080	0,225
11 LightMnfc	-0,155	0,195
12 Auto	-0,054	0,034
13 HeavyMnfc	-0,190	0,112
14 Util_Cons	-0,097	0,377
15 TransComm	0,869	-0,152
16 OthServices	-0,324	-0,051

<b>rTPD</b>	<b>SR</b>	<b>CZ</b>
1 GrainsCrops	3,38	7,23
2 MeatLstk	13,40	19,00
3 Extraction	14,00	39,90
4 ProcFood	50,20	64,40
5 TextWapp	16,50	63,20
6 LightMnfc	16,60	23,80
7 Auto	7,51	16,90
8 HeavyMnfc	63,20	86,20
9 Util_Con	17,30	24,40
10 TransComm	2,07	1,76
11 OthServices	3,78	2,22

	<b>rTXS</b>		<b>rTMS</b>	
	<b>SR-ROW</b>	<b>CZ-ROW</b>	<b>SR-ROW</b>	<b>CZ-ROW</b>
1 GrainsCrops	0,001	0,011	0,081	0,292
2 MeatLstk	-0,001	-0,166	0,090	0,468
3 Extraction	-37,800	-35,900	0,001	0,033
4 ProcFood	0,008	0,010	0,186	0,835
5 TextWapp	-0,246	-0,303	1,210	1,530
6 LightMnfc	-0,208	-0,344	0,278	0,499
7 Auto	-0,038	-0,091	0,164	0,301
8 HeavyMnfc	-0,236	-0,401	0,260	0,289
9 Util_Con	0,000	0,000	0,000	0,000
10 TransComm	0,000	0,000	0,000	0,000
11 OthServices	0,000	0,000	0,000	0,000

# PLATFORMA PRE OPTIMALIZÁCIU PORTFÓLIA<sup>1</sup>

## PORTFOLIO OPTIMIZATION PLATFORM

*Vladimír Mlynarovič*

### Abstrakt

Článok prezentuje platformu pre optimalizáciu portfólia vyvinutú v excelovskom prostredí, ktorá aproximuje množinu efektívnych portfólií v priestore výnosov a rizika a generuje benchmarkové portfóliové stratégie pre vybraný podielový fond s parametrami, ktoré sú špecifikované používateľom (investorom). Systém sa skladá z excelovských používateľských funkcií a VBA procedúr a implicitne využíva excelovský solver. Operuje s rôznymi mierami rizika, ako rozptyl (štandardná odchýlka), dolná semiabsolútna odchýlka, podmienená hodnota v riziku a nedosiahnutie stanoveného cieľového výnosu.

*Kľúčové slová:* modely výberu portfólia, priestor výnosov a rizika, priestor ziskovosti a bezpečnosti, benchmarkové portfóliové stratégie

### Abstract

The paper presents portfolio optimization platform developed in Excel environment that models set of efficient portfolios in mean – risk spaces and generates benchmark portfolio strategies for a selected mutual fund with parameters that were being specified by user (investor). The system consists of excel user functions and VBA procedures and implicitly uses Excel solver. It operates with different risk measures as variance (standard deviation), lower semi absolute deviation, conditional value at risk and below target returns.

*Keywords:* portfolio selection models, mean – risk space, profitability – safety space, benchmark portfolio strategies

## 1 ÚVOD

Alokácia aktív je kľúčovým rozhodnutím z hľadiska dosiahnutia investičných zámerov a jej základnou úlohou je rozhodnúť o tom, ktoré triedy aktív zahrnúť do investičného portfólia a v akých proporciách. Zatiaľ čo aktívne posuny váh aktív a taktiež výber konkrétnych cenných papierov v rámci každej triedy aktív ovplyvňujú výnosy portfólia, celková výkonnosť je riadená, resp. určovaná alokáciou aktív portfólia, t.j. alokáciou portfólia v rámci rôznych tried aktív. Je všeobecne známe a akceptované, že alokácia aktív má vyšší vplyv na agregované výnosy portfólia ako akékoľvek iné individuálne rozhodnutie. Skúsenosti investorov ukazujú, že globálna alokácia aktív, alebo alokácia do rôznych tried medzinárodných aktív je zdrojom najväčších rozdielov výkonností jednotlivých portfólií.

Globálne trhy aktív ponúkajú významné príležitosti na zlepšenie investičných výnosov. Predpokladom pre využitie výhod investovania na globálnych trhoch je vyvinutie

---

<sup>1</sup> This paper research was supported by the Slovak Research and Development Agency, project No. APVV-17-0551: "Vyrovňavanie nerovnováh: prehodnotenie pohľadu na makroekonomické nerovnováhy v európskom rámci riadenia" and by the Slovak Ministry of Education, Science and Sport, project No. VEGA 1/0340/16: "Modelovanie efektívnosti financovania a kooperácie sektorov a regiónov slovenskej ekonomiky."

konzistentného a rigorózneho prístupu k alokácii aktív pozostávajúceho z nasledujúcich krokov: Výber a zdôvodnenie toho, ktoré triedy aktív sa budú uvažovať v úlohe o alokácii aktív. Menová kompozícia mixu aktív by mala byť zohľadnená buď prostredníctvom menové hedgingu, alebo uvažovaním menovej zložky ako separátnej triedy aktív pri alokácii aktív. Odhad/prognózovanie parametrov rizika a výnosu vybraných tried aktív, ktoré sú používané v optimalizačných modelov by mali byť konštruované s využívaním kvantitatívnych alebo kvalitatívnych modelov, alebo kombinácie oboch. Konštrukcia optimálnych portfólií pri uvedených hodnotách parametrov prostredníctvom vybraných typov optimalizačného modelu. Potvrdzovanie kandidátov na optimálne portfólia prostredníctvom testovania *vzorkovej* výkonnosti, historickej simulácie a *what if* analýzy. Prijatie rozhodnutia o strategickej alokácii aktív je predpokladom pre riešenie úloh týkajúcich sa *aktívnej alokácie aktív*, alebo takých príležitostných posunov vo váhach aktív, ktoré využívajú výhody priaznivých trhov a výhodných ekonomických podmienok pre konkrétne podmnožiny danej množiny aktív. Historické a empirické údaje ukazujú, že *taktická alokácia aktív* ponúknuť príležitosti na merateľné zvýšenie výnosov portfólia.

## 2 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ

V tejto časti sa sumarizujú aplikované teoretické východiská k optimalizácii portfólia v priestore základných tried aktív, a to aktív peňažného trhu, trhu dlhopisov a trhu akcií, a jeho efektívna aplikácia založená na konštrukcii hranice efektívnych portfólií a výbere najlepšieho kompromisného portfólia podľa pravidla, ktoré umožňuje špecifikovať preferencie v závislosti od vzťahu k riziku, ktorý je odvodený od typu podielového fondu (konzervatívny, vyvážený, rastový), pre ktorý sa konštruuje strategická alokácia. Výsledná strategická alokácia teda definuje pre konkrétny fond investičnú stratégiu s vlastným investičným štýlom, benchmark, ktorá je východiskom pre konštrukciu a hodnotenie taktických a operatívnych stratégií jednotlivých podielových fondov.

Aproximácia hranice efektívnych portfólií z technického hľadiska v&žaduje riešiť série úloh kvadratického programovania, ktoré sú známe ako *Markowitzove* úlohy výberu portfólia (Markowitz, 1952). Historická diskusia ukázala, že efektívna hranica v priestore očakávaného výnosu a rizika, meraného rozptylom, je vhodnou a elegantnou technikou na získanie opisu efektívnych portfólií v modernej teórii portfólia. Prezentovaný prístup je teda založený na riešení úloh kvadratického programovania, ktoré hľadajú také portfólia, pre ktoré je požadovaný očakávaný výnos portfólia dosahovaný s čo možno najnižším rizikom, ktoré je merané rozptylom výnosov portfólia.

Aproximovaná hranica efektívnych portfólií (Jackson-Staunton, 2001; Mlynarovič, 2001). obsahuje vo všeobecnosti nekonečný počet portfólií a výber jediného z nich, ako benchmarku, resp. strategického portfólia, musí odrážať preferencie investora, ktoré sú dodatočnou informáciou pre rozhodovanie v priestore už nájdených efektívnych portfólií. Jednou z efektívnych možností je transformácia efektívnej hranice, skonštruovanej v priestore očakávaný výnos – rozptyl do priestoru „*bezpečnosť – výnosnosť*“ a následný výber takého portfólia z tejto hranice, ktoré má určitú požadovanú vlastnosť, napríklad, jeho koeficient ziskovosti sa rovná koeficientu bezpečnosti. Úloha výberu portfólia je v tejto časti konštrukcie strategického portfólia skúmaná ako úloha viackriteriálnej optimalizácie a na nájdenie portfólia so špeciálnou vlastnosťou sú využívané techniky kompromisného programovania. s efektívnou hranicou v priestore ziskovosť – bezpečnosť. Toto portfólio predstavuje takzvané *dobré vybilancované portfólio*. Prístup možno modifikovať tým spôsobom, že investor namiesto anti –ideálneho portfólia použije ako referenčné portfólio portfólio so špecifikovaným pomerom medzi koeficientom bezpečnosti a ziskovosti, ktorý

možno interpretovať ako vyjadrenie jeho vzťahu k riziku. Tento pomer by sa mal líšiť pre jednotlivé typy dôchodkových fondov s tým, že najvyššiu hodnotu by mal mať pre konzervatívny fond. Výsledné portfólio je potom nájdené ako efektívne portfólio sa takou vlastnosťou, že jeho vzdialenosť od ideálneho portfólia v smere k referenčnému portfóliu je minimálna.

Model výberu portfólia v priestore stredná hodnota - rozptyl je všeobecne široko používaný v praxi manažmentu fondov. Je používaný na alokáciu aktív na vymedzenie základnej politiky manažmentu fondu a tiež na manažment individuálnych aktív, ktoré tvoria portfólio, na riadenie rizika a na meranie výkonnosti. Tiež je využívaný na determinovanie proporcií fondu alokovaných do pasívneho (indexového) manažmentu a tiež na rôzne iné typy aktívneho manažmentu. Avšak, v posledných rokoch možno pozorovať radikálne zmeny v investičnom prostredí. Existujú rôzne finančné inštrumenty s nesymetrickým rozdelením výnosov, také ako opcie a obligácie. Okrem toho, nedávne štatistické štúdie ukazujú, že nie všetky obyčajne akcie majú normálne rozdelenie výnosov. Dôsledkom je skutočnosť, že sa nemožno absolútne spoľahnúť na klasický model výberu portfólia.

V minulosti bolo navrhnutých niekoľko rôznych mier rizika (Konno - Waki - Yuuki, 2002) odlišných od rozptylu, medzi ktoré patrí *semi-absolútna odchýlka* a *riziko nesplnenia cieľa*. Existujú tiež modely, ktoré explicitne skúmajú *šikmosť* rozdelenia výnosov. Medzi relatívne nové miery *dolného rizika* patrí aj *Value at Risk*, ktorá je veľmi široko využívaná na meranie trhového rizika. Táto miera rizika je veľmi populárna v konzervatívnej praxi, pretože pravdepodobnosť veľkej straty oveľa väčšej ako, povedzme,  $VaR_{0,99}$  je veľmi nízka, ak majú výnosy portfólia normálne rozdelenie. Avšak pri súčasnom stave metodológie nelineárneho programovania nie je možné nájsť portfólio s najmenšou *VaR*. Preto sa stále viac atraktívnu mierou rizika stáva *CVaR* (*podmienená hodnota v riziku* alebo *očakávaná strata*), a to vzhľadom na jej teoretické a výpočtové vlastnosti. Je totiž možné nájsť portfólio maximalizujúce *CVaR*, ktoré je dobrou aproximáciou portfólia združeného s minimálnou *VaR*. Na základe týchto skutočností sa koncepcia konštrukcie strategických portfólií postupne systémovo dopĺňa tak, aby pri optimalizácii strategických portfólií bolo možné aplikovať modely založené na nasledujúcich mierach dolného parciálneho rizika, a to *dolná semi – variancia* (*dolná semi – štandardná odchýlka*), *dolná semi – absolútna odchýlka*, *riziko nesplnenia cieľa* a *podmienená hodnota v riziku* (*CVaR*).

### 3 ZÁKLADNÉ MOŽNOSTI PLATFORMY

Platforma umožňuje konštruovať a analyzovať varianty investičnej stratégie jednotlivých typov podielových fondov a skladá sa z týchto blokov:

1. Výber fondu a definícia parametrov jeho investičného štýlu
2. Aproximácia hranice efektívnych portfólií v priestore „stredná hodnota – riziko“ a jej transformácia do priestoru „bezpečnosť – výnosnosť“
3. Prezentácia typových variantov investičnej stratégie fondu a ich vybraných charakteristík.
4. Analýzy citlivosti investičnej stratégie na zmeny v očakávaniach.
5. Grafická prezentácia vypočítaných efektívnych hraníc množiny investičných príležitostí a typových variantov investičnej stratégie fondu.
6. Prezentácia kovariačno – variačnej matice a korelačnej matice.
7. Prezentácia úplných historických štatistických charakteristík aktív a typových variantov investičnej stratégie fondu.
8. Prepočet historických výnosov aktív.

## 9. Reporty štyroch typových variantov investičnej stratégie.

Fond a jeho parametre definuje používateľ a k dispozícii má nasledujúce parametre. Možnosť „Fund“ obsahuje názvy konzervatívneho, vybilancovaného a rastového podielového fondu. Dvojica stĺpcov „Profitability“ a „Safety“ umožňuje definovať relatívnu významnosť ziskovosti a bezpečnosti pre typovú investičnú stratégiu nazvanú „P-S Structure“, pričom systém umožní vložiť kladné číslo menšie ako 1. „Currency“ je mena pre jednotlivé triedy aktív, v ktorej sa prepočítavajú výnosy jednotlivých aktív. V rámci bloku parametrov „Returns“ používateľ definuje:

- a) typ očakávaných výnosov pre jednotlivé aktíva (historické výnosy za celé obdobie, historické výnosy za posledné obdobie, expertné hodnoty). Typ výnosov „Scenario“ opíšeme v rámci analýzy citlivosti realizovanej v liste „WhatIf“;
- b) typ základného obdobia pre optimalizáciu (mesiac, štvrťrok, polrok, rok);
- c) hodnotu tzv. decay faktora, ktorá pre jednotlivé obdobia definuje generovanie exponenciálnych váh pre vyjadrenie rôznej významnosti jednotlivých historických údajov
- d) typ výnosu (relatívny, logaritmický).

Parameter „Volatility“ definuje meranie rizika prostredníctvom variačno – kovariačnej matice s rovnakými váhami jednotlivých historických období (Standard), resp. s relatívne vyššími váhami časovo *bližších* období (Exponential), pričom v prípade exponenciálnych váh je použitá stanovená hodnota *decay* faktora. Parameter „R. F. Asset“ indikuje možnosť rozhodnúť, či sa pri optimalizácii portfólia má uvažovať s existenciou bezrizikového aktíva alebo či sa optimalizácia portfólia uskutoční len v priestore rizikových aktív. Parameter „Risk“ definuje kritérium pre minimalizáciu rizika pri aproximácii hranice efektívnych portfólií a výpočtoch typových portfólií, pričom *StDeviation* indikuje aplikáciu modelu v priestore *Mean – Variance* (Markowitzov model výberu portfólia), *CondVaR* indikuje aplikáciu modelu v priestore *Mean – Conditional Value at Risk*, *Lower\_SAD* indikuje aplikáciu modelu v priestore *Mean – Lower semi Absolute Deviation* a *Below\_Target* indikuje aplikáciu modelu v priestore *Mean – Below Target Return* so stupňom odchylky rovným 1. Parameter „Run“ Umožňuje definovať typ optimalizačného výpočtu. Pri variante *Short* optimalizačná procedúra vypočíta len štyri typové portfólia, zatiaľ čo pri variante *Long* je pri optimalizácii aproximovaná efektívna hranica v priestore *Mean – Risk*, resp. v priestore *Profitability – Safety*. Používateľ okrem toho definuje predpokladanú bezrizikovú mieru, p.a., uvažovanú uroveň spoľahlivosti pre výpočet ukazovateľov *Value at Risk* a cieľovú hodnotu očakávaného výnosu portfólia, p.a. pre riziko typu *Below\_Target*.

Používateľ má možnosť definovať rozsah historických období zohľadnených pri optimalizácii prostredníctvom špecifikácie dátumu prvého a posledného zohľadňovaného. V rámci definície parametrov investičného štýlu sa ďalej špecifikujú:

- a) limity pre jednotlivé triedy aktív, a to pre peňažný trh, dlhopisy, peňažný trh spolu s dlhopismi, podnikové dlhopisy a akcie, vo forme dolných a horných hraníc váh týchto aktív v portfóliu vybraného fondu, ako to ilustruje nasledujúci obrázok:
- b) limity, t.j. dolné a horné hranice váh jednotlivých aktív, uvažovaných v rámci tried aktív pre jednotlivé fondy v oblasti „B26:AF35“.

Optimalizácia investičnej stratégie je založená na aproximácii hranice efektívnych portfólií v priestore očakávaný výnos a riziko alebo na výpočte štyroch variantov investičnej stratégie, efektívnych portfólií, s nasledujúcimi vlastnosťami:

- a) portfólio s globálne minimálnym rizikom,
- b) portfólio s maximálnym prípustným očakávaným výnosom,



- c) portfólio s rovnakou hodnotou indexu ziskovosti a indexu bezpečnosti,
- d) portfólio so špecifikovaným vzťahom indexu ziskovosti a indexu bezpečnosti.

Pre efektívnu realizáciu procesu riešenia zodpovedajúcich optimalizačných úloh v excelovskom prostredí boli vytvorené špeciálne vytvorené *VBA procedúry*, ktoré automatizujú formuláciu a riešenie postupnosti úloh solverom a poskytujú aproximáciu efektívnej hranice.

## 4 ZÁVER

Diskrétna aproximácia množiny efektívnych portfólií vo vybranom dvojkriteriálnom priestore predstavuje efektívny nástroj na prezentáciu rozumného počtu portfólií ako racionálnych kandidátov pre konečný výber investora. V súčasnosti možno evidovať zvýšený záujem akademickej obce analýzy efektívnych hraníc v troj a viackriteriálnom priestore (napríklad Steurer et al., 2005, 2013). Určitou nevýhodou môže byť v takýchto prípadoch skutočnosť, že počet vygenerovaných kritérií potrebných na dostatočnú reprezentáciu efektívnej hranice radovo rastie, čo je určitá komplikácia pre rozhodovanie investora. Jenou z možností ako tento problém obísť predstavuje podľa nášho názoru doplniť aproximáciu efektívnej hranice z dvojrozmerného priestoru o sústavu ďalších dopočítaných ukazovateľov a následne aplikovať metodiku komplexného vyhodnocovania, napríklad metódy triedy PROMETHEE.

### Použitá literatúra

1. MARKOWITZ, H. 1952. Portfolio Selection. *J. Finance* 7, 77 - 91
2. MLYNAROVÍČ, V. 2001. Finančné investovanie. Bratislava, IURA Edition.
3. KONNO, H. - WAKI, H.-A. YUUKI. 2002. Portfolio Optimization under Lower Partial Risk Measures. *Asia/Pacific Financial Markets* 9, 127-140
4. JACKSON, M. – M. STAUNTON. 2001. Advanced Modeling in Finance using Excel and VBA, John Wiley and Sons.
5. STEUER, R., Y. QI, and M. HIRSBERGER. 2005. Multiple objectives in portfolio selection. *Journal of Financial Decision Making* 1(1).
6. STEUER, R., M. WIMMER, and M. HIRSBERGER. 2013. Overviewing the transition of Markowitz bi-criterion portfolio selection to tri-criterion portfolio selection. *Journal of Business Economics* 83(1), 61- 85.

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4 1/b, 821 05 Bratislava

Tel: +421 2 20 66 98 60

email: vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

# FINANČNÉ DÁTA A ICH GRAFICKÉ ZOBRAZENIE V JAZYKU R

## FINANCIAL DATA AND THEIR GRAPHICAL REPRESENTATION IN R LANGUAGE

*Juraj Pekár, Mário Pčolár*

### **Abstrakt**

V súčasnosti existuje množstvo softvérových nástrojov použiteľných na spracovanie a následnú analýzu finančných dát. Jedným z týchto nástrojov je jazyk R, ktorý poskytuje priamy prístup k finančným dátam. Okrem jednoduchého prístupu k dátam obsahuje nástroje použiteľné pri ich analýze. V príspevku sa autori venujú možnostiam jazyka R pri použití importovaných dát z lokálneho zdroja, ako aj z internetových zdrojov. V ďalšej časti poukazujú na možnosti grafického zobrazenia finančných údajov v jazyku R.

*KLúčové slová: jazyk R, finančné dáta, grafické zobrazenie*

### **Abstract**

At present, there are a number of software tools available for processing and subsequent analysis of financial data. One of these tools is the R language, which provides direct access to financial data. In addition to easy access to data, it contains tools that can be used to analyze them. The paper deals with the possibilities of the R language when using imported data from a local source as well as from Internet sources. In the next section they point out the possibilities of graphical representation of financial data in R language.

*Keywords: R language, financial data, graphical representation*

## **1 Úvod**

Investori pri rozhodovaní o alokácii finančných prostriedkov využívajú analytické nástroje, pričom efektívnosť dosiahnutých výsledkov je podmienená výberom vhodného softvérového zabezpečenia. Jazyk R (Würtz a kol. 2010) poskytuje množstvo balíkov určených na finančné analýzy a je jedným z často využívaných softvérových nástrojov. V prvej časti príspevku sa autori venujú rôznym spôsobom importovania finančných dát do jazyka R, následne uvádzajú spôsob výpočtu základných štatistík finančných dát. V závere príspevku poukazujú na rôzne možnosti grafického zobrazenia uvedených dát.

## **2 Importovanie finančných dát do prostredia R**

Jedným z prvých krokov pri práci s finančnými dátami je ich importovanie do samotného softvéru, kde s nimi môžeme následne pracovať. Naskytuje sa nám viacero možností ako importovať dáta do prostredia R. Môžeme ich rozdeliť na 3 základné okruhy a to, kopírovanie, načítanie súboru, v ktorom máme dáta uložené a stiahnutie dát do prostredia R

priamo z internetu. Cieľom tejto časti je poukázať na spôsoby importovania dát do prostredia R.

### *Kopírovanie dát*

Jedná sa o najprimitívnejší spôsob ako importovať dáta do prostredia R. Užívateľ skopíruje dáta zo súboru prípadne z internetu a nakopíruje ich do konzoly v prostredí R. Následne použitím funkcií *scan()* prípadne *read.table()*, s tým že argument *file="clipboard"*, môžeme načítať nakopírované dáta v podobe vektora poprípade tabuľky. V dôsledku skutočnosti, že tabuľka je komplexnejší objekt, tak sa v prípade funkcie *read.table()* vyžaduje nastavenie viacerých argumentov ako napríklad, argument *sep* ktorým označíme akým spôsobom sú oddeľované jednotlivé hodnoty v našej tabuľke, prípadne argument *dec* ktorý popisuje akým formátom sú uvádzané desatinné čísla.

### *Načítanie súboru s dátami zo zariadenia*

V prípade načítavania dát priamo zo súboru, môžeme načítať dáta zo súboru rôzneho formátu, ako napríklad .csv, .xls/.xlsx, .RData či .txt. V prípade načítavania dát zo súboru je potrebné uviesť presnú adresu umiestnenia súboru v zariadení, poprípade mať uložená dáta v priečinku, ktorý je v RStudio prednastavený ako hlavný priečinok. V takomto prípade sa stačí pri načítavani súboru odvolať na presný názov súboru spolu s koncovkou popisujúcou formát súboru. Prednastavený priečinok v prostredí R môžeme zistiť zadaním príkazu *print(getwd())*, výsledkom príkazu je presná adresa prednastaveného priečinka. Ilustračný kód:

```
library(readxl)
# Súbor s dátami sa nachádza v hlavnom priečinku
print(getwd())
Dáta<- read_excel("Data.xlsx")
# Uvedená presná cesta umiestnenia súboru
Dáta2<- read.csv("C:/Users/mario/Desktop/GOOG.csv")
```

Pri importovaní súboru sa použije funkcia v závislosti od skutočnosti aký formát ma zdrojový súbor a v akom formáte chceme dáta načítať. Najbežnejšie sa môžeme stretnúť s dátami v excelovskom súbore typu csv/.xls/.xlsx. V prípade importovania takéhoto typu dát sa použije funkcia *read.csv()*, pri zdrojovom súbore formátu csv., v prípade formátu xls. a xlsx. je potrebné použiť funkciu z balíčka 'readxl', konkrétne sa jedná o funkciu *read\_excel()*. Okrem uvedených formátov súborov sa v prostredí R dajú načítať aj súbory z iných prostredí ako napríklad SQL, Matlab, Eviews a ďalšie. Pri importovaní dát z takýchto súborov je väčšinou potrebné mať špecifický balíček ktorý poskytuje takúto funkcionality.

### *Stiahnutie dát priamo z internetu*

Zo zameraním na finančné dáta je jedným z najflexibilnejších balíčkov, ktoré umožňujú sťahovať finančné dáta z viacerých zdrojov, balíček 'quantmod' (Ryan a kol. 2019). Balíček umožňuje prostredníctvom funkcie *getSymbols()* sťahovať dáta z viacerých zdrojov, ktoré sú uvedené v tabuľke č.1. Okrem uvedeného balíčka, existujú ďalšie balíčky ktoré umožňujú import finančných dát z externých zdrojov do prostredia R ako napríklad 'Quandl', 'TFX', 'pwt' a ďalšie.

Importovanie dát prostredníctvom balíčka 'quantmod' prebieha prostredníctvom funkcie *getSymbols()*. Vo funkcii sa určí zdroj dát napríklad *finance.yahoo*. Uvedie sa skratka pod ktorou sú vedené dáta na konkrétnom zdroji, napríklad dáta o akciách Fordu nájdeme na stránke *finance.yahoo* pod skratkou „F“. Každý zdroj používa vlastné označenia skratiek. Následne určíme formát dát ako *periodicity*, *interval* a ďalšie. Výsledkom funkcie sú dáta vo formáte zoo. Ilustračný kód pre funkcie *getSymbols()*:

```
Ford <- getSymbols.yahoo("F",periodicity="weekly",from="2015-12-31",to="2019-10-10",auto.assign=F)
```

Tabuľka č.1: Zdroje finančných dát dostupné prostredníctvom funkcie `getSymbols()`

Zdroj	Funkcia	Typ dát	Poznámka
finance.yahoo	<code>getSymbols.yahoo</code> <code>getSymbols.yahooj</code> (japonská verzia <code>finance.yahoo</code> )	dáta z medzinárodných trhov, akcie, trhové indexy, menové kurzy, cryptomeny komodity, Quotes	
FRED	<code>getSymbols.FRED</code>	viac ako 590 000 amerických a medzinárodných záznamov, finančných časové rady a grafov	
Oanda	<code>getSymbols.oanda</code>	dáta najmä o menových kurzoch a komoditách	
Tiingo	<code>getSymbols.tiingo</code>	dáta z medzinárodných trhov, akcie, trhové indexy, podielové fondy	Potrebná registrácie pre získanie prístupového kľúča
Alpha Vantage	<code>getSymbols.av</code>	dáta v reálnom čase a taktiež historické dáta z akciových trhov, menových kurzov, cryptomeny	Potrebná registrácie pre získanie prístupového kľúča

Zdroj: Vlastné spracovanie, 'quantmod'

### 3 Štatistiky

Pri práci s finančnými dátami, ich analýze, a porovnávaní finančných dát z rôznych zdrojov sa kvantifikujú rôzne štatistiky, ktoré poskytujú informácie o rôznych aspektoch skúmaných veličín. V prostredí RStudio je taktiež dostupné veľké množstvo funkcií ktoré sú určené práve na kvantifikáciu týchto štatistík. Ešte väčšie množstvo takýchto funkcií s rôznymi modifikáciami je dostupné prostredníctvom rôznych balíčkov. V tejto časti budeme prezentovať funkcie určené na kvantifikovanie najfrekvencovanejšie využívaných štatistík pri analýze finančných dát.

#### Priemer

Funkciu slúžiacu na výpočet aritmetického prípadne tzv. výberového zastrihnutého priemeru<sup>1</sup> môžeme nájsť v prostredí RStudio pod označením `mean()`. Na výpočet geometrického priemeru môžeme zase využiť funkciu `mean.geometric()` obsiahnutú v balíčku 'PerformanceAnalytics' (Peterson a kol. 2019).

#### Rozptyl a štandardná odchýlka

Na výpočet rozptylu v prostredí RStudio môžeme použiť funkciu `var()`, daná funkcia môže byť taktiež využitá na výpočet variačno-kovariačnej matice v prípade že vstupnými dátami je matica prípadne tabuľka hodnôt. Štandardnú odchýlku môžeme vypočítať odmocnením hodnoty získanej funkciou `var()`, prípadne využitím funkcií z rôznych balíčkov. Napríklad balíček 'PerformanceAnalytics', poskytuje funkciu `StdDev()`. V oboch funkciách sú výsledkom štatistiky výberového súboru, čo znamená že v menovateli je pri výpočte použitý vzťah  $(n - 1)$ .

<sup>1</sup> priemer v ktorom sa neberie do úvahy určité percento najmenších a najväčších hodnôt výberového súboru

### *Korelačný koeficient*

V prostredí RStudio sa funkcia na výpočet korelačného koeficientu nachádza pod označením *cor()*. Taktiež danú funkciu ako v prípade funkcie *var()* možno využiť aj na výpočet korelačnej matice.

### *Modus a medián*

Pri výpočte mediánu môžeme využiť funkciu *median()*, na druhej strane funkcia na výpočet modusu je jedná z mála ktorá nie je v prostredí RStudio priamo predefinovaná. Užívateľ si môže danú funkciu zadeinovať sám prípadne nájsť na internetových fórach venujúcich sa problematike programovania v R, kód ktorý už niekto naprogramoval.

### *Minimum, maximum, rozsah dát*

Funkciu pre nájdenie minimálnej hodnoty z vektoru hodnôt môžeme nájsť pod označením *min()*, v prípade nájdenia maximálnej hodnoty môžeme použiť funkciu *max()*. Prostredníctvom funkcie *range()* môžeme vypočítať rozsah hodnôt, teda interval hodnôt od minimálnej hodnoty po maximálnu.

### *Počet pozorovaní*

Na určenie počtu hodnôt vo vektore dát môžeme použiť funkciu *length()*.

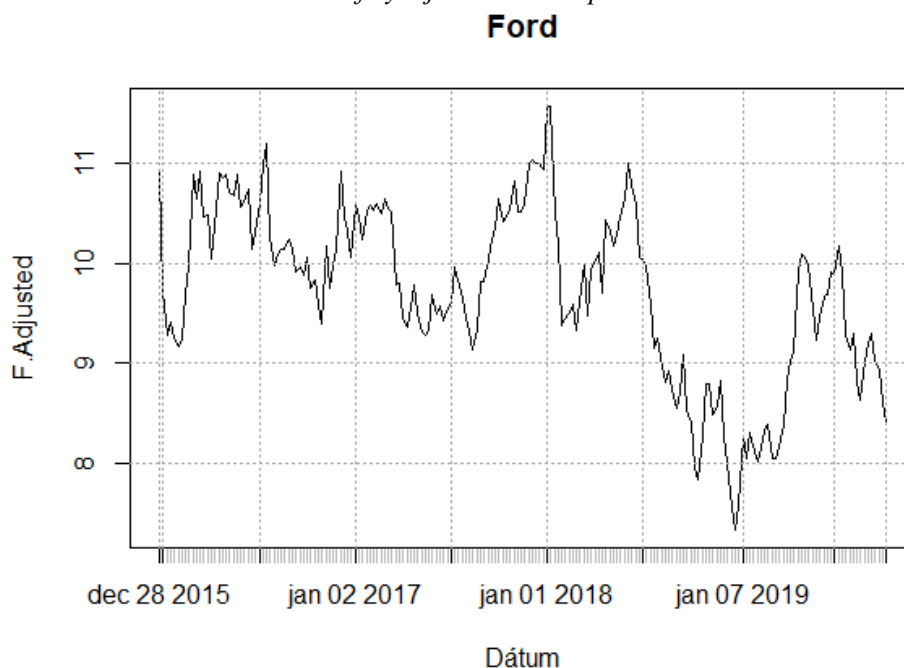
### *Kvantil*

Na výpočet kvantilu, teda miery polohy rozdelenie pravdepodobností náhodných čísel, môžeme požiť funkciu *quantile()*.

## **4 Grafické zobrazenie**

Významný nástroj pre analytika sú grafy, a práve v tejto oblasti prostredie R vyniká v porovnaní si inými štatistickými softvérmi. V rámci tejto kapitoly si stručne predstavíme funkcie a balíčky ktoré poskytujú pomerne jednoduchý prístup ku komplexným grafickým nástrojom pre analýzu finančných dát.

*Obr. č.1: Graf vývoja cien akcií spoločnosti Ford*



*Zdroj: Vlastné spracovanie, RStudio*

Už v základnom prostredí RStudio, sa nachádza viacero funkcií ktorú umožňujú grafické zobrazenie dát, a to či už v podobe bodového grafu, čiarového grafe, histogramu a ďalších základných typov grafov. Základnou funkciou pre grafické zobrazenie je funkcia *plot()* (Obr. č.1). Funkcia je konštruovaná tak, že dokáže rozoznávať formát dátového vstupu. Nakoľko pri finančných dátach sa jedná prevažne o časové rady, pri vložený vstupných dát do funkcie vo forme časových radov je prednastaveným výstupom funkcie čiarový graf.

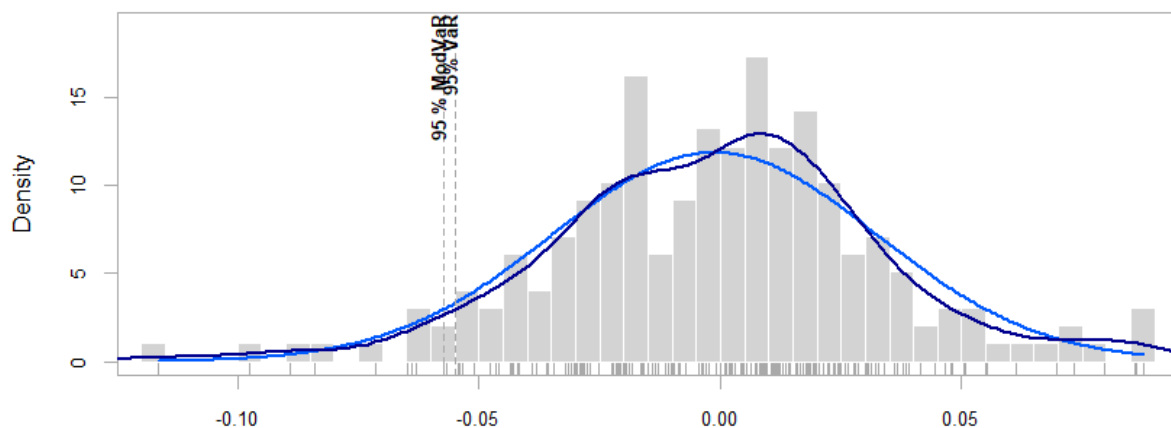
Prostredníctvom argumentu *type* je možné vybrať iný ako prednastavený formát grafu ako napríklad bodový graf („p“), kombinovaný bodový a čiarový („o“) a ďalšie. Ďalšími užitočnými grafickými funkciami, ktoré sú naprogramované v základnom prostredí RStudio sú funkcia *hist()* a funkcia *boxplot()*, v prvom prípade pre vykreslenie histogramu v druhom prípade pre vykreslenie krabicového grafu.

Pre zobrazenie komplexnejších grafov je možné využiť funkcie z rozširujúcich balíčkov. Jedným z balíčkov ktorý poskytuje komplexnejšie grafy so zameraním na finančné dáta je balíček ‘PerformanceAnalytics’. Balíček poskytuje viacero grafických funkcií ako napríklad *chart.TimeSeries()*, *chart.Histogram()*, *chart.PerformanceSummary()* a ďalšie. Všetky z týchto funkcií ponúkajú širšiu paletu argumentov pre lepšie prispôbenie grafického zobrazenia v porovnaní s funkciou *plot()*. Napríklad ponuka argumentov pri funkcii *chart.Histogram* je nasledovná:

```
chart.Histogram(R, breaks = "FD", main = NULL, xlab = "Returns", ylab =
"Frequency", methods = c("none", "add.density", "add.normal", "add.centered",
"add.cauchy", "add.sst", "add.rug", "add.risk", "add.qqplot"), show.outliers
= TRUE, colorset = c("lightgray", "#00008F", "#005AFF", "#23FFDC", "#ECFF13",
"#FF4A00", "#800000"), border.col = "white", lwd = 2, xlim = NULL, ylim =
NULL, element.color = "darkgray", note.lines = NULL, note.labels = NULL,
note.cex = 0.7, note.color = "darkgray", probability = FALSE, p = 0.95,
cex.axis = 0.8, cex.legend = 0.8, cex.lab = 1, cex.main = 1, xaxis = TRUE,
yaxis = TRUE, ...)
```

V prípade funkcie *chart.Histogram()* sa samotný histogram dá rozšíriť o graf funkcie hustoty normálneho rozdelenia, funkcie hustoty dát, o vybrané miery rizika a ďalšie rozšírenia a argumenty, ktorých podrobný popis je možné nájsť v návode k danej funkcii, ktorý je možné vyvolať príkazom *?chart.Histogram*. Výstup funkcie *chart.Histogram()* pre dáta akcií spoločnosti Ford môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku (Obr. č. 2).

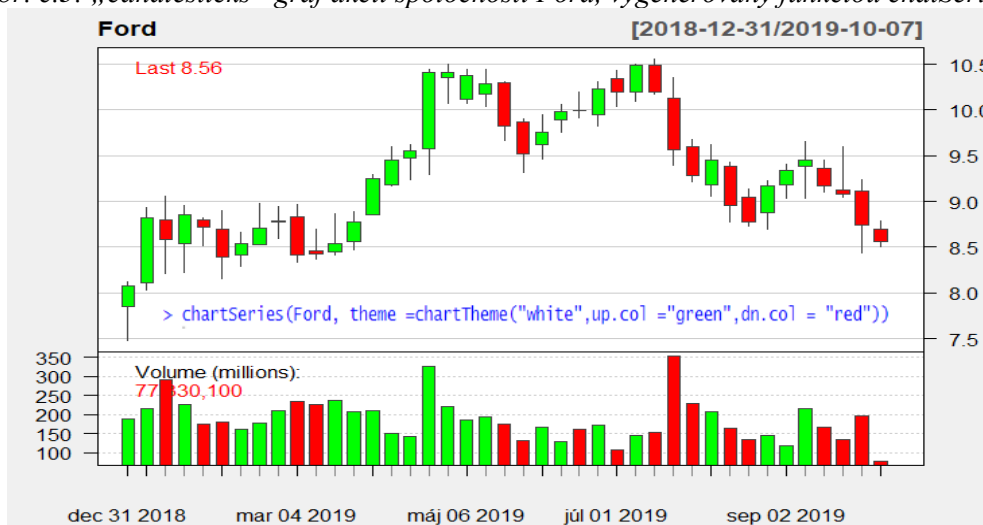
Obr č.2: Histogram výnosov akcií spoločnosti Ford spolu s mierami rizika a funkciami hustoty normálneho rozdelenia a rozdelenia dát,  
Histogram výnosov spoločnosti Ford



Zdroj: Vlastné spracovanie, RStudio

Najmä pri obchodovaní na finančných trhoch sa často pracuje s takzvanými „candlesticks“ grafmi. Funkciu pre tento graf možno nájsť v balíčku ‘quantmod’. Konkrétne sa jedná o funkciu `chartSeries()`, ktorá používateľovi poskytuje rozsiahlu flexibilitu v podobe nastaviteľných argumentov funkcie. Podrobný opis jednotlivých argumentov, spolu s praktickými príkladmi je možné nájsť v popise k funkcii `chartSeries()`. Vstupné dáta funkcie musia byť objektom typu OHLC (tabuľka so stĺpcami open-high-low-close). Finančné dáta v takomto formáte sú napríklad výstupom funkcie `getsymbols.yahoo()`. Balíček ‘quantmod’ taktiež poskytuje veľké množstvo doplnujúcich grafov ktoré môžu rozširovať pôvodný „candlesticks“ graf. Výstup funkcie `chartSeries()` v podobe „candlesticks“ grafu, pre dáta výnosov akcií spoločnosti Ford je možné vidieť na Obr. č. 3.

Obr. č.3: „candlesticks“ graf akcií spoločnosti Ford, vygenerovaný funkciou `chartSeries()`



Zdroj: Vlastné spracovanie, RStudio

Najkomplexnejším balíčkom pre grafické zobrazenie je balíček ‘ggplot2’. Balíček ‘ggplot2’ poskytuje širokú škálu nástrojov pre naprogramovanie grafického zobrazenia podľa predstáv užívateľa. Grafického zobrazenia prostredníctvom balíčka ‘ggplot2’ sa vyznačuje svojou flexibilitou a komplexnosťou, kde si užívateľ môže prostredníctvom funkcií balíčka nastaviť všetky aspekty grafického zobrazenia podľa vlastných predstáv. Prístup ku komplexnosti a flexibilitu grafického zobrazenia prostredníctvom tohto balíčka si však vyžaduje rozsiahlejšie programovanie v porovnaní s predošlými funkciami. Limitácie balíčka spočívajú v 2D zobrazení a statickej grafike.

## 5 Záver

Analýza finančných dát je jedným z východísk pri stanovení investičnej stratégie. Grafické zobrazenie dát možno považovať za základný nástroj finančnej analýzy. V príspevku autori poukazujú na možnosti programového systému R, ktorý umožňuje rôzne spôsoby zobrazenia finančných dát. Jazyk R poskytuje mnoho ďalších analytických nástrojov, či už z oblasti modernej teórie portfólia, prípadne ďalších oblastí finančnej analýzy. Za výhodu systému možno jednoznačne považovať jeho flexibilitu, neustále dopĺňovanie použiteľných balíkov, ktoré sú aktualizované na základe najnovších vedeckých poznatkov. Ako možno vidieť už z príspevku, jazyk R je vhodným softvérovým nástrojom pre grafickú analýzu finančných dát, ale taktiež pre následné analýzy s využitím matematických a štatistických modelov a metód, ktoré však nie sú súčasťou tohto príspevku.

## Literatúra

1. Ryan, J. A., Ulrich, J. M., Thielen, W., Teetor, P., & Bronder, S. (2019). Package 'quantmod'. Dostupné na <https://cran.r-project.org/web/packages/quantmod/quantmod.pdf>.
2. Peterson, B. G., Carl, P., & Boudt, K. (2019). Package 'PerformanceAnalytics'. Dostupné na <https://cran.r-project.org/web/packages/PerformanceAnalytics/PerformanceAnalytics.pdf>.
3. Würtz, D., Lam, L., Ellis, A., & Chalabi, Y. (2010). *Basic R for Finance*. Zurich: Rmetrics Association & Finance Online Publishing. ISBN: 978-3-906041-02-5.

## Kontaktné údaje

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: 0267295827

email: [juraj.pekar@euba.sk](mailto:juraj.pekar@euba.sk)

Ing. Mário Pčolár

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava

email: [mario.pcolar@gmail.com](mailto:mario.pcolar@gmail.com)



# Heuristics for non-split delivery VRP with uniform private fleet and common carrier: a computational study

Jan Pelikán<sup>1</sup>, Petr Štourač<sup>2</sup>, Michal Černý<sup>3</sup>

**Abstract.** The paper recapitulated proposed heuristics for non-split delivery modification of VRP with uniform private fleet and common carrier. Private fleet has all vehicles with the same capacity and its costs are proportional to the sum of distances traveled by its vehicles. Common carrier has no capacity limit and costs are proportional to the quantity of transported goods only. The goods and all vehicles are located in the same depot. A set of customers with given demand are known. The goal is to minimize the overall costs. The model is formulated and all proposed heuristics are described. The performance of the mathematical model and all heuristics are compared on some numerical experiments.

**Keywords:** vehicle routing, integer programming, insert heuristic, non-split delivery model

**JEL classification:** C61

## 1 Introduction

Optimizing the costs of transporting goods to customers has recently become an increasingly important factor in ensuring the competitiveness of companies on the market. Increasing transport costs force their managers to look for new ways of transporting goods using not only their private fleet of vehicles, but also the services of specialized carriers. However, it is necessary to consider whether it is more advantageous to reduce costs by optimizing the routes of the fleet's own vehicles or to look for cheaper common carriers, or to use a combination of both variant. In deciding on the choice of variant, matters such as customer distances, fleet capacity, delivery time, or warehouse location play an important role. The advantage of using a private fleet is that it can reduce costs compared to normal carrier prices or transport shipments directly from origin to destination through multiple stops without having to collect them in central warehouses of an common carrier. However, the use of your private car fleet may mean higher costs in some specific cases. For example, the situation where customers are in hard-to-reach areas where, thanks to their savings, a common carrier can be able to offer a lower price especially for small shipments.

Vehicle routing problem (VRP) deals with optimizing the distribution of goods to customers and is a rapidly developing area of operations research during last years. Its general purpose is to design a set of minimum costs routes to serve customers' needs. This means deciding which vehicles to serve customers and in what order all routes are completed with minimal financial costs or execution time. Many variants of this problem have been studied over the years. These include:

---

<sup>1</sup>University of Economics, Department of Econometrics, nám. W. Churchilla 1938/4, Prague, Czech Republic, jan.pelikan@vse.cz.

<sup>2</sup>University of Economics, Department of Econometrics, nám. W. Churchilla 1938/4, Prague, Czech Republic, stop02@vse.cz.

<sup>3</sup>University of Economics, Department of Econometrics, nám. W. Churchilla 1938/4, Prague, Czech Republic, cernym@vse.cz.

- VRP with Pickup and Delivery (VRPPD) - there are more depots where the loading is in progress,
- VRP with Time Windows (VRPTW) - the goods can be delivered only within a certain time interval,
- Capacitated VRP (CVRP or CVRPTW) - vehicles have a limited load space capacity,
- VRP with Multiple Trips (VRPMT) - vehicles may have more than one route,
- Open VRP (OVRP) - vehicles do not have to return to the starting point,
- VRP with private fleet and common carrier (VRPPC) - the services of an external carrier are also used for delivery.

Detailed classification of variants of the VRP can be found in the articles [Eksioglu, Vural and Reisman (2009), Braekers, Ramaekers and Van Nieuwenhuyse (2016)]. The VRPPC variant according [Chu (2005)] consists in serving a set of customers so that each customer is served only once, all routes associated with the private fleet have a start and end in the depot, each private fleet carries only one route, the service route contains a demand not exceeding overall vehicle capacity and total costs are minimized. Due to numerous applications, a number of new mathematical models and original numerical methods. A number of heuristic algorithms are currently being developed that are effective in terms of time and implementation complexity [7] [8]. One of the first proposed heuristics is the savings heuristics [Clark and Wright (1964)]. A heuristic proposed by [Plevný (2013)] selects customers according the distance from depot. [Pelikán (2016)] described a modified insert heuristic for solving split and non-split demand with a uniform and heterogeneous fleet of vehicles.

We consider a modification of VRP known as non-split delivery VRP with uniform private fleet and common carrier (VRPPC). To formalize the problem more precisely, assume that we are given customers' demands with known quantity. The goods can be transported as a complex from the depot to the customers by private fleet with limited capacity or by common carrier. The customers are represented as nodes on a given graph with weighted edges, where weights correspond to distances. The goods are placed in the depot where also the private fleets and vehicle of common carrier are located. The private fleet has all vehicles with the same capacity. This fleet can be used in the TSP-style and the price of delivery is proportional to the sum of distances traveled by the vehicles. The common carrier has no capacity limit and costs are proportional to the quantity of transported goods only. The goal is to minimize the overall costs.

## 2 Mathematical model

Non-split delivery model (VRPPC) contains a binary variable  $z_i$  which is equal 1 if common carrier assures whole demand  $q_i$  of node  $i$ . This model can be formulated as integer programming problem. Let  $G = \{V, E\}$  be an undirected complete graph,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , node 1 is the depot and nodes  $2, 3, \dots, n$  are customers.

### Parameters of the model are:

- $d_{ij}$  = distance between nodes  $i, j$ ,
- $q_i$  = demand in node  $i$ ,
- $W$  = capacity of private carrier's vehicles,
- $c_c$  = costs of transport of a unit of goods by the common carrier,

- $S$  = number of vehicles of private carrier,
- $p$  = costs per km of private carrier vehicles.

**Variables of the model are:**

- $x_{ij}^s \in \{0, 1\}$ ,  $x_{ij}^s = 1$  if the vehicle  $s$  of the private carrier travels from node  $i$  to node  $j$ ,  $x_{ij}^s = 0$  otherwise,
- $z_i \in \{0, 1\}$ ,  $z_i = 1$  if the common carrier serves whole demand  $q_i$  of node  $i$ ,  $z_i = 0$  otherwise,
- $u_i^s$  are auxiliary variables in anti-cyclic constraints,  $s = \{1, 2, \dots, S\}$ .

**ILP model of VRPPC**

$$p \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}^s + c_c \sum_{i=1}^n z_i q_i \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^s = \sum_{i=1}^n x_{ji}^s \quad s = 1, \dots, S, j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^n x_{ij}^s = 1 - z_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$u_i^s \leq W \quad s = 1, \dots, S, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^s \leq 1 \quad s = 1, \dots, S \quad (5)$$

$$u_i^s + q_j - W(1 - x_{ij}^s) \leq u_j^s \quad s = 1, \dots, S, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n, i \neq j \quad (6)$$

The objective function (1) minimizes the sum of costs of vehicles of the private carrier and the common carrier. Constraint (2) states that a vehicle must enter and leave a node. Equation (3) means that a node not served by the common carrier has to be served by a vehicle of the private carrier. Inequality (4) assures that capacity of the  $s$ -th vehicle is not exceeded. Inequality (5) means that a vehicle can leave the depot maximum once. Anti-cyclic conditions and defining of load  $u_i^s$  of the vehicle  $s$  entering node  $i$  are in (6).

### 3 Heuristics

We consider previously discussed heuristics for VRPPC. The first two heuristics which were defined in [Pelikán, Štourač a Černý (2019)] use a modification of the standard insert heuristic and the latter called *node subset heuristic*, which is based on dividing of the set of nodes  $V$  into two subsets, subset served by private fleet and subset served by common carrier. The paper [Štourač, Černý a Rada (2018)] describes two heuristics for solving the problem, which at each processing step are looking for the cheapest variant to deliver one of the packages that have not yet been delivered. In the paper [Štourač, Černý a Rada (2018/2)] three new heuristics for solving the problem were designed. Randomized heuristics adds a randomized step for choosing the cheapest variant in every step of processing. The algorithm in each new state of processing calculates for private carrier and their cars the cheapest option to deliver other demands and from these variants selects according the random value the first or the second cheapest one. Better loading heuristics adds algorithm for finding a better solution of vehicle

loading of private carrier vehicles. After finishing of calculation, if some vehicles of private carrier are not completely loaded, the algorithm tries to find a better solution for vehicle loading. Combined heuristics joins algorithm of both previous randomized heuristicsI and better loading heuristics.

### 3.1 Insert heuristic

The modification of the standard insert heuristic is used.

### 3.2 Node subset heuristic

VRPPC with non-split demand means that the set of nodes  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  is divided into two subsets, subset  $V'$  and subset  $V - V'$ . The first subset  $V'$  contains nodes which are served by the private fleet. Common carrier transports goods from the depot to the nodes contained in the second subset  $V - V'$ . In the optimal solution of VRPPC, there is an optimal subset of nodes  $V'$  and optimal routes of vehicles of the private fleet on the subset  $V'$ . If a subset of nodes  $V'$  is created, we have to optimize transport costs of the private fleet. Costs of the common carrier for nodes from subset  $V - V'$  are given by the sum of  $q_i$  for  $i$  in  $V - V'$  multiplied by costs  $c_c$ .

The heuristic first sorts the list of nodes (in the descending order) according a particular rule. We consider these rules:

- *dist-1* sorts nodes according to the distance from the depot (node 1),
- *dist-2(m)* sorts nodes according to sum:  $d_{1i} + \sum_{k=1}^m d_{ij_k}$  where  $j_k$  is  $k$ -th nearest neighbor of  $i$  (the parameter  $m$  can be chosen as  $2, 3, \dots, n - 1$ ),
- *km-tons* sorts nodes according to  $d_{1i}(\max q_j - q_i + \bar{q}_j)$ , where  $\bar{q}_j = \sum_{i=2}^n q_i / (n - 1)$ ,
- *costs-dist* sorts nodes according to the costs difference  $(d_{1i} + d_{i1}) - c_c q_i$ .

Then it calculates in the cycle for  $\ell = 2, 3, \dots, n$  the total travel costs as the sum of the private carrier's travel costs  $TP$  for the first  $\ell$  nodes calculated by some heuristic or mathematical model and the common carrier travel costs  $TC$  for the last  $n - \ell + 1$  nodes of sorted list.

### 3.3 Sequential loading heuristic

The demands are processed one-by-one in an initial ordering. For each demand, the cheapest way of shipping is found based on the routes of individual carrier vehicles planned so far. In case that the demand is transported by vehicle of the private carrier, if possible, additional demands that have not yet been delivered to the destination are added to the car. The heuristic ends after processing the last undelivered demand from the list (heuristic label: seqload).

### 3.4 The best demand heuristic

This heuristic looks for the demand with the cheapest possible transport among the demands unallocated so far. The calculation is based on the actual configuration. In case the demand is transported by a vehicle of private carrier, additional demands that have not yet been delivered (if any) to the destination are added to the vehicle. The heuristics ends after processing the last demand (heuristic label: bestdem).

### 3.5 Randomized heuristic

Randomized heuristic modifies the best demand heuristic by adding the randomized step for choosing the cheapest variant in every step of processing. The algorithm in each new state of processing (current carrier position) calculates, for individual carriers and their cars, the cheapest option to deliver other demand and from these variants selects according the random value the first or the second cheapest one. The algorithm ends after processing the last demand (heuristic label: random). The algorithm of this heuristics is calculated repeatedly (e.g. 10 000 times) for finding the best solution.

### 3.6 Better loading heuristic

Better loading heuristic modifies the best demand heuristic by adding algorithm for finding a better solution of vehicle loading of private carrier vehicles. The algorithm in each new state of processing calculates, for individual carriers and their cars, the cheapest option to deliver other demands. After finishing of the calculation, if some vehicles of private carrier are not completely loaded, the algorithm tries to find a better solution for vehicle loading (heuristic label: betload).

### 3.7 Combined heuristic

This heuristics joins the algorithms of both previous randomized heuristics and better loading heuristic (heuristic label: combined).

## 4 Numerical examples

The model and both heuristics were testing on examples *VAL3*, *VAL6* and *E3* published on <http://www.uv.es/belengue.carp.html>. The ILP model is solved by CPLEX 12.0. The heuristics are written in VBA language. PC (IntelCore2Quad, 2.83GHz) is used for computation. Computation of the model ran for three times and interrupted gradually after 1 minute, 10 minutes and 1 hour. Parameters and computational results are summarized in Table 1.

The columns stand for the tested examples *VAL3*, *VAL6* and *E3*. The first four rows represents parameters of examples,  $n$  = number of nodes,  $c_c$  = costs of the transport of unit of goods by the common carrier,  $W$  = capacity of private carrier vehicles and  $p$  = costs per km of private carrier vehicles. The next three rows contain results for the model (with different time of interruption in brackets in the first column). Result values are followed in parentheses by GAP (difference between best feasible solution found so far and the corresponding best lower bound found so far). In one case (*E3*/1 hour), the result was not obtained. The remaining rows contain results for Insert heuristic, Node subset heuristic (4 rows for different type of nodes sorting) and other tested heuristics. In case of the dist-2 variant, the number of adjacent nodes whose sum of distances is applied to sorting is written in parentheses.

## 5 Conclusion

We consider non-split delivery modification of VRP. ILP of the problem has been presented and types of previously designed heuristics have been described. The model and all types of

sample	VAL3	VAL6	E3
$n$	24	31	77
$c_c$	10	15	300
$W$	50	50	50
$p$	20	20	20
model (1 min)	1200 (31%)	2690 (29%)	151260 (72%)
model (20 mins)	1200 (31%)	2690 (18%)	138020 (71%)
model (1 hour)	1200 (31%)	2540 (14%)	-
insert	1560	3175	155340
dist-1	1340	2950	<b>136520</b>
dist-2 ( $m$ )	1270 (7)	2630 (7)	<b>125740 (12)</b>
km-tons	1230	2735	<b>128180</b>
costs dist.	1310	2780	<b>127360</b>
seqload	1450	3115	150360
bestdem	1660	3210	148380
random	1290	3000	131420
betload	1660	3210	148380
combined	1290	2965	131420

**Table 1** Summary data for test instances.

heuristics were tested on instances from a benchmark dataset. The results show that the ILP formulation need not be suitable for solving the real problems. The proposed heuristic methods give us good solutions, better than results from the modified insert heuristic.

## Acknowledgements

The work was supported by the Czech Science Foundation under grant 19-02773S and by the Internal Grant Agency of University of Economics, Prague under Grant F4/19/2019.

## References

- Braekers, K., Ramaekers, K., and Van Nieuwenhuyse, I. (2016). The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300–313.
- Chu, Ch-W. (2005). A heuristic algorithm for the truckload and less-than-truckload problem. *European Journal of Operational Research*, 165, 657–667.
- Clarke, G. and Wright, J. W. (1964). Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. *Operational Research*, 568–581.
- Eksioglu, B., Vural, A. V., and Reisman, A. (2009). The vehicle routing problem: A taxonomic review. *Computers & Industrial Engineering*, 57, 1472–1483.
- Pelikán, J. (2016). Heuristics for VRP with private and common carriers. *Proceedings of the International Conference on Mathematical Methods in Economics*, Liberec, 658–662.
- Pelikán, J., Štourač, P. and Černý, M. (2019). Node subset heuristic for non-split delivery VRP. *Strategic Management and its Support by Information Systems (SMSIS)*, Ostrava: TU VŠB, 212–216.

Plevný, M. (2013). Vehicle routing problem with a private fleet and common carriers - the variety with a possibility of sharing the satisfaction of demand. *Mathematical Methods in Economics, 31st International Conference Proceedings*, College of Polytechnics Jihlava, 730–736.

Štourač, P., Černý M. and Rada, M. (2018). Two heuristics for vehicle routing with three kinds of carriers: A computational study. *Quantitative Methods in Economic, Multiple Criteria Decision Making XIX.*, Bratislava: Letra Edu, 2018, s. 332–339.

Štourač, P., Černý, M. and Rada, M. (2018). VEHICLE ROUTING WITH THREE TYPES OF COST FUNCTIONS: A RANDOMIZED HEURISTIC APPROACH. *Mathematical Methods in Economics, MME 2018, 36th international conference, September 12-14, 2018*, Jindřichův Hradec. Praha, MATFYZPRESS, 2018, s. 567-572.

### **Contact information**

RNDr. Petr Štourač

University of Economics, Faculty of Informatics and Statistics, Department of Econometrics,  
nám. W. Churchilla 1938/4, Prague, Czech Republic

Mobile: +420 702 061 281

email: stop02@vse.cz

# PREHLAD METODOLÓGIE SKRYTÉHO MARKOVOVHO MODELU <sup>1</sup>

## OVERVIEW ON HIDDEN MARKOV MODEL METHODOLOGY

*Marian Reiff*

### **Abstract**

Skrytý Markovov model je matematický model, v ktorom analyzovaný systém je popísaný pomocou stavov modelovaných Markovovým reťazcom. Tieto stavy nie je možné priamo pozorovať, sú skryté a nie je možné ich priamo identifikovať, napríklad kvôli šumu. Parametre modelu sú teda neznáme a musia byť odhadnuté na základe pozorovateľných údajov. V príspevku sa venujeme prehľadu metodológie a prístupov riešenia modelovania ekonomických procesov pomocou skrytých Markovových modelov.

*KLúčové slová:* Skrytý Markovov model, Markovov reťazec, časový rad

### **Abstrakt**

Hidden Markov model is a mathematical model in which an analyzed system can be described using states modelled by the Markov chain. These states cannot be directly observed, are hidden and it is not possible to identify them directly, for example because of the noise. Model parameters are unknown and must be estimated based on observable data. Methodology and mathematical approaches of modeling economic processes using hidden Markov models are discussed in the paper.

*Keywords:* Hidden Markov model, Hidden Chain, Time Series

Príspevok sa venuje prehľadu prác zaoberajúcich sa matematickým aparátom skrytého Markovovho modelu. Andrej Andrejevič Markov (14. júna 1856 - 20. júla 1922) bol ruským matematikom, ktorý je známy pre svoju prácu na teórii stochastických Markovových procesov (Markov, 1908), neskôr známej ako Markovov proces a Markovove reťazce. O neskoršie zovšeobecnenie teórie sa zaslúžil Kolmogorov (Kolmogorov, 1931). Markovov proces môžeme chápať ako náhodný proces v čase, pre ktorý platí Markovská vlastnosť (túto vlastnosť vysvetlíme neskôr). Markovská vlastnosť z hľadiska modelovania predstavuje jednoduchý spôsob, ako zaviesť štatistickú závislosť do modelu stochastického procesu. Túto vlastnosť využijeme pri rozšírení modelu zmesi pravdepodobnostných rozdelení. Štatistický model, ktorý spĺňa Markovskú vlastnosť, sa označuje ako Markovov model. V Markovových modeloch (ako napríklad Markovov reťazec) je stav modelovaného systému viditeľný priamo pozorovateľovi, a preto podmienené pravdepodobnosti prechodu sú jedinými parametrami modelu, zatiaľ čo v skrytom Markovovom modeli jednotlivé stavy nie je možné priamo pozorovať (nazývajú sa preto skryté alebo latentné); možné je pozorovať len výstup modelu, teda generované dáta, ktorých hodnoty sú pozorovateľné a závisia od stavu, v ktorom sa nachádza systém v čase  $t$ .

---

<sup>1</sup> Tento článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0368/18 "Cenové stratégie v prostredí pôsobenia efektívnych regulačných mechanizmov na nadnárodných trhoch sieťových odvetví slovenskej ekonomiky".



Každému stavu prislúcha pravdepodobnostné rozdelenie pre generovanie výstupov. Preto sekvencia dát generovaných skrytým Markovovým modelom poskytuje informácie o sekvencii skrytých stavov systému. V tabuľke číslo Tabuľka **Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**1 uvádzame štyri rôzne Markovove modely, ktoré je možné použiť v rôznych situáciách v závislosti od toho, či je každý sekvenčný stav pozorovateľný alebo nie, a či má byť systém upravený na základe generovaného pozorovania, či už pozorovateľného stavu alebo pozorovateľnej premennej.

Tabuľka **Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom.**1 Prehľad Markovových modelov. Zdroj: vlastné spracovanie.

<b>Charakteristiky modelovaného systému</b>	<b>Systém je úplne pozorovateľný</b>	<b>Systém je čiastočne pozorovateľný</b>
<b>Autonómny systém</b>	Markovov reťazec	Skrytý Markovov model
<b>Kontrolovaný systém</b>	Markovove rozhodovacie procesy	Čiastočne pozorovateľné Markovove rozhodovacie procesy

Skrytý Markovov model je model detekcie signálu, ktorý predpokladá, že pozorované sekvencie sú odvodené zo sekvencie skrytých stavov. Sekvencia skrytých stavov je diskretná, modelovaná pomocou Markovovho reťazca. Baum and Petrie (1966) navrhli matematické základy teórie skrytého Markovovho modelu. Autori predpokladajú, že pozorovania sú generované skrytou sekvenciou, ktorá je modelovaná Markovovým procesom. V skrytom Markovovom modeli sú latentné stavy neviditeľné, zatiaľ čo pozorovania (vstupy modelu), ktoré závisia od stavov, sú viditeľné. Pozorovanie v čase  $t$  skrytého Markovovho modelu má konkrétne pravdepodobnostné rozdelenie zodpovedajúce príslušnému stavu Markovovho reťazca. Autori nazývajú túto pravdepodobnosť „pravdepodobnosť pozorovania“. Baum a Petrie predpokladajú, že matica podmienených pravdepodobností prechodu Markovovho procesu a matica pravdepodobnosti pozorovania nie sú známe a dokázali, že je možné na ich odhad použiť metódu odhadu maximálnej vierohodnosti. Následný vývoj teórie skrytého Markovovho modelu je hlavne v oblasti poznania kalibrácie parametrov modelu. V roku 1970 publikoval Baum a jeho kolegovia maximalizačnú metódu, forward-backward algoritmus známy aj pod názvom Baum-Welchov algoritmus (Baum, Petrie, Soules, & Weiss, 1970) a (Baum, 1972), pomocou ktorého sa dajú odhadnúť parametre skrytého Markovovho modelu pre prípad s časovým radom pozorovaní jednej premennej, teda jednej pozorovacej sekvencie. Baum-Welchov algoritmus predstavuje špeciálny prípad EM algoritmu, známy aj pod názvom algoritmus maximalizácie očakávaní (Dempster, Laird, & Rubin, 1977). Jelinek (1997) v publikácii ukazuje prepojenie medzi forward-backward algoritmom a EM algoritmom. V roku 1983 Levinson, Rabiner a Sondhi predstavili metódu maximálnej vierohodnosti určenú na odhad parametrov skrytého Markovovho modelu s viacerými pozorovanými sekvenciami za predpokladu, že všetky pozorované sekvencie sú nezávislé (Levinson, Rabiner, & Sondhi, 1983). V tejto publikácii navrhli modifikovaný Baum-Welchov algoritmus ktorý aplikujú v oblasti rozpoznávania reči. V roku 2000 Li, Parizeau a Plamondon predstavili postup na odhad parametrov skrytého Markovovho modelu s viacerými pozorovanými sekvenciami bez predpokladu nezávislosti týchto sekvencií (Li, Parizeau, &

Plamondon, 2000). V roku 2001 Baggenstoss zavádza modifikáciu algoritmu Baum-Welch pre viac pozorovaných priestorov (Baggenstoss, 2001). Nový algoritmus umožňuje odhadnúť a definovať funkciu hustoty pravdepodobnosti pozorovanej premennej pre jednotlivé skryté stavy. V tom istom roku Ghahramani uverejnil návod na odhad parametrov skrytého Markovho modelu pomocou Bayesovskej siete (Ghahramani, 2001). Nový náhľad na prepojenie skrytého Markovovho modelu a Bayesovskej siete rozšíril využitie skrytého Markovovho modelu v rôznych prípadoch ako viacnásobné stavové sekvencie (zodpovedajúce viacerým skrytým stavovým premenným) alebo zmesi diskretných a spojitých premenných. Dynamická Bayesovská sieť je založená na Bayesovej teórii (Bayes & Price, 1763). Skrytý Markovov model môže byť považovaný za najjednoduchšiu dynamickú Bayesovskú sieť.

Pri analýze skrytých Markovových modelov nie je cieľom odhadnúť len parametre modelu, ale aj odhadnúť najpravdepodobnejšiu sekvenciu skrytých stavov. Viterbiho algoritmus (Viterbi, 1967) je algoritmus dynamického programovania, ktorý slúži na nájdenie najpravdepodobnejšej sekvencie skrytých stavov, túto sekvenciu nazývame Viterbiho cesta, ktorá generuje sekvenciu pozorovateľných udalostí. Cieľom algoritmu je určiť Viterbiho cestu, teda poradie skrytých stavov, ktoré predstavuje základný zdroj pre generovanie sekvencie pozorovaní (pozorovateľných premenných). Viterbiho algoritmus bol prvýkrát aplikovaný v kontexte rozpoznávania reči pri spracovaní reči a jazyka (Vintsyuk, 1968). Kruskal (1983) vo svojej publikácii konštatuje, že Viterbiho algoritmus prešiel pozoruhodnou históriou viacerých nezávislých objavov a publikácií. Kruskal a iní autori uvádzajú tieto nezávisle uverejnené varianty algoritmu v štyroch samostatných oblastiach:

Tabuľka **Chyba! Dokument neobsahuje žiadny text so zadaným štýlom..2** Prehľadová tabuľka uvádzajúca publikácie viacerých nezávislých objavov Viterbiho algoritmu.

Publikácia	Oblasť výskumu
(Viterbi, 1967)	Teória informácií
(Vintsyuk, 1968)	Spracovanie reči
(Needleman & Wunsch, 1970)	Molekulárna biológia
(Sakoe, 1971)	Spracovanie reči
(Sankoff, 1972)	Molekulárna biológia
(Reichert, Cohen, & Wong, 1973)	Molekulárna biológia
(Wagner & Fischer, 1974)	Výpočtová technika

Použitie termínu Viterbiho algoritmus je štandardom pre aplikáciu dynamického programovania na problém pravdepodobnostnej maximalizácie, pri deterministických úlohách sa používa často iba výraz dynamické programovanie. Forney (1973) je autorom prehľadovej práce, ktorá skúma pôvod Viterbiho algoritmu v kontexte informačnej a komunikačnej teórie.

Na odhad parametrov skrytého Markovovho modelu a nájdenie optimálnej Viterbiho trasy na odhad sekvencie skrytých stavov je v súčasnosti k dispozícii niekoľko softvérových balíkov. V open source prostredí je pre softvér R k dispozícii viacero balíkov od rôznych autorov. Uvádzame zoznam názvov R-balíkov a ich autorov: HMM v CRAN (Himmelman, 2010),

depmixS4 v CRAN (Visser & Speekenbrink, 2016), hmm.discnp v CRAN (Turner, 2016), HiddenMarkov v CRAN (Harte, 2017), ldhmm v CRAN (Lihn, 2018), msm v CRAN (Jackson, 2018). V proprietárnem softvéri Matlab spomenieme napríklad Hidden Markov Models toolbox (Murphy, 1998), Statistics and Machine Learning Toolbox (MathWorks, 2018). V habilitačnej práci v poslednej kapitole sme odhadovali parametre skrytého Markovovho modelu a Viterviho cestu v prostredí Matlab pomocou funkcií toolboxu Statistics and Machine Learning Toolbox.

## Použitá literatúra

- Baggenstoss, P. M. (2001). A modified Baum-Welch algorithm for hidden Markov models with multiple observation spaces. *IEEE TRANSACTIONS ON SPEECH AND AUDIO PROCESSING*, 9(4), 411-416.
- Baum, L. E. (1972). An equality and associated maximization technique in statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes. *Inequalities*, 3, 1-8.
- Baum, L. E., & Petrie, T. (1966). Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *The annals of mathematical statistics*, 37(6), 1554-1563.
- Baum, L. E., Petrie, T., Soules, G., & Weiss, N. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. *The annals of mathematical statistics*, 41(1), 164-171.
- Bayes, T., & Price, R. (1763). An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 53, 370-418.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, 1-38
- Forney, G. D. (1973). The viterbi algorithm. *Proceedings of the IEEE*, 61(3), 268-278.
- Ghahramani, Z. (2001). An introduction to hidden Markov models and Bayesian networks. *International journal of pattern recognition and artificial intelligence*, 15(01), 9-42.
- Harte, D. (2017). Hidden Markov Models. <https://cran.r-project.org/web/packages/HiddenMarkov/HiddenMarkov.pdf>.
- Himmelman, L. (2010). HMM - Hidden Markov Models. <https://cran.r-project.org/web/packages/HMM/HMM.pdf>.
- Jackson, C. (2018). Multi-state Markov and hidden Markov models in continuous time. <https://cran.r-project.org/web/packages/msm/msm.pdf>.
- Jelinek, F. (1997). *Statistical methods for speech recognition*: MIT press.
- Kolmogorov, A. N. (1931). Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Annalen*, 104, 415.
- Kruskal, J. B. (1983). An overview of sequence comparison: Time warps, string edits, and macromolecules. *SIAM review*, 25(2), 201-237.
- Levinson, S. E., Rabiner, L. R., & Sondhi, M. M. (1983). An introduction to the application of the theory of probabilistic functions of a Markov process to automatic speech recognition. *Bell System Technical Journal*, 62(4), 1035-1074.
- Li, X., Parizeau, M., & Plamondon, R. (2000). Training hidden markov models with multiple observations-a combinatorial method. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(4), 371-377.

- Lihn, S. H.-T. (2018). Hidden Markov model for financial time-series based on lambda distribution. <https://cran.r-project.org/web/packages/ldhmm/ldhmm.pdf>.
- Markov, A. A. (1908). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*: B. G. Teubner, Leipzig, Berlin.
- MathWorks. (2018). Statistics and Machine Learning Toolbox™ User's Guide. Retrieved from [https://in.mathworks.com/help/pdf\\_doc/stats/index.html](https://in.mathworks.com/help/pdf_doc/stats/index.html)
- Murphy, K. (1998). Hidden markov model (hmm) toolbox for matlab. <http://www.ai.mit.edu/murphyk/Software/HMM/hmm.html>.
- Needleman, S. B., & Wunsch, C. D. (1970). A general method applicable to the search for similarities in the amino acid sequence of two proteins. *Journal of molecular biology*, 48(3), 443-453.
- Reichert, T. A., Cohen, D. N., & Wong, A. K. C. (1973). An application of information theory to genetic mutations and the matching of polypeptide sequences. *Journal of Theoretical Biology*, 42(2), 245-261.
- Sakoe, H. (1971). *Dynamic-programming approach to continuous speech recognition*.
- Sankoff, D. (1972). Matching sequences under deletion/insertion constraints. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 69(1), 4-6.
- Turner, R. (2016). Hidden Markov Models with Discrete Non-Parametric Observation Distributions. <https://cran.r-project.org/web/packages/hmm.discnp/hmm.discnp.pdf>.
- Vintsyuk, T. K. (1968). Speech discrimination by dynamic programming. *Cybernetics*, 4(1), 52-57.
- Visser, I., & Speekenbrink, M. (2016). Dependent mixture models - hidden Markov models of GLMs and other distributions in S4. <https://cran.r-project.org/web/packages/depmixS4/depmixS4.pdf>.
- Viterbi, A. (1967). Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. *IEEE transactions on Information Theory*, 13(2), 260-269.
- Wagner, R. A., & Fischer, M. J. (1974). The string-to-string correction problem. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(1), 168-173.

### **Kontaktne údaje**

doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: [marian.reiff@euba.sk](mailto:marian.reiff@euba.sk)

# EVOLUČNÉ ALGORITMY A BIMATICOVÉ HRY

## EVOLUTIONARY ALGORITHMS AND BIMATRIX GAMES

*Allan Jose Sequeira Lopez , Zuzana Čičkova*

### **Abstrakt**

Teória hier je vedná disciplína, ktorá sa zaoberá interakciami medzi rôznymi subjektami, hráčmi, ktorí navzájom konkurujú a ich rozhodnutia sa vzájomne ovplyvňujú. Jedným z najdôležitejších konceptov teórie hier je Nashove ekvilibrium, ktoré je zvyčajne formulované ako optimalizačný problém. Univerzálnym nástrojom na riešenie rôznych optimalizačných úloh sú evolučné algoritmy. Cieľom príspevku je poskytnúť teoretický prehľad evolučných techník a poukázať na ich význam pri riešení bimaticových hier v porovnaní so solvermi nelineárneho programovania používanými v prostredí GAMS (Generalized Algebraic Modeling System).

*Kľúčové slová:* bimaticové hry, evolučné algoritmy, teória hier

### **Abstract**

Game theory is a scientific discipline focused on interactions between different subjects, players, who compete with each other and their decisions interact. One of the most important concepts of game theory is the Nash equilibrium which is usually formulated as an optimization problem. Evolutionary algorithms that work simultaneously with a set of solutions are a universal tool for solving various optimization tasks. The aim of the paper is to provide a theoretical overview of evolutionary techniques and to point out their importance in solving bimatrix games in comparison with non-linear programming solvers available in GAMS (Generalized Algebraic Modeling System).

*Keywords:* bimatrix games, evolutionary algorithms, game theory

## **1 EVOLUČNÉ ALGORITMY**

Teória hier je disciplína aplikovanej matematiky zaoberajúca sa rozhodovacími situáciami, ktoré sa týkajú viac než jednej entity (jednotlivci, firmy, politické strany, a pod.), pričom východiská a pravidlá konfliktu (hry) sú presne definované. Hru hrá niekoľko hráčov, z ktorých každý si vyberie jednu stratégiu z množiny známych stratégií, pričom pre každú stratégiu je daná matica platieb. Každý hráč sa snaží maximalizovať svoj zisk. Zisk hráča závisí od jeho vlastného rozhodnutia a od zisku jeho súperov. Nashova rovnováha je jedným z najdôležitejších konceptov teórie hier. Nashovu rovnováhu možno definovať ako takú kombináciu stratégií (jedna stratégia pre každého hráča), že žiadny hráč nemôže zvýšiť svoju výhru jednostrannou zmenou stratégie.

Determinovanie Nashovej rovnováhy je zvyčajne formulované ako optimalizačný problém. Evolučné algoritmy predstavujú univerzálny nástroj na riešenie rôznych optimalizačných úloh. (1) Patria do množiny tzv. populačných prehľadovacích algoritmov a môžu pracovať súčasne s veľkou množinou riešení.

## 1.1 Evolučné algoritmy a ich elementy

Evolučný proces sa datuje od roku 1859 s Darwinovou evolučnou teóriou. Avšak aj dnes existujú skupiny, ktoré odmietajú akceptovať túto teóriu ako realitu. Je založená na koncepcii evolúcie riadenej prírodným výberom, ktorý nie je ľahké predpokladať. Biologická evolúcia nie je ničím iným než náhodným hľadaním nových spôsobov života a tým, že sme výsledkom stochastického procesu. Potreba je kompas, ktorý nasmeruje tento stochastický proces určitým smerom k hľadaniu optima. Evolučný mechanizmus z biológie môžeme použiť na čisto matematické problémy, ktoré simulujú tieto procesy. V 70. rokoch 20. storočia predstavil John Henry Holland výpočtový algoritmus, ktorý napodobňuje mechanizmy evolúcie a ktorý by bol zárodkom toho, čo teraz nazývame genetickým alebo evolučným algoritmom. V súčasnosti sa evolučné algoritmy používajú v mnohých oblastiach. Genetické algoritmy často nachádzajú nezvyčajné riešenia, ktoré by sa inak nedali ľahko predstaviť.

Genetické algoritmy pozostávajú z nasledujúcich elementov:

- Gény – prvky informácií, ktoré musíme skombinovať, aby sme dostali možné riešenie problému.
- Jedinci – každá z možných kombinácií génov, každý pokus o získanie objektívnej hodnoty
- Populácia – predstavuje väčšiu alebo menšiu skupinu jedincov. Najprv vychádzame z populácie úplne náhodných jedincov, ktorí sa nemusia priblížiť k cieľu. Každé generácii vybudujeme novú populáciu s prežívajúcimi a novými jedincami. Je dôležité, aby populácia bola dostatočne veľká na to, aby existovala dostatočná genetická diverzita na zabezpečenie preskúmania významnej oblasti rozhodovacieho priestoru. Je tiež dôležité zabezpečiť, aby sa takáto genetická diverzita zachovala po celé generácie, aby sa zabránilo tomu, že sa populácia príliš skoro zruší smerom k relatívne optimu.
- Potreba – evaluačná funkcia - hodnotiacou funkciou v tomto prípade bude to, do akej miery sa výsledok operácií daného jedinca priblíži k cieľovej hodnote. Hodnotiacia funkcia určí s istou mierou šance každého jedinca na prežitie a/alebo na párovanie. Táto zmena stupnice musí zaručiť, že najhoršia osoba má nezanedbateľnú pravdepodobnosť párovania (medzi 50 a 75% sú primerané váhy) v porovnaní s najlepšími. Okrem toho je vhodné uplatňovať kritériá elitárstva, ktoré pozostávajú zo stáleho neporušeného najlepšieho jedinca (majstra) alebo dokonca z určitého súboru jednotlivcov vybraných z najlepších.
- Náhodné: Mutácie a párovanie – zdefinujeme operátorov mutácie a párovania alebo kríženia. V prípade mutácie by operátor mohol zmeniť jednu číslicu za inú alebo jedného operátora za inú. Operátory kríženia nie sú nevyhnutne potrebné, ale pomáhajú urýchliť zblížovanie populácie počas prvých generácií, aby sa následne uvoľnili operátory mutácií, ktorí doladia hľadanie optima.
- Vývojový diagram – pozostáva z generovania náhodnej populácie a jej vyhodnotenia podľa cieľa. Spáruje a mutuje jedincov podľa určitých pravdepodobností určených hodnotiacou funkciou, až kým sa nevytvorí nová generácia jednotlivcov, ktorú by sme v cyklickom procese postupne prehodnocovali, mutovali a párovali.(2).

## 1.2 Využitie evolučných algoritmov

Evolučný algoritmus nemusí byť rýchlym optimalizačným algoritmom a v skutočnosti ani nie je, napríklad v porovnaní s klasickými geometrickými metódami založenými na gradientoch. Predstavuje však celý rad výhod, ako je matematická záruka dosiahnutia absolútneho maxima v nekonečnom čase (geometrické algoritmy často zostávajú v relatívne optimálnom stave)

alebo jednoduchosť ich implementácie v zložitých prípadoch (napríklad s diskretnými funkciami), kdeklasické metódy zlyhávajú alebo jednoducho nedávajú zmysel.

### 1.3 Typy evolučných algoritmov

Rôznymi kombináciami prvkov je možné získať rôzne alternatívne podoby algoritmov. Evolučné techniky môžeme rozdeliť na klasické a novšie prístupy.(3)

Klasické prístupy:

- Evolučné stratégie – I. Rechenberg a H. P. Schwefel, 1965, prvá simulácia rôznych verzií stratégie na počítači
- Evolučné programovanie - L. J. Fogel, A. J. Owens a M. J. Walsh, 1966, evolúcia automatov pre účely predikcie postupností.
- Genetické algoritmy – J. Holland, 1975, východisko všetkých ďalších prác na tému genetických algoritmov.

Novšie prístupy:

- Genetické programovanie – N. L. Cramer, 1985, využitie stromových štruktúr pre generovanie funkcií, ktoré by boli spracovávané genetickými operátormi.
- Šľachtiteľský algoritmus – H. Mühlenbein a D. Schlierkamp-Voosenom, 1993, modelovanie umelej evolúcie ako racionálnej selekcie pri šľachtení zvierat.
- Diferenciálna evolúcia – K. Price a R. Storn, 1996, používanie vektorových diferencií.
- Samoorganizujúci sa migračný algoritmus – 1999 – pri tvorbe nových potomkov využíva geometrické princípy.
- Harmonické prehrávanie – 2001 – odvodený zo zvukovej harmónie, ktorú vytvárajú improvizujúci muzikanti.
- Eugenickej evolúcia – zohľadnenie epistázy – závislosti medzi hodnotami na rôznych pozíciách.

V teórii hier majú genetické algoritmy dôležitú aplikáciu v riešení problémov, pri ktorých je matica platieb odlišná pre každého hráča. Ide o prípady, kedy výhra jedného hráča neznamená rovnakú prehru druhého hráča. Môže sa stať, že jeden hráč vyhrá viac než druhý, že vyhrajú to isté alebo jeden vyhrá a druhý prehrá.

Riešením tohto typu hier nebude iba vyhrať čo najviac, ale malo by pozostávať z dohody medzi stranami (kombinovaná stratégia), podľa ktorej budú všetci hráči spokojní.

John Nash v tejto súvislosti vyslovil teorém, že v každej bimaticovej hre existuje aspoň jedna rovnovážna situácia v zmiešaných stratégiách. V tejto vete sa pod rovnovážnou situáciou rozumie stav, v ktorom sa hráči nemôžu meniť svoju stratégiu bez toho, aby niekto prehral.

Nashova veta nehovorí, koľko rovnovážnych bodov môže byť (môže ich byť nekonečno), ani neindikuje, ako tieto rovnovážne body nájsť, ale hovorí, aké situácie budú hrať úlohu optima v týchto multiobjektívnych prípadoch.

Ďalším dôležitým konceptom pri hľadaní riešenia bimaticových hier a hier všeobecne je Pareto optimum, ktoré môžeme definovať nasledovne:

- Vektor  $\vec{x}$  v rozhodovacom priestore sa považuje za Pareto optimálny, ak neexistuje iný vektor rozhodnutí  $\vec{y}$ , ktorý by bol lepší alebo rovnaký pre každý z cieľov a striktné lepší aspoň pre jeden z nich.
- Vektor  $\vec{x}$  z priestoru cieľov dominuje druhému vektoru  $\vec{y}$ , ak  $\hat{x}_i \geq \hat{y}_i \forall i \exists i \hat{x}_i > \hat{y}_i$
- Jedinec dominuje inému podľa Pareta, ak je nad ním nadržaný aspoň v jednom kritériu a v žiadnom nie je horší.
- Za Pareto-optimálnych považujeme tých jedincov, ktorí nie sú Pareto-dominovaní žiadnym iným jedincom.

## 2 BIMATICOVÉ HRY

Bimaticová hra je hra, kde vystupujú dvaja účastníci (hráči). Každý z hráčov volí nezávisle (bez informácie o voľbe protihráča) jednu z konečného počtu variantov správania (stratégií). Predpokladá sa, že záujmy hráčov nie sú diametrálne protikladné, t.j. zisk jedného z hráčov nemusí byť sprevádzaný stratou druhého a hráči sú inteligentní. Otázkou je, akú stratégiu má hráč zvoliť tak, že voľbou inej stratégie nemôže zvýšiť svoj zisk.

Bimaticovú hru možno formalizovať takto: Nech  $P = \{1,2\}$  je množina hráčov, z ktorých každý má konečnú množinu stratégií ( $X$  – hráč 1,  $Y$  – hráč 2), t.j. hráč 1 volí  $x \in X$ , hráč 2 volí  $y \in Y$ . Množinu všetkých výsledkov hry možno označiť ako  $(x, y) \in X \times Y$ . Jednotlivé prvky množín  $X$  a  $Y$  možno usporiadať pomocou konečného počtu prirodzených čísel (prvky množiny  $X$ :  $i = 1, 2, \dots, m$  a prvky množiny  $Y$ :  $j = 1, 2, \dots, n$ ). Hodnoty hry pre hráča 1 možno zapísať do matice  $\mathbf{A}_{m \times n} = \{a_{ij}\}$ , kde  $a_{ij}$  udáva platbu hráča pri výsledku  $(i, j)$ . Výsledky hry pre hráča 2 zapisujeme do matice  $\mathbf{B}_{m \times n} = \{b_{ji}\}$ , kde  $b_{ji}$  udáva platbu hráča 2 pri výsledku  $(i, j)$  (5)(6).

Bimaticové hry možno formulovať ako úlohy nelineárneho programovania (NLP), z čoho vyplýva zložitosť ich riešenia. Ďalej poukážeme na možnosti redukcie matíc platieb, čo môže viesť k podstatnému zjednodušeniu riešenia danej hry (Sequeira Lopez & Čičková, 2018).

Pri redukcii matice platieb hráča 1 sa možno oprieť o takéto tvrdenie:

Ak v hre s maticou platieb  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  platí pre nejaké  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$  a pre všetky  $j$  vzťah

$$a_{ij} \geq a_{kj}, i \neq k$$

potom existuje optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča  $x^{(0)}$ , ktorej zložka  $x_k^{(0)} = 0$ .

Súčasne však možno uvedené tvrdenie rozšíriť aj uvažovaním lineárnych kombinácií (Chobot, 1991):

Ak v hre s maticou platieb  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  platí, že pre nejaké  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$  existujú čísla  $p_i$  ( $i \neq k$ ) tak, že pre všetky  $j = 1, 2, \dots, n$  dostaneme  $\sum_{i \neq k} p_i a_{ij} \geq a_{kj}$ ,  $\sum_{i \neq k} p_i = 1$ ,  $p_i \geq 0$ , potom existuje optimálna zmiešaná stratégia prvého hráča  $x^{(0)}$ , ktorej zložka  $x_k^{(0)} = 0$ . Je zrejmé, že analogický záver platí aj pre redukciiu matice  $\mathbf{B}_{m \times n} = \{b_{ji}\}$ .

V tejto časti budeme ilustrovať riešenie bimaticovej hry klasickým prístupom a použijeme všeobecný algebraický jazyk GAMS, následne porovnáme výsledky viacerých solverov na riešenie úlohy NLP.

### 2.1 Ilustračný príklad

Budeme predpokladať, že nie je možná dohoda medzi hráčmi, tým pádom riešenie hry bude závisieť od pravdepodobnosti výberu riešenia každého hráča.

Uvažujeme o nasledujúcej hre v normálnej forme:

Hráč červený	Hráč zelený	
	L	R
T	(2,1)	(0,2)
B	(1,2)	(3,0)

Matica platieb prvého hráča  $\mathbf{A}$  a druhého hráča  $\mathbf{B}$  sú :

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix}$$



Ako môžeme vidieť, hra nemá dominované stratégie, a ani nemá riešenie v čistej stratégii t.j. nemôžeme nájsť Nashov rovnováhu v čistej stratégii. Následne teda hľadáme riešenie v zmiešanej stratégii, výsledky hry budú zodpovedať nasledovným podmienkam:

$p$ : pravdepodobnosť, že hráč červený berie stratégiu T,  
 $1-p$ : pravdepodobnosť, že hráč červený berie stratégiu B,  
 $q$ : pravdepodobnosť, že hráč zelený berie stratégiu L,  
 $1-q$ : pravdepodobnosť, že hráč zelený berie stratégiu R.

Nashova rovnováha v zmiešanej stratégii bude nájdená na základe vzťahu:

$$\{(pT + (1 - p)B, qL + (1 - q)R), 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1\} \quad (1)$$

S pomocou softvéru GAMS, ktorý poskytuje viacero silných nástrojov (solverov) na riešenie uvedeného typu úloh. Nájde body, ktoré budú spĺňať Karush–Kuhn–Tucker (KKT) podmienky a tým stratégie prvého aj druhého hráča (Čičková and Zagiba, 2018).

Riešenie tejto hry by malo byť relatívne jednoduché avšak výsledky hry majú byť rovnaké pre väčšinu solverov, ktoré využívajú optimalizačné nástroje NLP. GAMS mák dispozíciou niekoľko solverov.

Riešenie v zmiešanej stratégii je nasledovné: pre prvého hráča  $a_{ij} = (0.66; 0.33)$  a pre druhého hráča  $b_{ji} = (0.66, 0.33)$ , hodnota hry pre prvého hráča je 1,5 a hodnota hry pre druhého hráča je 1,3. Na tento výpočet bol použitý solver LINDO 24.9.2 r64480. Pri použití rôznych solverov dostupných v GAMS sme dostali rovnaké riešenie, okrem 5 solverov, ktoré nedokázali úlohu riešiť.

V nasledujúcej tabuľke nájdeme zoznam solverov patriaci do GAMS prostredia, pri ktorých výpočet optimálneho riešenia nebol možný.

Solver	Hodnota hry prvého hráča	Hodnota hry druhého hráča
CONOPT3 version 3.17F	0	0
OIN-OR Ipopt 24.9.2 r64480	-1.2712E-10	3.12954E-10
COIN-OR Ipopt 24.9.2 r64480	-1.2712E-10	3.12954E-10
LGO 1.0 24.9.2 r64480 LGO Lipschitz Global Optimizer	0	0
MOSEK 8.1.0.30	0	0

Ako vidíme 5 solverov v prostredí GAMS, ktoré používajú NLP nástroje, nebolo schopných túto jednoduchú úlohu riešiť.

Problém pri nájdení riešenia hry pri klasických metódach môže vzniknúť vtedy, keď solver nevie určiť, ktoré z prípustných riešení je optimálne pre každého hráča, pretože tieto riešenia sú približne rovnaké alebo vtedy, keď existuje viac ako jedno riešenie. Tento problém môže byť v prípade matice väčšej než 2x2 zásadný.

### Záver

Na záver môžeme povedať, že napriek tomu, že klasické metódy riešenia bimaticových hier nám ponúkajú optimálne riešenia, môžu však zlyhať pri výbere optimálnych stratégií. Prezentovali sme príklad jednoduchej matice, ktorý nemal riešenie v čistých stratégiách. S pomocou GAMS solver LINDO 24.9.2 r64480 sme našli riešenie v zmiešaných stratégiách, ale testovaním všetkých solverov ponúkaných GAMS, ktoré používajú techniky NLP, sme našli 5 solverov, ktoré úlohu nedokázali vypočítať. Cieľom príspevku bolo predstaviť evolučné algoritmy ako základ pre ďalší výskum v tejto oblasti. Ďalším cieľom autora po

overení riešenia bimaticových hier pomocou klasického riešenie bude generovať genetický algoritmus, ktorý by mohol zlepšiť výsledky.

#### **Použitá literatúra**

1. ČIČKOVÁ, Z. - ZAGIBA, M.. Podmienky optimálnosti Karusha-Kuhna-Tuckera a bimaticové hry. In Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska. Vedecký workshop. Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska: 1. vedecký workshop k riešeniu projektu Vega č. 1/0351/17: zborník z workshopu: 4.december 2017, Bratislava. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2018. ISBN 978-80-225-4430-6, pp. 1-7.
2. SEQUEIRA LOPEZ, A. J. – ČIČKOVÁ, Z. 2018. Price Policy in Games in Spatial Competition. - Registrovaný: Web of Science. In Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XIX. International Scientific Conference. Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XIX: Proceedings of the International Scientific Conference: 23rd May - 25th May 2018, Trenčianske Teplice, Slovakia. Bratislava: Letra Edu, 2018. ISBN 978-80-89962-07-5, pp. 313-319.
3. ROSS, D. 2019, "Game Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/game-theory>
4. GOGA, M. 2013. Teória hier. Bratislava: Iura Edition, 2013. ISBN 978-80-8078-613-7.
5. DLOUHÝ, M. a FIALA, P. 2007. Úvod do teórie hier. Praha: Oeconomica, 2007. ISBN 978-80-245-1273-0.

#### **Kontaktné údaje**

Ing. Allan Jose Sequeira Lopez.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [allan.lopez@euba.sk](mailto:allan.lopez@euba.sk)

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

University of Economics in Bratislava, Faculty of Economic Informatics, Department of Operations Research and Econometrics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava, Slovak Republic

email: [cickova@euba.sk](mailto:cickova@euba.sk)

# ODHAD VLIVU MARKETINGOVÝCH AKCÍ NA MALOOBCHODNÍ PRODEJE

## ESTIMATION OF EFFECT OF MARKETING PROMOTIONS ON SALES IN RETAIL

*Ondřej Sokol*

### **Abstrakt**

Pro plánování marketingových slevových akcí je zásadní odhad jejího vlivu na prodeje promovaného produktu. Alespoň přibližného odhadu lze dosáhnout analýzou historických transakčních dat konkrétního produktu spolu s informací, v jakém období se konala jaká akce, jakých využívala kanálů a jakou slevu z prodejní ceny zahrnovala (pokud slevu obsahovala). Následně lze použít některý ze základních modelů lineární regrese pro výpočet cenové elasticity podmíněné využitím určitého komunikačního kanálu.

***Klíčová slova:** cenová elasticita, promoční kampaň, maloobchod*

### **Abstract**

Reliable estimation of influence of promotional campaign on sales of the promoted product is essential for planning marketing events. At least an approximate estimate can be made by analyzing the historical transaction data of a particular product. For such estimation we need the information about the period of time, what action, which channels they used, and what discount they included in the sale price (if any). Subsequently, one of the basic linear regression models can be used to calculate the price elasticity conditioned by the use of a particular communication channel.

***Keywords:** price elasticity, promo campaign, retail*

## **1 ÚVOD**

V České republice jsou oproti jiným vyspělým státům mnohem častější výrazné slevy v obchodech. Cílem prodejců je optimalizace těchto promočních akcí ať už z pohledu maximalizace výnosu či maximalizace podílu na trhu při co nejmenších nákladech. Z tohoto důvodu je zásadní pracovat s odhadem vlivu různých marketingových akcí na maloobchodní prodeje. V této práci se proto zabýváme výpočtem cenové elasticity vybraných produktů podmíněné marketingovou akcí.

Odhad cenových elasticit vázaných k produktům je tradiční téma v analýzách maloobchodních dat [1,2]. Spojení se studiem vlivu promočních aktivit se pak objevilo například v [3].

Práce je rozdělena do tří částí mimo úvodní sekci. V části Data se zabýváme podkladovými daty a jejich očištěním. V metodologické části pak je prezentován postup odhadu

podmíněných cenových elasticit pomocí lineárního regresního modelu a zároveň jsou demonstrovány některé vlastnosti týkající se cenové elasticity různých produktů. Práce je završena krátkou diskuzí.

## 2 DATA

Vycházíme z transakčních dat nejmenovaného maloobchodního řetězce, které obsahují datum transakce, prodejní cenu a v případě akčního prodeje jsou spárovány s promoční akcí. Akční prodeje až na výjimky trvají vždy 12 dní a jsou platné ve všech prodejnách řetězce ve stejnou dobu. Promoční akce jsou rozděleny do dvou typů – malé a velké. Komunikační kanály pro malé akce jsou omezené, zatímco produkty ve velkých akcích se mohou objevit v reklamách na internetu, rádiu, či v televizi.

Cílem je predikce denních prodejů v závislosti na velikosti slevy a míry propagace. Z toho důvodu se data očistí o nepracovní dny (víkendy a svátky), kdy mají prodejny omezenou otevírací dobu, případně jsou uzavřeny. Prodeje v tyto dny jsou obvykle výrazně menší než v běžné dny a vypočtená cenová elasticita by pak byla vychýlena v případě aplikace na běžný den.

Další očištění pak spočívá v omezení dat na prodeje prodejen, které byly otevřené v celém zkoumaném období. Případně velké množství nově otevřených, nebo zavřených prodejen by mohlo opět vychýlit odhady cenové elasticity.

Denní prodeje jsou spočteny a označeny jedním ze čtyř příznaků dle promoce – základní (tedy bez promoce), malá promoce, velká promoce a výprodej. Příznaky malé a velké promoce jsou obsaženy v původních datech. Výprodejové dny odhadujeme samostatně jako prodeje bez malé ani velké akce ale zároveň s alespoň 40 % slevou, přičemž celkové denní prodané množství je menší než 30 % průměrných denních prodejů. Vycházíme přitom z toho, k výprodejům dochází pouze v omezeném množství prodejen a v omezeném množství. Denní prodeje následně normalizujeme jejich 80% kvantilem a označíme  $Q$ . Obdobně normalizujeme cenu pomocí 90% kvantilu  $P$ .

Použitý datový soubor obsahuje denní prodeje za 2 necelé dva roky, pro naprostou většinu produktů je tak k dispozici alespoň 300 pozorování.

## 3 METODOLOGIE

Metodologická část je rozdělena do dvou sekcí. V první jsou popsány metody a rovnice, ze kterých se vychází při výpočtu podmíněných cenových elasticit. V druhé části jsou pak prezentované typické vlastnosti cenových elasticit u různých typů produktů.

### 3.1 Výpočet podmíněných cenových elasticit

Pro výpočet základní cenové elasticity ze vztahu

$$Q_Z = \beta_{1Z} + \beta_{2Z}P_Z + \epsilon,$$

kde  $Q_Z$  je normované denní množství prodaných kusů bez ohledu na případnou promoci s výjimkou výprodeje – výprodejové dny jsou z výpočtu vyřazeny.  $P_Z$  je pak normovaná průměrná denní cena.  $\epsilon$  je náhodná složka, u které předpokládáme nulovou střední hodnotu. Parametry  $\beta_{1Z}$  a  $\beta_{2Z}$  pak odhadujeme pomocí běžné metody nejmenších čtverců. Odhad cenové elasticity je pak  $\widehat{\beta}_{2Z}$ .

Pro výpočet cenových elasticit podmíněné komunikačním kanálem vycházíme z obdobného vztahu ale pouze na omezené množině dat. Pro odhad cenové elasticity velkých akcí použijeme vztah

$$Q_V = \beta_{1A} + \beta_{2A}P_A + \epsilon,$$

kde  $Q_A$  je normované denní množství prodaných kusů ve dnech bez akce a dnech s velkou akcí.  $P_A$  je pak normovaná průměrná denní cena v těchto dnech.  $\epsilon$  je náhodná složka, u které předpokládáme nulovou střední hodnotu. Odhad cenové elasticity velkých akcí je pak  $\widehat{\beta}_{2A}$ .

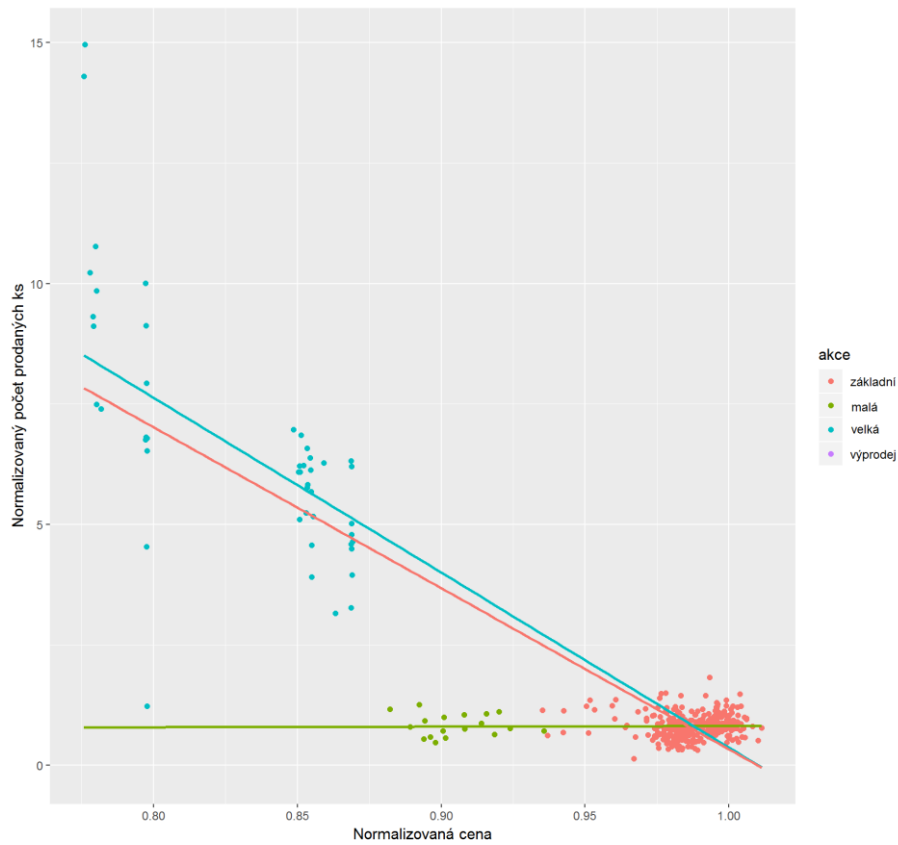
Obdobně pro odhad cenové elasticity menších akcí vycházíme z rovnice

$$Q_M = \beta_{1M} + \beta_{2M}P_M + \epsilon,$$

kde  $Q_M$  je normované denní množství prodaných kusů ve dnech bez akce a dnech s malou akcí.  $P_M$  je pak normovaná průměrná denní cena v těchto dnech.  $\epsilon$  je náhodná složka, u které předpokládáme nulovou střední hodnotu. Odhad cenové elasticity menších akcí je pak  $\widehat{\beta}_{2M}$ .

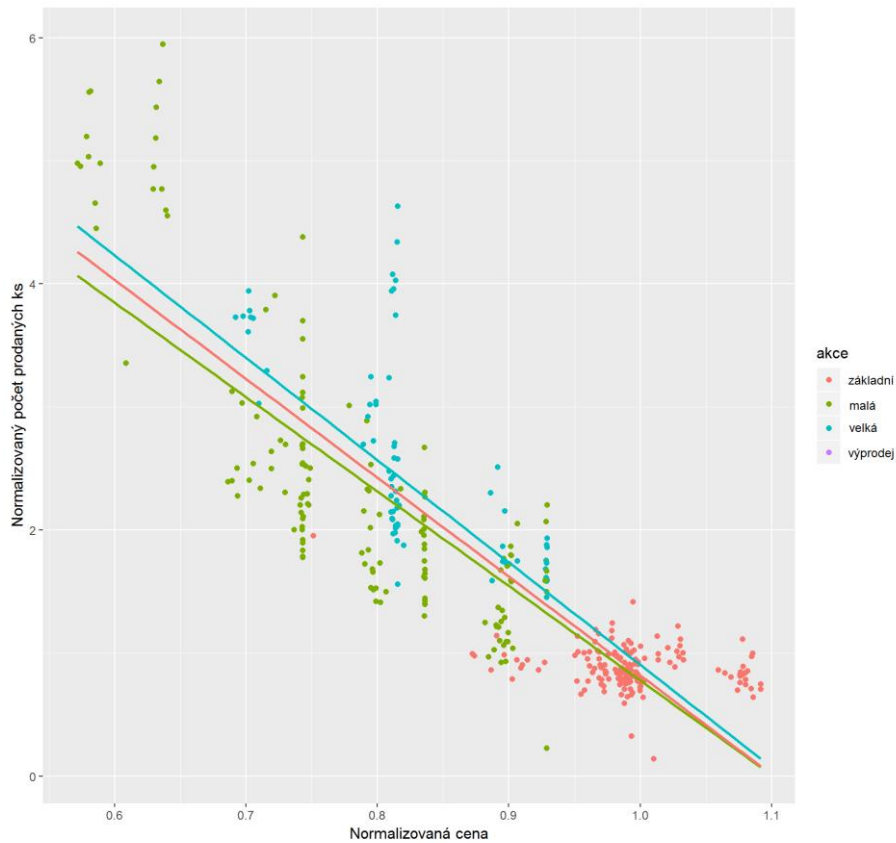
### 3.2 Typické vlastnosti cenových elasticit u různých produktů

U různých produktů mohou být odhady jednotlivých typů podmíněných cenových elasticit výrazně odlišné. Jedním z typických příkladů může být produkt, u kterého se prodeje nezvýší v případě málo promovaného zlevnění. V takovém případě ani výraznější sleva nezpůsobí zvýšené prodeje. Zatímco obdobná sleva v případě větší reklamy odbyt výrazně zvýší. Tento případ je znázorněn na Obrázku 1. Na horizontální ose je normalizovaná denní cena, na vertikální pak denní normalizovaný počet prodaných kusů. Červenými body jsou znázorněny prodeje mimo akce, zelenými v akci s malou propagací a modrými s velkou propagací. Fialově jsou pak prodeje ve výprodeji. Linky znázorňují odhadnuté cenové elasticity dle typu.



**Obrázek 1:** Cenové elasticity produktu s mizivým vlivem malé akce na prodeje

Jiným typickým případem je produkt, ve kterém na míře propagace v zásadě nezáleží – podmíněné cenové elasticity jsou si velmi podobné. Prodeje produktu rostou s výší slevy nehladě na míru propagace. Tento případ je znázorněn na Obrázku 2.



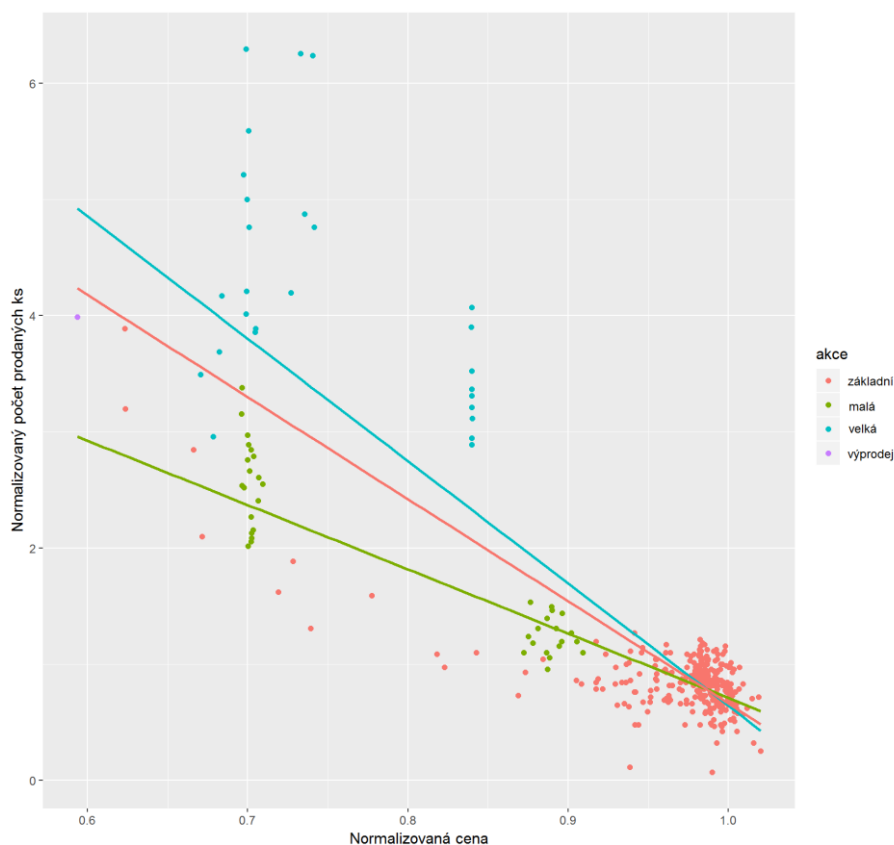
**Obrázek 2:** Cenové elasticity produktu s malým rozdílem vlivu malé a velké akce na prodeje

Třetím základním případem jsou pak prodeje velmi citlivé na míru propagace a zároveň s velkým efektem samotného zlevnění. Takový typ produktu je zobrazen na Obrázku 3. Je patrné, že cenová elasticita podmíněná velkou mírou propagace je výrazně vyšší než cenová elasticita podmíněná malou mírou propagace.

## 4 ZÁVĚR

V práci jsme se zabývali možným přístupem k odhadu cenové elasticity podmíněné mírou propagace s využitím maloobchodních transakčních dat. Navržená metoda je velmi rychlá a je možné elasticity spočítat pro celý sortiment (řádově desítky tisíc produktů) v řádu minut.

Pomocí odhadnutých podmíněných elasticit se povedlo identifikovat typické vlastnosti různých produktů, zejména pak vliv míry propagace na velikost průměrných denních prodejů.



**Obrázek 3:** Cenové elasticity produktu s vysokým vlivem velké akce na prodeje

### Použitá literatura

1. BOLTON, Ruth N. The robustness of retail-level price elasticity estimates. *Journal of Retailing*, 1989, 65.2: 193-219.
2. SHANKAR, Venkatesh; KRISHNAMURTHI, Lakshman. Relating price sensitivity to retailer promotional variables and pricing policy: an empirical analysis. *Journal of Retailing*, 1996, 72.3: 249-272.
3. BOLTON, Ruth N. The relationship between market characteristics and promotional price elasticities. *Marketing Science*, 1989, 8.2: 153-169.

### Kontaktní údaje

Ing. Ondřej Sokol  
 Vysoká škola ekonomická v Praze,  
 Fakulta informatiky a statistiky  
 náměstí Winstona Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
 Email: [ondrej.sokol@vse.cz](mailto:ondrej.sokol@vse.cz)



# APLIKACE ANALÝZY ČASOVÝCH OKEN

## AN APPLICATION OF WINDOW ANALYSIS

*Petra Zýková*

### **Abstrakt**

Článek se zabývá aplikací analýzy časových oken založené na modelech obalu dat zkoumající 38 německých NUTS 2 (Nomenclature of Territorial Units for Statistics) regionů mezi lety 2008 až 2016. Cílem je najít, co nejefektivnější region a celkové pořadí regionů se zahrnutím vlivu času. K dispozici jsou data, obsahují informace o NUTS 2 jednotkách v devíti následujících letech od roku 2008. V DEA modelech jsou použity dva vstupy: práce (zaměstnanost v tisících hodin) a kapitál (hrubý fixní kapitál v milionech euro) a jeden výstup hrubý domácí produkt v milionech euro.

***Klíčová slova:** časové řady, modely analýzy obalu dat, analýza časových oken*

### **Abstract**

This article deals with an application of window analysis based on data envelopment models. The 38 German NUTS 2 (Nomenclature of Territorial Units for Statistics) regions between the years 2008 – 2016 are investigated. The aim is to find the most efficient regions and their ranking dealing with time factor in DEA. The data set contains information about the NUTS 2 regions for nine following years starting by 2008. There are used two inputs – employment (thousand hours worked) and gross fixed capital formation (million Euro) and one output – gross domestic product (million Euro).

***Keywords:** time series, data envelopment analysis, window analysis*

## **1 ÚVOD**

Porovnávání jednotlivých krajů/zemí se dá řešit různými způsoby. Jednou z možností je použití modelů analýzy obalu dat, které vynalezl Charnes a kolektiv v [1] podle myšlenky Farrella [3]. DEA modely počítají relativní míru efektivnosti jednotek. Základní DEA modely nepracují s časovými řadami, proto se pro zahrnutí času používají dynamické DEA modely. Zahrnutí času do analýzy efektivnosti jednotek je důležité neboť může mít vliv při hledání nejefektivnější jednotky. Tento článek se zabývá aplikací dynamických DEA modelů, konkrétně aplikací analýzy časových oken. Analýza časových oken je založena na klouzavých průměrech, jak je ukázáno v [2]. V tomto článku se porovnává efektivnost 38 německých NUTS 2 regionů.

Článek je rozdělen do několika kapitol. V následující kapitole jsou popsány základní DEA modely a jejich dynamická verze se zahrnutím času. Dále je popsáno Německo a jeho

NUTS 2 regiony, poté spočtené míry efektivity podle uvedených modelů. Závěrečná kapitola se věnuje shrnutí výsledků.

## 2 DEA MODELY

Modely analýzy obalu dat (DEA modely – Data Envelopment Analysis) byly navrženy na hodnocení efektivity, výkonnosti nebo produktivity produkčních jednotek. Každá jednotka produkuje určité výstupy a zpracovává určité vstupy. Efektivnost dané jednotky se dá vyjádřit poměrem

$$\text{efektivnost} = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}. \quad (1)$$

Cílem je maximalizovat efektivnost zkoumané  $j_0$ -té jednotky. Základní DEA model lze zapsat následovně:

Maximalizovat

$$U_{j_0} = \frac{\sum_{r=1}^t u_r y_{rj_0}}{\sum_{k=1}^w v_k x_{kj_0}}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^t u_r y_{rj}}{\sum_{k=1}^w v_k x_{kj}} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, t, \\ v_k &\geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, w, \end{aligned} \quad (2)$$

kde  $\mathbf{Y} = \{y_{rj}; r = 1, \dots, t, j = 1, \dots, n\}$  je matice hodnot výstupů,  $\mathbf{X} = \{x_{kj}; k = 1, \dots, w, j = 1, \dots, n\}$  je matice hodnot vstupů,  $u_r$  je váha  $r$ -tého výstupu,  $v_k$  je váha  $k$ -tého vstupu,  $\varepsilon$  je infezimální konstanta (velmi malé číslo).

Množina přípustných řešení je určena tzv. efektivní hranicí. Produkční jednotky ležící na efektivní hranici jsou efektivní. Tj. není možná kombinace nižších vstupů se stejnými výstupy, nebo stejných vstupů s vyššími výstupy.

Model (2) není lineární v účelové funkci ani v omezujících podmínkách, ale může se pomocí Charnes-Cooperovy transformace přepsat na lineární model. Lineární verze modelu orientovaného na vstupy se nazývá CCR model a jeho formulace je následující:

Maximalizovat

$$U_{j_0} = \sum_{r=1}^t u_r y_{rj_0}$$

$$\sum_{k=1}^w v_k x_{kj_0} = 1,$$

za podmíněk

$$\sum_{r=1}^t u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^w v_k x_{kj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, t,$$

$$v_k \geq \varepsilon, \quad k = 1, \dots, w.$$

## 2.1 DEA modely v čase

Předchozí DEA modely analyzují efektivnost zkoumaných jednotek pouze v jednom časovém období. Nejjednodušším způsobem, jak zahrnout vývoj efektivnosti v čase je použití analýzy časových oken (window analysis). Tato dynamická DEA metoda analýzy efektivnosti je založena na klouzavých průměrech. V této metodě se přistupuje k jedné zkoumané jednotce v různých časech jako ke dvěma nezávislým jednotkám z jednoho období.

Máme tedy soubor o  $n$  jednotkách, které jsou definovány  $w$  vstupy a  $t$  výstupy v  $\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, T$  obdobích. Šířka časového okna je  $p$ . Časová okna se překrývají. V závislosti na šířce časového okna, je celkový počet časových oken  $z$ ,  $z = T - p + 1$ . Pro každou zkoumanou jednotku se získá  $p(T - p + 1)$  hodnot míry efektivnosti. Z takto získaných měř efektivnosti se vypočítá aritmetický průměr

$$E_{j_0} = \frac{\sum_{b=1}^z \sum_{c=1}^p U_{bj_0}^c}{z \cdot p}, \quad j_0 = 1, \dots, n, \quad (4)$$

kde  $U_{bj_0}^c$  je míra efektivnosti  $j_0$ -té jednotky v  $b$ -tém okně a v rámci tohoto okna v čase  $c$ .

## 3 NĚMECKO

Německo (Bundesrepublik Deutschland) se skládá z 16 spolkových zemí (Bundesland). Spolkové země jsou NUTS (Nomenclature des Unites Territoriales Statistiques) 1. Dále se Německo dělí na 38 regionů (Bezirk) úrovně NUTS 2. V rámci analýzy je zkoumána efektivnost těchto NUTS 2 regionů pro devět po sobě následujících let od roku 2008 do roku 2016. Použity jsou následující vstupy: práce – zaměstnanost v tisících hodin a kapitál – hrubý fixní kapitál v milionech euro. Jako výstup je použit HDP v milionech euro. Data byla získána z [5]. Jednotlivé regiony jsou k vidění na Obr. 1. Počet analyzovaných jednotek  $n = 38$ , počet vstupů  $w = 2$ , počet výstupů  $t = 1$ , počet po sobě následujících období  $T = 9$ .

Pro analýzu časových oken byla stanovena velikost okna  $p = 3$  a tudíž je počet časových oken  $z = 7$ . V každém časovém okně je tedy  $n \cdot p = 38 \cdot 3 = 114$  jednotek. Pro každé časové okno byl vypočítán model (3). Model (3) byl počítán sedmkrát, vždy pro jiný datový soubor.



Obrázek 1: Německo a jeho regiony podle NUTS, zdroj [4].

V tabulce 1 jsou uvedeny efektivní jednotky (regiony/rok) v jednotlivých časových oknech.

Okno	NUTS 2	rok
1	Hamburg	2008
	Bremen	2009
	Hamburg	2009
	Darmstadt	2010
	Düsseldorf	2010
2	Bremen	2009
	Hamburg	2009
	Darmstadt	2010
	Düsseldorf	2010
	Hamburg	2011
3	Düsseldorf	2010
	Oberbayern	2011
	Hamburg	2012
	Darmstadt	2012
	Düsseldorf	2012
4	Hamburg	2013
	Darmstadt	2013
	Düsseldorf	2013
5	Bremen	2014
	Hamburg	2014
	Darmstadt	2014
6	Bremen	2014
	Hamburg	2015
	Darmstadt	2015
7	Bremen	2014
	Darmstadt	2015
	Hamburg	2016
	Düsseldorf	2016

**Tabulka 1:** Efektivní NUTS 2 v jednotlivých časových oknech.

Z tabulky 1 je vidět, že při analýze časových oken bylo nalezeno celkem 28 efektivních jednotek NUTS 2. Nejčastěji se jako efektivní objevoval Hamburg, celkem devětkrát a v každém časovém okně minimálně jednou viz tabulka 2.

<b>NUTS 2 region</b>	<b>efektivní</b>
Hamburg	9
Darmstadt	7
Düsseldorf	6
Bremen	5
Oberbayern	1

**Tabulka 2:** Kolikrát se který NUTS 2 region umístil jako efektivní ve všech časových oknech.

Pro každý region NUTS 2 bylo vypočítáno  $p(T-p+1) = 3(9-3+1) = 21$  hodnot míry efektivity. Podle (4) byl vypočítán průměr pro každý region NUTS 2. V tabulce 3 jsou uvedeny průměrné míry efektivity pro deset nejefektivnějších NUTS 2 regionů.

<b>NUTS 2 region</b>	<b>průměr</b>	<b>pořadí</b>
Düsseldorf	0,988693	1
Darmstadt	0,988346	2
Hamburg	0,987742	3
Bremen	0,964551	4
Köln	0,954420	5
Oberbayern	0,954144	6
Arnsberg	0,929282	7
Stuttgart	0,918269	8
Hannover	0,876437	9
Karlsruhe	0,875369	10

**Tabulka 3:** Průměrné míry efektivity a pořadí pro nejefektivnějších deset NUTS 2 regionů.

V tabulce 4 jsou uvedeny průměrné míry efektivity pro osm nejméně efektivních NUTS 2 regionů.

## 4 ZÁVĚR

V článku byla provedena analýza efektivity 38 německých NUTS 2 regionů pomocí modelů obalu dat. Konkrétně pomocí dynamické analýzy časových oken pro devět po sobě jdoucích let, od roku 2008 do roku 2016. Pro výpočet CCR modelu orientovaného na vstupy byly použity dva vstupy: práce (zaměstnanost v tisících hodin) a kapitál (hrubý fixní kapitál v milionech euro) a jeden výstup hrubý domácí produkt v milionech euro. Celkem bylo nalezeno pět efektivních regionů: Bremen, Darmstadt, Düsseldorf, Hamburg a Oberbayern. Jako nejefektivnější byl zvolen region Hamburg, protože byl devět krát efektivní v jednotlivých časových oknech.

Optimalizační výpočty byly provedeny v programu Lingo.

NUTS 2 region	průměr	pořadí
Sachsen-Anhalt	0,743807	31
Leipzig	0,721729	32
Chemnitz	0,714484	33
Thüringen	0,702490	34
Brandenburg	0,700364	35
Trier	0,692924	36
Mecklenburg-Vorpommern	0,658876	37
Dresden	0,654308	38

**Tabulka 4:** Průměrné míry efektivnosti a pořadí pro osm nejméně efektivních NUTS 2 regionů.

#### Použitá literatura

1. Charnes, A., Cooper, W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), pp. 429-444.
2. JABLONSKÝ, J., DLOUHÝ M., ZÝKOVÁ P. *Modely analýzy obalu dat*. Praha: Professional Publishing, 2019.
3. Farrell, M. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 120(3): 253-290.
4. <https://www.czso.cz/documents/10180/27492462/de.png/2f8cb9fb-e48a-4d76-930f-ce40d9039575?version=1.1&t=1526451413128>
5. <https://ec.europa.eu/eurostat/data/database>

#### Kontaktní údaje

Ing. Bc. Petra Zýková.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Náměstí Winstona Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3

email: [petra.zykova@vse.cz](mailto:petra.zykova@vse.cz)