

Katedra ekonometrie  
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie  
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum

## **MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII A OPERAČNÍM VÝZKUMU**

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Slovenskej spoločnosti pre operačný výskum

ZBORNÍK

22. november – 24. november 2023

22. listopad – 24. listopad 2023

Praha

**Programový výbor:**

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava  
prof. Ing. Mgr. Martin Dlouhý, Dr., MSc., VŠE Praha  
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, VŠE Praha  
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha  
prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava  
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

**Recenzenti:**

Ing. Adam Borovička, Ph.D., VŠE Praha  
Dr. h. c., prof. Ing. Michal Fendek, PhD., EU Bratislava  
doc. Ing. Andrea Furková, PhD., EU Bratislava  
doc. Ing. Marián Goga, PhD., EU Bratislava  
doc. Ing. Jaroslav Kultán, PhD., EU Bratislava  
Ing. Tomáš Majer, PhD., UNIZA v Žiline  
doc. Ing. Jan Zouhar, Ph.D., VŠE Praha

**Organizačný výbor:**

doc. Ing. Brian König, PhD.

**AH 8,94**

**Kontakt:** [brian.konig@euba.sk](mailto:brian.konig@euba.sk)

**Editor:** doc. Ing. Brian König, PhD.

**Web editor:** prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,  
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3  
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,  
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,  
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2023

ISBN: 978-80-225-5107-6

# Obsah

<i>Ivan Brezina, Pavel Gežík, Juraj Pekár, Reiff Marian:</i> <u>ENVIRONMENTÁLNE MODELY</u>	5
<i>Daniel Dudek:</i> <u>PODPORA METODIKY MAT VO VEREJNOM OBSTARÁVANÍ POMOCOUCOUBOTOV</u>	13
<i>Michaela Chocholatá:</i> <u>EMISIE OXIDU UHOĽNATÉHO V SLOVENSKEJ REPUBLIKE PRE RÔZNE ÚROVNE REGIONÁLNEHO ČLEENENIA</u>	22
<i>Dominik Kavřík:</i> <u>DYNAMICKÁ ANALÝZA ČESKÝCH A POLSKÝCH SMĚNNÝCH KURZŮ</u>	29
<i>Brian König:</i> <u>VPLYV ZAHRNUTIA VNÚTORNEHO OBCHODU NA ODHAD EFEKTU ČLENSTVA V EU V GRAVITAČNOM MODELI</u>	36
<i>Martin Konopásek:</i> <u>APLIKACE KOMPLEXNÍHO EKONOMETRICKÉHO MODELU S PROSTOROVÝMI A ČASOVÝMI CHARAKTERISTIKAMI</u>	42
<i>Petr Krautwurm:</i> <u>TAYLOROVA APROXIMACE DRUHÉHO ŘÁDU CES FUNKCE: NEJISTOTA VE SPOTŘEBĚ, SUBSTITY A KOMPLEMENTY</u>	61
<i>Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi:</i> <u>PRÍSTUP K WEBOVÝM DATABÁZAM S JAZYKOM R</u>	68
<i>Richard Mišek:</i> <u>ALOKÁCIA AKTÍV DO PORTFÓLIÍ S VYUŽITÍM JAZYKA PYTHON</u>	75
<i>Veronika Miřková, Miroslava Jánořová:</i> <u>KLIMATICKÁ MIGRÁCIA: PREHLADOVÁ ŠTÚDIA</u>	81
<i>Vladimír Mlynarovič:</i> <u>VÁHY KRITÉRIÍ V ÚLOHÁCH KOMPLEXNÉHO VYHODNOCOVANIA MIGRAČNÝCH POLITÍK</u>	87
<i>Jakub Neugebauer:</i> <u>ANALÝZA ELASTICITY POPTÁVKY PO PIVU V ČESKÉ REPUBLICE</u>	91
<i>Jan Rejthar:</i> <u>VLIV VIDEOHER NA EKONOMICKÝ RŮST</u>	98

<i>Allan Jose Sequeira Lopez, Zuzana Čičková:</i> <u>APLIKAČNÉ VYUŽITIE PRIESTOROVÝCH HIER</u>	103
<i>Tereza Singerová:</i> <u>VLASTNOSTI KONEČNĚ VELKÝCH VZORKŮ A MONTE CARLO PERFORMANCE GARCH MODELŮ</u>	108
<i>Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková:</i> <u>PRÍSTUP K WEBOVÝM DATABÁZAM S JAZYKOM PYTHON</u>	116
<i>Vojtěch Vávra:</i> <u>ANALÝZA ČESKÝCH FIREM A TECHNOLOGICKÝCH UKAZATELŮ POMOCÍ DEA MODELU</u>	122
<i>Lukáš Veverka:</i> <u>PŘEHLED LITERATURY: MODELOVÁNÍ MARKETINGOVÉHO MIXU A ROZKLAD PRODEJŮ POMOCÍ EKONOMETRIE</u>	127

# ENVIRONMENTÁLNE MODELY

## ENVIRONMENTAL MODELS

*Ivan Brezina, Pavel Gežík, Juraj Pekár, Marian Reiff*

### **Abstrakt**

Obsahom environmentálneho modelovania je reprezentácia procesov vyskytujúcich sa v reálnom svete v priestore a čase na ktoré možno aplikovať súbor koncepcií, stratégií a taktík, ale tiež metód a spôsobov riešenia environmentálnych problémov. Pritom možno s úspechom využívať aj matematické environmentálne modely, ktoré umožňujú predikovať možnosti výskytu rôznych situácií, modelovať rôzne scenáre, môžu pomôcť predpovedať účinky ľudských činností na ekosystémy. Predložený príspevok sa zaoberá charakteristikou environmentálnych modelov a ich vzťahom tak k ekonomike, ako aj k ochrane životného prostredia. Preto environmentálne modely rešpektujú nielen ekonomické, ale aj ekologické ciele.

**KLúčové slová:** *environmentálne modelovanie, Eco-Eco modely*

### **Abstract**

The content of environmental modelling is the representation of processes occurring in the real world in space and time, to which a set of concepts, strategies and tactics, but also methods and ways of solving environmental problems, can be applied. At the same time, it is also possible to use mathematical environmental models with success, which make it possible to predict the possibilities of the occurrence of various situations, to model various scenarios, and to help predict the effects of human activities on ecosystems. The submitted contribution deals with the characteristics of environmental models and their relationship to both the economy and environmental protection. Therefore, environmental models respect not only economic but also ecological goals.

**Keywords:** *Environmental modelling, Eco-Eco models*

## **1 ÚVOD**

Environmentálny manažment reprezentuje taký systém riadenia, ktorý je zameraný na ochranu a tvorbu životného prostredia na báze cieľov trvalo udržateľného rozvoja na globálnej, regionálnej a lokálnej úrovni. Primárnym cieľom environmentálneho manažmentu je nájsť riešenie ako riadiť spoločenské a podnikové aktivity s minimálnym dopadom na degradáciu životného prostredia. Rôzne rozhodnutia na modeloch, ktoré dobre reprezentujú ich dopady na životné prostredie. Environmentálny manažment môže pomôcť organizáciám zlepšiť ich konkurencieschopnosť (López-Gamero a kol., 2009) a javí sa tiež ako vhodný kontrolný administratívny nástroj, ktorý zabráňuje nadbytočným škodám na životnom prostredí (Molina-Azorín a kol., 2015). Pretože základom environmentálneho manažmentu je súbor koncepcií, stratégií a taktík, ale tiež metód a spôsobov riešenia environmentálnych problémov, možno pri jeho naplňaní s úspechom využívať aj matematické environmentálne modely, ktoré umožňujú predikovať možnosti výskytu rôznych situácií, modelovať rôzne scenáre, môžu pomôcť predpovedať účinky ľudských činností na ekosystémy.

V tomto kontexte si environmentálny manažment vyžaduje použitie takých metodík, v rámci ktorých je formulované zapojenie zainteresovaných strán, začlenené sú multidisciplinárne znalosti, integrované zložité kritériá zahrňajúce kompromisy spájajúce rôzne faktory (ekonomické, environmentálne, sociálne, technologické, sociálno-politické) a zohľadňované heterogénne informácie kvantitatívneho aj kvalitatívneho charakteru (de Fátima Teles a de Sousa, 2014).

## **2 ENVIRONMENTÁLNE EKONOMICKÉ MODELOVANIE**

Environmentálne modelovanie sa zaoberá reprezentáciou procesov vyskytujúcich sa v reálnom svete v priestore a čase. Environmentálne modely pritom možno využívať tak na makroekonomickej, ako aj na mikroekonomickej úrovni. Na makroekonomickej úrovni sú to predovšetkým modely spotreby obnoviteľných a neobnoviteľných zdrojov, agro-ekologické a priemyselno-ekologické modely, modely znečisťovania ovzdušia a znečisťovania vody, modely človeka a životného prostredia. Na mikroekonomickej úrovni sú environmentálne modely zamerané predovšetkým na eko-eko modely, ktoré umožňujú modifikovať klasické optimalizačné výrobné procesy, optimalizáciu odpadového hospodárstva a dopady environmentálneho modelovania na hodnotenie eko-efektívnosti modelov, ale tiež sú orientované na reverznú a distribučnú logistiku, environmentálne modelovanie v obstarávaní a zásobovacom procese, environmentálne modelovanie vo výrobnej logistike, alokačné modely v environmentálnom modelovaní, modelovanie v odpadovom hospodárstve a úlohy rozvozu a zvozu.

Vymedzenie pojmu environmentálne modelovanie je pomerne komplikované a faktom ostáva, že skoro akékoľvek modelovanie ekonomickej situácie možno skúmať aj z environmentálneho pohľadu (Gežík, 2023). V ostatnom období sa čoraz viac používa pojem ECO-ECO modelovanie, ktorý vychádza z modelového prístupu „Eco-Eco Models“ (eco(nomy)-eco(logy)) (Lifset a Lombardi, 1997). Ide teda o triedu modelov orientovaných na riešenie nielen ekonomických, ale aj ekologických cieľov.

Eko-eko modely reprezentujú komplexné vzťahy medzi ekonomikou a životným prostredím a skúmajú ich vzájomné interakcie. Lifset a Lombardi (Lifset a Lombardi, 1997) uvádzajú, že tradičné ekonomické modely a prístupy často nezohľadňujú dostatočne environmentálne faktory a ich dopad na ekonomiku a spoločnosť. Preto sa eko-eko modely snažia vyplniť túto medzeru tým, že integrujú environmentálne premenné a dôsledky do ekonomických modelov a analýz, pričom kladú dôraz na dôležitosť integrovaného prístupu k analýze a riadeniu environmentálnych a ekonomických problémov.

Modifikované modely orientované na optimalizáciu produkcie, transportu atď., ktoré riešia materiálovú, resp. finančnú náročnosť, preferujú riešenie využívajúce recykláciu materiálov a produktov. A práve recyklačná politika vedie k využívaniu environmentálneho modelovania, ktoré je charakterizované pojmom reverzná logistika (Dekker a kol., 2004). Vo svojich začiatkoch tieto modely riešili problematiku riadenia výroby a zásob s ohľadom na recykláciu a opätovné využitie produktov. Použitie termínu „reverzná logistika“ v tomto kontexte sa týkalo riadenia toku materiálov a produktov späť v reťazci dodávateľa po ich spotrebe alebo použití a tak sa k tomu pridali aj úlohy transportu (Gežík, 2023). Reverzná logistika definovaná ako súbor činností, ktoré sú spojené s riadením a optimalizáciou toku materiálov, informácií a finančných prostriedkov od koncových miest použitia späť k miestam ich pôvodného vzniku s cieľom dosiahnuť znovupoužitie, recykláciu alebo správne nakladanie s odpadom. Modelovanie v reverznej logistike je vždy spájané s environmentálnym aspektom, a teda eliminuje problém, ktorý bol spomenutý vyššie (Fleischmann, 2012) a často aj reprezentovaný kvantitatívnymi modelmi, ktoré podporujú rozhodovanie v reverznej logistike (Dekker a kol., 2004). Spomenuté modely sa odlišujú od

tradičných modelov tým, že sa zameriavajú na obnoviteľnosť, znovupoužívanie a recykláciu zdrojov s cieľom znížiť spotrebu a produkciu odpadu. Tieto modely sa sústreďujú na efektívny návrh výrobkov, ich opravu, predĺženie životnosti a hľadanie nových možností využitia. Zaoberajú sa aj recykláciou a obnoviteľnými zdrojmi, pričom sa snažia znovu využiť materiály a zdroje z odpadu. Modely kruhového hospodárstva tiež podporujú zdieľanie dopravných prostriedkov, rekonštrukciu výrobkov, návrh pre recykláciu, obchodovanie s odpadom a rozšírenú zodpovednosť výrobcov (Gežík, 2023).

### **3 ENVIRONMENTÁLNE MODELÝ AKO NÁSTROJE ENVIRONMENTÁLNEHO MANAŽMENTU**

V oblasti kontroly životného prostredia prostredníctvom modelov matematického programovania možno zaregistrovať prvé práce od roku 1960 (Greenberg, 1995). Zaujímavý prehľad modelov matematického programovania v manažmente znečistenia ovzdušia poskytujú Cooper a kol. (1997), pričom sa zameriavajú na stratosférické poškodzovanie ozónovej vrstvy (chemikálie poškadzujúce ozónovú vrstvu alebo ODC, najmä chlórfluóruhl'ovodíky (CFC) s relatívne dobre kvantifikovanými rizikami); kritériá znečisťujúcich látok (ozón (O<sub>3</sub>), oxid uhoľnatý (CO), oxid siričitý (SO<sub>2</sub>), oxid dusičitý (NO<sub>2</sub>), olovo (Pb) a častice menšie ako 10 mikrónov (PM<sub>10</sub>), ktoré takisto predstavujú relatívne dobre kvantifikované riziká); kyslé zrážanie (oxidy dusíka (NO<sub>x</sub>) a oxidy síry (SO<sub>x</sub>) s relatívne dobre kvantifikovateľnými rizikami); globálne otepľovanie/zmena klímy (oxid uhličitý (CO<sub>2</sub>), metán (CH<sub>4</sub>), oxid dusný (N<sub>2</sub>O) a freóny – s veľmi neistými rizikami); toxické látky alebo HAPS (nebezpečné látky znečisťujúce ovzdušie): stovky druhov plyných chemikálií a častíc s neistým rizikom.

Novší prehľad aplikácií matematického programovania v manažmente životného prostredia (predovšetkým vodných zdrojov) možno nájsť v (Archibald a Marshall, 2018). Títo autori predstavujú model s prvkami neurčitosti s využitím Markovovho procesu. Komplexný pohľad na matematické modelovanie v ekonomike, ekológii a životnom prostredí poskytujú Hritonenko a Yatsenko (1999). Prezentujú nielen základné princípy a nástroje matematického modelovania, matematické modely v ekonómii (súhrnné modely ekonomickej dynamiky, modelovanie technologických zmien, makroekonomické kapitálové modely, modely optimalizácie ekonomickej obnovy), ale predovšetkým modely v ekológii a životnom prostredí, matematické modely biologických populácií, modelovanie heterogénnych a riadených populácií, modely šírenia znečistenia ovzdušia, resp. modely šírenia znečistenia vody. Na ich základe formulujú modely ekonomicko-environmentálnych systémov, ktoré umožňujú modelovanie neobnoviteľných zdrojov, modelovanie ochrany životného prostredia, modelovanie globálnej dynamiky.

Pre podporu využívania ekologických modelov na podporu manažmentu môžu slúžiť príspevky z publikácie Schuwirth a kol. (2019), v ktorej sú nosnými témami pochopenie kauzalít ekonomických a ekologických systémov, formulácia vstupných a výstupných premenných modelu ako požiadavka na manažment riešených procesov, priestorové a časové rozlíšenie jednotlivých aspektov modelu, zapracovanie určitej miery neistoty modelu, ktorú je možné kvantifikovať, overenie dostatočnej predikčnej výkonnosti modelu, aby bol užitočný pri riešení problému riadenia, transparentná komunikácia postupu modelovania, jeho predpokladov a nedostatkov.

Uvedené príklady environmentálnych modelov ukazujú možnosti využitia modelovania do rozhodovania o životnom prostredí. To však prináša mnoho výziev pred subjekty s rozhodovacou právomocou v oblasti životného prostredia a environmentálnymi modelármi s cieľom rozvíjať spoločné porozumenie a umožniť prenos poznatkov medzi vedou a praxou v

oboch smeroch (napr. Letcher a Jakeman, 2009). Ideálny model na podporu rozhodnutí environmentálneho manažerstva by mal byť priamo spojený s cieľmi riadenia, mal by predpovedať účinky alternatív riadenia, zahŕňať primeranú presnosť a správny odhad neistoty predikcie, byť aplikovateľný v rôznom priestore a čase a byť ľahko pochopiteľný.

Práve pre špecifické vlastnosti možno environmentálne modelovanie charakterizovať rôznym spôsobom. Napríklad *Designing Buildings* definuje environmentálne modelovanie ako „aplikáciu multidisciplinárnych znalostí na vysvetlenie, skúmanie a predpovedanie reakcie Zeme na zmeny životného prostredia, či už prírodné alebo spôsobené človekom“. Inak možno environmentálne modelovanie chápať ako tvorbu a používanie matematických modelov prostredia, pričom sa to vo všeobecnosti aplikuje buď na čisto výskumné účely, alebo na informovanie o rozhodovaní a politike. The Faculty of Environmental Sciences Czech University of Life Sciences Prague definovala environmentálne modelovanie ako „modelovanie prírodných procesov spojených s neživou prírodou, ako je hydrologické a hydraulické modelovanie, modelovanie chemických procesov a procesov v atmosfére“. Hauduc a kol. (2015) definuje environmentálne modelovanie ako proces aplikácie „viacerých premenných a viacerých cieľov v systémoch s mnohými procesmi prebiehajúcimi v rôznych časových intervaloch. Environmental Virtual Observatories definuje environmentálne modelovanie ako „transformáciu nespracovaných údajov na užitočné informácie prostredníctvom syntézy, simulácie a predikcie“. Z pohľadu využívania informačných technológií je zaujímavé charakterizovať environmentálne modelovanie ako proces používania počítačových algoritmov na predpovedanie distribúcie druhov v geografickom priestore na základe matematického vyjadrenia ich známeho distribúcie v environmentálnom priestore.

Súhrnne možno environmentálne modelovanie charakterizovať ako vývoj efektívnych pracovných systémov (ktoré môžu byť vo forme výpočtovej, matematickej, štatistickej alebo priestorovej aplikácie) na odhadovanie, hodnotenie alebo napodobňovanie skutočnej environmentálnej situácie s cieľom ukázať adekvátne pochopenie konceptu, možnosti práce alebo optimalizácie známych parametrov a ponúkajú riešenia, ktoré môžu pomáhať pri rozhodovaní.

## **4 DRUHY ENVIRONMENTÁLNYCH MODELOV**

Druhy environmentálnych modelov zodpovedajú rôznym typom environmentálnych systémov. Vo všeobecnosti možno environmentálne systémy rozdeliť aspoň do troch hlavných kategórií systémov:

- hydrologické,
- ekologické a
- klimatické.

Tieto systémy nie sú na sebe úplne nezávislé a v mnohých prípadoch môžu byť navzájom podmnožinami. Napríklad hydrologické systémy povrchových vôd sú často súčasťou oveľa väčších klimatických systémov, ale aj sa mnohé hlavné environmentálne systémy v sebe zahŕňajú ďalšie ekologické podsystemy.

Hydrologické systémy napríklad pozostávajú zo samostatných podsystemov povrchových vôd; podpovrchové podsystemy, resp. pobrežných podsystemy atď. Tieto systémy možno charakterizovať ako samostatné podsystemy, aj keď nie sú na sebe úplne nezávislé. Odvodnenie zo systému povrchových vôd prispieva k doplneniu systému podzemných vôd,

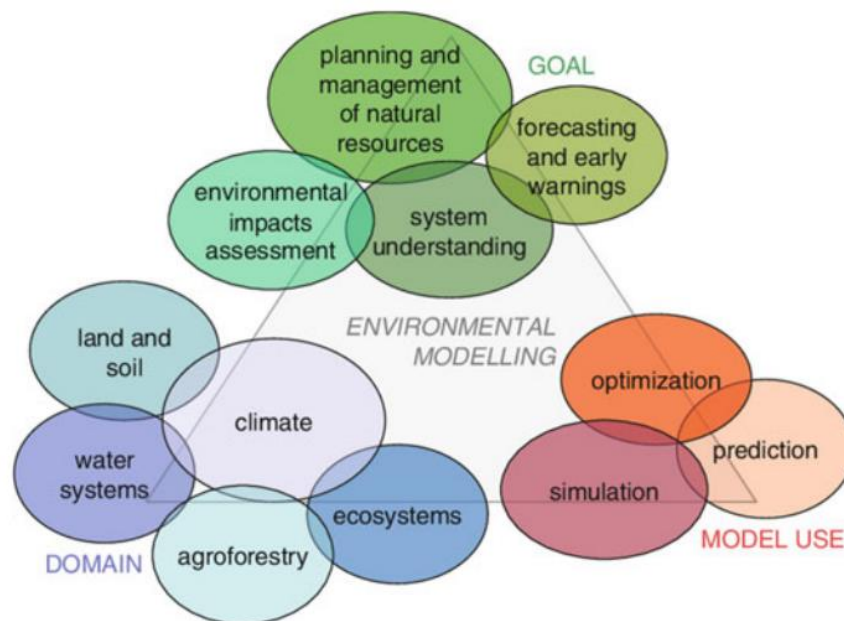


vypúšťanie zo systému podzemných vôd prispieva do jazier a riek, voda a znečisťujúce látky z riek a z pobrežných oblastí stekajú do mora a prispievajú k pobrežným systémom.

Ekologické systémy tvoria dva hlavné typy podsystemov: poľnohospodárske systémy a systémy voľne žijúcich živočíchov. Ani tieto systémy nie sú na sebe úplne nezávislé, pretože zmeny v jednom systéme často ovplyvnia druhý. Napríklad zavedenie nových druhov plodín zmení dostupnú zásobu potravy pre rôzne pôvodné populácie, čo môže zvýšiť alebo znížiť počet populácie v závislosti od schopnosti rôznych druhov prispôbiť svoju stravu a biotop. Zvýšené čistenie pôdy na poľnohospodárske využitie bude mať vplyv aj na pôvodné obyvateľstvo.

Klimatický systém tvoria atmosféra, hydrosféra, litosféra, kryosféra a biosféra, ktoré ako navzájom súvisiace podsystemy vytvárajú zemskú klímu. Klimatický systém Zeme v sebe pritom zahŕňa vnútornú dynamiku, ktorá zapríčiňuje premenlivosť klímy, ale môže aj zoslabovať alebo zosilňovať klimatické zmeny. Najdynamickejšou zložkou klimatického systému je pritom atmosféra s rýchlou výmenou hmoty (vody vo forme vodnej pary alebo atmosférických zrážok) medzi pevninou a oceánom. Človek síce nie je zložkou klimatického systému, jeho vplyv naň je však vysoký, pretože ľudská činnosť ovplyvňuje zloženie atmosféry a fyzikálne i biologické vlastnosti zemského povrchu.

Ako už bolo uvedené, v súčasnej literatúre sa prezentujú rôzne typy environmentálnych modelov. Obrázok 1 graficky prezentuje obrazovú koncepciu environmentálneho modelovania.



Obr. 1. Grafická reprezentácia environmentálneho modelovania

Zdroj: Ogola, 2007

Inú charakteristiku environmentálnych modelov prezentuje Hassan (2018). Uvádza, že vo všeobecnosti možno kategorizovať modely do nasledujúcich typov: fyzický model, analogický model, konceptuálny model, výpočtovo/matematický model. Konceptuálny model a matematický model sú pritom vysoko relevantné v oblasti environmentálneho modelovania. Konceptuálny model môže predstavovať schematický, resp. blokový diagram, obrázkové alebo písomné vyjadrenia. Bez ohľadu na formu by mali byť jasne definované vzťahy a toky

medzi komponentmi. Matematický model pozostáva z matematických výrazov, ktoré sa skonštruujú po vývoji konceptuálneho modelu.

Environmentálne modely zvyčajne v sebe zahŕňajú všetky uvedené atribúty. A tak možno na základe Prochaska a Theodore (2018) rozdeliť environmentálne modely (empirické (matematické a štatistické) modely, konceptuálne modely (modely so súhrnnými parametrami), procesné (fyzikálne) modely) do nasledujúcich skupín:

- 1 Hydrologické modely
  - 1.1 Modely povrchovej vody
  - 1.2 Modely podpovrchových vodných systémov
  - 1.3 Modely pobrežných systémov
- 2 Ekologické modely
  - 2.1 Modely poľnohospodárskych systémov
  - 2.2 Modely systémov voľne žijúcich živočíchov
- 3 Klimatické modely (globálne modely, regionálne modely)
  - 3.1 Modely pre oceány
  - 3.2 Atmosférické modely
  - 3.3 Modely povrchu pôdy

Veľmi podrobné rozdelenie modelov a ich charakteristiku uvádza Gežík (2023):

- Modely trvalo udržateľného rozvoja
  - Modely trvalo udržateľného rozvoja
  - Modely environmentálnej účinnosti a environmentálneho
  - Modely vyhodnocovania environmentálnej efektívnosti využívania zdrojov
  - Modely udržateľnej spotreby
  - Modely preferovania obnoviteľných zdrojov
  - Modely ekologického zlomu
  - Modely ekologického stropu
  - Modely environmentálnej externalizácie
  - Modely efektívnosti spotreby ekologicky navrhnutých produktov
  - Modely ekologických inovácií
  - Modely environmentálnej správy, environmentálneho manažmentu a auditu
  - Modely ekologických a zelených daní
- Modely kruhového hospodárstva a reverznej logistiky
  - Modely environmentálnej a zdieľanej dopravy
  - Modely obnovy, prerobenia a opätovného použitia
  - Modely efektu recyklácie výrobkov a efektu recyklácie zdrojov
  - Modely obchodovania s odpadom
  - Modely rozšírenej zodpovednosti výrobcu
  - Modely náhradných dielov
  - Modely zavádzania ekologických inovácií vo výrobe
  - Modely ekologického návrhu/dizajnu
  - Modely zdieľanej ekonomiky
  - Modely servisných služieb
  - Modely digitálneho hospodárstva
- Modely spojené s ochranou prírody
  - Klimatické modely
  - Modely ochrany chránených krajinných oblastí
  - Modely ochrany ovzdušia
  - Modely ochrany vodných zdrojov

- Modely ochrany pôdy pred znečistením a stratou kvality
- Modely ochrany biodiverzity
- Modely hospodárenia ekosystémov

## 5 ZÁVER

Environmentálne modelovanie a jeho integrácia do ekonomických procesov sú v súčasnej dobe mimoriadne dôležité a aktuálne témy. Environmentálne modely integrujú environmentálne aspekty do ekonomických analýz a poskytujú základ pre výskum v oblasti environmentálneho modelovania a politik ochrany životného prostredia. Snaha dosiahnuť rovnováhu medzi ekonomickým rastom, sociálnym rozvojom a ochranou životného prostredia je novým aspektom v oblasti modelovania ekonomických procesov. Environmentálne modelovanie tak poskytuje rámec a nástroje pre výskum a rozhodovanie s cieľom minimalizovať negatívne vplyvy na životné prostredie a dosiahnuť udržateľnosť.

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia výskumného projektu VEGA – 1/0120/23 „Environmentálne modely ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí“.**

### Použitá literatúra

1. ARCHIBALD, T.W. and MARSHALL, S.E., 2018. Review of mathematical programming applications in water resource management under uncertainty. *Environmental Modeling & Assessment*, 23, pp.753-777.
2. BARNSLEY, M.J., 2007. *Environmental modeling: A practical introduction*. CRC Press.
3. BROMAN, G.I. and ROBERT, K.H., 2017. A framework for strategic sustainable development. *Journal of cleaner production*, 140, pp.17-31.
4. COOPER, W.W., HEMPHILL, H., HUANG, Z., LI, S., LELAS, V. and SULLIVAN, D.W., 1997. Survey of mathematical programming models in air pollution management. *European Journal of Operational Research*, 96(1), pp.1-35.
5. DEKKER, R., FLEISCHMANN, M., INDERFURTH, K. and Van WASSENHOVE, L. 2004. *Reverse logistics: quantitative models for closed-loop supply chains*. Springer Science & Business Media.
6. DE FÁTIMA TELES, M. and DE SOUSA, J.F., 2014. Environmental management and business strategy: Structuring the decision-making support in a public transport company. *Transportation research procedia*, 3, pp.155-164.
7. FLEISCHMANN, M., 2012. *Quantitative models for reverse logistics* (Vol. 501). Springer Science & Business Media.
8. GEŽÍK, P., 2023, Environmentálne modely, ich stručný prehľad, druhy týchto modelov a ich rozdelenie do skupín, In: Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XV: zborník príspevkov z medzinárodného vedeckého seminára, 24. – 26. máj 2023, (Púchov, Slovensko).
9. GREENBERG, H.J., 1995. Mathematical programming models for environmental quality control. *Operations Research*, 43(4), pp.578-622.
10. HASSAN, Q.K., 2018. Environmental Modelling.
11. HAUDUC, H., NEUMANN, M.B., MUSCHALLA, D., GAMERITH, V., GILLOT, S. and VANROLLEGHEM, P.A., 2015. Efficiency criteria for environmental model quality assessment: A review and its application to wastewater treatment. *Environmental Modelling & Software*, 68, pp.196-204.
12. HRITONENKO, N. and YATSENKO, Y., 1999. *Mathematical modeling in economics, ecology and the environment*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

13. LETCHER, R.A. and JAKEMAN, A.J., 2009. Types of environmental models. *Water and Development*, 2, pp.131-154.
14. LIFSET, R. and LOMBARDI, R., 1997, December. Who should pay and why? Some thoughts on the conceptual foundations for the assignment of extended producer responsibility. In *Proceedings of OECD International Workshop on EPR, Ottawa, Canada*.
15. LÓPEZ-GAMERO, M.D., MOLINA-AZORÍN, J.F. and CLAVER-CORTÉS, E., 2009. The whole relationship between environmental variables and firm performance: Competitive advantage and firm resources as mediator variables. *Journal of environmental management*, 90(10), pp.3110-3121.
16. MOLINA-AZORÍN, J.F., TARÍ, J.J., PEREIRA-MOLINER, J., LOPEZ-GAMERO, M.D. and PERTUSA-ORTEGA, E.M., 2015. The effects of quality and environmental management on competitive advantage: A mixed methods study in the hotel industry. *Tourism Management*, 50, pp.41-54.
17. OGOLA, P.F.A., 2007. Environmental impact assessment general procedures. *Short Course II on Surface Exploration for Geothermal Resources, organized by UNUGTP and KenGen, at Lake Naivasha, Kenya*, pp.2-17.
18. PROCHASKA, C. and THEODORE, L., 2018. *Introduction to mathematical methods for environmental engineers and scientists*. John Wiley & Sons.
19. SCHUWIRTH, N., BORGWARDT, F., DOMISCH, S., FRIEDRICHS, M., KATTWINKEL, M., KNEIS, D., KUEMMERLEN, M., LANGHANS, S.D., MARTÍNEZ-LÓPEZ, J. and VERMEIREN, P., 2019. How to make ecological models useful for environmental management. *Ecological Modelling*, 411, p.108784.

#### **Kontaktné údaje**

prof. Ing. Ivan BREZINA, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 821

email: ivan.brezina@euba.sk

Ing. Pavel GEŽÍK, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: pavel.gezik@euba.sk

prof. Mgr. Juraj PEKÁR, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: juraj.pekap@euba.sk

doc. Ing. Marian REIFF, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: marian.reiff@euba.sk

# PODPORA METODIKY MAT VO VEREJNOM OBSTARÁVANÍ POMOCOUCO CHATBOTOV

## SUPPORTING THE MAT METHODOLOGY IN PUBLIC PROCUREMENT USING CHATBOTS

*Daniel Dudek*

### Abstrakt

Výhodnosť ponúk predkladaných súkromnými subjektami vo verejné obstarávanie a výber víťaznej ponuky v Európskej únii boli historicky vykonávané len podľa jedno-kriteriálnej metodiky MEAT (najviac ekonomicky výhodný tender), teda sa vyberala len najlacnejšia ponuka. Problém s týmto prístupom bolo to že takýmto spôsobom obstarávatelia nemali možnosť prehodnotiť rôzne iné kritéria ako napríklad kvalita, ekologický dopad alebo sociálne faktory. Cieľom tohto príspevku je zmapovať obstarávateľom spôsob zjednodušenia vyhodnocovania alternatívnych ponúk pri verejnom obstarávaní pri podpore chatbotov, pričom takéto zjednodušenie ich motivuje k vykonávaniu verejného obstarávania pomocou metódy najviac výhodnej ponuky.

**Kľúčové slová:** *Verejné obstarávanie, Viac-kriteriálne rozhodovanie, Umelá inteligencia, Digitálna Štátna Správa, Novovznikajúce technológie*

### Abstract

Historically, evaluating bids submitted by private entities in public procurement and selecting the winning bid in the European Union has been carried out only according to the single criteria most economically advantageous tender methodology, i.e., only the cheapest bid was awarded. The problem with this approach was that, in this way, contracting authorities could not review various other criteria such as quality, environmental impact, or social factors. The goal of this paper is to map means for procuring entities to simplify the evaluation of alternative tenders in procurement with the support of chatbots, where such simplification would motivate procuring entities to perform public procurement using the most advantageous tender method.

**Keywords:** *Public Procurement, Multi-Criteria Decision Making, Artificial Intelligence, Digital Government, Emerging Technologies*

## 1 INTRODUCTION

Artificial intelligence and new chatbots can provide information, code in any programming language, calculate mathematical problems or create art. Providing such services can simplify several processes, as there is no need to remember large amounts of information or know how to code professionally or calculate complex mathematical functions. However, it must be noted that artificial intelligence based on neural networks is only a model of reality, much like the part of the human brain responsible for processing similar activity, and therefore is, susceptible to errors and imperfections in the information provided. While this requires checking the outputs of such a model, *over time, artificial intelligence will become more accurate and reliable than natural intelligence.*

The procurement process from the contracting authority's point of view can be divided into five parts: *preparation, publication of the contract, selection of the economic operator,*

*award of the operator, and signing of the contract* (The European Parliament, 2014). In each phase, AI support could be applied in some parts of the process, however, this paper will only focus on part of selecting the economic entity. In this phase, the contracting authority assesses the bids or proposals received from the economic operators (which represent an alternative) and selects the most suitable one based on predetermined criteria.

Our vision is to combine the more efficient MAT methodology with the incorporation of a chatbot as a support for the execution of the aforementioned methodology, which would guarantee a simplification of the process, at least to the difficulty level it was when using the MEAT methodology. In this way, we would like to use the MAT methodology more frequently, ensuring higher quality, safety, and environmental friendliness of the demanded PP objects.

## **2 LITERATURE REVIEW**

The term “artificial intelligence” (AI) was first used in 1956 to describe technologies with capabilities and functions primarily associated with human intelligence (Galloway & Swiatek, 2018). AI-based software has intelligence-requiring capabilities, such as problem-solving, reasoning, perception, and communication (Russel & Norvig, 2010; Rzepka & Berger, 2018). Unlike non-AI-based software, AI-based software is self-learning, meaning programming in advance is unnecessary (Leyer & Schneider, 2021). The software can deduce the rules for decision-making using machine learning from the data processed (Martin, 2019; Zuboff, 2019).

The difference between AI-based and non-AI-based software is that AI is self-learning and thus can manage new situations without further programming (Leyer & Schneider, 2021). In addition, intelligence-requiring capabilities, such as recognising previously unknown patterns, are another advantage over non-AI-based software (Rzepka & Berger, 2018).

Collaboration between AI and humans is possible for decision support and decision-making (Leyer, Oberlaender, Dootson, & Kowalkiewicz, 2020). For example, technology can classify relevant information and make it available to humans for further processing. Humans can then use the information to formulate hypotheses that can be used to make decisions (Alexopoulos et al., 2019; Jordan & Mitchell, 2015). Chatbots are the most prominent type of AI capable of effective interaction with humans.

According to the dictionary, a chatbot is “A computer program designed to simulate conversation with human users, especially over the Internet” (Lexico Dictionaries, 2023). It uses different types of Natural Language Processing (NLP) and sentiment analysis to communicate in human language by text or oral speech with humans or other chatbots (Khanna et al., 2015). Artificial conversation entities, interactive agents, smart bots, and digital assistants are also known as chatbots (ADAMOPOULOU a spol., 2020). Their purpose of using AI in companies or government institutions is that AI could partially or fully automate subprocesses or processes that would typically require human intellectual labour.

Automation of application processes enables instant approval and feedback (Androutsopoulou et al., 2019; Fatima et al., 2021), improving quality and service time. Intelligent virtual agents and chatbots enable 24/7 access to information quickly and reliably (van Noordt & Misuraca, 2019; Wang et al., 2020). The internal aspect of service-oriented values relates to using AI to achieve efficiency goals (Madan a spol., 2022). The automation of simple processes and repetitive tasks enables the allocation of human resources towards higher-order tasks alleviating workloads, improving efficiency, and enhancing productivity (Androutsopoulou et al., 2019; Chen et al., 2019; Fatima et al., 2021; Mikalef et al., 2019; van Noordt & Misuraca, 2019; Wang et al.; Young et al., 2019).

At the most superficial level, generative AI could have a massive force multiplier for overworked government staff. With present technologies, social workers can now be in

contact far more frequently with their caseload using a mix of human interactions and those augmented by virtual assistants. Public sector call centre employees could be free to do casework once a generative AI interface can handle transactional front-line calls of all varieties (Heise, 2023). The overall adoption of AI in public administration represents disruptive innovation, reconfiguring organisational structures (Desouza et al., 2020). This is a step towards realising the DEG vision envisaged with the first wave of technological innovation (Madan a spol., 2022). Referred to as algorithmic bureaucracy, AI transforms street-level bureaucrats into system-level (Henman, 2019).

Public procurement is one area in public administration where AI would help. Public procurement has recently been seen as a source of effective cost reduction. Government institutions have stuck to traditional methods and used manual processing long after the rest of the world had adopted automated systems. As artificial intelligence continues to improve processes, businesses with digitised systems will achieve exponentially higher returns on investment and other non-economic effects. The key to achieving these effects is to move to a rapidly evolving digital system (Higgins, 2019).

Directive 2014/24/EU defined multi-criteria decision-making in the selection of the most suitable supplier for the subject of public procurement. Before this, the procurement process, whether green or ordinary, selected the winner based on the criterion of low price, with this method of selecting the supplier being called MEAT (the most economically advantageous tender). After developing this directive, the MAT (Most Advantageous Tender) method has been defined, considering all relevant criteria (Madan a spol., 2022).

According to the European Commission, 55% of all public procurement in the EU is still carried out under the MEAT methodology. In EU countries with weaker economies, this methodology is even more dominant. This may indicate that procurers are probably not paying enough attention to quality, sustainability, and innovation (European Commission, 2017).

There are no precise limits, and no provisions that define what method to use for procurement using MAT methodology (The European Parliament, 2014), but this problem generally falls into the subjects of multi-criteria decision analysis. As an example of a solution for selecting the most suitable economic object offering the subject Plečić shows the use of the WSA method (Plečić a spol., 2018). Thus, in general, most methods for modelling preferences between alternatives can be used, such as WSA, TOPSIS, PROMETHEE and so on.

### **3 METHODS AND DATA**

In this article, we conducted an experiment that compared the three most popular and most complex chatbots, which are free to use and don't break any EU law of data governance. We choose the following three chatbots: Bing Chat Mode, powered with customised GPT-4, and DALL·E 3 for picture generation; Google Bard, which uses its transformer-based generative model; and the third chatbot is Perplexity copilot, powered by a mix of GPT-4, Claude 2, where Perplexity copilot recognises itself as „an interactive AI search companion that guides the search experience with interactive inputs “. It should be noted that regarding Bing Chat Mode, we used creative mode, which could better handle complex tasks and procedures, whereas other modes excel in the truthfulness of queried information.

First, we created a table to test that chatbots can find the best alternative without specifying any method, as a complete amateur in multi-criteria decision-making would require. Then for each chatbot, we created a table, in which we assign points for different tasks, related to calculating multicriteria tasks based on WSA, TOPSIS and PROMETHEE II methods. The tasks we experimented with were generating code in R, generating code in Python, and calculating the task right in the chatbot. Every method in every task in every

chatbot was measured ten times, where for every successful iteration of a task in every method, the chatbot got +1 point, a total of 10 points for a combination of task/method, and up to 100 points for the whole experiment.

The truthfulness of the generated answer will be considered correct when these two conditions are met: 1. The result must contain a ranking of all alternatives in the exact order as was calculated by our own means, which was marked in Table 2, and 2. all partial results must be correct regarding their used technique. If a slight error in output is noted, the chatbot will be informed about the error, and if the chatbot fixes the problem, the whole answer will be counted as successful.

Next, we created an example of the multi-criteria decision problem: procurement, which used MAT methodology. For this purpose, we used actual procurement data, which we found on TED, link: <https://ted.europa.eu/udl?uri=TED:NOTICE:193854-2022:TEXT:EN:HTML>. We know what the criteria were and their weights  $w_i$ , which were: Price: 35% (MIN), Quality: 50% (MAX) and Social Value: 15% (MAX). There were 5 tenderers present who fulfilled all the minimum conditions necessary for participation. We only knew one upper limit condition to enter: a maximum cost of 30 mil. GBP and the awarded tender (which has won PP contest) cost only 12 mil. GBP. Other data as minimum requirements for quality or social value are not given, nor are the metrics used or other tenders representing alternatives here. For PROMETHEE methods, preference functions are metrics for internal use only, which don't have to be shown to the public. Lastly, we don't know what multicriteria decision-making method they used to conduct the selection process.

With all known knowledge of the conducted procurement, we created the missing data, where the tender with cost 12 mil. GBP would be marked as the best alternative by all the methods used. Table 1 shows data that best describes the alternatives/tenders in the procurement process. For criteriums quality and social value, we created custom data with numerical values from 1 to 10, where 1 represents the worst performance, and 10 represents the best performance in that criterion. We avoided any form of domination in alternatives. Row tender  $a_j$  represents the label for different alternatives. To calculate the PROMETHEE II method, we also needed to define the preference function and its values. We chose V-shape preference function III and calculated the p-value with formula (1).

$$p_i = MAX(y_i) - MIN(y_i) \quad (1)$$

The  $p_i$  represents the p-value, and  $y_i$  represents the criterion, for which we want to calculate a p-value. The criterion type does not influence the p-value in this calculation. We got the following p values:  $p_1 = 20$  for cost;  $p_2 = 3$  for social value;  $p_3 = 4$  for quality.

*Fig. 1 Data of example tender*

Alternatives	COST( $y_1$ )	SOCIAL VALUE ( $y_2$ )	QUALITY ( $y_3$ )
$a_1$	30mil. GBP	9	10
$a_2$	10mil. GBP	6	6
$a_3$	12mil. GBP	8	8
$a_4$	20mil. GBP	9	7
$a_5$	17mil. GBP	7	9
Criterion type	MIN	MAX	MAX
Weight ( $w_i$ )	35%	15%	50%

*Source:(own labour)*



## 4 RESULTS

Firstly, we calculated, by our own means, this multicriteria decision problem with all three methods. We got these final rankings, which are marked in Table 2. Method WSA and PROMETHEE II have the same result, and method TOPSIS have almost the same result, but 3<sup>rd</sup> and 5<sup>th</sup> place are switched from other methods. In classical MEAT procurement, the  $a_2$  tender would be selected, as it is the cheapest one, but as it can be seen, in MAT procurement,  $a_2$  is considered one of the worst or maybe the worst alternative.

*Fig. 2 Results of example tender by different methods.*

Method	1 <sup>st</sup> place	2 <sup>nd</sup> place	3 <sup>rd</sup> place	4 <sup>th</sup> place	5 <sup>th</sup> place
WSA	$a_3$	$a_5$	$a_1$	$a_4$	$a_2$
TOPSIS	$a_3$	$a_5$	$a_2$	$a_4$	$a_1$
PROMETHEE II	$a_3$	$a_5$	$a_1$	$a_4$	$a_2$

*Source:(own labour)*

Secondly, we had to devise uniform instructions that all chatbots understand for *almost all iterations* to generate the required output. To know if the instructions are understandable by a chatbot, they must be validated. The instructions will be validated when all these conditions are correct for all chat-bots at least most of the time: 1. Chatbot will understand the correct data given, 2. Chatbot will produce some form of calculation or code without the need to be correct; 3. The chatbot's output must produce any winning alternative with all other alternatives ranked from best to worst, without the need to be correct; 4. The criterion type and preference function must be understood correctly if the chatbot calculates results in his interface.

The most correct instructions, which meet all conditions, for the request to calculate in its interface is:” There is procurement that needs to calculate the best tender alternative  $a_j$ . There are five tenderers, each with three criterion values. The first criterion, the cost, has a minimising criterion type; the second criterion, social value, has a maximising criterion type, and criterion quality has a maximising criterion type. The cost has a weight of 0.35, the social value has a weight of 0.15, and the quality has a weight of 0.50. The first tenderer,  $a_1$  has values  $a_1(30,9,10)$ ; The second tenderer  $a_2$ , has values:  $a_2(10,6,6)$ ; The third tenderer,  $a_3$  has values  $a_3(12,8,8)$ ; The fourth tenderer,  $a_4$  has values:  $a_4(20,9,7)$ ; The fifth tenderer  $a_5$  has values:  $a_5(17,7,9)$ ; Can you calculate the most advantageous tender?

To give the chatbot command to calculate the most advantageous tender by user-chosen method, the last sentence in the former correct instructions was changed to:” Can you write the data from the task into the table and use the data from that table to calculate which alternative is the best and the final ranking of all alternatives, with the method weighted sum approach/ TOPSIS/PROMETHEE II?”

To generate code, the last sentence was changed to:” According to the written procurement task, can you write code in R/python, which will calculate what alternative is the best and the final ranking of all alternatives, with the method weighted sum approach/TOPSIS/PROMETHEE II?”

The following lines were added to calculate the PROMETHEE II method: The preference function is III for all criteria, while P is 20 for cost, 3 for social value and 4 for Quality. When everything was set up and ready, we just conducted the experiment marked in Table 3 to Table 6.

*Fig. 3 Number of correct answers on request without a method by different chatbots.*

Question: “What tender is most advantageous?”		
Bing Chat Mode	Google Bard	Perplexity copilot

1/10	0/10	0/10
------	------	------

*Source:(own labour)*

*Fig. 4 Number of correct answers on requests per specific method by Bing chat mode*

<b>Bing Chat Mode</b>				
<i>Methods</i>	<i>Calculated in interface</i>	<i>Code generated for language R</i>	<i>Code generated for language Python</i>	<i>Sum per methods</i>
<i>WSA</i>	<i>1/10</i>	<i>2/10</i>	<i>2/10</i>	<i>5/30</i>
<i>TOPSIS</i>	<i>0/10</i>	<i>1/10</i>	<i>10/10</i>	<i>11/30</i>
<i>PROMETHEE II</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>2/10</i>	<i>2/30</i>
<i>Sum per request</i>	<i>1/30</i>	<i>3/30</i>	<i>14/30</i>	<i>18/90</i>

*Source:(own labour)*

*Fig. 5 Number of correct answers on requests per specific method by Google Bard*

<b>Google Bard</b>				
<i>Methods</i>	<i>Calculated in interface</i>	<i>Code generated for the language R</i>	<i>Code generated for the language Python</i>	<i>Sum per methods</i>
<i>WSA</i>	<i>1/10</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>1/30</i>
<i>TOPSIS</i>	<i>1/10</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>1/30</i>
<i>PROMETHEE II</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>0/30</i>
<i>Sum per request</i>	<i>2/30</i>	<i>0/30</i>	<i>0/30</i>	<i>2/90</i>

*Source:(own labour)*

*Fig. 6 Number of correct answers on requests per specific method by Perplexity Copilot*

<b>Perplexity Copilot</b>				
<i>Methods</i>	<i>Calculated in interface</i>	<i>Code generated for the language R</i>	<i>Code generated for the language Python</i>	<i>Sum per methods</i>
<i>WSA</i>	<i>0/10</i>	<i>1/10</i>	<i>1/10</i>	<i>2/30</i>
<i>TOPSIS</i>	<i>0/10</i>	<i>1/10</i>	<i>0/10</i>	<i>1/30</i>
<i>PROMETHEE II</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>0/10</i>	<i>0/30</i>
<i>Sum per request</i>	<i>0/30</i>	<i>2/30</i>	<i>1/30</i>	<i>3/90</i>

*Source:(own labour)*

The experiment was conducted with a total of 300 instances. Table 3 intercepts the experiment where chatbots were asked which alternative was better. Table 4 to Table 6 intercepts experiments where chatbots were asked various questions, such as calculating the best alternative or generating code in R or Python which will do such calculations according to the desired method. The most successful chatbot was BING CHAT MODE, with a total of 19 points, The Second was Perplexity Copilot, with 3 points, and the worst was Google Bard,

with 2 points. But even the 19 points are an absolute disaster when acknowledged that the maximum points that every chatbot could achieve was 100 points.

When the chatbot was requested to calculate answers, most times, the chatbot identified the proper methods, formulas and algorithms but failed to do even the most basic math. With more complex methods, TOPSIS or PROMETHEE2, the chatbot sometimes generated pure nonsense, like it repeated the same word multiple times or just generated random symbols. Generating codes was a more manageable task because the chatbot didn't have to calculate partial results. But still, most of the generated codes give the correct answer with a low success rate. The only exception was the generated code in Python for TOPSIS method by Bing chat mode. Bing chat mode every single time generated the correct code to calculate this early-mentioned method, we even tried it a couple more times on different days, and the answer was always correct. It is impossible for a neural network, even for a physical neuron network, to complete the task with a 100% success rate. However, this one use-case has almost every generated code in Python for TOPSIS correct (note that we used creative mode on chatbot Bing chat mode).

## 5 CONCLUSION

This article has proven that chatbots could not calculate any extensive calculations regarding MAT methodology in procurement. We tried different methods with different complexity with different chatbots, but none could be considered as successful in calculating an entire decision-making problem. The only successfully calculated method was the TOPSIS method, in which Python code was generated by BING Chat mode in creative mode, which had a 100% success rate. Still, it is unknown what the success rate would be if it were used on different public procurements. The chatbot's primary means is to point procurement subjects in the right direction, describe the theoretical basics of the methods, generate small parts of code, or revise the code. However, even for this purpose, the reliability of the chatbot is not a hundred per cent, and every piece of information should be met with some degree of scepticism, critical thinking and verifying of all pieces of information. We believe that chatbots, machine learning and AI development will be developed exponentially, so the results would be better if this article were conducted in the future. But as for 2023 and 2024, chatbot automation in public procurements is just a "song of the future".

Overall, we suggest that chatbot tools in the year 2023 or 2024 should only be used for partial educational purposes, like generating a line of code or giving the proper process steps to help with calculation in the selection process. So, chatbots could only be used as a starting point, which will mostly point persons involved in the procurement process in the right direction regarding the interested area.

In the future, there could be a case when such chatbots, AI and neural networks as a whole concept would become more reliable tools. We will conduct similar experiments soon, not nearly 2 years, to identify, how much artificial helpers are perfected, if there is new room for better integration into the processes, and how it benefits businesses, the environment and society. If the results are promising, a guide, standardisation, or best practices should be invented in case of how to communicate with a chatbot, to gain the best input possible, and how to backcheck all its input.

## Source

1. ADAMOPOULOU, Eleni a Lefteris MOUSSIADES, 2020. Chatbots: History, technology, and applications. *Machine Learning with Applications* [online]. 2020, roč. 2, s. 100006. Dostupné na: doi:10.1016/j.mlwa.2020.100006 \*

2. ALEXOPOULOS, Charalampos, Zoi LACHANA, Aggeliki ANDROUTSOPOULOU, Vasiliki DIAMANTOPOULOU, Yannis CHARALABIDIS a Michalis Avgerinos LOUTSARIS, 2019. How machine learning is changing e-government. *Proceedings of the 12th International Conference on Theory and Practice of Electronic Governance* [online]. 2019. Dostupné na: doi:10.1145/3326365.3326412
3. ANDROUTSOPOULOU, Aggeliki, Nikos KARACAPILIDIS, Euripidis LOUKIS a Yannis CHARALABIDIS, 2019. Transforming the communication between citizens and government through AI-guided Chatbots. *Government Information Quarterly* [online]. 2019, roč. 36, č. 2, s. 358–367. Dostupné na: doi:10.1016/j.giq.2018.10.001
4. CHEN, Tao, Longya RAN a Xian GAO, 2019. Ai Innovation for Advancing Public Service. *Proceedings of the 20th Annual International Conference on Digital Government Research* [online]. 2019. Dostupné na: doi:10.1145/3325112.3325243
5. DESOUZA, Kevin C., Gregory S. DAWSON a Daniel CHENOK, 2020. Designing, developing, and deploying Artificial Intelligence Systems: Lessons from and for the public sector. *Business Horizons* [online]. 2020, roč. 63, č. 2, s. 205–213. Dostupné na: doi:10.1016/j.bushor.2019.11.004
6. EUROPEAN COMMISSION, 2017. Public procurement. *Internal Market, Industry, Entrepreneurship and SMEs* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: [https://single-market-economy.ec.europa.eu/single-market/public-procurement\\_en](https://single-market-economy.ec.europa.eu/single-market/public-procurement_en)
7. FATIMA, Samar, Kevin DESOUZA, Christoph BUCK a Erwin FIELT, 2021. Business model canvas to create and capture ai-enabled public value. *Proceedings of the Annual Hawaii International Conference on System Sciences* [online]. 2021. Dostupné na: doi:10.24251/hicss.2021.283
8. GALLOWAY, Chris a Lukasz SWIATEK, 2018. Public relations and artificial intelligence: It's not (just) about robots. *Public Relations Review* [online]. 2018, roč. 44, č. 5, s. 734–740. Dostupné na: doi:10.1016/j.pubrev.2018.10.008
9. HEISE, Angie, 2023. Generative AI and public sector. *Public Sector Center of Expertise* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: <https://wwps.microsoft.com/blog/ai-public-sector>
10. HENMAN, Paul, 2018. Of algorithms, apps and advice: Digital Social Policy and Service delivery. *Journal of Asian Public Policy* [online]. 2018, roč. 12, č. 1, s. 71–89. Dostupné na: doi:10.1080/17516234.2018.1495885
11. HIGGINS, Michael, 2019. Council post: AI in procurement: Where we're headed. *Forbes* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: <https://www.forbes.com/sites/forbestechcouncil/2019/09/23/ai-in-procurement-where-were-headed/>
12. KHANNA, Anirudh, Bishwajeet PANDEY, Kushagra VASHISHTA, Kartik KALIA, Bhale PRADEEPKUMAR a Teerath DAS, 2015. A study of today's A.I. through Chatbots and rediscovery of Machine Intelligence. *International Journal of u- and e-Service, Science and Technology* [online]. 2015, roč. 8, č. 7, s. 277–284. Dostupné na: doi:10.14257/ijunesst.2015.8.7.28
13. LEXICO DICTIONARES, no date. Meanings & definitions of English words. *Dictionary.com* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: <https://www.lexico.com/en/definition/chatbot>
14. LEYER, Michael a Sabrina SCHNEIDER, 2021. Decision augmentation and automation with Artificial Intelligence: Threat or opportunity for managers? *Business Horizons* [online]. 2021, roč. 64, č. 5, s. 711–724. Dostupné na: doi:10.1016/j.bushor.2021.02.026
15. LEYER, Michael, Anna Maria OBERLÄNDER, Paula DOOTSON a Marek KOWALKIEWICZ, 2020. Patterns of decision-making processes with AI involved.

- Decision-making with artificial intelligence: Towards a novel conceptualization of patterns* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: <https://www.fim-rc.de/Paperbibliothek/Veroeffentlicht/1125/wi-1125.pdf>
16. MADAN, Rohit a Mona ASHOK, 2022. AI adoption and diffusion in public administration: A systematic literature review and future research agenda. *Government Information Quarterly* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0740624X22001101>
  17. MARTIN, Kirsten, 2019. Designing ethical algorithms. *MIS Quarterly Executive* [online]. 2019, s. 129–142. Dostupné na: doi:10.17705/2msqe.00012
  18. MIKALEF, Patrick, Siw Olsen FJØRTOFT a Hans Yngvar TORVATN, 2019. Artificial Intelligence in the Public Sector: A Study of challenges and opportunities for Norwegian municipalities. *Lecture Notes in Computer Science* [online]. 2019, s. 267–277. Dostupné na: doi:10.1007/978-3-030-29374-1\_22
  19. PLEČIĆ, Katarina, Malisa ZIZOVIC, Marko MARKOVIĆ a Filip DJOKOVIC, 2018. A multi-criteria approach to bid selection in Public Procurement. *A multi-criteria approach to bid selection in public procurement* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: [https://www.researchgate.net/publication/324488269\\_A\\_multi-criteria\\_approach\\_to\\_bid\\_selection\\_in\\_public\\_procurement](https://www.researchgate.net/publication/324488269_A_multi-criteria_approach_to_bid_selection_in_public_procurement)
  20. RUSSELL, Stuart, 2020. Artificial Intelligence. *Ethics of Artificial Intelligence* [online]. 2020, s. 327–341. Dostupné na: doi:10.1093/oso/9780190905033.003.0012 \*
  21. RZEPKA, Christine a Benedikt BERGER, 2018. User Interaction with AI-enabled Information Systems. *User Interaction with AI-enabled Systems: A Systematic Review of IS Research* [online] [cit. 28. október 2023]. Dostupné na: [https://web.archive.org/web/20220802080436id\\_/https://aisel.aisnet.org/cgi/viewcontent.cgi?article=1185&context=icis2018](https://web.archive.org/web/20220802080436id_/https://aisel.aisnet.org/cgi/viewcontent.cgi?article=1185&context=icis2018)
  22. THE EUROPEAN PARLIAMENT, 2014. Lex - 32014L0024 - en - EUR-lex. *EUR* [online] [cit. 27. október 2023]. Dostupné na: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/en/TXT/?uri=CELEX%3A32014L0024>
  23. VAN NOORDT, Colin a Gianluca MISURACA, 2019. New wine in old bottles: Chatbots in government. *Electronic Participation* [online]. 2019, roč. 11686, s. 49–59. Dostupné na: doi:10.1007/978-3-030-27397-2\_5
  24. WANG, Youkui, Nan ZHANG a Xuejiao ZHAO, 2020. Understanding the determinants in the different government AI adoption stages: Evidence of Local Government Chatbots in China. *Social Science Computer Review* [online]. 2020, roč. 40, č. 2, s. 534– 554. Dostupné na: doi:10.1177/0894439320980132
  25. YOUNG, Matthew M, Justin B BULLOCK a Jesse D LECY, 2019. Artificial discretion as a tool of governance: A framework for understanding the impact of artificial intelligence on Public Administration. *Perspectives on Public Management and Governance* [online]. 2019. Dostupné na: doi:10.1093/ppmgov/gvz014
  26. ZUBOFF, Shoshana, 2019. Profile Books. V: *The age of surveillance capitalism: The fight for the human future at the New Frontier of Power*. London: Profile.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Daniel Dudek

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421904405629

email: [daniel.dudek@euba.sk](mailto:daniel.dudek@euba.sk)

# EMISIE OXIDU UHOĽNATÉHO V SLOVENSKEJ REPUBLIKE PRE RÔZNE ÚROVNE REGIONÁLNEHO ČLENENIA

## CARBON OXIDE EMISSIONS IN THE SLOVAK REPUBLIC FOR DIFFERENT LEVELS OF REGIONAL DIVISION

*Michaela Chocholatá<sup>1</sup>*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá analýzou dát o emisiách CO v Slovenskej republike pre rôzne úrovne regionálneho členenia, konkrétne na úrovni štátu, na úrovni krajov a tiež na úrovni jednotlivých okresov v období 2019-2021. Analýza dát potvrdila, že existujú v produkcii CO značné rozdiely medzi jednotlivými regiónmi vyvolané rôznymi charakteristikami konkrétneho regiónu napr. odlišnosťami v druhoch ekonomickej činnosti či spôsobe vykurovania domácností.

**Príučové slová:** *emisie, znečisťujúca látka CO, Slovenská republika, regióny*

### Abstract

The paper deals with the analysis of data on CO emissions in the Slovak Republic for different levels of regional division, namely at the state level, at the regional level and also at the level of individual districts in the period 2019-2021. The data analysis confirmed that there are significant differences in CO production between individual regions caused by different characteristics of a specific region, e.g. differences in the types of economic activity or in the way of heating households.

**Keywords:** *emissions, CO pollutant, Slovak Republic, regions*

## 1 ÚVOD

Životné prostredie a zlepšovanie jeho kvality bolo jednou zo základných priorít strategického dokumentu Európa 2020 (Európska komisia, 2012). Hlavné ťažisko tejto priority spočívalo v dosiahnutí udržateľného rastu, podpore efektívnejšieho využívania zdrojov s víziou dosiahnuť ekologickejšie a konkurencieschopnejšie hospodárstva. Tzv. „zelený“ aspekt je tiež súčasťou aktuálneho rámca kohéznej politiky EÚ pre obdobie 2021-2027, ktorá je zameraná na päť investičných priorít – inteligentnejšia Európa, nízkouhlíková a ekologickejšia Európa, prepojenejšia Európa, sociálnejšia Európa a Európa bližšie k občanom (Euractiv, 2020). Vzhľadom na zameranie príspevku zameriame pozornosť na prioritu nízkouhlíková a ekologickejšia Európa. S cieľom urobiť z Európy prvý klimaticky neutrálny kontinent v roku 2050, bol v decembri 2019 prijatý tzv. Európsky ekologický dohovor známy tiež pod názvom Európska zelená dohoda. „Ide o novú stratégiu rastu, ktorej cieľom je transformovať EÚ na spravodlivú a prosperujúcu spoločnosť s moderným a konkurencieschopným hospodárstvom, ktoré efektívne využíva zdroje, kde budú do roku 2050 čisté emisie

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA 1/0047/23 „Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa“ a VEGA 1/0211/21 „Ekonometrická analýza makroekonomických dopadov vplyvu pandémie vo svete s dôrazom na vývoj ekonomík EÚ a zvlášť ekonomiky Slovenska“.

skleníkových plynov na nule a kde hospodársky rast nezávisí od využívania zdrojov. (Európska komisia, 2019; s.2).“ „Komisia navrhla nový cieľ EÚ znížiť čisté emisie do roku 2030 aspoň o 55 % a doplnila ho do európskeho právneho predpisu v oblasti klímy. (Európska komisia, 2021; s. 4)“. Výrazným príspevkom k zlepšeniu kvality ovzdušia, vody či celkovo životného prostredia je zvýšenie energetickej efektívnosti a podpory obnoviteľných zdrojov energie (Euractiv, 2020).

Slovenská republika, podobne ako iné krajiny EÚ, čelí viacerým environmentálnym výzvam, pričom v tomto kontexte významnú úlohu zohráva v roku 2019 schválená nová Envirostratégia 2030. „Najväčšie výzvy životného prostredia na Slovensku, a teda oblasti, ktoré budú v rámci environmentálnej politiky do roku 2030 prioritizované, sú problematika odpadového hospodárstva, kvality ovzdušia a ochrany biotopov a druhov hlavne v lesných, lúčnych a mokrad'ových ekosystémoch (Ministerstvo životného prostredia SR, 2019; s.4)“.

Predmetom príspevku je pohľad na produkciu (emisie) oxidu uhoľnatého (CO)<sup>2</sup> v Slovenskej republike a jej regiónoch (krajoch, okresoch) v období 2019-2021 v tonách, resp. v tonách na km<sup>2</sup>. V príspevku predpokladáme, že významnú úlohu pri analýze a návrhu možných krokov zohráva popri iných faktoroch tiež umiestnenie regiónu v priestore ako aj iné charakteristiky regiónu (druhy ekonomickej činnosti, spôsob vykurovania a pod.) líšiacie sa naprieč regiónm. Z priestorového hľadiska je možné predpokladať, že čím bližšie sú regióny z hľadiska polohy, resp. geografickej vzdialenosti, tým je pravdepodobnejšie, že sa navzájom budú ovplyvňovať aj v oblasti kvality životného prostredia (Chocholatá, 2023).

Štruktúra príspevku je nasledujúca: po úvode do problematiky v prvej časti, nasleduje časť venovaná vybraným prístupom analýzy dát v rôznom regionálnom členení, v tretej časti je pozornosť zameraná na časovo-priestorovú analýzu emisií CO v Slovenskej republike v rôznom regionálnom členení a príspevok uzatvára záver.

## **2 VYBRANÉ PRÍSTUPY ANALÝZY DÁT RÔZNEHO REGIONÁLNEHO ČLENENIA**

Analýza dát pre rôzne úrovne regionálneho členenia (napr. v podmienkach Slovenskej republiky) predstavuje užitočný nástroj, ktorý umožňuje získať pohľad na analyzovaný ukazovateľ. Ak disponujeme len údajmi na úrovni štátu a poznáme vývoj analyzovaného ukazovateľa v priebehu určitého obdobia, vieme posúdiť trend jeho vývoja v čase, prípadne skúsiť vysvetliť prípadné tendencie rastu, resp. poklesu v analyzovanom období. Nižšia úroveň regionálneho členenia (napr. na úrovni krajov) má však vyššiu výpovednú schopnosť z hľadiska posúdenia vývoja hodnôt analyzovaného ukazovateľa nielen v čase, ale i v priestore. Ak máme k dispozícii hodnoty vývoja ukazovateľa napr. až na úrovni okresov, môžu byť závery analýzy z časovo-priestorového hľadiska oveľa adresnejšie (a teda menej všeobecné). Prvý krok analýzy priestorových dát je obvykle spojený vizualizáciou analyzovaných dát pomocou rôznych grafov a máp. V prípade „dostatočného“ množstva uvažovaných regiónov možno aplikovať napr. aj nástroje priestorovej analýzy dát založené na výpočte priestorovej autokorelácie, t.j. korelácie analyzovaného ukazovateľa so sebou samým cez priestor (viac o výpočte globálnych a lokálnych štatistík či zhlukových mapách LISA pozri napr. Getis, 2010; Chocholatá, 2023).

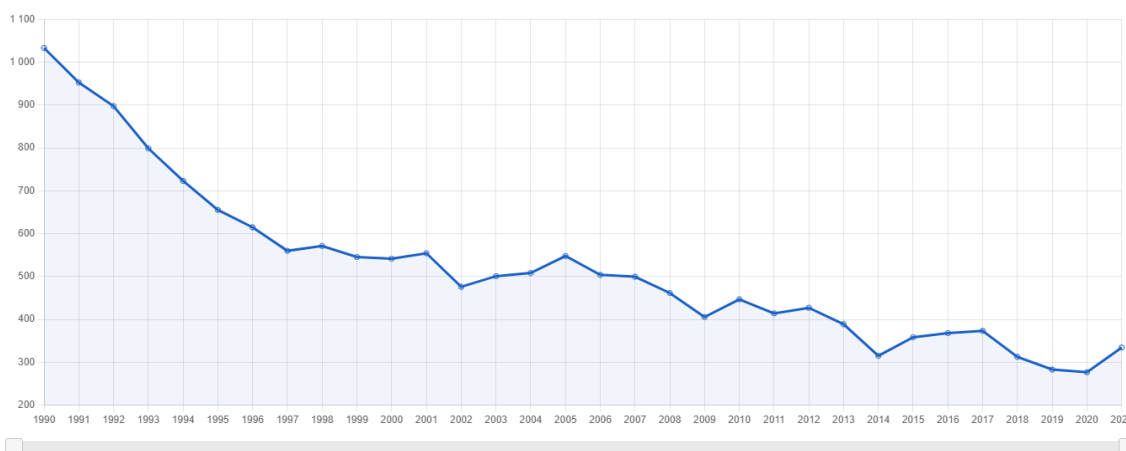
---

<sup>2</sup> „CO je bezfarebný jedovatý plyn bez zápachu, ktorý vzniká pri neúplnom alebo neefektívnom horení. Zabraňuje prístupu kyslíka do krvi. Chronické účinky – dlhodobá expozícia môže spôsobiť poškodenie tkanív, obzvlášť ohrozené sú osoby trpiace kardiovaskulárnymi chorobami.“ (Slovenský hydrometeorologický ústav, 2021; s. 9)

### 3 DÁTA A EMPIRICKÉ VÝSLEDKY ANALÝZY

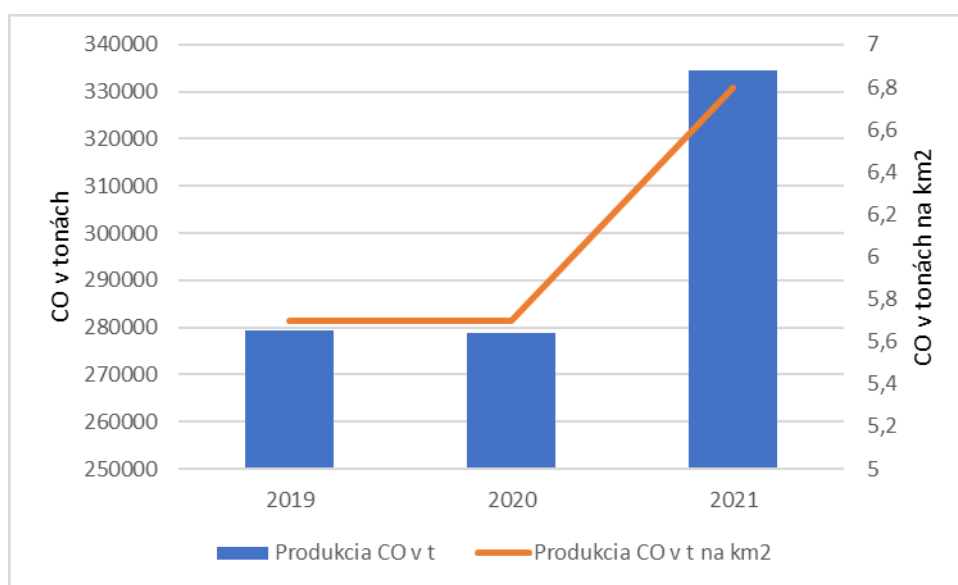
Predmetom príspevku je analýza dát o emisiách CO v Slovenskej republike pre rôzne úrovne regionálneho členenia, konkrétne na úrovni štátu, na úrovni krajov a tiež na úrovni jednotlivých okresov v období 2019-2021. Údaje boli získané z internetových stránok Štatistického úradu SR (ŠÚ SR, 2023a, b) a Slovenského hydrometeorologického ústavu (SHMÚ, 2023a, b). Na vizualizáciu dát bol využitý MS Excel a na znázornenie vývoja ukazovateľa na mapách bol využitý voľne dostupný softvér GeoDa.

Odbor Emisie a biopalivá, ako jeden z organizačných útvarov Slovenského hydrometeorologického ústavu, zodpovedá za vedenie Národného inventarizačného systému pre emisie. Trendy emisií skleníkových plynov a znečisťujúcich látok sa bilancujú od roku 1990. Obr. 1 poskytuje pohľad na vývoj celkových emisií CO v tis. ton v Slovenskej republike v období 1990-2021.



Obr. 1 Vývoj celkových emisií CO v tis. ton v Slovenskej republike v období 1990-2021.  
Zdroj: SHMÚ, 2023a

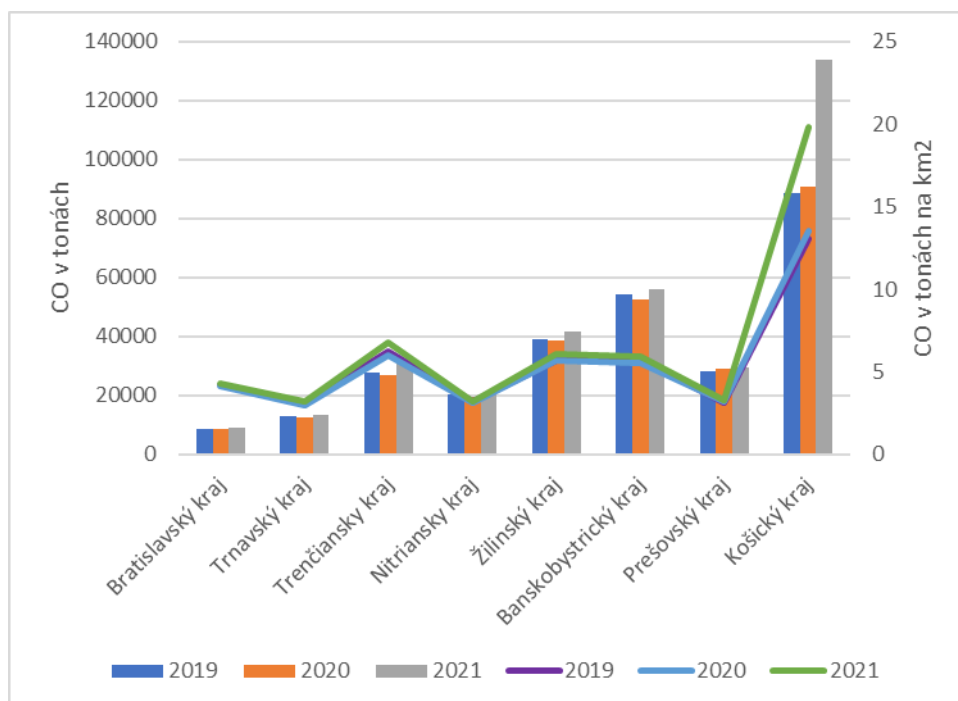
Obr. 1 poskytuje pohľad na v podstate dlhodobu klesajúci trend emisií CO v Slovenskej republike, pričom Obr. 2 nám poskytne (v súlade so zameraním príspevku) informáciu o produkcii CO za obdobie 2019-2021, a to v absolútnom vyjadrení v tonách i v prepočte na km<sup>2</sup>, kde vidíme rastúci trend v roku 2021.



Obr. 2: Produkcia CO v Slovenskej republike v období 2019-2021.  
Zdroj: ŠÚ SR, 2023a; vlastné spracovanie v MS Excel

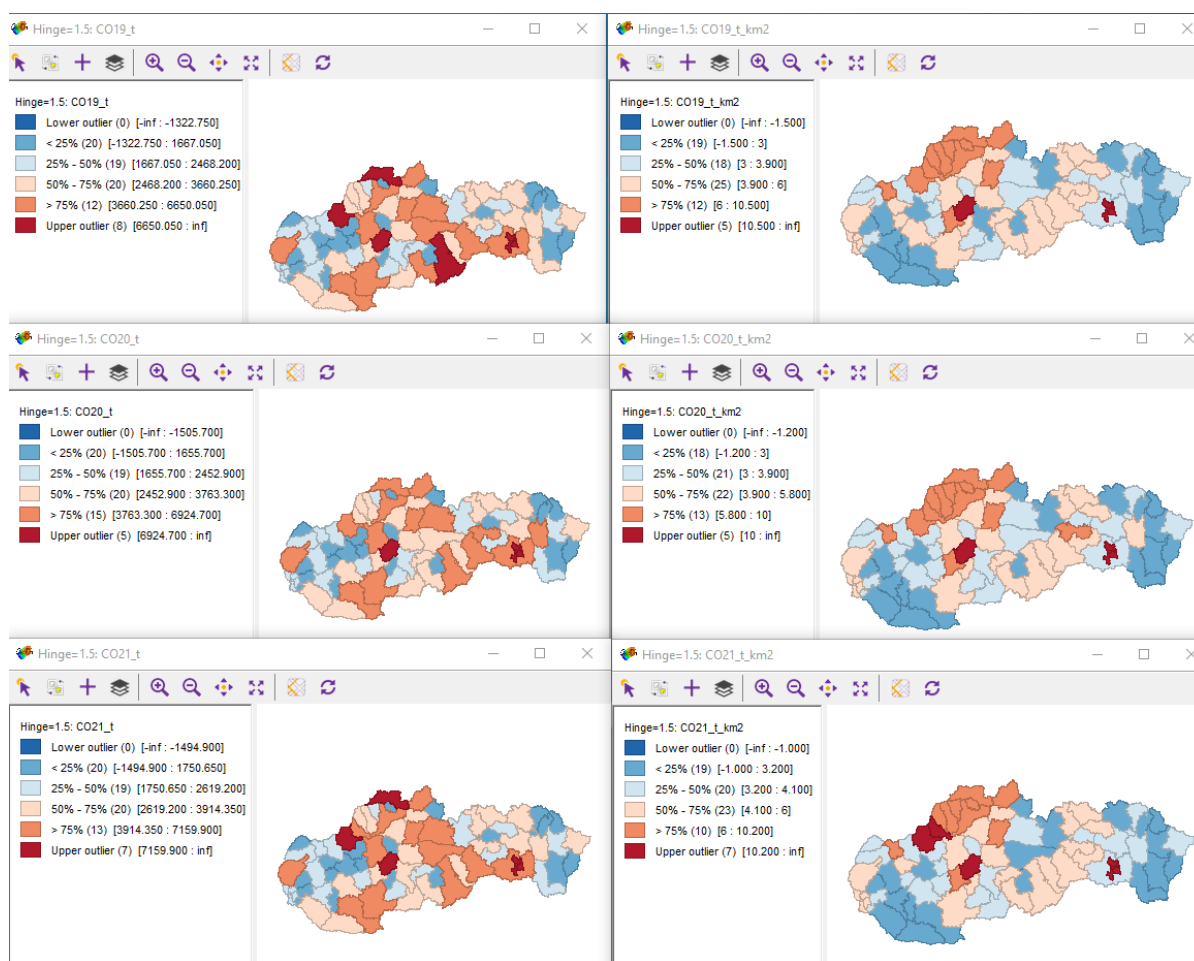


Pred analýzou na úrovni okresov ponúkame na Obr. 3 grafický pohľad na produkciu CO v jednotlivých krajoch Slovenskej republiky v období 2019-2021. Podľa Správy o kvalite ovzdušia v Slovenskej republike 2021 publikovanej SHMÚ sú „najdôležitejším zdrojom emisií CO lokálne kúreniská (v roku takmer 55 % celkových emisií), nasledujú priemyselné bodové zdroje, pričom viac než 80 % z priemyselných zdrojov tvoria emisie z U. S. Steel Košice, s.r.o.; Slovalco, a.s. (Žiar nad Hronom) a CEMMAC a.s. (Horné Srnie).“ (SHMÚ, 2021; s. 60) Je teda zrejme, že najviac emisií CO v tonách je produkovaných v Košickom kraji a Banskobystrickom kraji, pričom pri prepočte na km<sup>2</sup> nie je produkcia CO v Banskobystrickom kraji až taká markantná.



Obr. 3: Produkcia CO v jednotlivých krajoch Slovenskej republiky v období 2019-2021.  
Zdroj: ŠÚ SR, 2023a; vlastné spracovanie v MS Excel

Ďalej sa sústreďujeme na analýzu na úrovni okresov. Grafické znázornenie hodnôt analyzovaného ukazovateľa v období 2019-2021 pomocou box-máp je na Obr. 4, z ktorého sú zrejme značné disproporcie medzi jednotlivými okresmi SR pri produkcii CO. V ľavej časti obrázka sú údaje o produkcii CO v tonách, pravá časť obrázka podáva informáciu o produkcii CO v tonách na km<sup>2</sup>. Treba však zdôrazniť, že údaje za okresy Bratislava I-V sú agregované a rovnako agregovaný je údaj za okresy Košice I-IV. Údaje za agregát okresov Košice I-IV a okres Žiar nad Hronom sú vo všetkých mapách a všetkých analyzovaných obdobiach identifikované ako horné odľahlé hodnoty. Vysoké hodnoty emisií CO boli tiež zaznamenané v okresoch Trenčín a Čadca.



Obr. 4: Produkcia CO v jednotlivých okresoch Slovenskej republiky v období 2019-2021 (vľavo v tonách, vpravo v tonách na km<sup>2</sup>).  
Zdroj: ŠÚ SR, 2023a; vlastné spracovanie v GeoDa

Významným faktorom analýzy emisií CO je ich pôvod. Tabuľka 1 poskytuje pohľad na produkciu CO v Slovenskej republike podľa druhu ekonomickej činnosti (v tis. ton) v období 2019-2021. Hlavným zdrojom emisií však nie sú priemyselné emisie, ale emisie z domácností, konkrétne kúrenie.

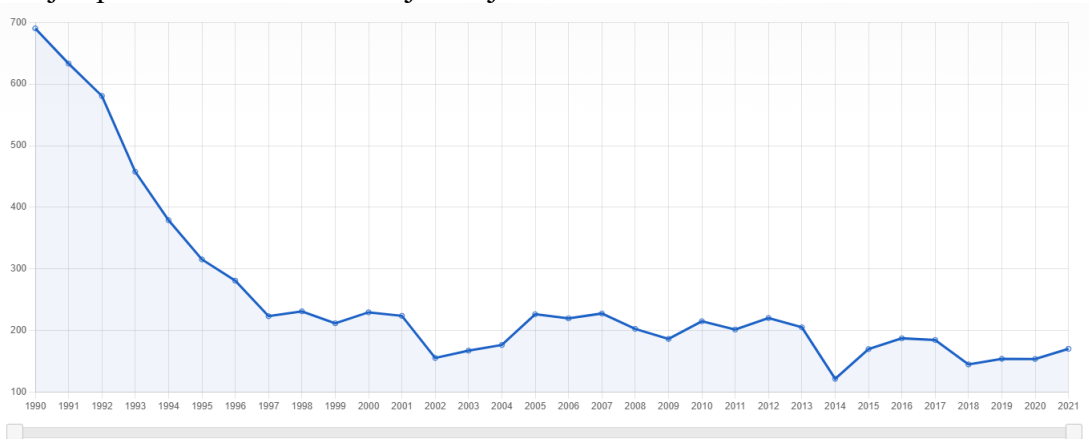
Tabuľka 1. Emisie CO v Slovenskej republike podľa druhu ekonomickej činnosti (v tis. ton) v období 2019-2021

<b>Oxid uhoľnatý</b>	<b>2019</b>	<b>2020</b>	<b>2021</b>
<b><i>Celkové priemyselné emisie</i></b>	<b>112,1</b>	<b>107,7</b>	<b>147,5</b>
A Poľnohospodárstvo	3,5	1	1
01 Pestovanie plodín, chov zvierat, poľovníctvo	1,8	0,6	0,6
B Ťažba a dobývanie	0,1	0	0
C Priemyselná výroba	100	99,3	138,4
10-12 potravín, nápojov, tabaku	0,4	0,3	0,3
13-15 textilu, odevov, kože	0,1	0,1	0,1
16-18 spracovanie dreva, papiera, tlač a reprodukcia médií	1,5	1,6	2,3
19 koxu a rafinovaných výrobkov	0,1	0,1	0,1

20-21 chemikálií a farmaceut. výr.	1,1	1,3	1,3
22-23 gummy a plastových výr., nekovových minerál. výrobkov	10,3	10,7	11,4
24-25 kovov, kovových konštrukcií	85,5	84,5	122,1
26-28 počítačových, elektronic. výrobkov, strojov a zariadení	0,3	0,3	0,3
29-30 motorových a ostat. vozidiel	0,4	0,3	0,3
31-33 nábytku, šperkov a iné	0,2	0,2	0,2
D Dodávka elektriny, plynu a pary	1,4	1,3	1,8
E Dodávka vody; odpadové hospod.; odstraň. odpadu	0,1	0,1	0,1
F Stavebníctvo	0,7	0,5	0,5
H Doprava a skladovanie	2,4	1,8	1,9
G, I-U Služby, Veda, Vzdelávanie, Kultúra, Umenie, Šport, Iné.	3,9	3,7	3,7
<b>Emisie z domácností</b>	<b>170,9</b>	<b>169,1</b>	<b>186,9</b>
doprava	16,2	14,7	16
kúrenie	154,2	153,9	170,4
iné	0,5	0,4	0,5
<b>Premost'ovacie položky</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>
rezidenti v zahraničí (doprava)	0,0	0,0	0,0
neresidenti na území SR (dopr.)	0,0	0,0	0,0

Zdroj: ŠÚ SR, 2023b

Pohľad na vývoj emisií CO generovaný sektorom domácností v období 1990-2021 (Obr.5) poukazuje opäť na v čase viac-menej klesajúcu tendenciu.



Obr. 5 Vývoj emisií CO v tis. ton zo sektora domácností v Slovenskej republike v období 1990-2021. Zdroj: SHMÚ, 2023b

## 4 ZÁVER

Zámerom príspevku bolo poukázať na vysokú relevantnosť a aktuálnosť tzv. zeleného aspektu z pohľadu znižovania emisií CO v podmienkach Slovenskej republiky pre rôzne úrovne regionálneho členenia (na úrovni štátu, krajov a okresov) v období 2019-2021. Z dlhodobého hľadiska (1990-2021) sme v Slovenskej republike svedkami globálne klesajúceho trendu emisií CO. Vizualizácia dát za kratšie obdobie, príp. prepočty emisií na km<sup>2</sup>, ako aj preskúmanie vývoja analyzovaného ukazovateľa pre jednotlivé kraje či okresy, poskytlí bližší pohľad na časovo-priestorové aspekty produkcie CO. Z hľadiska druhu ekonomickej činnosti predstavuje v prípade CO emisií veľkú výzvu znižovanie týchto emisií pochádzajúcich z vykurovania domácností.

## Použitá literatúra

1. CHOCHOLATÁ, M. 2023. Heating with Solid Fuel in Slovak Dwellings: A GWR approach. In: Proceeding of the 17th Symposium on Operational Research in Slovenia. [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://drustvo-informatika.si/uploads/documents/6a1c2595-7d3f-4dd2-ab6c-9ed9b168c19d//SOR23Proceedings.pdf>
2. EURACTIV. 2020. [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://euractiv.sk/section/ekonomika-a-euro/video/%F0%9F%94%B4-nazivo-kohezna-politika-2021-az-2027/>
3. EURÓPSKA KOMISIA. 2012. Consolidated versions of the Treaty on European Union and the Treaty on the Functioning of the European Union. *Official Journal of the European Union* 55, pp 1-390. [cit. 2015-02-15] Dostupné na internete: <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:C:2012:326:FULL:EN:PDF>
4. EURÓPSKA KOMISIA. 2019. Európsky ekologický dohovor. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: [https://eur-lex.europa.eu/resource.html?uri=cellar:b828d165-1c22-11ea-8c1f-01aa75ed71a1.0018.02/DOC\\_1&format=PDF](https://eur-lex.europa.eu/resource.html?uri=cellar:b828d165-1c22-11ea-8c1f-01aa75ed71a1.0018.02/DOC_1&format=PDF)
5. EURÓPSKA KOMISIA. 2021. Európska zelená dohoda. Plníme ciele. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: <https://op.europa.eu/sk/publication-detail/-/publication/762414e8-ee81-11eb-a71c-01aa75ed71a1/language-sk/format-PDF/source-296635169>
6. GETIS, A. 2010. *Spatial autocorrelation*. In: FISCHER, M.M. - GETIS, A. 2010. Handbook of Applied Spatial Analysis. Software Tools, Methods and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
7. MINISTERSTVO ŽIVOTNÉHO PROSTREDIA SR. 2019. Zelenšie Slovensko. Stratégia environmentálnej politiky Slovenskej republiky do roku 2030. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: [https://www.minzp.sk/files/iep/03\\_vlastny\\_material\\_envirostrategia2030\\_def.pdf](https://www.minzp.sk/files/iep/03_vlastny_material_envirostrategia2030_def.pdf)
8. SLOVENSKÝ HYDROMETEOROLOGICKÝ ÚSTAV. 2021. Správa o kvalite ovzdušia v Slovenskej republike. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: [https://www.shmu.sk/File/oko/rocniky/2021\\_Sprava\\_o\\_KO\\_v\\_SR\\_v2.pdf](https://www.shmu.sk/File/oko/rocniky/2021_Sprava_o_KO_v_SR_v2.pdf)
9. SLOVENSKÝ HYDROMETEOROLOGICKÝ ÚSTAV. 2023a. Celkové emisie skleníkových plynov a znečisťujúcich látok na Slovensku. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: <https://oeab.shmu.sk/emisie/celkove/trendy.html>
10. SLOVENSKÝ HYDROMETEOROLOGICKÝ ÚSTAV. 2023b. Vývoj emisií CO v tis. ton zo sektora domácností v Slovenskej republike v období 1990-2021. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: <https://oeab.shmu.sk/emisie/domacnosti/trendy.html>
11. ŠTATISTICKÝ ÚRAD SLOVENSKEJ REPUBLIKY. 2023a. Emisie základných znečisťujúcich látok [zp3803rs]. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: [https://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/vbd\\_sk\\_win2/zp3803rs/v\\_zp3803rs\\_00\\_00\\_00\\_sk](https://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/vbd_sk_win2/zp3803rs/v_zp3803rs_00_00_00_sk)
12. ŠTATISTICKÝ ÚRAD SLOVENSKEJ REPUBLIKY. 2023b. Emisie základných znečisťujúcich látok podľa druhu ekonomickej činnosti [zp2005rs]. [cit. 2023-11-02] Dostupné na internete: [https://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/VBD\\_SLOVSTAT/zp2005rs/v\\_zp2005rs\\_00\\_00\\_00\\_sk](https://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/VBD_SLOVSTAT/zp2005rs/v_zp2005rs_00_00_00_sk)

## Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 832  
email: [michaela.chocholata@euba.sk](mailto:michaela.chocholata@euba.sk)

# DYNAMICKÁ ANALÝZA ČESKÝCH A POLSKÝCH SMĚNNÝCH KURZŮ

## DYNAMIC ANALYSIS OF CZECH AND POLISH EXCHANGE RATES

*Dominik Kavřík<sup>1</sup>*

### **Abstrakt**

Tato práce představuje dynamickou analýzu českých a polských směnných kurzů s využitím přístupu s časově proměnlivými parametry. Studie zkoumá chování těchto měn v širším kontextu evropského finančního prostředí. Integrací pokročilých ekonometrických modelů odhaluje výzkum základní mechanismy, které řídí fluktuace těchto směnných kurzů. Zjištění ukazují významný dopad jak domácích ekonomických politik, tak mezinárodních tržních sil. Tato analýza prohlubuje naše porozumění dynamice českých a polských směnných kurzů a také nabízí vhled do vývoje měnových kurzů a efektu měnové politiky. Tato práce využívá specifickou metodologii pro zkoumání změn v dynamice mezi ekonomickými veličinami.

***Klíčové slova:** směnný kurz, měnová politika, fluktuace měn*

### **Abstract**

This paper presents a dynamic analysis of Czech and Polish exchange rates using a time-varying parameters approach. The study examines the behaviour of these currencies in the broader context of the European financial environment. By integrating advanced econometric models, the research uncovers the underlying mechanisms that drive fluctuations in these exchange rates. The findings show the significant impact of both domestic economic policies and international market forces. This analysis deepens our understanding of the dynamics of the Czech and Polish exchange rates and offers insights into the evolution of exchange rates and the effect of monetary policy. This paper uses a specific methodology to examine changes in dynamics between economic variables.

***Keywords:** exchange rates, monetary policy, currency fluctuation*

## **1 INTRODUCTION**

The exchange rate is an important macroeconomic variable which affects and is affected by other macroeconomic fundamentals of any *open* economy and is an important determinant of the price of international trade. The exchange rate policy is in competence of monetary policy conducted by the national banks. Given that the exchange rate is floating they react for example to the levels of capital inflows and outflows, interest rate differentials and other macro fundamentals (Mankiw 2015) and (Dornbusch 1976) or (Frankel 1979). The main research question of this study is how the exchange reacts to such fundamentals using the model of in order to estimate time varying parameter model using Kalman filter proposed also by Wolff (1987). Another research question is whether the intervention of the Czech National Bank, between the years 2013 and 2017, somehow affected the parameters of model explaining PLNCZK by fixing the Czech currency to Euro.

---

<sup>1</sup> This research was supported by the Internal Grant Agency of Prague University of Economics and Business under Project F4/38/2022.

The exchange rate of choice is the currency pair PLNCZK which is the price of Polish currency (zloty) in the units of Czech currency. The choice was made since Poland is a neighbor state, and it is expected that there is some significant level of international trade, which affects the volume of currency flow and for that matter capital flow (inward or outward) which is expected to affect the said exchange rate.

In the section 2 there is a quick theoretical overview of used theoretical model and rationale for the used model's variables. In section 3 there are the variables used in the model including their sources and computations. The model and quick reference to the literature and description of Kalman filter is in section 4. Finally, the estimated evolution of parameters is presented in section 5 and in section 6 there are some concluding remarks.

## **2 THEORETICAL FRAMEWORK**

Since the exchange rate, in our case between Polish currency and Czech currency denoted by the name of the currency pair PLNCZK, represents the value of one currency in another and each currency is backed by its macroeconomic fundamentals, it is worth exploring how much does the respective fundamentals affect the value of the currency - or the value of currency pair.

The model used in this study is based on the work of Wolff (1987) which uses a nested model which is an amalgamation of the sticky-price monetary model (Dornbusch 1976) and (Frankel 1979). The sticky prices are a typical assumption of Keynesian and New Keynesian models (see for example works of Akerlof and Yellen (1985) or also N. G. Mankiw (1985)) and such assumption changes the expected impact of interest rate differential between two economies. In the case of flexible prices, the differential is said to have a positive relationship with the exchange rate. Under price stickiness it is expected to be otherwise, since higher interest rate causes net capital inflow into the economy and therefore appreciation of the local currency which indicates the negative effect (Frankel 1979) since appreciation means lower absolute value of currency pair, in the simple terms less of local currency is needed to buy the foreign one.

The interest rate differential is only one of the used variables in Wolff's (1987) model. Perhaps the most intuitive is the Differential between narrow money - M1 aggregate, which is basically money supply of the economy (Bernanke et al. 2006) and affects the value of local currency and hence its appreciation and depreciation. As per Dornbusch (1976) via (Wolff 1987) the theoretical parameter of the differential of M1 aggregate should be equal to one. Such models also expect that parameter of inflation differential should be below zero and those of interest rate and product differential should be negative as well. These assumptions are testable since we are going to use time varying parameter model estimated using Kalman filter, proposed by Kalman and Bucy (1961).

## **3 DATA**

The data used in this analysis are the monthly data about monetary M1 aggregate, industrial production index, interest rate and inflation calculated from consumer price index, for Czech Republic and Poland within the period of January 1997 until December 2020. The main sources of the data is Federal Reserve Economic Data (FRED) and the database of the Czech National Bank (ARAD). The data about the measure of narrow money - M1 aggregate - is obtained via FRED and since each monetary aggregate is published in the unit of national currency, the polish M1 aggregate is recalculated to the terms of the CZK in order to obtain correct comparison.

$$M1_{PL}^{CZK} = PLNCZK \times M1_{PL}^{Zloty}$$

The time series of M1 aggregate is displayed in the lower right chart in the figure 1. Since our model is based on the version in which is modified version based on the one proposed in (Dornbusch 1976), the time series of inflation and interest rate had to be obtained. From the same source as the M1 aggregate, except for the Czech interest rate which comes from Czech National Bank (CNB), the consumer price index (CPI) was obtained to calculate the rate of inflation in both Poland and Czech Republic. The rate of inflation was calculated by the following formula.

$$\text{Rate of inflation} = \frac{CPI_{i,t}}{CPI_{i,t-12}} - 1 \times 100 \quad [\%]$$

Since we are using monthly data and information about the output of the economy in form of GDP is published quarterly, the index of production of total industry for both Poland and Czech Republic are used (Wolff 1987), since their periodicity is monthly.

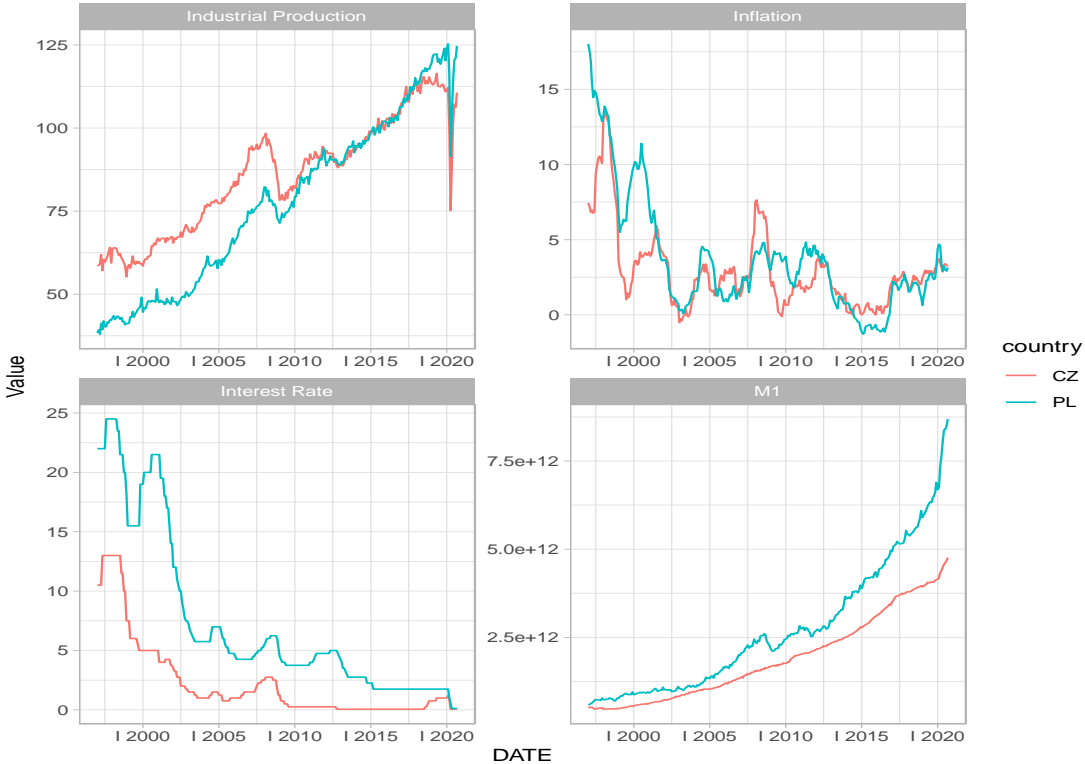


Figure 1: Macroeconomic fundamentals used in the model.

## 4 METHODOLOGY

The following equation which is based on the one used in but originally proposed in the work of. If we define the above differences in macroeconomic fundamentals as  $\Delta X \equiv \ln(X_2) - \ln(X_1)$ , the model has the following theoretical form:

$$\ln(PLNCZK) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}\Delta M1_t + \beta_{2,t}\Delta Product_t + \beta_{3,t}\Delta IR_t + \beta_{4,t}\Delta INFL_t + u_t$$

Note that there is a subscript  $t$  for each parameter since it is expected that they vary in time.

Where the Endogenous variable PLNCZK is the spot exchange rate of the Polish zloty in terms of Czech crown.  $MI$  is the money supply between Czech and Polish economy. Product denotes is the difference between the Czech and Polish industrial product. And the last two endogenous variables are the differences between Czech and Polish interest rate  $IR$  and the rate of inflation  $INFL$ .

In order to estimate the model we need to rewrite it into a matrix form, where the first equation is the measurement equation in matrix notation and denoting  $s = CZKPLN$  for the spot rate  $\mathbf{s} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{u}_t$  where the  $\mathbf{s}$  is  $(n \times 1)$  vector of logs spot rate,  $\mathbf{X}'$  is a matrix of exogenous variables and  $\boldsymbol{\beta}$  is a vector of the parameters for which we expect a random walk evolution similarly as and expressed in the following transition equation

$$\beta_{i,t+1} = \beta_{i,t} + v_{i,t} \quad \forall i = \{1, 2, \dots, 5\} \wedge v_{i,t} \sim iid \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$$

Having this State space form, we can apply Kalman (1960) filter to obtain the estimated time varying parameters. The transition equation can be represented in the following matrix form

$$\boldsymbol{\beta}_{t+1} = \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{v}_t$$

By conveniently shifting it in time to get the lagged values on the right-hand side explicitly

with subscript  $(t - 1)$ , we obtain  $\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \mathbf{v}_t$ .

For the estimation of state components, the Kalman filter which was originally proposed by and will be used to estimate the dynamics of the parameter in the model.

As per in most general form the Kalman filter consists of the observation equation.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\boldsymbol{\zeta}_t + \mathbf{R}_t\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

where  $\mathbf{y}_t$  is a vector of observable endogenous variables,  $\boldsymbol{\zeta}_t$  is a vector of state variables.

Vector  $\mathbf{R}_t$  is the  $(n \times k)$  matrix of coefficients and  $\mathbf{x}_t$  is a vector of time varying parameters. The transition equation is as follows:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\mu}_t,$$

The  $\boldsymbol{\mu}_t$  and  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  are the random disturbances terms (Wang 2008).

## 5 EMPIRICAL RESULTS

As we can see the estimated intercept of the model *eq:nicer* is rather stable over time, which might lead us to the idea that keeping other macroeconomic fundamentals constant, there was



not much ad hoc adjusting or let's say manipulation of the exchange rate which is plausible result which should not surprise us.

The development the parameter of M1 monetary aggregate differential  $\beta_1$  or (Beta 1 in the figure) is interesting since it is negative all the time. Meaning that if the differential between the two economies gets larger, the resulting exchange rate decreases, which suggests appreciation of the local currency, or depreciation of the foreign currency. This is consistent with economic theory since Polish economy was constantly increasing its money supply, the polish currency depreciated faster than the Czech currency which led to decreasing the PLNCZK exchange rate, therefore relative appreciation of the Czech currency.

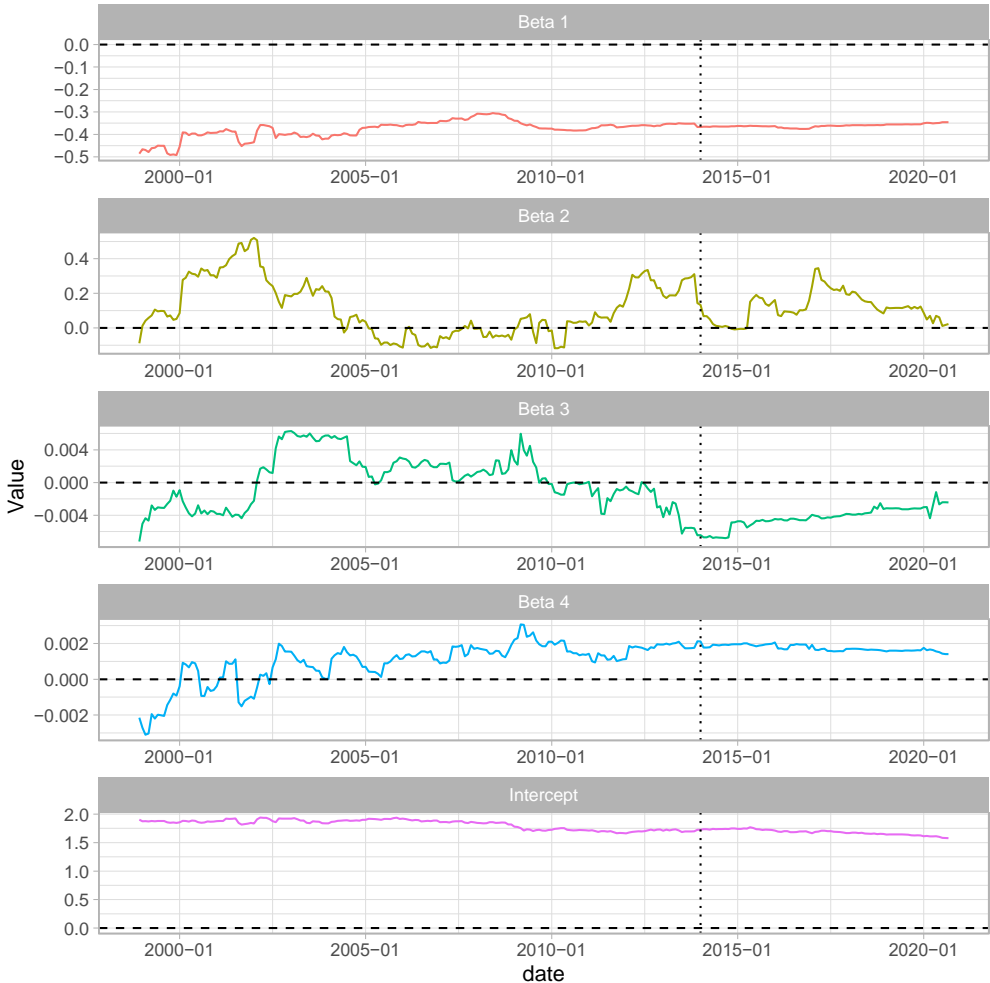


Figure 2: TVP estimation results.

The estimated parameter of production differential beta 2 has an average value of 0.115 and is almost always, except for years 2005 till 2011, positive. This means that there is a numerically positive effect on the value of the exchange rate PLNCZK when the production differential gets higher, which is in case that Czech production goes down and polish goes up. Meaning that if the differential gets larger, we may expect relative depreciation of the Czech crown with respect to Polish zloty. This situation seems to be the opposite. See the Appendix and note that the production differential around year 2015 was for a longer period almost zero. This might be the case why around year 2015 the parameter is estimated to be close to zero as well since there was no significant difference between the productivity of the Czech and Polish economy. The estimated evolution of inflation differential parameter (Beta 4) is

constantly fluctuating around zero with very small values as a difference from zero. It might be the case because the inflation differential is rather stationary around zero. The same applies for the beta 3 which is the coefficient of interest rate differential which is along the period converging towards zero.

Interesting is the fact that in late 2013 the Czech national bank begun with monetary intervention to stabilize the value of Czech currency with respect to euro. The exact date is marked by the dashed vertical line in the figure above.

## 6 CONCLUSION

The Exchange rate model of time varying parameters of (Wolff 1987) was estimated using Kalman filter and it was shown, that indeed the M1 differential causes appreciation of local currency with respect the foreign (Polish) currency. Interestingly, the study also highlighted that the impact of inflation and interest rate differentials is minimal, with the latter tending towards insignificance in the long-term perspective. The empirical findings strongly suggest that the M1 money supply and production differential play a pivotal role in shaping the CZKPLN exchange rate dynamics.

Furthermore, the research delved into the effects of the Czech National Bank's interventions, uncovering that these actions notably altered the trajectory of the model's parameters. Except for the Beta 2 parameter associated with productivity differential, all other parameters remained consistent throughout the intervention period. This observation lends credence to the notion that central bank interventions do exert a discernible influence on the parameter evolution within this model framework.

Considering these findings, a promising avenue for future research is proposed: enhancing the model by incorporating a broader range of macroeconomic variables. Such an expansion could potentially elevate the model's explanatory capacity, offering a more comprehensive understanding of the exchange rate's evolution. This approach not only promises to enrich the existing literature but also provides valuable insights for policymakers and economists in navigating the complex dynamics of currency markets.

## References

1. AKERLOF, G. A. and YELLEN, J. L., 1985. A near-rational model of the business cycle, with wage and price inertia. *The Quarterly Journal of Economics*. 100 (Supplement), pp. 823–838.
2. BERNANKE, B. S., et al., 2006. Monetary aggregates and monetary policy at the federal reserve: A historical perspective. In: *Speech at the fourth ECB central banking conference, Frankfurt, Germany*. Vol. 10.
3. DORNBUSCH, R., 1976. Expectations and exchange rate dynamics. *Journal of Political Economy*. 84 (6), pp. 1161–1176.
4. FRANKEL, J. A., 1979. On the mark: A theory of floating exchange rates based on real interest differentials. *The American Economic Review*. 69 (4), pp. 610–622.
5. KALMAN, R. E., 1960. A new approach to linear filtering and prediction problems.
6. KALMAN, R. E. and BUCY, R. S., 1961. New results in linear filtering and prediction theory.

7. MANKIW, N., 2015. *Macroeconomics*, 9th edition. Worth Publishers. Available at: <http://www.worthpublishers.com/mankiw>
8. MANKIW, N. G., 1985. Small menu costs and large business cycles: A macroeconomic model of monopoly. *The Quarterly Journal of Economics*. 100 (2), pp. 529–537.
9. MUSSA, M., 1979. Empirical regularities in the behavior of exchange rates and theories of the foreign exchange market. 11, pp. 9–57.
10. WANG, P., 2008. *Financial econometrics*. Routledge.
11. WOLFF, C. C., 1987. Time-varying parameters and the out-of-sample forecasting performance of structural exchange rate models. *Journal of Business & Economic Statistics*. 5 (1), pp. 87–97.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Dominik Kavřík<sup>i</sup>  
Prague University of Economics and Business  
Department of Econometrics  
W. Churchill Sq. 4  
130 67 Prague 3  
email: [kavd00@vse.cz](mailto:kavd00@vse.cz)

---

<sup>i</sup> This research was supported by the Internal Grant Agency of Prague University of Economics and Business under Project F4/38/2022.

# VPLYV ZAHRNUTIA VNÚTORNÉHO OBCHODU NA ODHAD EFEKTU ČLENSTVA V EU V GRAVITAČNOM MODELI

## THE EFFECT OF INCLUSION OF INTRA TRADE ON THE ESTIMATION OF THE EFFECT OF EU MEMBERSHIP IN THE GRAVITY MODEL

*Brian König*

### **Abstrakt**

Článok sa zaoberá vplyvom zahrnutia vnútorného obchodu na odhad efektu členstva v EU na bilaterálny obchodný tok pomocou gravitačného modelu. Dôraz je kladený na komparáciu odhadu dynamického efektu členstva v modeli bez zahrnutia vnútorného obchodu a v modeli so zahrnutým vnútorným obchodom. Z výsledkov dosiahnutých v aplikačnej časti článku možno konštatovať, že efekt členstva v európskej únii na bilaterálny obchod je v prípade modelu s vnútorným obchodom vyšší, v porovnaní s modelom bez vnútorného obchodu. Tento efekt klesá ak v modeli s vnútorným obchodom kontrolujeme cezhraničný obchod.

*Kľúčové slová: gravitačný model, vnútorný obchod, členstvo v európskej únii*

### **Abstract**

The article deals with the impact of including intra trade in gravity model on the estimation of the effect of EU membership on bilateral trade flow. Emphasis is put on the comparison of the estimate of the dynamic effect of EU membership in the model without the inclusion of intra trade and in the model with the intra trade. From the results obtained in the application part of the article, it can be concluded that the effect of the EU membership on bilateral trade is higher in the case of the model with intra trade, compared to the model without intra trade. This effect decreases if we control for cross-border trade in the gravity model with intra trade.

*Keywords: gravity model, intra trade, EU membership*

## **1 ÚVOD**

Často skúmaným javom v gravitačných modeloch bol vplyv dohôd o voľnom obchode alebo iných foriem medzinárodnej spolupráce (regionálne dohody o voľnom obchode, dohody o ekonomickej integrácii atď.) na bilaterálny obchod. Gravitačné modely boli dlhú dobu vystavené kritike kvôli tomu, že viaceré premenné bilaterálnych nákladov nie sú považované za exogénne premenné. Jednou z takýchto premenných, ktoré mali sklon k podliehaniu endogénnosti sú dohody o voľnom obchode. Je to z toho titulu, že za predpokladu *ceteris paribus* majú krajiny, ktoré majú vzájomne dobré obchodné vzťahy a tým pádom aj vyšší objem obchodu, väčšiu motiváciu liberalizovať obchodné pravidlá a uzatvárať dohody o voľnom obchode v porovnaní s inými krajinami, s ktorými toľko neobchodujú.

## **2 LITERATÚRA**

Jedni z autorov, ktorí sa zamerali na ekonometrické riešenie problému endogénnosti dohôd o voľnom obchode boli Baier a Bergstrand (2007). Autori dospeli k záveru, že najpravdepodobnejší odhad priemerného efektu premennej reprezentujúcej dohody o voľnom obchode na bilaterálny obchod je možno získať pomocou gravitačného modelu založeného na

panelových dátach s bilaterálnymi fixnými efektmi pre dvojice importér – exportér a s fixnými efektmi pre dvojice importér – čas a exportér – čas. Ako alternatívny spôsob odporúčajú použiť prvé diferencie bilaterálneho obchodu, čím sa eliminuje informácia o objeme obchodu medzi krajinami.

Ďalšími autormi, ktorí adresovali možné skreslenie odhadnutých parametrov v gravitačnom modeli v dôsledku endogénosti premenných boli Bergstrand, Larch a Yotov (2015). Autori sa zamerali na súčasné skúmanie efektov troch premenných a ich vplyv na veľkosť obchodu: dohôd o ekonomickej integrácii, medzinárodných hraníc a bilaterálnej vzdialenosti. Autori dospeli k záveru, že v prípade použitia gravitačného modelu so zahrnutým vnútorným obchodom s fixnými efektmi, efekt dohôd o ekonomickej integrácii na bilaterálny obchod má tendenciu byť skreslený smerom nahor. Existencia tohto skreslenia je v dôsledku nepostačujúceho použitia pozorovateľných a nepozorovateľných bilaterálnych nákladov pomocou fixných efektov, ktoré môžu znižovať náklady medzinárodného obchodu relatívne voči vnútornému obchodu. Autori odvodili model, ktorý existenciu tohto skreslenia odstraňuje a zároveň umožňuje zohľadniť klesajúci vplyv medzinárodných hraníc na bilaterálny obchod, ako aj endogénnu povahu dohôd o ekonomickej integrácii. Autori poukazovali na fakt, že zvyčajne sa predpokladá, že uzatvorenie dohody o ekonomickej integrácii medzi krajinou  $i$  a krajinou  $j$  vedie k zníženiu bilaterálnych nákladov. Štandardne však rozsah týchto dohôd siaha ďalej ako je iba obyčajné zrušenie ciel a môže viesť aj k zníženiu nielen variabilných, ale aj fixných exportných nákladov. V praxi sa však v priebehu času môžu meniť všetky typy štrukturálnych parametrov, bez ohľadu na existenciu dohôd o ekonomickej integrácii (napr. historické faktory, netarifné bariéry atď.). V dôsledku čoho autori predpokladali, že zahrnutie časovo invariantných fixných efektov ako navrhovali Baier a Bergstrand (2007) môže byť nepostačujúce k zachyteniu neskresleného efektu dohôd o ekonomickej integrácii na bilaterálny obchod, pretože ten môže byť tiež ovplyvnený zmenenými fixnými exportnými nákladmi. Metodologický prínos Bergstranda, Larcha a Yotova spočíval v zavedení premennej  $INTER_{ij,t}$  v gravitačnom modeli s bilaterálnym, ale aj vnútorným obchodom. Tá mala zachytiť priemerný pokles v nepozorovateľných bilaterálnych exportných nákladoch (fixných aj variabilných) nesúvisiacich s dohodami o ekonomickej integrácii. Premenná  $INTER_{ij,t}$  je definovaná ako súčin umelej premennej pre roky a časovo nepremenlivej umelej premennej  $INTERNATIONAL_{ij}$  nadobúdajúcej hodnotu jedna v prípade, že sa realizuje obchod medzi dvoma odlišnými krajinami ( $i \neq j$ ) a nulu v prípade, že sa jedná o obchod vnútri krajiny ( $i=j$ ).

### 3 METODOLÓGIA

Gravitačný model zahraničného obchodu je historicky spájaný s holandským ekonómom Jánom Tinbergenom, ktorý tento koncept predstavil v roku 1962 (Tinbergen, 1962). V tejto časti budeme uvažovať s gravitačným modelom odvodeným z dopytovej strany ekonomiky podľa Andersona a van Wincoopa (2003) založeného na Anderson (1979).

Ak takto upravený vzťah (1.14) následne dosadíme do vzťahov (1.8) a (1.9) získame štrukturálnu podobu gravitačného modelu Andersona a Wincoopa (2003) v tvare:

$$X_{ij} = \frac{E_j Y_i}{Y_w} \left[ \frac{t_{ij}}{\prod_i P_j} \right]^{1-\sigma}, \quad (3.1)$$

$$P_j^{1-\sigma} = \sum_i \left( \frac{t_{ij}}{\prod_i} \right)^{1-\sigma} \frac{Y_i}{Y_w}, \quad (3.2)$$

$$\Pi_i^{1-\sigma} = \sum_j \left[ \frac{t_{ij}}{P_j} \right]^{1-\sigma} \frac{E_j}{Y_w} \quad (3.3)$$

kde  $X_{ij}$  sú bilaterálne obchodné toky z krajiny  $i$  do krajiny  $j$ ;  $Y_w$  je príjem sveta (resp. produkcia);  $Y_i$  je domáca produkcia krajiny  $i$ ;  $E_j$  sú celkové výdavky krajiny  $j$ ;  $t_{ij}$  reprezentuje bilaterálne obchodné náklady medzi krajinami  $i$  a  $j$ ;  $\sigma$  je elasticita substitúcie medzi tovarmi z jednotlivých krajín.

Na odhad parametrov bude použitý pseudo- Poissonov estimátor maximálnej vierohodnosti PPML (Silva a Tenreyro, 2006)

## 4 DÁTA

Ako závislá premenná bude použitý bilaterálny import tovarov databázy DOTS (Direction of Trade Statistics) medzinárodného menového fondu. Databáza pokrýva údaje o bilaterálnom obchode za 184 krajín, pričom ročné údaje sú k dispozícii od roku 1948 až po súčasnosť zhruba s dvojročným oneskorením. Údaje sú publikované v amerických dolároch. Import bol zvolený za závislú premennú z toho titulu, ako uvádzajú viacerí autori (napr. Yotov a kol., 2016), že údaje o importe sú zvyčajne spoľahlivejšie ako údaje o exporte, pretože importy do krajiny sú o mnoho viac monitorované v porovnaní s exportom (najmä kvôli clu). Okrem toho v DOTS databáze je viacej pozorovaní importu ako exportu, a preto budeme využívať ako závislú premennú import vyjadrený v amerických dolároch (USD). Za účelom našej analýzy boli použité údaje za roky 1950 - 2015 pre 138 najväčších obchodných partnerov EU v roku 2015, pričom medzi nimi sa nachádza všetkých 28 štátov EU. Informácia o členstve v EU je použitá z databázy francúzskeho centra pre výskum a expertízy o svetovej ekonomike CEPPII, ktoré poskytuje rôzne databázy (okrem iného aj databázy slúžiace k tvorbe gravitačných modelov).

## 5 ODHAD DYNAMICKÉHO EFEKTU ČLENSTVA V EU POMOCOU GRAVITAČNÉHO MODELU

V tejto časti overíme predpoklad Bergstranda, Larcha a Yotova (2015), ktorí dospeli k záveru, že v prípade použitia dát o vnútornom obchode efekt existencie dohody o ekonomickej integrácii je nadhodnotený, pretože zachytáva v sebe aj vplyv globalizácie. Na rozdiel od autorov overíme tento predpoklad namiesto priemerného efektu dohôd o ekonomickej integrácii na členstve v EU. Pre jeho neskreslený odhad treba podľa autorov do modelu zaviesť umelú premennú, zohľadňujúcu realizáciu obchodu mimo krajinu. Najskôr budeme uvažovať s modelom v tvare:

$$x_{ij,t} = \exp(\beta_1 eu_{od_{ij,t}} + \beta_2 eu_{od_{ij,t-3}} + \beta_3 eu_{od_{ij,t-6}} + \beta_4 eu_{od_{ij,t-9}} + \phi_{ij} + \gamma_{i,t} + \delta_{j,t}) \varepsilon_{ij,t} \quad (5.1)$$

kde  $t$  je index času;  $x_{ij,t}$  teraz reprezentuje bilaterálny obchodný tok z krajiny  $j$  do krajiny  $i$ ;  $eu_{od_{ij,t}}$  je umelá premenná zachytávajúca členstvo obchodujúcich krajín v EU,  $\phi_{ij}$  sú fixné efekty v rozmere importér – exportér,  $\gamma_i$  a  $\delta_j$  sú fixné efekty importéra a exportéra.

V prvom kroku do dynamického modelu zavedieme aj vnútorný obchod, čo znamená, že bude možné, aby krajiny  $i$  a  $j$  reprezentovali súčasne tú istú krajinu. Predpoklad nadhodnoteného efektu členstva v EU sa pokúsime overiť na agregovaných dátach. Výhoda agregovaných dát oproti sektorovým dátam spočíva najmä v tom, že je možné ich sledovať za dlhšie obdobie a nie je také náročné zostrojiť databázu ako v prípade sektorových dát. Nevýhoda agregovaných dát spočíva v tom, že jediná dostupná náhrada za hrubú produkciu, ktorá vstupuje do výpočtu vnútorného obchodu je HDP krajiny, ktoré je počítané ako ukazovateľ pridanej hodnoty. Napriek nedostatkom agregovaných dát sa pokúsime adresovať problém

nadhodnoteného efektu členstva v EU v gravitačnom modeli s dátami o vnútornom obchode na základe agregovaných dát obdobne ako Bergstrand, Larch a Yotov (2015) pri skúmaní efektu dohôd o ekonomickej integrácii. Údaje o vnútornom obchode sú počítané ako rozdiel medzi HDP krajiny a exportom. V prvom kroku budeme uvažovať s dynamickou špecifikáciou modelu (už bez vplyvu *fta*), pričom ju rozšírime o existenciu vnútorného obchodu (krajina *i* môže byť totožná s krajinou *j*).

**Tabuľka 5.1 – Odhad dynamického gravitačného modelu s vnútorným obchodom**

	(1) basic	(2) intra	(3) lag	(4) lag_intra
main				
eu_od	0.4355*** (0.0356)	0.6920*** (0.0464)	0.3454*** (0.0321)	0.4550*** (0.0475)
eu_od_lag3			0.0394** (0.0167)	0.0984*** (0.0197)
eu_od_lag6			0.0488*** (0.0167)	0.1959*** (0.0293)
eu_od_lag9			0.0690*** (0.0237)	0.0685*** (0.0236)
<i>N</i>	194352	197056	194352	197056
<i>R</i> <sup>2</sup>	0.991	1.000	0.991	1.000
total_eu_od	0.4355	0.6920	0.5026	0.8179

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < .05$ , \*\*\*  $p < .01$

Model (1) reprezentuje pôvodný model na celom období. Model (2) reprezentuje pôvodný model s vnútorným obchodom na celom období. Model (3) reprezentuje pôvodný dynamický model na celom období. Model (4) reprezentuje dynamický model s vnútorným obchodom na celom období.

Z výsledkov v tabuľke (Tabuľka 5.1) je možné si všimnúť, že v modeli s vnútorným obchodom efekt členstva v EU je výrazne vyšší v porovnaní s modelom bez vnútorného obchodu. Bergstrand, Larch a Yotov (2015) pripisujú tieto vysoké hodnoty efektu globalizácie, ktorý v sebe členstvo v EU môže zachytávať. Preto v ďalšom kroku zavedieme do modelu umelú premennú *inter* reprezentujúcu realizáciu obchodu do zahraničia (rovná jednej ak  $i \neq j$ ). Dynamický model rozšírený o premennú *inter* v čase možno zapísať v tvare:

$$x_{ij,t} = \exp \left[ \beta_1 eu_{od_{ij,t}} + \beta_2 eu_{od_{ij,t-3}} + \beta_3 eu_{od_{ij,t-6}} + \beta_4 eu_{od_{ij,t-9}} + \sum_{T=1997}^{2012} \beta_T inter(T)_{ij} + \phi_{ij} + \gamma_{i,t} + \delta_{j,t} \right] \varepsilon_{ij,t}. \quad (5.2)$$

Keďže nová umelá premenná *inter* nadobúda hodnotu jedna ak sa realizuje obchod do zahraničia pre každý jeden rok, kvôli úplnej multikolinearite s ostatným fixnými efektmi je nevyhnutné jeden rok vynechať. Z tohto titulu sme vynechali pri premennej *inter* rok 2015, a teda všetky parametre pri premennej *inter* by sa mali interpretovať relatívne voči korešpondujúcemu roku 2015. Aby nebolo v modeli príliš veľa premenných *inter*, rozhodli sme sa použiť odhad iba za posledných 20 rokov (pozorovania  $> 1995$ ). Keďže používame trojročné intervaly prvý rok, ktorý sa dostal do odhadu je rok 1997 a posledný je 2015.

Niekoľko zistení možno konštatovať na základe odhadov v tabuľke (Tabuľka 5.2). Keď použijeme model s vnútorným obchodom efekt členstva v EU na tok obchodu zahraničného obchodu relatívne voči vnútornému obchodu rastie bez ohľadu na typ modelu v porovnaní s modelom bez vnútorného obchodu. V prípade použitia premennej *inter* efekt členstva v EU zostal štatisticky významný a pozitívny, avšak celkový efekt klesol v porovnaní s dynamickým modelom so zahrnutým vnútorným obchodom. Čo sa týka vplyvu hranice na bilaterálny obchod (premená *inter*) možno pozorovať, že v roku 1997 bol efekt hranice vyšší v porovnaní s rokom 2015. Tento efekt postupne oslaboval (roky 2003 a 2009). Zaujímavé je, že efekt hranice v rokoch 2006 a 2012 ako keby mal nižší efekt na bilaterálny obchod v porovnaní s efektom hranice v roku 2015.

**Tabuľka 5.2 – Odhad dynamického gravitačného modelu s vnútorným obchodom a premennou *inter***

	(1) lag95	(2) lag_intra95	(3) inter95
main			
eu_od	0.2303*** (0.0392)	0.4022*** (0.0392)	0.3489*** (0.0348)
eu_od_lag3	0.0150 (0.0189)	0.0914*** (0.0233)	0.1149*** (0.0167)
eu_od_lag6	0.0289 (0.0188)	0.2304*** (0.0348)	0.1494*** (0.0240)
eu_od_lag9	0.0172 (0.0242)	0.0558*** (0.0210)	0.0642*** (0.0247)
inter1997			-0.1710*** (0.0375)
inter2000			0.0009 (0.0310)
inter2003			-0.0626** (0.0254)
inter2006			0.0994*** (0.0222)
inter2009			-0.0960*** (0.0174)
inter2012			0.1501*** (0.0125)
<i>N</i>	106180	107169	107169
<i>R</i> <sup>2</sup>	0.993	1.000	1.000
total_eu_od	0.2914	0.7797	0.6775

Standard errors in parentheses

\*  $p < 0.10$ , \*\*  $p < .05$ , \*\*\*  $p < .01$



Model (1) reprezentuje pôvodný dynamický model po roku 1995. Model (2) reprezentuje dynamický model s vnútorným obchodom po roku 1995. Model (3) reprezentuje dynamický model s vnútorným obchodom a premennou *inter* po roku 1995.

## ZÁVER

Článok sa venuje komparácií odhadov statického a dynamického odhadu efektu členstva v EU, pričom dôraz je zameraný na vplyv zahrnutia vnútorného obchodu. Z výsledkov dosiahnutých v aplikačnej časti možno konštatovať, že efekt členstva v EU je v prípade modelu s vnútorným obchodom výrazne vyšší, v porovnaní s modelom bez vnútorného obchodu. Zahrnutie premennej kontrolujúcej pozorovaní s vnútorným obchodom tento efekt znižuje.

*Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 1/0115/23 „Aplikácie kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a medzinárodných vzťahoch“.*

## Použitá literatúra

1. ANDERSON, J. E. – VAN WINCOOP, E. (2003). Gravity With Gravititas: a Solution to the Border Puzzle. *American Economic Review* 93[1], 170- 192.
2. ANDERSON, J. E. (1979). *A Theoretical Foundation for the Gravity Equation*. *American Economic Review* 69[1], 106-116.
3. BAIER, S. L. – BERGSTRAND, J. H. (2007). “Do free trade agreements actually increase members’ international trade”, *Journal of International Economics*, 71:72-95.
4. BERGSTRAND, J. H. – LARCH, M. – YOTOV, Y. V. (2015). *Economic Integration Agreements, Border Effects, and Distance Elasticities in Gravity Equations*. *European Economic Review* 78, 307-327.
5. SANTOS SILVA, J. – TENREYRO, S. (2006). The log of gravity. *The Review of Economics and Statistics* 88 (4), 641–658.
6. TINBERGEN, J. (1962). *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*. 1<sup>st</sup> ed. New York: The Twentieth Century Fund.
7. YOTOV, Y. V. – PIERMARTINI, R. – MONTEIRO, J. A. – LARCH, M. (2016). *An Advanced Guide to Trade Policy Analysis: The Structural Gravity Model* (Geneva: WTO, 2016).

## Kontaktné údaje

Ing. Brian König, PhD.,

**a**, Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava.

**b**, Ekonomický ústav SAV,  
Šancová 56, 811 05 Bratislava.

e-mail: brian.konig@euba.sk

# Aplikace Komplexního Ekonometrického Modelu s Prostorovými a Časovými Charakteristikami

## Application of Complex Econometric Model with Spatial and Temporal Features

Martin Konopásek

### Abstrakt

Vztahy mezi makroekonomickými proměnnými distribuovanými v čase a prostoru mohou být velmi složité. Proto je při provádění empirické analýzy důležité zohlednit co nejvíce předpokládaných vlastností zkoumaných proměnných. Tento článek ukazuje aplikaci modelu dynamického panelového regresního modelu na míru nezaměstnanosti pěti evropských zemí. Tento model bere v úvahu mnoho vlastností, které bychom mohli očekávat v modelovaných vztazích. Konkrétně model umožňuje modelovat prostorovou a časovou dynamiku, stejně jako prostorově heterogenní odezvy, při současném použití endogenních regresorů v jednom rámci.

**Klíčová slova:** lineární panelový model, prostorová a časová dynamika, prostorová heterogenita, náhodné parametry odezvy, endogenní regresory, míra nezaměstnanosti

### Abstract

The relations between macroeconomic variables distributed over time and space could be very complex. Therefore, when performing empirical analysis, it is important to take into account as many assumed features of the examined variables as possible. This article shows the application of dynamic panel regression model to the unemployment rates of five European countries. This model accounts for numerous features that one could expect within modelled relationships. Specifically, the model allows for modeling spatial and temporal dynamics, as well as spatially heterogeneous responses while using endogenous regressors in one framework.

**Keywords:** linear panel model, spatial and temporal dynamics, spatial heterogeneity, random response parameters, endogenous regressors, unemployment rate

## 1 Introduction

The article adopts the model and estimation approach of Elhorst and Zeilstra (2007) [4]. Their spatial dynamic model, tailored for cross-country regional analysis, operates on panel data with hierarchical cross-sectional dimension with two levels (e. g. countries

and regions). This model captures both country-specific traits and features common to all spatial units. Specifically, it incorporates country-specific exogenous spatial effects through SAR processes, considers various variables at regional and national levels (which can be exogenous or endogenous), accounts for country-specific variances of identically and independently distributed (IID) components, and introduces a country-specific random component for response parameters of exogenous country-level variables. The temporal dynamics, represented by AR(1) process specification, share autoregressive coefficient which is common for all spatial units.

This article provides an extension of their model by incorporating endogenous spatial effect, achieved by formulating explained variable as country-specific SAR process. Additionally, to account for spatial-temporal dynamics, explained variable lagged simultaneously in space and time with one common parameter is included. Especially former extension could be very interesting since it allows for modelling country-specific spatial responses of explanatory variables. The article is then simply structured as follows: the second section formally describes the model and provides the corresponding assumptions, while the third section is devoted to model application on the unemployment rate and results interpretation. Explanatory analysis is then performed for Germany, Spain, France, Italy and Netherlands

Notations: subscript  $i$  belongs to cross-sectional units and  $N$  is their total number; subscript  $c$  belongs to countries and  $C$  is their total number; subscript  $t$  belongs to time observations and  $T$  is their total number; bold subscripts denote names of vectors and matrices, for square matrices they also describe their dimension;  $\mathbf{I}$  is identity matrix and  $\mathbf{E}$  is square matrix of ones.

## 2 Model Description

As mentioned above, model is designed for two-level cross-sectional dimension, such as countries and regions. For every country  $c \in \{1, \dots, C\}$ , with certain number of spatial units (regions)  $N_c \in [N_1, \dots, N_C]$ , it is assumed specific spatial weight matrix for every country ( $\mathbf{W}_c$ ) which is defined by following assumptions:

**Assumption 1.** *Spatial weight matrix  $\mathbf{W}$  is gained by row-normalizing connectivity matrix  $\mathbf{C}$  (such as  $w_{ij} = c_{ij}/\sum_j c_{ij}$ ), while for elements of matrix  $\mathbf{C}$  applies:*

$$c_{ij}(d_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if distance criterion } d_{ij} \text{ is not met} \\ 1, & \text{if distance criterion } d_{ij} \text{ is met,} \end{cases} \quad (1)$$

where  $d_{ij}$  is some pre-formulated function of geographical distances between spatial units.

**Assumption 2.** *For rows and columns of the connectivity matrix  $\mathbf{C}$  applies:*

$$\sum_{i \in [1, \dots, N]} |c_{ij}| \leq B_c < \infty \quad \forall j \in N \quad \text{and} \quad \sum_{j \in [1, \dots, N]} |c_{ij}| \leq B_c < \infty \quad \forall i \in [1, \dots, N]. \quad (2)$$

Within this setup, only interactions between regions within one country are accounted for

and weight matrix for whole model is defined as:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{W}_C \end{bmatrix}. \quad (3)$$

This spatial structure allows for easier model construction (and parameter estimation) and could be justified by the assumption, that regions within one country are more likely to interact with each other than those which belong to different countries due to absence of social, cultural and language barriers as well as institutional differences. Although assumption of zero spatial dependence between neighbouring regions of different countries may be unrealistic in some cases, these kind of interactions are at least assumed to be weaker, thus described spatial weight structure could be consider as good approximation. Structure of Matrix (3) allows to model examined variable as Spatial Autoregressive (SAR) process with  $C$  country-specific spatial parameters  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_C]^\top$ . Specifically, dependent variable could be rewritten as:

$$\mathbf{y}_{ct} = \lambda_c \mathbf{W}_c \mathbf{y}_{ct} + X_{ct}, \quad (4)$$

where  $X$  represents every other observed and unobserved components assumed within the process. From this specification it could be seen that for every country there must exist inverse of the matrix  $\mathbf{A}_c = (\mathbf{I}_{N_c} - \lambda_c \mathbf{W}_c)$  for stability of the model. Additionally, SAR process within unobserved component could be modelled in similar way, again with country-specific spatial parameters  $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_C]^\top$  and corresponding matrices  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_C$  for which invertibility conditions are applied as well. To deal with temporal dynamics, common autoregressive coefficient ( $\tau$ ) associated with the time lag of dependent variable is included in model. For dynamic completeness, also spatial-temporal component could be implemented, but as in case of autoregressive coefficient, only one common parameter ( $\delta$ ) is assumed, thus dependent variable with all aforementioned features would take form:

$$\mathbf{y}_{ct} = \lambda_c \mathbf{W}_c \mathbf{y}_{ct} + (\tau \mathbf{I}_{N_c} + \delta \mathbf{W}_c) \mathbf{y}_{ct-1} + \mathbf{B}_c^{-1} \mathbf{v}_{ct} + X_{ct}. \quad (5)$$

Apart from invertibility conditions for  $\mathbf{A}_c$  and  $\mathbf{B}_c$ , also assumption 3 for every examined country must be met in order to proper estimation. For dependent variable, we could expect cross-sectionally heterogeneous means as well, in that case, we use fixed effect extraction via eigenvectors of transformation matrix described in Lee and Yu (2010) [6]. This approach yields exactly same estimates es provided by traditional time demeaning, but with two important advantages. First, unlike in case of time demeaning, extraction via eigenvectors of transformation matrix does not bring negative autocorrelation into the residuals and second, it reduces time dimension by one, which could be useful within most likelihood estimation framework.

Now lets look at the structure and features of explanatory variables and corresponding response parameters, which form the observed part of term  $X_{ct}$  in equations 4 and 5. Generally, three sets of explanatory variables are assumed -  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  and  $\mathbf{X}_3$ . Within first set ( $\mathbf{X}_1$ ), exogenous variables (potentially alongside with their spatial lag form) at regional level (i. e. there exist variation across all examined regions within these variables) are included, while the second set ( $\mathbf{X}_2$ ) is made up of exogenous country-level variables (i. g. variables, that vary over countries but have the same observed values for every region within the same country). Finally, endogenous variables could be divided into two parts:

first part, which contains temporally and spatial-temporally lagged dependent variable, and second part expressed by set  $\mathbf{X}_3$  which is made up of other endogenous variables which could be defined on regional as well as country level. For sets  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$  and  $\mathbf{X}_3$  lets define corresponding response parameters as  $\beta = [\beta_1^\top, \beta_2^\top, \beta_3^\top]^\top$ . Important feature of this model is, that it allows for spatial heterogeneity at country level in response parameters of exogenous regional-level variables ( $\beta_1$ ) via random component within these parameters. More specifically, response parameters  $\beta_1$  are modelled as random variables which could be expressed as follows:

$$\beta_{1,c} = \beta_1 + \epsilon_c, \quad E(\epsilon) = \mathbf{0}, \quad Var(\epsilon) = \mathbf{V}, \quad (6)$$

where matrix  $\mathbf{V}$  is some positive definite symmetric matrix of dimension  $k_1 \times k_1$ , where  $k_1$  is number of variables contained in  $\mathbf{X}_1$ . This formulation means, that response parameters of exogenous regional-level variables could vary across countries around common means ( $\beta_1$ ).

By defining  $\mathbf{K}_c = (\tau \mathbf{I}_{N_c} + \delta \mathbf{W}_c) \otimes \mathbf{I}_{T-1}$ , full model with all aforementioned features is formally expressed as:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{A}_C \otimes \mathbf{I}_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^* \\ \mathbf{y}_2^* \\ \cdot \\ \mathbf{y}_C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1t-1}^* \\ \mathbf{y}_{2t-1}^* \\ \cdot \\ \mathbf{y}_{Ct-1}^* \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,1}^* \\ \mathbf{X}_{1,2}^* \\ \cdot \\ \mathbf{X}_{1,C}^* \end{bmatrix} \beta_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2,1}^* \\ \mathbf{X}_{2,2}^* \\ \cdot \\ \mathbf{X}_{2,C}^* \end{bmatrix} \beta_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{3,1}^* \\ \mathbf{X}_{3,2}^* \\ \cdot \\ \mathbf{X}_{3,C}^* \end{bmatrix} \beta_3 + \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,1}^* & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_{1,2}^* & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{X}_{1,C}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \cdot \\ \epsilon_C \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{B}_C^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \cdot \\ \nu_C \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

For component  $\mathbf{v}$  is assumed, that within one country is identically and independently distributed with zero mean, but it's variance could possibly differ from one country to another (thus specific form of heteroskedasticity is taken into account). This model formulation then implies that unobserved component, which is given by:

$$\mathbf{u}^* = (\mathbf{A}_N \otimes \mathbf{I}_{T-1}) \mathbf{y}^* - \tilde{\mathbf{X}} \boldsymbol{\xi}, \quad (8)$$

with

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{A}_C \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where  $\tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{y}_{t-1}^*, (\mathbf{W}_N \otimes \mathbf{I}_{T-1}) \mathbf{y}_{t-1}^*, \mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \mathbf{X}_3^*]$ , has variance in form of block-diagonal matrix with  $C$  blocks such as:

$$\boldsymbol{\Sigma}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_2 & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \boldsymbol{\Sigma}_C \end{bmatrix}, \quad (10)$$

with  $c$ -th block given by:

$$\Sigma_c = \mathbf{X}_{1,c}^* \mathbf{V} \mathbf{X}_{1,c}^{*\top} + \sigma_{v_c}^2 (\mathbf{B}_c^\top \mathbf{B}_c \otimes \mathbf{I}_{T-1})^{-1}, \quad (11)$$

which is the same form as in model without endogenous spatial effects proposed by Elhorst and Zeilstra (2007) [4].

To sum up, model described by Equation (7) contains country-specific parameters  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  and  $\boldsymbol{\sigma}_v^2 = [\sigma_{v,1}^2, \dots, \sigma_{v,C}^2]^\top$ , that is  $C \times 3$  country-specific parameters in total. Another group of parameters appearing in Model (7) are response parameters, which are similarly to previous chapter denoted by  $\boldsymbol{\xi} = [\tau, \delta, \boldsymbol{\beta}^\top]^\top$ . Remaining parameters are elements of matrix  $\mathbf{V}$  and since this matrix is symmetric, we could take to account only  $\frac{(k_1+1)k_1}{2}$  parameters (diagonal elements and elements above diagonal of  $\mathbf{V}$ ). Therefore, there are  $C \times 3 + k_{\tilde{x}} + \frac{(k_1+1)k_1}{2}$  (where  $k_{\tilde{x}}$  is number of columns of matrix  $\tilde{\mathbf{X}}$  or alternately length of  $\boldsymbol{\xi}$ ) parameters included in the Model (7).

## 2.1 Estimation Procedure

To obtain consistent estimation of described model, analogue to Swamy's three stage procedure (Swamy (1970) [9]) taken and extended from Elhorst and Zeiltra (2007) [4] can be applied. First stage of this method serves for two purposes. First, country-specific parameters  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  and  $\boldsymbol{\sigma}_v^2$  are estimated and second, estimation of response parameters is performed in such way that we assume country-specific responses to exogenous regional-level variables (represented by country-specific response parameters  $\boldsymbol{\beta}_1 = [\boldsymbol{\beta}_{1,1}^\top, \dots, \boldsymbol{\beta}_{1,C}^\top]^\top$ ). In other words, in first step we estimate model (7), but without random component  $\boldsymbol{\epsilon}$  and with block diagonal matrix of explanatory variables contained in set  $\mathbf{X}_1$ , where  $c$ -th block is given by variables observed within  $c$ -th country. For estimation of parameters within this set up, it is applied procedure that alternates between maximizing country-specific concentrated LL functions to obtain estimates of spatial parameters ( $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ ) and instrumental analogue to FGLS method for  $\boldsymbol{\sigma}_v^2$  and response parameters  $\boldsymbol{\beta}$  estimation. By using country-specific estimates  $\boldsymbol{\beta}_{1,c}$  from the first stage, estimate of matrix  $\mathbf{V}$  from (6) is computed as:

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{C-1} \sum_c (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,c} - \frac{1}{C} \sum_c \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,c}) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,c} - \frac{1}{C} \sum_c \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,c})^\top. \quad (12)$$

Within final, third stage of this procedure, common parameters  $\boldsymbol{\beta}_1$  alongside with other parameters contained in  $\boldsymbol{\xi}$  corresponding to Model (7) are estimated again by instrumental analogue to FGLS, where estimates of  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_v^2$  and  $\mathbf{V}$  from previous stages are used. Whole estimation process is described in more detail within my previous paper and can be found within proceedings of 41st International Conference on Mathematical Methods in Economics [7].

## 2.2 Spatial Effects

SAR structure of dependent variable causes that explanatory variables have heterogeneous impacts across space. Block diagonal structure of spatial weights matrix  $\mathbf{W}_N$  and assumed country-specific spatial parameters  $\boldsymbol{\lambda}_c$  in Model (7) imply country-specific spatial impacts

as well. This could be seen from reduced form equation for Model (7) which takes form:

$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{A}_C^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}\boldsymbol{\xi} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{A}_C^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}^*. \quad (13)$$

In this set up, country-specific observations of every variable (including time and space-time lags of dependent variable) are multiplied by corresponding country-specific matrices  $\mathbf{A}_1^{-1} \otimes \mathbf{I}_{T-1}$ , thus impacts of explanatory variables contained in set  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3]$  in the short run for  $c$ -th country at any time  $t \in [1, \dots, \infty]$  are defined as:

$$\frac{\partial E(\mathbf{y}_{ct})}{\partial \mathbf{x}_{j,ct}^\top} = \mathbf{A}_c^{-1}(\mathbf{I}_{N_c}\beta_j + \mathbf{W}_c\beta_{S,j}), \quad (14)$$

where  $\beta_{S,j}$  is response parameter corresponding to spatially weighted explanatory variable  $j$ . Long run country-specific spatial impacts for  $j$ -th explanatory variable could be obtained by imposing  $y_{it} = y_{it-1}$  and take form:

$$\frac{\partial E(\mathbf{y}_c)}{\partial \mathbf{x}_{j,c}^\top} = [(1 - \tau)(\mathbf{I}_{N_c} - (\lambda_c + \delta)\mathbf{W}_c)]^{-1}(\mathbf{I}_{N_c}\beta_j + \mathbf{W}_c\beta_{S,j}). \quad (15)$$

Main interest then lies in aggregated statistics derived from spatial impacts defined by (14) and (15), that characterize how explanatory variables affect the dependent variable on average. These are direct, indirect and total average impacts are defined by

$$Imp_S^d = \frac{1}{N}tr[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I}_N\beta_{D,j} + \mathbf{W}\beta_{S,j})] \quad (16)$$

$$Imp_S^i = \frac{1}{N}\{\boldsymbol{\iota}_N^\top \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I}_N\beta_{D,j} + \mathbf{W}\beta_{S,j})\boldsymbol{\iota}_N - tr[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I}_N\beta_{D,j} + \mathbf{W}\beta_{S,j})]\} \quad (17)$$

$$Imp_S^t = Imp_S^d + Imp_S^i \quad (18)$$

for short run and by

$$Imp_L^d = \frac{1}{N}tr[[(1 - \tau)\mathbf{I}_N - (\lambda + \delta)\mathbf{W}]^{-1}(\mathbf{I}_N\beta_j + \mathbf{W}\beta_{S,j})] \quad (19)$$

$$Imp_L^i = \frac{1}{N}\{\boldsymbol{\iota}_N^\top [(1 - \tau)\mathbf{I}_N - (\lambda + \delta)\mathbf{W}]^{-1}(\mathbf{I}_N\beta_j + \mathbf{W}\beta_{S,j})\boldsymbol{\iota}_N - tr[[(1 - \tau)\mathbf{I}_N - (\lambda + \delta)\mathbf{W}]^{-1}(\mathbf{I}_N\beta_j + \mathbf{W}\beta_{S,j})]\} \quad (20)$$

$$Imp_L^t = Imp_L^d + Imp_L^i, \quad (21)$$

for long run. Inference of these statistics is obtained via MC simulations. Specifically, for short run we use estimated variance matrix of parameters  $\lambda_c$  and  $\boldsymbol{\beta}$  to draw  $R$  combinations of these parameters and subsequently construct  $R$  statistics  $Imp^d$ ,  $Imp^i$  and  $Imp^t$  from which we get the inference.<sup>1</sup> Analogously, inference of long run spatial impacts is

<sup>1</sup>Number of simulations ( $R$ ) should be large enough, the bigger it is, the more precise is inference estimation, in this paper  $R = 1000$  is used.

obtained in the same way when we use variance matrix of parameters  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\delta$  and  $\beta$ . From (15) it is clear, that long run effects are not well defined when  $[(1 - \tau)(\mathbf{I}_{N_c} - (\lambda_c + \delta)\mathbf{W}_c)]^{-1}$  does not exist. Sufficient condition for existence of this matrix could be expressed by following assumption:

**Assumption 3.** For every country  $c \in [1, \dots, C]$ , all eigenvalues of matrix  $\mathbf{A}_c^{-1}(\tau\mathbf{I}_{N_c} + \delta\mathbf{W}_c)$  are in absolute value lesser than one.

This assumption implies some restrictions on parameter space of coefficients  $\lambda$ ,  $\tau$  and  $\delta$ . More specifically, eigenvalues of this matrix could be expressed as functions of corresponding eigenvalues of  $\mathbf{W}$  and mentioned parameters in following way:

$$\omega_i[\mathbf{A}_c^{-1}(\tau\mathbf{I}_{N_c} + \delta\mathbf{W}_c)] = \frac{\tau + \delta\omega_i(\mathbf{W}_c)}{1 - \lambda_c\omega_i(\mathbf{W}_c)}. \quad (22)$$

As shown in Elhorst (2014) [2] complete intervals of stability for corresponding parameters are expressed in following way (using assumption 3 and fact that  $\omega_{max}(\mathbf{W}_c) = 1$ ):

$$\tau < 1 - (\lambda_c + \delta) \wedge \tau > -1 + \lambda_c + \delta, \text{ for } \delta + \lambda_c \geq 0 \quad (23)$$

$$\tau < 1 - (\lambda_c + \delta)\omega_{min}(\mathbf{W}_c) \wedge \tau > -1 + (\lambda_c + \delta)\omega_{min}(\mathbf{W}_c), \text{ for } \delta + \lambda_c < 0 \quad (24)$$

where  $\omega_{min}(\mathbf{W}_c)$  is the most negative eigenvalue of matrix  $\mathbf{W}_c$ .

### 3 Explanatory Analysis

This section provides brief description of used data and illustrative application of Model (7) to the unemployment rates of selected countries. Interpretation of the results is then made with emphasis on all features that are provided by the complexity of used model.

#### 3.1 Data Description

Table 1 contains all used variables together with simple definition. These variables are mostly taken from Elhorst (2003) [3], Elhorst and Zeilstra (2014) [10] and Rios (2017) [8]. The main source of this data is Eurostat [5] with exception of data for variable *tax\_wedge* which was taken from the OECD webpage [1].

Table 1: Description of the variables.

Variable	Description
un_rate	Share of unemployed persons within economically active population (ILO methodology).
lab_prod	Relative growth of average real productivity of labor (real regional GDP divided by employment).
educ_0_2	Share of individuals whose highest attained education is elementary according to the ISCED classification (within working age population).

*Continued on the next page*



Table 1: Description of the variables (continued)

<b>Variable</b>	<b>Description</b>
educ_5_8	Share of individuals with tertiary education according to the ISCED classification (within working age population).
emp_ht	Share of individuals employed in knowledge-intensive sectors - KIS according to NACE classification (within employed persons).
young_share	Share of people aged between 15-24 years (within working age population).
emp_manu	Share of individuals employed in the manufacture sector - B-F according to the NACE classification (within the employed population).
young_growth	Relative growth of people aged between 15-24 years.
emp_pub	Share of individuals employed in the public sector (within the employed population).
emp_growth	Relative growth of (self-)employed individuals.
inflation	Relative change in the harmonized index of consumer prices (HCPI).
min_wage	Ratio of monthly minimal wage and average wage.
un_ben	Ratio of cash unemployment benefits to GDP.
tax_wedge	Average percentage of taxes and social security contributions deducted from an individual's gross income.
partic	Participation rate - economically active population divided by working age population.
partic_young	Participation rate of people aged between 15 and 24 years of age.

Further insight to the variables distribution can be found in underlying Table 2, which contains basic descriptive statistics.

Table 2: Statistical properties of the variables

<b>Variable</b>	<b>Mean</b>	<b>Median</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>SD</b>
un_rate	8.718	7.300	1.800	36.200	5.829
lab_prod	0.638	0.600	-5.900	14.800	1.730
educ_0_2	29.142	27.400	6.600	61.100	10.960
educ_5_8	24.760	24.200	10.000	46.600	7.034
emp_ht	39.293	39.400	27.000	54.100	5.444
young_share	12.594	12.796	7.671	19.633	1.951
emp_manu	1.198	0.829	0.070	11.043	1.287

*Continued on the next page*

Table 2: Statistical properties of the variables (continued)

Variable	Mean	Median	Min	Max	SD
young_growth	-0.445	-0.384	-13.742	18.869	3.808
emp_pub	13.897	14.812	7.473	21.320	3.028
emp_growth	0.476	0.618	-9.178	7.129	1.960
inflation	1.343	1.300	-0.600	3.300	0.900
min_wage	27.228	40.800	0.000	47.800	20.716
un_ben	1.500	1.500	0.700	3.400	0.591
tax_wedge	46.275	48.025	36.936	50.095	4.362
partic	57.452	58.291	37.863	70.240	5.606
partic_young	44.090	43.614	17.480	77.488	13.267

### 3.2 Model Application

This section provides an overview results of the application of Model (7) to the regional unemployment rates. First lets take closer look at the estimates obtained within the first stage of estimation procedure. Results contained in Table 3 sequentially show the first stage estimates of country-specific response parameters of exogenous regional-level variables ( $\beta_{1,c}$ ), common response parameters of institutional variables ( $\beta_2$ ), common response parameters of endogenous variables ( $\beta_3$ ), country-specific spatial parameters  $\lambda$  and  $\rho$ , and common temporal and spatial-temporal coefficients ( $\tau$  and  $\delta$ ). In addition, expected effects of the response variables, which are mostly taken from Elhorst (2003) [3] and Elhorst and Zeilstra (2014) [10], are reported.

Table 3: First stage parameter estimates

Variable	Expected Sign	Germany	Spain	France	Italy	Netherlands
lab_prod	-	-0.015	-0.097*	0.050	-0.124***	-0.013
educ_0_2	+	0.019	-0.021	0.011	0.080*	0.059
educ_5_8	-	0.018	-0.137	-0.012	0.102	-0.065
emp_ht	-	-0.050	0.223***	0.019	0.140**	0.133**
young_share	+	0.100	0.093	0.129	-0.292*	0.024
emp_manu	+	-0.265	-0.294	0.316	0.001	0.358
young_growth	+	-0.007	0.020	0.004	0.037	0.025*
emp_pub	+	-0.008	-0.471**	0.081	-0.281	-0.007
emp_growth	-	-0.076***	-0.343***	-0.207***	-0.154***	-0.104***
inflation	-	0.155***	0.155***	0.155***	0.155***	0.155***
min_wage	+	0.005**	0.005**	0.005**	0.005**	0.005**
un_ben	+	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061
tax_wedge	+	0.083*	0.083*	0.083*	0.083*	0.083*
partic	-	-0.148***	-0.148***	-0.148***	-0.148***	-0.148***
partic_young	$\pm$	0.067***	0.067***	0.067***	0.067***	0.067***
$\lambda$	+	0.446***	0.422***	0.549***	0.485***	0.449***
$\rho$	$\pm$	-0.390***	-0.065***	-0.385***	-1.272***	-0.210**
$\tau$	+	0.663***	0.663***	0.663***	0.663***	0.663***
$\delta$	$\pm$	-0.230***	-0.230***	-0.230***	-0.230***	-0.230***
$\sigma_\nu^2$	+	0.128	0.355	0.377	0.341	0.191
LL		-138.547	-123.893	-182.400	-165.992	-66.021

Note: \* indicates significance at 10% level, \*\* at 5%, \*\*\* at 1%.

It can be seen that country-specific estimates differ across countries in signs as well as significance. The only variable that is consistent in sign and significance across countries is the *emp\_growth*, which takes expected negative sign and significance at the 1% level. The same level of significance characterize country-specific response parameters of variables *emp\_manu* and *educ\_5\_8*, where all estimates appear to be insignificant but with the different signs and magnitudes. In terms of significance, the country-specific estimates are rather non-significant for most of the variables. More specifically, except of the *emp\_growth* variable there is no variable for which country-specific response parameter estimates are significant at least on 10% level across all countries. Second most significant estimates appear to be that for the *emp\_ht* variable, where estimates for Italy and Netherlands are significant at the 5% level and the estimate for Spain is significant even at the 1% level, however signs of these estimates are opposite to the expected one. Another estimate significant at the 1% level is reported within the *lab\_prod* variable for Italy. In addition, estimates for this variable take expected negative signs except of the France case, but the only other significant estimate is reported for Spain, where the estimate is significant at the 10% level. For other exogenous regional-level variables there is at most one significant estimate across the countries, while estimated signs slightly differ, but more often correspond to the expected sign.

Situation is quite different for the estimates of common parameters corresponding to the institutional variables and endogenous variables. All estimates except of variable *un\_ben* appear to be significant at least at 10% level but mostly at 1% level. Very surprising result can be observed for the *inflation* variable, where in contrast to the traditional economic theory, estimate of corresponding response parameter has positive sign and is significant at 1% level. This estimated relationship could be the result of adverse aggregate country-specific supply shocks which caused prices to grow simultaneously with the unemployment rates. Although labour productivity is included in model to account for supply shocks at the regional level, there still could be some factors which do not project into regional labour productivity, but influence the aggregated market supply. In contrast to the response parameter of the *inflation* variable, all signs for remaining parameters are estimated in accordance with expectation.

Important output of the first estimation stage are the estimates of country-specific spatial parameters  $\lambda$  and  $\rho$ . Results for  $\lambda$  strongly suggest positive spatial dependence among the unemployment rates, with estimated magnitude in range between 0.422 (Spain) and 0.549 (France). Spatial autocorrelation within the unobserved component represented by the country-specific parameters  $\rho$  appears to be negative and significant for all countries. While magnitude of estimated exogenous spatial effects of the most countries does not exceed  $-0.4$ , there is exception in case of estimate for Italy where  $\rho_{IT} = -1.272$ . This value suggests strong negative spatial dependence among the unobserved component, which is on the other hand still stable and stationary, since the most negative eigenvalue of spatial weight matrix corresponding to Italy is in absolute value lesser than 0.5. In context of model stability defined by conditions 23 and 24 the results suggest stationary DGP for all countries, although DGP of the unemployment rate for France appears to be relatively high persistent since  $\lambda_{FR} + \tau + \delta = 0.982 < 1$ . In addition all spatial and temporal dynamics represented by estimated parameters  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $\tau$  and  $\delta$  appears to be significant at 1% level except of  $\rho$  parameter for Netherlands, which is significant at 5% level.

Last presented estimate is country-specific variance of IID components, which is reported without significance. It can be seen that this term relatively differ across countries, thus assumption of the heteroskedasticity defined on country level appears to be correct.

Now using country-specific estimates of the response parameters corresponding to exogenous regional-level variables, within the second stage we construct estimate of covariance matrix  $\mathbf{V}$  by using (12). This estimate then takes following form:

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0.003 & -0.002 & -0.001 & -0.005 & 0.010 & -0.007 & 0.002 & 0.013 & 0.000 \\ -0.002 & 0.002 & 0.001 & 0.002 & -0.005 & 0.005 & -0.001 & -0.003 & 0.002 \\ -0.001 & 0.001 & 0.004 & -0.003 & -0.006 & 0.015 & -0.002 & 0.007 & 0.004 \\ -0.005 & 0.002 & -0.003 & 0.020 & -0.013 & -0.012 & 0.000 & -0.041 & -0.006 \\ 0.010 & -0.005 & -0.006 & -0.013 & 0.035 & -0.032 & 0.007 & 0.029 & -0.001 \\ -0.007 & 0.005 & 0.015 & -0.012 & -0.032 & 0.069 & -0.009 & 0.026 & 0.013 \\ 0.002 & -0.001 & -0.002 & 0.000 & 0.007 & -0.009 & 0.002 & 0.003 & -0.001 \\ 0.013 & -0.003 & 0.007 & -0.041 & 0.029 & 0.026 & 0.003 & 0.105 & 0.014 \\ 0.000 & 0.002 & 0.004 & -0.006 & -0.001 & 0.013 & -0.001 & 0.014 & 0.006 \end{bmatrix}.$$

Further by using country-specific estimates of spatial parameters, variances of IID components and matrix  $\mathbf{V}$  we can proceed to the third estimation stage. Table 4 shows the estimated common coefficients.

Table 4: Third stage parameter estimates

Variable	Expected Sign	Estimate
lab_prod	–	–0.035
educ_0_2	+	0.023
educ_5_8	–	–0.015
emp_ht	–	0.060
young_share	+	0.020
emp_manu	+	0.008
young_growth	+	–0.004
emp_pub	+	–0.047
emp_growth	–	–0.181***
inflation	–	0.133***
min_wage	+	0.004**
un_ben	+	0.236**
tax_wedge	+	0.096***
partic	–	–0.134***
young_partic	±	0.042**
$\tau$	+	0.703***
$\delta$	±	–0.266***

Note: \* indicates significance at 10% level, \*\* at 5%, \*\*\* at 1%.

Results of the third stage suggest that only significant estimate corresponding to the exogenous regional-level variables is the response parameter of variable *emp\_growth*. Significance of this variable is not surprising since it mainly represents regional labour demand shocks which are heavily linked with changes in the unemployment rates. Although coefficients of remaining exogenous regional-level variables appear to be non-significant, the estimated signs are consistent with the economic theory for most cases. Only three exceptions for which estimated coefficient has not sign as expected are *emp\_ht*, *young\_growth* and *emp\_pub*.

When compared to the first stage estimates, country-level variables have same signs and

similar magnitudes, but appear to be more significant. This applies especially for the response parameter of variable *un\_ben*, which was not significant within the first estimation stage, but now is significant at 5% level. Another improvement in terms of significance could be observed for response parameter of variable *tax\_wedge* which significance improved from 10% level to the 1% level.

Results contained in Table 4 further show that response parameter estimates for both endogenous explanatory variables are consistent with the expectations and significant at 1% level in case of variable *paric* and at 5% level in case of *young\_partic* variable. Positive sign of the response parameter for *young\_partic* suggests that young people who are applying for a job are often not students since rise in participation of the young people causes rise in unemployment only if these people could be classified as unemployed. Another implication of the estimated relationship could be that reason for the participation of young people is not good condition of labour market, but instead there are other motivations, possibly existential, for applying for a job. This estimated effect also confirms that it is more difficult for young people without experience and possibly with lower education to find a job.

Another important output of the third estimation stage is estimation of temporal and spatial-temporal coefficients ( $\tau$  and  $\delta$ ). Both estimates appear to be highly significant and compared to the first stage estimates are larger in absolute values ( $\tau = 0.703$ ,  $\delta = -0.266$ ). Given these estimates together with country-specific estimates of spatial parameters  $\lambda$ , stability condition defined by Assumption 3 is still satisfied since the most persistent DGP (again for French unemployment rate) is given by parameter setup for which applies  $\lambda_{FR} + \tau + \delta = 0.986 < 1$ . Estimates of these parameters are then used in spatial effects construction, from which are further derived country-specific aggregated direct, indirect and total effects given by (16), (17) and (18) for the short run and by (19), (20) and (21) for the long run. Results for short run are then presented in Table 5 and results for long run are shown in Table 6.

Table 5: Short run spatial effects

<b>Direct Effects</b>	<b>Germany</b>	<b>Spain</b>	<b>France</b>	<b>Italy</b>	<b>Netherlands</b>
lab_prod	-0.036	-0.036	-0.037	-0.036	-0.036
educ_0_2	0.024	0.024	0.025	0.024	0.024
educ_5_8	-0.015	-0.015	-0.016	-0.015	-0.015
emp_ht	0.062	0.062	0.064	0.063	0.063
young_share	0.020	0.021	0.021	0.021	0.021
emp_manu	0.008	0.009	0.009	0.009	0.009
young_growth	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004	-0.004
emp_pub	-0.048	-0.048	-0.049	-0.049	-0.049
emp_growth	-0.185***	-0.188***	-0.192***	-0.189***	-0.189***
inflation	0.136***	0.138***	0.141***	0.138***	0.138***
min_wage	0.004**	0.004**	0.004**	0.004**	0.004**
un_ben	0.242**	0.245**	0.251**	0.247**	0.246**
tax_wedge	0.098***	0.099***	0.102***	0.100***	0.100***
partic	-0.137***	-0.139***	-0.143***	-0.140***	-0.140***
young_partic	0.043**	0.044**	0.045**	0.044**	0.044**
<b>Indirect Effects</b>	<b>Germany</b>	<b>Spain</b>	<b>France</b>	<b>Italy</b>	<b>Netherlands</b>

*Continued on the next page*

Table 5: Short run spatial effects (continued)

Total Effects	Germany	Spain	France	Italy	Netherlands
lab_prod	-0.027	-0.024	-0.040	-0.031	-0.027
educ_0_2	0.018	0.016	0.027	0.021	0.018
educ_5_8	-0.012	-0.010	-0.017	-0.013	-0.011
emp_ht	0.047	0.042	0.070	0.054	0.047
young_share	0.016	0.014	0.023	0.018	0.015
emp_manu	0.006	0.006	0.010	0.007	0.006
young_growth	-0.003	-0.002	-0.004	-0.003	-0.003
emp_pub	-0.037	-0.032	-0.054	-0.042	-0.036
emp_growth	-0.142***	-0.126***	-0.209***	-0.163***	-0.140***
inflation	0.104***	0.092***	0.153**	0.119***	0.103***
min_wage	0.003**	0.003**	0.004*	0.003**	0.003**
un_ben	0.185**	0.164**	0.273**	0.212**	0.183**
tax_wedge	0.075***	0.066***	0.111**	0.086***	0.074***
partic	-0.105***	-0.093***	-0.155**	-0.120***	-0.104***
young_partic	0.033**	0.029**	0.049*	0.038**	0.033**
Total Effects	Germany	Spain	France	Italy	Netherlands
lab_prod	-0.063	-0.060	-0.077	-0.067	-0.063
educ_0_2	0.042	0.041	0.052	0.046	0.043
educ_5_8	-0.027	-0.025	-0.033	-0.029	-0.027
emp_ht	0.109	0.104	0.133	0.117	0.109
young_share	0.036	0.035	0.044	0.039	0.036
emp_manu	0.015	0.014	0.018	0.016	0.015
young_growth	-0.006	-0.006	-0.008	-0.007	-0.006
emp_pub	-0.084	-0.081	-0.103	-0.091	-0.085
emp_growth	-0.327***	-0.313***	-0.402***	-0.352***	-0.329***
inflation	0.240***	0.229***	0.294***	0.257***	0.241***
min_wage	0.007**	0.007**	0.008*	0.007**	0.007**
un_ben	0.427**	0.409**	0.523**	0.458**	0.429**
tax_wedge	0.173***	0.166***	0.212***	0.186***	0.174***
partic	-0.243***	-0.232***	-0.298***	-0.261***	-0.244***
young_partic	0.076**	0.073**	0.094**	0.082**	0.077**
$\lambda$	0.446***	0.422***	0.549***	0.485***	0.449***

Note: (i) \* indicates significance at 10% level, \*\* at 5%, \*\*\* at 1%. (ii) Variance of the estimates are based on MC simulations with 1000 repetitions drawn from a multivariate normal distribution based on the estimated parameters and the corresponding variance matrix.

It can be seen that reported direct effects differ from the estimated regression coefficients only very slightly (in term of magnitude as well as significance). The difference between the direct effects and response parameters is given by the feedback effects caused by changes in neighbouring units after initial effect took place at original unit. As magnitudes of spatial parameters  $\lambda$  are of similar sizes, differences in direct effects across countries are negligible.

Situation is very similar in case of indirect spatial effects, although differences in estimates across countries appear to be more significant, especially in case of France for which spa-

tial parameter  $\lambda$  has the largest value. It can be also seen that for most of the countries magnitudes in absolute values of indirect effects were estimated smaller in comparison with direct effects, which is implication of the estimated values of corresponding spatial parameters  $\lambda$ . In contrast, estimation results of indirect effects for France are larger than corresponding direct effects, since value of spatial parameter for France is largest of examined countries and is equal to 0.549. In addition it can be noted, that ratios of aggregated direct and indirect effects are exactly the same for all variables within specific country, since ratios of individual direct and indirect effects are constant when spatially weighted explanatory variables are not included in to the model. Another slight difference between estimates of direct and indirect effects is decline in significance for most variables corresponding to France. Specifically, significance for variables *inflation*, *tax\_wedge* and *partic* fall from 1% level to 5% level and for variables *min\_wage* and *young\_partic* from 5% level to 10% level. Despite mentioned differences it can be said, that direct and indirect effects have similarly important role in variation of the unemployment rates for all examined countries.

Total effects then correspond to the average change in the unemployment rates after initial unit change of specific explanatory variable within all spatial units (regions). Relatively large total impact is accounted to employment growth, where change in employment in every region by 1% causes average decline in unemployment rates from 0.313 p.p. to 0.402 p.p. depending on the country. This finding is similar to that made by Rios (2017) [8] where author found significant total effect of the employment growth on unemployment rate equal to  $-0.441$ . Except of the employment growth, participation variables *partic* and *young\_partic* are the only other significant variables from the regional perspective. Total effect of the participation rate is about the 70% of employment growth total effect, which is more or less consistent with the findings of Elhorst and Zeilstra (2014) [10] who found negative significant effects of similar sizes with slightly smaller impact of the participation rate. On the other hand finding about negative relationship between unemployment rate and participation rate is different from that made by Rios (2017) [8] who found positive significant relationship. It should be noted that negative relationship of these variables is in accordance to the expectation. Further, from the estimated total effect of the participation of young people can be concluded, that in context of the unemployment there applies different mechanisms in contrast to the rest of the labour supply as explained earlier. Also, the effect of young people participation appears to be expectantly less important than participation effect.

Total effects of institutional variables are again with exception of the *inflation* variable estimated in accordance to the expectation. For comparison, Rios (2017) [8] did find insignificant negative total impact of variables *tax\_wedge* and *un\_ben*, and significant positive total impact of variable *min\_wage* which is estimated of relatively higher magnitude compared to the estimate presented in this paper (0.048 vs 0.007 – 0.008).

Table 6: Long run spatial effects

Direct Effects	Germany	Spain	France	Italy	Netherlands
lab_prod	-0.123***	-0.125***	-0.245***	-0.137***	-0.129***
educ_0_2	0.083	0.084	0.165**	0.093	0.087
educ_5_8	-0.052	-0.053	-0.104	-0.058	-0.055
emp_ht	0.214	0.216	0.425*	0.238	0.224

*Continued on the next page*

Table 6: Long run spatial effects (continued)

<b>Indirect Effects</b>	<b>Germany</b>	<b>Spain</b>	<b>France</b>	<b>Italy</b>	<b>Netherlands</b>
young_share	0.071***	0.072***	0.141***	0.079***	0.074***
emp_manu	0.029	0.030	0.058	0.033	0.031
young_growth	-0.013	-0.013	-0.025	-0.014	-0.013
emp_pub	-0.166***	-0.168***	-0.329***	-0.184***	-0.174***
emp_growth	-0.643***	-0.651***	-1.277***	-0.715***	-0.675***
inflation	0.471***	0.476***	0.935***	0.523***	0.494***
min_wage	0.013	0.014	0.027	0.015	0.014
un_ben	0.838***	0.848***	1.665***	0.932***	0.879***
tax_wedge	0.340***	0.344***	0.675***	0.378***	0.356***
partic	-0.477***	-0.482***	-0.946***	-0.530***	-0.500***
young_partic	0.150***	0.152***	0.298***	0.167***	0.158***

<b>Indirect Effects</b>	<b>Germany</b>	<b>Spain</b>	<b>France</b>	<b>Italy</b>	<b>Netherlands</b>
lab_prod	-0.177***	-0.123***	-2.347***	-0.312***	-0.178***
educ_0_2	0.119**	0.083*	1.583***	0.210***	0.120**
educ_5_8	-0.075	-0.052	-0.993***	-0.132	-0.075
emp_ht	0.306*	0.213	4.065***	0.540***	0.308*
young_share	0.102***	0.071***	1.348***	0.179***	0.102***
emp_manu	0.042	0.029	0.557***	0.074	0.042
young_growth	-0.018	-0.013	-0.242***	-0.032	-0.018
emp_pub	-0.237***	-0.165***	-3.148***	-0.418***	-0.238***
emp_growth	-0.921***	-0.640***	-12.231***	-1.626***	-0.925***
inflation	0.674***	0.469***	8.952***	1.190***	0.677***
min_wage	0.019	0.013	0.254***	0.034	0.019
un_ben	1.201***	0.835***	15.942***	2.119***	1.206***
tax_wedge	0.487***	0.338***	6.462***	0.859***	0.489***
partic	-0.683***	-0.475***	-9.063***	-1.205***	-0.686***
young_partic	0.215***	0.150***	2.856***	0.380***	0.216***

<b>Total Effects</b>	<b>Germany</b>	<b>Spain</b>	<b>France</b>	<b>Italy</b>	<b>Netherlands</b>
lab_prod	-0.300***	-0.248***	-2.592***	-0.449***	-0.307***
educ_0_2	0.202	0.167	1.748***	0.303**	0.207*
educ_5_8	-0.127	-0.105	-1.097***	-0.190	-0.130
emp_ht	0.520	0.429	4.490***	0.778*	0.532
young_share	0.172***	0.142***	1.489***	0.258***	0.176***
emp_manu	0.071	0.059	0.615*	0.107	0.073
young_growth	-0.031	-0.026	-0.267***	-0.046	-0.032
emp_pub	-0.403***	-0.332***	-3.477***	-0.602***	-0.412***
emp_growth	-1.565***	-1.291***	-13.508***	-2.341***	-1.600***
inflation	1.145***	0.945***	9.887***	1.713***	1.171***
min_wage	0.033	0.027	0.281***	0.049	0.033
un_ben	2.039***	1.683***	17.606***	3.051***	2.085***
tax_wedge	0.827***	0.682***	7.136***	1.237***	0.845***
partic	-1.159***	-0.957***	-10.009***	-1.735***	-1.186***

*Continued on the next page*



Table 6: Long run spatial effects (continued)

Indirect Effects	Germany	Spain	France	Italy	Netherlands
young_partic	0.365***	0.301***	3.154***	0.547***	0.374***
$\lambda$	0.446***	0.422***	0.549***	0.485***	0.449***
$\tau$	0.703***	0.703***	0.703***	0.703***	0.703***
$\delta$	-0.265***	-0.265***	-0.265***	-0.265***	-0.265***

Note: (i) \* indicates significance at 10% level, \*\* at 5%, \*\*\* at 1%. (ii) Variance of the estimates are based on MC simulations with 1000 repetitions drawn from a multivariate normal distribution based on the estimated parameters and the corresponding variance matrix.

Looking at the Table 6 there are two clear differences compared to the short run estimates. Firstly, for some variables there are big changes in terms of significance and secondly, persistent nature of estimated DGP for France appears in magnitude of estimated long run effects, which are compared to the other countries much larger in absolute values. First take closer look at the results for long run direct effects estimates. Three of the regional-level variables that were not significant in the short run - *lab\_prod*, *young\_share* and *emp\_pub* - are now significant even at 1% level. On the other hand, direct effect in long run are surprisingly not significant for variable *min\_wage* for none of the examined countries, although in short run they were significant at 5% level. Other remaining variables for which significance was at least at 5% level in the short run are significant at 1% level in the long run. Further, slight differences in terms of significance can be observed within estimates for variables *educ\_0\_2* and *emp\_ht* for France. In addition, persistence of the estimated DGP for France is projected into the long run direct effects in way that estimates for France are approximately almost twice the size of estimates for remaining countries which are more or less similar.

Situation is even more different for long run within indirect effects estimates. Firstly, indirect effects for variable *educ\_0\_2* are significant for each country at least at 10% level, but mostly at 5% level or less. Similar significance increase is found for variable *emp\_ht*, although for Spain corresponding indirect effect is not significant. The biggest increase in significance is then reported for estimates corresponding to France, since all estimated indirect effects are significant at 1% level. In terms of magnitude, estimates for Spain which spatial parameter has the smallest value ( $\lambda_{ES} = 0.422$ ) are essentially of the same size of magnitude as estimates for direct effects. For other countries except France, estimated indirect effects are up to twice as size of the direct effects. The most noticeable information from the reported long run indirect effect are very large estimates in absolute values for France, where the estimated effects are more than seven times bigger than estimates for the second most persistent DGP (Italy). From this observation it can be seen, where and to what extent can persistence of the DGP appear within modelled relationships in long run - although it can be said that differences among country-specific spatial parameters  $\lambda$  are relatively small, in combination with temporal and spatial-temporal features there are large differences in estimated impacts in the long run.

Total long run impact then show how equilibrium unemployment rates are formed with respect to the permanent changes in explanatory variables. When omitting growth variables *inflation* and *emp\_growth* which in context of this analysis mainly represent disequilibrium demand and supply shocks, and could be in long run considered as constant, total long run impacts of permanent changes in remaining, say structural, variables could be viewed as quantification of equilibrium relationships.

From the result provided in Table 6 it can be seen, that there are five of the regional-level variables that significantly affects the equilibrium level of unemployment rates for all countries (with employment growth excluded). First, permanent unit change in labour productivity growth appears to cause long term decline in unemployment rates from 0.248 p.p. to 0.449 for all countries except France, and 2.592 p.p. decline for the unemployment rate in France. This finding is consistent with expectation based on theoretical background and confirms finding of Elhorst and Zeilstra (2014) [10], who found negative significant long-term impact of labour productivity on the unemployment rate equal to  $-0.150$ . Although their estimate is not directly comparable with average total effects (since they did not include endogenous spatial effect in their model), in terms of interpretation it can be roughly compared to the long run direct effects, which estimates presented in this paper are more or less the same as estimate of Elhorst and Zeilstra for most of the examined countries. Another regional-level factor for which long run total impacts are significant is share of the young people in the population, represented by variable *young\_share*. Although significant, the total effect does not appear to be very important since for most of the countries there is positive change only about 0.2 p.p. after permanent change by 1 p.p. in variable *young\_share* (taking into account the fact that change by 1 p.p. in share of young people is relatively high). One exception is again the case of France, where estimated total effect takes value of 1.489 p.p. Statistically significant for all countries are the estimates of long run total impacts for variable *emp\_pub*. In contrast to the expectations, there is estimated negative effect which vary from 0.332 p.p. to 0.602 p.p. for all countries with exception of France, for which estimated effect is equal to 3.477 p.p. This finding could be the implication of the fact, that shares of employment in public sector within examined countries are not sufficiently large to significantly affect the dynamics of regional labour markets, instead into the creation or destruction of public jobs could be projected actual situation within a labour market. Another explanation could be that the governments reacted to adverse shocks by creation new job opportunities within the public sector. Last two regional-level variables with significant total effects are participation variables discussed earlier. It can be seen that total effect of permanent change in participation by 1 p.p yields total long term negative impact in range between 0.957 p.p. and 1.735 p.p. for all countries without France and effect of 13.508 p.p. for France. It can be said that these estimates are relatively high. For example Elhorst and Zeilstra (2014) [10] found long run negative effect of 0.181 p. p. which appears to be much less important in comparison with total or direct long run effect presented in this paper. It indicates that participation rate has very important role in forming equilibrium unemployment rates. In addition it should be noted, that participation of young people also affects equilibrium unemployment rates in noticeable way.

From the perspective of structural institutional factors, total long run effects are significant at 1% level for all variables except of *min\_wage*, which is significant only for France. Estimated total effects for remaining variables *tax\_wedge* and *un\_ben* indicate important role in forming equilibrium unemployment rates. Both effects are positive as expected and take relatively high values. While the effects of the unemployment benefits have in comparison larger magnitude than taxation total effects, there is way smaller variation within the *un\_ben* variable than within the *tax\_wedge*. The estimates of total effects of *un\_ben* lie in range between 1.683 p.p. and 3.051 p.p. within all countries except France, but change in the ratio of cash unemployment benefits and GDP of one p.p. in lot of cases means, that unemployment benefits doubled or change by very significant part. On the other hand, although estimates in range between 0.682 p.p. and 1.127 p.p.

for variable *tax\_wedge* within all countries except France are in comparison with the effect of *un\_ben* smaller, but change by 1 p.p. in ration of tax burden and gross labour costs is much likely to happen than in case of unemployment benefits.

## 4 Conclusions

After application of introduced complex econometric model to the regional unemployment rates of selected countries, there was found that there are some significant differences within spatial dynamics and response parameters. In terms of spatial and temporal dynamics, estimated DGP's for all countries appear to be stationary, while the most persistent DGP is estimated for Spain. This feature is then projected mainly in long run effects (especially long run indirect effects), where persistence causes that estimates for France have much bigger magnitude and significance than estimates for rest of the countries.

From perspective of response parameters it was found that estimated effects for most included variables have sign consistent with provided economical background, although there were some surprising result from which could be highlighted significant positive effect of the inflation. In terms of significance, many regression coefficients corresponding to variables defined at regional level appear to be statistically insignificant, which is projected mainly in insignificant short run spatial effects. On the other hand, all regression coefficients for institutional variables are statistically significant. From the perspective of spatial effects, importance of direct and indirect effects is similar in short run, where direct effects appear to be slightly more influential. In the long run, importance of indirect effects is bigger, but again similar to the importance of direct effects for most of the examined countries. Only exception are long run estimates for France, which are due to the high persistence much more influential. Also, long run estimates differ from the short run estimates by its significance, where for some regional-level variables, such as labour productivity or share of young people in the population, there are found significant effects in the long run while effect in the short run are insignificant. On the other hand, minimum wage which is institutional variable has insignificant long run impacts although short run impacts are significant.

## Bibliography

- [1] URL: <https://www.oecd.org/>.
- [2] J. Elhorst. *Spatial Econometrics: From Cross-Sectional Data to Spatial Panels*. 2014-01. ISBN: 978-3-642-40339-2. DOI: 10.1007/978-3-642-40340-8.
- [3] J. Paul Elhorst. ‘The Mystery of Regional Unemployment Differentials: Theoretical and Empirical Explanations’. In: *Journal of Economic Surveys* 17.5 (2003), pp. 709–748. DOI: <https://doi.org/10.1046/j.1467-6419.2003.00211.x>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1046/j.1467-6419.2003.00211.x>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1046/j.1467-6419.2003.00211.x>.
- [4] J. Paul Elhorst and Annette S. Zeilstra. ‘Labour force participation rates at the regional and national levels of the European Union: An integrated analysis\*’. In: *Papers in Regional Science* 86.4 (2007), pp. 525–549. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1435-5957.2007.00136.x>. eprint: <https://rsaiconnect.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1435-5957.2007.00136.x>. URL: <https://rsaiconnect.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1435-5957.2007.00136.x>.
- [5] *Eurostat*. URL: <https://ec.europa.eu/eurostat/en/>.
- [6] Lung-fei Lee and Jihai Yu. ‘Estimation of spatial autoregressive panel data models with fixed effects’. In: *Journal of Econometrics* 154.2 (2010-02), pp. 165–185. DOI: 10.1016/j.jeconom.2009.08.001. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.jeconom.2009.08.001>.
- [7] *MME 2023 - 41st International Conference on Mathematical Methods in Economics*. Online. URL: <https://mme2023.vse.cz/>.
- [8] Vicente Rios. ‘What drives unemployment disparities in European regions? A dynamic spatial panel approach’. In: *Regional Studies* 51.11 (2017-11), pp. 1599–1611. DOI: 10.1080/00343404.2016.121. URL: <https://ideas.repec.org/a/taf/regstd/v51y2017i11p1599-1611.html>.
- [9] P. A. V. B. Swamy. ‘Efficient Inference in a Random Coefficient Regression Model’. In: *Econometrica* 38.2 (1970), pp. 311–323. ISSN: 00129682, 14680262. URL: <http://www.jstor.org/stable/1913012> (visited on 2023-01-25).
- [10] Annette S. Zeilstra and J. Paul Elhorst. ‘Integrated Analysis of Regional and National Unemployment Differentials in the European Union’. English. In: *Regional Studies* 48.10 (2014), pp. 1739–1755. ISSN: 0034-3404. DOI: 10.1080/00343404.2012.708404.

## Contact Information

Martin Konopásek  
University of Economics in Prague, Department of Econometrics  
Winston Churchill Square 1938/4, 130 67 Praha 3 – Žižkov  
Tel: +420 721 758 024  
Email: [konm04@vse.cz](mailto:konm04@vse.cz)

# TAYLOROVA APROXIMACE DRUHÉHO ŘÁDU CES FUNKCE: NEJISTOTA VE SPOTŘEBĚ, SUBSTITUTY A KOMPLEMENTY

## SECOND ORDER TAYLOR APPROXIMATION OF CES FUNCTION: UNCERTAINTY IN CONSUMPTION, SUBSTITUTES, AND COMPLEMENTS

*Petr Krautwurm*

### **Abstrakt**

Článek analyzuje nejistotu ve spotřebních rozhodnutích a aplikuje Taylorovu aproximaci druhého řádu na CES funkci pro zahrnutí této nejistoty do modelu rozhodování. Výzkum odhaluje, jak substituce a komplementarita ovlivňují rozhodování spotřebitelů při odchylkách od očekávaného výsledku, což je srovnáváno se současnými jevy ve spotřebě. S využitím Taylorovy aproximace článek ilustruje vliv druhých momentů nejistoty ve spotřebě na užitkovou funkci. Statky s vyšším rozptylem budou pro riziko-averzního spotřebitele představovat vždy horší alternativu než statky s menším rozptylem. Podobný efekt bude mít negativní kovariance mezi statky, zatímco pozitivní kovariance bude mít efekt opačný. V tomto kontextu se článek rovněž zabývá souhrou vztahu mezi statky a druhými momenty náhodných veličin, přičemž dokládá, že substituty jsou nejméně zatížené odchylkami ve spotřebě.

**KLíčové slová:** CES funkce, Taylorova aproximace, Substituty, Komplementy

### **Abstract**

The article analyzes uncertainty in consumer decisions and applies the second-order Taylor approximation to the CES function to incorporate this uncertainty into the decision-making model. The research reveals how substitutability and complementarity affect consumer decision-making in the face of deviations from expected outcomes, comparing these with current consumption phenomena. Using the Taylor approximation, the article illustrates the impact of the second moments of uncertainty in consumption on the utility function. Goods with higher variance will always represent a worse alternative for the risk-averse consumer than goods with lower variance. A similar effect will be had by negative covariance between goods, while positive covariance will have the opposite effect. In this context, the article also addresses the interplay between the relationships among goods and the second moments of random variables, demonstrating that substitutes are the least burdened by deviations in consumption.

**Keywords:** CES function, Taylor approximation, Substitutes, Complements

## **1 ÚVOD**

Mnohé spotřební aktivity jsou asociovány s dodatečnou nejistotou ohledně přesného množství zakoupeného statku. Problém je obzvláště výrazný u činností, při nichž se spotřebitel rozhoduje o kategoriální proměnné, ačkoliv jsou jeho chutě kvantitativní spojité. Příkladem může být stravování v restauracích, kdy rozhodovatel vybírá ze seznamu dostupných pokrmů, ale jeho rozhodnutí je ovlivněno očekávanými chutěmi spojenými se spojitým množstvím spotřebované stravy. Ačkoliv jsou dávky potravy standardizovány na určitou úroveň, nelze

předpokládat, že odchylka od této úrovně bude nulová. Lze to ilustrovat na příkladu hranolků v libovolném z řetězců rychlého občerstvení: Při každé návštěvě rozhodovatel obdrží jinou gramáž hranolků, které se navíc budou různit i kvalitou. Jelikož gramáž hranolků i jejich kvalita jsou spojené náhodné veličiny, pravděpodobnost, že by rozhodovatel obdržel stejné množství i kvalitu je nulová.

Jelikož spotřebitel při každém nákupu získá *de facto* jiný pokrm, než jaký si objednal, nabízí se otázka, jaký vliv má tato skutečnost na jeho optimální rozhodování a to především s ohledem na jeho percepce vztahu mezi dvěma statky, či vztahu mezi kvalitou a množstvím. Základní argument je takový, že mezi zakoupenými statky existuje substituční či komplementární vztah, přičemž charakter vztahu může ovlivňovat užitek z odchylky od optimálního množství. Například, pokud rozhodovatel kupuje kuřecí stripsy a hranolky dohromady, přičemž oba statky jsou dokonale komplementární, a shodou náhod by dostal větší porci pouze u jednoho ze statků, z hlediska jeho blahobytu by nenastala žádná změna. Naproti tomu, v takovém případě by byť jen drobný pokles jednoho ze statků oproti rovnovážnému stavu způsobil úbytek blahobytu. Zahrnutí vztahu mezi statky je relevantní i pokud bude uvažováno, že statky zastupují vlastnosti pokrmu, tedy kvalitu a množství, jelikož pro spotřebitele mohou být kvalita a množství jak v substitučním tak komplementárním vztahu.

Tato analýza je relevantní především z důvodů zhoršující se kvality potravy v řetězcích rychlého občerstvení (Liu et al. 2020; Benett 2023) a zmenšujících se porcí s ohledem na takzvaný fenomén „shrinkflation“ (Gupta & Tandon 2006; Singhal & Gupta 2023). Pokud spotřebitel optimalizuje očekávanou hodnotu své spotřeby, za předpokladu, že očekává systematické podhodnocení parametrů své stravy, může dojít k tomu, že celý nákup vyhodnotí jako nevýhodný a tedy k transakci nedojde.

Pro tento účel práce využívá Taylorovu aproximaci druhého řádu aplikovanou na CES funkci. CES funkce je základním nástrojem pro analýzu substitutů a komplementů, neboť umožňuje měřit sílu vztahu mezi statky. Taylorova aproximace je využita k tomu, aby bylo možné pozorovat rozhodovatelův vztah k bodům blízko optima, které si původně vybral.

## 2 APROXIMACE CES FUNKCE

Základním nástrojem pro analýzu substitutů a komplementů je CES (Constant Elasticity of Substitution) funkce, která umožňuje modelovat přesnou míru vztahu mezi statky (Arrow et al. 1961; McFadden 1963; Sato 1975). CES funkce je definována následovně:

$$U(x_1, x_2) = (a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \quad (1)$$

Kde  $a_i$  reprezentuje chuťové parametry,  $x_i$  odpovídá množství zakoupeného statku a  $\rho \in (-\infty, 1)$  popisuje parametr substitutovatelnosti (Stern 2011; Knoblack & Stöckl 2020). Pokud je záporný, statky jsou komplementy, a pokud je kladný, statky jsou substituty. Pro jednoduchost a bez ztráty zobecnitelnosti bude předpokládáno, že obě chuti jsou rovny 1.

Na tuto funkci bude aplikován Taylorův rozvoj druhého řádu:

$$\begin{aligned}
f(x, y) \approx & f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b) \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}(y - b)^2 \right)
\end{aligned} \quad (2)$$

Kde (a,b) odpovídá referenčnímu bodu, v němž je aproximace vyhodnocena, zatímco (x,y) reprezentuje bod v blízkosti optima, jehož hodnota účelové funkce je zkoumána. Z hlediska Taylorovy aproximace je relevantní se zabývat každým z prvků aproximace zvlášť. Tedy, mezní užitek z prvního statku je následující:

$$MU_1 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_1^{\rho-1} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} x_1^{\rho-1} \quad (3)$$

A analogicky mezní užitek druhého statku:

$$MU_2 = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_2^{\rho-1} = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} x_2^{\rho-1} \quad (4)$$

Derivace mezních užiteků jsou dány následovně. Pro první statek:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = & \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-2} \rho x_1^{\rho-1} x_1^{\rho-1} \\
& + (\rho - 1) (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} x_1^{\rho-2}
\end{aligned} \quad (5)$$

Pro druhý statek analogicky:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = & \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-2} \rho x_2^{\rho-1} x_2^{\rho-1} \\
& + (\rho - 1) (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} x_2^{\rho-2}
\end{aligned} \quad (6)$$

Přičemž derivace užitekové funkce dle obou statků je následující:

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-2} \rho x_2^{\rho-1} x_1^{\rho-1} \quad (7)$$

Druhé derivace popsané v rovnicích (5), (6) a (7) lze dále významně zjednodušit. Tedy derivace užtkové funkce dle prvního statku:

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = (1 - \rho)(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \left( (x_1^\rho + x_2^\rho)^{-1} x_1^{2(\rho-1)} - x_1^{\rho-2} \right) \quad (8)$$

Dle druhého statku:

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = (1 - \rho)(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \left( (x_1^\rho + x_2^\rho)^{-1} x_2^{2(\rho-1)} - x_2^{\rho-2} \right) \quad (9)$$

A kombinace derivací dle obou statků:

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = (1 - \rho)(x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} (x_1^\rho + x_2^\rho)^{-1} x_2^{\rho-1} x_1^{\rho-1} \quad (10)$$

## 2.1 Bod optima jako referenční bod

Významnou otázkou Taylorovy aproximace je, okolo kterého referenčního bodu bude provedena. Jelikož CES funkce je „dobře vychovanou“ funkcí, tedy takovou s konvexními indiferenčními křivkami, jako vhodný referenční bod se nabízí bod optima. Za předpokladu, že optimalizační problém je rovněž konvexní, tedy například případ lineárních cen, bod optima bude unikátní, právě jeden, a s vnitřním řešením. Základní optimalizační problém spotřebitele lze tedy zapsat následovně:

$$\text{Max}_{x_1, x_2} \left\{ (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \right\} \quad \text{s. t.} \quad P_1 x_1 + P_2 x_2 = M \quad (11)$$

Řešení lze nalézt s využitím Lagrangianovy funkce, což vede na následující podmínku:

$$\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{P_1}{P_2} \quad (12)$$

Po dosažení rovnic (3) a (4) za mezní užitky a patřičných úpravách lze získat následující výraz, který reprezentuje vztah mezi poptávaným množstvím obou statků:



$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{P_1}{P_2} \quad \leftrightarrow \quad x_1 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2 \quad (13)$$

Výraz je následně nutné dosadit do rozpočtového omezení:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = M \quad \rightarrow \quad M = P_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2 + P_2 x_2 \quad (14)$$

Z čehož lze identifikovat poptávku po druhém statku:

$$x_2 = \frac{M}{P_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} + P_2} \quad (15)$$

Přičemž výpočet poptávky po prvním statku je analogický:

$$x_1 = \frac{M}{P_1 + P_2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}} \quad (16)$$

Co se týče poptávek, pokud je poměr cen větší než 1, s rho blížícím se k 1 se poptávky zmenšují, zatímco s rho blížícím se k minus nekonečnu se poptávky zvětšují. A *vice versa* pro opačný poměr cen.

## 2.2 Nejistota ve spotřebě

Základní výhoda Taylorovy aproximace spočívá v tom, že umožňuje do rozhodovacího problému jednoduše zavést prvky nejistoty. Nutným předpokladem je, že rozhodovatel sice zná svou optimální spotřebu, ale zakoupené množství je náhodná veličina. V takovém případě tedy lze uvažovat, že maximalizuje očekávanou hodnotu Taylorovy aproximace druhého řádu své užitkové funkce, přičemž je možné zkoumat, jak jeho rozhodování závisí na charakteristikách náhodné veličiny jíž čelí.

Následující úvaha je taková, že vyjádřené poptávky v rovnicích (15) a (16) zároveň reprezentují bod optima vzhledem k fixním cenám. Tedy jsou referenčním bodem Taylorovy aproximace. Pro přehlednost zápisu bude bod optima značen bez jakékoliv dodatečné úpravy, zatímco body v blízkosti optima budou značeny s vlnovkou. Předpokládá se, že bod optima je známá konstanta, tedy rozhodovatel jedná na základě následujícího optimalizačního problému:

$$\begin{aligned}
E[U(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)] &\approx U(x_1, x_2) + MU_1 \cdot E[(\widetilde{x}_1 - x_1)] + MU_2 \cdot E[(\widetilde{x}_2 - x_2)] \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} E[(\widetilde{x}_1 - x_1)^2] \right. \\
&+ 2 \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} E[(\widetilde{x}_1 - x_1)(\widetilde{x}_2 - x_2)] \\
&\left. + \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} E[(\widetilde{x}_2 - x_2)^2] \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

Co se týče významu jednotlivých prvků, z rovnic (3) a (4) lze jednoduše ověřit, že mezní užítky ze spotřeby budou vždy kladné, a tedy jejich efekt na spotřebitelův užitek závisí pouze na očekávané hodnotě odchylky od optima. Pokud rozhodovatel očekává, že při nákupu dostane menší porci než jakou si objedná, jeho užitek bude menší, a *vice versa* v opačném případě. Na druhou stranu, lze předpokládat, že rozhodovatel formuje racionální očekávání a tedy uvažuje i trend „skimpflace“ (cf. Benett 2023) a „shrinkflace“ (cf. Gupta & Tandon 2006; Singhal & Gupta 2023), tedy optimalizuje vzhledem ke skutečné očekávané hodnotě charakteristik dané potraviny. V takovém případě lze tvrdit, že očekávaná odchylka od optimální hodnoty bude nulová a efekt asociovaných mezních užiteků je tedy irelevantní.

Totéž však nelze tvrdit v případě dalších členů výrazu. Vzhledem k výše zmíněnému předpokladu o racionálních očekáváních lze dokázat, že výrazy v očekávané hodnotě odpovídají rozptylům a kovarianci. Za předpokladu nezáporného množství zakoupených statků, lze na rovnicích (8) a (9) ilustrovat, že členy u rozptylů budou vždy záporné, zatímco z rovnice (10) vyplývá, že člen u kovariance bude vždy kladný. Toto má intuitivní vysvětlení. Jelikož rozptyl bude vždy nezáporný, tak jeho násobek se zápornou druhou derivací užitékové funkce znamená, že rozhodovatel vyhodnocuje více rozptýlené alternativy jako horší. Za předpokladu averze vůči riziku je výsledek smysluplný, jelikož rozhodovatel není ochoten přistoupit na potenciální zisk dodatečné potraviny výměnou za možnost ztráty zakoupené potraviny.

Co se týče kovariance, jelikož je její asociovaný člen vždy kladný, rozhodovatel bude čelit snížení užítku pouze v případě, že je záporná. Toto má rovněž intuitivní vysvětlení. Pokud je snížení jednoho statku kompenzováno navýšením druhého statku, pro žádného rozhodovatele to nemůže přinést zlepšení. Pokud jsou statky komplementární, rozhodovatel je preferuje konzumovat ve fixních kvantitách. Pokud jsou statky spolu v cobb-douglasovském vztahu, rozhodovatel preferuje průměr před extrémy. Pouze v případě dokonalých substitutů by u rozhodovatele nenastala žádná změna pokud by kompenzace probíhala v poměru 1:1. Tedy je smysluplné uvažovat, že pro rozhodovatele je lepší pokud buď získá oba statky nebo oba ztratí, než když dochází ke kompenzaci.

Posledním bodem výzkumu je analýza vlivu substitučního parametru na užitek spotřebitele. Lze ověřit, že efekt druhých derivací užitékové funkce je největší vždy v blízkosti cobb-douglasovského vztahu (tedy v případě, kdy je substituční parametr roven nule a statky nejsou ani substituty ani komplementy) a poté v případě dokonalých komplementů. Čím více jsou statky v substitučním vztahu, tím menší je efekt asociovaných členů. Opět je vysvětlení zcela intuitivní, neboť u výrazných substitutů rozptyl jednoho ze statků poškozují pouze užitek z daného statku bez vlivu na užitek ze statku druhého. Naopak u komplementů a statků v cobb-douglasovském vztahu rozhodovatel čerpá užitek z kombinace obou statků.

### 3 ZÁVĚR

Článek dokládá, že Taylorova aproximace druhého řádu nabízí významné analytické výhody při analýze vlivu nejistoty ve spotřebě na spotřební chování. Pomocí této jednoduché metody lze zavést do rozhodovacího problému prvky nejistoty a snadno identifikovat očekávané chování rozhodovatele.

Z hlediska navazujícího výzkumu je nutné se zaměřit na vliv substitučního parametru ve větším detailu, například identifikací přesného vlivu v závislosti na poměru cen. Kromě toho se v navazujícím výzkumu dá zaměřit na vyšší momenty Taylorovy aproximace či na aproximaci funkcí s nekonstantní elasticitou substituce.

#### Použitá literatura

1. ARROW, K. J., CHENERY, H. B., MINHAS, B. S. B. & SOLOW, R. M. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, 43(3), 225-250.
2. BENNETT, J. N. (2022). Beyond Inflation Numbers: Shrinkflation and Skimpflation, *Page One Economics*
3. GUPTA, O. K., TANDON, S., DEBNATH, S., & ROMINGER, A. (2006). Package downsizing: is it ethical? *AI & SOCIETY*, 21(3), 239–250. <https://doi.org/10.1007/s00146-006-0056-3>
4. KNOBLACH, M. & STÖCKL, F. (2020). What determines the elasticity of substitution between capital and labor? A literature review. *Journal of Economic Surveys*, 34(4), 847–875.
5. LIU, J., REHM, C. D., MICHA, R., & MOZAFFARIAN, D. (2020). Quality of meals consumed by US adults at Full-Service and Fast-Food restaurants, 2003–2016: persistent low quality and widening disparities. *Journal of Nutrition*, 150(4), 873–883. <https://doi.org/10.1093/jn/nxz299>
6. MCFADDEN, D. (1963). Constant Elasticity of Substitution Production Functions. *The Review of Economic Studies*, 30(2), 73-83.
7. SATO, R. (1975). The Most General Class of CES Functions. *Econometrica*, 43(5/6), 999-1003.
8. SINGHAL, R. and GUPTA, A. (2023) Analysis of Shrinkflation Strategy as a New Industrial Marketing Technique (February 2023). *International Journal of Novel Research and Development (IJNRD)*, Volume 8, Issue 2 February 2023, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4391399>
9. STERN, D. I. (2011). Elasticities of substitution and complementarity. *Journal of Productivity Analysis*, 36(1), 79–89.

#### Kontaktné údaje

Ing. Petr Krautwurm

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. Winstona Churchilla, 1938/4

email: [petr.krautwurm@vse.cz](mailto:petr.krautwurm@vse.cz)

Článek vznikl s podporou projektu VŠE IGS F4/38/2022 Interní grantové agentury Vysoké školy ekonomické v Praze

# PRÍSTUP K WEBOVÝM DATABÁZAM S JAZYKOM R<sup>1</sup>

## ACCESS TO WEB DATABASES WITH R LANGUAGE

*Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi*

### Abstrakt

Aktuálne údaje z databáz rôznorodých ekonomických údajov rôznych ekonomík krajín a regiónov celého sveta umožňujú vedcom skúmať rôznorodé javy a hypotézy, ktoré sú predmetom ich výskumu. Medzi najznámejšie databázy dostupné cez webové rozhranie patria databázy Federálneho rezervného systému ekonomických údajov, Svetovej banky a Európskeho štatistického úradu. V príspevku prezentujeme možnosti balíčkov jazyka R, ktoré slúžia na priame načítanie údajov z týchto databáz.

**Príučové slová:** *webové databázy ekonomických údajov, jazyk R*

### Abstract

Current data from databases of various economic data of different economies of countries and regions worldwide allow scientists to investigate diverse phenomena and hypotheses that are the subject of their research. Among the most famous databases available via the web interface are the databases of the Federal Reserve System of Economic Data, the World Bank and the European Statistical Office. In the paper, we present the possibilities of the R language packages, which are used for directly loading data from these databases.

**Keywords:** *web databases of economic data, R language*

## 1 ÚVOD

Súčasná doba je charakteristická zbieraním veľkého objemu údajov zo všetkých oblastí bežného života. Originálny výskum z každej vedeckej oblasti si vyžaduje efektívny spôsob získavania a analýzy dát. Pri práci s programovacím jazykom R by analytik okrem vlastných zozbieraných údajov mal vedieť získať aj údaje publikované vo webových databázach. Na tento účel bolo pre ekonómov vytvorených viacero užitočných riešení – balíčkov s funkciami, ktoré načítanie dát uľahčujú. V tomto článku sa budeme zaoberať prístupom k databázam Federálneho rezervného systému ekonomických údajov (FRED), Svetovej banky (WB) a Európskeho štatistického úradu (EUROSTAT).

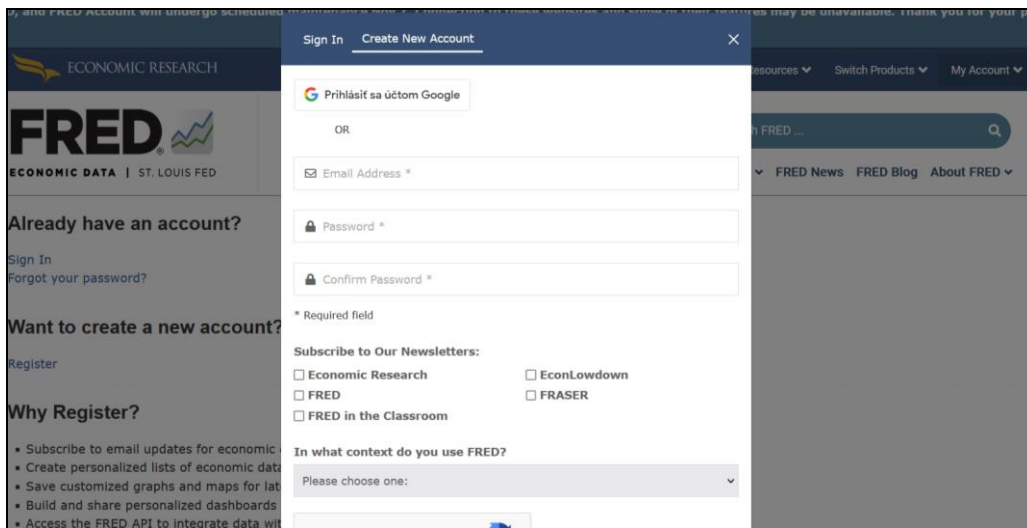
## 2 IMPORT ÚDAJOV Z DATABÁZY FRED V JAZYKU R

Údaje Federálneho rezervného systému ekonomických údajov (FRED) poskytuje Federálna rezervná banka v St. Louis. Na prístup ku nim bol vytvorený balíček s názvom *fredr*. Jeho funkcie umožňujú získať prístup ku všetkým indikátorom a umožňujú užívateľovi vyhľadávať a získavať viac ako 600 000 časových radov, ako aj súvisiace metadáta. Databáza Archival FRED (ALFRED) vám umožňuje získať staré verzie ekonomických údajov, ktoré boli k dispozícii v konkrétnych dátumoch v histórii.

---

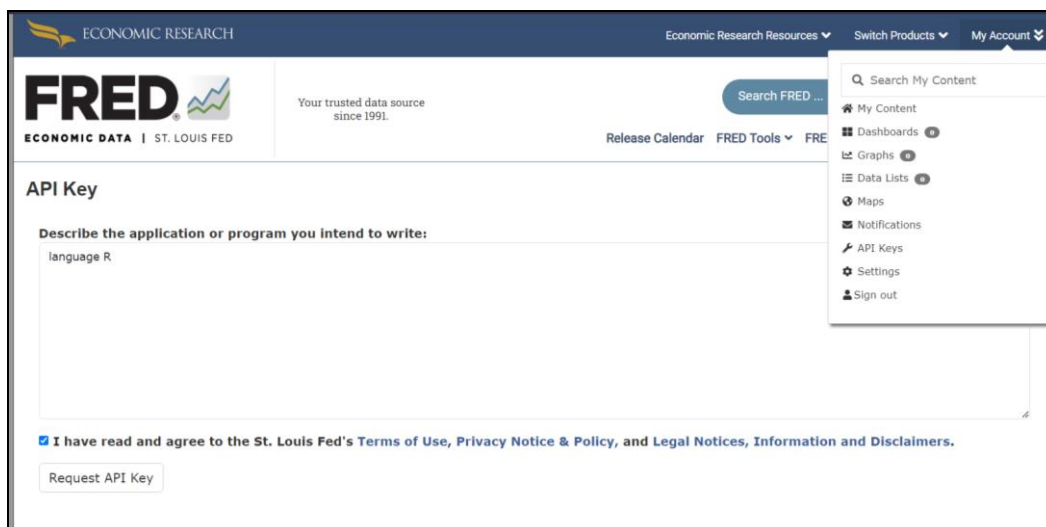
<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0211/21, Ekonometrická analýza makroekonomických dopadov vplyvu pandémie vo svete s dôrazom na vývoj ekonomík EÚ a zvlášť ekonomiky Slovenska a VEGA 1/0047/23, Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa.

Na získanie údajov FRED (pokiaľ nepoužívate anonymný prístup s limitovaným množstvom sťahovaných údajov) potrebujeme získať kľúč API. Najprv sa odporúča (bezplatná) registrácia cez stránku <https://fredaccount.stlouisfed.org/login/>, kde sa po prepnutí na voľbu Create New Account a zadaní platnej mailovej adresy zaregistrujeme.



Obrázok 1: Registrácia na prístup k databáze FRED

Následne po prihlásení sa so svojim kontom, požiadame o vydanie kľúča API cez My Account, kde zvolíme sekciu API Keys, napíšeme program, s ktorým pracujeme a zadáme Request API Key.



Obrázok 2: Žiadosť o API kľúč k databáze FRED

Pri úspešnej akceptácii požiadavky vám bude poskytnutý jedinečný kľúč API. Takýto kľúč API má tvar: "abcde1234567890" a pri každom prihlásení ho nájdete v sekcii API Keys. Odporúčame nikdy nezverejňovať svoj kľúč API, ani ako súčasť publikovaného scriptu.

Po nainštalovaní a aktivácii balíčka *fredr* príkazmi `install.packages("fredr")` a `library(fredr)` zadáme svoj kľúč API do funkcie `fredr_set_key`. Tým získa program R potrebný API kľúč a umožní sa prístup k databázam FRED aj ALFRED.

Použitím funkcie vyhľadávania `fredr_series_search_text` získame všetky informácie súvisiace s konkrétnou požiadavkou. Funkcia `fredr_series_search_text` vracia tabuľku obsahujúcu informácie súvisiace s vloženým vstupom. Napríklad `fredr_series_search_text( search_text =`

"unemployment", filter\_variable = "frequency", filter\_value = "Monthly") vyhledá všetky rady s textom „unemployment“ a vráti iba rady s mesačnou frekvenciou.

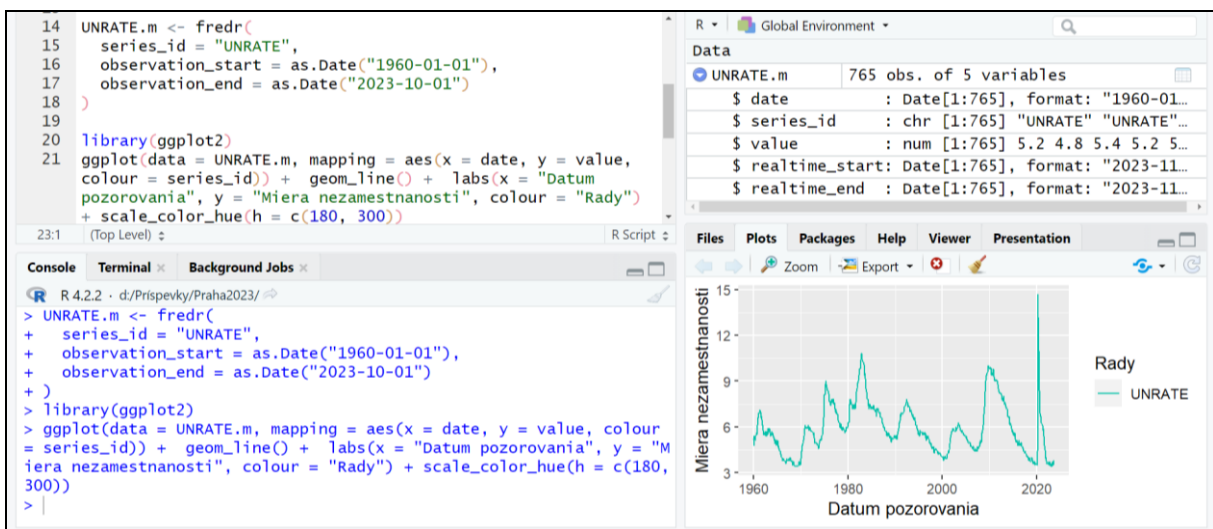
```
> fredr_series_search_text(
+   search_text = "unemployment",
+   filter_variable = "frequency",
+   filter_value = "Monthly"
+ )
# A tibble: 1,000 × 16
  id      realt...2 realt...3 title obser...3 obser...4 frequ...5 frequ...6 units units...7 seaso...8 seaso...9 last...x popul...x
  <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <chr> <int>
1 UNRATE 2023-1... 2023-1... Unem... 1948-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Season... SA 2023-1... 93
2 UNRATEN 2023-1... 2023-1... Unem... 1948-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Not Se... NSA 2023-1... 56
3 UNEMPLOY 2023-1... 2023-1... Unem... 1948-0... 2023-0... Monthly M Thou... Thous... Season... SA 2023-1... 67
4 LNU0300 2023-1... 2023-1... Unem... 1948-0... 2023-0... Monthly M Thou... Thous... Not Se... NSA 2023-1... 15
5 LNS1400 2023-1... 2023-1... Unem... 1972-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Season... SA 2023-1... 65
6 UGRATE 2023-1... 2023-1... Tota... 1994-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Season... SA 2023-1... 64
7 LNU0400 2023-1... 2023-1... Unem... 1972-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Not Se... NSA 2023-1... 17
8 UGRATEN 2023-1... 2023-1... Tota... 1994-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Not Se... NSA 2023-1... 9
9 CAUR 2023-1... 2023-1... Unem... 1976-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Season... SA 2023-1... 60
10 CAURN 2023-1... 2023-1... Unem... 1976-0... 2023-0... Monthly M Perc... % Not Se... NSA 2023-1... 13
# ... with 990 more rows, 2 more variables: group_popularity <int>, notes <chr>, and abbreviated variable names
#   ^realtime_start, ^realtime_end, ^observation_start, ^observation_end, ^frequency, ^frequency_short,
#   ^units_short, ^seasonal_adjustment, ^seasonal_adjustment_short, ^last_updated, ^popularity
# i Use `print(n = ...)` to see more rows, and `colnames()` to see all variable names
> |
```

Obrázok 3: Vyhľadavanie v databáze FRED

Na načítanie konkrétneho radu slúži príkaz *fredr*, čo je skratka *fredr\_series\_observations*. V príkaze uvádzame názov radu z databázy argumentom *series\_id* a rozsah pozorovaní argumentmi *observation\_start* a *observation\_end*. Frekvencia časových radov sa špecifikuje argumentom *frequency*, pričom ročné, polročné, štvrťročné, mesačné, týždenné a denné údaje sa značia ako "a", "sa", "q", "m", "w", "d".

Ak máme záujem o údaje s nižšou frekvenciou, ako sú publikované, *fredr* nám umožňuje agregáciu pomocou *aggregation\_method* podľa zvoleného spôsobu súčtom (*sum*), priemerom (*avg*) alebo z konca obdobia (*eop*). Takisto sa umožňujú priamo špecifikovať transformácie údajov argumentom *units*, ktoré okrem prednastaveného *lin* rozpozná logaritmus (*log*), zmenu (*chg*) alebo percentuálnu zmenu (*pch*).

Pri načítaní príkazom *fredr* sa údaje načítajú ako typ *tibble* (špecifický dataframe) a spolu s hodnotami *value* získame aj sprievodné informácie o názve a zodpovedajúcom pozorovaní. *Tibble* bol navrhnutý ako centrálna dátová štruktúra pre sadu balíčkov *tidyverse*, medzi ktoré radíme: *dplyr*, *ggplot2*, *tidyr* a *readr*. Ich výhodou je, že sa dajú jednoduchšie uchopiť a využiť ako napríklad na obrázku 4 pri grafickom zobrazení údajov.



Obrázok 4: Načítanie údajov z databázy FRED a ich grafické zobrazenie

### 3 IMPORT ÚDAJOV Z DATABÁZY WORLDBANK V JAZYKU R

Svetová banka (*WorldBank*), ktorej centrála je vo Washingtone, poskytuje prostredníctvom svojho webového rozhrania rozsiahle množstvo globálnych sociálno-ekonomických údajov, ktoré pokrývajú niekoľko desaťročí vývoja svetovej ekonomiky a desiatky tém z rôznych oblastí. Na prístup ku nim bol vytvorený balíček s názvom *wbstats*. Jeho funkcionálnosť je veľmi podobná balíčku *fredr* vysvetľovanému v predchádzajúcej časti.

Po inštalácii a aktivácii balíčka *wbstats* cez `install.packages("wbstats")` a `library(wbstats)` môžeme začať vyhľadávať potrebné údaje. Funkcia `wb_cachelist` poskytuje prehľad dostupných krajín, indikátorov a iných relevantných informácií o základnej štruktúre údajov. Zadaním príkazov `zoznam <- wb_cachelist; View(zoznam)` sa zobrazia informácie, ktoré môžeme využiť pri formulovaní požiadavky na sťahované údaje.

Name	Type	Value
zoznam	list [8]	List of length 8
countries	list [304 x 18] (S3: tbl_df, tbl, data)	A tibble with 304 rows and 18 columns
indicators	list [16649 x 8] (S3: tbl_df, tbl, da)	A tibble with 16649 rows and 8 columns
sources	list [63 x 9] (S3: tbl_df, tbl, data.fr)	A tibble with 63 rows and 9 columns
topics	list [21 x 3] (S3: tbl_df, tbl, data.fr)	A tibble with 21 rows and 3 columns
regions	list [48 x 4] (S3: tbl_df, tbl, data.fr)	A tibble with 48 rows and 4 columns
income_levels	list [7 x 3] (S3: tbl_df, tbl, data.fra)	A tibble with 7 rows and 3 columns
lending_types	list [4 x 3] (S3: tbl_df, tbl, data.fra)	A tibble with 4 rows and 3 columns
languages	list [23 x 3] (S3: tbl_df, tbl, data.fr)	A tibble with 23 rows and 3 columns

Obrázok 5: Orientácia v databáze WorldBank prístupná cez balíček *wbstats*

Najdôležitejšie sú dátové rámce *countries* a *indicators*. Výberom `krajiny <- zoznam$countries` môžeme získať všetky kódy krajín, prípadne si ich následne vieme vyfiltrovať. Napríklad, zoznam všetkých krajín a oblastí, ktorých trojpísmenový kód (*iso3c*) začína písmenom *S* sa získa príkazom `print(krajiny[grepl("^S", krajiny$iso3c), ], n=50)`. Využili sme funkciu `grepl`, ktorá sa so znakom `^` používa ako zadanie filtra „začína na“. Ak by sme zadali filter na anglický pomenovanie oblasti a zadali `krajiny[grepl("^Slo", krajiny$country), ],` využili by sa filter, ktorý by vybral Slovensko a Slovinsko.

```

> print(krajiny[grepl("^S",krajiny$iso3c),],n=50)
# A tibble: 26 x 18
  iso3c iso2c country      capital_city longitude latitude region_iso3c region_iso2c
  <chr> <chr> <chr>          <chr>          <dbl> <dbl> <chr>          <chr>
1 SAS  8S  South Asia    NA              NA      NA      NA      NA
2 SAU  SA  Saudi Arab... Riyadh          46.7     24.7    MEA      ZQ
3 SCE  L7  Southern C... NA              NA      NA      NA      NA
4 SDN  SD  Sudan         Khartoum       32.5     15.6    SSF      ZG
5 SEN  SN  Senegal       Dakar          -17.5    14.7    SSF      ZG
6 SGP  SG  Singapore    Singapore      104.     1.29    EAS      Z4
7 SLB  SB  Solomon Is... Honiara        160.     -9.43   EAS      Z4
8 SLE  SL  Sierra Leo... Freetown       -13.2    8.48    SSF      ZG
9 SLV  SV  El Salvador   San Salvador    -89.2    13.7    LCN      ZJ
10 SMR  SM  San Marino    San Marino      12.4     43.9    ECS      Z7
11 SOM  SO  Somalia       Mogadishu      45.3     2.08    SSF      ZG
12 SRB  RS  Serbia        Belgrade       20.5     44.8    ECS      Z7
13 SSA  ZF  Sub-Sahara... NA              NA      NA      NA      NA
14 SSD  SS  South Sudan   Juba           31.6     4.85    SSF      ZG
15 SSF  ZG  Sub-Sahara... NA              NA      NA      NA      NA
16 SST  S1  Small stat... NA              NA      NA      NA      NA
17 STP  ST  Sao Tome a... Sao Tome        6.61     0.206   SSF      ZG
18 SUR  SR  Suriname     Paramaribo     -55.2    5.82    LCN      ZJ
19 SVK  SK  Slovak Rep... Bratislava     17.1     48.1    ECS      Z7
20 SVN  SI  Slovenia     Ljubljana      14.5     46.1    ECS      Z7
21 SWE  SE  Sweden       Stockholm      18.1     59.3    ECS      Z7

```

Obrázok 6: Filtrovanie názvov krajín v databáze WorldBank

Podobne môžeme pracovať aj s dátovým rámcom *indicators*. Všetky kódy premenných (*indicator\_id*) získame cez `ukazovatele <- zoznam$indicators`. A následne vyfiltrujeme údaje napríklad o raste GDP pomocou `ukazovatele[grepl("GDP growth", ukazovatele$indicator), ]`.

```
> ukazovatele[grepl("GDP growth", ukazovatele$indicator),]
# A tibble: 4 × 8
  indicator_id      indicator unit indicator_desc source_org topics source_id source
  <chr>            <chr>    <lg1> <chr>          <chr>    <list> <dbl> <chr>
1 5.51.01.10.gdp   Per capi... NA      GDP per capit... World Dev... <df>    36 Stati...
2 6.0.GDP_growth   GDP grow... NA      Annual percen... World Dev... <df>    37 LAC E...
3 NV.AGR.TOTL.ZG   Real agr... NA      This is the a... World Ban... <df>    11 Afric...
4 NY.GDP.MKTP.KD.ZG GDP grow... NA      Annual percen... World Ban... <df>    2 World...
```

Obrázok 7: Filtrovanie názvov ukazovateľov v databáze WorldBank

V balíčku *wbstats* môžeme namiesto komplikovanejšieho filtrovania medzi premennými použiť vyhľadávaciu funkciu *wb\_search*. Analogický výsledok ako sme dostali na obrázku 7, dostaneme oveľa jednoduchším príkazom *wb\_search("GDP growth")*.

Na načítanie konkrétneho radu slúži príkaz *wb\_data*. Názov radu uvádzame z databázy ako prvý textový argument (v úvodzovkách) a rozsah pozorovaní argumentmi *start\_date* a *end\_date*. Pokiaľ nezadáme argument *country*, načítajú sa údaje všetkých krajín. Potom *wb\_data("SP.POP.TOTL", country = "Slovak Republic", start\_date = 1960, end\_date = 2022)* načíta údaje o celkovom počte obyvateľov na Slovensku. Argument *country* akceptuje ľubovoľný údaj z dátového rámca *countries*, teda netreba zadávať celý názov stačia kódy. *wb\_data("SP.POP.TOTL", country = c("SVK", "SVN"), start\_date = 1960, end\_date = 2022)* načíta údaje o celkovom počte obyvateľov nielen na Slovensku, ale aj v Slovinsku.

```
> wb_data("SP.POP.TOTL", country = "Slovak Republic", start_date = 1960, end_date = 2022)
# A tibble: 63 × 9
  iso2c iso3c country      date SP.POP.TOTL unit obs_status footnote last_updated
  <chr> <chr> <chr>    <dbl> <dbl> <chr> <chr> <chr> <date>
1 SK   SVK   Slovak Republic 1960 4068095 NA      NA      NA      2023-10-26
2 SK   SVK   Slovak Republic 1961 4191667 NA      NA      NA      2023-10-26
3 SK   SVK   Slovak Republic 1962 4238188 NA      NA      NA      2023-10-26
4 SK   SVK   Slovak Republic 1963 4282017 NA      NA      NA      2023-10-26
5 SK   SVK   Slovak Republic 1964 4327341 NA      NA      NA      2023-10-26
6 SK   SVK   Slovak Republic 1965 4370983 NA      NA      NA      2023-10-26
7 SK   SVK   Slovak Republic 1966 4411666 NA      NA      NA      2023-10-26
8 SK   SVK   Slovak Republic 1967 4449367 NA      NA      NA      2023-10-26
9 SK   SVK   Slovak Republic 1968 4483915 NA      NA      NA      2023-10-26
10 SK  SVK   Slovak Republic 1969 4518607 NA      NA      NA      2023-10-26
# i 53 more rows
# i Use `print(n = ...)` to see more rows
```

Obrázok 8: Načítanie premenných z databázy WorldBank

Pri načítaní príkazom *wb\_data* sa údaje načítajú opäť ako typ *tibble* (špecifický dataframe) a spolu s hodnotami uvedenými pod databázovým názvom premennej získame aj sprievodné informácie o názve krajiny a zodpovedajúcom pozorovaní.

## 4 IMPORT ÚDAJOV Z DATABÁZY EUROSTAT V JAZYKU R

Európsky štatistický úrad (EUROSTAT) poskytuje prostredníctvom svojho webového rozhrania množstvo sociálno-ekonomických údajov, ktoré pokrývajú niekoľko desaťročí vývoja európskych ekonomík. Na prístup ku nim bol vytvorený balíček s názvom *eurostat*. Jeho funkcionálnosť je podobná balíčkovi vysvetľovanému v predchádzajúcich častiach.

Po inštalácii a aktivácii balíčka *eurostat* cez *install.packages("eurostat")* a *library(eurostat)* môžeme začať vyhľadávať potrebné údaje. Funkcia *get\_eurostat\_toc* stiahne obsah jednotlivých dátových množín zo servera. Hodnoty v stĺpci *code* by sa mali použiť na stiahnutie vybraného súboru údajov. Napríklad, ak chceme získať národné účty (national accounts), tak príkazmi *zoznam <- get\_eurostat\_toc()* a *zoznam[grepl("^na", zoznam\$code), ]* získame všetky kódy údajov. Prvých desať riadkov výsledku zobrazených pomocou príkazu *View(zoznam[grepl("^na", zoznam\$code), ])* vidíme na obrázku 9.



	title	code	type	last update of data	last table structure change	data start	data end	values
1	GDP and main components (output, expenditure and income)	nama_10_gdp	dataset	01.11.2023	05.10.2023	1975	2022	NA
2	GDP and main components (output, expenditure and income)	namq_10_gdp	dataset	31.10.2023	27.10.2023	1975Q1	2023Q3	NA
3	Final consumption aggregates	namq_10_fcs	dataset	31.10.2023	27.10.2023	1978Q1	2023Q3	NA
4	Exports and imports by Member States of the EU/third coun...	namq_10_exi	dataset	23.10.2023	05.10.2023	1980Q1	2023Q2	NA
5	Gross value added and income A*10 industry breakdowns	namq_10_a10	dataset	01.11.2023	27.10.2023	1975Q1	2023Q3	NA
6	Gross fixed capital formation with AN_F6 asset breakdowns	namq_10_an6	dataset	01.11.2023	27.10.2023	1978Q1	2023Q3	NA
7	Employment A*10 industry breakdowns	namq_10_a10_e	dataset	02.11.2023	27.10.2023	1975Q1	2023Q3	NA
8	Key indicators - quarterly data	nasq_10_ki	dataset	27.10.2023	05.10.2023	1980Q1	2023Q2	NA
9	Non-financial transactions - quarterly data	nasq_10_nf_tr	dataset	27.10.2023	26.10.2023	1949Q1	2023Q2	NA
10	Gross domestic product (GDP) at current market prices by N...	nama_10r_gdp	dataset	21.02.2023	19.02.2023	2000	2021	NA

Obrázok 9: Filtrovanie kódov v databáze Eurostat

Pomocou funkcie `search_eurostat` môžeme v obsahu vyhľadávať zadaná napr. všetky kódy údajov vlády (Government), teda `View(search_eurostat("Government", type = "all" ))`. Pomocou argumentu `type` tejto funkcie môžeme obmedziť vyhľadávanie napríklad iba na množiny údajov (`dataset`) alebo tabuľky (`table`).

	title	code	type	last update of data	last table structure change	data start	data end	values
1	Government bond yields, 10 years' maturity - monthly data	irt_lt_gby10_m	dataset	07.11.2023	07.11.2023	1973M01	2023M10	NA
2	Government revenue, expenditure and main aggregates	gov_10a_main	dataset	23.10.2023	23.10.2023	1975	2022	NA
3	Government bond yields, 10 years' maturity - annual data	irt_lt_gby10_a	dataset	04.01.2023	03.01.2023	1988	2022	NA
4	Government deficit/surplus, debt and associated data	gov_10dd_edpt1	dataset	23.10.2023	23.10.2023	1995	2022	NA
5	Government consolidated gross debt by components - ann...	tipsgo11	table	23.10.2023	23.10.2023	1995	2022	NA
6	Government support to agricultural research and developm...	sdg_02_30	table	03.08.2023	03.08.2023	2004	2022	NA
7	Government deficit/surplus and debt	enps_gov_10dd	dataset	13.03.2023	13.03.2023	2005	2021	NA
8	Government deficit/surplus and debt	enpe_gov_10dd	dataset	06.02.2023	06.02.2023	2005	2022	NA
9	Government bond yields - 10 years' maturity	enpe_irt_lt_gby10	dataset	06.02.2023	06.02.2023	2005	2022	NA
10	Candidate countries and potential candidates: Government ...	cpc_ecgov	dataset	17.03.2020	08.02.2021	2005	2019	NA

Showing 1 to 10 of 27 entries, 8 total columns

Obrázok 10: Vyhľadávanie kódov v databáze Eurostat

Na načítanie konkrétnych údajov slúži príkaz `get_eurostat`, v ktorom môžeme zadať `filters`.

```
set_eurostat_cache_dir(file.path(tempdir(), "r_cache2"))
sk <- get_eurostat("nama_10_gdp",
  filters = list(
    geo = "SK",
    na_item = c("B1GQ", "P3_S13", "P31_S14_S15", "P5G", "P6", "P7"),
    unit = "CP_MEUR"
  )
)
sk.GDP <- na.omit(sk[sk$na_item == "B1GQ",])
sk.C <- na.omit(sk[sk$na_item == "P31_S14_S15",])
sk.G <- na.omit(sk[sk$na_item == "P3_S13",])
sk.I <- na.omit(sk[sk$na_item == "P5G",])
sk.Ex <- na.omit(sk[sk$na_item == "P6",])
sk.Im <- na.omit(sk[sk$na_item == "P7",])
(SVK <- cbind("sk.GDP"=sk.GDP$values, "sk.C"=sk.C$values, "sk.G"=sk.G$values, "sk.I"=sk
.I$values, "sk.Ex"=sk.Ex$values, "sk.Im"=sk.Im$values))
```

```

# (Untitled)
Terminal Background Jobs
4.3.1 ~~/Príspevky/Praha2023/
sk.GDP  sk.C  sk.G  sk.I  sk.Ex  sk.Im
15322.9 8164.0 3644.8 3621.3 8263.1 8370.2
17053.2 9183.3 4314.6 5812.0 8406.0 10662.6
19331.1 10157.7 4444.3 6733.8 10363.2 12367.9
20333.8 10860.1 4714.6 7003.2 9255.3 11499.4
19516.1 10620.9 4113.2 5716.5 9045.3 9979.8
```

Obrázok 11: Načítanie premenných z databázy Eurostat

## 5 ZÁVER

Každý analytik, ktorý pracuje na aplikovanom výskume potrebuje pre svoju prácu údaje. Zdrojom ekonomických údajov sú v jednotlivých krajinách obvykle štatistické úrady (<https://www.bls.gov/bls/other.htm>), centrálné banky resp. zodpovedajúce monetárne authority (<https://www.bis.org/cbanks.htm>) a ďalšie medzinárodné inštitúcie. V tomto príspevku prezentujeme ako získať údaje od zástupcov každej z týchto skupín: z celoeurópskeho štatistického úradu, z americkej centrálnej banky a zo svetovej banky. Okrem nich existujú mnoho ďalších inštitúcií (BEA, BIS, ECB, ILO, IMF, OECD, WTO, ...) a služieb (*Nasdaq-Quandl*, *quantmod*, ...), ktoré sú zdrojom rozsiahleho množstva ekonomických údajov. Ich vyhľadávanie a získanie umožňuje rozšíriť aj tieto prezentované možnosti.

### Použitá literatúra

1. BOYSEL, S. 2023. Getting Started with fredr. <https://sboysel.github.io/fredr/> (03 November 2023).
2. Central Bank and Monetary Authority Websites. <https://www.bis.org/cbanks.htm> (03 November 2023).
3. Eurostat Database. <https://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (03 November 2023).
4. Eurostat R package. <https://ropengov.github.io/eurostat/index.html> (03 November 2023).
5. FRED Economic Data. <https://fred.stlouisfed.org/> (03 November 2023).
6. LAHTI, L., HUOVARI, J., KAINU, M., BIECEK, P. 2017. Retrieval and Analysis of Eurostat Open Data with the eurostat Package. *The R Journal*, roč.9, 2017, č.1, s. 385-392. <https://doi.org/10.32614/RJ-2017-019>.
7. Nasdaq Data Link (formerly Quandl) R for time-series and tables data <https://docs.data.nasdaq.com/docs/r> (03 November 2023).
8. PIBURN, J. 2020. wbstats: Programmatic Access to the World Bank API. Oak Ridge National Laboratory, Tennessee. <https://doi.org/10.11578/dc.20171025.1827>.
9. PIRLEA, F. et al. 2023. World Bank Open Data. <https://data.worldbank.org/> (03 November 2023).
10. Quantmod – Quantitative Financial Modelling & Trading Framework for R. <https://www.quantmod.com/> (03 November 2023).
11. ROpenGov-projects. <https://ropengov.org/projects/> (03 November 2023).
12. Statistical Sites on the World Wide Web. <https://www.bls.gov/bls/other.htm> (03 November 2023).
13. UNdata World of Information. <https://data.un.org/> (03 November 2023).

### Kontaktné údaje

prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 822  
email: [martin.lukacik@euba.sk](mailto:martin.lukacik@euba.sk), [adriana.lukacikova@euba.sk](mailto:adriana.lukacikova@euba.sk), [karol.szomolanyi@euba.sk](mailto:karol.szomolanyi@euba.sk)

# ALOKÁCIA AKTÍV DO PORTFÓLIÍ S VYUŽITÍM JAZYKA PYTHON

## ASSET ALLOCATION INTO PORTFOLIOS USING PYTHON

*Ing. Richard Mišek*

### **Abstrakt**

Kam investovať, je veľmi častou otázkou vo svete financií. Existuje mnoho prístupov a metód, na základe ktorých si investor môže zvoliť portfólio. Jedným z týchto prístupov je moderná teória portfólia, ktorú ako prvý definoval Henry Markowitz. Tento prístup sa používa na optimalizáciu skladby cenných papierov tak, aby sa buď maximalizoval výnos pri určitom riziku alebo minimalizovalo riziko pri stanovenom výnose. Štandardnou metódou sa dá tento prístup riešiť napríklad pomocou doplnku riešiteľ v programe MS Excel. Nami poskytované riešenie sa bude zameriavať na alternatívny spôsob výberu portfólia. Realizácia spočíva vo výbere náhodných váh pre cenné papiere, ktorých súčet je rovný 100% a vieme tak vykresliť väčšinou časť všetkých dosiahnuteľných portfólií. Týmto prístupom porovnáme americký najznámejší index Dow Jones Industrial Average a päťdesiat členný európsky index Eurostoxx 50. Na základe rizika a výnosu porovnáme výsledky týchto dvoch portfólií a vyskladáme portfólio tak, aby bolo svetovo diverzifikované.

***Kľúčové slová:*** *Markowitz, Python, Diverzifikácia, Investovanie, Portfólio*

### **Abstract**

Where to invest is a very common question in the finance world. There are many approaches and methods an investor can use to choose a portfolio. One of these approaches is modern portfolio theory, first defined by Henry Markowitz. This approach is used to optimize the mix of securities to either maximize return for a given risk or minimize risk for a given return. A standard method can be used to solve this approach using, for example, the solver plug-in in MS Excel. The solution we provide will focus on an alternative method of portfolio selection. The implementation consists in selecting random weights for securities whose sum is equal to 100% and we can thus plot the majority of all achievable portfolios. Using this approach, we compare the US Dow Jones Industrial Average, the best known index, and the fifty-member European Eurostoxx 50 index. Based on risk and return, we will compare the performance of the two portfolios and construct a portfolio that is globally diversified.

***Keywords:*** *Markowitz, Python, Diversification, Investing, Portfolio*

# 1 ÚVOD

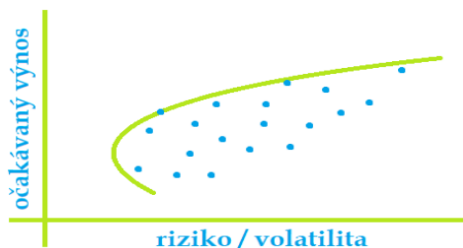
Pri investovaní existuje množstvo správcovských spoločností, ktoré často hľadajú na svoje záujmy a účtujú klientom nemalé poplatky. Týmto poplatkom, ktoré zároveň aj znižujú výnosnosť portfólia sa dá vyhnúť. Spôsobom ako to spraviť je navolenie si vlastného portfólia a investícia cez burzu. Na výber portfólia je možné použiť viaceré prístupy. Prístup, ktorým sa budeme v tejto práci zaoberať je moderná teória portfólia, aplikovaná neštandardným spôsobom. Pri analyzovaní indexu Dow Jones Industrial Average a Eurostoxx využijeme náhodné priradenie váh jednotlivým akciám, nazývané aj Monte Carlo simulácia. Poskytovateľom dát pre túto analýzu je Yahoo Finance, kde časový interval pre dáta predstavuje obdobie päť rokov od 01.10.2018 po 01.10.2023. V tomto období je možné zachytiť pandémiu covid, vplyv vysokej inflácie, ale aj prepuknutie vojny na Ukrajine. Pri výbere portfólia týmto prístupom nie sú stanovené optimalizačné podmienky, ale investor si sám bude vedieť z grafu vybrať, či požaduje maximálny výnos alebo minimálne riziko.

## 2 TEÓRIA PORTFÓLIA

Moderná teória portfólia je prístup, vyvinutý v 50. rokoch 20. storočia Harrym Markowitzom. Pri tvorbe portfólia takýmto spôsobom, je nutné sa na portfólio pozeráť ako na celok, ktorý je nutné analyzovať a nie ako na jednotlivé cenné papiere. Zahraničné zdroje uvádzajú, že sa treba pozeráť pri jednotlivých aktívach na ich očakávané výnosy spolu s rizikovosťou týchto aktív. Základom sa tak pri tvorbe portfólia stáva diverzifikácia a spoločný vývoj cien jednotlivých aktív. Princíp tohto prístupu spočíva v nájdení optimálnej skladby portfólia nami preddefinovaných akcií, na základe stanovenej optimalizačnej podmienky. Touto podmienkou je buď minimalizácia rizika pri stanovenom výnose alebo maximalizácia výnosu, pri stanovenej hladine rizika. (5)

Pri hľadaní portfólia s maximálnym výnosom alebo minimálnym rizikom, by mal investor upriamiť pozornosť na vrchnú krivku, ktorá predstavuje efektívnu hranicu. Na tejto krivke sa nachádzajú portfólia, ktoré dominujú všetkým ostatným portfóliám, ktoré sa v grafe nachádzajú pod nimi. Inak povedané, všetky portfólia pod efektívnou hranicou majú nižšiu výnosnosť ako portfólio nachádzajúce sa na tejto hranici. Výpočet jednotlivých portfólií, je vždy realizovaný na základe pomeru očakávaného výnosu na osi Y a rizikom alebo volatilitou reprezentovanou štandardnou odchýlkou na osi X.

Obrázok 1: Efektívna hranica



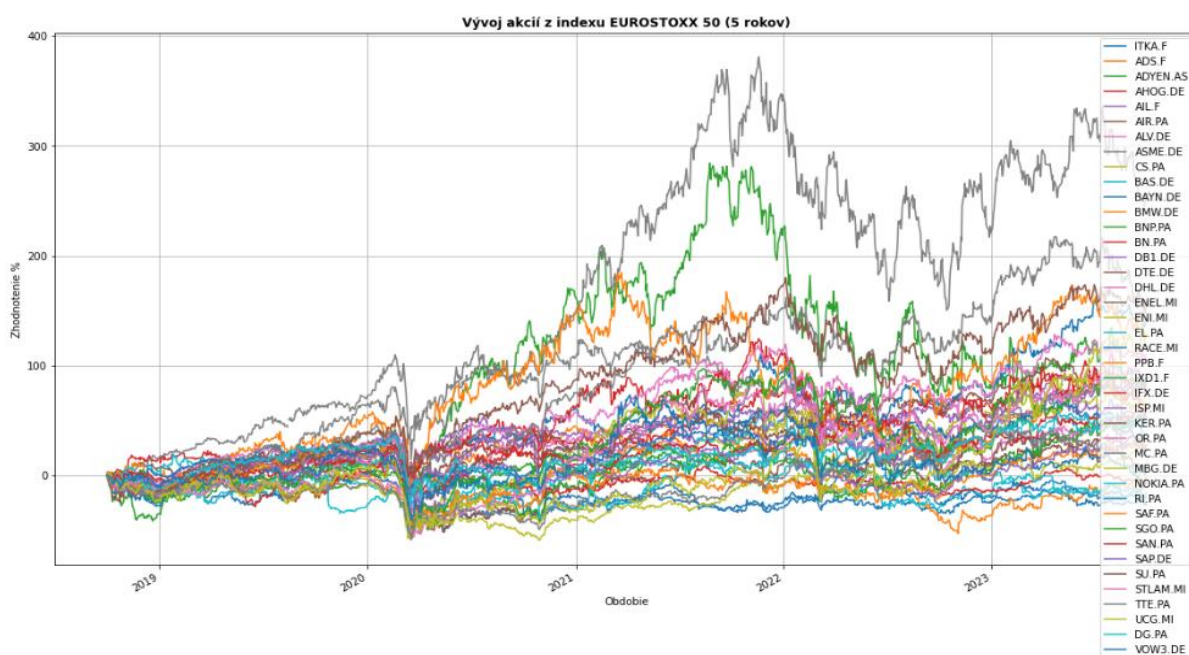
Zdroj: Vlastné spracovanie

Pri výpočtoch sú používané denné výnosy aktív, ktorých hodnoty sú získané na základe aplikačno-programového rozhrania poskytovaného od Yahoo Finance. Výpočet očakávanej výnosnosti portfólia sa vypočíta ako vážený priemer výnosností, ktoré očakávame pre jednotlivé aktíva a rizikovosť bude predstavovať štandardná odchýlka.

### 3 VÝPOČET PORTFÓLIA

Na základe Markowitzovej teórie je možné realizovať nami prezentovaný alternatívny spôsob výpočtu zloženia portfólia. Táto analýza je realizovaná pomocou programovacieho jazyka Python v prostredí Jupyter Notebook. Pri práci sú využité indexy dva indexy, pričom jeden je predstaviteľom 30 najväčších amerických spoločností a druhý predstavuje 50 najväčších obchodovaných európskych spoločností. Pri analýze bolo nutné disponovať dennými uzatváracími cenami pre oba indexy. Nakoľko pracujeme s neplateným poskytovateľom dát, nebolo možné pri indexe Eurostoxx 50 nadobudnúť dáta o všetkých spoločnostiach. Finálny počet akcií, ku ktorým dátam sme sa vedeli dopátrať je 41. Americký index je v našej analýze plne zastúpený všetkými spoločnosťami.

Obrázok 2: Denné výnosy Eurostoxx 50



Zdroj: Vlastné spracovanie

Po nadobudnutí denných cien a uložení do dátového rámca, sme pristúpili k výpočtom denných výnosov pre všetky akcie z oboch indexov. Pri výpočte výnosov sme vyberali z dvoch možných prístupov : jednoduché výnosy a logaritmické výnosy. Rozhodli sme sa pre prácu s výnosmi logaritmickými nakoľko výpočty s analizovanou výnosnosťou zvyknú navyšovať a nadnášajú tak výnosnosť jednotlivých cenných papierov. (4)

Obrázok 3: Výsledok rovnomerného rozloženia váh akcií (DJ30)

```
14 pfolio_vol = (np.dot(weights.T, np.dot(log_returns.cov() * tradingDaysIn5YearsYearly, weights))) ** 0.5
15 print ("Volatilita portfólia : "+str(round(pfolio_vol*100,2)) + '%')
16 print("Váhy : " + str(weights))
17
18 #Vykonnost pred markowitzom
19 log_returns_yearly = log_returns.mean() * tradingDaysIn5YearsYearly
20 pfolio = str(round(np.dot(log_returns_yearly, weights)*100, 2)) + ' %'
21 print("Vykonnost portfólia : " + pfolio)

Volatilita portfólia : 21.24%
Váhy : [0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333
0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333
0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333
0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333
0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333 0.03333333]
Vykonnost portfólia : 5.72 %
```

Zdroj: Vlastné spracovanie

Obrázok 4: Výsledok rovnomerného rozloženie váh (Eurostoxx 50)

Volatilita portfólia : 21.28%  
 Váhy : [0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024  
 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024  
 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024  
 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024  
 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024  
 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024 0.02439024]  
 Vykonnosť portfólia : 7.85 %

Zdroj: Vlastné spracovanie

Na základe dát z posledných piatich rokov, je podľa rovnomerne rozložených váh vidno vyššia výnosnosť pri európskom portfóliu o 2%, čo by mohlo zväzdať k väčšinovej investícií práve do tejto geografickej oblasti. Nakoľko sa investorom snažíme doručiť čo najväčší výnos, realizovali sme výber 8 najlepších akcií z oboch indexov na základe pomeru výnos a riziko. Týmto výberom sa snažíme minimalizovať transakčné náklady na nákup akcií, nakoľko každá transakcia na burze obnáša aj poplatky za nákup.

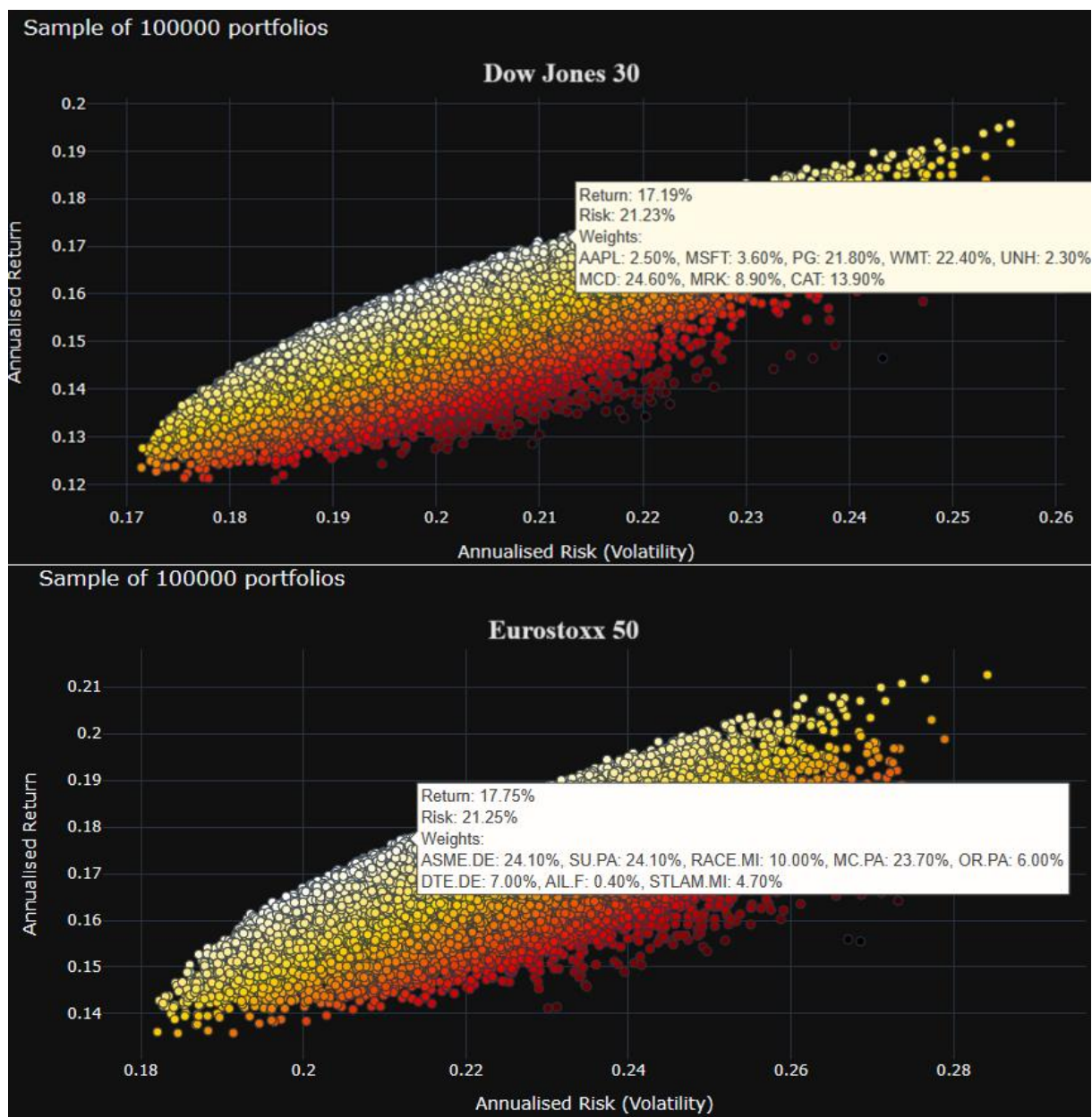
Obrázok 5: Výber 8 najlepších akcií podľa pomeru výnos a riziko

Dow Jones Industrial Average				Eurostoxx 50			
Ticker	Return	Volatility	Best-Stocks	Ticker	Return	Volatility	Best-Stocks
ASME.DE	0.253315	0.368571	0.592327	AAPL	0.229802	0.333813	0.583567
SU.PA	0.189009	0.289449	0.532075	MSFT	0.212251	0.313749	0.564946
RACE.MI	0.177798	0.277038	0.516103	PG	0.137295	0.216858	0.471712
MC.PA	0.185916	0.295534	0.510656	WMT	0.122702	0.221976	0.395095
OR.PA	0.143892	0.245364	0.443797	UNH	0.140811	0.301021	0.351508
DTE.DE	0.119362	0.207245	0.407064	MCD	0.115004	0.233381	0.342802
AIL.F	0.126165	0.224276	0.406485	MRK	0.113034	0.233415	0.334313
STLAM.MI	0.156475	0.38286	0.317284	CAT	0.141688	0.334946	0.318524
PPB.F	0.161498	0.408332	0.309792	HD	0.099793	0.292794	0.221292
UCG.MI	0.165138	0.424302	0.306711	CVX	0.104945	0.359243	0.194702
AHOG.DE	0.112876	0.261506	0.297797	V	0.091418	0.290205	0.194409
CS.PA	0.114784	0.281141	0.283788	AMGN	0.082902	0.255811	0.187254
SGO.PA	0.12294	0.336566	0.261285	GS	0.09554	0.332237	0.18222
ENEL.MI	0.102287	0.261803	0.257016	KO	0.069648	0.215558	0.160737
SAN.PA	0.090574	0.218786	0.254009	JPM	0.079461	0.321573	0.138262
ISP.MI	0.114527	0.333981	0.23812	TRV	0.070743	0.290876	0.122879
DB1.DE	0.090742	0.237221	0.23498	AXP	0.079174	0.375867	0.117527
BMN.DE	0.098353	0.304719	0.207906	JNJ	0.048623	0.2064	0.066005
ALV.DE	0.081491	0.262054	0.177411	DOW	0.060312	0.391514	0.064652
MBG.DE	0.096009	0.378432	0.161215	CSCO	0.049429	0.289831	0.049785
IFX.DE	0.099687	0.406322	0.1592	HON	0.04771	0.273822	0.046417
IXD1.F	0.081704	0.305043	0.153107	CRM	0.047678	0.395204	0.03208
TTE.PA	0.084559	0.324189	0.152871	IBM	0.040822	0.271871	0.021414
DG.PA	0.078291	0.310351	0.13949	NKE	0.035033	0.332413	0.000099
BNP.PA	0.081138	0.360639	0.127933	INTC	-0.025591	0.390416	-0.155195
EL.PA	0.063593	0.27262	0.104883	DIS	-0.068306	0.334939	-0.308433
ENI.MI	0.051022	0.318913	0.050238	BA	-0.13172	0.509685	-0.327104
SAF.PA	0.048643	0.408434	0.033402	VZ	-0.053104	0.202641	-0.43478
AIR.PA	0.048258	0.424871	0.031204	MMM	-0.125474	0.281013	-0.571055
DHL.DE	0.043694	0.291246	0.029853	WBA	-0.195006	0.337194	-0.68212
RI.PA	0.040966	0.222421	0.026823				
SAP.DE	0.041399	0.283466	0.022574				
VOW3.DE	0.006253	0.367632	-0.078194				
ADYEN.AS	-0.003999	0.489282	-0.079708				
KER.PA	0.002995	0.329925	-0.097008				
ADS.F	-0.035211	0.354296	-0.198171				
NOKIA.PA	-0.042968	0.378275	-0.206114				
BN.PA	-0.013425	0.213132	-0.227209				
BAS.DE	-0.041161	0.306429	-0.248544				
ITKA.F	-0.057747	0.36451	-0.254442				
BAYN.DE	-0.061635	0.315673	-0.306125				

Zdroj: Vlastné spracovanie

Naším následným cieľom je prekonať pôvodný výnos 5,72% (DJ30) a 7,85% (STOXX 50), pri štandardnej odchýlke, ktorú majú obe portfólia s rovnomerne rozloženými váhami aktív podobnú a to 21,24%. Pomocou náhodného priradenia váh týmto ôsmim aktívam dosiahneme simulované portfólio prístupom Monte Carlo. Takýchto portfólií je možné vytvoriť nekonečné množstvo. Pre našu prácu sme po analýze stanovili 100 000 portfólií ako dostačujúcu vzorku na vykreslenie možných dosiahnuteľných portfólií a zobrazenie efektívnej hranice, z ktorej budeme vyberať portfólio pri riziku 21,24%.

Obrázok 6: Osem členné portfóliá - Monte Carlo



Zdroj: Vlastné spracovanie

Zo zostrojených množín portfólií na obrázku 6, predstavuje každý jeden bod jedno portfólio. Po prechode kurzora myši sa nad daným portfóliom zobrazí detail, na ktorom je vidno výnos, volatilitu a presné zloženie daného portfólia. Investor môže sám bez nutnosti stanovenia optimalizačnej podmienky zvoliť preferenciu vysokého výnosu na X osi smerom vpravo alebo minimalizáciu rizika na Y osi smerom na dol. Podľa výsledkov vidíme, že pri riziku 21,24% je očakávaný výnos amerických aj európskych akcií podobný a nie je tak možné stanoviť preferenciu majoritnej investície. V tomto prípade je vhodné alokovať svoje prostriedky do oboch trhov rovnomerne s miernym príklonom k európskym akciám. Aj v prípade ak by sme zvolili možnosť investície do najmenej výnosnej kombinácie podľa obrázku 6, dostali by sme výnos 12%, čo predstavuje od pôvodných 5,72% dvojnásobné navýšenie.

## 4 ZÁVER

Pri analýze portfólia sme ukázali alternatívny prístup Monte Carlo, kde sme náhodne priradili váhy k prislúchajúcim aktívam. Ak by sme sa snažili dosiahnuť presné hodnoty nachádzajúce sa na efektívnej hranici, bolo by nutné disponovať vysokým výpočtovým výkonom, ktorý by prevyšoval bežné zariadenia a mohli by sme tak vykresliť milióny portfólií. V tomto prístupe sa vieme priblížiť k efektívnej hranici a nechať investora vybrať jemu preferovanú skladbu portfólia na základe dynamického zobrazenia jednotlivých bodov, predstavujúce portfóliá. Vo výsledku sme dokázali prekonať počiatočné výnosy amerického aj európskeho portfólia a dostali sme takmer rovnaký výnos rovný sedemnást' a pol percent, čo v porovnaní s pôvodnými 5,72% a 7,85% činí pôsobivé navýšenie pri očakávanom výnose. Ak by sme vzhľadli na aktuálny vývoj trhov, všimli by sme si zastavenie navyšovania úrokových sadzieb, a začínajúci reverzný trend najmä pri európskej centrálnej banke. Aj z tohto hľadiska si dovoľíme tvrdiť, že investícia do európskych spoločností je opodstatnená nakoľko budúce klesajúce úrokové sadzby prinesú nový kapitál do akciových trhov. Zároveň zostrojené portfóliá slúžia iba ako vôdzky k tomu, ako sa trhy môžu správať, na základe historických údajov. Nie je preto možné tvrdiť, že prezentované výsledky budú predstavovať skutočný budúci výnos, nakoľko vo výpočtoch nie sú obsiahnuté aspekty ako makroekonomická situácia, ani medzinárodné vzťahy.

### Použitá literatúra

1. HUDSON, R. Calculating and comparing security returns is harder than you think: A comparison between logarithmic and simple returns [online]. 2014 [cit. 2023-10-01]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1057521914001380>
2. PEKÁR, J., BREZINA, I. a REIFF, M. Modely výberu portfólia. Bratislava: ekonóm, 2022. ISBN 978-80-225-5008-6
3. MISKOLCZI, P. Note on simple and logarithmic return. Applied Studies in Agribusiness and Commerce, 2017, roč. 11, čís. 1-2, s. 127–136 [online]. [cit. 2023-10-01]. Dostupné z: <https://doi.org/10.19041/APSTRACT/2017/1-2/16>
4. MIŠEK, R. Optimalizácia portfólia s využitím jazyka Python. Bratislava: Ekonomická Univerzita v Bratislave, 2023. Diplomová práca.
5. MÜLLER, H. Modern Portfolio Theory: Some Main Results. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1988, roč. 18, čís. 2, s. 127-145. DOI: 10.2143/AST.18.2.2014947.
6. S, N. List of top 4 portfolio theories: Theories: Portfolio management [online]. Essays, Research Papers and Articles on Business Management, 2017, 11. júl [cit. 2023-10-01]. Dostupné z: <https://www.businessmanagementideas.com/portfolio-management/theories-portfolio-management/list-of-top-4-portfolio-theories-theories-portfolio-management/15149>
7. YAHOO.FINANCE. Data on individual stocks [online]. 2023 [cit. 2023-10-01]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com>

### Kontaktné údaje

Ing. Richard Mišek

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 918 938 894, email: [richard.misek@euba.sk](mailto:richard.misek@euba.sk)



# KLIMATICKÁ MIGRÁCIA: PREHĽADOVÁ ŠTÚDIA

## CLIMATE MIGRATION: AN OVERVIEW STUDY

*Veronika Mitkova, Miroslava Jánošová*

### **Abstrakt**

Cieľom predkladaného článku je poskytnúť prehľad problematiky migrácie spojenej s environmentálnymi faktormi. Vychádzame z troch prehľadových článkov z rokov 2021 a 2023, na zistenia ktorých nadväzujeme, rozširujeme ich o modelovanie remitencií a výskumy klimatickej migrácie rôznych oblastí.

*Kľúčové slová: migrácia, klimatická zmena, environmentálne faktory*

### **Abstract**

The aim of the present paper is to provide an overview of the migration issues related to environmental factors. We draw on three review articles from 2021 and 2023, and build on their findings, extending them to model remittances and climate migration studies of different regions.

*Keywords: migration, climate change, environmental factors*

## **1 ÚVOD**

Jeden z najnovších prehľadových článkov z oblasti klimatickej migrácie je od autorov Moore a Wesselbaum (2023), ktorí na základe iných prác identifikovali environmentálne faktory, ktoré silne vplyvajú na migráciu. Ich výskum podporuje zistenia, že teplota veľmi silno ovplyvňuje migráciu, kým zrážky nie sú v tejto otázke presvedčivým faktorom. Ďalší článok, založený na dvoch meta-analýzach, je od kolektívu autorov Hoffman a kol. (2021). Autori identifikovali päť kľúčových výziev, a to: meranie migrácie, meranie klimatických udalostí, integrácia a agregácia údajov, identifikácia kauzálnych vzťahov a skúmanie kontextuálnych vplyvov a mechanizmov. Iná meta-analýza od autorov Beine a Jeusette (2021), založená na kódovaní 51 vedeckých článkov, identifikuje 85 rôznych premenných zachytávajúcich metodiku hlavných dimenzií analýzy na úrovni regresie. Vyzdvihujú rolu niektorých dôležitých rozhodnutí o použitej metodológii, ako frekvencia údajov o mobilite, meranie ľudskej mobility a klimatické faktory. V tejto práci nadviažeme na tieto výskumy a doplníme ich o ďalšie zdroje, pričom venujeme pozornosť modelovaniu remitencií a modelom zameraných na rôzne geografické oblasti.

## **2 MODELY REMITENCIÍ**

Remitencie sú platby pracovníkov, ktoré ako časť svojej mzdy posielajú do svojej domovskej krajiny, oblasti.

Li a Zhou (2015) skúmajú vplyv remitencií migrantov z vidieka do miest na životné prostredie. Tvrdia, že hoci migranti pracujú a žijú v meste, altruistické remitencie ovplyvňujú rozsah výroby v mestskom sektore a potom majú vplyv na životné prostredie. Modelom všeobecnej rovnováhy dvoch sektorov a využitím komparatívneho statického prístupu na skúmanie krátkodobých a dlhodobých vplyvov zvýšenia remitencií migrantov na životné

prostredie zistili, že zvýšenie remitencií migrantov môže krátkodobo zlepšiť životné prostredie, ale z dlhodobého hľadiska ho môže zhoršiť.

V neskoršom výskume Li a Fu (2022) sledujú modelom všeobecnej rovnováhy účinky zmien výšky remitencií v príjmoch migrujúcich pracovníkov na znečistenie životného prostredia. Zistili, že v prípade špecifického kapitálu zvýšenie miery remitencie mestských a vidieckych migrantov zvýši celkovú remitenciu migrujúcich pracovníkov, zvýši dopyt poľnohospodárskeho sektora po službách poľnohospodárskych výrobcov a zníži úroveň životného prostredia, ale nemá vplyv na úroveň produkcie mestského priemyselného sektora; a v prípade mobilného kapitálu zvýšenie miery remitencie mestských a vidieckych migrantov zvýši celkovú remitenciu migrujúcich pracovníkov, zvýši dopyt poľnohospodárskeho sektora po službách poľnohospodárskych výrobcov, zníži úroveň produkcie mestského priemyselného sektora a zlepši úroveň životného prostredia.

V nadväznosti na tento výskum Fu a Li (2022) skúmali aj číselné charakteristiky účinkov zmeny miery remitencií vidieckych a mestských migrantov na príslušné premenné a zistili, že zvýšenie miery remitencií migrantov zvýši národný dôchodok a zlepši úroveň hrubého národného blahobytu za určitých podmienok bez ohľadu na to, či ide o špecifický prípad kapitálu alebo mobilný kapitál.

### **3 MODELY KLIMATICKEJ MIGRÁCIE RÔZNYCH REGIÓNOV**

Gray (2009) na príklade Južných ekvádorských Ánd dokazuje, že účinky vlastníctva pôdy a iných faktorov sa v jednotlivých migračných prúdoch výrazne líšia. Taktiež negatívne environmentálne podmienky a bezzemkovosť nezvyšujú migráciu za prácou tak, ako sa bežne predpokladá v literatúre.

Zaujímavý je prístup k modelovaniu znečistenia, ako jedného faktora migrácie v Mexiku, od autorov García a kol. (2012). Vo svojom výskume nahrádzajú premennú nezamestnanosť inou premennou znečistenie ovzdušia a využitím tradičného Harris-Todarovho modelu vidieckej a mestskej domácnosti dokazujú kladný vzťah medzi migráciou a znečistením.

Harper (2013) uvádza, že migrácia podmienená životným prostredím bude pôsobiť prostredníctvom zmeny rozsahu, vlastníctva a cieľa globálnej migrácie kvalifikovaných pracovníkov, a tým zvýši vplyv na zloženie obyvateľstva hostiteľskej aj zdrojovej krajiny. Environmentálne motivovaní kvalifikovaní migranti zvýšia počet migrantov, ktorých už priťahujú ekonomické príležitosti vyplývajúce z demografického úpadku. Z hľadiska vlastnej a cieľovej krajiny môžu environmentálne zmeny zmeniť predpoklad, že Ázia a hospodársky vyspelejšie časti Latinskej Ameriky a Afriky sa ukážu ako atraktívnejšie destinácie pre kvalifikovaných migrantov. Okrem toho migrácia kvalifikovaných pracovníkov bude v podmienkach environmentálnych zmien a globálneho starnutia čoraz viac zanechávať zraniteľných starších ľudí v environmentálne problémových oblastiach.

Hrysenko a Pryatelchuk (2020) identifikujú faktory ovplyvňujúce formovanie objemov, smerov a štruktúry systému migračných tokov v európskom regióne. Konštatujú prítomnosť výlučne ekonomických dôvodov pracovnej migrácie, pričom sociálny faktor, reprezentovaný výškou miezd, je odvodený od ekonomického a má sekundárny vplyv. V kontexte migrácie v rámci krajín Európskej únie popierajú vplyv environmentálneho faktora na zintenzívnenie migračných procesov v tomto priestore.

Prístup založený na empirických údajoch jedného mesta využili Balcar a Sulák (2021), pričom skúmali význam kvality životného prostredia v mestách pre potenciálnu migráciu. Použili reprezentatívnu vzorku 3845 osôb z mesta Ostrava v Českej republike, ktoré patrí medzi mestá s najviac znečisteným ovzduším v Európe. Ich výsledky naznačujú, že kvalita

prírodného prostredia aj jeho subjektívne vnímanie predstavujú dôležité a vysoko významné prediktory úmyslu odísť z krajiny, že rôzne druhy znečistenia vedú k rôznym migračným stratégiám a že odliv mladých a vzdelaných pracovníkov ďalej posilňuje nízka kvalita prírodného prostredia.

Shao a kol. (2021) využitím mikroúdajov o vidieckych komunitách z Čínskej databázy rodín a Čínskeho prieskumu riadenia komunity skúmali vplyv čínskych vidieckych pracovných transferov na poľnohospodárske znečistenie, vidiecke priemyselné znečistenie a vidiecke domáce znečistenie. Ich výskum ukázal, že s väčším počtom migrujúcich pracovných síl, ktoré odchádzajú z vidieka, sa pravdepodobnosť poľnohospodárskeho znečistenia a vidieckeho priemyselného znečistenia znižuje, zatiaľ čo pravdepodobnosť vidieckeho domáceho znečistenia sa zvyšuje.

Kim a Lee (2023) využili mikroúdaje o celom súbore zmien adries a vlastnoručne uvádzaných dôvodoch migrácie ako reakcie obyvateľstva na zemetrasenie v juhokórejskom Pohangu v roku 2017. Zistili, že zatiaľ čo migrácia z dôvodu zmien v obytnom prostredí sa výrazne zvýšila, migrácia súvisiaca so zamestnaním vykazovala len malé zmeny. Táto migrácia viedla aj k zníženiu cien nájomného bývania.

#### **4 MODELY MIGRÁCIE Z VIDIEKA DO MIEST**

Millock (2015) na základe výskumu environmentálne podmienenej migrácie uvádza, že v rôznych výskumoch panuje zhoda v tom, že je len málo pravdepodobné, že dôjde k veľkému nárastu medzinárodných migračných tokov v dôsledku premenlivosti klímy. Regionálna migrácia však bude ovplyvnená, a to buď na africkom kontinente, alebo vnútorne v rámci hraníc jednotlivých krajín. Migráciu vyvolanú životným prostredím analyzovali pomocou klasického Harrisovho-Todarovho modelu migrácie z vidieka do miest, nových modelov ekonomickej geografie, modelov založených na environmentálnej ekonómii externalít znečistenia s voľnou mobilitou faktorov a novej ekonómie pracovnej migrácie.

Migráciou z vidieka do miest sa zaoberá aj Nakamura (2018), pričom do modelu zahŕňa environmentálne problémy spôsobené spotrebou a analyzuje vplyv zníženia miery tvorby znečistenia a akumulácie faktorov. Predpokladá, že životné prostredie každej vidieckej a mestskej oblasti sa zhoršuje v dôsledku znečistenia spôsobeného spotrebou príslušných obyvateľov. K migrácii z vidieka do mesta dochádza kvôli rozdielom v úžitku, ktorý je ovplyvnený životným prostredím aj očakávaným zárobkom. Autor dokazuje, že hoci zníženie miery tvorby znečistenia zlepšuje životné prostredie v oboch oblastiach, to, či zmierňuje nezamestnanosť v mestách, závisí od určitých podmienok.

#### **5 MODELY VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY A OSTATNÉ MODELY ZAMERANÉ NA KLIMATICKÚ MIGRÁCIU**

Marchiori a Schumacher (2011) v modeli dvoch krajín s prekrývajúcimi sa generáciami s endogénnou zmenou klímy skúmali zmenu klímy a medzinárodnú migráciu, pričom zistili, že zmena klímy zvyšuje migráciu. Malé vplyvy zmeny klímy majú významný vplyv na počet migrantov, voľnejšia imigračná politika zvyšuje dlhodobú migráciu, zhoršuje zmenu klímy a zvyšuje nerovnosť medzi severom a juhom a ekologickejšia technológia znižuje emisie, dlhodobú migráciu a nerovnosť, ak je vplyv migrantov na celkovú zmenu klímy veľký.

Mason (2017) vo svojom výskume dokazuje, že migrácia môže spôsobiť nižšie emisie. Predpokladá, že sa občania krajiny ohrozenej zmenou klímy môžu presťahovať do druhej

krajiny, z ktorej do nej ale prúdi stály tok skleníkových plynov. Ak táto migrácia spôsobuje prijímajúcej krajine náklady, potom migrácia vyvoláva prostredníctvom politických ekonomických síl akúsi pseudo-daň z uhlíka, ktorá motivuje krajinu, do ktorej prúdi prúd prisťahovalcov, aby znížila svoje emisie, čím sa kompenzujú náklady vzniknuté v dôsledku zmeny klímy. Dokazuje, že dlhodobá zásoba uhlíka a aj emisií je v prípade migrácie menší.

Bekaert a kol. (2021) modelujú zámery migrovať v rámci krajiny a do zahraničia pre 90 krajín sveta v roku 2010. Zistili, že vystavenie environmentálnemu stresu, ktorému sa ľudia sami hlásia, zvyšuje pravdepodobnosť úmyslu migrovať v nadchádzajúcom roku v rámci krajiny aj do zahraničia. V absolútnom vyjadrení sa najväčší vplyv dosiahol v prípade domácej migrácie. Celkovo je vplyv na migračné zámery do rôznych destinácií najsilnejší v krajinách s nízkymi a strednými príjmami v Afrike a Latinskej Amerike a Karibiku, zatiaľ čo v krajinách s vysokými príjmami a najmä v Európe environmentálny stres podnecuje len domáce migračné zámery.

Helbling a Meierrieks (2021) sledujú efekt klimatickej zmeny na migráciu zo 121 rozvíjajúcich sa krajín do 20 krajín OECD medzi rokmi 1980 a 2010. Zistili, že ako zvyšujúce sa teploty, tak aj úhrny zrážok majú význam pre modely migrácie. Zvyšujúce sa teploty vedú len k migrácii nízkokvalifikovaných, ale nie vysokokvalifikovaných osôb, majú vplyv len v krajinách nachádzajúcich sa v teplejších častiach sveta, čo je v súlade s myšlienkou rôznych úrovni zraniteľnosti voči zmene klímy, a prejavujú sa len v dlhodobom horizonte. Dokazujú, že odchod nízkokvalifikovaných pracovníkov reaguje aj na krátkodobé a dlhodobé zmeny zrážok, čo neskôr v prehľadovej štúdii vyvrátili Moore a Wesselbaum (2023).

Burzynski a kol. (2022) zistili, že zmena klímy výrazne zvyšuje globálnu nerovnosť a chudobu, posilňuje urbanizáciu a zvyšuje migráciu z oblastí s nízkymi zemepisnými šírkami do oblastí s vysokými zemepisnými šírkami. Mediánové prognózy naznačujú, že zmena klímy vyvolá v priebehu 21. storočia dobrovoľné a nútené trvalé presídlenie 62 miliónov osôb v produktívnom veku. Celkovo sa v rámci súčasných medzinárodných migračných zákonov a politík podarí presťahovať mimo svojej domoviny len malej časti ľudí, ktorí trpia negatívnymi dôsledkami klimatických zmien. Autori tvrdia, že je nepravdepodobné, aby klimatické šoky vyvolali masívne medzinárodné toky migrantov, s výnimkou kombinácie extrémne pesimistických klimatických scenárov a veľmi tolerantných migračných politík.

Conigliani a kol. (2022) pomocou priestorovej regresie skúmali vzťah medzi katastrofami spôsobenými klimatickými zmenami a nútenou migráciou. Nútené migrácie na krátke a stredné vzdialenosti sú výrazne ovplyvnené katastrofami súvisiacimi s klimatickými zmenami, a to nezávisle od ekonomických očakávaní spojených s cieľovou destináciou. Pozorujú aj konkurenciu medzi migrantmi, keďže sa zistilo, že rozhodnutie presťahovať sa závisí od migračného správania susedných krajín.

Braun (2023) využíva model reálnych opcí, podľa ktorého môžu jednotlivci kvôli neistote pozdržať rozhodnutie migrovať kvôli klimatickým zmenám, a rozhodnúť sa migrovať iba vtedy, ak klimatické zmeny presiahnu určitý prah. Využitím semi-parametrických regresných metód empiricky identifikoval tieto prahové efekty a zistil, že v nízkopríjmových krajinách rozhodnutiam jednotlivcov bráni obmedzená likvidita. Tieto jeho závery nie sú konzistentné s prahovými efektmi.

## **Použitá literatúra**

1. BALCAR, J., SULÁK, J. 2021. Urban environmental quality and out-migration intentions. In: *Annals of Regional Science*, roč. 66, č. 3, str. 579-607.

2. BEKAERT, E., RUYSSSEN, I., SALOMONE, S. 2021. Domestic and international migration intentions in response to environmental stress: A global cross-country analysis. In: *Journal of Demographic Economics*, roč. 87, č. 3, str. 383-436.
3. BEINE, M., JEUNETTE, L. 2021. A meta-analysis of the literature on climate change and migration. In: *Journal of Demographic Economics*, roč. 87, č. 3, str. 293-344.
4. BRAUN, M. 2023. A real-options analysis of climate change and international migration. In: *Environment and development economics*, PII.
5. BURZYNSKI, M., DEUSTER, C., DOCQUIER, F., DE MELO, J. 2022. Climate change, inequality, and human migration. In: *Journal of the European Economic Association*, roč. 20, č. 3, s. 1145-1197.
6. CONIGLIANI, C., COSTANTINI, V., FINARDI, G. 2022. Climate-related natural disasters and forced migration: a spatial regression analysis. In: *Spatial Economic Analysis*, roč. 17, č. 3, s. 416-439.
7. FU, H.A., LI, X.C. 2022. Rural-urban migrants' remittance and agricultural pollution in the presence of agricultural dualism. In: *Annals of Regional Science*, 70, str. 535-558.
8. GARCÍA, H.G., CANTÚ, J.D.S., GUAJARDO, R.C.R. 2012. Pollution as one of the Determinants of Migration: Evidence for Mexico. In: *Economía Mexicana – Nueva Época*, roč. 21, č. 1, str. 69-92.
9. GRAY, C.L. 2009. Environment, Land, and Rural Out-migration in the Southern Ecuadorian Andes. In: *World Development*, roč. 37, č. 2, str. 457-468.
10. HARPER, S. 2013. Population-Environment Interactions: European Migration, Population Composition and Climate Change. In: *Environmental and Resource Economics*, roč. 55, č. 4, str. 525-541.
11. HELBLING, M., MEIERRIEKS, D. 2021. How climate change leads to emigration: Conditional and long-run effects. In: *Review of Development Economics*, roč. 25, č. 4, str. 2323-2349.
12. HOFFMANN, R., SEDOVÁ, B., VINKE, K. 2021. Improving the evidence base: A methodological review of the quantitative climate migration literature. In: *Global Environmental Change - Human and Policy Dimensions*, roč. 71, č. příspěvku 102367.
13. HRYSENKO, M., PRYIATELCHUK, O. 2020. Modelling the factors influencing migration processes in the European Union. In: *Economic Annals*.XXI, 183, č. 5-6, str. 26-42.
14. KIM, H., LEE, J.K. 2023. Natural disasters, risk and migration: evidence from the 2017 Pohang earthquake in Korea. In: *Journal of Economic Geography*, roč. 23, č. 5, str. 1017-1035.
15. LI, X.C., FU, H.N. 2022. Migrant remittance, agricultural producer services, and environmental pollution. In: *Asia-Pacific Journal of Accounting and Economics*, roč. 29, č. 5, str. 1267-1282.
16. LI, X.C., ZHOU, J. 2015. Environmental effects of remittance of rural-urban migrant. In: *Economic Modelling*, roč. 47, str. 174-179.
17. MARCHIORI, L., SCHUMACHER, I. 2011. When nature rebels: international migration, climate change, and inequality. In: *Journal of Population Economics*, roč. 24, č. 2, str. 569-600.
18. MASON, C.F. 2017. Climate Change and Migration: A Dynamic Model. In: *CESIFO Economic Studies*, roč. 63, č. 4, str. 421-444.
19. MILLOCK, K. 2015. Migration and Environment. In: *Annual Review of Resource Economics*, roč. 7, str. 35-60.

20. MOORE, M., WESSELBAUM, D. 2023. Climatic factors as drivers of migration: a review. In: Environment Development and Sustainability, roč. 25, č. 4, s. 2955–2975.
21. NAKAMURA, A. 2018. Pollution from consumption and urban unemployment in a dual economy. Asia-Pacific Journal of Regional Science, roč. 2, č. 1, str. 211-226.
22. SHAO, S., LI, B.L., FAN, M.T., YANG, L.L. 2021. How does labor transfer affect environmental pollution in rural China? Evidence from a survey. In: Energy Economics, 102.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Veronika Mit'ková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

Tel: (421 2) 2066 9863

email: [veronika.mitkova@fses.uniba.sk](mailto:veronika.mitkova@fses.uniba.sk)

### **Pod'akovanie**

Tento výskum bol podporený grantmi VEGA 1/0668/22 “Migrácia a strieborná ekonomika: Ekonomické, politické a právne dôsledky riešenia problému starnutia a migrácie populácie v krajinách EÚ” a VEGA 1/0120/23 “Environmentálne modely ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí”.

# VÁHY KRITÉRIÍ V ÚLOHÁCH KOMPLEXNÉHO VYHODNOCOVANIA MIGRAČNÝCH POLITÍK<sup>1</sup>

## CRITERIA WEIGHTS IN OUTRANKING APPROACHES APPLIED TO MIGRATION POLICIES

*Vladimír Mlynarovič*

### Abstrakt

Článok prezentuje vybrané objektívne metódy pre výpočet váh kritérií aplikovateľné v úlohách komplexného vyhodnocovania variantov migračných politík. Formuluje ich výhody v porovnaní so subjektívnymi metódami. Analyzuje matematické základy metódy entropie a CRITIC metódy.

**Kľúčové slová:** váhy kritérií, objektívne metódy výpočtu váh, metóda entropie, CRITIC metóda

### Abstract

The paper presents selected objective methods for criteria weights computation applied at outranking approaches to migration policies. Advantages such approaches in comparison with subjective methods are pointed out. Mathematical backgrounds of an entropy method and CRITIC method are analyzed.

**Keywords:** criteria weights, weights computations objective methods, entropy method, CRITIC method

## 1 ÚVOD

Váhy sú v procesoch rozhodovania obvykle považované za nástroj na vyjadrenie významnosti každého kritéria. Zmeny vo váhach kritérií môžu viesť k odlišným výsledkom. To znamená, že výber vhodnej metódy na priradenie akurátnych váh rôznym kritériám je kritickým problémom. Subjektívne, objektívne a integrované metódy výpočtu váh sú reprezentantmi rôznych metód používaných na priradovanie váh (Odu, 2019). V subjektívnych prístupoch sú využívané „expertné“ odhady. Hlavnou nevýhodou je ich časová náročnosť a to, že môžu viesť ku konfliktným odporúčaniam. Analytické hierarchické procesy (AHP) predstavujú široko využívanú metódu subjektívnych váh. Využíva párové porovnávacie otázky na konštrukciu matice relatívnych preferenčných ohodnotení medzi každou dvojicou alternatív vzhľadom ku každému kritériu a matice relatívnych významnosti každého kritéria. Hodnotenia sú odvodené z nominálnej skupiny diskusií alebo z tzv. Delphi techniky, čo môže priviesť k systematickým chybám. S rastom počtu kritérií rastie aj počet párových porovnávaní a výsledkom sú rozsiahle výpočty. Vzhľadom na takéto aplikačné ohraňovania, súčasne štúdie navrhujú využívať objektívne metódy výpočtu váh. Váhy sú pri takýchto

---

<sup>1</sup> This project was supported by APVV-22-0526 The Economic and Fiscal Effects of Migration in Slovakia: An Integrated Modeling Approach and VEGA 1/0668/22 Migration and Silver Economy: The Economic, Politic and Legislative Consequences of the Aging and Migration in the EU Countries.

prístupoch odvodené na báze matematických výpočtov, bez interakcie s rozhodovateľom. Medzi najčastejšie využívané metódy objektívneho výpočtu váh patria metóda entropie, tzv. CRITIC metóda (významnosť kritérií na báze korelácií medzi kritériami) a metódy FANMA (Khan – Pamucar, 2022; Odu, 2019; Mahajan, et al., 2022).

## 2 OBJEKTÍVNE METÓDY VÝPOČTU VÁH KRITÉRIÍ

V nasledujúcich častiach sa prezentujú metóda entropie a CRITIC metóda ako nástroje na výpočet váh kritérií.

### 2.1 Metóda entropie

Váhy kritérií sú založené na definovaní rozhodovacej matice, ktoré obsahuje informácie týkajúce sa množiny alternatív. Entropia v teórii informácií predstavuje model pre neurčité prostredie opísané diskretnou funkciou rozdelenia pravdepodobnosti. Entropia kritéria normalizovanej rozhodovacej matice je opísaná vzťahom

$$E_j = -\frac{\sum_{i=1}^m P_{ij} \ln(P_{ij})}{\ln(m)}, j = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

pričom  $P_{ij}$  je prvok normalizovanej rozhodovacej matice a

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

kde  $x_{ij}$  je hodnota  $j$  – tého kritéria pre variant  $i$  migračnej politiky vo východiskovej rozhodovacej matici. Váhu kritéria  $j$  podľa metódy entropie ( $E$ ) potom vypočítame podľa vzťahu

$$w_j^E = \frac{1-E_j}{\sum_{j=1}^n (1-E_j)} \quad (2.3)$$

kde  $(1 - E_j)$  vyjadruje stupeň diverzity informácií vo výsledku kritéria  $j$ .

### 2.2 CRITIC metóda

CRITIC metóda (Lau, et al., 2018) determinuje váhy kritérií následnou postupnosťou krokov. Rozhodovacia matica  $\mathbf{X}$ , s počtom riadkov  $m$  ako počtom alternatív a počtom stĺpcov  $n$  ako počtom kritérií je definovaná v tvare

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{m \times n}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

kde  $x_{ij}$  je ohodnotenie  $i$  – tej alternatívy migračnej politiky podľa  $j$  – tého kritéria.

Každé z kritérií môže byť považované za maximalizačné, kde platí čím viac tým lepšie, alebo minimalizačné, kde je to naopak. Kritérium nadobúda hodnoty v nejakom ohraničenom rozsahu. Maximalizačné kritérium,  $j \in F^+$ , je normalizované vydelením jeho vzdialenosti od minimálnej hodnoty veľkosťou rozsahu hodnôt. Naopak, minimalizačné kritérium,  $j \in F^-$ , je normalizované vydelením jeho vzdialenosti od maximálnej hodnoty veľkosťou rozsahu hodnôt. Prvky rozhodovacej matice sú normalizované podľa vzťahov (2.5) alebo (2.6) pre maximalizačné kritériá, resp. minimalizačné kritériá, pričom



$$r_{ij}^+ = \frac{x_{ij} - x_j^-}{x_j^+ - x_j^-}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \text{ ak } j \in F^+ \quad (2.5)$$

$$r_{ij}^- = \frac{x_j^+ - x_{ij}}{x_j^+ - x_j^-}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \text{ ak } j \in F^- \quad (2.6)$$

kde

$$x_j^+ = \max(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}), \quad x_j^- = \min(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$$

a  $r_{ij}$  rovné  $r_{ij}^+$  alebo  $r_{ij}^-$  vyjadruje normalizovanú hodnotu  $ij$  prvku rozhodovacej matice.

Pearsonov korelačný koeficient medzi dvomi kritériami  $j$  a  $k$ , ktorý opisuje lineárne korelácie, je vypočítaný podľa vzťahu

$$\rho_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^m (r_{ij} - \mu_j)(r_{ik} - \mu_k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (r_{ij} - \mu_j)^2 \sum_{i=1}^m (r_{ik} - \mu_k)^2}} \quad (2.7)$$

kde  $\mu_j$  a  $\mu_k$  vyjadrujú stredné hodnoty kritérií  $j$  a  $k$ , pričom

$$\mu_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{ij}, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Ak štandardnú odchýlku každého kritéria odhadneme podľa vzťahu

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_{ij} - \mu_j)^2}, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

potom index  $E_j$  kritéria  $j$  vypočítame podľa vzťahu

$$E_j = \sigma_j \sum_{k=1}^n (1 - \rho_{jk}), j = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

a váhy kritérií sú determinované vzťahom

$$w_j^C = \frac{E_j}{\sum_{k=1}^n E_j}, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

### 3 ZÁVERY

Váhy kritérií vypočítané na základe objektívnych metód umožňujú po ich implementovaní do metód pre komplexné vyhodnocovanie variantov (alternatív), ako sú napríklad metódy triedy PROMETHHE, objektivizovať samotné výsledky týkajúce sa zoraďovania variantov. Vytvárajú tiež priestor na konfrontáciu týchto výsledkov s výsledkami vypočítaným na základe subjektívnych metód pre výpočet váh významnosti kritérií založených napríklad na aplikácii AHP. Okrem toho, pri aplikácii metódy PROMETHEE II, kde analýza senzitivnosti umožňuje analyticky výpočet intervalov váh kritérií pre výsledné zoradenie variantov, sa vytvára priestor pre hľadanie takých prienikov váh kritérií vypočítaných rôznymi prístupmi, ktoré generujú rovnaké výsledky. Rozhodovateľ tak dostáva významné dodatočné informácie pre jeho konečné rozhodnutie.

## Použitá literatúra

1. BASILIO, M.P., V. PEREIRA and F. YIGIT, 2023. New Hybrid EC-Promethee Method with Multiple Iterations of Random Weight Ranges: Applied to the Choice of Policing Strategies. *Mathematics*. 11, 4432. <https://doi.org/10.3390/math11214432>
2. KHAN, F., Y. ALI and D. PAMUCAR, 2022. A new fuzzy FUCOM-QFD approach for evaluating strategies to enhance the resilience of the healthcare sector to combat the COVID-19 pandemic. *Kybernetes*. 51, 1429–1451.
3. LAU, K., et al., 2018. Properties of natural fibre composite for structural engineering applications. *Compos. Part E Eng.*, 136, 222 – 233.
4. MAHAJN, A., et al., 2022. Selection of Natural Fiber for Sustainable Composites Using Hybrid Multi Criteria Decision Making Techniques. *Compos. Part C Open Access*, 7, 100224.
5. ODU, G., 2019. Weighting methods for multi-criteria decision making technique. *J. Appl. Sci. Environ. Manag.* 23, 1449.

## Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4 1/b, 821 05 Bratislava

Tel: +421 2 20 66 98 60

email: vladimír.mlynarovic@fses.uniba.sk

# ANALÝZA ELASTICITY POPTÁVKY PO PIVU V ČESKÉ REPUBLICCE

## ANALYSIS OF DEMAND ELASTICITY IN CZECH REPUBLIC

*Ing. Jakub Neugebauer*

### **Abstrakt**

Konzumace alkoholu má velký vliv na společnost, zejména pak v České republice, kde je pivo, na které se článek zaměřuje, jedním ze základních prvků kultury. Jelikož se jedná o návykovou látku, je nutné sledovat množství vypitého alkoholu ve společnosti zejména z důvodu prevence zdravotních problémů spojených s negativními účinky alkoholu na organismus. Druhým důvodem k sledování poptávky po alkoholu je cenová regulace jeho konzumace v podobě spotřební daně. Politické strany balancují tuto daň z hlediska maximalizace zisku z výběru daní a minimalizace zhoršení nálady ve společnosti spojené se zdražováním. Pro porozumění chování spotřebitele dobře slouží elasticita poptávky. Tento článek sleduje její 3 formy, konkrétně cenovou elasticitu poptávky, křížovou elasticitu poptávky a důchodovou elasticitu poptávky. Sledovaným spotřebitelem v tomto článku je průměrný Čech a sledovaným časovým obdobím je pak rozmezí mezi roky 1995 a 2020.

***Klíčová slova:*** elasticita poptávky, pivo, závislost, návykové látky, alkohol

### **Abstract**

Alcohol consumption has a huge effect on society, especially in the Czech Republic, where beer, which is the main focus of this paper, is one of the pillars of the local culture. As alcohol is an addictive substance, it is necessary to watch the amount of consumed alcohol in society in order to prevent possible health issues coming with the negative effects of alcohol on organism. Another reason to watch the demand for alcohol is to regulate its price by the consumption tax. Governments are balancing this tax in order to maximize profit from collected taxes and minimize negative effects on society's sentiment. A good way to understand the behavior of a consumer is to analyze demand elasticity. This paper aims at 3 of its forms. More specifically they are price elasticity of demand, cross elasticity of demand, and income elasticity of demand. The targeted consumer of this paper is average Czech and watched period is between years 1995 and 2020.

***Keywords:*** demand elasticity, beer, addiction, substance abuse, alcohol

# 1 ELASTICITA POPTÁVKY PO ALKOHOLU

Jelikož je alkohol návykovou látkou, chování poptávky po něm se vyplatí sledovat hned z několika důvodů. Prvním a nejpodstatnějším hlediskem je to zdravotní. Formování poptávky nám řekne mnohé o spotřebiteli. Nadměrné užívání alkoholu má obrovský vliv na spotřebitele jako takového, ale také na společnost jako celek. Porozumění poptávky po alkoholu může napomáhat zdravotním organizacím s regulací a minimalizací negativních dopadů konzumace alkoholu.

Druhým podstatným důvodem sledování elasticity poptávky po alkoholu je daňová politika. Jelikož je alkohol návyková látka, je na něj ve většině zemí, včetně ČR, uvalována spotřební daň. Elasticita poptávky po alkoholu hraje klíčovou roli při určování efektivity a dopadů daňové politiky.

Jelikož je alkohol návyková látka, předpokládá se, že cenová elasticita po něm nebude elastická. Změna ceny alkoholu nemá pro alkoholika pravděpodobně příliš velký vliv. Gallet (1) ve své meta-analýze prací zabývajících se cenovou elasticitou poptávky po alkoholu určuje mediánovou hodnotu  $E_{DP}$  v hodnotě -0,535 ze 132 studií. V podobné studii zahrnující velké množství stejných prací Wagenaar (2) určuje průměrnou elasticitu -0,44.

Pro tento článek byly vybrány k pivu tvrdý alkohol a cigarety jako potenciální komplementy či substituty. Vztahem mezi cigaretami a alkoholem se zabývá vícero studií, ale není možné určit, jestli jsou cigarety a alkohol komplementy či substituty, jelikož se ve studiích vyskytují oba závěry. Například Bask a Melkersson (3) tvrdí, že jsou cigarety a alkohol komplementy. Naopak Tauchman et al. (4) dospěli k závěru, že se jedná o substituty.

Důchodovou elasticitou poptávky po alkoholu se zabýval Nelson (5) ve své meta-analýze. V tomto článku je elasticita uváděna dokonce konkrétně pro pivo. Průměrné elasticity jsou zde uváděny pro různé data sety v různých obdobích a důchodová elasticita poptávky po pivu se pohybuje mezi 0,5 a 0,6. Vypadá to tedy, že v souladu s tím, že je alkohol návyková látka, je tato látka dle kategorizace důchodové elasticity poptávky nezbytným statkem pro spotřebitele.

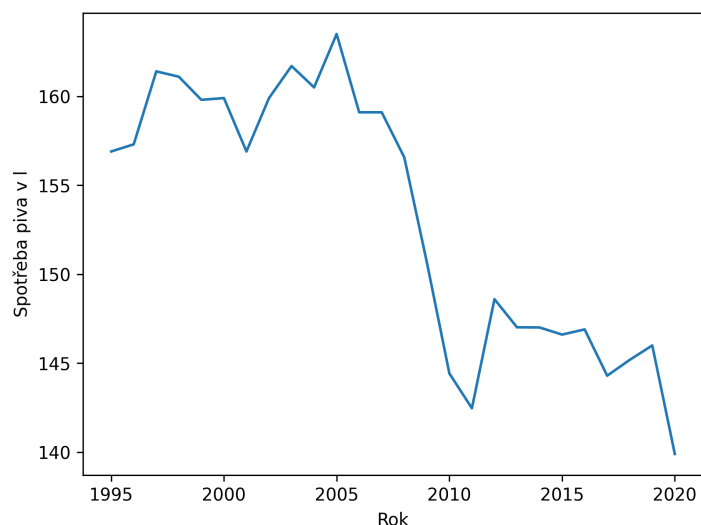
## 2 ELASTICITA POPTÁVKY PO PIVU V ČR

Všechna data pro tento článek byla získána z webové stránky Českého statistického úřadu (CZSO) (6): <https://www.czso.cz>. Na této stránce jsou historické údaje o ČR od jejího vzniku do roku 2022. Po spojení a úpravě všech potřebných dat jsou k dispozici data za 26 let od roku 1995 do roku 2020.

### 2.1 Vývoj spotřeby piva

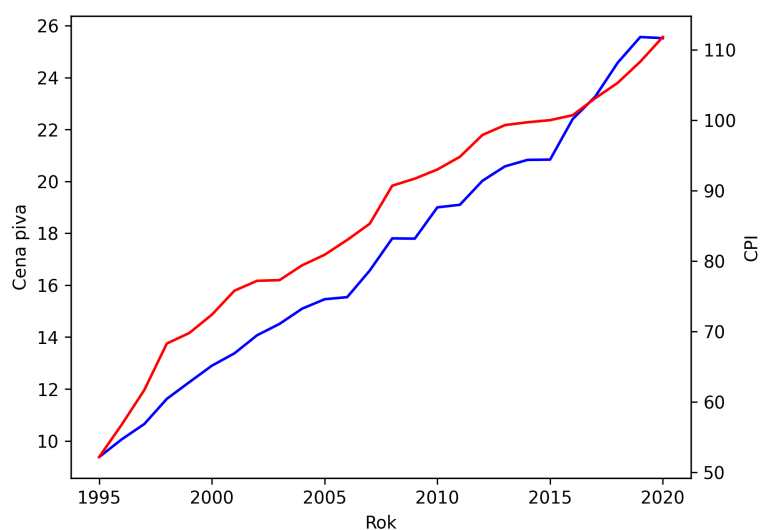
Jelikož je na stránkách CZSO cena piva rozdělena na lahvové a čepované, výsledná cena piva byla stanovena jako prostý aritmetický průměr obou cen. Dle příspěvku z roku 2015 na stránkách <https://zemedelec.cz> (7) byl v té době poměr vypitého lahvového a čepovaného piva zhruba

vyrovnaný, což opravňuje použití právě aritmetického průměru.



Obrázek 1: Vývoj spotřeby piva mezi lety 1995 a 2020 v ČR v litrech na jednoho obyvatele ročně

Na obrázku 1 je vidět, že spotřeba alkoholu na jednoho obyvatele v ČR rostla do roku 2004, načež začala poměrně strmě klesat až do roku 2011 a od té doby se pohybovala přibližně na stejné úrovni. Vzhledem k tomu, že pokles spotřeby piva započal před krizí v roce 2008, nemusí se jednat o vliv důchodu. Propagace zdravého životního stylu a negativních dopadů konzumace alkoholu má rostoucí vliv na společnost v novém tisíciletí a zdá se, že její efekt je významný.



Obrázek 2: Vývoj ceny piva v korunách a indexu spotřebitelských cen mezi lety 1995 a 2020 v ČR

Naopak vývoj ceny piva je k vidění na obrázku 2. Pro porovnání je také zahrnut index spotřebitelských cen s referenční hodnotou k roku 2015. Vývoj ceny piva i indexu měli ve sledovaném období lineární rostoucí trend. Cena piva ze začátku rostla o něco rychleji než cena spotřebního koše, ale v roce 2016 se ceny srovnaly. Vzhledem k tomu, že vývoj cen je lineární a spotřeba piva nikoliv, není možné při pohledu na grafy jednoznačně určit závislost mezi nimi.

## 2.2 Cenová elasticita poptávky po pivu

K odhadu cenové elasticity poptávky po pivu poslouží jednoduchý regresní model odhadovaný na logaritmických hodnotách. Jak je standardem v podobných modelech, index spotřebitelských cen je zahrnut jako kontrolní proměnná modelu. Výsledný model tedy vypadá následujícím způsobem:

$$\ln(Q_p(t)) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_p(t)) + \beta_2 \ln(CPI(t)) + \beta_3 \varepsilon(t) \quad (1)$$

kde  $Q_p(t)$  je množství vypitého piva v čase  $t$ ,  $P_p(t)$  je cena za pivo v roce  $t$ ,  $CPI$  je index spotřebitelských cen v roce  $t$  a  $\varepsilon(t)$  je náhodná složka v čase  $t$ . Logaritmováním vzorce pro výpočet cenové elasticity lze odvodit, že hodnota cenové elasticity poptávky odpovídá koeficientu  $\beta_1$  v rovnici (3).

Tabulka 1: Odhad regresního modelu cenové elasticity poptávky po pivu

	coef	std err	t	P >  t	[0,025	0,975]
<b>Konstanta</b>	4,5602	0,361	12,633	0,000	3,813	5,307
<b>ln(P<sub>p</sub>)</b>	-0,3675	0,094	-3,893	0,001	-0,563	-0,172
<b>ln(CPI)</b>	0,3387	0,140	2,417	0,024	0,049	0,629

Po odhadu regresního modelu dostáváme hodnotu cenové elasticity poptávky po pivu -0,3675, která je statisticky významná na 5 % hladině významnosti, jak je vidět v tabulce 1. K výpočtu směrodatných odchylek byla použita robustní metoda vůči heteroskedasticitě vzhledem k tomu, že je k dispozici malá množství pozorování a není splněna podmínka homoskedasticity.

Vzhledem k tomu, že průměrná elasticita poptávky po pivu v meta-analýze Wagenaara (2) byla -0,44, výsledek na českých datech se příliš neodchyluje od zbytku prací a je tedy potvrzena hypotéza, že cenová elasticita poptávky po pivu není elastická.

## 2.3 Křížová elasticita poptávky po pivu

U křížové elasticity poptávky v tomto článku sledujeme vztah mezi poptávkou po pivu a cenou tvrdého alkoholu, konkrétně rumu a cenou cigaret. Jako kontrolní proměnná opět slouží index spotřebitelských cen CPI. Odhadovaný regresní model má tento tvar:

$$\ln(Q_p(t)) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_r(t)) + \beta_2 \ln(P_c(t)) + \beta_3 \ln(CPI(t)) + \beta_4 \varepsilon(t) \quad (2)$$

kde  $P_r(t)$  je cena rumu v čase  $t$  a  $P_c(t)$  je cena cigaret v čase  $t$ .

Jelikož vztah mezi cigaretami a alkoholem nebyl v různých pracích jednoznačně shodný, nemáme zde porovnání hodnoty křížové elasticity poptávky s ostatními autory. V případě České republiky jsou pivo a cigarety komplementy, jelikož je hodnota  $\beta_2$  záporná, konkrétně je rovna -0,1731, a je statisticky významná na 5 % hladině významnosti. Zdá se také, že pivo a rum jsou komplementy, jelikož je hodnota elasticity také záporná. Nicméně tato hodnota není statisticky významná na 5 % hladině významnosti a mezi cenou rumu a poptávkou po pivu tak není statisticky významný vztah. Všechny tyto údaje jsou zapsány ve výstupu odhadnutého modelu v tabulce 2

Tabulka 2: Odhad regresního modelu křížové elasticity poptávky po pivu

	coef	std err	t	P >  t	[0,025	0,975]
<b>Konstanta</b>	5,2152	0,456	11,440	0,000	4,270	6,161
<b>ln(P<sub>r</sub>)</b>	-0,2083	0,148	-1,404	0,174	-0,516	0,099
<b>ln(P<sub>c</sub>)</b>	-0,1731	0,067	-2,577	0,017	-0,312	-0,034
<b>ln(CPI)</b>	0,3647	0,059	6,216	0,000	0,243	0,486

## 2.4 Důchodová elasticita poptávky po pivu

Poslední elasticitou, kterou se článek zabývá, je důchodová elasticita poptávky po pivu. K jejímu odhadu je opět využit regresní model s logaritmickými hodnotami v této podobě:

$$\ln(Q_p(t)) = \beta_0 + \beta_1 \ln(I(t)) + \beta_2 \ln(CPI(t)) + \beta_3 \varepsilon(t) \quad (3)$$

kde  $I(t)$  je průměrná mzda (důchod) v roce  $t$ .

V úvodu bylo uvedeno, že se ve vědeckých pracích pohybuje hodnota důchodové elasticity poptávky po pivu mezi 0,5 až 0,6. Česko je však co se konzumace piva týče velmi specifickou zemí, jelikož se jedná tradičně o zemi s jednou z nejvyšších hodnot vypitých litrů piva za rok na jednu osobu. Pivo je pevně ukotveno v kultuře Čechů a proto není překvapující výsledek důchodové elasticity poptávky, který sice vyšel záporný, jak ukazuje tabulka 3, ale zároveň statisticky nevýznamný. Znamená to tedy, že při procentuálním zvýšení či snížení důchodu se nemění množství spotřebovaného piva.

## 2.5 Souhrnná elasticita poptávky po pivu

Tabulka 3: Odhad regresního modelu důchodové elasticity poptávky po pivu

	coef	std err	t	P>  t	[0,025	0,975]
<b>Konstanta</b>	6,0191	0,111	54,320	0,000	5,790	6,248
<b>ln(I)</b>	-0,1396	0,101	-1,378	0,182	-0,349	0,070
<b>ln(CPI)</b>	0,0884	0,222	0,399	0,694	-0,370	0,547

Jelikož jsme se doteď věnovali individuálním efektům změny ceny na poptávané množství piva, nezbyvá než zjistit, jak významný vliv mají ceny na poptávku po pivu při zahrnutí všech proměnných do modelu. Tento model pak vypadá následujícím způsobem:

$$\ln(Q_p(t)) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_p(p)) + \beta_2 \ln(P_p(r)) + \beta_3 \ln(P_p(c)) + \beta_4 \ln(I) + \beta_5 \ln(CPI(t)) + \beta_6 \varepsilon(t) \quad (4)$$

Tento model je vhodný k určení statistické významnosti vlivů cen a důchodu na množství spotřebovávaného piva. Odhadnuté hodnoty koeficientů modelu jsou zapsány v tabulce 4. Potvrzuje se zde, že důchodová elasticita poptávky po pivu je opravdu statisticky nevýznamná, tedy nulová. Stejně tak se potvrzuje, že v České republice jsou cigarety a pivo komplementy, jelikož je hodnota koeficientu u logaritmické ceny cigaret záporná a statisticky významná. Ke změně došlo u samotné cenové elasticity poptávky po pivu. Tentokrát je hodnota kladná, ale zároveň statisticky nevýznamná. Nic to nemění na faktu, že poptávka po pivu je cenově neelastická.

Tabulka 4: Odhad regresního modelu elasticity poptávky po pivu

	coef	std err	t	P>  t	[0,025	0,975]
<b>Konstanta</b>	6,0858	0,872	6,980	0,000	4,267	7,904
<b>ln(P<sub>p</sub>)</b>	0,2446	0,185	1,324	0,200	-0,141	0,630
<b>ln(P<sub>r</sub>)</b>	-0,3561	0,173	-2,061	0,053	-0,716	0,004
<b>ln(P<sub>c</sub>)</b>	-0,1993	0,065	-3,051	0,006	-0,336	-0,063
<b>ln(I)</b>	0,0032	0,106	0,030	0,976	-0,219	0,225
<b>ln(CPI)</b>	0,2061	0,115	1,796	0,088	-0,033	0,445

### 3 ZÁVĚR

V článku se potvrdilo, že pivo je základním kulturním prckem České společnosti, a tedy jeho spotřeba není výrazně ovlivněna jeho cenou. Ukázalo se také, že si průměrný Čech rád dopřává k pití piva také cigaretu a zvýšení ceny cigaret vyvolá snížení spotřeby piva. Naopak mezi cenou tvrdého alkoholu a spotřebou piva nebyl prokázán statisticky významný vztah. Cílem článku bylo zjistit, jaká je cenová a důchodová elasticita poptávky po pivu a jestli jsou cigarety a tvrdý alkohol komplementy pro pivo. Všechny stanovené cíle se podařilo naplnit.



## Použitá literatura

1. GALLET, Craig A. The demand for alcohol: a meta-analysis of elasticities. *Australian Journal of Agricultural and Resource Economics*. 2007, roč. 51, č. 2, s. 121–135.
2. WAGENAAR, Alexander C; SALOIS, Matthew J; KOMRO, Kelli A. Effects of beverage alcohol price and tax levels on drinking: a meta-analysis of 1003 estimates from 112 studies. *Addiction*. 2009, roč. 104, č. 2, s. 179–190.
3. BASK, Mikael; MELKERSSON, Maria. Rationally addicted to drinking and smoking? *Applied Economics*. 2004, roč. 36, č. 4, s. 373–381.
4. TAUCHMANN, Harald; LENZ, Silja; REQUATE, Till; SCHMIDT, Christoph M. Tobacco and alcohol: complements or substitutes? A structural model approach to insufficient price variation in individual-level data. *Empirical Economics*. 2013, roč. 45, s. 539–566.
5. NELSON, Jon P. Meta-analysis of alcohol price and income elasticities—with corrections for publication bias. *Health economics review*. 2013, roč. 3, s. 1–10.
6. ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD.  
*Česká republika od roku 1989 v číslech - aktualizováno 9. 12. 2022* [online]. 2022. [cit. 2022-09-10]. Dostupné z: <https://www.czso.cz/csu/czso/ceska-republika-od-roku-1989-v-cislech-aktualizovano-9122022>.
7. ZEMĚDĚLEC.  
*Poměr spotřeby lahvových piv a sudových je v ČR zhruba vyrovnaný* [online]. 2015. [cit. 2022-09-10]. Dostupné z: <https://zemedelec.cz/pomer-spotreby-lahvovych-piv-a-sudovych-v-cr-zhruba-vyrovnany/>.

## Kontakt

Ing. Jakub Neugebauer

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. Winstona Churchilla 1938/4, 120 00 Praha 3-Žižkov

Tel: +420 725 516 362

email: [jakub.neugebauer@vse.cz](mailto:jakub.neugebauer@vse.cz)

# VLIV VIDEOHER NA EKONOMICKÝ RŮST

## THE EFFECT OF VIDEO GAMES ON ECONOMIC GROWTH

*Jan Rejthar<sup>1</sup>*

### **Abstrakt**

Tento článek zkoumá makroekonomický dopad videoher na ekonomický růst pomocí Barrova růstového modelu a panelové analýzy dat. Vlastnictví videoherní konzole vykazuje nejednoznačný účinek, přičemž účinek je negativní, když počet domácností vlastnících videoherní konzoli je nižší než 50 %, a pozitivní, když je vyšší než 50 %. Článek dochází k závěru, že videohry zvyšují ekonomický růst prostřednictvím lidského kapitálu, jakmile se spotřeba videoher stane dostatečně velkou součástí společnosti.

***Klíčové slová:** video hry, ekonomický růst, lidský kapitál*

### **Abstract**

This paper explores the macroeconomic impact of video games on economic growth using Barro's growth model and panel data analysis. Video game console possession exhibits an ambiguous effect, with the effect being negative when the possession of video games console as a percentage of households is below 50% and positive when beyond 50%. The paper concludes that video games increase economic growth via human capital once video games consumption are large enough part of society.

***Keywords:** video games, economic growth, human capital*

## **1 INTRODUCTION**

Video games have been around for decades and have become a worldwide phenomenon (Kent, 2010). According to ESA (2018), 60% of Americans play videogames daily with the average playtime of 24 hours per week according to a self-selected dataset of video game players (Ghuman & Griffiths, 2012). Suziedelyte (2015) found, that in the USA, 43% of children 10-18 years old play video games every day or almost every day and found a plausibly causal effect of video game playing on problem solving ability comparable to the effect of educational activities. Additionally, Hinnant (2013) argues that video games have been replacing sports in its vital role of life preparation using concept of sentimental education.

The existing economic research has been mostly microeconomic based, hence this paper attempts to consider influence of video games through the macroeconomic lenses. The aim is to determine whether videogames influence economic growth through investment into human capital. While the above-mentioned literature would suggest so, it is a time-consuming activity, hence there is a possibility of too high opportunity cost or drawbacks such as health issues resulting from sedentary lifestyle. To assess the role of video games in economic growth, a reduced Barro's growth model will be used (Barro, Sala-i Martin, et al., 2004).

---

<sup>1</sup> This work was supported by The Internal Grant Agency of Prague University of Economics and Business under Grant VŠE IGS F4/52/2023.

## 2 DATA

The analysis was performed on yearly data about 72 countries from 1995 to 2017. Yearly ones were used as some of the indicators are not published quarterly. Countries with missing data were excluded and China was excluded for highly suspicious values. The data were obtained from two sources. Gross domestic product (GDP) per capita growth, inflation rate, net export as a percentage of GDP, government expenditures as a percentage of GDP, saving rate, life expectancy and average number of years of secondary education were obtained from The World Bank Database. Possession of video games console as a percentage of households was obtained from the Passport database. The effect of video games on economic growth is expected to be positive. Inflation rate and government expenditures as percentage of GDP are expected to have a negative effect, while saving rate, net export as percentage of GDP, life expectancy and average number of years of secondary education are expected to have a positive effect.

## 3 METHODOLOGY

### 3.1 Model selection

As discussed in the introduction, the analysis of the influence of video games on economic growth is macroeconomic based, therefore, panel data analysis with hidden heterogeneity was used.

### 3.2 Model specification

To assess the influence of video games on economic growth, the following economic model was considered:

$$GDPPCGROWTH = f(INFLATION, EXPORT, GOVERNMENT EXPEDITURES, SAVINGS, HUMAN CAPITAL) \quad (1)$$

Immeasurable variables needed to be substituted by proxy variables for the model estimation. Furthermore, a dummy variable for the year 2009, when the Great recession hit, was added. Consequently, the variable labeling was altered for the purpose of making the equations more clearly arranged. Therefore, following econometric panel data model was estimated:

$$GDPPCGROWTH_{it} = \alpha + \beta_1 INFLATION_{it} + \beta_2 EXPORT_{it} + \beta_3 GEXPEDITURES_{it} + \beta_4 SAVINGS_{it} + \beta_5 LEXPECTANCY_{it} + \beta_6 EDUCATION_{it} + \beta_7 CONSOLEPOSSESSION_{it} + \beta_8 CONSOLEPOSSESSION^2_{it} + \gamma D09 + u_{it} \quad (2)$$

where *GDPPCGROWTH* stands for GDP per capita growth, *INFLATION* for inflation rate, *EXPORT* for net export as percentage of GDP, *GEXPEDITURES* for government expenditures as percentage of GDP, *SAVINGS* for saving rate, *LEXPECTANCY* for life expectancy, *EDUCATION* for average number of years of secondary education and *CONSOLEPOSSESSION* for possession of video games console as percentage of households. Although, the number of time periods is smaller, than the number of cross-sectional observations, stationarity was tested by ADF tests. All series came out as stationary at the 5% significance level, as might had been expected, considering most of the series are 1st differences. It was necessary to determine, whether fixed effects of random effects should be used. Hausman test as well as correlated random effects estimates suggested using fixed

effects at the level of significance 5%. The model consists of no time invariant variable, thus fixed effects were able to estimate all variables in the model.

Panel data estimation requires the absence of strong imperfect multicollinearity, as it brings large standard errors and thus errors of II. type could arise. Strong multicollinearity was suspected, as the model consist of quadratic term, and VIF confirmed that suspicion, as  $VIF > 10$  for  $CONSOLEPOSSESSION^2$ , which is a value often considered, to be too severe (Ringle, Wende, & Becker, 2015). It was dealt with by centering the  $CONSOLEPOSSESSION$  variable around its mean 11.555.

Autocorrelation is a frequent issue in panel data analysis. Breusch–Godfrey test for autocorrelation in panel data suggested presence of autocorrelation at the 5% significance level, therefore, Arellano’s robust standard errors were calculated.

## 4 RESULTS

As the model was estimated using fixed effects, intercept disappeared from the model. There is also no interpretable  $R^2$ . Table 1 shows all coefficients except  $LEXPECTANCY$  to be statistically significant at the level of significance 5%.

**Table 1 Estimates of the model**

	Log(odds) of Dependent variable:
INFLATION	-0.032*** (0.003)
EXPORT	0.023* (0.009)
GEXPENDITURES	-0.105* (0.048)
SAVINGS	0.142*** (0.018)
LEXPECTANCY	-0.029 (0.051)
EDUCATION	1.269*** (0.352)
CONSOLEPOSSESSION <sub>demeaned</sub>	-0.077** (0.028)
CONSOLEPOSSESSION <sup>2</sup> <sub>demeaned</sub>	0.001* (0.001)
YEAR2009	-4.825*** (0.352)
Observations	1656
F Statistic	55.075*** (df = 9; 1575)
<i>Note:</i> * p < 0.05; ** p < 0.01; *** p < 0.001	
<i>Arellano’s robust standard errors reported in the parentheses.</i>	

*INFLATION* has a negative sign, as expected, thus an increase of 1 percentage point in inflation rate results in decrease of 0.032 percentage points in GDP per capita growth. *EXPORT* has a positive sign, as expected, thus an increase of 1 percentage point in net export as percentage in GDP results in increase of 0.023 percentage points in GDP per capita growth. *GEXPENDITURES* has a negative sign, as expected, thus an increase of 1 percentage point in government expenditures as percentage of GDP results in decrease of 0.105 percentage points in GDP per capita growth. *SAVINGS* has a positive sign, as expected, thus an increase of 1 percentage point in net export as percentage in GDP results in increase of 0.142 percentage points in GDP per capita growth. *LEXPECTANCY* is not statistically significant at the level of significance 5%, which is an unexpected result. *EDUCATION* has a positive sign, as expected, thus an increase of 1 year in average number of years of secondary education results in increase of 1.269 percentage points in GDP per capita growth. *YEAR2009* has a negative sign, as expected, thus in the year 2009 and after, GDP per capita growth decreased compared to the prior years on average for about 4.825 percentage points.

*CONSOLEPOSSESSION<sub>demeaned</sub>* has a quadratic form, and its average marginal effect is -0.077 as its mean is 0. Thus, an increase of 1 percentage point over the mean in video game consoles possession increase results in decrease of 0.077 percentage points in GDP per capita growth. *CONSOLEPOSSESSION<sub>demeaned</sub>* has thus opposite average effect to the one expected. However, while the average marginal effect is negative, the quadratic form has a U shape and thus the effect starts to be positive from the point of global minimum. The global minimum of *CONSOLEPOSSESSION<sub>demeaned</sub>* is 50, thus once the percentage of households possessing a console exceeds 50%, the effect starts to be positive. Granger causality test suggests, that *CONSOLEPOSSESSION<sub>demeaned</sub>* Granger cause *GDPPCGROWTH* at the statistical significance of 5%, which is not the case in the opposite direction, which strengthen the result.

## 5 CONCLUSION

The results confirm the results of Barro et al. (2004) about the positive effects of export, savings, and education together with negative effects of inflation and government expenditures on GDP per capita growth. It also confirms the negative effect of the Great recession. Life expectancy does not show statistically significant effect on GDP per capita growth which was unexpected. However, the results are in accordance with Acemoglu and Johnson (2007). One explanation might be, that while life expectancy is a correct proxy measure of human capital and it is correlated with GDP per capita, the speed of growth might be decreasing with the value of GDP per capita, as suggested by Solow (1956).

Console possession has, according to the results, an ambiguous effect. For the values up to 50%, the effect is negative, while for the values over 50%, the effect is positive. Thus, video games seem to increase economic growth via human capital once video games are large enough part of society.

However, there might be alternative explanations. This result might be partially explained by a possible shortcoming of the paper. The analysis uses console possession as a variable, while playtime might be the real variable of interest. It might be the case that when the possession of gaming console is low, owning a console might be just an accessory or a gadget for a very rare leisure activity that is limited to high income households. In such a case, the average opportunity costs might be too high.

On the other hand, once the console possession exceeds a tipping point, the average playtime significantly increases and the cumulative effects kick in, therefore, positive influence of videogames laid out by Suziedelyte (2015) and Hinnant (2013) overpowers their possible

drawbacks. It might also be strengthened by the idea of learning by accident in presence of heterogeneity. The high-income households possess high level of human capital, while low-income households possess low level of human capital, therefore, when the tipping point is exceeded, there is enough low-income households, that the investment through learning by accident becomes significant.

The paper might suffer from another possible shortcoming, which is the difference among consoles. The console possession treats all consoles as identical in relevant characteristics, however, that might easily not be the case. Firstly, some might be more engaging and interesting, thus people would use them more, and countries, where the more interesting consoles are prevalent, would experience higher average playtime with the same video games console possession percentage. Secondly, some consoles might be suitable for more complex games and applications, thus some consoles might be more effective, when it comes to increasing human capital. Thus again, countries with higher prevalence of those type of consoles might experience more significant effect on human capital and vice versa.

### Literature

1. Acemoglu, D., & Johnson, S. (2007). Disease and development: the effect of life expectancy on economic growth. *Journal of political Economy*, 115 (6), 925–985.
2. Barro, R., Sala-i Martin, X., et al. (2004). Economic growth.
3. ESA (2018). Sales, demographic and usage data: Essential facts about the computer and video game industry. Retrieved from [https://www.theesa.com/wp-content/uploads/2019/03/ESA\\_EssentialFacts\\_2018.pdf](https://www.theesa.com/wp-content/uploads/2019/03/ESA_EssentialFacts_2018.pdf)
4. Ghuman, D., & Griffiths, M. (2012). A cross-genre study of online gaming: Player demographics, motivation for play, and social interactions among players. *International Journal of Cyber Behavior, Psychology and Learning (IJCBL)*, 2 (1), 13–29.
5. Hinnant, N. C. (2013). Practicing work, perfecting play: League of legends and the sentimental education of e-sports.
6. Kent, S. L. (2010). The ultimate history of video games: Volume two: from pong to pokemon and beyond... the story behind the craze that touched our lives and changed the world. Three Rivers Press.
7. Ringle, C. M., Wende, S., & Becker, J.-M. (2015). Smartpls 3. *Boenningstedt: SmartPLS GmbH*.
8. Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The quarterly journal of economics*, 70 (1), 65–94.
9. Suziedelyte, A. (2015). Media and human capital development: Can video game playing make you smarter? *Economic inquiry*, 53 (2), 1140–1155.

### Kontaktné údaje

Ing. Jan Rejthar

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3 – Žižkov

Tel: (420 7) 73 276 790

email: jan.rejthar@vse.cz

# APLIKAČNÉ VYUŽITIE PRIESTOROVÝCH HIER

## APPLIED USE OF SPATIAL GAMES

*Allan Jose Sequeira Lopez, Zuzana Čičková*

### Abstrakt

Priestorová konkurencia sa v zásade zaoberá vzťahmi vzájomnej závislosti medzi subjektmi v prostredí nedokonalkej konkurencie a úzko súvisí s problémom lokalizácie, teda najlepšieho umiestnenia (výrobných závodov, distribučných centier, predajných miest, maloobchodných centier, záchranných centier, serverov v počítačovej sieti, komponentov sériovej výrobnjej prevádzky, stredísk na zber a spracovanie odpadu alebo čohokoľvek iného). Takáto široká špecifikácia umožňuje aplikovať modely priestorovej konkurencie vo viacerých oblastiach. Subjekty rozhodujúce sa o lokalizácii zvažujú vlastný cieľ (s ohľadom na správanie sa protihráčov), pričom však ich rozhodnutia môžu byť ovplyvnené štátnou reguláciou.

*Kľúčové slová: priestor, konkurencia, teória hier*

### Abstract

Spatial competition fundamentally deals with the relationships of mutual dependence among entities in an environment of imperfect competition and is closely related to the problem of localization, i.e., the optimal placement of facilities (production plants, distribution centers, sales points, retail centers, emergency centers, servers in a computer network, components of serial production operations, waste collection and processing centers, or anything else). Such a broad specification allows the application of spatial competition models in multiple areas. Entities deciding on localization consider their own objectives (in relation to the behavior of competitors), but their decisions can be influenced by state regulation.

*Keywords: space, competition, game theory*

## 1 ÚVOD

Pojem priestorová hra sa používa na označenie tých problémov, v ktorých rozhodujeme o umiestnení viacerých objektov. Najznámejšie aplikácie sú jednoznačne v oblasti hospodárskej súťaže, v ktorých má určitý počet spoločností v úmysle vstúpiť na trh, pričom sa rozhoduje najmä o umiestnení, ale aj o cenovej alebo výrobnjej politike. Tento pojem môže tiež označovať situácie, keď sa analyzujú firmy už pôsobiace na danom trhu z hľadiska ich vzájomných vzťahov a ich zmien týchto vzťahov v čase. Analýza rovnováhy umožňuje určiť takú situáciu, kedy žiadna spoločnosť nebude motivovaná k zmene. Na tých trhoch, v ktorých už existujú etablované spoločnosti, priestorové hry umožňujú analyzovať konkurenciu medzi týmito spoločnosťami, pričom rovnováha predstavuje v tomto prípade určitú referenčnú situáciu, s ktorou možno porovnávať súčasné postavenie jednotlivých spoločností na trhu. V tomto príspevku uvidíme niekoľko oblastí aplikácie priestorových modelov teórie hier a ich ovplyvňovanie regulačnou entitou.

## 1.1 Oblasti využitia priestorových modelov

Mestá a mestské prostredie poskytujú viaceré živé príklady toho, ako majú externality podnikov vplyv na spoločnosť ako celok. V niektorých prípadoch sa verejná intervencia môže stať mechanizmom na asimiláciu negatívnych externalít, ako je napríklad znečistenie životného prostredia alebo nedostatok priestoru na bývanie. Regulačné orgány môžu určiť rozsah niektorých zakázaných oblastí v závislosti od rôznych faktorov. Napríklad staré mestá s dobre zachovaným historickým centrom môžu pri určitých príležitostiach podporovať osobitnú reguláciu pre spoločnosti nachádzajúce sa v uvedenom „starom meste“. Zónovanie sa používa ako spôsob izolácie negatívnych externalít (ako napríklad znečistenie) mimo verejných statkov, ktoré sa vo všeobecnosti nachádzajú v týchto oblastiach. Súčasne môžu úrady zachovávať oblasti kvality života pre svojich obyvateľov a turistov s úmyslom získať politický vplyv (hlasy obyvateľov), prípadne ekonomické zisky. Aktivity regulačných orgánov v tomto prípade závisia od ich politickej zaujatosti a voličskej základne. Regulátori, ktorí si želajú, aby boli uspokojené požiadavky spotrebiteľov, prijímajú svoje rozhodnutie s prihliadnutím na zónovania bytových potrieb a/alebo negatívne externality (aglomerácie populácie alebo znečistenia životného prostredia). Na druhej strane, ak sú regulátori viac naklonení k uspokojeniu záujmov podnikateľov, dávajú menší dôraz na tento typ externalít s cieľom uľahčiť ich lokalizáciu. Je zaujímavé, že keď sa regulátor zaujíma len o spotrebiteľov, voľný vstup firiem na zvýšenie konkurencie a umiestnenie spotrebiteľov založené na endogénnych kritériách môže vytvoriť optimálny prístup k dobrým životným podmienkam.

Rovnako pobrežné mestá, ktorých hlavným zdrojom príjmov je cestovný ruch, môžu kontrolovať počet a umiestnenie spoločností v blízkosti pláží, aby boli tieto voľné a izolované od nadmerného hluku a znečistenia. Umiestnenie nákupných centier v blízkosti diaľničného obchvatu veľkých miest, ako napríklad Los Angeles alebo Miláno, je strategickým rozhodnutím, ktoré by mohlo byť podmienené obmedzeniami zónovania. Mnohé veľké mestá, ako napríklad Nové Dillí, Mexiko D.F., Sao Paulo alebo Paríž, využívajú zónovanie ako politický nástroj na reguláciu dopravy (t. j. obmedzenie vstupu automobilov do centra mesta). Tento typ politiky efektívne triumfuje voči spoločnostiam prostredníctvom regulácie tým, že ich núti umiestniť svoje aktivity do neregulovaných oblastí. V dôsledku toho môže byť zónovanie užitočným nástrojom na navrhovanie urbanizmu mesta alebo na rozvoj industrializačných politík; môže to mať nepriaznivé účinky, ak sa implementuje nesprávne. Neprítomnosť regulácie a voľný vstup spoločností môže byť za určitých špecifických okolností optimálnou politikou z hľadiska sociálneho zabezpečenia.

Pri implementácii zónovania však orgány musia nájsť také regulačné nástroje (ako strategické rozhodnutia o umiestnení), ktoré im umožnia účinne znížiť škodlivé účinky vonkajších faktorov. Autori ako Mills (1989), Henderson (1991), Miceli (1992) a Wheaton (1993) ukázali, že zónovanie môže byť užitočným urbanistickým nástrojom.

## 1.2 Modelový základ priestorových hier

Prvú formálnu diskusiu o probléme s konkurenciou predstavuje práca Cournota publikovaná v roku 1838 (Cournot, 1838), kde sa zvažuje model duopolu, v ktorom spoločnosti rozhodujú o svojej úrovni produkcie. V roku 1883 Bertrand zavádza konkurenciu prostredníctvom cien ako alternatívu ku konkurencii prostredníctvom množstva.

Napriek tomu, prvú analýzu zahrňujúcu lokalizáciu predstavuje práca Hotellinga (Hotelling, 1929). V tejto práci Hotelling skúma stratégie dvoch konkurentov v oblasti ceny a umiestnenia na lineárnom trhu. Tento model má veľký význam v ekonomickej literatúre, kde na jeho základe vzniká dôležitá skupina prác, ktoré analyzujú polohu firmy z hľadiska preferencií spotrebiteľov (Colombo, 2013). Ako je uvedené v úvodných kapitolách tejto



práce, úvahy tohto modelu sú stále aktuálne, a to predovšetkým zrejme vzhľadom na počet publikácií, ktoré sa touto témou zaoberajú v zahraničnej, ale aj slovenskej literatúre.

Modely priestorovej konkurencie, najmä tie, ktorých základom je model Hotellinga, poskytujú základ pre analýzu politiky zónovania. Konfigurácia Hotellinga poskytuje dva základné predpoklady: duopol a rovnomerné rozdelenie spotrebiteľov. Jeho alternatívy umožňujú modelovať komplexnejšie vzťahy, napríklad vstup väčšieho počtu firiem, aby sa dosiahli situácie konkurencie oligopolu. Economides (1993) uvádza, že rovnováha v lokalizácii neexistuje v lineárnom modeli Hotellinga práve vtedy, keď sa počet firiem zvýši na tri a viac, pretože firmy majú tendenciu byť v strede (v silnom postavení) a na zásade minimálnej diferenciácie, ktorá zabraňuje rovnováhe, keď obsluži celý trh. Napriek tomu sa v kruhovom prípade rovnováha objaví, ak nie sú pod touto priestorovou konfiguráciou žiadne hranice. Bol skúmaný tiež sekvenčný vstup firiem, a to najmä v publikácii Nevena (1987), ktorý ukazuje, že spoločnosti, ktoré prichádzajú na trh ako prvé, sú umiestnené v strede trhu a obmedzia neskoršieho konkurenta v umiestnení medzi nimi. Konkurenciu so sekvenčným vstupom rieši aj Gupta (1992) v širokom spektre tým, že predpokladá perfektnú prognózu zo strany firiem. Anderson a Neven (1990) pri modelovaní hry Stackelberga pre umiestnenie firiem ponúka alternatívne vysvetlenie: rovnováha sa objavuje vtedy, keď je prvá spoločnosť umiestnená v strede, pričom si zachováva väčšie zisky ako zvyšok firiem.

Výskum v oblasti priestorovej konkurencie zahŕňa úlohu regulátora prostredníctvom štúdie o optimálnej polohe podnikov, veľkosti regulovaných oblastí, rovnováhy cien, využívania pôdy, vplyvov na sociálnu starostlivosť, a podobne. Lai a Tsai (2004) skúmajú lineárny mestský model Hotellinga s obmedzeniami na umiestnenie spoločností, čo dokazuje, že princíp maximálnej diferenciácie je overený v rámci konkurencie à la Bertrand, a že sa spoločenský blahobyt zvyšuje. Na druhej strane Tsai a kol. (2006) analyzujú, ako zónovanie ovplyvňuje umiestnenie spoločností a príjmy z nízkej konkurencie à la Cournot, taktiež rozoberajú účinky symetrického zónovania v lineárnom modeli, pričom dospeli k záveru, že spoločenský blahobyt môže byť zvýšený zavedením regulovanej oblasti prostredníctvom zónovej politiky. Matsumura a Matsushima (2011) stanovujú obmedzenia týkajúce sa umiestnenia spoločností a analyzujú dôsledky na kvalitu života spotrebiteľov v modeli súvisiacom s rozptýlením miest s cieľom určiť povolený rozmer hospodárskej činnosti.

Hamoudi a Risueño (2012) sa venovali kruhovému modelu, v ktorom sú spotrebiteľia a podniky umiestnené v oddelených častiach mesta, analyzovali umiestnenie rovnováhy v prípade konkávnych nákladov na prepravu. Ďalej predstavujú funkciu sociálneho blahobytu na meranie vplyvu zónovania a ukazujú, že hospodárska súťaž bude silná, mierna alebo slabá v závislosti od politických preferencií regulátora.

Napokon, Hamoudi a kol. (2015) uskutočňujú porovnanie zónovania a nezónovania v kruhovom modeli s konkávnymi a konvexnými nákladmi na prepravu. V neregulovanom prípade závisí ekvivalencia medzi typmi nákladových funkcií na dĺžke trhu; v regulovanom prípade sa skúma pevná dĺžka a ukáže sa, že neexistujú žiadne ekvivalenty medzi dvomi typmi prepravných nákladov, pričom existuje rovnováha, keď sú náklady konkávne. Naopak, rovnováha neexistuje v prípade konvexných nákladov na prepravu.

## **Záver**

Otázky lokalizácie sú stále aktuálne a ich modelovanie úzko súvisí s oblasťou teórie hier. Aplikácie sú v centre záujmu nielen ekonómov, ale aj odborníkov z rôznych iných oblastí (informatika, architektúra, logistika a podobne). Lokalizácia podnikov, obslužných centier, recyklačných centier a podobne ovplyvňuje plnenie hospodárskych alebo sociálnych cieľov.

Vo všeobecnosti možno povedať, že téma priestorovej konkurencie je zameraná najmä na konkurenciu medzi spoločnosťami, ale tiež na situácie, v ktorých sa snažíme maximalizovať sociálne blaho. Podľa nášho názoru ide o jeden z kľúčových prvkov fungovania akéhokoľvek trhu. V tomto príspevku sme uviedli niekoľko vybraných aplikačných oblastí priestorových hier a tiež relevantné práce zamerané na matematické modely, ktoré umožňujú ich riešenie.

**Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0115/23 Aplikácie kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a v medzinárodných vzťahoch**

### **Použitá literatúra**

1. ANDERSON, S. P. - NEVEN, D. J. 1990. *Spatial competition a la Cournot: price discrimination by quantity-setting oligopolists*. Journal of Regional Science. s.l.: Blackwell Publishing Ltd, 1990. 30(1). DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.1990.tb00077.x>.
2. COLOMBO, S. 2013. Cartels in the unidirectional Hotelling model. Economic Modelling. Amsterdam: Elsevier, 2013. Zv. 31, C. ISIN: 0264-9993.
3. COURNOT, A. A. 1838. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses (Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth). s.l.: L'Universite Royale de France, 1838.
4. ECONOMIDES, N. 1993. *Hotteling's "Main Street" with More Than Two Competitors*. Journal of Regional Science. 1993. 33(3). ISIN: 0022-4146. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.1993.tb00228.x>.
5. GUPTA, B. 1992. *Sequential entry and deterrence with competitive spatial price discrimination*. Economics Letters. 1992. 38(4).
6. HAMOUDI, H. - RISUEÑO, M. 2012. *The effects of zoning in spatial competition*. Journal of Regional Science. 2012. 52(2).
7. HAMOUDI, H. - RODRÍGUEZ IGLESIAS, I. M. - MARTÍN-BUSTAMANTE, M.S. 2015. *The equivalence of convex and concave transport cost in a circular spatial model with and without zoning*. Estudios de economía. 2015. 42(1).
8. HENDERSON, J.V. 1991. *Optimal regulation of land development through price and fiscal controls*. Journal of Urban Economics. 1991. 30(1).
9. HOTELLING, H. 1929. *Stability in Competition*. s.l.: The Economic Journal, 1929.
10. LAI, F.C. - TSAI, J.F. 2004. *Duopoly locations and optimal zoning in a small open city*. Journal of Urban Economics. 2004. 55(3).
11. MATSUMURA, T. - MATSUSHIMA, N. 2011. *Collusion, agglomeration, and heterogeneity of firms*. Games and Economic Behavior. 2011. 72(1).
12. MICELI, T.J. 1992. *Optimal fiscal zoning when the local government is a discriminating monopolist*. Regional Science and Urban Economics. 1992. 22(4).
13. MILLS, D.E. 1989. *Is zoning a negative-sum game?* Land Economics. 1989. 65(1).
14. NEVEN, D.J. 1987. *Endogenous sequential entry in a spatial model*. International Journal of Industrial Organization. 1987. 5(4).
15. TSAI, J.F. - PENG, S.K. - LAI, F.C. 2006. *Spatial duopoly with zoning*. The Annals of Regional Science. 2006. 40(3).
16. WHEATON, W.C. 1993. *Land capitalization, Tiebout mobility, and the role of zoning regulations*. Journal of Urban Economics. 1993. 34(2).

### **Kontaktné údaje**

Ing. Allan Jose Sequeira Lopezák, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 6 7295 177  
email: [allan.lopez@euba.sk](mailto:allan.lopez@euba.sk)

doc. Ing. Zuzana Čičková , PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 6729 5820  
email: [zuzana.cickova@euba.sk](mailto:zuzana.cickova@euba.sk)

# VLASTNOSTI KONEČNĚ VELKÝCH VZORKŮ A MONTE CARLO PERFORMANCE GARCH MODELŮ

## THE FINITE SAMPLE PROPERTIES AND MONTE CARLO PERFORMANCE OF GARCH MODELS

*Tereza Singerová*

### **Abstrakt**

Tato práce se zabývá srovnáním tří modelů pro odhad podmíněné volatility na základě konečných vlastností vzorku a simulaci Monte Carlo. Jedná se o modely GARCH, robustní GARCH a QGARCH. Článek používá simulované datové soubory různých velikostí a hodnotí modely pomocí dvou kritérií: Hellingerovy vzdálenosti a Kullback-Leiblerovy divergence. Práce také ukazuje grafické rozložení odhadovaných parametrů pro různé velikosti vzorku. Cílem práce je poskytnout základní analýzu toho, jak jsou odhady distribuovány napříč modely, a nabídnout několik praktických návodů pro výběr nejvhodnějšího modelu pro empirické aplikace, zejména u menších vzorků.

***Klíčová slova:** GARCH, robustní GARCH, QGARCH, Monte Carlo*

### **Abstract**

This paper compares the finite sample properties and Monte Carlo performance of three models for estimating conditional volatility: the GARCH model, the robust GARCH model and the QGARCH model. The paper uses simulated datasets of different sizes and evaluates the models based on two criteria: the Hellinger distance and the Kullback-Leibler divergence. The paper also illustrates the graphical distribution of the estimated parameters across the different sample sizes. The paper aims to provide a basic analysis of how estimators are distributed across models and to offer some practical guidance for choosing the most suitable model for empirical applications, especially for smaller samples.

***Keywords:** GARCH, robust GARCH, QGARCH, Monte Carlo*

## **1 INTRODUCTION**

In this paper, I delve into the finite sample properties and Monte Carlo performance of three models for modeling time-series data with conditional heteroskedasticity: the GARCH model, the robust GARCH model, and the QGARCH model. This is crucial as GARCH models are widely used in econometrics and finance to model time series data.

The motivation for this study stems from the need to have reliable and robust models for financial forecasting. The GARCH model, with its ability to handle volatility clustering, is a popular choice among researchers and practitioners alike. However, its performance can vary depending on the sample size and other factors. By studying its finite sample properties, I aim to provide insights that can help improve its application in real-world scenarios.

Sample sizes such as 100 or 250 could be considered large enough. After all, in the financial sphere, these could be working-day dates for the whole year. However, it turns out that the distribution of parameters is significantly wide for these smaller samples when using GARCH models.

I use Monte Carlo simulations, a powerful tool that allows us to observe the behavior of GARCH models under controlled conditions. Through these simulations, we can analyze how changes in parameters or initial conditions affect the model's performance.

Therefore I apply three different GARCH models to thousands of simulated data sets with different sample sizes ( $T = 100$ ,  $T = 250$  and  $T = 1500$ ). Then I compare their performance using two measures of divergence: the Hellinger distance and the Kullback-Leibler divergence. The Hellinger distance measures the dissimilarity between two probability distributions, while the Kullback-Leibler divergence measures the information loss when one distribution is used to approximate another. These measures allow me to quantify the difference between the true model and the estimated model, providing a picture of how well our GARCH models are performing.

To see how sample size affects these metrics, I simulate samples of size between 10 and 1500 and compared them with a large sample ( $T = 1500$ ) that I use in this work.

## 2 MONTE CARLO SIMULATIONS

I applied three models: GARCH model, robust GARCH model and QGARCH model, with the specifications given in the equation. I set the parameters  $\omega = 0.1$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.7$  and  $\gamma = 0.1$  (for QGARCH only) and simulated datasets with different sample sizes ( $T = 100$ ,  $T = 250$  and  $T = 1500$ ). I estimated the model parameters using the maximum likelihood method and repeated the Monte Carlo simulation 1,000 times. Then I plotted the distributions of the estimated parameters.

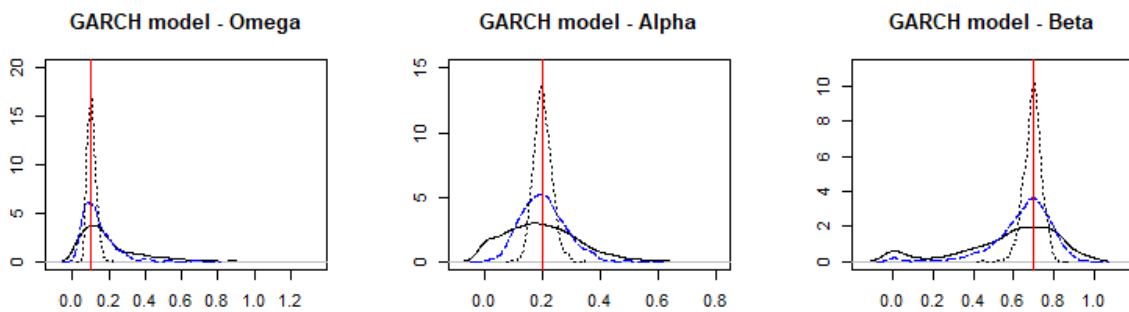
### 2.1 GARCH model

As a representative of GARCH models, I choose GARCH(1,1) with equation 1 and used it to simulate 1000 Monte Carlo simulations for three differently sized samples of the initial data. Subsequently, I have visualized the distribution of parameter estimations, see Figure 1.

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \text{ where } \varepsilon_t \sim \text{NID}(0, 1) \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha x_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2)$$

Figure 1: Distribution of parameters at different  $T$  for GARCH model



( $T=100$  full black line,  $T=250$  blue dashed line,  $T=1500$  black dotted line)

### 2.2 Robust GARCH model

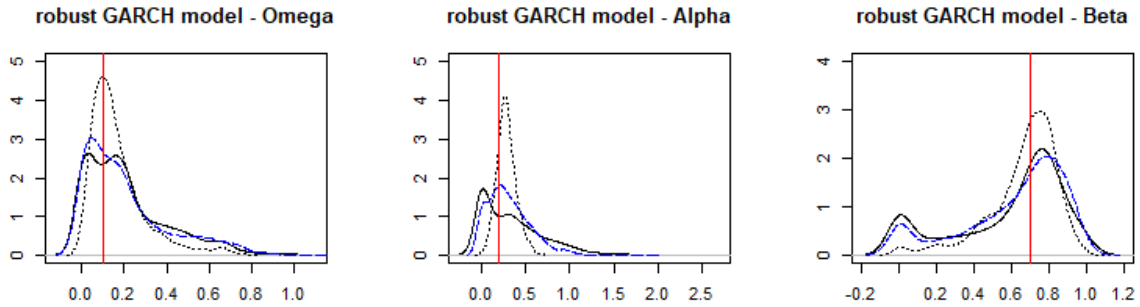
As a representative of Robust GARCH models, I choose GARCH(1,1) with tanh function with equation 3 and used it to simulate 1000 Monte Carlo simulations for three differently

sized samples of the initial data. Subsequently, I have visualized the distribution of parameter estimations, see Figure 2.

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \text{TID}(0, 7) \tag{3}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \tanh(x_{t-1}^2) + \beta \sigma_{t-1}^2 \tag{4}$$

Figure 2: Distribution of parameters at different  $T$  for robust GARCH model



( $T=100$  full black line,  $T=250$  blue dashed line,  $T=1500$  black dotted line)

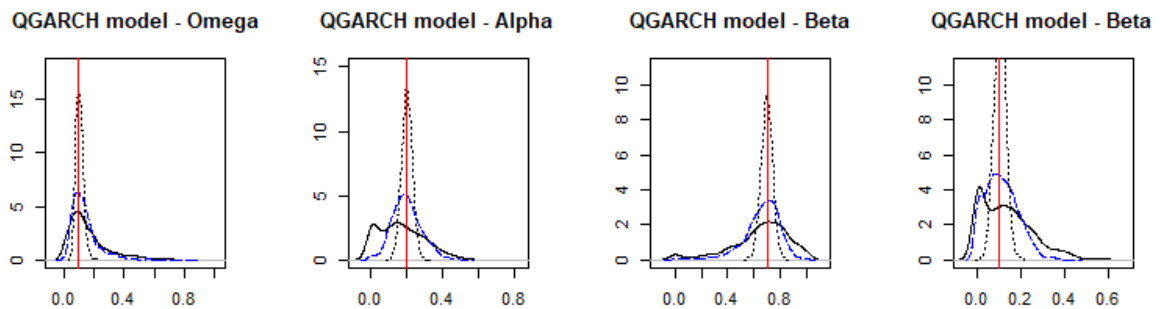
### 2.3 QGARCH model

As a representative of QGARCH models, I choose its simplified version (see equation 5) from Blasques (2019, p. 146), with which we worked in the seminar and used it to simulate 1000 Monte Carlo simulations for three differently sized samples of the initial data. Subsequently, I have visualized the distribution of parameter estimations, see Figure 3.

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \text{ where } \varepsilon_t \sim \text{NID}(0, 1) \tag{4}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha x_{t-1}^2 + \gamma x_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2 \tag{5}$$

Figure 3: Distribution of parameters at different  $T$  for QGARCH model



( $T=100$  full black line,  $T=250$  blue dashed line,  $T=1500$  black dotted line)

### 3 MEASURES OF DIVERGENCE

To compare the distributions of small (T=100 and T=250) and large (T=1500) samples more statistically, I used measures of divergence such as the Hellinger distance and the Kullback-Leibler divergence. These measures show how much the distributions of the estimators differ from each other.

#### 3.1 Hellinger distance

Hellinger distance is a measure of similarity between two probability distributions. It is defined as the square root of one minus the Hellinger integral, which is the sum of the squared differences between the square roots of the probabilities of each possible outcome. It was specified by Hellinger (1909) and can be calculated using this equation:

$$H(P, Q) = \sqrt{1 - \sum_{x \in X} \sqrt{P(x)Q(x)}}$$

where P and Q are two probability distributions over a discrete set X. The Hellinger distance ranges from 0 to 1, where 0 means the distributions are identical and 1 means they are completely different. In this seminar paper I use the already built-in function `hellinger` from package `statip` in the R software (Cornillon et al., 2021).

*Table 1: The effect of sample size on the Hellinger distance of different models*

Sample sizes	GARCH		Robust GARCH		QGARCH	
	100 x 1500	250 x 1500	100 x 1500	250 x 1500	100 x 1500	250 x 1500
Omega	0.588	0.454	0.220	0.210	0.554	0.438
Alpha	0.580	0.407	0.511	0.361	0.620	0.439
Beta	0.585	0.431	0.229	0.201	0.578	0.445
Gamma	-	-	-	-	0.587	0.454

#### 3.2 Kullback-Leibler divergence

Kullback-Leibler divergence, also known as relative entropy or information divergence, was specified by Kullback et al. (1951) and it is a measure of how different two probability distributions are, and how much information is lost when one distribution is used to approximate another. The Kullback-Leibler divergence of Q from P is defined as:

$$D_{KL}(P||Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

for two continuous distributions, where p and q are the probability density functions of P and Q respectively. The Kullback-Leibler divergence has many applications in statistics, information theory, machine learning, and other fields. It can be used to measure the information gain or loss when updating beliefs, to compare 5 different models or hypotheses, to perform model selection or parameter estimation, to quantify the complexity or randomness

of a system, and more. In this seminar paper I use the already built-in function `KLdiv` from package `flexmix` in the R software (Leisch et al., 2021).

*Table 2: The effect of sample size on the Kullback-Leibler divergence of different models*

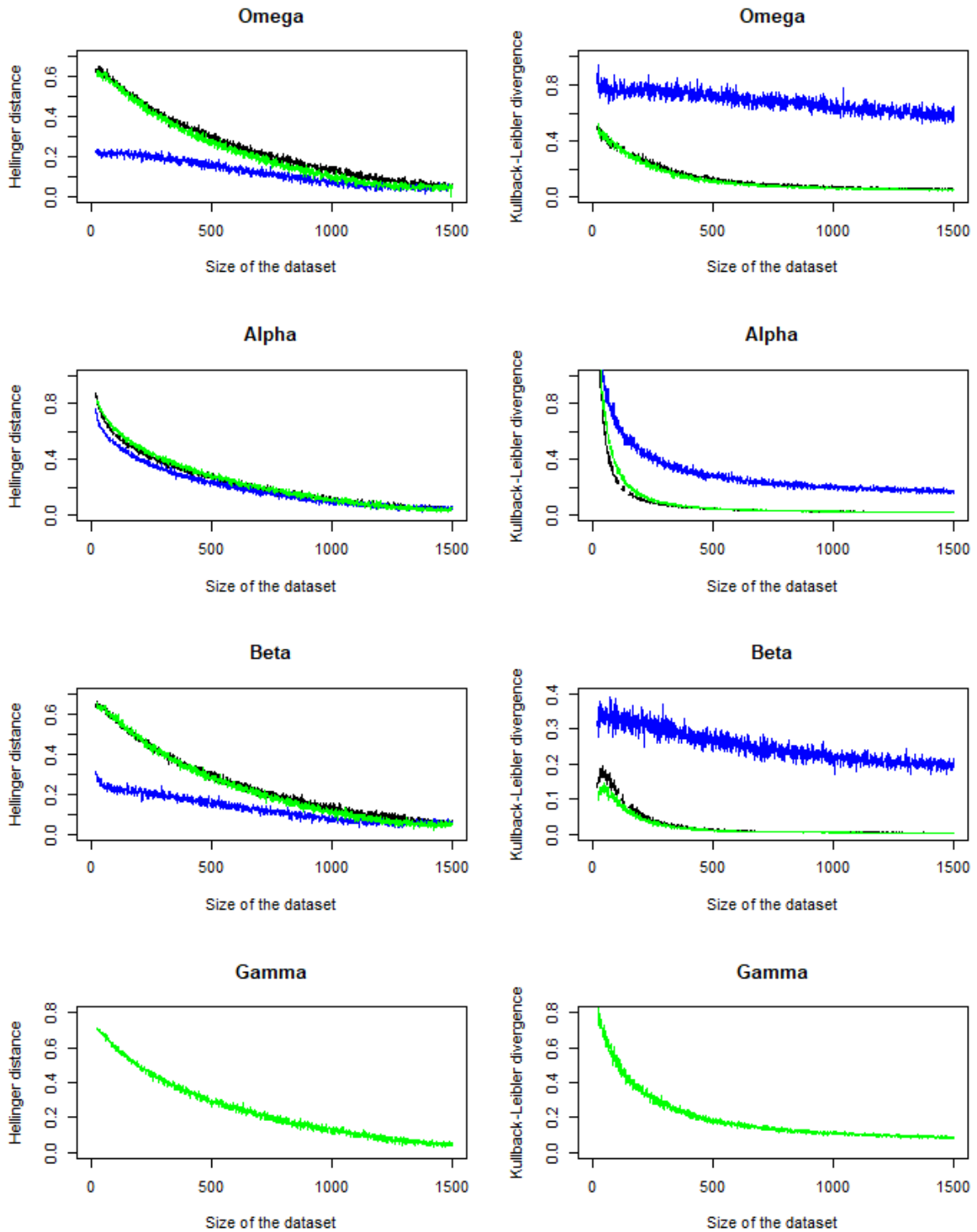
Sample sizes	GARCH		Robust GARCH		QGARCH	
	100 x 1500	250 x 1500	100 x 1500	250 x 1500	100 x 1500	250 x 1500
Omega	0.357	0.240	0.757	0.790	0.348	0.210
Alpha	0.250	0.089	0.675	0.424	0.353	0.107
Beta	0.130	0.041	0.329	0.309	0.084	0.032
Gamma	-	-	-	-	0.479	0.307

### 3.3 Progress in measures of divergence with increasing T

To see how the measures of divergence change with increasing T, I simulated samples of size between 10 and 1500 using the Monte Carlo method and compared them with the large sample (T=1500) that I used in this work. This shows approximately how fast the samples converge in distribution.



Figure 4: The effect of sample size on the divergence measures of different models



(GARCH black line for GARCH, blue line for Robust GARCH, green line for QGARCH)

## 4 CONCLUSION

In this paper, I have presented a comparative study of three GARCH models: the standard GARCH model, the robust GARCH model and the QGARCH model. I have examined the finite sample properties of the maximum likelihood estimators for these models using Monte Carlo simulations.

I have also evaluated the similarity and divergence of the sampling distributions of the estimators for different sample sizes using two measures: the Hellinger distance and the Kullback-Leibler divergence. The distance measures show the difference between the different sample sizes estimated distributions. Both measures decrease as the sample size increases, indicating that the estimators become more accurate with more data. However, the Hellinger distance is more sensitive to small differences than the Kullback-Leibler divergence, which can make it a better choice for comparing distributions in this context. Considering only Hellinger distance the robust GARCH model tends to have more stable and consistent estimators than the standard GARCH model, especially for small sample sizes.

Some models are more effective in estimating certain parameters than others, given the limited and specific sample sizes we have. According to the theory, the QGARCH model should outperform the standard GARCH model even with smaller samples, but this was not supported by the simplified version used in this paper. A more comprehensive approach would involve treating all the model parameters as non-zero in the future studies.

The sample size has a significant impact on the accuracy of the estimators and the divergence measures. As an illustration in GARCH(1,1) model for small samples (less than 100 observations), the estimators are biased and unreliable, and the distance measures are large and volatile. For medium samples (between 100 and 500 observations), the estimators start to converge to their true values, and the distance measures become more stable and consistent. For large samples (more than 500 observations), the estimators are nearly unbiased and efficient, and the distance measures are close to zero.

This work can offer some practical guidelines for choosing an appropriate model and sample size for empirical applications. This is particularly important when we are interested in the precision of a specific model parameter. However, this work examines the distribution of parameter estimation and not their standard deviations, which could provide additional insights and extend the scope of the work.

## 5 ACKNOWLEDGEMENTS

The work was supported by the Internal Grant Agency of Prague University of Economics and Business under Grant F4/24/2023.

### Literature

1. BLASQUES, Francisco. *Advanced Econometric Methods: A Guide to Estimation and Inference for Nonlinear Dynamic Models*. A. Publications, 2019.
2. CORNILLON, Pierre-Andre; HENGARTNER, Nicolas; MATZNER-LOBER, Eric. R: Hellinger distance [online]. Dostupné z: <https://search.r-project.org/CRAN/refmans/statip/html/hellinger.html>, 2021.

3. HELLINGER, E. Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1909, roč. 136, s. 210–271.
4. KULLBACK, S.; LEIBLER, R.A. On Information and Sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, 1951, roč. 22, č. 1, s. 79–86.
5. LEISCH, Friedrich; GRUEN, Bettina. R: Kullback-Leibler Divergence [online]. Dostupné z: <https://www.rdocumentation.org/packages/flexmix/versions/2.3-19/topics/KLdiv>, 2021.

**Contact info**

Bc. Tereza Singerová

Prague University of Economics and Business, Faculty of Informatics and Statistics

email: [sint02@vse.cz](mailto:sint02@vse.cz)

# PRÍSTUP K WEBOVÝM DATABÁZAM S JAZYKOM PYTHON<sup>1</sup>

## ACCESS TO WEB DATABASES WITH PYTHON LANGUAGE

*Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková*

### Abstrakt

Ekonomický výskum vyžaduje verifikáciu rôznych originálnych teórií prostredníctvom existujúcich údajov. Vo svete existuje veľké množstvo ekonomických databáz. Tri najznámejšie sú Federálny rezervný systém ekonomických údajov, ktorý poskytuje Federálna rezervná banka v St. Louis, databáza Svetovej banky a databáza Európskeho štatistického úradu. Cieľom tejto práce je prezentovať možnosti automatizácie pri získavaní databáz z troch najznámejších údajových portálov prostredníctvom programovacích nástrojov Pythonu. Výhodou uvedených prístupov, je že dané nástroje priamo komunikujú s portálmi a opakovaným spúšťaním procedúr možno opakovane získať aktuálne údaje.

*Kľúčové slová: Údaje, Python, Eurostat, World Bank, FRED*

### Abstract

Economic research requires the verification of various original theories through existing data. There are a large number of economic databases in the world. The three most well-known are the Federal Reserve System of Economic Data, provided by the Federal Reserve Bank of St. Louis, the World Bank database and the European Statistical Office database. This paper aims to present the possibilities of automation in obtaining databases from the three most famous data portals using Python programming tools. The advantage of the mentioned approaches is that the tools communicate directly with the portals, and by repeatedly starting the procedures, actual data can be obtained.

*Keywords: Data, Python, Eurostat, World Bank, FRED*

## 1 ÚVOD

Súčasná doba je charakteristická veľkým objemom údajov zo všetkých oblastí bežného života. Originálny vedecký výskum vyžaduje efektívny spôsob získania a analýzy dát. V tejto práci sa zameriame na možnosti rýchleho získania údajov zo známych svetových databáz využitím programovacích nástrojov Pythonu.

## 2 IMPORT ÚDAJOV Z WEBOVÝCH DATABÁZ A JAZYK PYTHON

Existujú funkčné programovanie nástroje, ktoré umožňujú získanie údajov priamo z webových databáz. Postačuje pripojenie na internet. V texte ukážeme, ako možno využitím balíka Pandas vhodného na tvorbu a správu databáz (dataframe) v Pythone získať údaje. Známe ekonomické databázy sú Federálny rezervný systém ekonomických údajov (FRED), ktorý poskytuje Federálna rezervná banka v St. Louis, databáza Svetovej banky (Pirlea et al. 2023) a databáza Európskeho štatistického úradu (EUROSTAT).

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0211/21, Ekonometrická analýza makroekonomických dopadov vplyvu pandémie vo svete s dôrazom na vývoj ekonomík EÚ a zvlášť ekonomiky Slovenska a VEGA 1/0047/23, Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa.

## 2.1 FRED

Balík `pandas_datareader`, slúži nielen na získanie údajov z databázy FRED, ale aj iných databáz. Balík potrebujeme vopred inštalovať. Dôležité argumenty funkcie získania údajov sú *databáza*, *kódy* časových radov a *rozsah* údajov. V prípade časových radov môže užívateľ špecifikovať rozsah údajov pomocou balíka `dt.datetime`, ktorý prevedie viac celých čísel (tuple) na dátum.

```
import pandas as pd
import datetime as dt # create datetime object
import pandas_datareader.data as web # we need it for OECD
```

Obrázok 1. Odporúčané balíky pre získanie časových radov z databázy FRED

V našom prípade je *databáza* ‚fred‘. Používateľ môže kód časového radu vyhľadať na stránke databázy. Nižšie je spôsob získania štvrťročného sezónne očisteného časového radu reálnej konečnej súkromnej spotreby v Poľsku (kód časového radu je ‚NAEXKP02PLQ189S‘) v rozpätí od prvého štvrťroku 1995 do prvého štvrťroku 2023.

```
start_date = dt.datetime(1995, 1, 1)
end_date = dt.datetime(2023, 4, 1)
C_Pol = web.DataReader('NAEXKP02PLQ189S', 'fred', start_date, end_date)
C_Pol
```

NAEXKP02PLQ189S	
DATE	
1995-01-01	1.146270e+11
1995-04-01	1.257905e+11
1995-07-01	1.293574e+11
1995-10-01	1.328827e+11
1996-01-01	1.330174e+11
...	...
2022-04-01	3.385975e+11
2022-07-01	3.344101e+11
2022-10-01	3.268294e+11
2023-01-01	3.267797e+11
2023-04-01	3.283389e+11

114 rows × 1 columns

Obrázok 2. Požiadavka vytvorenia dataframe obsahujúceho štvrťročný sezónne upravený časový rad reálnej konečnej súkromnej spotreby v Poľsku

Ak užívateľ nezadá končené obdobie rozsahu databázy (*end\_date* na obr. 2), aplikovaním príkazov, vždy získa aktuálne publikované údaje. Výsledný dataframe je vo vhodnom formáte, index zodpovedá obdobiu a názvy stĺpcov časovým radom. Premenovanie názvov stĺpcov možno realizovať príkazom *DataFrame.columns*, napr. *C\_Pol = C\_Pol.columns['Consumption']*.

## 2.2 World Bank

Pre prácu s údajmi z databázy Svetovej banky existuje balík *wbgapi* (Herzog, 2022), ktorý treba vopred inštalovať. Importovať ho možno príkazom *import wbgapi as wb*. Pre identifikáciu údajov potrebujeme poznať *kód* a *geografickú lokáciu* údajov. Rovnako, ako v databáze FRED, na vyhľadanie kódu možno využiť webovú stránku, ale výhodou balíka je, že obsahuje funkcionality priameho vyhľadávania dát. Nasledujúci príkaz vypíše všetky údaje s reťazcom ‚GDP‘ so zodpovedajúcim kódom v stĺpci **id**.

```
wb.series.info(q='GDP')
```

id	value
EG.GDP.PUSE.KO.PP	GDP per unit of energy use (PPP \$ per kg of oil equivalent)
EG.GDP.PUSE.KO.PP.KD	GDP per unit of energy use (constant 2017 PPP \$ per kg of oil equivalent)
NY.GDP.MKTP.KN	GDP (constant LCU)
NY.GDP.MKTP.PP.CD	GDP, PPP (current international \$)
...	...
PA.NUS.PPPC.RF	Price level ratio of PPP conversion factor (GDP) to market exchange rate
SL.GDP.PCAP.EM.KD	GDP per person employed (constant 2017 PPP \$)
	27 elements

Obrázok 3. Vyhľadanie v databázach Svetovej banky

Field	Value
BasePeriod	varies by country
IndicatorName	GDP (constant LCU)
License_Type	CC BY-4.0
License_URL	<a href="https://datacatalog.worldbank.org/public-licenses#cc-by">https://datacatalog.worldbank.org/public-licenses#cc-by</a>
Longdefinition	GDP is the sum of gross value added by all resident producers in the economy plus any product taxes and minus any subsidies not included in the value of the products. It is calculated without making deductions for depreciation of fabricated assets or for depletion and degradation of natural resources. Data are in constant local currency.
Periodicity	Annual
Source	World Bank national accounts data, and OECD National Accounts data files.
Topic	Economic Policy & Debt: National accounts: Local currency at constant prices: Aggregate indicators

Obrázok 4. Metadáta údajov

Funkcionalita príkazu tiež umožňuje získať metadáta pre zvolené údaje (obr.4).

Nasledovné príkazy (obr. 5) sú ukážka stiahnutia niektorých základných ročných ekonomických časových radov v Poľsku. Nevýhoda je, že na rozdiel od dataframeov získaných z databázy FRED, v tomto prípade ešte potrebujeme tabuľku upraviť do želaného stavu; stanoviť indexové riadky s pomenovaním časových radov, prepísať názvy stĺpcov podľa zodpovedajúcich rokov a zmazať nepotrebné stĺpce. Neskôr možno upraviť databázu zmazaním neuvedených údajov ‚NaN‘ (napríklad aplikovaním príkazu *dropna*).

```
Poland =wb.data.DataFrame(['NY.GDP.MKTP.KN','NE.CON.GOVT.KN','NE.CON.PRVT.KN',
                        'NE.GDI.TOTL.KN','FP.CPI.TOTL','FM.LBL.BMNY.CN','SL.UEM.TOTL.NE.ZS'
                        ['POL'],
                        labels=True)

Poland = Poland.drop('Series',axis=1) # vymaž stĺpec popiskov
Poland.columns = Poland.columns.str.replace('YR', '').astype(int) # uprav názvy stĺpcov podľa
Poland.index = ['GDP','Government','Consumption','Invesments','CPI','Money','Unemployment
# premenuj riadky indexov
# Poland = Poland.dropna(axis = 1) # vymaž NA údaje
Poland # zobraz databázu
```

	1960	...	2017	2018	2019	2020	2021	2022
<b>GDP</b>	NaN	...	1.946761e+12	2.062500e+12	2.154282e+12	2.110763e+12	2.255303e+12	2.365227e+12
<b>Government</b>	NaN	...	3.394770e+11	3.514800e+11	3.742640e+11	3.925430e+11	4.120130e+11	4.109820e+11
<b>Consumption</b>	NaN	...	1.166581e+12	1.220490e+12	1.262043e+12	1.218670e+12	1.295177e+12	1.333631e+12
<b>Invesments</b>	NaN	...	3.919680e+11	4.459500e+11	4.481430e+11	4.146930e+11	4.895940e+11	5.719100e+11
<b>CPI</b>	NaN	...	1.096377e+02	1.116253e+02	1.141118e+02	1.179624e+02	1.239255e+02	1.418072e+02
<b>Money</b>	NaN	...	1.324369e+12	1.445744e+12	1.565221e+12	1.822376e+12	1.984816e+12	NaN
<b>Unemployment rate</b>	NaN	...	4.890000e+00	3.850000e+00	3.280000e+00	3.160000e+00	3.360000e+00	2.890000e+00

Obrázok 5. Databáza základných indikátorov poľskej ekonomiky.

## 2.3 EUROSTAT

Na získanie údajov z databázy Eurostat slúži rovnomenný balík *eurostat* (Eurostat PyPI, 2023), ktorý tiež potrebujeme vopred nainštalovať a importovať príkazom *import eurostat*. Portál rozlišuje mnoho databáz, z ktorých každá má jedinečný kód. Obsah všetkých databáz možno vyvolať príkazom na obr. 6. Podobne ako pri práci s databázou Svetovej banky, aj v tejto môže užívateľ priamo vyhľadávať (obr. 7).

Keď poznáme potrebnú databázu s jedinečným kódom, potrebujeme poznať *parametre filtrov* zvolenej databázy. Podľa obr. 8, parametre mesačného časového radu harmonizovaného indexu cien ‚PRC\_HICP\_MIDX‘ sú frekvencia ‚freq‘, jednotka ‚unit‘, výber koša produktov ‚coicop‘ a geografická lokácia ‚geo‘.

Každý parameter ponúka rôzne možnosti výberu *údajov*. Napríklad, Harmonizovaný index spotrebiteľských cien možno získať v jednotkách ‚unit‘ s základným rokom 2015, 2005 alebo 1996 (obr. 9).

Pre získanie údajov potrebujeme špecifikovať kód databázy a parametre filtrov. Príkaz so syntaxom *eurostat.get\_data\_df(kód databázy, parametre filtrov)* vytvorí dataframe s požadovanými údajmi. Parametre filtrov zadávame vo forme slovníkov (dictionary). Na obr.

10 je príklad získania časového radu harmonizovaného indexu cien v Poľsku. Dataframe získaný z Eurostatu tiež potrebujeme upraviť vymazaním nepotrebných stĺpcov, nastavením indexového stĺpca a riadku s názvami stĺpcov a ďalšími potrebnými úpravami.

```
toc = eurostat.get_toc_df() # total contents
toc
```

	title	code	type	last update of data	last table structure change	data start	dat en
0	Top 5 ports - gross weight of goods handled in...	MAR_QG_QM_PWH	dataset	2023-06-29T11:00:00+0200	2023-06-29T11:00:00+0200	2005-Q1	2022 Q
1	Top 5 ports for dry bulk- gross weight of dry ...	MAR_QG_QM_PWHB	dataset	2023-06-29T11:00:00+0200	2023-06-29T11:00:00+0200	2005-Q1	2022 Q
2	Top 5 ports for containers - gross weight of g...	MAR_QG_QM_PWHC	dataset	2023-06-29T11:00:00+0200	2023-06-29T11:00:00+0200	2005-Q1	2022 Q
3	Top 5 ports for liquid bulk - gross weight of ...	MAR_QG_QM_PWHL	dataset	2023-06-29T11:00:00+0200	2023-06-29T11:00:00+0200	2005-Q1	2022 Q
4	Top 5 ports for other cargo not elsewhere spec...	MAR_QG_QM_PWHO	dataset	2023-06-29T11:00:00+0200	2023-06-29T11:00:00+0200	2005-Q1	2022 Q
...	...	...	...	...	...	...	...
7516	Percentage of letters delivered on-time (USP u...	POST_CUBE1_X\$POST_QOS_1	dataset	2023-05-23T08:18:37Z	2023-05-10T10:54:33Z	None	Non
7517	Postal services	POST_CUBE1_X	dataset	2023-05-23T08:18:37Z	2023-05-10T10:54:33Z	2012	202
7518	Number of enterprises providing postal services	POST_CUBE1_X\$NUM701	dataset	2023-05-23T08:18:37Z	2023-05-10T10:54:33Z	None	Non
7519	Access points (USP under direct or indirect d...	POST_CUBE1_X\$POST_ACC_1	dataset	2023-05-23T08:18:37Z	2023-05-10T10:54:33Z	None	Non
7520	Domestic postal traffic, letter mail and parce...	POST_CUBE1_X\$POST_DTR_1	dataset	2023-05-23T08:18:37Z	2023-05-10T10:54:33Z	None	Non

7521 rows × 7 columns

Obrázok 6. Obsah databáz Eurostatu

```
eurostat.subset_toc_df(toc, 'HICP') # subset of contents according to the keyword
```

Obrázok 7. Vyhľadávanie v databázach Eurostatu

```
# parameters of given dataset
pars = eurostat.get_pars('PRC_HICP_MIDX')
pars
```

```
['freq', 'unit', 'coicop', 'geo']
```

Obrázok 8. Parametre databázy.

```
eurostat.get_par_values('PRC_HICP_MIDX', 'unit') # This is the base year (2015, 2005, 1996)
```

```
['I15', 'I05', 'I96']
```

Obrázok 9. Možné jednotky harmonizovaného indexu cien.



```

# Filter Parameters

# Create a dictionary with filter parameters

filter_params = {'unit':['I15'], 'coicop':['CP00'], 'geo':['PL']}

# get the data
HICP_POL = eurostat.get_data_df('PRC_HICP_MIDX', filter_pars=filter_params)
HICP_POL

```

Obrázok 10. Získanie údajov poľského harmonizovaného indexu cien z Eurostatu.

Údaje možno získať aj zo stiahnutých alebo vytvorených súborov. Pre túto funkcionality slúžia funkcie balíka Pandas ako *pandas.read\_excel*, *pandas.read\_csv*, *pandas.read\_json*, *pandas.read\_html*, *pandas.read\_xml* a ďalšie.

### 3 ZÁVER

Získanie a spracovanie údajov je dôležitá súčasť ekonomickej vedeckovýskumnej činnosti. Zber údajov je v dnešnom svete odlišných zdrojov databáz prácná a zdĺhavá činnosť. Tento príspevok pomôže výskumníkom efektívne automatizovať často opakovaný zber údajov.

Zamerali sme sa hlavne na možnosti automatického získavania údajov z databáz Federálneho rezervného systému ekonomických údajov, Svetovej banky a Európskeho štatistického úradu. Prezentované balíky umožňujú získanie údajov priamo z internetových portálov, čím možno zabezpečiť jednoduchý prístup k aktuálnym údajom v každom čase.

#### Použitá literatúra

1. Eurostat. <https://ec.europa.eu> (03 November 2023).
2. Eurostat PyPI. 2023. <https://pypi.org/project/eurostat/> (03 November 2023).
3. FRED. <https://fred.stlouisfed.org/> (03 November 2023).
4. HERZOG, T. 2022. Python module that makes using the World Bank's API a lot easier and more intuitive. *GitHub*. <https://github.com/tgherzog/wbgapi#readme> (03 November 2023).
5. Pandas-Datreader. <https://pandas-Datreader.readthedocs.io> (03 November 2023).
6. PIRLEA, F. et al. 2023 World Bank Open Data. <https://data.worldbank.org/> (03 November 2023).

#### Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.  
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
 Tel: (421 2) 67 295 822  
 email: [karol.szomolanyi@euba.sk](mailto:karol.szomolanyi@euba.sk) [martin.lukacik@euba.sk](mailto:martin.lukacik@euba.sk), [adriana.lukacikova@euba.sk](mailto:adriana.lukacikova@euba.sk)

# ANALÝZA ČESKÝCH FIREM A TECHNOLOGICKÝCH UKAZATELŮ POMOCÍ DEA MODELU

## ANALYSIS OF CZECH COMPANIES AND TECHNOLOGICAL INDICATORS USING THE DEA MODEL

*Ing. Vojtěch Vávra*

### **Abstrakt**

Tato studie se zaměřuje na analýzu technologických ukazatelů a jejich vliv na efektivitu firem. Hlavním cílem této práce je získat seznam technologicky efektivních firem mezi českými společnostmi, které zaměstnávají více než 3000 pracovníků. Pro analýzu jsme využili modely DEA (Data Envelopment Analysis), a konkrétní aplikace byla implementována v jazyce Python s využitím knihovny dealib.

***Klíčová slova:** DEA, technologie, velké české firmy, Python, dealib*

### **Abstract**

This study focuses on analyzing technological indicators and their impact on a company's efficiency. The primary objective of this research is to identify technologically efficient companies within the Czech market, specifically those with over 3,000 employees. To achieve this goal, we employed DEA (Data Envelopment Analysis) models for our analysis, and the practical implementation was carried out using Python and package dealib.

***Keywords:** DEA, technology, big Czech companies, Python, dealib*

## **1 ÚVOD**

Technologie hrají v mikroekonomii klíčovou roli v podobě efektivnosti, jakým firma vyrábí, rozhoduje se a reaguje na tržní podmínky. V této práci se podíváme právě na tuto oblast.

Nejzajímavější ukázkou technologického pokroku z nedávné doby je rozvoj AI (Artificial Intelligence, umělá inteligence), která zamávala konkurenčním prostředím napříč všemi oblastmi. Tento technologický pokrok byl právě impulzem k vytvoření této práce.

Naneštěstí AI je jednotlivými firmami v době psaní této práce teprve adaptována např. u firem velké čtyřky (Jedná se o následující firmy: EY, KPMG, Deloitte a PWC). Nejsou tedy ještě data k řádné analýze toho, jak tento technologický skok ovlivní tržní odvětví. Cílem práce je zanalyzovat současný technologický trend firem v České republice, který poslouží k porovnání s budoucím vývojem technologií na trhu.

## **2 TEORETICKÁ ČÁST**

Technologie mají zásadní vliv na způsoby výroby jednotlivých firem. Firma pak může mít na výběr z mnoha technologií, které může aplikovat pro svoji práci. To je pak spojeno s náklady, efektivitou a výstupními možnostmi. Mikroekonomie se zabývá analýzou, jak firmy volí kombinaci vstupů (lidský kapitál, finanční kapitál, suroviny) za účelem minimalizace nákladů a maximalizaci zisku.

Mikroekonomie též zkoumá, jak je ovlivněno chování firem pomocí technologického pokroku. Ten právě může zapříčít výhodu na trhu oproti konkurenci, ať už v podobě zlepšení kvality výstupů, či snížení nákladů na výrobu. Jednotlivé firmy se pak musí rozhodovat, zda budou investovat na vědy, vývoji nových technologií či technologicky vzdělanějších pracovníků. Díky tomu mohou získat dlouhodobě lepší postavení na trhu za cenu krátkodobého zhoršení.

I na poli vědy a výzkumu se objevují externality. Jedna firma na trhu může pozitivně i negativně ovlivnit firmu na trhu jinou. Mikroekonomie též zkoumá, jak právě tyto externality mohou ovlivnit rozhodování firem a jak vláda může regulovat tyto dopady.

Technologie mohou akcelarovat tržní dynamiku pomocí rychlejšího šíření informací, efektivitu obchodování (například belgická technologie SWIFT) nebo také nové možnosti obchodu mezi zákazníky a firmami. Mikroekonomie pak zkoumá dopad technologií na fungující trhy a jak ovlivňuje strukturu trhu.

### 3 DEA MODELY

#### 3.1 Model

DEA (Data Envelopment Analysis, Analýza obalu dat) model je metoda běžně používaná v operačním výzkumu k hodnocení efektivnosti více subjektů (firem, institucí, ...) vzhledem k několika vstupům a výstupům. DEA modely jsou neparametrické.

Mezi základní pojmy u DEA modelů patří jednotky DMU (decision making units), které jsou hodnoceny v rámci DEA. To mohou být například subjekty jako firmy, nemocnice školy apod. Druhým pojmem jsou vstupy (inputs), které jsou využívány k získávání výstupů. Jedná se například o materiál, pracovní sílu nebo třeba kapitál. Třetím pojmem jsou výstupy (outputs), které určují výkonnost dané jednotky DMU.

DEA modely pak udávají, zda daná jednotka DMU je, nebo není efektivní podle toho, zda se nachází na hranici efektivnosti nebo ne a mohla by dosáhnout vyšší efektivity. Hlavní myšlenkou DEA modelů je najít optimální váhy vstupů a výstupů pro každou jednotku tak, aby byla maximalizována efektivita. Existuje několik druhů modelů, mezi kterými například nalezneme CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) a BCC (Banker, Charnes, Cooper) model. Jednotlivé modely viz (1).

CCR Model lze zapsat následovně:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \cdot y_{iq}}{\sum_{j=1}^m v_j \cdot x_{jq}} \longrightarrow MAX,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n u_i \cdot y_{ik}}{\sum_{j=1}^m v_j \cdot x_{jk}} \leq 1, \quad \forall k,$$

$$u_i, v_j \geq \epsilon, \quad \forall i, j,$$

kde:

- $\rho$  určuje hladinu efektivity,

- $x_{jq}$  vektor množství vstupů hodnocené jednotky  $j$ ,
- $x_{jk}$  vektor konstant vstupů hodnocené jednotky  $j$ ,
- $y_{iq}$  vektor množství výstupů hodnocené jednotky  $i$ ,
- $y_{ik}$  vektor konstant výstupů hodnocené jednotky  $i$ ,
- $u_i$  vektor proměnných vah pro vstupy  $x_{jk}$ ,
- $v_j$  vektor proměnných vah pro výstupy  $y_{iq}$ ,
- $\varepsilon$  je infinitezimální konstanta, která zaručuje nezápornost vah.

A účelová funkce je maximalizována tak, aby poměr výstupů byl oproti vstupům co nejvyšší při podmínce vah. Následuje výčet podmínek.

- První podmínka efektivity udává, že poměr v účelové funkci nesmí být vyšší než 1.
- Druhá podmínka nezápornosti vah povoluje pouze nezáporné hodnoty vah jak pro vstupy, tak pro výstupy.

### 3.2 DEA v Pythonu

K zpracování dat použijeme jazyka Python a pro aplikaci DEA modelů balíček „dealib“. Dokumentace, která byla použita při tvorbě skriptů, viz (5).

Dealib umožňuje použití následujících modelů:

- Envelopment model, Multiplier model, Slack model, Additive model, Super-efficiency model, Direct model, Multi-directional model

V naší práci využijeme základního DEA modelu (Envelopment model), který je postačující pro naši analýzu trhu.

## 4 POPIS DAT

V Českých zemích existuje velké množství firem. Abychom zúžili seznam, použili jsme následujících podmínek pro jejich vyfiltrování:

- Ve firmě pracuje alespoň 3000 pracovníků.
- Firma není příspěvkovou organizací.
- Firma není organizační složkou státu.
- Firma není univerzitou.

Tyto informace jsme získali z následujícího internetového zdroje (4). Tímto filtrem prošlo celkem 30 firem z nejrůznějších sektorů, které měli i k dispozici všechny potřebné údaje pro analýzu. Jako příklad uvedeme Tesco Stores ČR a.s., Siemens s.r.o., OKD a.s., Krajská zdravotní a.s. nebo v neposlední řadě TRINECKÉ ŽELEZÁRNY a. s.

Pro každou firmu z námi vytvořeného datasetu jsme vytvořili pole viz Tabulka 1. Jednotlivé informace jsme získali na následujících stránkách:

- Na stránce (4) jsme získali následující pole: ICO, nazev, sidlo, GEO, min\_poc\_pra, zaklad\_kapital
- Na stránce (3) ve Veřejném rejstříku a Sbírci listin jsme pak pomocí IČO dohledali hospodářské výsledky jednotlivých firem: VHpZ\_2021, VHpZ\_2022

**Tabulka 1: Seznam polí pro jednotlivé firmy.**

<i>Pole</i>	<i>Hodnoty</i>	<i>Popis</i>
ICO	Int	Evidenční číslo firmo, IČO.
Nazev	Str	Název firmy.
Sidlo	Str	Uvedené sídlo společnosti.
GEO	Str	Region NUTS2.
Min_poc_pra	Int	Minimální počet pracovníků ve firmě k roku 2023.
Zaklad_kapital	Int	Hodnota základního kapitálu uvedená na webu.
VHpZ_2021	Flout	Hospodářský výsledek po zdanění v roce 2021 v tisících Kč.
VHpZ_2022	Flout	Hospodářský výsledek po zdanění v roce 2022 v tisících Kč.

Následuje výčet datasetů o úrovni technologické úrovně jednotlivých firem podle geografické informace. V našem případě jsme získali data pro regiony NUTS2, které budeme v práci dále označovat jako regiony a též jako pole GEO.

Informace o lidských zdrojích ve vědě a technologiích (HRST), vědecké úrovni v regionech (RERE) a zaměstnanosti v high-tech sektoru (EHTS) ze stránky (2). Ukazatele máme k dispozici podle regionů v letech 2011 až 2022. Ukazatele jsou maximalizačního typu.

## 5 EXPERIMENTÁLNÍ VÝPOČTY

### 5.1 Navržení experimentu

Cílem experimentální části je rozdělit dataset firem na efektivní (ležící na efektivní hranici), sub-efektivní (ležící v pěti procentním intervalu od efektivní hranice) a neefektivní firmy (které jsou vzdálené efektivní hranici) v rámci trhu České republiky. Jednotlivé datasety byly již popsány v kapitole 4.

Metoda použitá k analýze byla popsána v kapitole 3.

Analýza proběhla pro 2 pozorované roky 2021 a 2022. Budeme tedy obecně označovat tyto referenční období jako  $r$ .

Do vstupů byly zařazeny následující pole:

- Ukazatel lidských zdrojů ve vědě a technologiích v roce  $r$ . Ukazatel zaměstnanosti v high-tech sektoru v roce  $r$ . Ukazatel výzkumníků v regionech, který je k dispozici nejdříve pro rok 2020. Minimální počet pracovníků dané firmy. Přirozený logaritmus základního kapitálu firmy.

Do výstupů bylo pro každý rok zvlášť zařazeno pole s hospodářským výsledkem po zdanění v roce  $r$ .

### 5.2 Vyhodnocení experimentu

Počet firem podle skupin v jednotlivých letech viz tabulka:

V obou pozorovaných obdobích jsou na efektivní hranici následující firmy:

- Krajská zdravotní a.s.; Continental Barum s.r.o.; Robert Bosch spol. s r.o.; Iveco Czech Republic a.s.; Krajská nemocnice Liberec a.s.; Metrostav a.s.; Nemocnice České Budějovice a.s.; Grafton Recruitment s.r.o.; Vojenské lesy a statky ČR s.p.

Pak v roce 2021 byla na efektivní hranici navíc firma Kooperativa pojišťovna a.s. Vienna Insurance Group. Ta měla v tomto roce téměř trojnásobné výnosy oproti roku 2022.

A v roce 2022 byly na efektivní hranici navíc firmy OKD a.s. a O2 Czech Republic a.s. Firma OKD zaznamenala téměř dvacetinásobné výnosy a firma O2 téměř trojnásobné výnosy oproti roku 2021.

Na efektivní hranici se nachází firmy z různých oblastí od elektroniky, přes výrobu autobusů až po nemocniční zařízení. U nemocničních zařízení pak nemusí být hlavním cílem firmy zisk, ale spíše pomáhání druhým, ale i tak se dostaly na efektivní hranici.

Na hranici efektivnosti se nedostala ani jedna z firem, které mají přes 10000 zaměstnanců. Hlavním podílem na takovém velkém množství firem na hranici efektivnosti může velké rozpětí základního kapitálu.

Nejhorší firmou pro rok 2021 i 2022 byla firma Dopravní podnik hl. m. Prahy akciová společnost. Dosáhla 68 procentní míry efektivnosti.

## 6 ZÁVĚR

Vytvořili jsme dataset o třiceti firmách, který obsahuje nejružnější ukazatele. Seznam podmínek, které museli firmy splnit lze nalézt v kapitole 4. Soubor byl vytvořen ručně na základě dostupných informací ve Veřejném rejstříku a Sbírci listin společně s dalšími internetovými zdroji. Bohužel nebyla nalezena jednoduchá cesta automatizace. Pro budoucí navázání na práci lze zanalyzovat všechny firmy v České republice na základě vhodného datového zdroje.

Vytvořili jsme skript, který provádí DEA analýzu v jazyce Python pomocí knihovny dealib.

Podařilo se nám zanalyzovat české firmy pomocí DEA modelu. Získali jsme seznam firem, které jsou efektivní v zdaněném hospodářském výsledku z pohledu technologických ukazatelů, základního kapitálu a minimálního počtu zaměstnanců. Několik firem bylo i velmi blízko (v pěti procentním rozpětí od hranice efektivnosti) hranici efektivnosti.

Zároveň jsme získali i seznam neefektivních firem, ze kterého jsme uvedli nejhorší firmu pro obě období.

### Použitá literatura

1. DLOUHÝ, Martin, et al. Využití analýzy obalu dat pro hodnocení efektivnosti českých nemocnic. *Politická ekonomie*, 2007, 2007.1: 60-71.
2. European Commission. Eurostat. [Online] 2023. <https://ec.europa.eu/eurostat/en/>.
3. Ministerstvo spravedlnosti České republiky. Veřejný rejstřík a sbírka listin. [Online] 2023. <https://or.justice.cz/ias/ui/rejstrik>.
4. Kurzy.cz spol. s r.o., AliaWeb spol. s r.o. Kurzycz. [Online] 2023. <https://www.kurzy.cz/>.
5. Artyom, Viryutin. GitHub. Dealib documentation. [Online] 2023. <https://artyomviryutin.github.io/dealib/index.html>.

### Kontaktní údaje

Ing. Vojtěch Vávra

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky, Katedra ekonometrie nám. Winstona Churchilla 1938/4, 120 00 Praha 3 - Žižkov

Tel: +420 731 986 046

email: [vojtech.vavra@vse.cz](mailto:vojtech.vavra@vse.cz)

# PŘEHLED LITERATURY: MODELOVÁNÍ MARKETINGOVÉHO MIXU A ROZKLAD PRODEJŮ POMOCÍ EKONOMETRIE

## LITERATURE REVIEW: MARKETING MIX MODELING AND SALES DECOMPOSITION USING ECONOMETRICS

*Lukáš Veverka*

### **Abstrakt**

Tento přehled literatury shrnuje výzkum modelování marketingového mixu a dekompozice prodeje pomocí ekonometrie a zkoumá klíčová témata a poznatky z mnoha studií. Zabývá se účinností reklamy a jejími krátkodobými a dlouhodobými dopady na prodej, přičemž zdůrazňuje využití ekonometrických modelů pro analýzu. Studie zabývající se vnějšími faktory, jako je nesezónní počasí a řízení rizik, poskytují poznatky o zmírňování rizik spojených s prodejem. Přehled dále zdůrazňuje význam rozhodování založeného na datech, což je ilustrováno modelem předpovědi prodeje a systémem podpory rozhodování. V neposlední řadě zkoumá inovativní modelovací techniky, které kombinují údaje o prodeji a online vyhledávání s cílem získat komplexní porozumění vlivu reklamy na chování spotřebitelů a výsledky prodeje.

***Klíčové slova:** Modelování Marketingového Mixu, Účinnost Reklamy, Reakční Křivky Prodejů*

### **Abstract**

This literature review synthesizes research on marketing mix modeling and sales decomposition using econometrics, exploring key themes and insights across multiple studies. It delves into the effectiveness of advertising and its short-term and long-term impacts on sales, highlighting the use of econometric models for analysis. Studies addressing external factors, such as unseasonal weather and risk management, provide insights into mitigating sales-related risks. Furthermore, the review underscores the significance of data-driven decision-making, as exemplified by a sales forecasting model and decision support system. Finally, it explores innovative modeling techniques that combine sales and online search data to gain a comprehensive understanding of advertising's impact on consumer behavior and sales outcomes.

***Keywords:** Marketing Mix Modeling, Advertising Effectiveness, Sales Response Curves*

## **1 ÚVOD**

Modelování marketingového mixu, které je klíčovou oblastí pro pochopení dopadu marketingových strategií na prodej a chování spotřebitelů, bylo předmětem rozsáhlého výzkumu. Tento přehled shrnuje klíčové studie a zdůrazňuje jejich vzájemně propojená témata, metodiky a zjištění.

## 2 MODELOVÁNÍ MARKETINGOVÉHO MIXU

### 2.1 Reklama a prodej

Vztahem mezi reklamou a prodejem se zabývá několik studií. Bass (1969) ve své práci "*Simultaneous-Equation Regression Analysis of Sales and Advertising*" představil model, který zohledňuje strukturální parametry, aby pochopil vliv reklamy na prodej. Assmus a další (1984) provedli komplexní metaanalýzu 128 ekonometrických modelů k posouzení vlivu reklamy na prodej. Jejich práce poskytuje cenné shrnutí poznatků získaných z těchto modelů, přičemž se zaměřuje na krátkodobou a dlouhodobou odezvu reklamy a také na vhodnost modelu. Přístup, který použili a který se nazývá "analýza replikace", identifikuje zdroje systematických rozdílů v elasticitách reklamy. Tato práce vrhá světlo na komplexní vztah mezi reklamou a prodejem a nabízí poznatky, které jsou zásadní pro lepší pochopení toho, jak reklama ovlivňuje prodej, zejména u vyspělých výrobků v USA. Výzkum Assmuse a kol. z roku 1984 doplňuje metaanalýza provedená Sethuramanem (2011), který provedl metaanalýzu elasticit reklamy a zjistil, že průměrná krátkodobá elasticita reklamy je 0,12, což naznačuje, že reklama má nižší dopad, než se dříve předpokládalo. Tellis (1995) dále zkoumal cenovou elasticitu selektivní poptávky a ukázal, že vztah mezi cenou a prodejem je výrazně negativní a liší se v čase, životním cyklu značky a kategoriích výrobků. Vztah mezi reklamou a prodejem je dlouhodobě předmětem modelování tržní odezvy.

### 2.2 Cenotvorba a prodej

Dalším zásadním tématem modelování odezvy na prodej je kompromis mezi reklamou a slevou z ceny. Sethuraman (1991) analyzoval poměr cenové a reklamní elasticity a zjistil, že cenová elasticita je obvykle mnohem vyšší než reklamní elasticita. Z toho vyplývá, že sleva z ceny může být výhodnější, zejména u vyspělých výrobků a netrvanlivého zboží. Cenové strategie hrají i nadále významnou roli při modelování odezvy prodeje.

### 2.3 Předpovídání časových řad a neuronové sítě

Předpovědi časových řad a neuronové sítě jsou nedílnou součástí modelů reakce trhu. Hoptroff (1993) se zabýval principy a praxí prognózování časových řad a obchodního modelování pomocí neuronových sítí a zdůraznil flexibilitu a robustnost neuronových sítí při řešení prognostických úloh. Tento přístup doplňuje tradiční modelovací techniky. V souvisejícím kontextu má pro aplikaci neuronových sítí při pochopení dynamiky trhu značný význam práce Hruschky (1993). Tento výzkum nabízí cenné poznatky o srovnání modelování neuronových sítí a tradičních ekonometrických technik. Zkoumá účinnost neuronových sítí při určování funkcí tržní odezvy a osvětluje jejich výhody a omezení v porovnání se zavedenými metodami. Pochopení výkonnosti neuronových sítí je v tomto kontextu klíčové pro zvýšení přesnosti předpovědi prodeje a optimalizaci marketingových strategií.

### 2.4 Metriky zákaznického myšlení a sociální média

Několik studií zdůrazňuje význam metrik a zákaznického myšlení v modelech tržní odezvy. Shuba (2010) integroval metriky zákaznického myšlení do modelů prodejní odezvy a odhalil hodnotu zahrnutí metrik, jako je povědomí o reklamě, zvažování značky a obliba značky, při předpovídání výsledků prodeje. Tyto metriky poskytují včasné varovné signály, které umožňují manažerská opatření dříve, než je ovlivněna výkonnost trhu. V éře marketingu sociálních médií získaly na významu metriky zákaznického myšlení, jako je analýza sentimentu a interakce se sociálními médii.





Obrázek 1: Vizualizace vztahů mezi nejzajímavějšími články

zdroj: autor

## 2.5 Stálost prodeje a závislost na stavu

Koncept stálosti prodeje a závislosti na stavu hraje významnou roli v pochopení dlouhodobé marketingové účinnosti. Dekimpe (1995) zavedl modelování perzistence pro posouzení účinků marketingových aktivit na prodej v čase a zdůraznil, že některé reklamy mají silný trendový vliv na prodej. Clarke (1976) navíc zkoumal délku trvání kumulativních účinků reklamy na prodej a označil, že kumulativní účinek reklamy na prodej trvá spíše jen měsíce než roky. Toto zjištění podtrhuje důležitost zohlednění časového intervalu při hodnocení účinnosti reklamy.

## 2.6 Souhrnné reklamní modely a digitální analytika

Souhrnné reklamní modely, které vztahují prodej výrobků k výdajům na reklamu pro celý trh, jsou předmětem empirických studií, které odhalují klíčové reklamní jevy. Little (1979) provedl přehled a shrnutí empirických prací v oblasti modelování odezvy na prodej, přičemž zdůraznil rozmanitost vzorců odezvy na prodej, účinky konkurenční reklamy a různou účinnost alokace reklamních dolarů. Agregátní reklamní modely se vyvíjejí, aby se přizpůsobily složitosti digitálního marketingu.

## 2.7 Systémy pro předpovídání prodeje a podporu rozhodování

V souvislosti s předpovídáním prodeje se Divakar (2005) zabýval vývojem modelu pro předpovídání prodeje (CHAN4CAST), který bere v úvahu různé faktory, včetně minulých prodejů, trendu, cen, proměnných týkajících se propagace, sezónnosti, teploty, svátků, zavádění nových výrobků a dalších. Související systém pro podporu rozhodování pomáhá firmám vytvářet přesné prognózy a simulovat scénáře na základě marketingových rozhodnutí.

## 3 ZÁVĚR

Literatura o modelech tržní odezvy nabízí řadu poznatků o složité dynamice reklamy, tvorby cen a předpovědi prodeje. Výzkumníci dosáhli významného pokroku v pochopení vztahu mezi reklamou a prodejem, cenových strategií a významu modelování časových řad a

neuronových sítí. Integrace metrik zákaznického myšlení navíc umožňuje komplexnější pochopení tržní odezvy. Tyto poznatky mají zásadní význam pro podniky, které se snaží optimalizovat své marketingové strategie a zvýšit svou konkurenční výhodu na dynamickém trhu. Modelování závislosti na stavu a perzistence navíc přispívá k hlubšímu pochopení dlouhodobých účinků marketingového úsilí a zdůrazňuje potřebu zohlednit časový interval při hodnocení účinnosti reklamy. Literatura o modelech tržní odezvy se nadále vyvíjí, což odráží dynamickou povahu marketingu a prodeje v digitálním věku. Nejnovější studie zkoumají dopad digitální reklamy, personalizované cenotvorby, neuronových sítí, metrik sociálních médií a využití umělé inteligence při prognózování prodeje. I když základní koncepty zůstávají relevantní, začlenění moderních nástrojů a přístupů umožňuje podnikům získat hlubší porozumění tržní odezvě a přizpůsobit své strategie rychle se měnícímu prostředí. Tento rozvíjející se soubor poznatků je neocenitelný jak pro akademiky, tak pro odborníky z praxe, kteří se snaží orientovat ve složitostech současného trhu.

### **Poděkování**

Práce na tomto příspěvku byla podpořena Interní grantovou agenturou Vysoké školy ekonomické v Praze v rámci projektu F4/22/2023.

### **Použitá literatura**

1. Assmus, G., Farley, J. U., & Lehmann, D. R. 1984. How Advertising Affects Sales: Meta-Analysis of Econometric Results. In: *Journal of Marketing Research*, roč. 21, 1984, č. 1, s. 65–74.
2. Bass, F. M., & Parsons, L. J. 1969. Simultaneous-Equation Regression Analysis of Sales and Advertising. In: *Applied Economics*, roč. 1, 1969, č. 2, s. 103–124.
3. Clarke, D. G. 1976. Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effect on Sales. In: *Journal of Marketing Research*, roč. 13, 1976, č. 4, s. 345–357.
4. Dekimpe, M. G., & Hanssens, D. M. 1995. The Persistence of Marketing Effects on Sales. In: *Marketing Science*, roč. 14, 1995, č. 1, s. 1–21.
5. Divakar, S., Ratchford, B. T., & Shankar, V. 2005. CHAN4CAST: A multichannel, multiregion sales forecasting model and decision support system for consumer packaged goods. In: *Marketing Science*, roč. 24, 2005, č. 3, s. 334–350.
6. Hoptroff, R. G. 1993. The principles and practice of time series forecasting and business modelling using neural nets. In: *Neural Computing & Applications*, roč. 1, 1993, č. 1, s. 59–66.
7. Hruschka, H. 1993. Determining market response functions by neural network modeling: A comparison to econometric techniques. In: *European Journal of Operational Research*, roč. 66, 1993, č. 1, s. 27–35.
8. Little, J. D. C. 1979. Feature Article—Aggregate Advertising Models: The State of the Art. In: *Operations Research*, roč. 27, 1979, č. 4, s. 629–667.
9. Sethuraman, R., & Tellis, G. J. 1991. An Analysis of the Tradeoff between Advertising and Price Discounting. In: *Journal of Marketing Research*, roč. 28, 1991, č. 2, s. 160–174.
10. Sethuraman, R., Tellis, G. J., & Briesch, R. A. 2011. How Well Does Advertising Work? Generalizations from Meta-Analysis of Brand Advertising Elasticities. In: *Journal of Marketing Research*, roč. 48, 2011, č. 3, s. 457–471.
11. Shuba, S., Marc, V. A., & Koen, P. 2010. Mind-set metrics in market response models: An integrative approach. In: *Journal of Marketing Research*, roč. 47, 2010, č. 4, s. 672–684.

12. Tellis, G. J., & Weiss, D. L. 1995. Does TV Advertising Really Affect Sales? The Role of Measures, Models, and Data Aggregation. In: Journal of Advertising, roč. 24, 1995, č. 3, s. 1–12.

**Kontaktní údaje**

Ing. Lukáš Veverka

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3 - Žižkov

Tel: (+420) 723 298 590

email: [lukas.veverka@vse.cz](mailto:lukas.veverka@vse.cz)