

Katedra ekonometrie
Fakulty informatiky a statistiky VŠE v Praze



a

Katedra operačného výskumu a ekonometrie
Fakulty hospodárskej informatiky EU v Bratislave



a

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum

MEZINÁRODNÍ VĚDECKÝ SEMINÁŘ NOVÉ TRENDY V EKONOMETRII A OPERAČNÍM VÝZKUMU

Katedry ekonometrie FIS VŠE v Praze

a

Katedry operačného výskumu a ekonometrie FHI EU v Bratislave

a

Slovenskej spoločnosti pre operačný výskum

ZBORNÍK

26. november – 28. november 2025

26. listopad – 28. listopad 2025

Praha

Programový výbor:

prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., VŠE Praha
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., VŠE Praha
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., EU Bratislava
prof. dr. Ing. Martin Dlouhý, PhD., VŠE Praha
prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., EU Bratislava
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., EU Bratislava

Recenzenti:

doc. Ing. Marián Goga, PhD., EU Bratislava
Dr. h. c., prof. Michal Fendek, CSc., EU Bratislava
doc. Ing. Jaroslav Kultán, PhD., EU Bratislava
doc. Ing. Michal Koháni, PhD., UNIZA v Žiline
doc. Ing. Jan Zouhar, PhD., VŠE Praha
doc. Ing. Adam Borovička, PhD., VŠE Praha

Organizačný výbor:

doc. Ing. Brian König, PhD.

AH 7,24

Kontakt: brian.konig@euba.sk

Editor: doc. Ing. Brian König, PhD.

Web editor: prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Za odbornú stránku a jazykovú úpravu zodpovedajú autori.

Fakulta informatiky a statistiky VŠE v Prahe,
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
a Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave,
Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave,
Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2025

ISBN: 978-80-225- 5273-8

Obsah

<i>Michal Bogár:</i> <u>PREDIKOVANIE FINANČNÝCH ŤAŽKOSTÍ PODNIKOV ZALOŽENÉ NA MARKOVÝCH REŤAZCOCH: VÝVOJ A SÚČASNÉ TRENDY</u>	4
<i>Ivan Brezina, Juraj Pekár, Reiff Marian:</i> <u>ENVIRONMENTÁLNE MODELY V PROCESE EKOLOGICKÉHO ROZHODOVANIA</u>	10
<i>Zuzana Čičková:</i> <u>TEÓRIA KOOPERATÍVNYCH HIER: PREHĽAD A APLIKÁCIE</u>	19
<i>Ľubica Hurbánková, Lenka Magulová:</i> <u>ANALÝZA PRODUKCIE PLASTOVÉHO ODPADU V JEDNOTLIVÝCH KRAJOCH SLOVENSKA</u>	25
<i>Michaela Chocholatá:</i> <u>VÝVOJ EMISÍ SKLENÍKOVÝCH PLYNOV V REGIÓNOCH EÚ (2020–2024): PRIESTOROVÁ EXPLORAČNÁ ANALÝZA</u>	36
<i>Jaroslav Janáček, Peter Czimmermann, Tomáš Majer, Lýdia Gábrišová:</i> <u>VYROVNÁVANÍ KVALITY ZÁCHRANNE ZDRAVOTNÍ SLUŽBY V RÚZNÝCH REGIONECH</u>	45
<i>Miroslava Jánošová, Tomáš Domonkos:</i> <u>VÝVOJ ENVIRONMENTÁLNEJ LEGISLATÍVY SLOVENSKEJ REPUBLIKY (1993–2025) A JEJ IMPLIKÁCIE PRE MODELOVANIE STRATEGICKÉHO SPRÁVANIA V BAYESOVSKÝCH HRÁCH</u>	50
<i>Daniil Khokhrunov:</i> <u>MAKROEKONOMICKÁ KONVERGENCE REGIONŮ ZEMÍ VÝŠEHRADSKÉ ČTYŘKY</u>	57
<i>Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi:</i> <u>DYNARE AKO NÁSTROJ PRE POROZUMENIE DSGE MODELOM</u>	64
<i>Richard Martinus:</i> <u>APLIKÁCIA EURÓPSKÝCH SMERNÍC VO FINANČNOM MODELOVANÍ S POROVNANÍM SO ŠTANDARDNÝMI POSTUPMI</u>	71
<i>Veronika Mitkova, Matej Majerčík:</i> <u>KOMPARATÍVNA ANALÝZA VÝCHODZIEHO STAVU PACIENTOV PRED TOTÁLNOU ENDOPROTÉZOU: DÔSLEDKY PRE POLITIKU V OBLASTI ZDRAVOTNÍCTVA A MIGRÁCIE</u>	79
<i>Vladimír Mlynarovič:</i> <u>FINANČNÁ INTERPRETÁCIA KONTRIBÚCIE RIZIKA MIGRAČNÝCH POLITÍK</u>	85
<i>Jakub Neugebauer:</i> <u>VLIV ZPŮSOBU DYNAMICKÉHO INVESTOVÁNÍ PŘI MODELU OPTIMALIZACE PORTFOLIA S PODMÍNKAMI DRUHÉHO ŘÁDU STOCHASTICKÉ DOMINANCE</u>	92
<i>Jan Rejthar:</i> <u>NEVYUŽITÝ POTENCIÁL ESPORTU V EKONOMII</u>	98

PREDIKOVANIE FINANČNÝCH ŤAŽKOSTÍ PODNIKOV ZALOŽENÉ NA MARKOVOVÝCH REŤAZCOCH: VÝVOJ A SÚČASNÉ TRENDY

PREDICTING FINANCIAL DISTRESS OF COMPANIES BASED ON MARKOV CHAINS: DEVELOPMENT AND CURRENT TRENDS

Michal Bogár

Abstrakt

Tento príspevok spracováva prehľad literatúry so zameraním na sledovanie vývoja v predikcii finančných ťažkostí podnikov založenej na Markovových reťazcoch, od klasických diskretných modelov až po súčasné hybridné prístupy. Analýza demonštruje, že Markovove reťazce dokážu zachytiť dynamiku zmien ratingov, kvantifikovať pravdepodobnosť úpadku, a tak včasne varovať pred úpadkom. Popísané štúdie pokrývajú široké spektrum aplikácií od modelovania pravdepodobnosti bankrotu cez matice prechodov s Markovovými reťazcami, cez hybridné metódy prepájajúce viacero modelov, až po extrakciu nových premenných pomocou pravdepodobnostnej analytickej techniky, Markovovej metódy diskriminácie. Súbežne sa zdôrazňuje význam legislatívnych zmien, aké priniesol slovenský zákon č. 111/2022 Z. z. a medzinárodný štandard IFRS9, ktoré zvyšujú tlak na včasné odhalenie platobnej neschopnosti, a tak podporujú implementáciu pokročilých predikčných nástrojov. Celkovo príspevok potvrdzuje, že Markovové reťazce kombinované s modernými dátovými a analytickými technikami predstavujú výkonný nástroj na predikciu finančných ťažkostí podnikov, pričom ďalšou výzvou ostáva ich adaptácia na segment malých a stredných podnikov s obmedzenými zdrojmi dát.

Kľúčové slová: bankrot, default, predikcia finančných ťažkostí, Markovove reťazce

Abstract

This paper provides an overview of the literature focusing on developments in the prediction of corporate financial distress based on Markov chains, from classical discrete models to current hybrid approaches. The analysis demonstrates that Markov chains can capture the dynamics of rating changes, quantify the probability of default, and thus provide early warning of default. Described studies cover a wide range of applications, from modelling bankruptcy probability via transition matrices with Markov chains, to hybrid methods linking multiple models, to extracting new variables using Markov for Discrimination. The importance of legislative changes, such as those brought about by the Slovak Act No. 111/2022 Coll. and the international standard IFRS9, increases the pressure for early detection of insolvency and thus support the implementation of advanced prediction tools. Overall, the paper confirms that Markov chains combined with modern data and analytical techniques are a powerful tool for predicting financial difficulties in companies, while their adaptation to the small and medium-sized enterprise segment with limited data resources remains a challenge.

Keywords: bankruptcy, default, prediction of financial distress, Markov chains

1 Úvod

Tento prehľad literatúry predstavuje komplexný pohľad na použitie Markovových reťazcov a súvisiacich stochastických modelovacích techník pri predpovedaní úpadku, pričom syntetizuje výskum za viac ako dve desaťročia od základných teoretických postupov až po moderné hybridné prístupy. Analýza odhaľuje výrazný vývoj od jednoduchých modelov modelovaných v diskretnom čase až po hybridné metodológie prepájajúce Markovové reťazce so strojovým učením, ktoré dosahujú vynikajúcu predikčnú schopnosť.

Predikcia úpadku predstavuje mimoriadne dôležitú oblasť riadenia finančného rizika, ktorá zahŕňa systematické ohodnocovanie pravdepodobnosti finančných ťažkostí v určitom časovom horizonte vo vybranom podniku. Finančné ťažkosti podniku môžu nadobúdať rôzne formy, ako je napríklad zlyhanie, teda konkurz, platobná neschopnosť, teda insolvenca alebo bankrot. Táto oblasť výskumu vznikla z primárnej potreby chrániť všetky zúčastnené strany vrátane veriteľov, investorov, zamestnancov a regulačných orgánov pred značnými ekonomickými stratami spojenými s úpadkom podniku.

V kontexte slovenskej legislatívy nadobudol od 17. júla 2022 účinnosť nový zákon č. 111/2022 Z. z. o riešení hroziaceho úpadku, ktorý zásadne mení prístup k platobnej neschopnosti na Slovensku. Nová právna úprava zavádza preventívne opatrenia a rozširuje povinnosti dlžníkov vo forme právnických osôb, ktorí musia po novom podať návrh na vyhlásenie konkurzu do 30 dní od zistenia úpadku, pričom úpadok zahŕňa nielen predĺženie, ale aj platobnú neschopnosť. Platobná neschopnosť je po novom definovaná prísnejšie. Konkrétne je právnická osoba považovaná za platobne neschopnú, ak nedokáže 90 dní po lehote splatnosti uhradiť aspoň dva peňažné záväzky viac ako jednému veriteľovi. Zákon zároveň zavádza domnienku platobnej schopnosti, ktorá umožňuje dlžníkovi preukázať, že je schopný splniť svoje splatné záväzky, ak má dostatočný finančný majetok alebo ho získa do 60 dní od vzniku úpadku. Nová legislatíva tak kladie dôraz na včasné rozpoznanie rizika úpadku a aktívne riešenie platobnej neschopnosti.

2 Prehľad literatúry

Integrácia Markovových reťazcov do predikovania bankrotu vyplynula z poznatku, že finančné zdravie podnikov je závislé od predošlého vývoja a že zmeny úverového ratingu vykazujú pozorovateľné vzorce správania. Diskrétno Markovove reťazce predstavujú základnú aplikáciu stochastického modelovania v predpovedaní úpadku účtovných jednotiek, pričom sa v nich prechody úverového ratingu a zmeny finančného zdravia považujú za diskrétno udalosti. Práca, ktorú predstavili Jarrow, Lando a Turnbull (1997) vytvorila teoretický základ pre používanie Markovových reťazcov pri modelovaní kreditného rizika v diskretnom aj spojitom čase. V tomto prípade každá úroveň úverového ratingu predstavuje konkrétny stav v časovo homogénnom Markovovom reťazci v konečnom stavovom priestore, pričom posledný, absorbujúci stav, predstavuje bankrot. Autori v článku prezentujú aj empirický príklad viacerých alternatívnych modelov pre odhad rozpätia úverového rizika alebo pravdepodobnosti prežitia firiem v horizonte niekoľkých dekád za použitia odhadnutých matic prechodov. Tieto prechodové matice boli získané z reportov agentúr Moody's z roku

1992 a S&P z roku 1993 a operujú s jednoročným časovým horizontom, sledujúc skupinu firiem na začiatku a na konci roka.

Obdobný prístup demonštrovalo mnoho ďalších autorov, medzi nimi napríklad Duffie a Wang (2003) alebo Krüger, Stötzel a Trück (2005). Krüger et al. vo svojej publikácii overili štatistickú významnosť Markovových reťazcov prvého aj druhého rádu pri odhadovaní defaultu za použitia dát o nemeckých firmách. Autori, okrem iného, preverovali aj prítomnosť tzv. Rating drift efektu, čo sa úplne nepotvrdilo. Naopak pozorovali tzv. Rating equalization efekt, kedy mali spoločnosti tendenciu vrátiť sa k svojmu pôvodnému ratingu po tom, čo im bol zlepšený alebo zhoršený.

Fuh a Kao (2009) predpokladajú vo svojej práci, že hodnota firmy nasleduje Markovovu náhodnú prechádzku (Random walk), ktorá je formovaná ako Markovov reťazec v diskretnom čase a konečnom stavovom priestore, kde je posledný stav taktiež definovaný ako absorbčný a reprezentuje bankrot. Avšak autori rozdeľujú ponímanie bankrotu na dva typy, a to exogénny, kedy firma prvýkrát skutočne dosiahne stav bankrotu a endogénny, kedy hodnota firmy prvýkrát klesne pod predurčenú hranicu.

Model prvého prechodu v tomto prípade odhaduje množstvo času, ktorý uplynie, kým hodnota firmy prvýkrát prekročí vopred stanovenú hranicu. Tento prístup umožňuje aproximáciu očakávaného času do bankrotu aj pravdepodobnosť v chvoste rozdelenia. Testovanie na dátach od agentúry S&P z roku 2008 ukazuje, že tento prístup dokáže zachytiť rozdiely v pravdepodobnostiach úpadku medzi firmami s rozdielnym ratingom a aj v rámci tej istej ratingovej kategórie.

Kraft a Steffensen (2006) navrhli jednotnú štruktúru na modelovanie rôznych typov kreditného rizika, vrátane rizika nákazy medzi spoločnosťami, finančnej tiesne a rizika bankrotu prostredníctvom Markovovho reťazca s konečným počtom stavov, demonštrujúc ako môže byť takýto problém formulovaný pomocou rovníc parciálnych derivácií. Kreditné udalosti, ako napríklad zmena ratingu a bankrot sú následne interpretované ako prechody medzi stavmi reťazca, pričom sa autorom podarilo model zjednodušiť tak, aby nebol preparametrizovaný.

Vo svojej monografii sa Bellini (2019) zameriava na modelovanie úverového rizika v kontexte nového medzinárodného štandardu IFRS9 pomocou rôznych metodológií, ako sú napríklad generalizované lineárne modely (GLM), analýza prežitia, strojové učenie a modelovanie pomocou matíc prechodov vrátane Markovových reťazcov. Práve pri Markovových reťazcoch prezentuje dva odlišné spôsoby na výpočet matíc prechodov, a to pomocou sledovania tranzícií v čase, alebo v rámci kohorty. Kohortový prístup odhaduje pravdepodobnosti prechodov ako podiel počtu sledovaných jednotiek, ktoré prešli z jednej triedy do inej triedy počas jedného sledovaného obdobia. Takýto spôsob generovania prechodových matíc môže byť výhodný v prípade malého časového horizontu, no dostatočného počtu pozorovaní.

V posledných rokoch narastá počet publikácií zameraných na integráciu techník strojového učenia s tradičnými štatistickými metódami, vrátane neurónových sietí s Markovovým aspektom, zložených (tzv. ensemble) metód a sofistikovaných hybridných prístupov. Prístupy,

ktoré zahŕňajú aj koncepty Markovových reťazcov odhaľujú výhody oproti tradičným modelom, najmä pokiaľ ide o dynamické hodnotenie rizika a schopnosti včasného varovania.

Hybridný prístup na predikciu bankrotu predstavili v roku 2019 Li a Faff pomocou tzv. regime-switching prístupu, ktorý v modeli dynamicky upravuje dôležitosť účtovných a trhových informácií o spoločnosti. Autori prepájajú predikciu bankrotu založenú na Altmanovom Z-skóre podľa piatich pomerových ukazovateľov a Mertonov model. Prezentovaný hybridný prístup sa ukázal ako úspešnejší v porovnaní s oboma samostatnými modelmi pri empirickom testovaní na amerických dátach z rokov 1988 až 2011.

Odišný prístup zvolil Volkov et al. (2017), ktorí predstavili tzv. Markov for Discrimination (MFD) model, ktorý môžeme voľne preložiť aj ako metódu Markovovej diskriminácie, pričom tento model klasifikuje spoločnosti podľa rizika bankrotu. Daný model demonštruje, že Markovové reťazce môžu slúžiť aj na získavanie nových informácií z už existujúcich dát. Pomocou MFD dokázali autori extrahovať nové premenné združujúce informácie z finančných pomerových ukazovateľov Belgických firiem za viacero časových období. Pri tvorbe nových premenných autori najprv diskretizovali pôvodné spojité premenné do intervalov s rovnakou početnosťou a následne pomocou Markovových reťazcov vypočítali pravdepodobnosti prechodov jednotlivých spoločností medzi zvolenými intervalmi, pričom použili časové horizonty o dĺžke štyroch rokov. Pri porovnaní s dátami zahŕňajúcimi iba jedno časové obdobie bol navrhnutý postup úspešnejší podľa viacerých evaluačných metrík. Testovanie modelu prebiehalo na dátovom súbore s údajmi o bankrotoch belgických firiem pomocou viacerých algoritmov strojového učenia, ako napr. logistická regresia, SVM a XGBM.

Integrácia Markovových reťazcov so strojovým učením predstavuje trend vo výskume, ktorý kombinuje schopnosti stochastických procesov modelovať čas so schopnosťou rozpoznávania vzorov moderných ML algoritmov. Adam et al. (2024) predstavili Markovovské rozhodovacie stromy, ktoré kombinujú interpretovateľnosť metód založených na rozhodovacích stromoch s časovou dynamikou Markovových modelov. Ich prístup využíva skryté Markovové modely na výber vhodných rozhodovacích stromov v každom časovom bode, pričom aplikovateľnosť siaha od športovej analýzy až po finančné rozhodovanie, čo môže byť nápomocné aj pri modelovaní finančného zdravia podnikov.

Nekonvenčný postup navrhol aj Nguyen (2023), ktorý kombinuje modely predikujúce bankrot založené na korelácii krehkosti (frail) s metódou Particle Markov Chain Monte Carlo (PMCMC), ktorý do modelu zahŕňa aj názor expertov prostredníctvom bayesovského prioru. Tento prístup rieši problém neistoty parametrov v komplexných modeloch a zároveň umožňuje zahrnúť subjektívne hodnotenia expertov z vybranej oblasti. Daný model založený na metodológii PMCMC dosahuje presnosť predpovedí neschopnosti splácať dlh (default) na úrovni 96 % v jednoročnom predstihu a 86 % v dvojročnom predstihu s použitím údajov o firmách z USA v období 1980 až 2019. Tieto výsledky sú výrazne lepšie ako predikcie získané logistickou regresiou s presnosťou 82 % pre jednoročné a 73 % pre predpovede v dvojročnom predstihu.

3 Záver

Na základe analyzovanej literatúry môžeme konštatovať, že Markovové reťazce a s nimi súvisiace stochastické modely sa etablovali ako výkonný nástroj pri predikcii finančných ťažkostí podnikov. Ich výhodou je schopnosť dynamicky modelovať prechody medzi stavmi finančného zdravia podnikov, čo umožňuje posúdiť pravdepodobnosť úpadku v budúcnosti na základe súčasného stavu a predchádzajúceho vývoja firmy. Výskum ukazuje posun od tradičných Markovových reťazcov cez rôzne rozšírenia až po hybridnú integráciu s ďalšími metódami, ako je napríklad strojové učenie, čo zvyšuje presnosť a spoľahlivosť predikcií. Nové metodológie navyše reagujú na legislatívne zmeny vo svete a aj na Slovensku, čo zdôrazňuje potrebu skorého varovania pred úpadkom. Vývoj v tejto oblasti preto naznačuje ďalší potenciál pre prepojenie rôznych modelovacích techník za účelom zvyšovania presnosti. Možnou výzvou v tejto oblasti je tiež aplikácia obdobných prístupov na segment malých a stredných podnikov, kde chýbajú dlhšie časové rady alebo dostatočne detailné dáta.

Podakovanie

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA 1/0047/23 „Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa“.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh pre mladých učiteľov, vedeckých pracovníkov a doktorandov v rámci projektu A-25-103/3020-08 „Preskúmanie interdisciplinárnych stratégií pre efektívne manažovanie životného prostredia a udržateľný rozvoj“.

4 Literatúra

1. ADAM, Timo, ÖTTING, Marius, MICHELS, Rouven. Markov-switching decision trees. In: *AStA Advances in Statistical Analysis* [online]. 2024, roč. 108, č. 2, s. 461-476 [cit. 16.11.2025]. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10182-024-00501-6>
2. BELLINI, Tiziano. IFRS 9 and CECL credit risk modelling and validation : a practical guide with examples worked in R and SAS. Amsterdam: Academic Press, 2019. ISBN 9780128149409.
3. DUFFIE, Darrell, WANG, Ke. Multi-Period Corporate Failure Prediction With Stochastic Covariates. In: *SSRN Electronic Journal* [online]. 2003. DOI: <https://doi.org/10.2139/ssrn.647862>
4. FUH, Cheng-Der, KAO, Chu-Lan. Bankruptcy Prediction Based on First-Passage Models with Markovian Credit Migration. 2009 [cit. 16.10.2025]
5. JARROW, Robert A., LANDO, David, TURNBULL, Stuart M. A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. In: *Review of Financial Studies* [online]. 1997, roč. 10, č. 2, s. 481-523. DOI: <https://doi.org/10.1093/rfs/10.2.481>
6. KRAFT, Holger, STEFFENSEN, Mogens. Bankruptcy, Counterparty Risk, and Contagion. In: *Review of Finance* [online]. 2007, roč. 11, č. 2, s. 209-252. DOI: <https://doi.org/10.1093/rof/rfm002>

7. KRÜGER, Ulrich, STÖTZEL, Martin, TRÜCK, Stefan. Time Series Properties of a Rating System Based on Financial Ratios. In: *SSRN Electronic Journal* [online]. 2005 [cit. 17.10.2025]. DOI: <https://doi.org/10.2139/ssrn.2793973>
8. LI, Leon, FAFF, Robert. Predicting corporate bankruptcy: What matters? In: *International Review of Economics & Finance* [online]. 2019, roč. 62, s. 1-19. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.iref.2019.02.016>
9. NGUYEN, Ha. Particle MCMC in Forecasting Frailty-Correlated Default Models with Expert Opinion. In: *Journal of Risk and Financial Management* [online]. 2023, roč. 16, č. 7, s. 334. DOI: <https://doi.org/10.3390/jrfm16070334>
10. VOLKOV, Andrey, BENOIT, Dries F., VAN DEN POEL, Dirk. Incorporating sequential information in bankruptcy prediction with predictors based on Markov for discrimination. In: *Decision Support Systems* [online]. 2017, roč. 98, s. 59-68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dss.2017.04.008>
11. Zákon o riešení hroziaceho úpadku a o zmene a doplnení niektorých zákonov, č. 111/2022 Z. z. (2022). <https://www.slov-lex.sk/ezbierky/pravne-predpisy/SK/ZZ/2022/111/>

Kontaktné údaje

Ing. Michal Bogár

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: michal.bogar@euba.sk

ENVIRONMENTÁLNE MODELÝ V PROCESSE EKOLOGICKÉHO ROZHODOVANIA

ENVIRONMENTAL MODELS IN THE ECOLOGICAL DECISION-MAKING PROCESS

Ivan Brezina, Juraj Pekár, Marian Reiff

Abstrakt

Predmetom environmentálneho modelovania je analýza a reprezentácia komplexných ekologických procesov, v ktorých sa stretávajú prírodné, ekonomické a sociálne faktory a možno v ňom aplikovať súbor koncepcií, stratégií a taktík, ale tiež metód a spôsobov riešenia environmentálnych problémov. Pretože tieto procesy v sebe obsahujú vysokú mieru neistoty a ekologické systémy sú veľmi zložité, zohrávajú environmentálne modely kľúčovú úlohu pri hľadaní udržateľných riešení. Cieľom tejto štúdie je prezentovať úlohu modelovania ako nástroja podpory rozhodovania v environmentálnej oblasti. Štúdia prezentuje typy environmentálnych modelov, ich aplikácie v praxi a poukazuje na výhody i limity modelovania. Výsledky ukazujú, že modely významne prispievajú k zníženiu neistoty, vizualizácii alternatívnych scenárov a optimalizácii rozhodnutí, avšak ich efektivita závisí od kvality dát, správnej interpretácie a kontextu použitia.

Kľúčové slová: ekologické rozhodovanie, environmentálne modelovanie

Abstract

The subject of environmental modeling is the analysis and representation of complex ecological processes in which natural, economic and social factors meet and a set of concepts, strategies and tactics, as well as methods and ways of solving environmental problems can be applied in it. Because these processes contain a high degree of uncertainty and ecological systems are very complex, environmental models play a key role in finding sustainable solutions. The aim of this study is to present the role of modeling as a tool to support decision-making in the environmental field. The study presents the types of environmental models, their applications in practice and points out the advantages and limits of modeling. The results show that models significantly contribute to reducing uncertainty, visualizing alternative scenarios and optimizing decisions, but their effectiveness depends on the quality of data, correct interpretation and context of use.

Keywords: ecological decision-making, environmental modeling

ÚVOD

Súčasnú svetovú environmentálnu problematiku sa prejavuje predovšetkým klimatickou zmenou, degradáciou ekosystémov a znečisťovaním životného prostredia. Ekologické rozhodovanie je preto dnes kľúčovým prvkom environmentálnej politiky, regionálneho plánovania aj manažmentu prírodných zdrojov. Rastúci tlak klimatických zmien, degradácie pôdy a ekosystémov vytvára potrebu vedecky podložených nástrojov, ktoré dokážu predvídať dôsledky rozhodnutí.

Tento stav vyžaduje kvalifikované ekologické rozhodnutia decíznej sféry. Zodpovední environmentálni manažéri (štátna správa, samospráva, podniky či neziskové organizácie)

takto čelia zložitému prostrediu s konfliktom záujmov a vysokou mierou neistoty. Environmentálny manažment môže predstavovať vhodný kontrolný administratívny nástroj, ktorý zabráňuje nadbytočným ekologickým škodám (Molina-Azorín et al., 2015).

V procese ekologického rozhodovania v rámci koncepcie trvalo udržateľného rozvoja predstavuje environmentálny manažment systém riadenia zameraný na ochranu životného prostredia na globálnej, regionálnej ako aj lokálnej úrovni. Tradičná ekonomická analýza často prehliada ekologické spätné väzby, zatiaľ čo prosté ekologické modelovanie môže na druhej strane zanedbávať finančnú uskutočniteľnosť. Environmentálne modely umožňujú oba tieto prístupy integrovať a poskytujú štruktúrované podklady pre udržateľné politiky, investície a manažérske stratégie (Nordhaus, 1994; Funtowicz & Ravetz, 1993).

V environmentálnom rozhodovaní sa čoraz viac uplatňuje modelovanie, ktoré umožňuje prepojiť vedecké poznatky s praktickými rozhodnutiami. Environmentálne modely poskytujú náhľad na fungovanie prírodných procesov, simulujú budúce scenáre a vytvárajú základ pre transparentné a dátami podložené rozhodovanie.

Cieľom tejto štúdie je ukázať, ako môže modelovanie podporovať environmentálne rozhodovanie, aké sú jeho praktické aplikácie a aké limity treba brať do úvahy.

1 METODOLOGICKÝ RÁMEC

Metodologický rámec prezentovanej štúdie pozostáva z:

1. Analýzy literatúry – preskúmanie súčasných poznatkov o modelovaní v oblasti environmentálnych vied, vrátane klimatických, hydrologických a socio-ekonomických modelov.
2. Kategorizácie modelov – rozdelenie podľa účelu a metód (deterministické, stochastické, priestorové, integrované).
3. Komparatívnej analýzy – porovnanie prínosov a limitov modelov v rozhodovacom procese.

Metodológia má prevažne exploratívny charakter a jej cieľom je syntetizovať existujúce poznatky, nie prinášať primárny empirický výskum.

2 PREHLAD KĹÚČOVEJ LITERATÚRY

Podstatu ekologického rozhodovania predstavuje proces prijímania rozhodnutí o využívaní prírodných zdrojov, ochrane životného prostredia a hospodárení s ekosystémami, pri ktorom sa zohľadňujú nielen ekonomické a sociálne faktory, ale aj dlhodobá udržateľnosť a limity prírody. Hlavným cieľom ekologického rozhodovania je minimalizovať negatívne dopady ľudskej činnosti na životné prostredie a podporiť rozhodnutia, ktoré sú ekologicky únosné (nezhoršujú stav prírody), sú ekonomicky efektívne (nevedú k neúmerným stratám) a sú sociálne spravodlivé (berú ohľad na ľudí a komunity). Ekologické rozhodovanie spája poznanie o ekosystémoch so spoločenskými potrebami tak, aby sa dosiahla rovnováha medzi rozvojom a ochranou životného prostredia.

Typické oblasti ekologického rozhodovania predstavujú energetika (voľba medzi fosílnymi palivami a obnoviteľnými zdrojmi), využívanie pôdy (poľnohospodárstvo vs. ochrana prírody), priemyselná politika (nastavenie regulácií pre emisie a znečistenie), vodné hospodárstvo (ochrana zdrojov pitnej vody, prevencia povodní a sucha), ako aj doprava a urbanizmus (udržateľná mobilita, zelené mestá).

Podstatu ekologického rozhodovania vysvetľujú klasické diela ako Limits to Growth (Meadows et al., 1972) a práce Costanzu (Costanza, 1991) či Nortona (Norton, 2005), ktoré zdôrazňujú hodnoty udržateľnosti. Metodologickú stránku poskytujú práce o štruktúrovanom rozhodovaní (Keeney, 1996).

Pretože ekologické rozhodovanie sa odohráva v prostredí plnom neistoty, environmentálne modely (klimatické, hydrologické, ekonomické) môžu poskytnúť rozhodovateľom nástroje na simuláciu možných budúcich scenárov, analýzu alternatívnych riešení, odhad rizík a prínosov jednotlivých rozhodnutí, optimalizáciu finančných a ekologických dopadov.

V súčasnosti možno identifikovať viacero kľúčových smerov výskumu a aplikácií environmentálnych modelov. Nordhaus (1994) vo svojom modeli DICE formuloval možnosti prepojenia ekonomických a klimatických premenných. Funtowicz a Ravetz (1993) zdôraznili význam post-normálnej vedy integrujúcej hodnoty a neistoty do rozhodovania. Kľúčová literatúra poskytuje pevný základ pre analýzu modelovania v environmentálnych vedách a je zhrnutá v tabuľke 1.

Tabuľka 1 Prehľad základnej literatúry k environmentálnemu modelovaniu

Autor	Rok	Typ modelu	Prínos
Beven	2018	Všeobecné metodológie	Neistoty v environmentálnom modelovaní
Ford	2010	Všeobecné metodológie	Systémová dynamika v environmentálnych vedách
Legg	2021	Klimatické modely	Najnovší prehľad klimatických modelov
Randall et al.	2007	Klimatické modely	Definícia a hodnotenie klimatických modelov
Flato et al.	2013	Klimatické modely	Výkonnosť klimatických modelov
Singh & Woolhiser	2002	Hydrologické modely	Matematické modelovanie hydrológie povodí
Meadows et al.	1972	Socio-ekonomické modely	Limits to Growth – globálne systémové modelovanie
Sterman	2000	Socio-ekonomické modely	Systémové myslenie a modelovanie komplexných systémov
Weyant	2017	Socio-ekonomické modely	Integrované hodnotiace modely klimatických zmien
Rotmans & van Asselt	1999	Integrované modely	Metodológia integrovaného modelovania
Weyant	1995	Integrované modely	Úvod do IAM a využitie pri klimatickej politike
Nordhaus	1994	Integrované modely	Ekonomicko-klimatický DICE model

Aj na Slovensku možno sledovať v posledných rokoch orientáciu na environmentálne modely. Publikácie, ktorých spoločným znakom je prepájanie teoretických modelov s praktickými aplikáciami, interdisciplinárny prístup a dôraz na udržateľnosť a efektívne rozhodovanie, pritom pokrývajú tri hlavné výskumné línie:

1. Environmentálne modely ako základ rozhodovania v oblasti ekológie, Brezina et al., 2023a, Brezina et al., 2024b.
2. Klasické optimalizačné problémy a operačný výskum (TSP, lokalizačné modely, dopravné systémy). Sem možno zaradiť práce Brezina et al., 2024, Čičková & Pekár, 2024, Pekár et al., 2023.
3. Environmentálne investovanie a ESG prístupy (modely výberu portfólia na báze environmentálnych kritérií, analýza environmentálnych spoločností a integrácia rizikových mier). Túto oblasť reprezentujú práce Brezina et al., 2023b, Pekár et al., 2023a, Pekár et al., 2023b, Pekár et al., 2025.
4. Aplikácie v poľnohospodárstve a ekológii (využitie optimalizačných metód pre udržateľné rozhodovanie). Optimalizačné modely v poľnohospodárstve a ich riešenie pomocou metaheuristických prístupov sú prezentované v prácach Reiff et al., 2024, Reiff et al., 2025a, Reiff et al., 2025b, resp. Reiff et al., 2025c.

Spoločným menovateľom týchto publikácií je systematické prepájanie teoretických modelov s praktickými aplikáciami, interdisciplinárny prístup a dôraz na udržateľné a efektívne rozhodovanie.

3 ENVIRONMENTÁLNE MODEL Y V PROCES E EKOLOGICKÉHO ROZHODOVANIA

Environmentálne modely sa odlišujú od tradičných modelov tým, že sa zameriavajú na obnoviteľnosť, znovupoužívanie a recykláciu zdrojov s cieľom znížiť spotrebu a produkciu odpadu. Typickými príkladmi aplikácie environmentálnych modelov sú vodné hospodárstvo (hydrologické modely simulujú dopady sucha či povodní a pomáhajú pri plánovaní vodných zdrojov), klimatická politika (integrované modely hodnotia efektívnosť emisných opatrení a ich vplyv na ekonomiku), mestské plánovanie (modely dopravy a znečistenia ovzdušia umožňujú lepšie navrhovať infraštruktúru), poľnohospodárstvo (agroekologické modely odhadujú výnosy plodín v podmienkach meniacej sa klímy). Tieto systémy nie sú na sebe úplne nezávislé a v mnohých prípadoch môžu byť navzájom podmnožinami. Napríklad hydrologické systémy povrchových vôd sú často súčasťou oveľa väčších klimatických systémov, ale aj sa mnohé hlavné environmentálne systémy v sebe zahŕňajú ďalšie ekologické podsystemy. Zaujímavý prehľad environmentálnych modelov poskytuje Brezina et al. (2023).

Hlavný prínos environmentálnych modelov, ktoré prepájajú poznatky z prírodných vied, technológií a socio-ekonomických analýz s praktickými rozhodnutiami, je skutočnosť, že poskytujú rozhodovateľom pre ich rozhodovanie spoľahlivejší základ ako intuitívne odhady alebo politické kompromisy. Pretože ekologické rozhodovanie sa odohráva v podmienkach nedostatku dát, neistoty a komplexnosti systémov, jednou z hlavných úloh environmentálnych modelov je znižovanie neistoty a to tak, že umožňujú testovať hypotézy, odhadovať budúci vývoj (napr. klimatické scenáre, hydrologické extrémny), kvantifikovať riziká, optimalizovať finančné náklady atď.

Na základe simulácie alternatívnych scenárov environmentálne modely umožňujú analyzovať napríklad ako sa zmení kvalita vody pri rôznych opatreniach, aké budú dôsledky využívania pôdy pri odlišných stratégiách, aký vplyv majú rôzne úrovne emisií na klímu a podobne. Simulácia možných scenárov robí z environmentálnych modelov „laboratórium“ pre rozhodovateľov. Umožňuje testovať opatrenia, predvídať dôsledky a vyberať také stratégie, ktoré sú najlepšie z hľadiska udržateľnosti, ekonomiky a spoločenského prijatia. Vďaka simuláciám možno porovnať viaceré varianty ešte pred ich implementáciou, čo znižuje riziko nákladných chýb.

Veľmi dôležitou oblasťou simulácií je napríklad kvalita vody a vodné hospodárstvo, v rámci ktorého možno prostredníctvom hydrologických a vodohospodárskych modelov analyzovať vplyv zmeny poľnohospodárskych praktík (napr. používanie hnojív či pesticídov) na eutrofizáciu vôd, účinnosť opatrení ako sú nové čističky odpadových vôd alebo zmeny v manažmente povodia, scenáre sucha alebo povodní a ich dopad na zásoby pitnej vody, náklady a prínosy opatrení (napr. revitalizácia mokradí vs. technické zásahy) atď. a rozhodovatelia tak môžu zvoliť také opatrenia, ktoré udržia kvalitu vody pri optimálnych nákladoch.

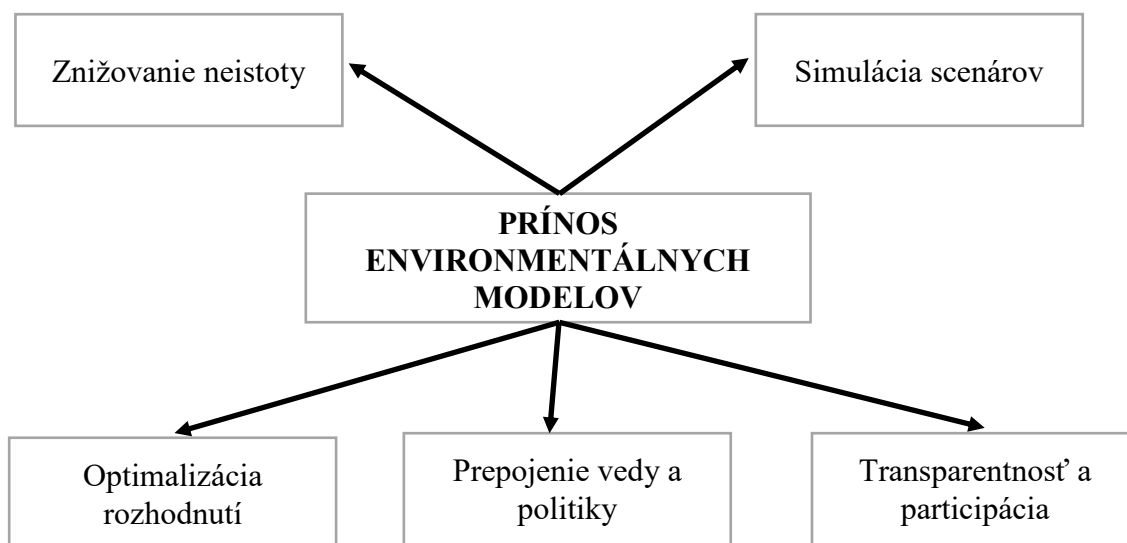
Takisto dôležitou oblasťou simulácií je využívanie pôdy a krajinné plánovanie, pričom modely využívania pôdy (land-use models) simulujú, ako sa krajina mení pri rôznych stratégiách, aký vplyv bude mať teda urbanizácia (rozširovanie miest vs. ochrana zelených plôch), poľnohospodárstvo (intenzívne pestovanie vs. agroekologické postupy), lesníctvo (hospodárske využívanie lesa vs. ochrana biodiverzity), erózia a degradácia pôdy (dopady orby, pastvy či odlesňovania) atď. Modely umožňujú hľadať kompromisy, napríklad ako zvýšenie poľnohospodárskej produkcie ovplyvní biodiverzitu a uhlíkovú bilanciu.

Klimatické a integrované modely umožňujú simulovať a testovať dopady rôznych emisných stratégií, poskytujú scenáre znižovania emisií CO₂, politické opatrenia ako uhlíková daň, emisné povolenky alebo investície do obnoviteľných zdrojov, technologické inovácie (zavádzanie elektromobility, CCS, vodíkových technológií), medzinárodnú spoluprácu (čo sa stane, ak budú emisie znižovať len niektoré regióny sveta) atď. a tak vytvárať základ pre scenáre, ktoré určujú, ako sa bude vyvíjať globálna teplota, hladina morí a výskyt extrémov.

Čoraz väčší význam nadobúda prepojenie ekológie a ekonómie, teda analýza, aké bude mať príslušné rozhodnutie ekonomické a sociálne dôsledky, ide teda o prepojenie ekonomických a sociálnych faktorov. Tieto modely umožňujú analyzovať dopad emisných politík na HDP a zamestnanosť, vplyv klimatických zmien na ceny potravín a dostupnosť vody, sociálne dôsledky rôznych stratégií (napr. spravodlivá transformácia energetiky) a podobne. Vďaka takýmto ekonomickým, sociálnym a ekologickým simuláciám možno vopred identifikovať konflikty a navrhnúť kompenzačné mechanizmy.

Prínos environmentálnych modelov v ekologickom rozhodovaní možno interpretovať prostredníctvom obrázku 1.

Obrázok 1. Prínos environmentálnych modelov v ekologickom rozhodovaní.



4 ZÁVER

Budúcnosť environmentálnych modelov spočíva v prepojení dát, disciplín a spoločnosti, tieto modely sa môžu stať nielen vedeckým nástrojom, ale aj platformou pre demokratické a adaptívne rozhodovanie, teda spoločenským nástrojom. S nástupom umelej inteligencie, big data a strojového učenia sa rozširujú možnosti environmentálneho modelovania. Nové prístupy umožňujú vytvárať presnejšie predpovede v reálnom čase, kombinovať masívne množstvá dát (satelitné snímky, senzory, klimatické merania), zlepšiť adaptívne riadenie prostredníctvom dynamických modelov.

V perspektíve rozvoja environmentálnych modelov v ekologickom rozhodovaní bude hrať dôležitú úlohu integrácia umelej inteligencie a strojového učenia. Umelá inteligencia a machine learning umožňujú spracovať obrovské množstvo dát zo satelitov, senzorov a otvorených databáz. Tak sa predikčné modely stávajú presnejšími a pružnejšími, schopnými učiť sa z nových dát v reálnom čase. Rozvoj tzv. hybridných modelov (spojenie tradičných mechanistických modelov a umelej inteligencie) kombinuje výhody oboch prístupov – vedeckú interpretovateľnosť a výpočtovú silu algoritmov.

Pri modelovaní ekologických procesov sa spracúva obrovské množstvo údajov. Preto Big Data a internet vecí (IoT), využívanie senzorových sietí (napr. na monitoring kvality ovzdušia či vody), satelitné a diaľkové snímkovanie poskytuje kontinuálne a globálne údaje o klíme, vegetácii či urbanizácii. Prepojenie dát z rôznych zdrojov zlepšuje presnosť modelov a umožňuje detailnejšie simulácie.

Budúcnosť teda patrí modelom, ktoré prepájajú ekologické, ekonomické a sociálne dimenzie.

Integrované hodnotiace modely sa budú čoraz viac používať na podporu klimatických a environmentálnych politík a posilní sa aj spolupráca medzi disciplínami – klimatológia, ekonómia, sociológia, právo, etika.

Rozvoj metód participatívneho a kolaboratívneho modelovania, kde do tvorby a testovania scenárov vstupujú aj politici, odborníci z praxe, občianske združenia a komunita posilní transparentnosť a legitimizáciu rozhodovania (keď občania vidia, ako sa modely tvoria, stúpa dôvera vo výsledky).

Možno predpokladať, že modely sa nebudú používať len na jednorazové rozhodnutia, ale ako adaptívne nástroje, ktoré sa priebežne aktualizujú. Uplatnia sa v real-time riadení – napr. pri povodniach, energetickom manažmente alebo monitoringu biodiverzity.

Interaktívne vizualizácie a simulačné nástroje (napr. dashboardy, digitálne dvojčatá miest a ekosystémov) umožnia lepšie porozumieť výstupom. Rozvoj virtuálnej reality a rozšírenej reality predstavujú budúce nástroje pre politikov aj verejnosť, v rámci ktorých budú môcť testovať dôsledky rozhodnutí vo virtuálnom prostredí.

A nakoniec, modely budú musieť súčasne riešiť globálne problémy (klimatická zmena, biodiverzita) a lokálne otázky (mestské plánovanie, kvalita ovzdušia). Rastie tak dôležitosť škálovateľných modelov, ktoré dokážu fungovať na rôznych úrovniach (od mikroregiónu po celú planétu).

Modelovanie už v súčasnosti predstavuje neoddeliteľnú súčasť environmentálneho rozhodovania. Jeho prínos spočíva v schopnosti prepájať vedecké poznanie s praktickými opatreniami, znižovať neistotu a podporovať transparentnosť.

Efektívne využitie modelov si vyžaduje kvalitné dáta, interdisciplinárny prístup a dôkladnú komunikáciu výsledkov smerom k rôznym aktérom.

Do budúcnosti sa očakáva rastúci význam modelovania, a to najmä s nástupom umelej inteligencie a big data, ktoré umožnia vytvárať ešte presnejšie a flexibilnejšie modely. Tieto nástroje budú kľúčové pre zvládanie environmentálnych výziev 21. storočia.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia výskumného projektu VEGA – 1/0120/23 „Environmentálne modely ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí“.

Použitá literatúra

1. ARNOLD, J. G., SRINIVASAN, R., MUTTIAH, R. S., & WILLIAMS, J. R. (1998). *Large area hydrologic modeling and assessment: Part I. Model development*. Journal of the American Water Resources Association, 34(1), 73–89.
2. BEVEN, K. J. (2018). *Environmental Modelling: An Uncertain Future?* CRC press.
3. BREZINA, I., GEŽÍK, P., PEKÁR, J. & REIFF, M. (2023a). *Environmentálne modely*. Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu : mezinárodní vědecký seminář, 22. listopad - 24. listopad 2023, Praha. S. 5-12. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM.
4. BREZINA, I., PEKÁR, J. & REIFF, M. (2023b). *Environmentálne investovanie*. Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XV: zborník zo seminára, 24. - 26. mája 2023, Púchov. S. 5-11. - Bratislava : Letra Edu.
5. BREZINA, I., PEKÁR, J. & REIFF, M. (2024). *Alternative Solution of Travelling Salesman Problem in MS Excel*. AIESA - BUILDING OF SOCIETY BASED ON KNOWLEDGE: 21st International Scientific Conference: November 14 - 15, 2024. Vydavateľstvo EKONÓM.
6. COSTANZA, R. (1991). *Ecological Economics: The Science and Management of Sustainability*. Columbia University Press.
7. ČIČKOVÁ, Z. & PEKÁR, J. (2024). *Cooperation in the Transport System with Intermediate Warehouses*. Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XXII: Proceedings of the International Scientific Conference : 12th June - 14th June 2024, Bratislava, Vydavateľstvo EKONÓM.
8. FLATO, G., MAROTZKE, J., ABIODUN, B., BRACONNOT, P., CHOU, S. C., COLLINS, W., ... & RUMMUKAINEN, M. (2014). Evaluation of climate models. In *Climate change 2013: the physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (pp. 741-866). Cambridge University Press.
9. FORD, A. (2010). *Modeling the Environment*. (Vol. 488). Washington, DC: Island press.
10. FUNTOWICZ, S. O., & RAVETZ, J. R. (1993). *Science for the post-normal age*. Futures, 25(7), 739–755.
11. HAJER, M. A., & WAGENAAR, H. (EDS.). (2003). *Deliberative Policy Analysis: Understanding Governance in the Network Society*. Cambridge University Press.
12. KEENEY, R. L. (1996). *Value-Focused Thinking: A Path to Creative Decisionmaking*. Harvard University Press.
13. LEGG, S. (2021). IPCC, 2021: Climate change 2021-the physical science basis. *Interaction*, 49(4), 44-45.
14. MEADOWS, D. H., MEADOWS, D. L., RANDERS, J., & BEHRENS, W. W. (1972). *The Limits to Growth*. Universe Books. New York.
15. NORDHAUS, W. D. (1994). *Managing the global commons: the economics of climate change*. The MIT Press
16. NORTON, B. G. (2005). *Sustainability: A Philosophy of Adaptive Ecosystem Management*. University of Chicago Press.

17. PEKÁR, J., REIFF, M. & BREZINA, I. (2023). *Location of Service Devices at any Point in Two-dimensional Sphere*. SOR '23: Proceedings of the 17h International Symposium on Operational Research in Slovenia, September 20-22 2023, Bled, Slovenia, 375-378.
18. PEKÁR, J., BREZINA, I. & REIFF, M. (2023a). *Investment Portfolio Selection From Shares of Environmental Companies*. 41th International Conference on Mathematical Methods in Economics (MME 2023), September 13–15, 2023, Prague, Czech Republic, 332-336.
19. PEKÁR, J., BREZINA, I. & REIFF, M. (2023b). *Analysis of Financial Indicators Development of the World's Largest Environmental Companies*. Strategic Management and Decision Support Systems in Strategic Management SM 2023: 28th International Scientific Conference, Subotica, Serbia 18-19 May, 389-393.
20. PEKÁR, J., BREZINA, I. & REIFF, M. (2023c). *Green Investments: Portfolio Selection Based on Risk Measure and ESG Indicators. Impact of Environmental Indicators on Portfolio Selection*. Green Finance. Springfield : AIMS Press. 7(2), 223-246.
21. RANDALL, D. A., WOOD, R. A., BONY, S., COLMAN, R., FICHEFET, T., FYFE, J., ... & TAYLOR, K. E. (2007). Climate models and their evaluation. In *Climate change 2007: The physical science basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the IPCC (FAR)*, Cambridge University Press, 589-662.
22. REIFF, M., PEKÁR, J., & BREZINA, I. (2025a). *Innovative Optimization Applications for Sustainable Agriculture*. XXXVI. Magyar operációkutatási konferencia: program és előadáskivonatok. - [Budapest] : Magyar Operációkutatási Társaság, O. 31.
23. REIFF, M., BREZINA, I. & PEKÁR, J. (2025). *Spatial Optimization Applications in Agriculture*. ICBAP 2025: International Conference on Business Analytics in Practice: Machine Learning & AI in Business : Book of Abstracts : August 24-27, 2025: University of Piraeus, Greece. – Piraeus, 46-47.
24. REIFF, M., PEKÁR, J., & BREZINA, I. (2025b). *Location Models in Ecological Agriculture*. EURO 2025 - Leeds: Technical Program. - Birmingham : Operational Research Society, 59.
25. REIFF, M., BREZINA, I. & PEKÁR, J. (2024). *Environmental Models as a Tool for Ecological and Economic Decisions-Making*. EURO 2024 Copenhagen: 33rd European Conference on Operational Research : 30th June - 3rd July 2024, 432.
26. ROTMANS, J., VAN ASSELT, M. (1999). Integrated Assessment Modelling. In: Martens, P., Rotmans, J., Jansen, D., Vrieze, K. (eds) *Climate Change: An Integrated Perspective*. Advances in Global Change Research, vol 1. Springer, Dordrecht.
27. SINGH, V. P., & WOOLHISER, D. A. (2002). *Mathematical modeling of watershed hydrology*. Journal of Hydrologic Engineering, 7(4), 270–292.
28. STERMAN, J. D. (2000). *Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. Management, 6(1), 7-17.
29. WEYANT, J., DAVIDSON, O., DOWLATABADI, H., EDMONDS, J., GRUBB, M., PARSON, E. A., ... & FANKHAUSER, S. (1995). Integrated assessment of climate change: an overview and comparison of approaches and results. *Climate change*, 3.
30. WEYANT, J. P. (2017). *Some contributions of integrated assessment models of global climate change*. Review of Environmental Economics and Policy, 11(1), 115–137.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 2 67 295 821

email: ivan.brezina@euba.sk

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 2 67 295 827

email: juraj.pekar@euba.sk

doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 2 67 295 823

email: marian.reiff@euba.sk

TEÓRIA KOOPERATÍVNYCH HIER: PREHĽAD A APLIKÁCIE COOPERATIVE GAME THEORY: OVERVIEW AND APPLICATIONS

Zuzana Čičková

Abstrakt

Tento príspevok prináša prehľad kooperatívnej teórie hier so zameraním na vplyv informovanosti hráčov. V teoretickej časti sú predstavené základné pojmy, ako jadro (core), Shapleyho hodnota a balancedness, vrátane ich rozšírení pre prostredie neúplných a asymetrických informácií. Nadväzne sú analyzované kľúčové práce od autorov, ako von Neumann a Morgenstern, Shapley, Harsanyi, Myerson či Forges a Serrano, ktoré formovali vývoj kooperatívnych modelov. V aplikačnej časti sa pozornosť sústreďuje na využitie kooperatívnych hier v ekonómii a medzinárodných vzťahoch: najmä pri rozdeľovaní zdrojov, tvorbe koalícií a stabilite environmentálnych dohôd. Poukazujeme na prínos kooperatívnych prístupov k analýze spolupráce a zároveň zdôrazňuje výzvy spojené s neúplnými informáciami, politickými a inštitucionálnymi obmedzeniami.

Kľúčové slová: kooperatívne hry, neúplná informácia, koalície

Abstract

This paper provides a overview of cooperative game theory with an emphasis on the role of players' information structures. The theoretical section introduces core concepts such as the core, the Shapley value, and balancedness, including their extensions to games with incomplete or asymmetric information. Key contributions from authors such as von Neumann and Morgenstern, Shapley, Harsanyi, Myerson, and Forges and Serrano are discussed to illustrate the theoretical evolution of cooperative models. The applied section focuses on the use of cooperative game theory in economics and international relations: in resource allocation, coalition formation, and the stability of environmental agreements. The study highlights the benefits of cooperative approaches to analyzing strategic collaboration, while also addressing challenges linked to incomplete information, political constraints, and institutional limitations.

Keywords: cooperative games, incomplete information, coalitions

1 ÚVOD

Teória hier je disciplína, ktorá sa zaoberá analýzou strategických situácií, teda situácií, v ktorých rozhodnutie jedného aktéra (hráča) závisí od rozhodnutí ostatných hráčov. Z matematicko-ekonomického hľadiska každé takéto rozhodnutie možno modelovať nástrojmi teórie hier. Dva základné pohľady na riešenie rozhodovacej situácie viacerých účastníkov sú: nekooperatívne riešenie a kooperatívne riešenie. Základným pohľadom je nekooperatívne riešenie, kde každý hráč sám maximalizuje svoju platbu, pričom predpokladá, že ostatní hráči robia to isté. Cieľom je nájsť rovnováhu v rozhodovacej situácii, teda stav, ktorý sa sám vynucuje, pretože jednostranné narušenie tohto stavu by zhoršilo situáciu hráča, ktorý sa o danú zmenu pokúsi. Na druhej strane, teória kooperatívnych hier uvažuje s možnosťou hráčov vstúpiť do koalícií a spolupracovať. Spolupráca spočíva v možnosti dohodnúť sa na tom, ako sa budú stratégie použiť (hry s neprenosnými platbami) alebo v

širšom kontexte v možnosti dohodnúť sa nielen na voľbe stratégií, ale aj na rozdelení spoločnej výplaty (hry s prenosnými platbami). V hier teórii kooperatívnych hier sa teda nehľadá primárne stratégia pre jednotlivca v nekooperatívnom zmysle, ale napríklad to, ako možno spravodlivo rozdeliť koaličný výnos spravodlivo a tak zabezpečiť, že koalícia bude fungovať. V tejto súvislosti je pritom veľmi dôležitý stupeň informovanosti hráčov, teda či všetci hráči poznajú všetky parametre hry (napríklad výplaty, typy ostatných hráčov), alebo či existuje nejaká asymetria, či neúplná informácia. Z hľadiska informovanosti možno rozlišovať:

- Hry s úplnou informáciou, kde všetci hráči poznajú štruktúru hry, možnosti a výplaty všetkých ostatných (obsahy typov, preferencií).
- Hry s neúplnou alebo asymetrickou informáciou, kedy niektorí hráči môžu mať súkromné (privátne) informácie, napríklad svoj typ, alebo výplaty, ktoré ostatní nepoznajú, a musí sa tak analyzovať očakávanie, riziko, či mechanizmus, ktorý bude podnecovať pravdivé odhalenie informácie.

Z hľadiska kooperatívnej teórie sa rôzne úrovne informovanosti dotýkajú napríklad toho, či koalície vedú presne, aká hodnotu bude generovať koalícia, či členovia koalície vedú o všetkých možných alternatívach, či existuje asymetria vo výnose jednotlivých aktérov, či všetci aktéri sú informovaní o možnosti spoluhráčov prispievať k výsledkom koalície a podobne. V tomto kontexte možno uvažovať o možnostiach stability spolupráce.

V tomto článku uvidíme vybrané publikované práce publikované práce v oblasti kooperatívnej teórie hier (vrátane prípadov neúplnej informácie) a ich obsahový popis. Potom sa zameriame na aplikačné oblasti, so zameraním sa na oblasť ekonomiky a medzinárodných vzťahov a uvidíme relevantné práce.

2 TEÓRIA KOOPERATÍVNYCH HIER S ÚPLNOU A NEÚPLNOU INFORMÁCIU, VYBRANÉ PUBLIKOVANÉ PRÁCE

V tejto časti uvidíme výber významných prác v oblastiach kooperatívnej teórie hier, od predpokladu klasickej kooperácie až po kooperáciu s neúplnými informáciami. Pre každú prácu uvádzame popis obsahu, silné a slabé stránky (ak vyplývajú).

Kooperatívna teória hier s úplnou informáciou vychádza z klasickej teórie hier. Prvotné systematické zakotvenie poskytli von Neumann a Morgenstern (1944), ktorí položili matematicko-ekonomické základy pre analýzu hier. Ich práca formuje základný rámec, z ktorého vyšli neskoršie axiomatizované riešenia. Výskum kooperatívnych hier sa vyvíjal paralelne s rozvojom nekooperatívnej teórie hier, pričom sa sústredil na analýzu stability koalícií, rozdelenie ziskov a na koncepty rovnováhy medzi hráčmi. Nasledujúci prehľad zhŕňa vybrané práce, ktoré významne prispeli k rozvoju tejto oblasti, pričom sú rozdelené na hry s úplnými informáciami a hry s neúplnými informáciami. V 50. rokoch sa objavili prvé formálne riešenia kooperatívnych problémov: Gillies (1953) vo svojej dizertačnej práci *Solutions to general non-zero-sum games* formálne predstavil pojem *core* (jadro) ako súbor alokácií, ktoré žiadna koalícia nemôže blokovat', a Shapley (1953) navrhol Shapleyho hodnotu, jedinečnú alokačnú funkciu vyplývajúcu z jednoduchých axiémov (symetria, paretovska optimalita, aditivita), ktorá priradzuje každému hráčovi jeho „spravodlivý“ podiel na platbe koalície. Tieto dve koncepcie tvoria jadro klasickej teórie kooperatívnych hier. Bondareva (1963) a Shapley (1967) nezávisle formulovali podmienku „*balancedness*“, ktorá je nevyhnutná a postačujúca pre neprázdnosť jadra v hrách s prenosnou výhrou. Toto pravidlo (známe ako Bondareva–Shapleyova veta) je centrálné pre chápanie, kedy možno očakávať, že existuje stabilné rozdelenie, ktoré neblokuje žiadna podkoalícia.

V 60. až 70. rokoch sa rozvíjala axiomatika (konvexné hry, minimálne náklady), ako aj štúdium hier obmedzených štruktúrou (napr. grafové hry). Napríklad Myerson (1977) zaviedol grafové modely koalícií, ktoré odrážajú komunikačné či koaličné obmedzenia, a Owen (1977) predstavil koncept „*a priori unions*“, kde existujú preferované skupiny hráčov. Okrem jadra a Shapleyho hodnoty sa literatúra zamerala tiež na aproximácie jadra (ϵ -core), na štúdium alokačných pravidiel v konkrétnych ekonomikách (trhové hry, cost-sharing) a na transformáciu abstraktných modelov do praktických alokačných mechanizmov. Tieto rozšírenia umožnili formalizovať reálnejšie scenáre, kde spolupráca nie je voľne možná medzi všetkými účastníkmi. Okrem teórie existencie jadra sa výrazne rozvinula aj oblasť alokačných pravidiel (Shapleyho hodnota a jej modifikácie), aproximácií jadra (ϵ -core), a štúdie jadra v špeciálnych ekonomikách (trhové hry, verejné statky, cost-sharing). Pre prax sú dôležité práce, ktoré prekladali tieto abstraktné riešenia do alokačných metodík pre zdroje, náklady, či rozdelenie nadbytku medzi ekonomickými aktérmi.

S nástupom formálnej analýzy hier s neúplnou informáciou (Bayesovských prístupov) sa objavila potreba preniesť kooperatívne koncepty do prostredia, kde hráči majú súkromné typy alebo nekompletné informácie o hodnotách koalícií. Hlavnou výzvou je, že hodnota každej koalície môže závisieť od súkromných informácií členov, a teda tradičné pojmy (jadro, Shapley-value) treba predefinovať alebo doplniť o očakávania a mechanizmy odhaľovania informácií. Základný teoretický nástroj tu dodal Harsanyi (1967), ktorý ukázal, že hru s neúplnou informáciou možno modelovať pomocou „typov“ a preložiť na ekvivalentnú hru s úplnou informáciou o typoch, teda na Bayesovskú formuláciu. Keď hráči nemajú úplné informácie o ostatných, kooperatívne koncepty je nutné adaptovať. Jeden z hlavných priekopníkov tohto smeru je Myerson (1984) s prácou „*Cooperative games with incomplete information*“, v ktorej rozvíja koncepty kooperácie pri rôznych typoch hráčov a použitie výmenných („*virtual utility*“) princípov. Medzi ďalšie významné príspevky patria práce ako Funaki a Yamato (1999), ktorí skúmajú neprázdnosť jadra v prípadoch asymetrickej informácie a Kovalenkov a Wooders (2003), ktoré sa venujú konceptu ϵ -core v podmienkach neúplnej informácie. Tieto práce rozširujú Myersonovu teóriu a ukazujú, že pri neistote je často potrebné prejsť na aproximované riešenia alebo uvažovať o robustných kritériách stability. Ďalej sa rozvíjali axiomatické a vyjednávacie prístupy pre kooperatívne hry v bayesovskom prostredí, napríklad definície hodnôt (value) či vyjednávacích riešení. Súhrnné survey práce, ako Forges a Serrano (2013), mapujú otvorené problémy a smery budúceho výskumu (mechanizmy odhaľovania informácií, dynamické kooperatívne nastavenia).

Kooperatívny model pre „*green economy*“ publikovali Carfi a Schilirò (2012). Model je založený na predpoklade, že každá krajina produkuje úroveň produkcie, ktorá je určená v nekooperatívnej hre Cournotovho typu. Autori navrhujú riešenie preukazujúce výhodnosť aktívnej účasti každej krajiny na programe nízkouhlíkových technológií v rámci kooperatívneho rámca s cieľom riešiť politiku zmeny klímy.

Najnovšie príspevky, ako napríklad štúdia autorov Bok a Černý (2022) sa zameriavajú na matematickú štruktúru hier, v ktorých nie sú známe hodnoty všetkých koalícií. Autori skúmajú vlastnosti pozitívnosti a konvexnosti v prostredí neúplných informácií a generalizujú klasické výsledky o stabilite jadra. Tento prístup prehľbuje formálne pochopenie kooperácie v situáciách s obmedzenými informáciami.

3 APLIKÁCIE KOOPERATÍVNEJ TEÓRIE HIER V EKONOMIKE A MEDZINÁRODNÝCH VZŤAHOCH

Kooperatívna teória hier nachádza široké uplatnenie v ekonomických modeloch a v analýze medzinárodných vzťahov, najmä tam, kde viac subjektov (firiem, krajín, sektorov) môžu (resp. by mali) spolupracovať, tvoriť koalície, deliť si výnosy a stabilizovať kooperatívne dohody. Medzi práce s ekonomickým aplikačným charakterom patria napríklad tieto: Práca „*Cooperative Game Theory and its Application to Natural, Environmental, and Water Resource*“ (Zara, Dinar, Patrone, 2006). V tejto štúdii sa prehľadne spracovali prípady aplikácie kooperatívnej teórie hier na alokáciu prírodných a environmentálnych zdrojov (rybníky, lesy, „tok/stock“ znečistenia a podobne). Autori dochádzajú k záveru, že spolupráca medzi viac subjektmi nad vzácnymi prírodnými či environmentálnymi zdrojmi je možná za rôznych fyzikálnych a inštitucionálnych podmienok. Napríklad problém spoločného rybníka či znečistenia: koalícia krajín/spoločností môže zdieľať výnos z využitia zdroja, rozložiť náklady a udržať stabilitu koalície vďaka alokačnému mechanizmu. Teória kooperatívnych hier dokáže ponúknuť logistiku pre vyjednávanie medzi firmami či krajinami o alokácii výnosov alebo nákladov. Práca „*Stability and the Economy: Cooperative Game Theoretic Implications for Economic Policy in a Dual-Sector Economy*“ (McDougal, 2013). V tomto článku autori pomocou kooperatívnej teórie hier analyzujú hypotetickú ekonomiku s dvoma sektormi (poľnohospodárstvo a priemysel) a skúmajú, aké podmienky distribúcie medzi sektormi zaručujú stabilitu spoločnosti. Z práce vyplýva, že pri určitých štruktúrach výnosov, ak je napr. priemysel s rastúcimi výnosmi, potom rovná distribúcia medzi agrárnym sektorom nemusí viesť k stabilite a naopak.

Ukázateľný je aj prienik kooperatívnej teórie hier a hospodárskej politiky, teda teda legislatívna či regulatívna politika môže byť navrhnutá tak, aby podporila „koalíciu“ či spoluprácu medzi sektormi. V práci „*Stability of cooperation in the international climate negotiations – An analysis using cooperative game theory*“ (Kersting, 2017) autor analyzuje stabilitu globálnej spolupráce v znížení emisií skleníkových plynov pomocou nástrojov kooperatívnej teórie hier. Zistením je, že keď sa do modelu zaviedli reálne vlastnosti (makroekonomické dôsledky, asymetrie medzi krajinami), výsledok sa môže obrátiť a kooperácia nemusí byť stabilná.

Ak uvažujeme jadro (core) koalície hry medzi štátmi, výsledok modelu môže ukázať, že koalície (napr. všetky štáty) ako stabilné. Z tohto vyplýva, že návrh medzinárodných dohôd musí brať do úvahy faktory ako asymetrie, odchod či vstup krajiny, morálne riziká („free-riding“) a mechanizmy stabilizácie koalície. Práca „*Cooperation on climate change under economic linkages: How the inclusion of macroeconomic effects affects stability of a global climate coalition*“ (Kersting, Duscha, Weitzel, 2017). Tu autori rozširujú model o makroekonomické efekty a dochádzajú k záveru, že pri realistických odhadoch škôd jadro koalície hry býva prázdne, teda neexistuje stabilný globálny pakt.

Medzi ďalšie aplikácie práce týkajúce sa alokácie výnosov či nákladov krajín alebo regionálnych blokov v rámci environmentálnych či bezpečnostných dohôd patrí napríklad práca „*International Judicial Cooperation in Game Theory*“ (Tang, 2020) aplikuje hernú analýzu na rozhodovanie štátov o medzinárodnej justičnej spolupráci. Tiež model „*Cooperative equilibrium of the China-US-EU climate game*“ (Zhu, 2022) sa zaoberá klimatickou hrou medzi tromi najväčšími znečisťovateľmi ovzdušia: Čínou, Spojenými štátmi a Európskou úniou. Model vysvetľuje historické správanie týchto troch hráčov a poskytuje predpovede pre ich budúce politiky v oblasti životného prostredia.

Aplikácie kooperatívnej teórie hier v ekonomike či medzinárodných vzťahoch prinášajú napríklad tieto prínosy:

- Pomáhajú pochopiť, prečo a ako môže vzniknúť spolupráca medzi subjektmi, ktoré by inak mohli konať čisto s ohľadom na svoje individuálne záujmy.
- Pomáhajú navrhnúť mechanizmy rozdelenia výnosov a nákladov tak, aby spolupráca bola spravodlivá a stabilná (napr. koalície krajín, firmy, sektory).
- Umožňujú analyzovať otázky ako „kto v koalícii získa koľko?“, „kedy koalícia bude ochotná zostať spolu?“ či „kedy sa členovia koalície budú báť odísť či vstúpiť do nej?“.

Na druhej strane sa objavujú výzvy:

- V praxi býva veľmi ťažké získať spoľahlivé údaje o hodnote všetkých možných koalícií (najmä pri neúplnej informácii).
- Modely často predpokladajú racionalitu, transparentnosť, a zároveň ignorujú praktické obmedzenia — napríklad politické, kultúrne či inštitucionálne bariéry.
- V medzinárodnom kontexte, kde sú štáty suverénne a mechanizmy vynútenia slabé, kooperácia je zložitejšia — kooperatívna teória hier síce poskytuje rámec, ale nenahrádza reálnu politickú analýzu.

ZÁVER

Kooperatívna teória hier poskytuje účinný rámec na analýzu situácií, v ktorých spolupráca medzi aktérmi prináša efektívnejšie a spravodlivejšie výsledky než individuálne konanie. Vývoj teórie, od klasických konceptov, ako jadro či Shapleyho hodnota, po moderné prístupy reflektujúce neúplnú informáciu a asymetriu, ukazuje jej prispôsobivosť reálnym podmienkam. Aplikácie v ekonomike a medzinárodných vzťahoch potvrdzujú, že kooperatívny prístup môže významne prispieť k riešeniu problémov spojených so stabilitou, alokáciou zdrojov a environmentálnou politikou. Do budúcnosti sa ako prínosný smer výskumu javí prepojenie kooperatívnej teórie hier s behaviorálnou ekonómiou, experimentálnym modelovaním a politikami udržateľného rozvoja. Takéto prepojenie by mohlo prispieť k lepšiemu pochopeniu, ako jednotlivci a inštitúcie reálne reagujú na stimuly spolupráce, a ako možno navrhovať efektívne mechanizmy, ktoré ju podporujú aj v podmienkach neistoty.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0115/23 *Aplikácie kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a v medzinárodných vzťahoch*

Použitá literatúra

1. BOK, J. – ČERNÝ, M. 2024. *Positivity and convexity in incomplete cooperative games*. Annals of Operations Research, 340(2), 1157–1181.
2. BONDAREVA, O. N. 1963. „Nekotorye prilozheniya metodov lineynogo programmirovaniya k teorii kooperativnykh igr“ [Niektoré aplikácie metód lineárneho programovania v teórii kooperatívnych hier]. *Problemy Kybernetiki*, 10, 119–139.
3. CARFÌ, D. – SCHILIRÒ, D. 2012. *A coopetitive model for the green economy*. Economic Modelling, 29(4), 1215–1219.
4. FORGES, F. – SERRANO, R. 2013. *Cooperative games with incomplete information: Some open problems*. Post-Print hal-01519884, HAL.

5. FUNAKI, Y. – YAMATO, T. 1999. *The core of an economy with a common pool resource: A partition function form approach*. International Journal of Game Theory, 28(2), 157–171.
6. GILLIES, D. B. 1953. *Solutions to general non-zero-sum games*. (PhD thesis). Princeton University.
7. HARSANYI, J. C. 1967. *Games with incomplete information played by “Bayesian” players. I–III Part I: The Basic Model*. Management Science, 14(3), 159–182.
8. KERSTING, J. 2017. *Stability of cooperation in the international climate negotiations: An analysis using cooperative game theory*. KIT Scientific Publishing
9. KERSTING, J. – DUSCHA, V. – WEITZEL, M. 2017. *Cooperation on climate change under economic linkages: How the inclusion of macroeconomic effects affects stability of a global climate coalition*. The Energy Journal, 38(4), 19–42.
10. KOVALENKOV, A. – WOODERS, M. 2003. *Approximate cores of games and economies with clubs*. Journal of Economic Theory, 110(1), 87–120.
11. MCDUGAL, T. L. 2013. *Stability and the economy: Cooperative game theoretic implications for economic policy in a dual-sector economy*. Stability: International Journal of Security & Development, 2(2), 41.
12. MYERSON, R. B. 1977. *Graphs and cooperation in games*. Mathematics of Operations Research, 2(3), 225–229.
13. MYERSON, R. B. 1984. *Cooperative games with incomplete information*. International Journal of Game Theory, 13, 69–96.
14. OWEN, G. 1977. *Values of games with a priori unions*. In: Henn, R. – Moeschlin, O. (eds.). *Essays in Mathematical Economics and Game Theory* (pp. 76–88). Springer-Verlag.
15. SHAPLEY, L. S. 1953. *A value for n-person games*. In: Kuhn, H. W. – Tucker, A. W. (eds.). *Contributions to the Theory of Games II* (pp. 307–317). Princeton University Press.
16. SHAPLEY, L. S. 1967. *On balanced sets and cores*. Naval Research Logistics Quarterly, 14(4), 453–460.
17. TANG, Z. 2020. *International judicial cooperation in game theory*. Journal of International Dispute Settlement, 11(4), 522–548.
18. VON NEUMANN, J. – MORGENSTERN, O. 2007. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.
19. ZARA, S. – DINAR, A. – PATRONE, F. 2006. *Cooperative game theory and its application to natural, environmental, and water resource issues. 2. Application to natural and environmental resources*. World Bank Policy Research Working Paper, No. 4073.
20. ZHU, J. D. 2022. *Cooperative equilibrium of the China–US–EU climate game*. Energy Strategy Reviews, 39, 100797.

Kontaktné údaje

doc. Ing Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 6729 5830

email: zuzana.cickova@euba.sk

ANALÝZA PRODUKCIE PLASTOVÉHO ODPADU V JEDNOTLIVÝCH KRAJOCH SLOVENSKA

ANALYSIS OF PLASTIC WASTE PRODUCTION IN INDIVIDUAL REGIONS OF SLOVAKIA

Ľubica Hurbánková, Lenka Magulová

Abstrakt

V príspevku je analyzovaný aktuálny stav a vývoj plastového komunálneho odpadu v období pred a po pandémie COVID-19. Cieľom príspevku je zistiť, ako sa vyvíjal analyzovaný indikátor na Slovensku i v jednotlivých krajoch, ktorý kraj najviac prispel k celkovému nárastu objemu plastového komunálneho odpadu a či sa menila štruktúra jeho objemu podľa krajov. Údaje o množstve plastového komunálneho odpadu v rokoch 2019 až 2023 sú spracované na základe dát zverejnených Štatistickým úradom Slovenskej republiky (ďalej len ŠÚ SR) a Ministerstvom životného prostredia Slovenskej republiky (ďalej MŽP SR). Pre porovnanie produkcie plastového odpadu v jednotlivých krajoch použijeme prepočet na počet obyvateľov, čo nám umožní objektívne vyhodnotiť rozdiely v produkcii odpadu medzi regiónmi. Na analýzu zmien v produkcii odpadov sa použije príspevková metóda a Suslovov koeficient podobnosti štruktúr.

Kľúčové slová: plastový komunálny odpad, kraje Slovenska, príspevková metóda, Suslovov koeficient podobnosti štruktúr

Abstract

The paper analyzes the current state and development of plastic municipal waste before and after the COVID-19 pandemic. The aim of the paper is to determine how the analyzed indicator evolved in Slovakia and in individual regions, which region contributed the most to the overall increase in the volume of plastic municipal waste, and whether the structure of its volume by region has changed. Data on the amount of plastic municipal waste from 2019 to 2023 are processed based on information published by the Statistical Office of the Slovak Republic (hereinafter referred to as SO SR) and the Ministry of the Environment of the Slovak Republic (hereinafter MoE SR). To compare plastic waste production across regions, the data are adjusted for population size, which allows for an objective evaluation of differences in waste generation between regions. The analysis of changes in waste production uses the contribution method and Suslov's coefficient of structural similarity.

Keywords: plastic municipal waste, regions of Slovakia, contribution method, Suslov's coefficient of structural similarity

1 ÚVOD

Odpad je komplexným problémom, ktorý zasahuje viacero oblastí – ekologickú, ekonomickú aj sociálnu. Na jednej strane predstavuje významnú environmentálnu záťaž, na druhej strane však môže byť cenným zdrojom druhotných surovín, ak je s ním správne nakladané. Napríklad recyklácia materiálov umožňuje znížiť spotrebu primárnych surovín a zároveň obmedziť množstvo odpadu končiaceho na skládkach. V súčasnosti sa čoraz viac

kladie dôraz na využívanie inovatívnych technológií, ktoré pomáhajú zlepšiť triedenie odpadu, jeho recykláciu a energetické zhodnocovanie.

Komunálny odpad predstavuje zmesový a oddelene zbieraný odpad pochádzajúci najmä z domácností (Slovensko.sk, 2020). Za komunálny odpad označujeme odpad z domácnosti či záhrady, biologicky rozložiteľný odpad.

Plasty predstavujú jednu z najrozšírenejších skupín materiálov v súčasnej spoločnosti, vďaka ich nízkej hmotnosti, odolnosti a širokému spektru využitia. Nachádzajú sa v obalových materiáloch, automobilovom priemysle, stavebníctve, zdravotníctve aj v spotrebnej elektronike. Ich masová výroba a spotreba však vedie k narastajúcemu problému s odpadom, ktorý má výrazný negatívny vplyv na životné prostredie. Rozlišujeme 7 druhov plastov, teda polymérov (Separujte s nami, 2013).

Zaujímavým aspektom, ktorý ovplyvnil produkciu plastového odpadu, bola pandémia COVID-19. V tomto období došlo k výrazným zmenám v spotrebiteľskom správaní a používaní jednorazových plastových výrobkov. Opatrenia proti šíreniu vírusu, ako aj zvyšujúca sa potreba ochranných pomôcok (rúška, rukavice, plastové obaly na jedlo), spôsobili náhly nárast plastového odpadu. Tento trend bol sprevádzaný aj problémami v oblasti recyklácie, keďže v niektorých obdobiach pandémie došlo k obmedzeniu kapacít na spracovanie odpadu. V ďalších rokoch budeme pozorovať, ako sa tieto zmeny premietnu do produkcie odpadu a spôsobov nakladania s ním.

2 METODIKA PRÁCE

Na analýzu vývoja plastového komunálneho odpadu na Slovensku sa použijú vybrané charakteristiky časových radov. Príspevková metóda nám umožní zistiť, ktoré kraje najviac prispeli k nárastu objemu plastového komunálneho odpadu. Pomocou Suslovovho koeficientu podobnosti štruktúr budeme zisťovať, či sa menila štruktúra tohto druhu odpadu podľa jednotlivých krajov.

2.1 Príspevková metóda

Príspevková metóda sa používa na analyzovanie aditívnej, teda súčtovej veličiny Y (v našom prípade celkový objem plastového komunálneho odpadu na Slovensku), ktorá vznikne súčtom jednotlivých zložiek y_i – objemu plastového komunálneho odpadu v jednotlivých krajoch Slovenska (Hurbánková – Sivašová, 2018):

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i . \quad (1)$$

Ako prvé pri použití tejto metódy vypočítame relatívny prírastok agregovanej veličiny, ktorý hovorí o veľkosti relatívneho prírastku celkového plastového komunálneho odpadu oproti predchádzajúcemu obdobiu. Vzťah na výpočet je:

$$k_{dt} = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{d(Y)}{Y_{t-1}} = (k_Y - 1) . \quad (2)$$

Nasleduje výpočet relatívnych prírastkov jednotlivých zložiek, ktoré vyjadrujú veľkosť prírastkov plastového komunálneho odpadu v jednotlivých krajocho. Vypočítame ich pomocou vzťahu:

$$k_{dt} = \frac{y_t^i - y_{t-1}^i}{y_{t-1}^i} = \frac{d(y)}{y_{t-1}^i} = (k_y^i - 1). \quad (3)$$

Ďalším krokom je výpočet štruktúrnych čísiel, ktoré hovoria o podieloch plastového odpadu v jednotlivých krajocho na celkovom objeme plastového komunálneho. Počítame ich v období $t - 1$ za predpokladu zachovania analogického podielu zložky na agregáte za plynulého vývoja agregátu. Vzťah na výpočet je:

$$s_{t-1}^i = \frac{y_{t-1}^i}{Y_{t-1}}. \quad (4)$$

Na záver vypočítame príspevok i -tej zložky na relatívnom prírastku veličiny:

$$\left(\frac{y_t^i - y_{t-1}^i}{y_{t-1}^i} \right) * \frac{y_{t-1}^i}{Y_{t-1}} = (k_y^i - 1) * s_{t-1}^i. \quad (5)$$

Každý príspevok súčtovej zložky sa rovná súčinu jej koeficienta príspevku v danom období oproti predchádzajúcemu a podielu zložky na agregáte v predchádzajúcom období.

Relatívny prírastok aditívnej veličiny sa potom rovná súčtu jednotlivých relatívnych príspevkov zložiek:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_t^i - y_{t-1}^i}{y_{t-1}^i} \right) * \frac{y_{t-1}^i}{Y_{t-1}} = \frac{1}{Y_{t-1}} \left(\sum_{i=1}^n y_t^i - \sum_{i=1}^n y_{t-1}^i \right) = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}. \quad (6)$$

2.2 Suslovov koeficient podobnosti štruktúr

Miery podobnosti štruktúr sa využívajú pri meraní zmien v n -zložkovej štruktúre, kedy analyzujeme agregované extenzívne veličiny Z_t zo súhrnu n zložiek, teda aditívnych veličín (Hurbánková – Sivašová, 2018):

$$Z_t = \sum_{i=1}^n z_{i,t} \quad (7)$$

Pri analyzovaní zmien v dvoch porovnávaných situáciách v n -zložkovej štruktúre musíme transformovať zložky agregovanej veličiny do štruktúrnych čísiel v obdobiach t a $t - 1$. Štruktúrne čísla sú podielom i -tej časti na celkovej veľkosti aditívnej veličiny Z . Vypočítame ich podľa vzťahov:

$$x^i = \frac{z_{i,t}}{\sum_{i=1}^n z_{i,t}} \quad (8)$$

$$y^i = \frac{z_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^n z_{i,t-1}} \quad (9)$$

pričom za predpokladu rovnakého počtu n oboch zložiek platí:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1 \quad (11)$$

Jednou z najčastejšie používaných mier podobnosti štruktúr je Suslovov koeficient. Prvým krokom pri výpočte tohto koeficienta je definovanie štruktúrnych čísiel podľa vzťahov 8 a 9, pričom overíme platnosť vzťahov 10 a 11. Následne vypočítame absolútne rozdiel párových štruktúrnych čísiel i -tej zložky v obdobiach t a $t - 1$:

$$|x_i - y_i|. \quad (12)$$

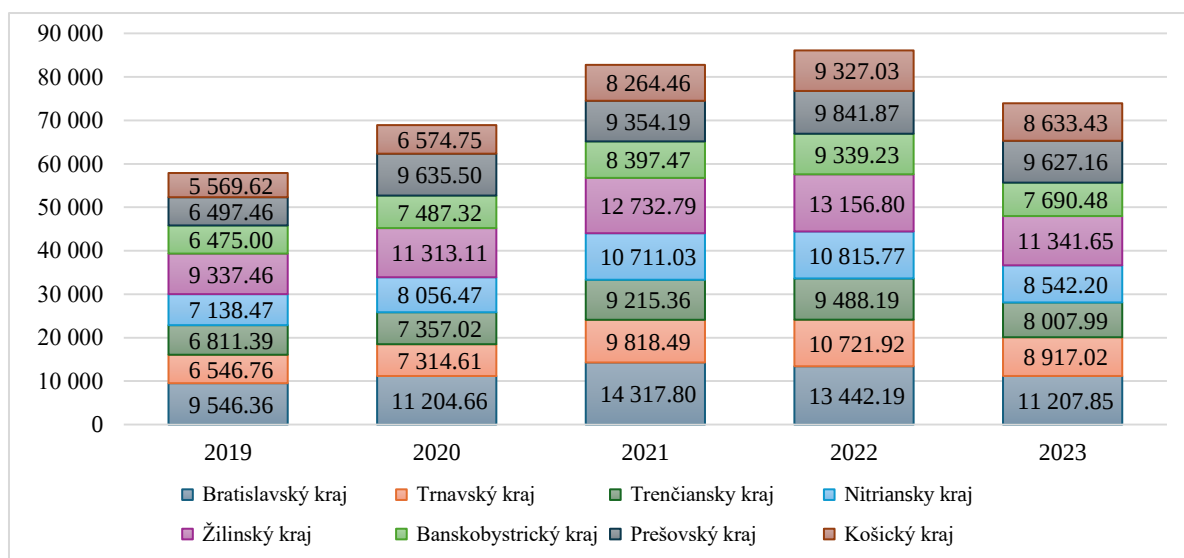
Suslovov koeficient následne vypočítame ako priemernú absolútnu odchýlku:

$$d_{sus} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \quad (13)$$

Koeficient nadobúda hodnoty z intervalu $< 0; \frac{2}{n} >$. Čím je hodnota bližšie k 0, tým je väčšia podobnosť porovnávaných štruktúr. Naopak, ak je bližšie k hodnote $\frac{2}{n}$, tým je podobnosť menšia, a teda ich odlišnosť sa zväčšuje. Ak koeficient nadobúda hodnotu 0, dané štruktúry sú zhodné. Hodnota $\frac{2}{n}$ znamená úplnú odlišnosť. Suslovov koeficient udáva, o koľko percentuálnych bodov sa v priemere líši jedna zložka štruktúry v období t oproti obdobiu $t - 1$.

3 ANALÝZA PLASTOVÉHO KOMUNÁLNEHO ODPADU V SR

Plastový odpad predstavuje vážny problém predovšetkým kvôli svojej dlhej dobe rozkladu, ktorá sa v prípade niektorých plastov pohybuje od desiatok až po stovky rokov. Tento fakt spôsobuje, že sa plasty hromadia v životnom prostredí. Vytvárajú obrovské množstvo odpadu, ktorý je náročné správne spracovať a prispieva k znečisteniu prírody, oceánov, riek a pôdy, čo má vážne ekologické následky. Napriek pokroku v recyklácii plastov a zavádzaniu nových technológií spracovania, veľká časť plastového odpadu stále nie je zachytená a recyklovaná, čo vedie k jeho nahromadeniu. Okrem toho, nie všetky plasty sú vhodné na recykláciu, a niektoré z nich, napríklad plasty s viacvrstvovými obalmi alebo s pridanými chemickými látkami, môžu byť v recyklačných procesoch neefektívne či nebezpečné. Z tohto dôvodu je potrebné pokračovať v zavádzaní opatrení na zníženie produkcie plastového odpadu, podporovať efektívnejšie recyklačné systémy a motivovať spotrebiteľov aj priemysel k používaniu ekologickejších alternatív. Plasty sa stali kľúčovým bodom diskusií o trvalo udržateľnom rozvoji a ochrane životného prostredia, čo si vyžaduje koordinovanú snahu na globálnej, národnej aj regionálnej úrovni.



Graf 1: Množstvo plastového komunálneho odpadu v jednotlivých krajoch Slovenska v rokoch 2019 – 2023 v tonách
Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR

Graf 1 znázorňuje množstvo plastového komunálneho odpadu v jednotlivých krajoch Slovenska počas rokov 2019 – 2023. V sledovanom období došlo k výraznému nárastu objemu plastového odpadu. Celkové množstvo stúplo z 57 923 ton v roku 2019 na 86 133 ton v roku 2022, teda nárast o viac ako 48 %. Tento rast bol viditeľný vo všetkých regiónoch, avšak najvýraznejší objem plastového odpadu vyprodukoval Bratislavský kraj. V roku 2021 dosiahol tento región vrchol s hodnotou 14 318 ton, čo zodpovedalo najvyššej produkcii v rámci krajov i celého sledovaného obdobia. Tento výsledok bol ovplyvnený najmä hustotou obyvateľstva, intenzívnou ekonomickou aktivitou a vyšším dopytom po balených produktoch, typickým pre mestské prostredie. Na druhej strane, regióny s menšou koncentráciou obyvateľstva, ako napríklad Banskobystrický kraj, vykazovali nižšiu produkciu plastového odpadu, čo odrážalo rozdiely v demografii a ekonomickej aktivite.

K výraznému nárastu plastového odpadu v rokoch 2019 – 2022 prispelo niekoľko kľúčových faktorov. Jedným z nich bolo zvýšené využívanie plastových obalov a výrobkov počas pandémie COVID-19, kedy sa jednorazové plastové produkty stali nevyhnutnosťou v rámci hygienických opatrení. Rýchlo sa zvyšujúca spotreba balených potravín a ďalších plastových výrobkov, ktoré nahradili bežne používané alternatívy, taktiež významne ovplyvnila tieto čísla. Navyše, nedostatočne rozvinutá recyklačná infraštruktúra v tom čase spôsobovala, že veľká časť plastového odpadu končila v komunálnom zmiešanom odpade namiesto v recyklačných zariadeniach.

Pokles produkcie plastového odpadu zaznamenaný v roku 2023 predstavoval pozitívny zlom v tomto trende. Tento vývoj možno pripísať zavedeným legislatívnym opatreniam, ktoré obmedzili používanie jednorazových plastov a zvyšujúcemu sa environmentálnemu povedomiu obyvateľov. Obyvatelia sa čoraz viac zapájali do triedenia odpadu a uprednostňovali opakovane použiteľné produkty. Ďalším faktorom mohla byť ekonomická situácia – inflácia a rastúca finančná neistota pravdepodobne ovplyvnili spotrebiteľské správanie, čo viedlo k nižšej spotrebe plastových výrobkov a obalov.

Tabuľka 1: Podobnosť štruktúry plastového komunálneho odpadu v rokoch 2019 a 2023

<i>Komunálny odpad - plasty</i>	2019	2023	x_i	y_i	$ x_i - y_i $
Bratislavský kraj	9 546,36	11 207,85	0,1648	0,1515	0,0133
Trnavský kraj	6 546,76	8 917,02	0,1130	0,1206	0,0075
Trenčiansky kraj	6 811,39	8 007,99	0,1176	0,1083	0,0093
Nitriansky kraj	7 138,47	8 542,20	0,1232	0,1155	0,0078
Žilinský kraj	9 337,46	11 341,65	0,1612	0,1533	0,0079
Banskobystrický kraj	6 475,00	7 690,48	0,1118	0,1040	0,0078
Prešovský kraj	6 497,46	9 627,16	0,1122	0,1302	0,0180
Košický kraj	5 569,62	8 633,43	0,0962	0,1167	0,0206
Slovenská republika	57 922,52	73 967,78	1,0000	1,0000	0,0921
d_{sus}	0,0115				

Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR

Pri analýze podobnosti štruktúry plastového komunálneho odpadu použijeme Suslovov koeficient podobnosti štruktúr. Tento koeficient sa v prípade 8 zložiek odpadu môže pohybovať v intervale od 0 do 0,25. Naším výsledkom bol koeficient 0,0115, čo predstavovalo 1,15 p. b. Štruktúra plastového odpadu v rokoch 2019 a 2023 v jednotlivých krajoch SR vykazovala len veľmi malé rozdiely a napriek zmenám v množstve plastového odpadu v uvedenom období, rozloženie odpadu sa v jednotlivých krajoch výrazne nezmenilo, zostalo stabilné.

Produkcia plastového komunálneho odpadu v kilogramoch na obyvateľa poskytuje dôležitý pohľad na vývoj odpadu na Slovensku a odráža celkový trend nárastu množstva odpadu medzi rokmi 2019 a 2023. Ako môžeme vidieť v tabuľke 2, v roku 2019 vyprodukoval priemerný Slovák 10,62 kg plastového odpadu, no tento objem stúpol až na 15,86 kg v roku 2022, čo znamenalo výrazný nárast. Tento rast bol pravdepodobne ovplyvnený zvýšeným používaním jednorazových plastov počas pandémie COVID-19 a trendom vyššej spotreby plastových výrobkov. V roku 2023 sa však priemerný objem plastového odpadu na obyvateľa znížil na 13,63 kg, čo naznačovalo pozitívne zmeny.

Tabuľka 2: Produkcia plastového komunálneho odpadu v jednotlivých krajoch Slovenska v kg na obyvateľa

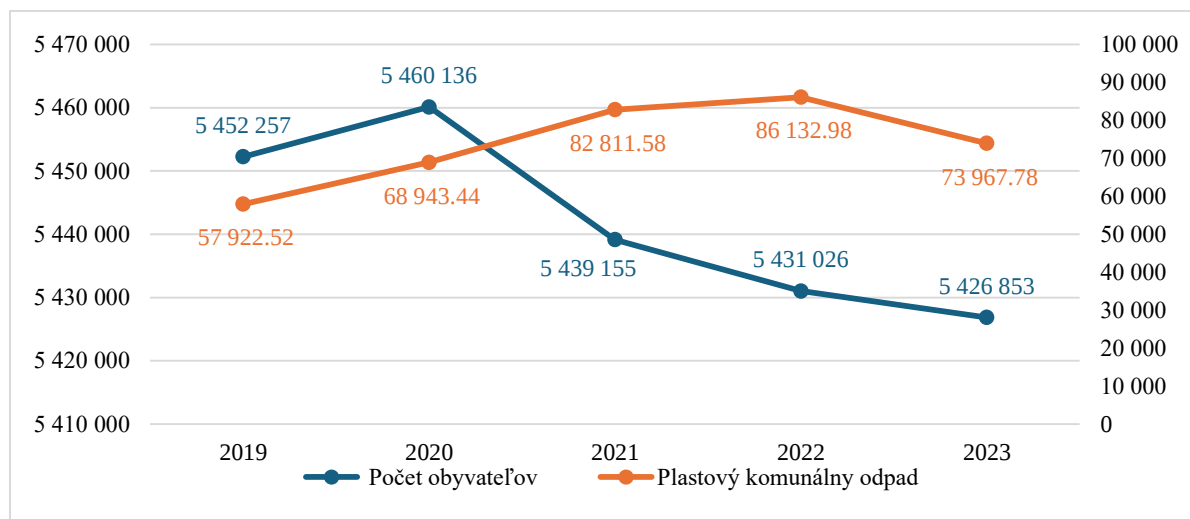
<i>Komunálny odpad - plasty (v kg na obyvateľa)</i>	2019	2020	2021	2022	2023
Slovenská republika	10,6236	12,6267	15,2251	15,8594	13,6300
Bratislavský kraj	14,3711	16,6414	19,8521	18,5098	15,3413
Trnavský kraj	11,6015	12,9398	17,3714	18,9657	15,7572
Trenčiansky kraj	11,6412	12,5999	16,0192	16,5844	14,0625
Nitriansky kraj	10,5739	11,9698	15,8737	16,0963	12,7554
Žilinský kraj	13,5062	16,3583	18,4389	19,1025	16,4922
Banskobystrický kraj	10,0197	11,6200	13,4773	15,0772	12,4836
Prešovský kraj	7,8726	11,6519	11,5736	12,1866	11,9095
Košický kraj	6,9572	8,2009	10,5841	11,9632	11,0809

Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR

Medzi jednotlivými krajoch SR boli zaznamenané výrazné rozdiely v produkcii plastového odpadu na obyvateľa. Bratislavský kraj, ako najviac urbanizovaný a ekonomicky najrozvinutejší región, pravidelne dosahoval najvyššie hodnoty. V roku 2021 dosiahol najvyššiu priemernú produkciu odpadu na obyvateľa zo všetkých krajov za celé sledované obdobie – 19,85 kg. Spôsobené to bolo vysokou intenzitou spotreby a vyššou životnou úrovňou obyvateľstva. Nasledoval Žilinský a Trnavský kraj s vysokou produkciou plastového komunálneho odpadu. Na druhej strane, kraje s nižšou hustotou obyvateľstva, ako Prešovský

a Košický, mali nižšie hodnoty. V roku 2023 v Prešovskom kraji bolo na jedného obyvateľa vyprodukovaných 11,91 kg odpadu a v Košickom kraji len 11,08 kg.

Rozdiely medzi kraji poukazovali na rôznorodosť faktorov, ktoré ovplyvňovali produkciu plastového odpadu, vrátane miery urbanizácie, životnej úrovne obyvateľov a spotrebiteľských návykov. Vzhľadom na tieto odlišnosti je nevyhnutné pristupovať k riešeniu problémov spojených s plastovým odpadom individuálne pre každý kraj. Najväčšia pozornosť by mala byť venovaná krajom s vyššou produkciou odpadu, ako sú Bratislavský a Žilinský kraj, kde je potrebné implementovať účinnejšie opatrenia na zníženie množstva plastového odpadu a podporu recyklácie.



Graf 2: Porovnanie vývoja počtu obyvateľov a plastového komunálneho odpadu
Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR

Porovnanie vývoja počtu obyvateľov a množstva plastového komunálneho odpadu v rokoch 2019 až 2023, zobrazené na grafe 2, ukazuje na zaujímavé trendy v týchto dvoch ukazovateľoch. V rokoch 2019 a 2020 populácia mierne rástla. Avšak od roku 2020, kedy dosiahla svoje maximum, nastal výrazný pokles, ktorý pokračoval až do roku 2023. Klesajúci trend môže byť výsledkom viacerých faktorov, ako je napríklad migrácia obyvateľov do iných krajín, znižujúca sa pôrodnosť, starnutie populácie alebo negatívne dôsledky pandemických udalostí, ktoré mohli ovplyvniť demografickú štruktúru.

Na druhej strane, množstvo plastového komunálneho odpadu vykazovalo opačný trend počas takmer celého sledovaného obdobia. Množstvo odpadu narastalo od roku 2019 a dosiahlo svoj vrchol v roku 2022. Rast mohol byť spôsobený zvýšenou spotrebou plastových obalov, ktoré sa stali dominantným typom odpadu počas pandémie COVID-19. Po roku 2021 však nastal výrazný pokles množstva plastového odpadu, ktorý pokračoval až do roku 2023. Tento pokles môže byť výsledkom legislatívnych opatrení zameraných na obmedzenie používania plastov, zvýšenej recyklácie, zavedenia ekologickejších alternatív k plastovým výrobkom alebo celkového zvýšenia environmentálneho povedomia obyvateľov.

Je zaujímavé, že pokles množstva plastového odpadu nenadväzoval priamo na pokles počtu obyvateľov. Aj keď sa od roku 2020 počet obyvateľov znižoval, množstvo plastového odpadu dosiahlo svoj vrchol v roku 2022, čo naznačuje, že jeho vývoj bol ovplyvnený nezávislými faktormi. To môže znamenať, že na množstvo odpadu vplyvajú viac vonkajšie opatrenia a zmeny v správaní než samotný demografický vývoj.

Tabuľka 3: Absolútna a relatívna zmena produkcie plastového komunálneho odpadu na Slovensku v rokoch 2019 – 2023

Rok	Plastový komunálny odpad (tony)	d_t	k_t	B_t
2019	57 922,52	-	-	1,0000
2020	68 943,44	11 020,92	1,1903	1,1903
2021	82 811,58	13 868,14	1,2012	1,4297
2022	86 132,98	3 321,40	1,0401	1,4870
2023	73 967,78	-12 165,20	0,8588	1,2770
$\bar{d}$	4 011,3150			
$\bar{k}$	1,0630			

Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR na základe (Kotlebová a kol. 2017)

V tabuľke 3 analyzujeme absolútnu a relatívnu zmenu produkcie plastového komunálneho odpadu na Slovensku. Výsledky ukázali, že produkcia plastového komunálneho odpadu vykazovala neustály rast od roku 2019 do roku 2022. V roku 2022 dosiahla svoje maximum 86 132,98 ton, čo predstavovalo nárast o 48,7 % v porovnaní s rokom 2019. Najvýraznejší nárast nastal medzi rokmi 2020 a 2021, kedy produkcia plastového odpadu vzrástla o 13 868,14 ton, teda o 20,12 %.

V roku 2023 produkcia plastového odpadu značne klesla, a to o 12 165,20 ton, resp. o 14,12 % oproti predchádzajúcemu roku. Pokles mohol byť spôsobený napríklad zákazom jednorazových plastov. Napriek poklesu v roku 2023 oproti roku 2022, produkcia plastového komunálneho odpadu bola o 27,7 % vyššia ako v roku 2019, čo poukazuje na stále prítomný problém nadprodukcie plastov v krajine.

Priemerne ročne produkcia plastového odpadu vzrástla o 4 011,32 ton, čo zodpovedalo priemernému ročnému rastu o 6,3 %. Tento vývoj poukazuje na rastúci problém s nadprodukciou plastového odpadu v predchádzajúcich rokoch, no zároveň naznačuje pozitívny trend v poklese produkcie odpadov po zavedení legislatívnych a environmentálnych opatrení.

Tabuľka 4: Analýza zmeny produkcie plastového komunálneho odpadu pomocou príspevkovej metódy v rokoch 2019 a 2023

Komunálny odpad - plasty (tony)	2019	2023	k_{dt}	s_{t-1}^t	príspevok
Slovenská republika	57 922,52	73 967,78	0,2770	1,0000	0,2770
Bratislavský kraj	9 546,36	11 207,85	0,1740	0,1648	0,0287
Trnavský kraj	6 546,76	8 917,02	0,3621	0,1130	0,0409
Trenčiansky kraj	6 811,39	8 007,99	0,1757	0,1176	0,0207
Nitriansky kraj	7 138,47	8 542,20	0,1966	0,1232	0,0242
Žilinský kraj	9 337,46	11 341,65	0,2146	0,1612	0,0346
Banskobystrický kraj	6 475,00	7 690,48	0,1877	0,1118	0,0210
Prešovský kraj	6 497,46	9 627,16	0,4817	0,1122	0,0540
Košický kraj	5 569,62	8 633,43	0,5501	0,0962	0,0529

Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR

V tabuľke 4 sú zobrazené výsledky analýzy produkcie plastového komunálneho odpadu s využitím príspevkovej metódy v SR a v jednotlivých krajoch v rokoch 2019 a 2023, teda pred a po vypuknutí pandémie COVID-19. V roku 2019 bolo v SR vyprodukovaných 57 922,52 ton plastového odpadu, zatiaľ čo v roku 2023 sa tento objem zvýšil na 73 967,78 ton, čo predstavovalo nárast o 27,7 %. Tento nárast bol zrejmy

aj na regionálnej úrovni a jednotlivé kraje prispeli k celkovému zvýšeniu produkcie plastového odpadu rôznymi mierami.

Celkovo vzrástla produkcia plastového komunálneho odpadu na Slovensku v roku 2023 v porovnaní s rokom 2019 o 27,7 %. Najvyšší príspevok k tomuto celkovému nárastu mal Prešovský kraj s 5,4 %, kde produkcia odpadu sa zvýšila zo 6 497,46 ton na 9 627,16 ton, čo predstavovalo nárast o 48,17 %. Trnavský kraj zaznamenal nárast o 36,21 %, zo 6 546,76 ton na 8 917,02 ton, čím prispel s 4,09 % k celkovému nárastu odpadu v SR. Nitriansky kraj zaznamenal o niečo menší nárast, a to o 19,66 %, zo 7 138,47 ton na 8 542,20 ton, pričom jeho príspevok k celkovému nárastu bol 2,42 %. Najmenší príspevok mal Trenčiansky kraj s 2,07 %, kde plastový komunálny odpad vzrástol o 17,57 %, resp. zo 6 811,39 ton na 8 007,99 ton.

Táto analýza v období pred pandémiou a po ukázala, že produkcia plastového komunálneho odpadu v jednotlivých krajoch sa zvyšovala rozličnými rýchlosťami. Najväčší nárast zaznamenal Prešovský kraj, čo mohlo byť spôsobené rozvojom priemyslu či zmenami v spotrebiteľskom správaní. V nasledujúcich rokoch, počas pandémie a po jej skončení (2022 a 2023), však došlo k významným zmenám, ktoré sú viditeľné v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 5: Analýza zmeny produkcie plastového komunálneho odpadu pomocou príspevkovej metódy v rokoch 2022 a 2023

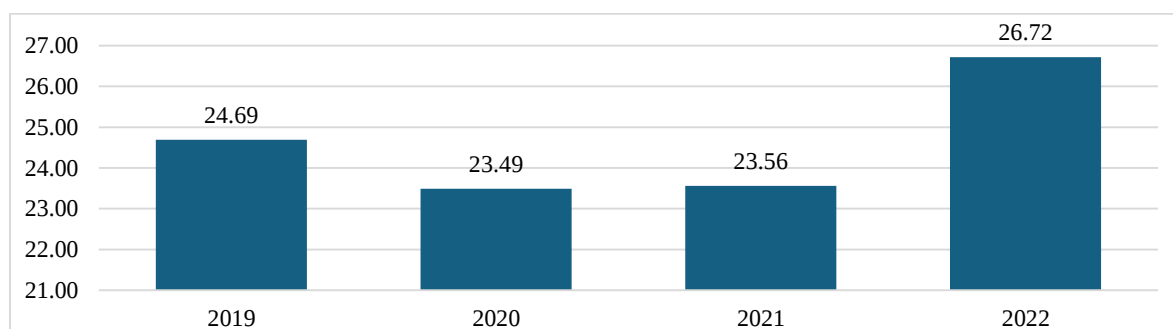
<i>Komunálny odpad - plasty (tony)</i>	2022	2023	k_{dt}	s_{t-1}^i	príspevok
<i>Slovenská republika</i>	86 132,98	73 967,78	-0,1412	1,0000	-0,1412
Bratislavský kraj	13 442,19	11 207,85	-0,1662	0,1561	-0,0259
Trnavský kraj	10 721,92	8 917,02	-0,1683	0,1245	-0,0210
Trenčiansky kraj	9 488,19	8 007,99	-0,1560	0,1102	-0,0172
Nitriansky kraj	10 815,77	8 542,20	-0,2102	0,1256	-0,0264
Žilinský kraj	13 156,80	11 341,65	-0,1380	0,1527	-0,0211
Banskobystrický kraj	9 339,23	7 690,48	-0,1765	0,1084	-0,0191
Prešovský kraj	9 841,87	9 627,16	-0,0218	0,1143	-0,0025
Košický kraj	9 327,03	8 633,43	-0,0744	0,1083	-0,0081

Zdroj: vlastné spracovanie podľa ŠÚ SR

Po skončení pandémie COVID-19 došlo k zníženiu produkcie plastového komunálneho odpadu v porovnaní s rokom 2022. Na Slovensku celková produkcia plastového odpadu poklesla o 14,12 %, z 86 132,98 ton na 73 967,78 ton. Pokles sa týkal aj jednotlivých krajov, pričom Nitriansky kraj zaznamenal najvyšší medziročný pokles, kedy produkcia odpadu klesla o 21,02 %, teda z 10 815,77 ton na 8 542,20 ton, čím sa podieľal na celkovom poklese produkcie odpadu s 2,64 %. Naopak, najmenší pokles v tomto období nastal v Prešovskom kraji. Objem plastového komunálneho odpadu v tomto kraji klesol z 9 841,87 ton len na 9 627,16 ton, čo predstavovalo pokles iba o 2,18 % a príspevok k celkovému poklesu bol 0,25 %.

Trend znižovania produkcie plastového odpadu v rokoch 2022 a 2023 naznačoval, že pandémia, prijaté opatrenia na obmedzenie šírenia vírusu mali výrazný vplyv na spotrebu plastových výrobkov a tým aj na produkciu plastového odpadu. K zníženiu produkcie plastového odpadu mohol prispieť aj zvýšený záujem o ekologickejšie alternatívy k plastovým výrobkom, legislatívne opatrenia a celkové zmeny v spotrebiteľskom správaní počas pandémie.

Graf 3 znázorňuje, aké množstvo odpadu z plastových obalov vyprodukoval priemerný Slovák. Obdobie rokov 2019 až 2022 vykazovalo postupné zmeny s výrazným nárastom na konci sledovaného obdobia. V roku 2019 produkcia plastového odpadu z obalov dosahovala 24,69 kg na obyvateľa, avšak už v roku 2020, na začiatku pandémie, klesla na 23,49 kg na obyvateľa. Tento pokles mohol byť ovplyvnený výraznými zmenami v nákupných návykoch počas lockdownov. V roku 2021 sa situácia stabilizovala, pričom produkcia mierne vzrástla na 23,56 kg na obyvateľa. Najvýraznejší nárast však nastal v roku 2022, kedy sa produkcia vyšplhala na 26,72 kg na obyvateľa, čo predstavovalo viac ako 13 % nárast oproti predchádzajúcemu roku. Tento rast mohol byť dôsledkom nariadenia povinného nosenia ochranných rúšok na verejnosti po skončení lockdownov, oživenia ekonomických aktivít, zvýšenej spotreby plastových obalov a návratu k tradičným spotrebiteľským návykom.



Graf 3: Množstvo odpadov z plastových obalov na Slovensku v rokoch 2019 – 2022 v kg na obyvateľa

Zdroj: vlastné spracovanie podľa Enviroportál

Aj napriek celkovému poklesu produkcie plastového odpadu v roku 2023 tieto dáta naznačovali, že plastové obaly stále predstavujú významný environmentálny problém, ktorý si vyžaduje riešenia na zníženie ich spotreby a podporu ekologických alternatív. Vývoj zdôrazňuje dôležitosť zavádzania systémov na obmedzenie používania plastových obalov, ako aj efektívnych recyklačných politík.

4 ZÁVER

Na základe uskutočnených analýz môžeme tvrdiť, že celkový objem plastového komunálneho odpadu sa v roku 2023 v porovnaní s rokom 2019 na Slovensku zvýšil o 27,79 %. Najviac komunálneho odpadu v roku 2023 bolo vyprodukovaného v Trnavskom kraji, a to 15,34 kg na obyvateľa, najmenej v Košickom kraji (11,08 kg na obyvateľa). Na celkovom náraste komunálneho odpadu najviac prispeli kraje Východného Slovenska (Prešovský 5,40 % a Košický 5,29 %). Čo sa týka štruktúry tohto druhu odpadu v jednotlivých krajoch Slovenska, v roku 2023 v porovnaní s rokom 2019 sa zmenila len mierne.

Pre efektívnejšie nakladanie s odpadom je nevyhnutné pokračovať v rozvoji moderných technológií, ako sú inteligentné senzory na monitorovanie odpadu, robotizované triedenie odpadu a prediktívne modely založené na umelej inteligencii. Tieto technológie umožňujú optimalizáciu zberu odpadu, zlepšenie recyklačných procesov a zníženie environmentálnej záťaže.

Ďalším dôležitým aspektom je zmena spotrebiteľského správania. Aj keď technologické inovácie a legislatívne opatrenia hrajú kľúčovú úlohu v odpadovom hospodárstve, konečný úspech závisí od aktívneho zapojenia obyvateľstva. Zvýšenie environmentálnej gramotnosti a

motivácia ľudí k správne triedeniu odpadu môžu významne prispieť k udržateľnejšiemu spôsobu nakladania s odpadom.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy **VEGA 1/0047/23: Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa**

Použitá literatúra

HURBÁNKOVÁ, Ľ. – SIVAŠOVÁ, D. 2018. *Hospodárska štatistika I*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

KOTLEBOVÁ, E. a kol. 2017. *Štatistika pre bakalárov v praxi*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

Slovensko.sk. recyklácia a odpadové hospodárstvo. In *Slovensko.sk* [online]. 25.11.2020 [cit. 2025-03-13]. Dostupné na: <https://www.slovensko.sk/sk/zivotne-situacie/zivotna-situacia/recyklacia-a-odpadove-hospodar1/>

Štatistický úrad Slovenskej republiky.

https://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/vbd_dem/om7102rr/v_om7102rr_00_00_00_sk

Štatistický úrad Slovenskej republiky.

https://datacube.statistics.sk/#!/view/sk/vbd_sk_win2/zp3801rr/v_zp3801rr_00_00_00_sk

Kontaktné údaje

Ing. Ľubica Hurbánková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 728

email: lubica.hurbankova@euba.sk

VÝVOJ EMISIÍ SKLENÍKOVÝCH PLYNOV V REGIÓNOCH EÚ (2020–2024): PRIESTOROVÁ EXPLORAČNÁ ANALÝZA

DEVELOPMENT OF GREENHOUSE GAS EMISSIONS IN EU REGIONS (2020–2024): EXPLORATORY SPATIAL DATA ANALYSIS

Michaela Chocholatá¹

Abstrakt

Príspevok analyzuje priestorové rozloženie a vývoj emisií skleníkových plynov (GHG) v európskych regiónoch NUTS 2 v rokoch 2020–2024 pomocou exploračnej analýzy dát (EDA) a priestorovej exploračnej analýzy dát (ESDA) v softvéri GeoDa. V príspevku sa využíva technika krabicových grafov, krabicových máp, ako aj výpočet globálnej a lokálnej Moranovej *I* štatistiky na identifikáciu štruktúry, heterogenity a priestorovej autokorelácie. Výsledky ukazujú mierny, ale konzistentný pokles regionálnych emisií a postupné znižovanie variability medzi regiónmi. Na identifikáciu priestorových vzorcov zmien sme použili metódy dvojrozmernej LISA (bivariantný lokálny indikátor priestorovej asociácie) a diferenciálnej LISA (diferenciálny lokálny indikátor priestorovej asociácie), ktoré umožňujú odhaliť štatisticky významné lokálne klastre a vzťahy medzi premennými v priestore a čase, čím poskytujú detailnejší pohľad na dynamiku sledovaných javov. Súčasná kombinácia EDA, ESDA a dynamických metód poskytuje ucelený obraz časopriestorových trendov a predstavuje robustný základ pre diferencovanú klimatickú politiku v Európe.

Kľúčové slová: priestorová autokorelácia, Moranovo *I*, LISA analýza, emisie skleníkových plynov, NUTS 2 regióny

Abstract

The paper analyzes the spatial distribution and development of greenhouse gas emissions (GHG) in European NUTS 2 regions between 2020 and 2024 using exploratory data analysis (EDA) and spatial exploratory data analysis (ESDA) in the GeoDa software environment. The study applies boxplots, box maps, as well as global and local Moran's *I* statistics to identify the structure, heterogeneity, and spatial autocorrelation of the data. The results reveal a moderate but consistent decline in regional emissions and a gradual reduction of variability across regions. To identify spatial patterns of change, we use bivariate LISA (bivariate local indicator of spatial association) and differential LISA (differential local indicator of spatial association), which make it possible to detect statistically significant local clusters and spatial-temporal relationships between variables, thus providing a more detailed view of the dynamics of the observed phenomena. The combined application of EDA, ESDA, and dynamic spatial methods offers a comprehensive view of spatial-temporal trends and represents a robust foundation for differentiated climate policy in Europe.

Keywords: spatial autocorrelation, Moran's *I*, LISA analysis, greenhouse gas emissions, NUTS 2 regions

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA 1/0047/23 „Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa“ a VEGA 1/0052/24 „Odhad kľúčových štrukturálnych parametrov súčasných makroekonomických modelov“.

1 ÚVOD

Skleníkové plyny patria medzi kľúčové faktory ovplyvňujúce súčasnú klimatickú zmenu a zároveň predstavujú jeden z najdôležitejších indikátorov environmentálnej záťaže na regionálnej úrovni. Ich regionálna distribúcia nie je náhodná – odráža ekonomickú štruktúru územia, priemyselnú činnosť, urbanizačné procesy, technologickú úroveň a implementované politiky v oblasti životného prostredia (European Environment Agency, 2025). Tieto determinanty vytvárajú priestorovo diferencované emisné vzorce, ktorých analýza je významná pre identifikáciu zdrojov záťaže a pre hodnotenie efektívnosti klimatických opatrení v rôznych častiach Európy.

Popri samotnom environmentálnom zaťažení však emisie skleníkových plynov predstavujú aj širší indikátor ekologickej stability území, keďže sú úzko previazané s kvalitou ovzdušia, dostupnosťou zdrojov energie a udržateľnosťou priemyselných procesov. Viaceré štúdie ukazujú, že regióny s vysokými emisiami často čelia kumulatívnym environmentálnym problémom, ako je zhoršená kvalita ovzdušia, vyššia expozícia voči zdravotným rizikám či väčšia zraniteľnosť voči extrémnym prejavom klimatickej zmeny (Intergovernmental Panel on Climate Change, 2022). Geografická blízkosť regiónov zároveň vytvára priestor pre vznik tzv. environmentálnych spillover efektov, pri ktorých negatívne externality presahujú administratívne hranice a ovplyvňujú širšie územia. Tento priestorovo prepojený charakter environmentálnych procesov podčiarkuje potrebu uplatňovania analytických prístupov schopných zachytiť priestorovú závislosť a dynamiku emisných trendov, najmä v kontexte ambície Európskej únie dosiahnuť klimatickú neutralitu do roku 2050.

Východiskovým krokom pri hodnotení regionálnej diferenciácie emisií je exploračná analýza dát (EDA), ktorá poskytuje základný prehľad o štruktúre súboru, rozptyle hodnôt a prítomnosti odľahlých pozorovaní. Keďže samotná EDA nedokáže určiť, či zistené rozdiely majú priestorový charakter, je nevyhnutné jej doplnenie o priestorovo orientované analytické postupy. Priestorová exploračná analýza dát (ESDA), ako ju prezentoval Anselin (1995), umožňuje identifikovať priestorovú autokoreláciu, zhlukovanie hodnôt a lokálne priestorové anomálie. K základným nástrojom ESDA patria globálna a lokálna Moranova *I* štatistika, ktoré poskytujú možnosť skúmať priestorové vzorce na rôznych úrovniach priestorovej škály (Cliff & Ord, 1981; Anselin, 1995). Medzi najvýznamnejšie platformy pre analýzu priestorových dát patrí softvérové prostredie GeoDa, ktoré integruje vizualizačné techniky s metódami priestorovej štatistiky v rámci otvoreného a používateľsky prístupného rozhrania (Anselin et al., 2006). Jeho schopnosť analyzovať údaje v rôznych časových obdobiach umožňuje detailné skúmanie dynamiky regionálnych emisných vzorcov. Furková a Čičková (2025) realizovali statickú priestorovú analýzu emisií skleníkových plynov za rok 2022 v európskych regiónoch EÚ s dôrazom na stredoeurópske regióny.

Cieľom tohto príspevku je komplexne preskúmať vývoj rozdelenia emisií skleníkových plynov NUTS 2 regiónoch EÚ medzi rokmi 2020 a 2024, zhodnotiť ich priestorové usporiadanie a identifikovať zmeny v lokálnych klastroch a priestorových anomáliách v sledovanom období.

2 METODOLOGICKÉ VÝCHODISKÁ A POUŽITÉ ANALYTICKÉ PRÍSTUPY

Táto kapitola predstavuje metodologický rámec použitý pri skúmaní priestorových environmentálnych javov, pričom opisuje základné analytické postupy z oblasti exploračnej analýzy dát (EDA) a priestorovej exploračnej analýzy dát (ESDA).

2.1 EDA a ESDA

Exploračná analýza dát predstavuje počiatočnú fázu analytického procesu, ktorá slúži na získanie základného prehľadu o štruktúre dát, ich variabilite, rozdelení, prítomnosti odľahlých hodnôt či potenciálnych trendov (Tukey, 1977). EDA sa vyznačuje vizuálnymi a deskriptívnymi technikami, ktoré umožňujú identifikovať charakteristiky dát bez nutnosti predpokladov o ich distribučných vlastnostiach. V kontexte regionálnych údajov sú základnými nástrojmi EDA najmä krabicové grafy (boxplots), ktoré umožňujú identifikovať extrémny, asymetriu a rozptyl, histogramy a distribučné grafy či rozptylové grafy (scatterplots) pre detekciu vzťahov medzi premennými. V kontexte environmentálnych premenných, ktoré sa často vyznačujú vysokou variabilitou a prítomnosťou extrémov, predstavuje napr. krabicový graf dôležitý nástroj na posúdenie celkovej štruktúry dát pred ich priestorovou analýzou.

Priestorová exploračná analýza dát (ESDA), definovaná v práci Anselin (1995), rozširuje klasickú EDA o dimenziu geografických vzťahov. ESDA sa zameriava na odhaľovanie priestorových vzorcov, identifikáciu priestorovej autokorelácie a lokalizáciu klastrov či anomálií. Nevyhnutnou súčasťou ESDA je vizualizácia priestorových dát, keďže umožňuje prepojenie štatistických výsledkov s geografickým kontextom (Haining, 2003). Spomedzi používaných techník možno uviesť (aj s ohľadom na realizovanú analýzu v tomto príspevku) krabicové mapy (box maps), ktoré kombinujú štatistickú logiku krabicových grafov s kartografickým zobrazením a priestorové rozptylové grafy, najmä Moranov rozptylový diagram, ktorý zobrazuje vzťah medzi hodnotou premennej a jej priestorovo posunutou hodnotou (spatial lag).

2.2 Priestorová autokorelácia: Globálne a lokálne ukazovatele

Priestorová autokorelácia predstavuje základný koncept ESDA, definujúci mieru, do akej podobné hodnoty susedia v priestore (Moran, 1950). Priestorovú autokoreláciu možno všeobecne charakterizovať tiež ako koreláciu analyzovanej premennej s jej priestorovo posunutou hodnotou, čo indikuje, že geograficky blízke regióny sú vzájomne previazané. Na kvantifikáciu priestorovej autokorelácie sa využívajú dva typy indikátorov: globálne a lokálne štatistiky.

Globálne štatistiky poskytujú informáciu o priestorovej autokorelácii z celkového, globálneho hľadiska, teda vo forme jednej hodnoty charakterizujúcej celý analyzovaný dataset. Naopak, lokálne štatistiky sa zameriavajú na priestorovú autokoreláciu jednotlivých priestorových jednotiek (regiónov) a umožňujú identifikovať ich špecifické priestorové vzorce. Lokálne indikátory priestorovej asociácie LISA (Local Indicators of Spatial Association), formulované Anselinom (1995), sa používajú najmä na detekciu priestorových zhlukov a lokálnych anomálií. Medzi najznámejšie nástroje na globálnej aj lokálnej úrovni patria globálna a lokálna Moranova I štatistika, pričom ich matematické definície možno nájsť napríklad v Furková a Chocholatá (2015). Základom všetkých priestorových štatistických metód je definícia priestorových vzťahov pomocou matice priestorových váh. Najjednoduchšia a najčastejšie používaná je matica susednosti. Okrem tejto špecifikácie sa môžeme stretnúť s váhami založenými na vzdialenosti, kombinácii susednosti a vzdialenosti, atď. V aplikačnej časti príspevku bude využitá matica váh typu kráľovná (Furková a Chocholatá, 2015).

2.3 Dynamické prístupy: bivariantná a diferenciálna LISA

Priestorové vzorce environmentálnych ukazovateľov sú výsledkom dlhodobých ekonomických, priemyselných a urbanizačných procesov, ktoré prejavujú rôzne stupne perzistencie a dynamiky. Na zachytenie týchto procesov je potrebné analyzovať nielen

statické priestorové rozloženie hodnôt v jednotlivých rokoch, ale aj časové prepojenie medzi rokmi a priestorové zmeny, ktoré sa odohrali medzi dvoma časovými bodmi. Na tento účel možno využiť dvojrozmerné rozšírenia lokálneho Moranovho I (GeoDa Center, n.d.a; GeoDa Center, n.d.b), a to:

- bivariantnú LISA (BiLISA), ktorá hodnotí priestorovú asociáciu medzi dvoma priestorovo lokalizovanými premennými, čím umožňuje identifikovať vzťahy – vrátane časových väzieb – medzi hodnotou indikátora v jednom období a hodnotami v susedných regiónoch v inom období.
- diferenciálnu LISA (Differential LISA), ktorá analyzuje rozdiely v hodnote premennej medzi dvoma časovými obdobiami a hodnotí, či sú tieto zmeny priestorovo organizované do štatisticky významných klastrov, alebo či vykazujú charakter lokálnych priestorových anomálií,

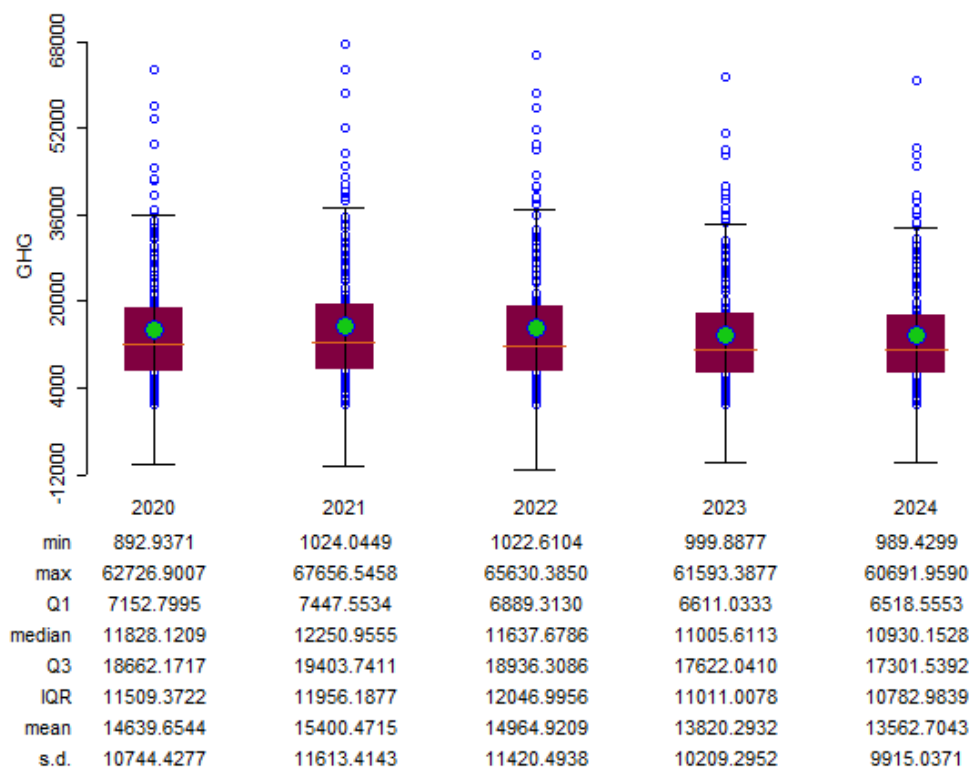
3 DÁTA A EMPIRICKÉ VÝSLEDKY ANALÝZY

Analýza v tomto príspevku vychádza z regionálnych údajov týkajúcich sa emisií skleníkových plynov (GHG) za 223 NUTS 2 regiónov EÚ v období 2020–2024. Údaje boli získané z databázy „Emissions Database for Global Atmospheric Research“ (European Commission, Joint Research Centre, 2025). Emisie skleníkových plynov sú vyjadrené v kilotonách CO₂ ekvivalentu (CO₂eq) s použitím hodnôt potenciálu globálneho otepľovania (GWP-100) podľa IPCC AR5 a zahŕňajú iba fosílny CO₂, CH₄, N₂O a F-plyny. Analýza priestorových dát bola zrealizovaná v softvéri GeoDa, adresár NUTS_RG_20M_2024_3035 obsahujúci súbory na báze NUTS 2024 klasifikácie bol stiahnutý z webovej stránky Eurostatu (2025) a adekvátne upravený v softvéri GeoDa. Priestorová reprezentácia regiónov bola založená na polygonálnych údajoch, pričom bola vytvorená váhová matica priestorových susedností typu kráľovná. Táto matica bola následne využitá pri výpočte priestorových štatistík.

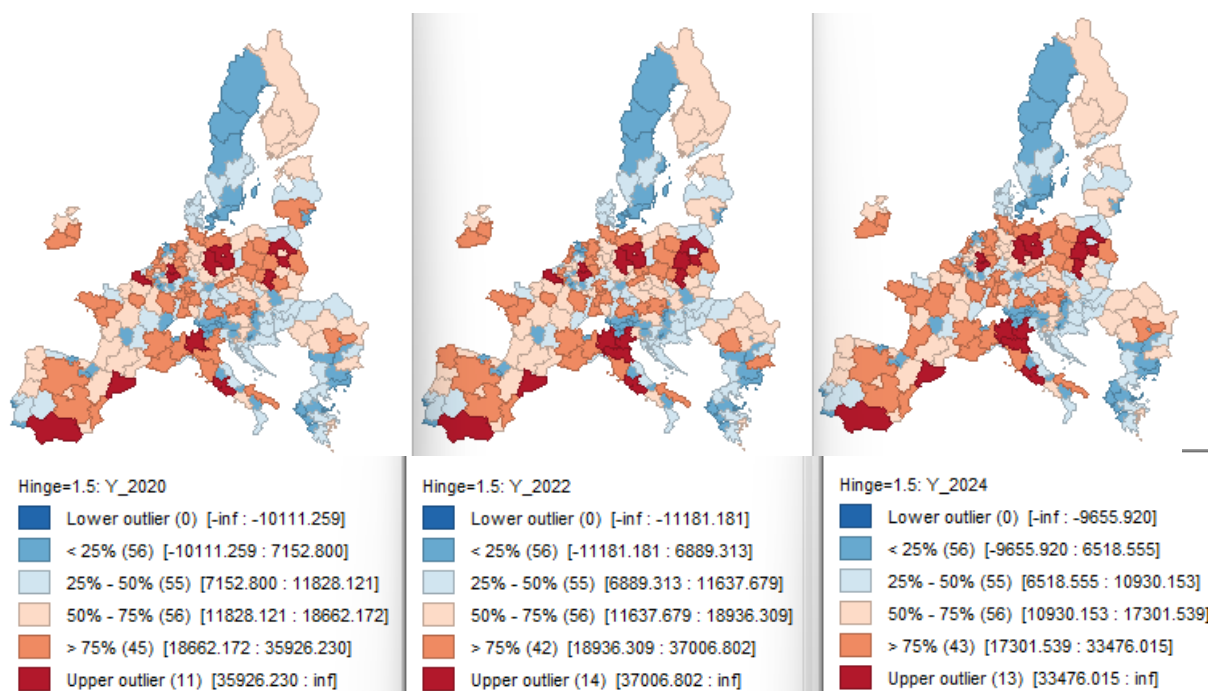
Prvotná identifikácia štruktúry údajov prebiehala na základe krabicových grafov pre jednotlivé analyzované obdobia doplnené výpočtom základných deskriptívnych štatistík. Krabicové grafy znázornené na obrázku č. 1 zobrazujú vývoj rozdelenia emisií GHG v európskych regiónoch NUTS 2. Z krabicových grafov a deskriptívnych štatistík vyplýva v období 2020–2024 mierny nárast GHG emisií v roku 2021 oproti predošlému roku 2020 a následne systematický pokles mediánu a priemeru emisií, pokles variability - čo znamená znižovanie rozdielov medzi regiónm, ako aj pokles extrémnych horných hodnôt, ktoré v roku 2021 zásadne vyčnievali. Tieto zistenia naznačujú, že európske regióny postupne znižujú svoju emisnú záťaž, pričom najmenej efektívne regióny zaznamenávajú zlepšenie.

Nevýhodou krabicového grafu však je, že neodhaľuje priestorové vzorce, t. j. nezobrazuje, kde presne sa nachádzajú najväčšie zdroje znečistenia, či sa vytvárajú priestorové klastre vysokých/nízkych hodnôt, ba ani to, čo sa deje v priebehu času v konkrétnych regiónoch. Krabicové mapy tieto informácie dopĺňajú tým, že vizualizujú analyzované dáta podľa regiónov, umožňujú identifikovať priestorovú polarizáciu a ukazujú tiež zmeny v geografickom rozložení extrémov v čase. Krabicové mapy pre tri vybrané obdobia 2020, 2022 a 2024 sú znázornené na obrázku č. 2, z ktorého je zrejmé, že priestorové jadro najvyšších emisií sa stabilne nachádza najmä v južných a vybraných priemyselných regiónoch Európy. Najnižšie hodnoty dlhodobo vykazuje najmä severná Európa. Krabicové mapy odhalili stabilné priestorové vzorce – regióny s vysokými hodnotami (> 75 %): juh Španielska, severné Taliansko, západné Nemecko, vybrané regióny Poľska a Česka. Regióny s nízkymi

hodnotami (< 25 %) boli lokalizované vo Švédsku, Fínsku, Írsku a niektorých periférnych oblastiach Portugalska a Francúzska.



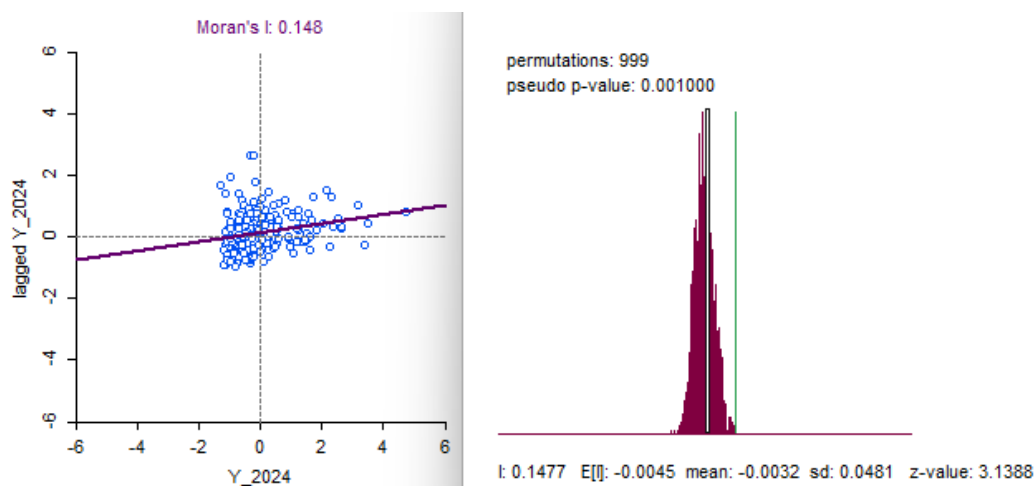
Obr. 1 Krabicové grafy: Vývoj celkových emisií skleníkových plynov v kilotonách CO₂ ekvivalentu v NUTS 2 regiónoch EÚ v období 2020-2024. Zdroj: vlastné výpočty v softvéri GeoDa.



Obr. 2 Krabicové mapy: Vývoj celkových emisií skleníkových plynov v kilotonách CO₂ ekvivalentu v NUTS 2 regiónoch EÚ v rokoch 2020, 2022 a 2024.

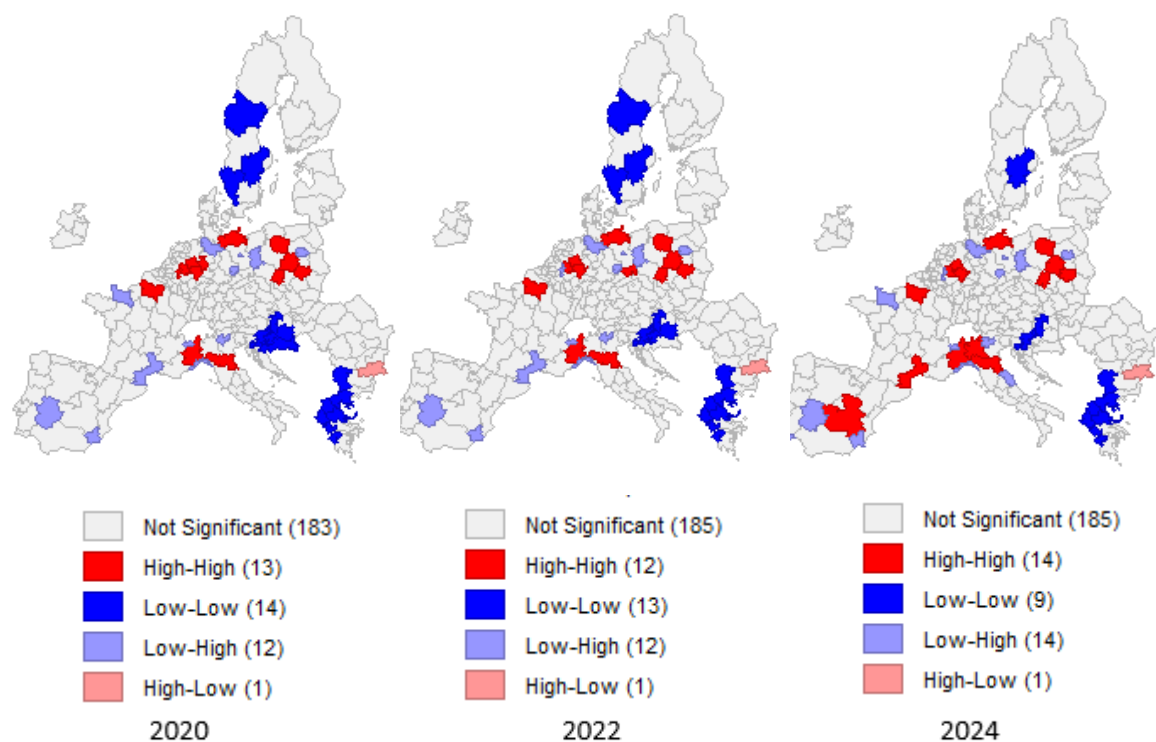
Zdroj: vlastné výpočty v softvéri GeoDa.

V ďalšom kroku ESDA sme pristúpili k analýze priestorovej autokorelácie pomocou výpočtu globálnej Moranovej I štatistiky pre jednotlivé analyzované obdobia, pričom sa hodnota tejto štatistiky v čase výrazne nemenila a dosahovala hodnoty medzi 0,145 - 0,148. Obrázok č. 3 znázorňuje Moranov rozptylový diagram a potvrdenie štatistickej významnosti pozitívnej priestorovej autokorelácie na základe 999 permutácií pre rok 2024.

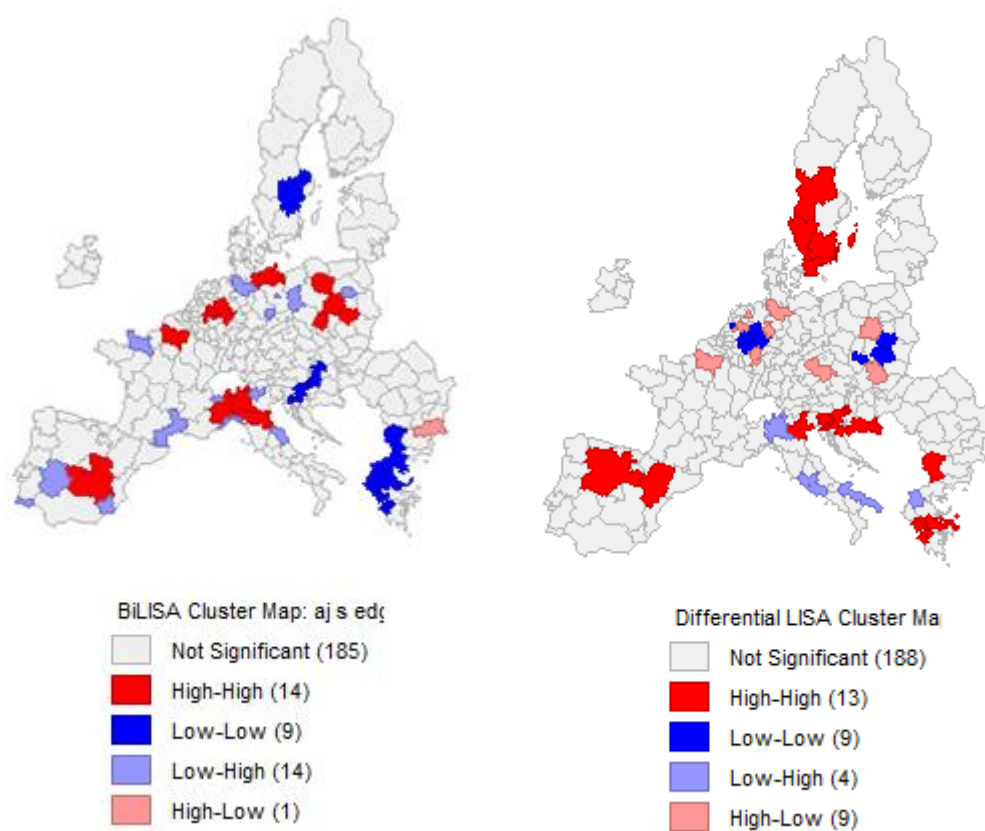


Obr. 3 Moranov rozptylový diagram a výsledok permutačnej procedúry pre regionálnu úroveň GHG emisií v roku 2024. Zdroj: vlastné výpočty v softvéri GeoDa.

Lokálne indikátory priestorovej autokorelácie (LISA) na báze výpočtu lokálnych Moranových I štatistík umožnili identifikovať High–High klastre (vysoké hodnoty obklopené vysokými), Low–Low klastre (nízke hodnoty obklopené nízkymi), High–Low outliers (vysoká hodnota medzi nízkymi) a Low–High outliers (nízka hodnota medzi vysokými). LISA klastrové mapy na obrázku č. 4 boli vytvorené pre roky 2020, 2022 a 2024, čo umožňuje porovnať vývoj priestorových vzorcov v čase. Štatisticky významné High–High klastre tvoria stabilne regióny s vysokým podielom priemyselnej výroby, dopravných uzlov a energeticky náročných odvetví. Štatisticky významné Low–Low klastre boli identifikované pre regióny vyznačujúce sa nízkou urbanizáciou, vysokým podielom obnoviteľných zdrojov energie a ekologickými hospodárskymi štruktúrami. Odlahlé regióny (High–Low, Low–High) sú analyticky najzaujímavejšie, pretože: predstavujú priestorové anomálie, môžu indikovať neočakávané ekonomické alebo technologické rozdiely, môžu byť východiskom pre politické intervencie. Obrázok č. 5 zachytáva výsledky dynamickej priestorovej analýzy založenej na dvoch komplementárnych prístupoch: Bivariate LISA a Differential LISA pre roky 2020 a 2024. Bivariate LISA potvrdzuje priestorovú stabilitu dlhodobých emisných vzorcov, pričom identifikuje oblasti s pretrvávajúcimi vysokými aj nízkymi hodnotami. Naopak, Differential LISA odhaľuje vznik nových regionálnych trendov, vrátane rastu emisií v niektorých oblastiach južnej, západnej a strednej Európy a poklesu v častiach severnej Európy. Kombinované použitie oboch analýz umožňuje identifikovať nielen perzistentné emisné jadrá, ale aj regionálne zmeny, ktoré by pri tradičnom EDA alebo ESDA zostali skryté.



Obr. 4 LISA klastrové mapy pre roky 2020, 2022 a 2024. Zdroj: vlastné výpočty v softvéri GeoDa.



Obr. 5 Bivariate LISA a Differential LISA klastrové mapy pre 2020 a 2024. Zdroj: vlastné výpočty v softvéri GeoDa.

4 ZÁVER

Analýza priestorového rozloženia a vývoja emisií skleníkových plynov v NUTS 2 regiónoch EÚ ukázala, že kombinácia exploračnej analýzy dát a priestorovo orientovaných metód predstavuje efektívny rámec na identifikáciu časopriestorových vzorcov environmentálnej záťaže. Využitie EDA umožnilo odhaliť základnú štruktúru dát, vrátane trendu postupného znižovania mediánu aj variability emisií v období 2020–2024, čo naznačuje miernu konvergenciu medzi regiónmi. Priestorová exploračná analýza dát zároveň potvrdila, že priestorové vzťahy zohrávajú významnú úlohu pri formovaní emisných vzorcov, čo dokumentuje štatisticky významná pozitívna globálna priestorová autokorelácia identifikovaná pomocou Moranovho *I* vo všetkých sledovaných rokoch.

Lokálne analytické metódy priniesli detailný pohľad na regionálne zoskupovanie vysokých a nízkych emisií, pričom LISA klastre odhalili stabilné oblasti so systematicky vysokou emisnou záťažou, ako aj dlhodobu nízko-emisné regióny. Aplikácia bivariantnej a diferenciálnej LISA rozšírila tento pohľad o dynamickú dimenziu: bivariantná LISA poukázala na priestorovú perzistenciu emisných vzorcov medzi jednotlivými rokmi, kým diferenciálna LISA identifikovala nové klastre rastu a poklesu, ktoré by pri statickej analýze zostali skryté. Tieto metódy odhalili časopriestorové transformácie v emisných vzorcoch, vrátane vzniku nových hotspotov a oslabenia pôvodných nízko-emisných oblastí.

Výsledky potvrdzujú, že environmentálne procesy sú v EÚ výrazne priestorovo prepojené a že regionálne politiky zamerané na dekarbonizáciu musia zohľadňovať existenciu cezhraničných emisných väzieb aj lokálnych anomálií. Identifikované klastre vysokých emisií predstavujú potenciálne zóny, kde je potrebná intenzívnejšia implementácia klimatických opatrení a technologickej modernizácie, zatiaľ čo oblasti s koordinovaným poklesom emisií môžu slúžiť ako príklady dobrej praxe.

Použitá literatúra

- Anselin, L. (1995). Local Indicators of Spatial Association—LISA. *Geographical Analysis*, 27(2), 93–115.
- Anselin, L., Syabri, I., & Kho, Y. (2006). GeoDa: An Introduction to Spatial Data Analysis. *Geographical Analysis*, 38(1), 5–22.
- Cliff, A. D., & Ord, J. K. (1981). *Spatial Processes: Models & Applications*. Pion.
- European Commission, Joint Research Centre. (2025). *EDGAR_2025_GHG_NUTS2: GHG emissions at sub-national level* [Data set]. <https://doi.org/10.2905/D67EEDA8-C03E-4421-95D0-0ADC460B9658>
- European Environment Agency. (2025). *Total net greenhouse gas emission trends and projections in Europe*. Retrieved November 8, 2025, from <https://www.eea.europa.eu/en/analysis/indicators/total-greenhouse-gas-emission-trends>
- Eurostat (2025). *Territorial units for statistics (NUTS)* [Data set]. European Commission, GISCO. Retrieved November 05, 2025, from <https://ec.europa.eu/eurostat/web/gisco/geodata/statistical-units/territorial-units-statistics>
- Furková, A., & Chocholatá, M. (2015). *Spatial analysis of regional GDP growth: The case study of V4 countries*. In S. Rojik (Ed.), *Competition: Proceedings of the 7th Annual International Scientific Conference* (pp. 70–77). Vysoká škola polytechnická. ISBN 978-80-88064-14-5.
- Furková, A., & Čičková, Z. (2025). *Priestorová analýza emisií skleníkových plynov v regiónoch EÚ: dôraz na Strednú Európu* [Spatial analysis of greenhouse gas emissions in EU regions: Focus on Central Europe]. In K. Szomolányi & P. Gežík (Eds.), *Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XVI: zborník zo seminára, Nová Lehota, 28.–30. mája 2025* (s. 38–42). Vydavateľstvo EKONÓM.

https://fhi.euba.sk/www_write/files/katedry/kove/zborniky/seminar_25_Nova_Lehota-2025.pdf

GeoDa Center. (n.d.a). *Local spatial autocorrelation (2) – Other local spatial autocorrelation statistics*. Retrieved November 05, 2025, from [https://geodacenter.github.io/lab/?lab=../workbook/6b_local_adv/lab6b.html&title=Local%20Spatial%20Autocorrelation%20\(2\)%20-%20Other%20Local%20Spatial%20Autocorrelation%20Statistics%20-%20Other%20Local%20Spatial%20Autocorrelation%20Statistics](https://geodacenter.github.io/lab/?lab=../workbook/6b_local_adv/lab6b.html&title=Local%20Spatial%20Autocorrelation%20(2)%20-%20Other%20Local%20Spatial%20Autocorrelation%20Statistics%20-%20Other%20Local%20Spatial%20Autocorrelation%20Statistics)

GeoDa Center. (n.d.b). *Global spatial autocorrelation (2) – Bivariate, differential and EB*. Retrieved November 05, 2025, from [https://geodacenter.github.io/lab/?lab=../workbook/5b_global_adv/lab5b.html&title=Global%20Spatial%20Autocorrelation%20\(2\)%20-%20Bivariate%2C%20Differential%20and%20EB%20-%20Bivariate%2C%20Differential%20and%20EB](https://geodacenter.github.io/lab/?lab=../workbook/5b_global_adv/lab5b.html&title=Global%20Spatial%20Autocorrelation%20(2)%20-%20Bivariate%2C%20Differential%20and%20EB%20-%20Bivariate%2C%20Differential%20and%20EB)

Haining, R. (2003). *Spatial Data Analysis: Theory and Practice*. Cambridge University Press.
Intergovernmental Panel on Climate Change. (2022). *Climate change 2022: Impacts, adaptation, and vulnerability. Contribution of Working Group II to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (H.-O. Pörtner, D. C. Roberts, M. Tignor, E. S. Poloczanska, K. Mintenbeck, A. Alegría, M. Craig, S. Langsdorf, S. Löschke, V. Möller, A. Okem, & B. Rama, Eds.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009325844>

Moran, P. A. P. (1950). *Notes on continuous stochastic phenomena*. *Biometrika*, 37(1/2), 17–23. <https://doi.org/10.2307/2332142>

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Addison-Wesley.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: michaela.chocholata@euba.sk

VYROVNÁVÁNÍ KVALITY ZÁCHRANNÉ ZDRAVOTNÍ SLUŽBY V RŮZNÝCH REGIONECH

EQUALIZING THE QUALITY OF EMERGENCY HEALTH SERVICES IN DIFFERENT REGIONS

Jaroslav Janáček, Peter Czimmermann, Tomáš Majer, Lýdia Gábrišová

Abstrakt

Tento příspěvek se zabývá modelováním úlohy vyrovnávání kvality záchranné zdravotní služby mezi regiony většího politického celku. Jsou zde navrženy dva možné přístupy i s odpovídajícími modely matematického programování a je diskutována řešitelnost modelovaných úloh včetně jejich možných modifikací.

Klíčové slová: *záchranná zdravotní služba, vyrovnávání kvality mezi regiony, matematického programování*

Abstract

This paper deals with the modeling of the problem of equalizing the quality of emergency medical services between regions of a larger political entity. Two possible approaches are proposed with corresponding mathematical programming models and the solvability of the modeled problems, including their possible modifications, is discussed.

Keywords: *emergency medical service, equalization of quality between regions, mathematical programming*

1 ÚVOD

Zabezpečení stejného přístupu k službě poskytované z několika obslužných středisek formou výjezdu vozidel pro větší počet uživatelů rozptýlených v obsluhovaném regionu ve větším počtu sídelních míst je nemožné. To proto, že při racionálním rozmístění středisek bude vždy některé ze sídelních míst od svého nejbližšího střediska dále než jiné. Pokud ale je kvalita záchranné služby v regionu měřena průměrnou hodnotou nějaké veličiny, například dojezdovou dobou vozidla poskytujícího službu ze střediska k uživateli [3, 6, 9, 13, 14, 15, 19, 20], můžeme podle tohoto kritéria porovnávat kvalitu služby v různých regionech. I když průměrná doba dojezdu je považována za hlavní systémové kritérium nejvíce ovlivňující přeživších uživatelů jejich následné zdravotní potíže, může být kvalita vyjádřena i nějakým férovým kritériem [2, 4], jako je počet uživatelů, kteří mají větší dobu dojezdu než je zadaný akceptovatelný limit. Protože sjednocení systémových a férových kritérií si vyžaduje určení váhových koeficientů, které je značně subjektivní, je preferován přístup, kdy jedno z kritérií, obvykle systémové, je popsáno účelovou funkcí modelu a další, obvykle férová kritéria jsou zapracována do podmínek přípustnosti. V tomto článku se budeme zabývat modelováním úloh návrhu rekonstrukce systému záchranné zdravotní služby v dané množině regionů tak, aby byla minimalizována nerovnost v přístupu k službě v jednotlivých regionech při zachování stávající kvality poskytované služby.

2 OPTIMALIZACE KVALITY SLUŽBY V REGIONU ROZMÍSTĚNÍM OBSLUHUJÍCÍCH VOZIDEL

V daném regionu uvažujeme množinu J uživatelů, kde každý má danou váhu w_j úměrnou odhadovanému počtu zásahů v plánovacím období. Dále je dána množina I možných umístění vozidel poskytujících službu, kde pro každé umístění $i \in I$ je určen maximální počet u_i , který je možno v místě i umístit. Zároveň je určen minimální počet vozidel f_i , který je nutno v místě i umístit. Pro danou dvojici (i, j) možného umístění vozidel a obsluhovaného uživatele j je známá doba t_{ij} jízdy vozidla. Vzhledem k náhodnosti vzniku požadavků na obsluhu u jednotlivých uživatelů uvažujeme pravděpodobnosti $q_1, q_2, \dots, q_r$, kde q_k je pravděpodobnost, že k -té nejbližší středisko k uživateli je nejbližší středisko, které má volné vozidlo.

Rozhodnutí o počtu vozidel umístěných ve středisku i bude modelováno celočíselnou proměnnou $y_i \in \mathbb{Z}^+$, pro kterou platí $f_i \leq y_i \leq u_i$. Pro formulování účelové funkce bude použit operátor $T_j^k(\mathbf{y})$, který vydá dojezdovou dobu od k -tého nejbližšího vozidla k uživateli j . Potom průměrná doba $t(x)$ k uživateli pro x disponibilních vozidel může být vypočítána pro dané rozmístění $\mathbf{y} = \{y_i; i \in I\}$ podle výrazu (1).

$$t(x) = \sum_{j \in J} w_j \sum_{k=1}^r q_k T_j^k(\mathbf{y}) / \sum_{j \in J} w_j \quad (1)$$

Pro omezení x, f_i, u_i pro $i \in I$ příslušná optimalizační může být formulována takto:

$$\text{minimalizujte } t(x) \quad (2)$$

za podmínek

$$\sum_{i \in I} y_i = x \quad (3)$$

$$f_i \leq y_i \leq u_i \text{ a } y_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ pro } i \in I \quad (4)$$

I když je, díky nelineárnímu operátoru $T_j^k(\mathbf{y})$, úloha (2) – (4) nelineární, je možno je modelovat v lineárním tvaru buď pomocí alokačního přístupu [5, 18] anebo radiálního přístupu [1, 7, 8, 10, 11, 12, 16, 17, 21].

Jak ukázaly numerické experimenty v [11] a [16], exaktní výsledky je možné získat během několika sekund.

3 MODEL Y OPTIMÁLNÍHO VYROVNÁVÁNÍ KVALITY SLUŽBY NA MNOŽINĚ REGIONŮ

Za předpokladu, že současná kvalita služby se v žádném z uvažovaných regionů nesmí snížit, může být vyrovnaní kvality dosaženo jen zvýšením celkového počtu vozidel o počet p^{add} . Označíme-li počet vozidel rozmístěných v regionu $s \in S$ symbolem p_s^{curr} , tak maximální počet vozidel v regionu s je $p_s^{max} = p_s^{curr} + p^{add}$.

Pomocí řešení úlohy (2)–(4) pro různé hodnoty $p_s^{curr} + x_s$ můžeme definovat pro $x_s \in \mathbb{Z}^+$, $x_s \leq p^{add}$ funkci $t_s(x_s) = f_s(p_s^{curr} + x_s)$ jako průměrnou dobu dojezdu v regionu s pro současný počet vozidel zvýšený o hodnotu x_s . Funkce t_s je klesající a obecně nelineární a je definovaná jen pro celočíselné hodnoty x_s .

Jedním z přístupů, jak modelovat úlohu vyrovnavání kvality služby mezi regiony z množiny S , je minimalizovat průměrnou dobu dojezdu nejhoršího regionu. Tuto úlohu můžeme formulovat takto:

minimalizujte h (5)

za podmíněk

$t_s(x_s) \leq h$ pro $s \in S$ (6)

$\sum_{s \in S} x_s = p^{add}$ (7)

(8)

$x_s \in Z^+$ for $s \in S$

V uvedeném modelu proměnná h představuje horní hranici průměrných dob dostupnosti všech uvažovaných regionů. Minimalizací h lze dosáhnout nejmenší možný rozdíl v těchto veličinách mezi nejlepší a nejhorší hodnotou.

Dalším přístupem k úloze vyrovnávání rozdílů v kvalitě služby je minimalizace rozptylu hodnot $t_s(x_s)$. Zde je možno minimalizovanou účelovou funkci formulovat následujícím způsobem:

$$\frac{\sum_{s \in S} (t_s(x_s) - \sum_{s \in S} t_s(x_s) / |S|)^2}{|S|} = \frac{\sum_{s \in S} (t_s(x_s))^2}{|S|} - \frac{(\sum_{s \in S} t_s(x_s))^2}{|S|} \quad (9)$$

Model druhého přístupu může být formulován takto: *Minimalizujte (9) za podmíněk (7) a (8).*

4 ZÁVĚR

I když pro výše uvedené modely úloh celočíselného nelineárního programování není k dispozici univerzální optimalizační software, je možné oba dva modely přeformulovat za cenu zvětšení rozměru úlohy a v druhém případě za cenu kontrolované ztráty přesnosti na úlohy lineárního celočíselného programování. Potom je možné k řešení úloh použít standardní IP-solver. Otázkou ale zůstává doba potřebná k nalezení optimálního řešení jedné i druhé z úloh, což bude předmětem dalšího výzkumu. Dalším námětem pro budoucí výzkum je vytvoření modelu minimalizace průměrné dojezdové doby v jednom regionu za respektování požadavku na férovost v době dojezdu k uživatelům služby.

Použitá literatura

1. Avella, P., Sassano, A. and Vasil'ev, I. 2007. Computational study of large scale p-median problems. *Mathematical Programming*, 109: 2007, pp. 89-114.
2. Bertsimas, D., Farias, V. F., Trichakis, N. 2011. The Price of Fairness. In *Operations Research*, 59, 2011, pp. 17-31.
3. Brotcorne, L., Laporte, G., Semet, F. 2003. Ambulance location and relocation models. *Eur. Journal of Oper. Research*, 147, 2003, pp. 451-463.
4. Buzna, L., Koháni, M., Janáček, J. 2013. Proportionally Fairer Public Service Systems Design. In: *Communications - Scientific Letters of the University of Žilina* 15(1), 2013, pp. 14-18.
5. Current, J., Daskin, M. and Schilling, D. 2002. Discrete network location models, Drezner Z. et al. (ed) *Facility location: Applications and theory*, Springer, 2002, pp. 81-118.
6. Doerner K. F., Gutjahr W. J., Hartl R. F., Karall M., Reimann M. 2005. Heuristic solution of an extended double-coverage ambulance location problem for Austria, *Central European Journal of Operations Research*, vol. 13, no 4, 2005, pp. 325-340.
7. Elloumi, S., Labbé, M., Pochet, Y. 2004. A new formulation and resolution method for the p-center problem. *INFORMS Journal on Computing* 16, 2004, pp. 84-94

8. García, S., Labbé, M., Marín, A. 2011. Solving large p-median problems with a radius formulation. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 23, No 4, 2011, pp. 546-556
9. Guerriero, F., Miglionico, G., Olivito, F. 2016. Location and reorganization problems: The Calabrian health care system case. *European Journal of Operational Research* 250, 2016, pp. 939-954
10. Janáček, J. 2008. Approximate Covering Models of Location Problems. In *Lecture Notes in Management Science: Proceedings of the 1st International Conference ICAOR*, Yerevan, Armenia, 2008, pp. 53-61
11. Janáček, J., Kvet, M. 2016. Sequential approximate approach to the p-median problem. *Computers & industrial engineering*, Vol. 94, 2016, pp. 83-92.
12. Janáček, J., Kvet, M. 2019. Usage of uniformly deployed set for p-location min-sum problem with generalized disutility. In *SOR 2019: International symposium on Operational Research*, Bled, Slovenia, 2019, pp. 494-499
13. Jánošíková, Ľ., Žarnay, M. 2014. Location of emergency stations as the capacitated p-median problem. In *International scientific conference: Quantitative Methods in Economics-Multiple Criteria Decision Making XVII*, Vrt, Slovakia, 2014
14. Jánošíková, Ľ. et al. 2019. An optimization and simulation approach to emergency stations relocation. *Central European Journal of Operations Research*, Vol. 27. No. 3, 2019, pp. 737-758
15. Jankovič, P. 2016. Calculating Reduction Coefficients for Optimization of Emergency Service System Using Microscopic Simulation Model. In: *17th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*, 2016, pp. 163-167.
16. Kvet, M. 2014. Computational Study of Radial Approach to Public Service System Design with Generalized Utility. In: *Proceedings of International Conference DT 2014*, Žilina, Slovakia, 2014, pp. 198-208.
17. Kvet M., Janáček J. 2018. Reengineering of the emergency service system under generalized disutility, in *proceedings of the ICORES 2018: 7th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, Madeira, Portugal, 2018, pp. 85-93.
18. Marianov, V., Serra, D. 2002. Location problems in the public sector. In Drezner, Z. (Ed.). *Facility location - Applications and theory*, Berlin: Springer, 2002, pp. 119-150
19. Resende, M., G., C. 2004. A Hybrid Heuristic for the p-Median Problem. *Journal of Heuristics*, 10, Kluwer Academic Publishers, 2004, pp. 59-88
20. Reuter-Oppermann, M., van den Berg, P. L., Vile, J. L. 2017. Logistics for Emergency Medical Service systems. *Health Systems*, Vol. 6, No 3, 2017, pp 187-208
21. Sayah D., Irnich S. 2016. A new compact formulation for the discrete p-dispersion problem, *European Journal of Operational Research*, vol. 256, no 1, 2016, pp. 62-67.

Acknowledgement

Tento výzkum je podporovaný projektom VEGA 1/0220/25 „Regionálna rovnosť v prístupe k verejným záchranným službám poskytovaným z obslužných stredísk na dopravnej sieti“

Kontaktné údaje

Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Vysokoškolákov 1, 01026 Žilina

Tel: (421 41) 513 4204

email: Jaroslav.janacek@fri.uniza.sk

Mgr. Peter Czimmermann, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Vysokoškolákov 1, 01026 Žilina

Tel: (421 41) 513 4253

email: peter.czimmermann@fri.uniza.sk

Ing. Tomáš Majer, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Vysokoškolákov 1, 01026 Žilina

Tel: (421 41) 513 4284

email: tomas.majer@fri.uniza.sk

Mgr. Lýdia Gábrišová, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Vysokoškolákov 1, 01026 Žilina

Tel: (421 41) 513 4285

email: lydia.gabrisova@fri.uniza.sk

VÝVOJ ENVIRONMENTÁLNEJ LEGISLATÍVY SLOVENSKEJ REPUBLIKY (1993–2025) A JEJ IMPLIKÁCIE PRE MODELOVANIE STRATEGICKÉHO SPRÁVANIA V BAYESOVSKÝCH HRÁCH

DEVELOPMENT OF ENVIRONMENTAL LEGISLATION IN THE SLOVAK REPUBLIC (1993–2025) AND ITS IMPLICATIONS FOR MODELING STRATEGIC BEHAVIOUR IN BAYESIAN GAMES

Miroslava Jánošová, Tomáš Domonkos

Abstrakt

Predkladaný príspevok mapuje vývoj environmentálnej legislatívy Slovenskej republiky v období rokov 1993 – 2025. Environmentálna legislatíva je spracovaná v kontexte širšieho rámca európskeho environmentálneho a klimaticko-energetického riadenia. Na základe preskúmania národných právnych predpisov, strategických dokumentov a záväzkov vyplývajúcich z členstva v Európskej únii sledujeme postupný posun od počiatkovej ochrany životného prostredia k ucelenejšiemu regulačnému rámcu, ktorý bol formovaný medzinárodnými dohodami, európskou legislatívou a neskôr implementáciou iniciatív ako Európska zelená dohoda či balík Fit for 55. Príspevok si zároveň kladie za cieľ identifikovať štrukturálne charakteristiky environmentálnej politiky Slovenskej republiky, pričom ich pochopenie umožní opísať Slovensko ako konzistentného strategického hráča, ktorého správanie je možné formálne modelovať v rámci bayesovských hier.

Kľúčové slová: *environmentálna legislatíva, bayesovské modelovanie, rozhodovacie procesy*

Abstract

This paper examines the development of environmental legislation in the Slovak Republic from 1993 to 2025. The evolution of environmental regulation is analysed within the broader framework of European environmental and climate-energy governance. Drawing on national legal acts, strategic documents, and obligations arising from EU membership, we trace the gradual shift from early-stage environmental regulation to a more coherent regulatory framework shaped by international agreements, EU legislation, and, more recently, initiatives such as the European Green Deal and the Fit for 55 package. The paper also seeks to identify the structural characteristics of the Slovak Republic's environmental policy. Understanding these characteristics allows us to describe Slovakia as a consistent strategic actor whose behaviour can be formally modelled within Bayesian games.

Keywords: *environmentálna legislatíva, bayesovské modelovanie, rozhodovacie procesy*

ÚVOD

Vývoj environmentálnej legislatívy od vzniku samostatnej Slovenskej republiky prebiehal v súlade s potrebami nového štátu. Spočiatku išlo najmä o základné pravidlá na ochranu ovzdušia, vôd a prírody, ktoré mali skôr stabilizačný charakter. Postupom času však bolo zrejmé, že Slovensko nebude môcť budovať svoj právny rámec izolovane. Do popredia sa dostávali požiadavky medzinárodných dohôd a neskôr aj záväzky spojené so vstupom do Európskej únie a zosúladovania jednotlivých právnych noriem. Vzhľadom na túto skutočnosť to čo v 90. rokoch fungovalo ako súbor jednotlivých noriem, sa postupne menilo na širší a

prepojenejší systém s presahmi do energetiky, priemyslu ale aj dlhodobého strategického plánovania.

Nasledujúce kapitoly sú preto členené chronologicky od základných legislatívnych rámcov prijatých v 90. rokoch, cez obdobie prístupového procesu a prvé roky po vstupe do Európskej únie, až po implementáciu európskych klimaticko-energetických balíkov v poslednom desaťročí. Táto postupnosť prijímania jednotlivých legislatívnych rámcov nám zároveň umožní zachytiť nielen vývoj právnych nástrojov, ale aj spôsob, akým Slovensko reagovalo na meniace sa podmienky a externé záväzky. Čo považujeme za dôležité pre identifikáciu stabilných vzorcov správania, ktoré budú pre nás dôležité z metodologického hľadiska nášho ďalšieho výskumu, kedy zamýšľame Slovenskú republiku opísať ako hráča v modeli bayesovských hier.

1 Formovanie environmentálnej legislatívy Slovenska v období 1993 – 2004

Vývoj environmentálnej legislatívy Slovenskej republiky po roku 1993 prebiehal v podmienkach vznikajúceho štátu, ktorý potreboval stabilizovať svoje základné právne rámce a zároveň napĺňať nové medzinárodné záväzky. Počiatočné obdobie bolo charakteristické tým, že štát reagoval najmä na potrebu ochrany ovzdušia, vôd, pôdy a prírodných zdrojov. Zákon č. 17/1992 Zb. o životnom prostredí zostal na začiatku deväťdesiatych rokov hlavným východiskovým dokumentom, hoci neposkytoval komplexný systém riadenia environmentálnych politík, ale skôr vytváral základné zásady ochrany životného prostredia.

V roku 1994 Slovensko pristúpilo k Rámcovému dohovoru OSN o zmene klímy (UNFCCC)¹, čo možno považovať za prvý krok ku koordinovanejšiemu prístupu z medzinárodného pohľadu. V nadväznosti na tento krok bol vypracovaný Národný klimatický program SR (SHMÚ, 1994), ktorý môžeme považovať za historicky prvý ucelený dokument na úrovni štátu, ktorý definoval potrebu budovania systémov monitorovania, inventarizácie emisií, spolupráce medzi rezortmi a zapojenia Slovenska do medzinárodných procesov. Jeho súčasťou bola metodická integrácia odporúčaní IPCC² a prvé rámce pre systematické vykazovanie emisií. Prvú inventarizačnú správu potom SR predložila v roku 1996, čím začala plniť povinnosti vyplývajúce z UNFCCC.

Od druhej polovice deväťdesiatych rokov sa environmentálna legislatíva sa začala formovať nie len na základe vnútorných potrieb krajiny ale čoraz výraznejšie ju ovplyvňoval prístupový proces do Európskej únie. Európska komisia v pravidelných hodnotiacich správach (European Commission, 2003) upozorňovala na potrebu zosúladenia našej národnej legislatívy v oblasti životného prostredia, najmä v oblasti IPPC³, ochrany ovzdušia a nakladania s odpadmi. Z týchto správ zároveň vyplývalo, že hoci Slovensko legislatívne prijímalo európske smernice pomerne rýchlo, samotná ich implementácia zaostávala z dôvodu limitovaných inštitucionálnych kapacít (OECD, 2020). Tento problém potvrdzuje aj práca autoriek (Klúvanková-Oravská, T., Chobotová, V., 2010), ktorá empiricky dokumentuje formálny súlad, ale slabú praktickú implementáciu environmentálneho práva v 90. rokoch. Rovnako sa v práci uvádza, že legislatívna harmonizácia bola síce rýchla a formálne úspešná avšak praktické uplatňovanie legislatívy často zaostávalo pre nedostatok administratívnych kapacít, absenciu investícií a nízky dôraz na presadzovanie. V tomto období boli prijaté aj viaceré modernizačné právne normy, najmä zákon č. 39/2013 Z. z. o integrovanej prevencii a kontrole znečisťovania IPPC, ktorý implementoval smernicu 96/61/ES a zaviedol nový systém povoľovania založený na princípe integrovanej regulácie. Táto zmena predstavovala posun smerom k ucelenému environmentálnemu riadeniu, ktoré zohľadňovalo priemyselné emisie v

¹ UNFCCC – United Nations Framework Convention on Climate Change

² IPCC – Intergovernmental Panel on Climate Change

³ IPPC - Integrated Pollution Prevention and Control

širšom kontexte čo si vyžadovalo od prevádzkovateľov zavádzanie najlepších dostupných techník.

Zásadným rokom v oblasti environmentálnej politiky bol rok 2004, kedy bol prijatý zákon č. 572/2004 Z. z. o obchodovaní s emisnými kvótami, ktorý vytvoril právny základ pre zapojenie SR do európskeho systému obchodovania s emisiami (ETS⁴). Tento krok mal výrazný strategický charakter. Slovensko sa muselo pripraviť na tvorbu národných alokačných plánov, na vznik registra emisií a prepojenie s európskou infraštruktúrou obchodovania. Podľa Figulovej a Gondášovej (2023) predstavoval vstup do systému ETS pre Slovensko významnú záťaž najmä z hľadiska administratívnej pripravenosti a schopnosti reagovať na nové regulačné požiadavky, čo odhaľovalo rozdiel medzi formálnym zosúladením a praktickou implementáciou.

1.1 Formovanie strategického typu Slovenska v kontexte bayesovského modelovania

Na základe popísaného legislatívneho vývoja v rokoch 1993 – 2004 môžeme pozorovať postupné formovanie spôsobu, akým Slovenská republika pristupovala k environmentálnym záväzkom a ich reálnej implementácii. Tento vývoj ukazuje, že Slovensko sa už v tomto období vyznačovalo snahou zosúladiť sa s medzinárodnými a neskôr európskymi požiadavkami, avšak zároveň starostlivo zvažovalo hospodárske dôsledky jednotlivých opatrení. Prijímané záväzky mali často charakter formálnej adaptácie, zatiaľ čo praktická realizácia sa prispôbovala aktuálnym ekonomickým možnostiam a administratívnej kapacite.

Takýto spôsob reagovania, vytvára základný obraz Slovenskej republiky ako hráča, ktorého správanie sa formovalo v napätí medzi externým tlakom a vnútornými limitmi. Z hľadiska neskoršieho modelovania v rámci bayesovských hier to pre nás znamená, že o Slovensku môžeme uvažovať ako o hráčovi, ktorý reaguje skôr adaptívne než iniciatívne a svoje rozhodovanie opiera o kombináciu formálneho súladu a ekonomickej opatrnosti.

2 Obdobie vstupu do Európskej únie a prvé roky členstva 2004 – 2012

Vstup Slovenska do Európskej únie v roku 2004 zásadne zmenil spôsob, akým sa prijímala a uplatňovala environmentálna legislatíva. Kým v predchádzajúcom období išlo najmä o postupné budovanie základného právneho rámca, po roku 2004 sa ťažisko presunulo na harmonizáciu s európskym právom a na plnenie záväzkov, ktoré vyplývali z členstva v EÚ. Tento posun ovplyvnil nielen samotné normy, ale aj celkový spôsob, akým štát pristupoval k reguláciám životného prostredia.

Zavádzanie rozsiahleho balíka európskych smerníc, zo sebou nieslo úpravu priemyselných emisií, kvalitu ovzdušia, vodného hospodárstva či nakladanie s odpadmi. Pre Slovensko bol mimoriadne významný proces implementácie smernice 96/61/ES o integrovanej prevencii a kontrole znečisťovania IPPC, ktorá si vyžadovala novú formu povoľovania priemyselných prevádzok a uplatňovanie najlepších dostupných techník (BAT)⁵. Tento prechod predstavoval výrazný kvalitatívny posun aj podľa analytických hodnotení Európskej komisie, ktoré upozorňovali, že IPPC-režim bol pre štáty strednej Európy jednou z najnáročnejších častí (European Commission, 2007). Na túto náročnosť a nie ideálne zvládnutú implementáciu upozorňujú aj Filčák a Škobla (2023), ktorí konštatujú, že hoci Slovensko formálne preberá európske smernice a deklaruje súlad s klimatickými cieľmi, jeho inštitucionálne kapacity a schopnosť zabezpečiť účinné vykonávanie regulácií patria k najslabším, čo sa prejavuje pomalým presadzovaním opatrení, slabou koordináciou a obmedzenou pripravenosťou na komplexnejšie reformy.

⁴ ETS - Emissions Trading System

⁵ BAT – Best Available Techniques

V oblasti vôd nadobudla osobitný význam implementácia rámcovej smernice 2000/60/ES, ktorá vyžadovala nový systém monitorovania vodných útvarov a plánovania na úrovni povodí. Slovensko sa v tomto období sústredilo na prípravu prvých plánov manažmentu povodí (MŽP SR, 2009).

Súčasťou legislatívnych zmien bolo aj preberanie európskych pravidiel v oblasti hodnotenia vplyvov na životné prostredie (EIA/SEA⁶).

Do právneho rámca postupne vstupovali aj prvé klimatické požiadavky súvisiace s európskym klimaticko-energetickým balíkom. Aj keď jeho plná implementácia prebehla neskôr, už v rokoch 2008 – 2009 sa objavili prvé legislatívne zmeny týkajúce sa obnoviteľných zdrojov energie, obchodovania s emisnými kvótami a záväzkov pre sektor dopravy či budov. V tom istom období pokračoval SHMÚ v modernizácii inventarizačného systému skleníkových plynov (SHMÚ, 2010).

2.2 Formovanie strategického typu Slovenska v kontexte bayesovského modelovania

Z pohľadu bayesovského modelovania je pre nás dôležité, že toto obdobie prináša nový kvalitatívny posun, kedy sa Slovensko začína správať ako hráč, ktorý sa rozhoduje nielen na základe externého tlaku, ale aj podľa toho, do akej miery dokáže preniesť náklady regulácie mimo vlastných rozpočtových či politických limitov. Pravdepodobnosť ambicióznejšieho správania preto rastie vtedy, keď sú náklady znižované cez fondy EÚ alebo technické výnimky, zatiaľ čo pri opatreniach s vysokými internými nákladmi štát inklinuje skôr k opatrnosti. Vidíme posun v charaktere oproti prvému obdobiu v tom, že rozhodovanie je premyslené a často pragmatické.

3 Obdobie konsolidácie, európskej klimaticko-energetickej politiky a transformácie 2012 – 2025

Po roku 2012 sa vývoj environmentálnej a klimatickej legislatívy Slovenska presunul z roviny formálneho zosúladovania na rovinu praktickej implementácie stále náročnejších európskych záväzkov. Zákon č. 414/2012 Z. z. vytvoril rámec pre plnenie cieľov balíka „klíma a energetika 2020“, no už v priebehu niekoľkých rokov sa ukázalo, že jednotlivé oblasti napredujú rozdielnym tempom. Slovensko dosiahlo pomerne vysoký podiel energie z obnoviteľných zdrojov (IEA, 2024), avšak hodnotenia Európskej komisie a OECD (European Commission, 2020; OECD, 2023) opakovane poukazujú na to, že energetická efektívnosť a znižovanie emisií mimo systému ETS ostali dlhodobo problematickými oblasťami. V tomto období sa posilnila aj agenda adaptácie na zmenu klímy. Stratégia adaptácie SR z roku 2014 priniesla systematickejší pohľad na hodnotenie rizík a zraniteľností. (OECD, 2023) však upozornilo, že implementácia bola nerovnomerná najmä pre slabú koordináciu medzi rezortmi a obmedzené dátové kapacity.

Po prijatí Parížskej dohody sa začala príprava prvého Integrovaného národného energetického a klimatického plánu (INEKP)⁷, ktorý Slovensko predložilo v roku 2019. Európska komisia v hodnotení uviedla, že plán je málo ambiciózny, najmä pri budovách, doprave a energetickej efektívnosti (European Commission, 2020). Až Nízkouhlíková stratégia prijatá v roku 2020 poskytla prvý náznak dlhodobejšej vízie.

Zásadným zlomom bola Európska zelená dohoda, Európsky klimatický zákon a legislatívny balík Fit for 55, ktoré pre Slovensko znamenali rozsiahle zmeny v regulácii budov, dopravy, priemyslu aj energetiky. Do právneho rámca postupne vstúpili nové smernice a nariadenia,

⁶ EIA/SEA - Environmental Impact Assessment/ Strategic Environmental Assessment)

⁷ INEKP – Integrovaný národný energetický a klimatický plán Slovenskej republiky na roky 2021–2030

medzi nimi revidovaná smernica o obnoviteľných zdrojoch (RED III⁸), reforma ETS vrátane zavedenia ETS 2 pre budovy a dopravu, ale aj uhlíkové clo CBAM⁹.

V posledných rokoch sa však jasne ukázalo, že Slovensko musí v legislatíve a implementácii zrýchliť čomu by mala pomôcť aktualizácia Integrovaného národného energetického a klimatického plánu, ktorej hodnotenie zo strany Európskej komisie (European Commission, 2023a) zdôraznilo potrebu dopracovania sektorových trajektórií a posilnenia implementačných kapacít. Po roku 2023 je potrebné však zohľadňovať aj nové právne akty zamerané na modernizáciu priemyslu ako napríklad Net-Zero Industry Act (European Commission, 2023b), ktoré vytvorilo európsky rámec pre podporu technológií ako batériové úložiská, elektrolyzéry či nízkouhlíkové materiály a Clean Industrial Deal 2025 (European Commission, 2025), ktoré sa sústreďujú na zvýšenie konkurencieschopnosti ťažkého priemyslu. Očakáva sa, že tieto politiky ovplyvnia slovenský oceliarsky, chemický aj automobilový sektor, ktoré patria medzi najväčšie zdroje emisií.

3.1 Formovanie strategického typu Slovenska v kontexte bayesovského modelovania

V období rokov 2012 – 2025 sa pri Slovensku čoraz zreteľnejšie formuje stabilný vzorec rozhodovania. Na rozdiel od predchádzajúcich etáp, v ktorých dominovala najmä reakcia na externé požiadavky a právne tlaky, sa v tomto období objavuje premyslenejší spôsob uvažovania nad nákladmi, prínosmi a politickými dôsledkami jednotlivých opatrení. Prijímanie regulácií sa stáva selektívnejším i keď má Slovensko tendenciu implementovať nové pravidlá robí to však najmä vtedy, ak existuje možnosť zmierniť ich finančné dopady prostredníctvom európskych fondov, mechanizmov štátnej pomoci alebo iných externých zdrojov. V oblastiach, kde sú interné náklady vysoké ako napríklad pri energetickej efektívnosti, budovách či doprave, štát často volí stratégiu odkladu, postupného zavádzania alebo hľadania kompromisných riešení. S týmto ale súvisí aj posilnenie vyjednávacej politiky. Počas rokovaní o balíku Fit for 55, najmä v častiach týkajúcich sa ETS 2, mechanizmu CBAM či povinností pre sektor budov, Slovensko aktívne sledovalo pozície ostatných členských štátov a snažilo sa presadzovať úpravy, ktoré by znížili dopady na domáci priemysel a domácnosti. V tomto období už nejde o pasívne preberanie regulácií, ale o snahu ovplyvňovať ich konečnú podobu tak, aby boli pre krajinu ekonomicky zvládnuteľné.

Záver

Na základe vyššie popísaného vývoja environmentálnej legislatívy v období 1993 – 2025 sa nám podarilo identifikovať súbor vlastností, ktoré charakterizujú spôsob, akým Slovenská republika pristupuje k environmentálnym reguláciám. Pre účely nášho ďalšieho bayesovského modelovania je dôležité, že tieto vlastnosti nie sú náhodné ani príležitostné ale opakujú sa v rôznych obdobiach a pri rôznych typoch rozhodnutí, čo ich robí vhodnými na formalizáciu do typologického profilu štátu. Z legislatívnych krokov, implementačných sporov aj rokovaní na úrovni EÚ vyplýva, že Slovensko vo viacerých prípadoch volí stratégiu, ktorá vychádza z hodnotenia regulačného rizika, dostupných externých zdrojov a politickej citlivosti jednotlivých opatrení. Ako štát spravidla reagujeme opatrne tam, kde by prijatie regulácie prinieslo vysoké interné náklady, a naopak, sme ambicióznejší v situáciách, keď možno zmierniť prostredníctvom európskych fondov, prechodných období či výnimiek. Postupne sa ukazuje aj tendencia prispôbovať rozhodovanie tomu, ako konajú ostatní členský aktéri, najmä počas rokovaní, v ktorých je výsledná podoba regulácie formovaná kompromisom medzi štátmi. Slovensko v takýchto situáciách nevystupuje ako pasívny príjmateľ európskych

⁸ RED III - revidovaná *Smernica Európskeho parlamentu a Rady EÚ o podpore využívania energie z obnoviteľných zdrojov*

⁹ CBAM - Carbon Border Adjustment Mechanism

pravidiel, ale ako štát, ktorý sleduje strategické správanie ostatných a usiluje sa minimalizovať vlastné regulačné zaťaženie. Tieto nami vypozerované vzorce správania nám umožnia nastaviť pomerne stabilný strategický profil v bayesovskej hre. Tento profil predstavuje východisko pre ďalšiu fázu analýzy, v ktorej bude potrebné formalizovať jednotlivé parametre do typov hráčov, priradiť im pravdepodobnostné distribúcie a začleniť ich do širšieho modelu interakcií medzi členskými štátmi v európskej environmentálnej politike.

Použitá literatúra

1. European Commission. 2003. Regular Report on Slovakia's Progress Towards Accession. Brussels: European Commission, 2003.
Dostupné na: https://enlargement.ec.europa.eu/document/download/eab5afd7-c13f-4fca-adf2-be4815f04b7a_en?filename=sk_en.pdf
2. European Commission. 2007. Integrated Pollution Prevention and Control (IPPC) – Implementation Report. Brussels: European Commission, 2007.
Dostupné na: https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/fr/memo_07_441
3. European Commission. 2020. Assessment of the Draft National Energy and Climate Plan of Slovakia. Brussels: European Commission, 2020.
Dostupné na: https://commission.europa.eu/system/files/2023-12/SWD_Assessment_draft_updated_NECP_Slovakia_2023.pdf
4. European Commission. 2023a. Assessment of the Updated National Energy and Climate Plan (NEKP) – Slovakia. Brussels: European Commission, 2023.
Dostupné na: https://energy.ec.europa.eu/system/files/2023-12/assessment_update_necp_slovakia.pdf
5. European Commission. 2023b Regulation of the european parliament and of the council on establishing a framework of measures for strengthening Europe's net-zero technology products manufacturing ecosystem (Net Zero Industry Act) <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX%3A52023PC0161>
6. European Commission. 2025. *Clean Industrial Deal: a joint roadmap for competitiveness and decarbonisation*. Brussels: European Commission, 26 Február 2025 (COM (2025) 378 final).
Dostupné na: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex:52025DC0085>
7. Figulová, A., Gondášová, I. 2023. Energy Transition in Slovakia – Destiny in/and Change. *European Journal of Transformation Studies*, roč. 11, č. 1, s. 169-183. Dostupné na: <https://czasopisma.bg.ug.edu.pl/index.php/journal-transformation/article/download/11286/10080/16654>
8. Filčák, R., Škobla, D. 2023. Towards Achieving Climate Neutrality For Slovakia In 2050: Analysis Of The Situation And Key Challenges. Bratislava: Slovak Academy Of Sciences, 2023. Dostupné na: https://www.prog.sav.sk/wp-content/uploads/TOWARDS-ACHIEVING-CLIMATE-NEUTRALITY-FOR-SLOVAKIA-IN-2050.-ANALYSIS-OF-THE-SITUATION-AND-KEY-CHALLENGES.pdf?utm_source=chatgpt.com
9. International Energy Agency (IEA). 2024. *Slovak Republic 2024 – Energy Policy Review*. Paris: IEA. Dostupné na: https://iea.blob.core.windows.net/assets/d2f59c8b-1344-4b98-8a00-52ef074cfa06/Slovak_Republic_2024.pdf
10. Kluvánková-Oravská, T., Chobotová, V. 2010. The Emergence of Multilevel Governance: The Case of Biodiversity in the Enlarged European Union. *Ekonomický časopis*, roč. 58, 2010, č. 4, s. 407–422.
Dostupné na: <https://www.sav.sk/journals/uploads/0914113904%2010%20Kluvankova-Oravska-RS.pdf>

11. MŽP SR. 2009. Plán manažmentu povodí Slovenska. Bratislava: Ministerstvo životného prostredia SR, 2009.
Dostupné na: https://www.minzp.sk/files/sekcia-vod/manazment-rizik-2015/3_02-ciastkove-povodie-vahu/pmpr-vah-text.pdf
12. OECD. 2020. Environmental Performance Reviews: Slovak Republic 2020. Paris: OECD Publishing, 2020.
Dostupné na: https://www.oecd.org/en/publications/oecd-environmental-performance-reviews-slovak-republic-2024_108238e8-en.html
13. OECD. 2023. Climate Change Adaptation in Slovakia: Policy Highlights. Paris: OECD Publishing, 2023.
Dostupné na: <https://www.minzp.sk/files/iep/iepoecdadaptationmeasurement.pdf>
14. SHMÚ. 1994. Národný klimatický program Slovenskej republiky. Bratislava: Slovenský hydrometeorologický ústav, 1994.
Dostupné na: https://www.shmu.sk/File/Klima/Zborniky_NKP/NKP%201_94.pdf
15. SHMÚ. 2010. Správa o inventarizácii skleníkových plynov SR 2010. Bratislava: Slovenský hydrometeorologický ústav, 2010.
Dostupné na: https://www.shmu.sk/File/o_shmu/vs/Vs_2010_SHMU_web.pdf
16. Zákon č. 17/1992 Zb. o životnom prostredí.
Dostupné na: <https://www.slov-lex.sk/ezbierky/pravne-predpisy/SK/ZZ/1992/17/19980901>
17. Zákon č. 39/2013 Z. z. o integrovanej prevencii a kontrole znečisťovania.
Dostupné na: <https://www.slov-lex.sk/ezbierky/pravne-predpisy/SK/ZZ/2013/39/>
18. Zákon č. 414/2012 Z. z., o obchodovaní s emisnými kvótami a o zmene a doplnení niektorých zákonov. Zbierka zákonov Slovenskej republiky, č. 101/2012 Z. z. Dostupné na: <https://www.slov-lex.sk/ezbierky/pravne-predpisy/SK/ZZ/2012/414/20251001>
19. Zákon č. 572/2004 Z. z. o obchodovaní s emisnými kvótami. Zbierka zákonov Slovenskej republiky, č. 101/2012 Z. z. Dostupné na: <https://www.slov-lex.sk/ezbierky/pravne-predpisy/SK/ZZ/2004/572/20050101.html>

Kontaktné údaje

Ing. Miroslava Jánošová, PhD.
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta sociálnych a ekonomických vied
Mlynské luhy 4
821 05 Bratislava
miroslava.janosova@fses.uniba.sk

doc. Ing. Tomáš Domonkos, PhD.
Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta sociálnych a ekonomických vied
Mlynské luhy 4
821 05 Bratislava
tomas.domonkos@fses.uniba.sk

Pod'akovanie

Tento výskum bol podporený grantmi VV-MVP-24-0395 „Ako môže klimatická politika a strategické správanie zabezpečiť finančnú stabilitu,“ a APVV-22-0526 „Fiškálne a ekonomické efekty imigrácie na Slovensku: Integrovaný modelovací prístup“

MAKROEKONOMICKÁ KONVERGENCE REGIONŮ ZEMÍ VÝŠEHRADSKÉ ČTYŘKY

MACROECONOMIC CONVERGENCE OF REGIONS OF THE VISEGRÁD GROUP COUNTRIES

Daniil Khokhrunov

Abstrakt

Tato studie se zaměřuje na beta-konvergenci v regionech zemí Visegrádské čtyřky. Jako teoretický základ je použit neoklasický model růstu a k empirickému odhadu rychlosti konvergence využíváme panelová data. Jako indikátor růstu byl použit HDP na osobu. Naším hlavním předpokladem je, že potenciální úroveň produkce je na úrovni jednotlivých zemí konstantní. Výsledky svědčí především proti hypotéze konvergence. Dále diskutujeme možné důvody, které ovlivňují rychlost konvergence v regionech.

KLíčové slová: *Konvergence, Výšehradská čtyřka, Panelová data*

Abstract

This study is focused on the beta-convergence in the regions of The Visegrád Group countries. A neoclassical growth model is used as the theoretical foundation and we use panel data approach to empirically estimate the speed of convergence. As an indicator of growth, the GDP_{p.c.} was used. Our main assumption is that the potential level of the output is constant on the country-level. The results are mainly against the hypothesis of convergence. We proceed by discussing possible reasons that affect regional speed of convergence.

Keywords: *Convergence, The Visegrád Group, Panel data*

1 INTRODUCTION

Convergence in simple language can be described as a tendency of "becoming closer".

There are two basic meanings of convergence in economics. The first one, which is called "sigma-convergence", means a reduction of dispersion between economies that converge to each other. In other words, when one looks at the same parameter of different subjects, there is a decrease in the variability of this parameter over time.

The second one, is called "beta-convergence". This type of convergence usually refers to a faster growth of poor economies than that of a rich ones. The term convergence in economics is mostly connected with neoclassical theory with neoclassical growth model.

The Visegrád Group is an alliance of four Central European countries: Poland, Hungary, Czech Republic, and Slovakia. Established in 1991, the group focuses on regional cooperation in political, economic, and security matters. This alliance reflects the efforts of the countries of the central European region to work together in a number of fields of common interest within the all-European integration [1].

This work is dedicated to the study of beta-convergence in The Visegrád Group countries on the regional level. We will estimate the speed of beta-convergence, between the regions in the recent years.

2 METHODS OF ESTIMATION

The macroeconomic beta-convergence can be seen as the negative dependence of growth rate of the economy on its initial level. The usual choice of indicator of the level of economy is the $GDP_{p.c.}$, which contains information about the state of the economy in the sense of gross domestic product, but takes into account the size of the region in question in the sense of its population.

This work uses econometric approach for convergence estimation. The most common equation for convergence estimation is:

$$(1/T) \cdot \log(y_{iT}/y_{i0}) = x - [(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(y_{i0}) + [(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(\widehat{y}^*_i) + u_{i0,T} \quad \#(1)$$

Where index T is the length of time period in question and index 0 indicates beginning of this period. x is the rate of technological progress, which is assumed to be constant over the regions and time. The $u_{i0,T}$ represents the effect of the error term between dates 0 and T .

This expression contains steady-state value $\widehat{y}^*_i$. So we are talking about conditional, not absolute convergence. The deviation of equation (1) can be found in many sources, for example for the Solow Growth model [2] and for the Ramsey model [3]

The big problem with this approach is the level of potential output of the economy, which is the unknown theoretical value. In the case it is correlated with an initial output level, the estimated results will be biased. We may overcome this problem in two common ways:

- Assume identical potential output level in all regions. In this case, the potential level will become part of the error term of the equation (1) and our estimation will remain consistent and unbiased.
- Use panel data methods, which will allow to estimate the speed of convergence without knowing the potential output level if it is assumed to be constant for every observation.

In this study we will use a panel data structure to deal with this problem. Our main assumption is that, even though there might be a difference between each country's level of potential output, the level of the regions within one country should be (at least approximately) similar.

We extend an equation (1) with an additional country-specific index:

$$(1/T) \cdot \log(y_{ijt}/y_{ij0}) = x - [(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(y_{ij0}) + [(1 - e^{-\beta T})/T] \cdot \log(\widehat{y}^*_j) + u_{ijt} \quad \#(2)$$

The potential level of output is a country-specific parameter, which is assumed to be constant for every country. In order to remove this parameter with the help of the panel data, we shall use the Fixed Effects (FE) model [4]. Using de-meaning within **each country**:

$$\frac{1}{T} \left(\log \left(\frac{y_{ijt}}{y_{ij0}} \right) - \overline{\log \left(\frac{y_{ijt}}{y_{ij0}} \right)} \right) = x - \bar{x} - \gamma \left(\log(y_{ij0}) - \overline{\log(y_{ij0})} \right) + \gamma \left(\log(\widehat{y}^*_j) - \overline{\log(\widehat{y}^*_j)} \right) + u_{ijt} - \overline{u_{ijt}} \quad \#(3)$$

where

$$\gamma \equiv \frac{(1 - e^{-\beta T})}{T}$$

This transformation removes all the constant terms within country and leaves us with an equation:

$$\frac{1}{T} \log \left(\frac{\widetilde{y_{ijt}}}{\widetilde{y_{ij0}}} \right) = -\gamma \log(\widetilde{y_{ij0}}) + \widetilde{u_{ijt}} \quad \#(4)$$

Where $\sim$ indicates, that variable was demeaned with country mean value. This is the main equation of interest during this work.

3 DATA

The main data source is Eurostat database. This database contains most of the relevant economical information about European states, especially for the recent time periods. We obtain GDP and population by NUTS2 region, which allows us to calculate $GDP_{p.c.}$ since this parameter is of primary interest, when studying convergence.

For NUTS2 level, the data for all the regions of V4 countries is available only for period 2014-2023. Since for few eastern regions, there is no earlier information. This is the period of primary interest, since it can capture the current trends of convergence.

We divide data into 3 time periods: 2014-2017, 2017-2020, 2020-2023. This division will allow us to capture convergence trend and eliminate some fluctuations in certain years. For example, there may be a decrease in country's $GDP_{p.c.}$ in one year due to some local crisis, which will create an outlier value. But during the whole period there will be a smoother growth trend.

From the prepared dataset we can see the level of $GDP_{p.c.}$ both for countries and individual regions within them.

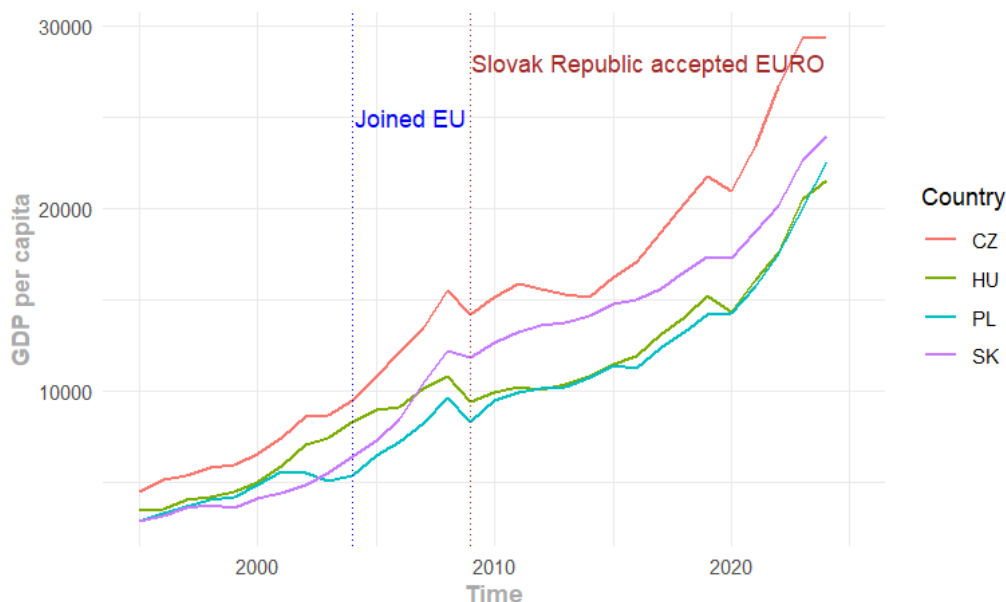


Figure 1. Evolution of GDP per capita in V4 countries

From the Figure 1 it can be seen that countries are rather diverge from each other. The gap between almost all countries grows bigger as time goes by. The only exception is Hungary and Poland, where the growth of $GDP_{p.c.}$ remains almost equal, with the widest gap being around year 2004 and narrowing to being almost identical after the global financial crisis. This effect may be caused by EU joining in the year 2004. After this more common policies could be applied in both countries.

As it can be seen from the Figure 2, there is rather divergence in the regions of V4 countries in recent years. As time goes by, western regions tend to grow faster than eastern ones. On the regional level, it can be seen that some regions differ greatly from all the other regions within country. Those are regions with capitals. Capitals can be a place, where many head or large offices of big companies are located, moreover, often they become the main place for tourism and trade. Since those regions may affect our results, we shall also estimate the model where regions with capitals are excluded. Rather similar considerations can be found in [5].

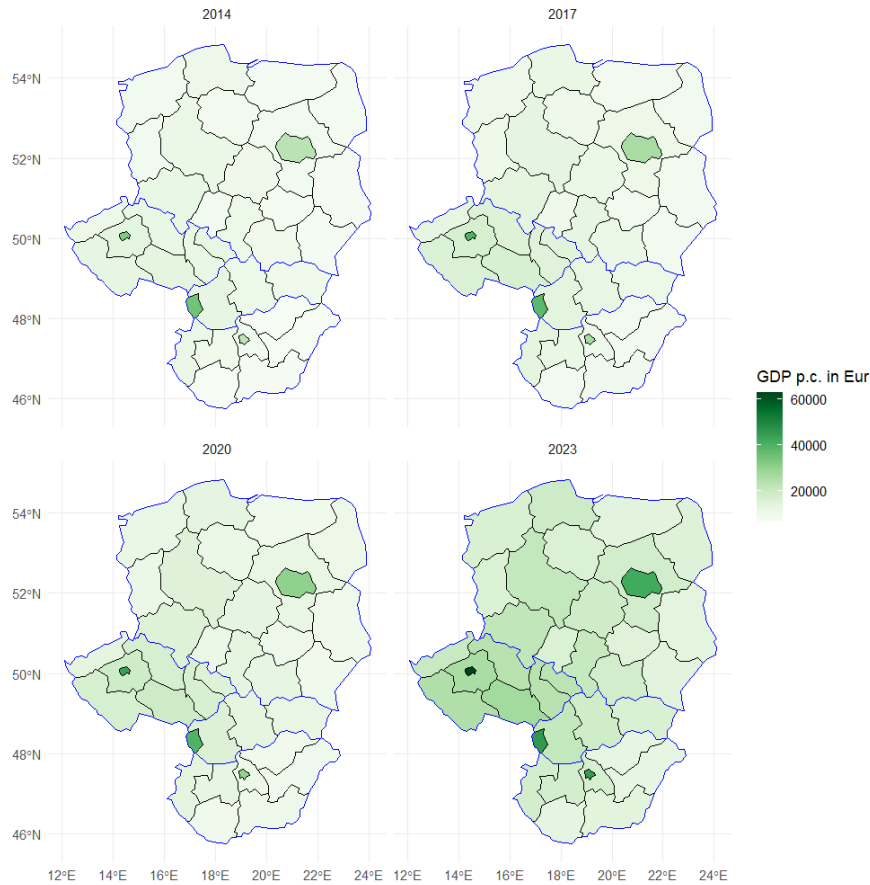


Figure 2. GDP per capita in EUR in NUTS2 regions of The Visegrád Group

4 RESULTS

We begin by estimation of basic model (4), without any additional variables. The estimation was conducted using the within (fixed effects) estimator, removing country-specific potential output levels. Robust standard errors were computed using the heteroskedasticity-consistent “White” estimator with clustering at the country level, which accounts for cross-sectional dependence among regions within the same country. We also include the results of the model estimated from the data, where regions of capitals are excluded. Those regions tend to be clear outliers in terms of economic development and growth dynamics.

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(> t)	The speed of convergence
Theoretical model	0.0133	0.010195	1.3057	0.1945	-0.01358
Model without capitals	0.0296	0.010467	2.8289	0.00565	-0.03101

Table 1. The Results of estimation

As seen from the Table 1, both specifications yield negative speeds of beta-convergence, meaning that instead of convergence, the regional GDP per capita levels within the V4 countries tend to diverge over the observed period (2014–2023). The coefficient on

$\log(y_{ij0})$ in the model 1 is positive but is statistically insignificantly different from zero. However, after excluding the capital regions—Prague (CZ01), Bratislava (SK01), Budapest (HU10), and Warsaw (PL11)—the coefficient becomes larger in magnitude and statistically significant, indicating divergence in the regions of V4 countries during the period 2014-2023. There are many reasons that may lead to such results. Some regions may lag behind the rest of the regions especially in terms of health infrastructure and institutional quality [6].

Another explanation for the divergence pattern can be found in the spatial concentration of investments and trade intensity near western borders. Regions closer to the countries of western and central Europe, particularly those integrated into the German or Austrian industrial supply chains, have shown higher growth rates, while eastern and rural regions have lagged behind. This uneven integration into European production networks contributes to the persistence of regional disparities. More investment and foreign investment may be concentrated around capital cities and in regions that are much closer to more developed neighboring countries, as most trade takes place in these parts of the country [7].

As indicated by Zoltán Egri and Imre Lengyel, there may be an impact of urban-rural topology. They indicate, that the speed of convergence can be faster for urban regions [8]. In the study of Capello and Cerisola, it was found that the reallocation of resources towards higher value-added sectors in CEE countries can actually lead to greater regional inequalities, as the competitiveness of the capital cities' economies improves [9]. The importance of the human capital, which mostly flows to the capitals [10], is the other possible reason for slower growth (and divergence) of eastern regions, compared to other regions. Lastly, some policies may affect the regional divergence. For example, the inequal distribution of ESIF may have contributed to economic imbalances within the countries [11].

5 CONCLUSION

Using a panel data approach with fixed effects, this study examined the speed of beta-convergence across NUTS2 regions of the Visegrád Group countries over the recent period of time (2014-2023). The model is based on the log-linearization of neoclassical growth model. We assumed a country-specific potential level of the output and used this assumption to exclude this unknown variable from the equation and to obtain unbiased estimates.

As can be seen, from our results, there is rather beta-divergence than beta-convergence between the NUTS2 regions of V4. This pattern follows the trend between countries, where disparities of economic growth in the sense of $GDP_{p.c.}$ just becomes larger over time in the recent years. Western regions tend to have faster growth than eastern ones. Excluding regions with capitals that develop quicker than other regions within countries only gives more statistical significance to the divergence results. There are some possible reasons for this behavior in scientific literature, including investments, under-development of some regions, geographical location with integration to additional trade chains and policies.

It should also be noted that the empirical results may differ based on many methodological parameters: estimation methods, another theoretical foundation, spatial division of regions (NUTS0, NUTS3 etc.) or different data sources may provide different results.

REFERENCES:

- [1] KFT, Webra International. *The Visegrad Group: Czechia, Hungary, Poland, Slovakia | Vítejte!* [online]. 8. září 2006 [vid. 2025-10-19]. Dostupné z: <https://www.visegradgroup.eu/cz>
- [2] BARRO, Robert J., Xavier SALA-I-MARTIN, Olivier Jean BLANCHARD a Robert E. HALL. Convergence Across States and Regions. *Brookings Papers on Economic Activity* [online]. 1991, **1991**(1), 107. ISSN 00072303. Dostupné z: doi:10.2307/2534639

- [3] BARRO, Robert J. a Xavier SALA-I-MARTIN. *Economic growth*. 2nd ed. Cambridge, Mass: MIT Press, 2004. ISBN 978-0-262-02553-9.
- [4] GREENE, William. *Econometric analysis*. 7. ed., international ed., [veränd. Nachdr.]. Boston, Mass. Munich: Pearson, 2012. Pearson series in economics. ISBN 978-0-273-75356-8.
- [5] MAZUREK, Jiří. *On beta and sigma convergence of Czech regions* [online]. 1. červenec 2013 [vid. 2025-10-19]. Dostupné z: https://mpira.ub.uni-muenchen.de/47940/?utm_source=chatgpt.com
- [6] DI SABATO, Vito. Human Capital and Economic Growth: Regional Differences in the Visegrad Countries. In: *International Scientific Days 2024. „From Field to Finance: Addressing Economic Challenges”*. Nitra, Slovak Republic: *International Scientific Days 2024. „From Field to Finance: Addressing Economic Challenges”. Conference Proceedings. May 16 – 17, 2024. Nitra, Slovak Republic* [online]. B.m.: Slovak University of Agriculture in Nitra, Slovakia, 2025, s. 385–394 [vid. 2025-10-19]. ISBN 978-80-552-2816-7. Dostupné z: doi:10.15414/2024.9788055228167.385-394
- [7] PORTRUSCHING, Tamás, Szilvia Módosné SZALAI, Nina POYDA-NOSYK, Vasantha Patibandla LAKSHMI, Szilárd MALATYINSZKI a Lóránt Dénes DÁVID. Economic Challenges and Pathways in the Visegrad Countries: Growth and Sustainability. *Journal of Ecohumanism* [online]. 2024, 3(8) [vid. 2025-10-19]. ISSN 2752-6801, 2752-6798. Dostupné z: doi:10.62754/joe.v3i8.5434
- [8] EGRI, Zoltán a Imre LENGYEL. Convergence and Catch-Up of the Region Types in the Central and Eastern European Countries. *Applied Spatial Analysis and Policy* [online]. 2024, 17(2), 393–415. ISSN 1874-4621. Dostupné z: doi:10.1007/s12061-023-09551-w
- [9] CAPELLO, Roberta a Silvia CERISOLA. Industrial transformations and regional inequalities in Europe. *The Annals of Regional Science* [online]. 2023, 70(1), 15–28. ISSN 1432-0592. Dostupné z: doi:10.1007/s00168-021-01097-4
- [10] SMIRNYKH, Larisa a Andreas WÖRGÖTTER. *Regional convergence in CEE before and after the Global Financial Crisis* [online]. Working Paper. 03/2021. B.m.: ECON WPS - Working Papers in Economic Theory and Policy. 2021 [vid. 2025-10-19]. Dostupné z: <https://www.econstor.eu/handle/10419/233121>
- [11] MARIS, Martin. Contribution of EU Cohesion Policy to Regional Growth: Evidence from V4 Countries *. *Prague Economic Papers* [online]. 2024, 33. Dostupné z: doi:10.18267/j.ppep.855
- [12] WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introductory econometrics: a modern approach*. Seventh edition. Boston, MA: Cengage, 2020. ISBN 978-1-337-55886-0.
- [13] HINDLS, Richard, Markéta ARLTOVÁ, Stanislava HRONOVÁ, Ivana MALÁ, Luboš. MAREK, Iva PECÁKOVÁ a Hana ŘEZANKOVÁ. *Statistika v ekonomii*. První vydání. Průhonice: Professional Publishing, 2018. ISBN 978-80-88260-09-7.
- [14] VEJMĚLEK, Jan a Václav ŽĎÁREK. *Makroekonomická analýza - od teorie k aplikaci*. První české vydání. Praha: Grada Publishing, 2025. ISBN 978-80-271-3735-0.

- [15] DAVIDSON, Russell a James G. MACKINNON. *Econometric theory and methods*. New York, NY: Oxford Univ. Press, 2004. ISBN 978-0-19-512372-2.

Kontaktní údaje

Ing. Khokhrunov Daniil

Vysoká škola ekonomická v Praze. Fakulta Informatiky a Statistiky
nám. Winstona Churchilla 1938/4, 120 00 Praha 3-Žižkov

Tel: +420 773 547 422

email: khod00@vse.cz

DYNARE AKO NÁSTROJ PRE POROZUMENIE DSGE MODELOM¹

DYNARE AS A TOOL FOR UNDERSTANDING DSGE MODELS

Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi

Abstrakt

Dynare je otvorené softvérové riešenie pre MatLAB resp. Octave, ktorý slúži na riešenie, simuláciu a odhad makroekonomických modelov – najmä dynamických stochastických modelov všeobecnej rovnováhy (Dynamic Stochastic General Equilibrium – DSGE). Vzhľadom na jeho relatívnu jednoduchosť, pomocou ktorej sa tieto zvyčajne zložité a analyticky ťažko riešiteľné modely dajú uchopiť, je výborným prostriedkom pre pedagogické a rovnako tak aj vedecké účely. V tomto príspevku vysvetlíme postup, ako ho prezentovať, pre začínajúcich používateľov.

Kľúčové slová: *dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy, stochastická simulácia, rovnovážny stav, Dynare, MatLAB*

Abstract

The Dynare is an open software solution for MatLAB and Octave, which is used to solve, simulate, and estimate macroeconomic models – especially Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) models. Given its relative simplicity, which makes it easy to grasp these usually complex and analytically difficult models, it is an excellent tool for solving and simulating these models. In this paper, we explain the procedure for presenting this very useful software to novice users.

Keywords: *dynamic stochastic general equilibrium models, stochastic simulation, steady state, Dynare, MatLAB*

1 ÚVOD

Pred začiatkom práce so softvérom Dynare predpokladáme, že užívateľ má nainštalovaný program MatLAB (resp. Octave) na svojom počítači. Následne si toto voľne dostupné softvérové riešenie môže stiahnuť z webovej adresy: <https://www.dynare.org/download/> pre svoj operačný systém. Inštalácia samo spustiteľného inštalačného programu (exe) je bezproblémová, odporúčame užívateľovi zapamätať si priečinok, do ktorého sa program nainštaloval (napr. *C:\Program Files\Dynare*). Samozrejme, priečinok si užívateľ môže počas inštalácie zvoliť sám.

Po nainštalovaní a spustení programu MatLAB je treba pridať tento priečinok s podpriečinkom *matlab* ako cestu pre MatLAB najrýchlejšie príkazom `addpath('C:\Program Files\Dynare\matlab');` v príkazovom okne (Command Window). Tým sú všetky funkcie Dynare prístupné. Aby nebolo treba pri každom spustení MatLABu túto činnosť stále opakovať, odporúča sa túto cestu trvale uložiť, teda hneď po `addpath` zadať príkaz `savepath`;

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0047/23, Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa a VEGA 1/0052/24, Odhad kľúčových štrukturálnych parametrov súčasných makroekonomických modelov.

To či je cesta k dynare pre MatLAB známa, sa overí jednoduchým zadáním príkazu dynare v príkazovom okne. Ak je odpoveďou: *Unrecognized function or variable 'dynare'* tak treba v prípade už nainštalovaného Dynare nastaviť cestu. Pri odpovedi *This is Dynare version x.x. USAGE: dynare FILENAME[.mod,.dyn] [OPTIONS]* môžeme začať pracovať s Dynare.

2 ŠTRUKTÚRA MODELU V DYNARE

<pre> var y k l ...; varexo epsilon; parameters beta alpha delta ... ; beta = 0.99; model; y = exp(a)*k^alpha*l^(1-alpha); : end; initval; / steady_state_model; k = 1; : end; shocks; steady; check; stoch_simul; / simul;</pre>	VAR – deklarácia endogénnych premenných VAREXO – exogénne šoky (ak sú definované) PARAMETERS – parametre modelu MODEL – rovnice modelu, za poslednou end; INITVAL / STEADY_STATE_MODEL – počiatočné hodnoty / analytický Steady State takisto za poslednou hodnotou end; SHOCKS – definícia šokov (pri simulácii) PRÍKAZY – čo má Dynare urobiť steady; – nájde steady state check; – overí model (len dynamické) stoch_simul; / simul; – simulácia
---	---

Poradie príkazov definujúce model v Dynare je dôležité, zvykne sa uvádzať takto:

1. var → 2. varexo → 3. parameters → 4. model → 5. initval → 6. shocks → 7. steady;, stoch_simul;, atď.

Pre zadanie Dynare modelu v MatLABe zvolíme v ponuke *HOME* možnosť *New Script* a zapíšeme do okna scriptu kompletný model. Následne ho uložíme cez *EDITOR* a *Save*, kde vyberieme *Save As*; nastavíme priečinok, kde si budeme ukladať všetky modely a na ktorý je prístup bez obmedzení, napr. *D:\MatLABfiles* a zadáme názov napr. *deterministic.mod*. Operačný systém má príponu mod rezervovanú pre video súbory, čo znamená, že priame spúšťanie sa odporúča až v rámci MatLABu, kde dvojklik na daný model zobrazí script. Výpočet a všetky zadané príkazy v scripte sa vykonajú zadáním *dynare názov_modelu*, teda napr. *dynare deterministic.mod*. v príkazovom okne MatLABu (*Command Window*).

Už z uvedenej ponuky príkazov je zrejmé, že Dynare sa dajú využiť podľa potreby na deterministické prípadne na stochastické výpočty. Ukážeme si obe možnosti.

3 JEDNODUCHÝ DETERMINISTICKÝ MODEL

Najjednoduchším spôsobom použitia Dynare je výpočet rovnovážneho stavu (príkaz *steady;*). Uvažujme náhodne zvolený jednoduchý **deterministický neoklasický model rastu**.

Prvou rovnicou je **Eulerova rovnica** vychádzajúca z **dynamickej optimalizácie spotreby**:

$$\frac{1}{c} = \beta \frac{1}{c} (\alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha} + 1 - \delta) \quad (1)$$

kde β = diskontný faktor ($0 < \beta < 1$), δ = miera opotrebenia kapitálu, α = podiel kapitálu na produkcii, $k^{\alpha-1} l^{1-\alpha}$ = marginálny produkt kapitálu a $1/c$ = marginálna užitočnosť spotreby

Druhá rovnica je **Cobbova Douglasova produkčná funkcia** so vstupmi práca l a kapitál k :

$$y = k^{\alpha} l^{1-\alpha} \quad (2)$$

Tretia rovnica je **akumulácia kapitálu**. Nový kapitál vzniká produkciou, ktorá sa nespotrebuje, teda z investícií. Časť kapitálu sa opotrebuje:

$$k = (1 - \delta)k + y - c \quad (3)$$

Poslednou štvrtou rovnicou modelu je rovnováha na **trhu práce**, kde na ľavej strane je mzda a na pravej strane je miera, akou si domácnosť cení voľný čas:

$$(1 - \alpha) \frac{y}{l} = \theta c \quad (4)$$

kde θ určuje, aká neprijemná je práca oproti radosti zo spotreby – odvodené z maximalizácie užitočnosti $U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(c_t) - \theta \frac{l_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right]$, kde zjednodušujúco predpokladáme, že $\Phi = 0$

```
var y, c, k, l;
parameters beta, alpha, delta, theta, rho;
beta = 0.99; alpha = 0.36; delta = 0.025;
theta = 2.0; rho = 0.95;
model;
  1/c = beta*(1/c)*(alpha*k^(alpha-1)*l^(1-alpha) + 1 - delta);
  y = k^alpha*l^(1-alpha);
  k = (1 - delta)*k + y - c;
  (1 - alpha)*y/l = theta*c;
end;
steady;
```

STEADY-STATE RESULTS:

y	1.59401
c	1.1853
k	16.3483
l	0.430341

Model ukazuje, ako sa ekonomika prirodzene dostane do dlhodobej rovnováhy, keď všetci ekonomickí agenti konajú racionálne a v ekonomike bezchybne fungujú trhy. Rovnovážne hodnoty (Steady-State Results) sú vypočítané pre zadané hodnoty parametrov.

4 DETERMINISTICKÁ SIMULÁCIA

Ďalšou možnosťou ako využiť Dynare je deterministická simulácia (*simul*). V takomto type simulácie sa všetky meniace sa premenné vyvíjajú deterministicky (bez náhodných vplyvov). Simulácia môže zahŕňať v čase sa meniace šoky, ktoré sú však dopredu známe, lebo reprezentujú trvalé zmeny politiky alebo plánované reformy (napr. reformu dôchodkového systému). Obvykle je aplikovaná pri nelineárnych modeloch, v ktorých nevyužívame log-lineárizáciu okolo ustáleného stavu.

Ukážeme si ju na zjednodušenom príklade **neoklasického modelu rastu** s dvomi rovnicami.

```
var c k;
varexo A;

parameters alpha beta gama delta;
alpha=0.5; beta=0.95; gama=0.5; delta=0.02;

model;
  c + k = A*k(-1)^alpha + (1-delta)*k(-1);
  c^(-gama) = beta*c(+1)^(-gama)*
    (alpha*A(+1)*k^(alpha-1) + 1 - delta);
end;
```

skript pokračuje na ďalšej strane

$$\max_{\{c_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$c_t + k_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} + (1 - \delta) k_{t-1}$$

Podmienky prvého rádu:

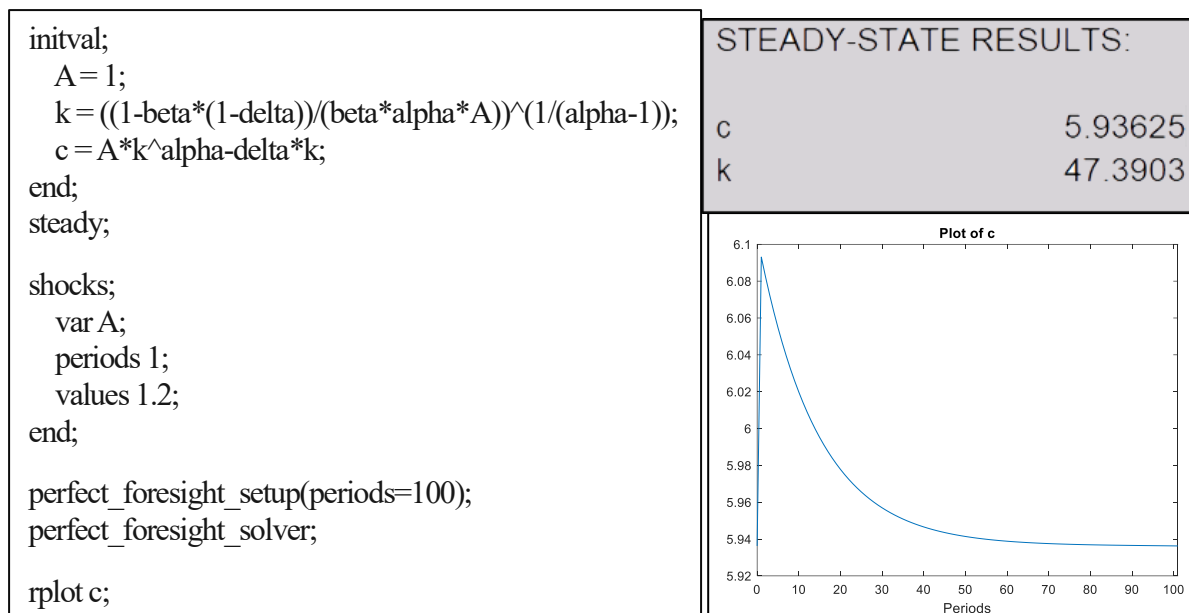
$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma} (\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

$$c_t + k_t = A_t k_{t-1}^{\alpha} + (1 - \delta) k_{t-1}$$

Steady state:

$$\bar{k} = \left(\frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\beta \alpha \bar{A}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\bar{c} = \bar{A} \bar{k}^{\alpha} - \delta \bar{k}$$



Oproti modelu z predchádzajúcej časti síce už uvažujeme s celkovou produktivitou faktorov (úroveň technológie), ktorá je exogénnou premennou, prostredníctvom ktorej zavádzame jednorazový šok. Ale pre zjednodušenie sme prestali uvažovať trh práce.

Prvá rovnica **vyjadruje rovnováhu v ekonomike**, kde produkcia = spotreba + investície. Celkový produkt je Ak_{t-1}^α , z neho sa spotrebuje časť c a časť ide na tvorbu nového kapitálu k , pričom časť kapitálu sa z minulosti prenáša v podobe $(1 - \delta)k_{t-1}$:

$$c_t + k_t = A_t k_{t-1}^\alpha + (1 - \delta)k_{t-1} \quad (5)$$

Druhou rovnicou je **Eulerova rovnica** vychádzajúca z **dynamickej optimalizácie spotreby**:

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma} (\alpha A_{t+1} k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta) \quad (6)$$

kde sa domácnosť rozhoduje medzi dnešnou a zajtrajšou spotrebou.

Nastavenie inicializačných hodnôt (*initval*) je analytickým vyjadrením rovnováhy bez šokov. Rovnováha je overená príkazom (*steady*), ktorým Dynare skontroluje, či rovnice platia pre hodnoty uvedené v *initval*. Následne sa zavedie jednorazový šok cez technológiu, lebo v čase $t = 1$ je nastavené A na hodnotu 1,2 a zvyšné obdobia sa rovná 1. Účinky šoku sú, že produkcia dočasne stúpne a domácnosti budú bohatšie. Preto môžu zvýšiť spotrebu aj investície, tým kapitál porastie, čo postupne mení rovnováhu. Systém sa po šoku bude postupne vracat späť do rovnovážneho stavu.

Nie je použitý príkaz *simul*, ale dokonalé predvídanie (*perfect_foresight* so svojim nastavením a riešením). Dôvodom je, že subjekty vedia o šoku a vedia, že skončí, takže optimalizovať sa dá celá trajektória. Trajektória spotreby, teda jej návrat k steady-state je aj zobrazený na grafe cez príkaz *rplot*. Rovnaký priebeh, ale s vlastnými hodnotami, by mala aj trajektória kapitálu.

5 STOCHASTICKÁ SIMULÁCIA – DSGE (RBC)

Pri stochastickej simulácii model obsahuje **stochastické šoky** (technologický, monetárny, fiškálny, preferenčný, ...) a systém je často riešený lineárnou aproximáciou. Výsledkom sú funkcie reakcie na impulz (IRF) alebo štatistické momenty. Používa sa na analýzu reakcií ekonomiky na nepredvídateľné šoky, kvantifikácia volatility, korelácií, a porovnávanie výsledkov modelu s dátami. Ako ukážku využijeme príklad, ktorý uvádza vo svojej knihe Torres (2016). Ten vo svojej učebnici skvele rozširuje model o ďalšie a ďalšie rigidity.

<pre> var Y, C, I, K, L, W, R, A; varexo e; parameters alpha, beta, delta, gama, rho; alpha = 0.35; beta = 0.97; delta = 0.06; gama = 0.40; rho = 0.95; model; C = (gama/(1-gama))*(1-L)*(1-alpha)*Y/L; 1 = beta*((C/C(+1))*(R(+1)+(1-delta))); Y = A*(K(-1)^alpha)*(L^(1-alpha)); K = (Y-C)+(1-delta)*K(-1); I = Y-C; W = (1-alpha)*A*(K(-1)^alpha)*(L^(-alpha)); R = alpha*A*(K(-1)^(alpha-1))*(L^(1-alpha)); log(A) = rho*log(A(-1))+ e; end; </pre>	<pre> initval; Y = 1; C = 0.8; L = 0.3; K = 3.5; I = 0.2; W = (1-alpha)*Y/L; R = alpha*Y/K; A = 1; e = 0; end; // Steady State výpočet steady; // Blanchardove-Kahnove podmienky check; // analýza šoku celkovej produktivity faktorov TFP shocks; var e; stderr 0.01; end; // stochastická simulácia stoch_simul; </pre>
--	---

Rovnováha v modeli celej ekonomiky pozostáva z troch blokov: systému cien: W_t , R_t a P_t ; množiny priradených hodnôt: Y_t , C_t , I_t , N_t a K_t a hranice produkčných možností opísanej rovnováhou trhu tovarov, známemu ohraničeniu ekonomiky: $Y_t = C_t + I_t$.

Rovnice charakterizujúce modelovanú ekonomiku:

- ponuka práce $\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-N_t} = \frac{W_t}{P_t}$
- Eulerova rovnica $\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta \left[\frac{R_t}{P_t} + 1 - \delta \right]$
- dopyt po kapitále $R_t = \alpha Y_t P_t / K_t$
- dopyt po práci $W_t = (1-\alpha) Y_t P_t / N_t$
- produkčná funkcia $Y_t = A_t K_t^\alpha N_t^{1-\alpha}$
- akumulácia kapitálu $K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$
- cenová úroveň $P_t = \frac{1}{A_t} \left(\frac{W_t}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{R_t}{\alpha} \right)^\alpha$
- rovnovážna podmienka $Y_t = C_t + I_t$

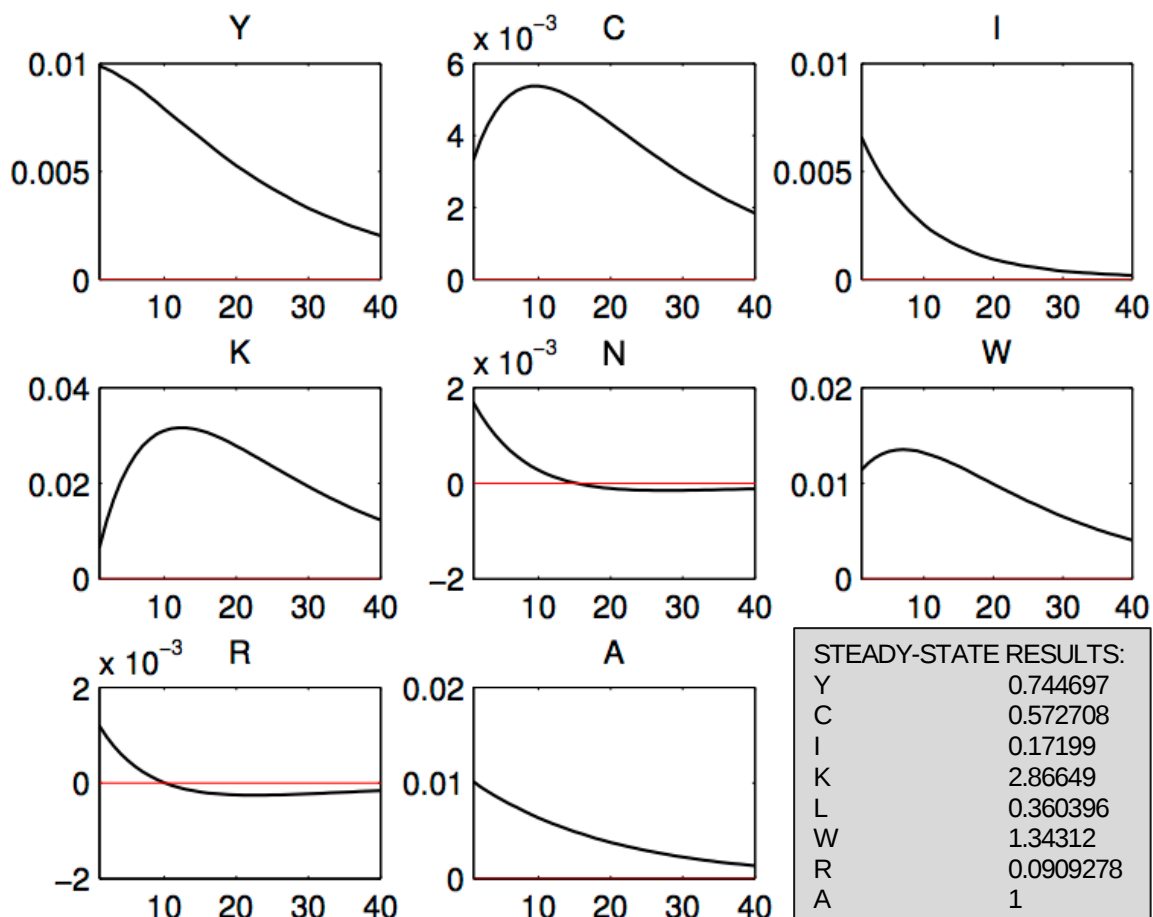
V modeli máme štyri parametre α , β , δ , γ a exogénne zadávame aj hodnotu celkovej produktivity faktorov A . Potom parameter α predstavuje elasticitu produkcie vzhľadom na kapitál; pri Cobbovej a Douglasovej produkčnej funkcii parameter predstavuje aj podiel kapitálového príjmu na celkových príjmoch ekonomiky. Diskontný faktor β reprezentuje to, ako domácnosti oceňujú budúcu užitočnosť vo vzťahu k súčasnej užitočnosti, v závislosti od miery subjektívnej preferencie jednotlivcov medzi obdobiami. Miera znehodnotenia fyzického kapitálu δ sa získava z databáz EU Klems (0,04 - 0,1). Preferencie jednotlivca týkajúce sa rozhodnutia medzi spotrebou a voľným časom reprezentuje parameter γ (s hodnotami 0,3 - 0,5).

Pri deterministickej simulácii bola celková produktivita faktorov A_t exogénna. Najjednoduchší spôsob ako previesť model na stochastický, je predpokladať, že celková produktivita faktorov A_t nie je konštanta, ale že je generovaná stochastickým procesom 1. rádu, teda platí:

$$\ln A_t = (1 - \rho_A) \ln \bar{A} + \rho_A \ln A_{t-1} + e_t \quad (7)$$

kde náhodná zložka $e_t \sim N(0, \sigma_A^2)$ a ρ_A je autoregresný parameter produktivity, ktorého absolútna hodnota musí byť menšia ako 1, aby sa zaistila stacionarita procesu. Ku kalibrovaným parametrom pribudnú aj charakteristiky autoregresného procesu šoku produktivity ρ a stderr .

Pomocou numerických výpočtov vypočítame odchýlky premenných od ich ustálených hodnôt od okamihu, keď dôjde k šoku, až kým sa ekonomika nedostane do nového ustáleného stavu. Štandardným výstupom je vykreslenie **funkcie reakcie na impulz** (IRF) pre každú premennú, ktoré ukazujú dynamiku ekonomiky po šoku.



Overujeme len **Blanchardove-Kahnove podmienky** (*check*), lebo sú kľúčové pre riešiteľnosť DSGE modelov v Dynare. Ak ich model nespĺňa, simulácia zlyhá. Model má jedinečné stabilné riešenie $\Leftrightarrow$ počet vlastných čísel mimo jednotkového kruhu sa rovná počtu forward-looking premenných. Súčasťou výstupu sú aj tabuľky: *Policy and Transition Functions*, *Approximated Theoretical Moments*, *Approximated Matrix of Correlations* a *Coefficients of Autocorrelation*.

6 ZÁVER

Od stochastickej simulácie je už len malý krôčik ku analýze reálnych údajov ekonomík a bayesovskému odhadu namiesto prezentovanej kalibrácie. Tým sa analytikom otvára široké spektrum modelov, ktoré sú vyvíjané najmä centrálnymi bankármi, ale svoje opodstatnenie nájdu aj v iných finančných a ekonomických organizáciách.

Od čias Kydlanda a Prescottta (1982), ktorí prezentovali štandardný model RBC, sa dynamické stochastické modely všeobecnej ekonomickej rovnováhy stali základným kameňom makroekonomického modelovania. Softvérové riešenie Dynare je používaným nástrojom pre porozumenie tejto aktuálnej metodológii makroekonomických modelov vychádzajúcich z mikrovýchodísk (Williamson, 2024) a nemali by byť opomenuté žiadnym ekonomickým analytikom. Na špecializovaných serveroch (napr. *macromodelbase*) sú ponúkané desiatky rôznych modelov, ktoré môžu uľahčiť vytváranie vlastných modelov pre rôzne oblasti analýz.

Použitá literatúra

1. BLANCHARD, O., KAHN, C. M. 1980. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. *Econometrica*, roč. 48, 1980, č. 1, s. 305-311.
2. CORONESE, M. 2021. Teaching / Advanced Macroeconomics. Introduction to Dynare. Available at: <https://matteocoronese.eu/teaching/advanced-macroeconomics>
3. COSTA JUNIOR, C. J. 2016. Understanding DSGE Models: Theory and Applications, Vernon Press.
4. Dynare. A Software Platform for Handling a Wide Class of Economic Models. Available at: <https://www.dynare.org/>
5. Dynare: Democratizing Macroeconomic Modeling with MATLAB. Available at: <https://www.mathworks.com/solutions/finance-and-risk-management/central-banking/newsletters/dynare.html>
6. HERBST, R., SCHORFHEIDE, F. 2015. Bayesian Estimation of DSGE Models. Princeton University Press.
7. JIA, D. L. 2020. Dynamic Macroeconomic Models in Emerging Market Economies, DSGE Modelling with Financial and Housing Sectors. Palgrave Macmillan.
8. KYDLAND, F., PRESCOTT, E. 1982. Time to Build and Aggregate Fluctuations. *Econometrica*, roč. 50, 1982, č. 6, s. 1345-1370.
9. Macroeconomic Model Data Base. Available at: <https://www.macromodelbase.com/>
10. Octave. A High-Level Language, Primarily Intended for Numerical Computations. Available at: <https://octave.org/download>
11. TORRES, J. L. 2016. Introduction to Dynamic Macroeconomic General Equilibrium Models, 2nd edition. Vernon Press.
12. WILLIAMSON, S. D. 2024. Macroeconomics (6th Global Edition). Pearson.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 822
email: martin.lukacik@euba.sk, adriana.lukacikova@euba.sk, karol.szomolanyi@euba.sk

APLIKÁCIA EURÓPSKÝCH SMERNÍC VO FINANČNOM MODELOVANÍ S POROVNANÍM SO ŠTANDARDNÝMI POSTUPMI

APPLICATION OF EUROPEAN GUIDELINES IN FINANCIAL MODELING WITH COMPARISON WITH STANDARD PROCEDURES

Richard Martinus

Abstrakt

Alokácia kapitálu je pre neprofesionálnych investorov mnohokrát ťažkou témou. Jednou zo smerníc, ktorá čiastočne pokrýva bezpečné investičné nástroje pre európskych investorov je UCITS. Táto smernica dáva záruku o európskom štandarde pri tvorbe fondov a emitenti tak musia dodržiavať pravidlá ovplyvňujúce zloženie ponúkaných fondov. Popri tejto smernici prihliadame v tomto článku aj na aktuálnu trhovú situáciu, kde modelujeme efektívne hranice na dynamicky posúvanom päťročnom investičnom horizonte, na ktorom porovnávame výnosy a rizikovosť pre portfólio s najmenším rizikom meraným pomocou CVaR. Aplikujeme tu dva prístupy, kde výsledkom je zobrazenie a objasnenie použitia UCITS podmienok a ich vplyv na konštrukciu portfólia voči štandardnému prístupu bez obmedzení.

Kľúčové slová: *Efektívna hranica, Python, Diverzifikácia, UCITS, Portfólio*

Abstract

Capital allocation is often a difficult topic for non-professional investors. One of the directives that partially covered safe investment instruments for European investors is UCITS. This directive guarantees a European standard for the creation of funds and issuers must therefore comply with the rules of the appropriate conditions of the funds offered. In addition to this guideline, in this article we also take into account the current market situation, where we model efficient frontiers on a dynamically shifted five-year investment horizon, on which we compare returns and riskiness for the portfolio with the lowest risk measured using CVaR. We apply approaches here where the display and explanation of the results of UCITS conditions and their impact on the construction of the portfolio is without restrictions compared to the standard approach.

Keywords: *Effective frontier, Python, Diversification, UCITS, Portfolio*

1 ÚVOD

Investovanie je skúmané desiatky rokov, čo potvrdzuje aj počiatok modernej teórie portfólia od Henryho Markowitza vo svojom článku z roku 1952. Autor tu uviedol prístup ako rozložiť investície medzi rôzne aktíva, tak aby investor minimalizoval riziko pri stanovenom očakávanom výnose (Markowitz, 1952). Jeho modernú teóriu portfólia, ktorá predstavila efektívnu množinu portfólií (efektívnu hranicu) ďalej nasledovali mnohé práce, ktoré skúmali rozloženie rizika a výnosu v portfóliách (Sharpe, 1964). V aktuálnej dobe sa problematike redukovaniu rizika pre investorov venuje napríklad európska smernica UCITS (z angl. Undertakings for Collective Investments in Transferable Securities, ktorá upravuje možnosti emitentov fondov a určuje im hranice ako môžu byť produkty vyskladané. Presne tento prístup je využívaný naprieč európskymi fondami a emitenti musia tieto pravidlá dodržiavať. Portfólio tvorené v našej práci bude tvorené z akcií európskeho akciového indexu Eurostoxx 50. Tento index je reprezentovaný 50 najväčšími a najvýznamnejšími spoločnosťami z krajín eurozóny. Nakoľko aj my sa nachádzame v eurozóne, budeme aplikovať pri výbere portfólia práve európsku smernicu UCITS, aby sme zachovali konzistentnosť s ostatnými stratégiami. Táto smernica je štandardom, ktorý má za cieľ chrániť investorov a spraviť investovanie do fondov transparentné a do istej miery prediktívne z pohľadu rizika a výnosov. Zámerom je dosiahnuť výsledné efektívne hranice od hodnoty portfólia s minimálnym CVaR, ktoré je následne porovnávané medzi štandardným prístupom bez obmedzení a prístupom s UCITS obmedzujúcimi podmienkami. Obdobie, ktoré budeme skúmať bude vždy päťročné s ročným posunom z intervalu od 2018 po koniec roku 2024, nakoľko v roku 2018 táto smernica nadobudla platnosť. Na konci porovnáme výsledky portfólií tvorených pomocou štandardného prístupu a prístupu pod smernicou UCITS.

2 UCITS

UCITS predstavuje európsku smernicu, ktorá reguluje ako môžu emitenti fondov tvoriť zloženie fondov, poskytovaných pre európskych (často neprofesionálnych) investorov. Táto smernica bola zavedená z dôvodu passportizácie fondov v rámci Európy takzvaným európskym pasom. Tento Európsky pas predstavuje možnosť ako ponúkať rovnaký fond naprieč členskými štátmi európskej únie. Nachádzajú sa tu mnohé obmedzenia a usmernenia, z ktorých niektoré sa týkajú aj štruktúry (zloženia) portfólií. Tieto obmedzenia hovoria o maximálnej zainvestovanosti do jednotlivých cenných papierov v portfóliu. Prvá hlavná podmienka stanovuje maximálnu váhu cenného papieru, ktorá nesmie presiahnuť viac ako 10 %. Tento vzťah znázorňujeme nasledovnou matematickou formuláciou:

$$w_i \leq 0.10, \quad \forall i \in N \quad (1)$$

Kde w_j predstavuje váhu aktíva i , N predstavuje všetky dostupné cenné papiere v portfóliu. Druhá nosná podmienka pri konštrukcii fondov, je aby váhy s päť a viac percentným podielom v portfóliu tvorili spolu maximálne 40 % z celej skladby portfólia, čo reprezentuje nasledovný vzťah:

$$\sum_{i \in N: w_i > 0.05} w_i \leq 0.40, \quad \forall i \in N \quad (2)$$

V prípade ak je fond tvorený aj iným UCITS fondom, tak tento fond musí obsahovať maximálne dvadsať percentný podiel z portfólia. Dôležitou reštriktívnou podmienkou je aj

likvidita fondu, ktorá musí byť zabezpečená v minimálnom rozsahu dvakrát mesačne, pričom trhovú hodnotu fondu musí byť známa na dennej báze. Súčasťou nariadenia je aj dokument s kľúčovými informáciami pre investorov (ďalej ako KIID), ktorý obsahuje základné informácie o fonde, jeho zábery investovania ako aj potenciálne riziká a výnosy. Rizikový faktor je vypočítaný pomocou skóre SRRI, ktoré predstavuje sumárny indikátor rizík a strát, počítaný na základe štandardnej odchýlky, čo znázorňujeme v tabuľke 1.

Table 1: SRRI matica

SRRI skóre	Štandardná odchýlka
1	< 0.5 %
2	0.5 % - 2 %
3	2 % - 5 %
4	5 % - 10 %
5	10 % - 15 %
6	15 % - 25 %
7	> 25 %

Zdroj: vlastné spracovanie

Po SRRI metrike, ktorá bola nahradená v roku 2018 metrikou SRI (z angl. Summary risk indicator), sa začalo riziko ohodnocovať komplexnejšie a nie iba pomocou štandardnej odchýlky. Oba prístupy majú totožné intervaly od 1 po 7 z pohľadu ocenenia rizika fondu. Výpočet SRI však spočíva v kombinácii trhovej miery rizika (Market risk measure – ďalej ako CRM) a kreditná miera rizika (Credit risk measure – ďalej ako CRM). Pri MRM je možné dosiahnuť taktiež sedem spomínaných hodnôt, ktoré sú závislé od hodnoty volatility počítanej ako VEV, na ktorej výpočet sa používa šikmosť, špicatosť aj hodnota Value at risk na úrovni 97.5% (Európska Komisia, 2017). Výpočet MRM je znázornený v tabuľke 2.

Tabuľka 2: Výpočet MRM pomocou VEV

MRM	VEV
1	0 % - 0,5 %
2	0,5 % - 5 %
3	5 % - 12 %
4	12 % - 20 %
5	20 % - 30 %
6	30 % - 80 %
7	> 80 %

Zdroj: vlastné spracovanie

CRM je druhým parametrom a predstavuje riziko emitenta, či bude schopný plniť záväzky. Pri veľkých spoločnostiach je toto skóre takmer vždy nižšie než MRM. V našich analýzach budeme predpokladať existenciu iba MRM, nakoľko riziko emitenta nebýva verejne dostupnou a ľahko dohľadateľnou informáciou. Mnohé práce v dnešnej dobe skúmajú smernicu UCITS. V dizertačnej práci autor Farrugia, porovnáva prístup pri investovaní pomocou UCITS a AIF, čo predstavuje alternatívne investičné fondy. V tomto diele autor zistil, že aj keď AIF sú volatilnejšie (rizikovejšie), tak UCITS prinášali vyššie zhodnotenie. Nie je teda vždy platné, že čím je väčšia kolísavosť portfólia tým väčší výnos dosiahne (Farrugia, 2017). Táto smernica je aktuálne v Európe nasledované rôznymi usmerneniami a reguláciami, ako je PRIIPs (z angl. Packaged Retail and Insurance-Based Investment

Products) alebo MiFID II (Markets in Financial Instruments Directive), pomocou, ktorých je zjednotené investovanie do európskych fondov a dávajú tak všeobecný štandard a pohľad na to, ako majú fondy vyzeráť z pohľadu štruktúry a ako má byť k investorom pristupované.

3 KONŠTRUKCIA PORTFÓLIA S VYUŽITÍM UCITS

V tejto kapitole rozoberieme proces konštrukcie efektívnych hraníc a porovnáme výsledky nadobudnuté z oboch uvádzaných prístupov. Prvým krokom bolo nadobudnutie dát o 50 spoločnostiach z indexu Eurostoxx 50. Tieto dáta sme následne očistili o 3 spoločnosti, ktoré nemali históriu po rok 2018, ktorý predstavuje začiatok platnosti UCITS. Po očistení dát sme pristúpili k samotnej konštrukcii efektívnych portfólií. V prípade štandardného aj UCITS prístupu sme najskôr vytvorili portfólio s minimálnym CVaR, ktoré je prvým počiatočným bodom. Následne sme navyšovali výnos portfólií o 0.01% ročne pre každé ďalšie portfólio a hľadali sme také portfólio, ktoré bude buď jediné s najväčším výnosom, v prípade štandardného prístupu, alebo také portfólio, ktoré už nemôže nadobúdať vyšší výnos z dôvodu obmedzujúcich podmienok (1) (2). V prvom kroku sme spustili výpočet na horizont päť rokov s počiatkom s januárom v roku 2018 po koniec roka 2022. Výsledok vidíme na obrázku 1.

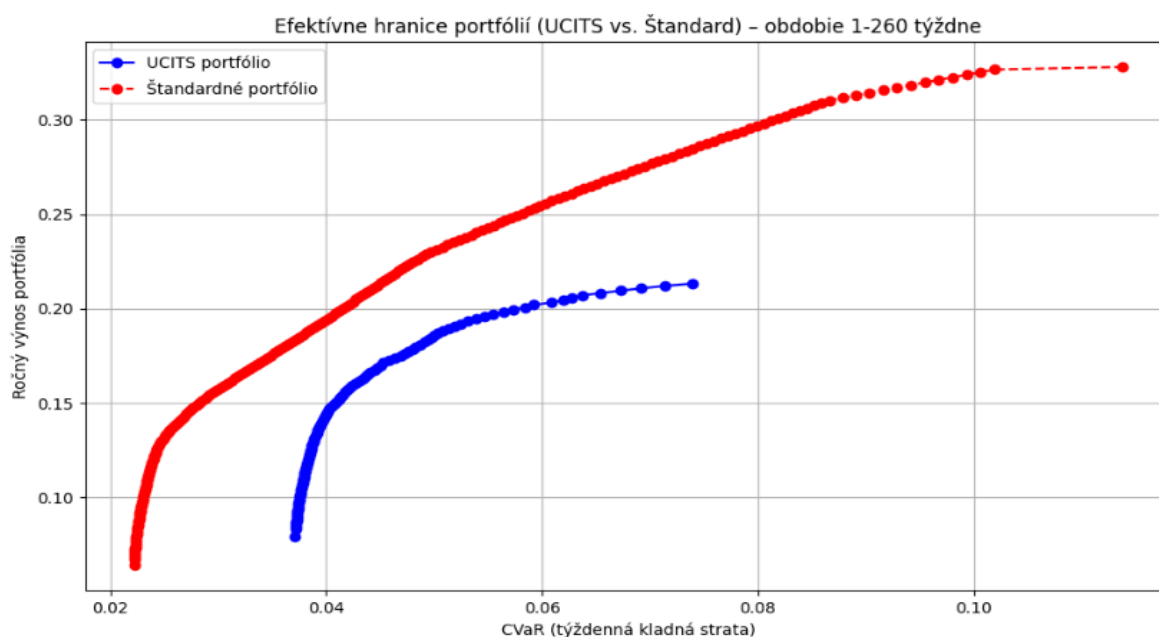
Obrázok 1: Efektívna hranica obdobia 1/2018 - 12/2022

===== UCITS: Portfólio s najnižším možným CVaR =====
 CVaR: 0.037126
 VaR: 0.029627
 Očakávaný ročný výnos: 0.079233 (7.92%)

 → Aktíva s váhou > 0:
 PHG: 0.049999
 BAS.DE: 0.049999
 BAYN.DE: 0.003611
 DHL.DE: 0.049999
 DB1.DE: 0.049999
 AIL.DE: 0.049999
 BSN.DE: 0.100000
 LOR.DE: 0.049999
 EL.PA: 0.049999
 RI.PA: 0.049999
 SAN.PA: 0.100000
 IBE.MC: 0.049999
 KNEBV.HE: 0.049999
 DTE.DE: 0.049999
 AD.AS: 0.100000
 ENEL.MI: 0.032862
 ENI1.F: 0.100000
 RACE: 0.013538

===== STANDARD: Portfólio s najnižším možným CVaR =====
 CVaR: 0.022243
 VaR: 0.020192
 Očakávaný ročný výnos: 0.063929 (6.39%)

 → Aktíva s váhou > 0:
 PHG: 0.046571
 SIE.DE: 0.005430
 AIL.DE: 0.046435
 BSN.DE: 0.136592
 LOR.DE: 0.036546
 SAN.PA: 0.096094
 BBVA: 0.002539
 KNEBV.HE: 0.072056
 FLUT: 0.000062
 AD.AS: 0.123066
 ENI1.F: 0.400000
 VOW3.DE: 0.026610

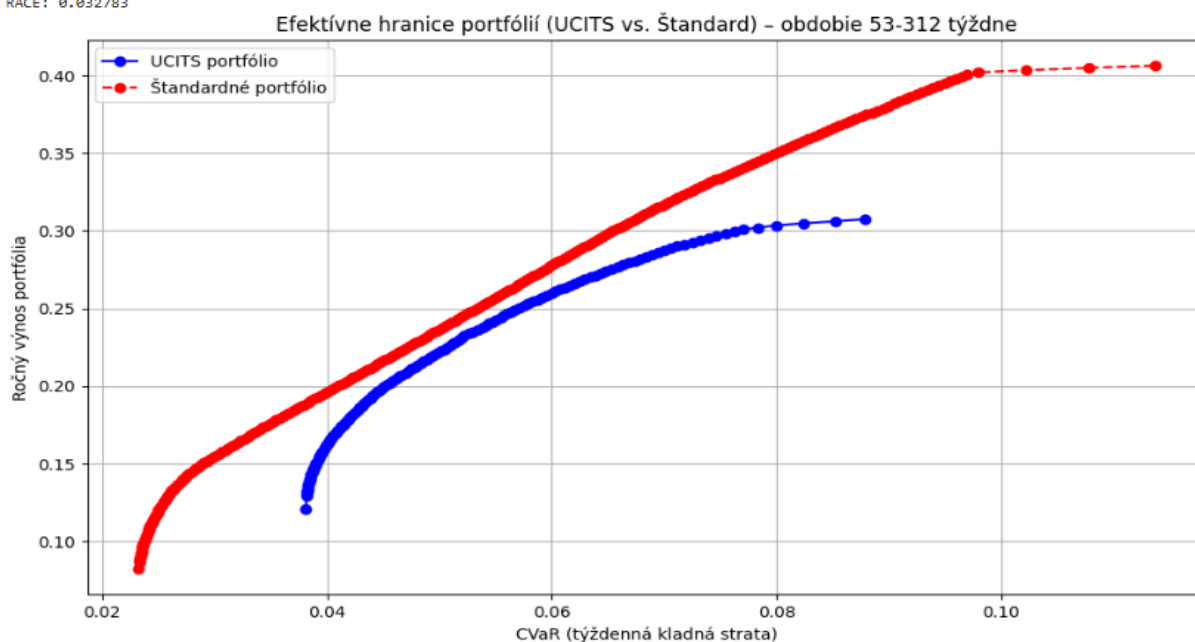


Zdroj: vlastné spracovanie

Toto obdobie predstavuje 260 týždňov, ktoré budeme následne posúvať po 52 týždňoch vopre. Môžeme si všimnúť, že UCITS efektívna hranica tvorí iba podmnožinu portfólií zo štandardného prístupu. Môžeme tak hovoriť o sub-efektívnej hranici, ktorá je formovaná na základe reštriktívnych podmienok. Pri červenej krivke si môžeme všimnúť vzdialené portfólio, ktoré predstavuje posledné portfólio, tvorené iba jednou spoločnosťou. Totožný prístup opakujeme aj pri ďalšom období na obrázku 2, kde realizujeme ročný posun.

Obrázok 2: Efektívna hranica obdobia 1/2019 - 12/2023

===== UCITS: Portfólio s najnižším možným CVaR =====	===== STANDARD: Portfólio s najnižším možným CVaR =====
CVaR: 0.038093	CVaR: 0.023184
VaR: 0.029611	VaR: 0.020739
Očakávaný ročný výnos: 0.121121 (12.11%)	Očakávaný ročný výnos: 0.082112 (8.21%)
Aktíva s váhou > 0:	Aktíva s váhou > 0:
PHG: 0.005486	DB1.DE: 0.078667
BAYN.DE: 0.038850	BSN.DE: 0.110951
DHL.DE: 0.049999	RI.PA: 0.039755
DB1.DE: 0.049999	SAN.PA: 0.004217
AIL.DE: 0.049999	KNEBV.HE: 0.108786
BSN.DE: 0.100000	SAP.DE: 0.019621
LOR.DE: 0.049999	AD.AS: 0.225133
EL.PA: 0.049999	ENI1.F: 0.400000
RI.PA: 0.049999	VOW3.DE: 0.012871
SAN.PA: 0.100000	
TTE.PA: 0.002912	
IBE.MC: 0.049999	
KNEBV.HE: 0.049999	
BMW.DE: 0.010878	
DTE.DE: 0.049999	
SAP.DE: 0.009101	
AD.AS: 0.100000	
ENEL.MI: 0.049999	
ENI1.F: 0.100000	
RACE: 0.032783	



Zdroj: vlastné spracovanie

Na tomto obrázku môžeme pozorovať rovnaký jav sub-efektívnej hranice, pričom si môžeme všimnúť, že nízka hodnota CVaR, ktorá je nadobudnutá v štandardnom prístupe, nebude nikdy dosiahnutá za použitia reštriktívnych podmienok, ktoré ovplyvňujú zloženie portfólií a tým aj ich výnos, CVaR a ostatné popisné charakteristiky. Pri každom prístupe zobrazujeme nad čiarovým grafom aj popisné charakteristiky dvoch portfólií s minimálnou hodnotou CVaR. Posledným analyzovaným päťročným obdobím bolo obdobie od 1/2020 po 12/2024 a zobrazujeme ho obrázkom 3.

Obrázok 3: Efektívna hranica obdobia 1/2020 - 12/2024

===== UCITS: Portfólio s najnižším možným CVaR =====
 CVaR: 0.038158
 VaR: 0.030059
 Očakávaný ročný výnos: 0.090170 (9.02%)

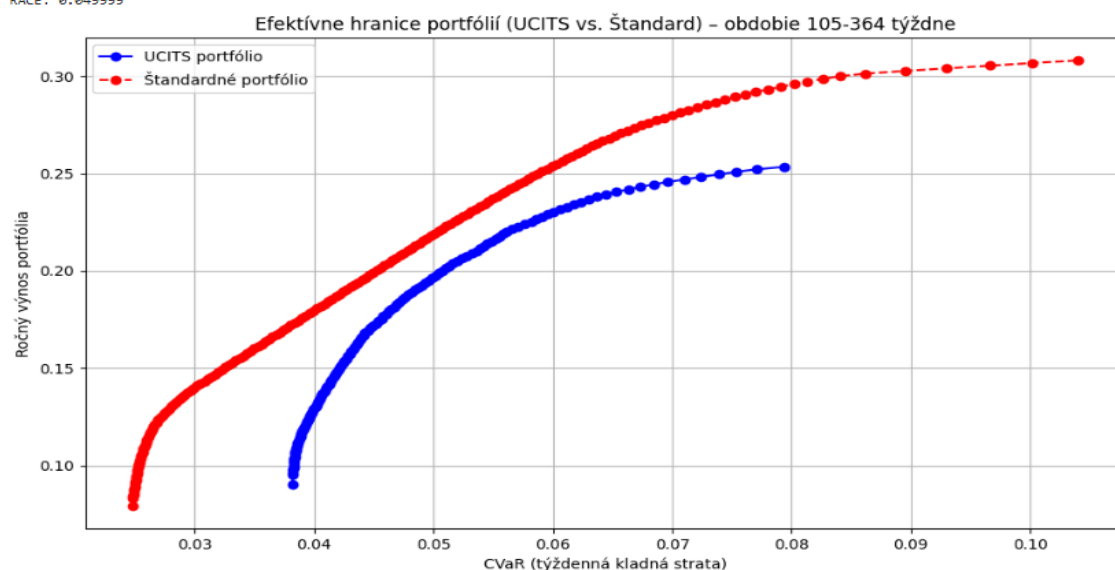
Aktíva s váhou > 0:

PHG: 0.016393
 BAS.DE: 0.033670
 BAYN.DE: 0.028760
 DHL.DE: 0.049999
 DB1.DE: 0.049999
 AIL.DE: 0.049999
 BSN.DE: 0.100000
 LOR.DE: 0.049999
 EL.PA: 0.049999
 RI.PA: 0.049999
 SAN.PA: 0.100000
 IBE.MC: 0.049999
 KNEBV.HE: 0.049999
 BMW.DE: 0.009739
 DTE.DE: 0.049999
 SAP.DE: 0.011448
 AD.AS: 0.100000
 ENI1.F: 0.100000
 RACE: 0.049999

===== ŠTANDARD: Portfólio s najnižším možným CVaR =====
 CVaR: 0.024768
 VaR: 0.022877
 Očakávaný ročný výnos: 0.078980 (7.90%)

Aktíva s váhou > 0:

STLA: 0.009516
 DB1.DE: 0.051773
 BSN.DE: 0.088534
 LOR.DE: 0.019091
 EL.PA: 0.061161
 RI.PA: 0.006246
 SAN.PA: 0.090382
 KNEBV.HE: 0.079269
 BMW.DE: 0.003882
 AD.AS: 0.190145
 ENI1.F: 0.400000



Source: own processing

Toto obdobie predstavuje posledné ucelené päťročné obdobie, ktoré opätovne potvrdzuje redukcii dostupných možností za použitia UCITS prístupu, kde celkový počet portfólií je redukovaný o približne ako polovicu. Každý jeden bod na krivkách tak predstavuje efektívne portfólio pri zvolenom dátovom vstupe a v prípade modrej krivky aj dodatočným obmedzeniam. V tabuľke 3 znázorňujeme tri päťročné obdobia, z ktorých vyberáme popisné parametre portfólií s minimálnou hodnotou CVaR.

Tabuľka 3: Zobrazenie výsledkov UCITS | STANDARD

Pozorované obdobie	Ročný výnos	CVaR	VaR
1/2018 - 12/2022 Týždne 1 – 260	0.079 0.064	0.037 0.022	0.029 0.020
1/2019 - 12/2023 Týždne 53 – 312	0.1151 0.0952	0.0366 0.0243	0.0288 0.0216
1/2020 - 12/2024 Týždne 105 – 364	0.0901 0.0789	0.0381 0.0247	0.0300 0.0228

Source: own processing

Z tabuľky je možno vidno porovnanie v každej bunke medzi použitými prístupmi.

4 ZÁVER

Európske smernice a regulácie sú prístupy, na ktoré je treba prihliadať najmä ak uvažujeme využitie portfólií pre neprofesionálnych európskych investorov. Prístup, ktorý sme priniesli v tejto práci využíva európsku smernicu s viacerými obmedzeniami, ktorá formuje štruktúru európskych fondov. Pri vytvorenej efektívnej hranici je prihliadané na podmienky UCITS, ktoré stanovujú maximálne 10% váhu jednej akcie v portfóliu a akcie, ktoré majú viac ako 5% váhy, aby mali maximálne 40% zloženie portfólia. Týmto spôsobom zaručíme, že každé portfólio bude mať minimálne 17 zložiek, pričom najväčšiu dostupnú 10% váhu môžu nadobúdať iba 4 akcie v portfóliu. V práci sme analyzovali tri päťročné efektívne hranice od januára roku 2018 za použitia týždenných uzatváracích cien akcií. Tento rok bol vybraný ako počiatočný z dôvodu zavedenia UCITS do platnosti. Ako je možno vidieť z obrázkov 1, 2, 3, každá vytvorená efektívna hranica má bez obmedzujúcich podmienok dvojnásobne až trojnásobne viac portfólií na efektívnej hranici. Portfóliá boli generované až po poslednú najvýnosnejšiu akciu, respektíve pri UCITS to bolo zloženie s najvyšším možným výnosom. Pokiaľ sa zameriame na portfólia s minimálnou hodnotou CVaR vidíme, že najmenej rizikové portfólio je možné dosiahnuť v štandardnom prístupe, nakoľko minimálne 17 spoločností v portfóliu navyšuje aj minimálne riziko, ktoré vie portfólio dosiahnuť. Z pohľadu výnosov má portfólio s minimálnym CVaR vyššie zhodnotenie práve pri UCITS prístupe, nakoľko sa jedná iba o sub-efektívnu hranicu z množiny efektívnej hranice štandardného prístupu. Pokiaľ by sme porovnali portfóliá s najnižším rizikom s výnosom indexu Eurostoxx 50 za totožné päťročné obdobia, dostali by sme nasledovné výsledky z tabuľky 4.

Tabuľka 4: Porovnanie výnosov indexu a min-CVaR portfólií

Pozorované obdobie	UCITS	Štandardný	Eurostoxx 50
1/2018 - 12/2022 Týždne 1 – 260	0.079	0.064	0.0099
1/2019 - 12/2023 Týždne 53 – 312	0.1151	0.0952	0.0780
1/2020 - 12/2024 Týždne 105 – 364	0.0901	0.0789	0.0517

Source: own processing

Z tabuľky vyplýva, že pokiaľ by sme sa zameriavali na jediné kritérium – výnos, tak v tomto prípade by oba prístupy (štandardný aj UCITS) dominovali v každom päťročnom období pri portfóliu s minimálnym rizikom voči komplexnému diverzifikovanému indexu Eurostoxx 50. Na základe analýzy môžeme konštatovať, že obmedzujúce podmienky prispievajú k redukcii dostupných možností, ktoré ponúka všeobecný prístup tvorby portfólia. Vidíme že v prípade použitia UCITS prístupu sú na jednu stranu možnosti redukované, avšak stále prekonávajú výnosmi index a nakoľko je to sub-efektívnou hranicou tak aj samotné štandardné riešenie. Je nutné podotknúť že európske fondy musia byť diverzifikované na zníženie rizikovosti. Zároveň treba podotknúť, že poskytovatelia fondov naprieč Európou musia spadať pod smernice, ktoré usmerňujú emitentov a určujú im hranice, ktoré musia dodržiavať. V prípade ak by sa vo fonde nachádzalo malé množstvo akcií a práve tie s veľkými váhami by utrpeli straty, bolo by pre mnoho investorov psychicky náročné vydržať tento trhovú výkyv a v horšom prípade by sa zo strát už nikdy nemuseli spamätať. UCITS smernica tak slúži na ochranu európskych investorov aj za cenu mierneho obmedzenia celkového produktového univerza.

Použitá literatúra

1. Cover, T. M. (1991). Universal Portfolios. *Mathematical Finance*. 1 (1): 1–29. doi:10.1111/j.1467-9965.1991.tb00002.x. S2CID 219967240.
2. Európska Komisia. (2017). Commission Delegated Regulation (EU) 2017/653 of 8 March 2017 supplementing Regulation (EU) No 1286/2014 of the European Parliament and of the Council on key information documents for packaged retail and insurance-based investment products (PRIIPs) by laying down regulatory technical standards with regard to the presentation, content, review and revision of key information documents and the conditions for fulfilling the requirement to provide such documents. *Official Journal of the European Union*, L 100, 1–52. Retrieved from https://eur-lex.europa.eu/eli/reg_del/2017/653/oj/eng
3. Farrugia, R. (2017). *A comparative analysis of the performance of AIFs and UCITS funds* (B.Com. (Hons) thesis). University of Malta. <https://www.um.edu.mt/library/oar/handle/123456789/24560>
4. Markowitz, H. (1952) Portfolio selection, *Journal of Finance*, vol 7, March.
5. Samuel, A. L. (1959). Some Studies in Machine Learning Using the Game of Checkers. *IBM Journal of Research and Development*, vol. 3, no. 3, pp. 210-229, July 1959, doi: 10.1147/rd.33.0210.
6. Sharpe, W. F. (1964). A Theory of Market Equilibrium under conditions of Risk. *Journal of Finance*. 19.
7. YAHOO.FINANCE. Data on individual stocks [online]. 2025 [cit. 2025-10-10]. Dostupné z: <https://finance.yahoo.com>

Kontaktné údaje

Ing. Richard Martinus.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: +421 918 938 894, email: richard.martinus@euba.sk

A COMPARATIVE ANALYSIS OF BASELINE PATIENT STATUS BEFORE TOTAL ENDOPROSTHESIS: IMPLICATIONS FOR HEALTH AND MIGRATION POLICY

KOMPARATÍVNA ANALÝZA VÝCHODZIEHO STAVU PACIENTOV PRED TOTÁLNOU ENDOPROTÉZOU: DÔSLEDKY PRE POLITIKU V OBLASTI ZDRAVOTNÍCTVA A MIGRÁCIE

Veronika Mitkova, Matej Majerčík

Abstract

This comparative analysis investigates baseline pre-operative status disparities between Austrian (AT, N=64) and Slovak (SK, N=63) patients awaiting Total Endoprosthesis (TEP) in the highly integrated Austro-Slovak border region. While both cohorts showed similar demographics and identical subjective disease burden (EQ-VAS: AT 68, SK 64), the Slovak cohort, despite significantly higher educational attainment, exhibited a profound functional deficit. Objective functional testing revealed a stark contrast in lower body strength (30s Sit-to-Stand: AT median approx. 11 repetitions; SK mean approx. 6.8 repetitions), placing the SK cohort well below normal physical standards. This functional paradox highlights the need for migration-sensitive health policies that prioritize targeted prehabilitation to mitigate clinical risk, reduce healthcare costs, and ensure equitable post-operative outcomes across the two health systems.

Keywords: *migration policy, total endoprosthesis, functional tests*

Abstrakt

Táto komparatívna analýza skúma rozdiely v predoperačnom stave u pacientov čakajúcich na totálnu endoprotézu (TEP) v rámci regiónu s vysokou mobilitou na rakúsko-slovenskej hranici (AT, N=64; SK, N=63). Významná ekonomická migrácia medzi oboma národmi znamená, že pacienti s potenciálne rozdielnym zdravotným stavom využívajú ktorýkoľvek z týchto systémov. Identifikoval sa funkčný paradox: napriek vyššej úrovni vzdelania preukázala slovenská kohorta závažný funkčný deficit (30s Sit-to-Stand: SK priemer približne 6.8 opakovaní vs. AT medián približne 11 opakovaní). Táto výrazná disparita v predoperačnej funkčnej kapacite predstavuje vyššie klinické riziko a neprimerané ekonomické zaťaženie pre systém poskytujúci chirurgický zákrok. Zistenia zdôrazňujú, že súčasné migračné politiky zamerané na prístup k starostlivosti musia byť rozšírené o migračne citlivé zdravotné intervencie, najmä cielenú prehabilitáciu, aby sa zabezpečili rovnocenné a nákladovo efektívne pooperačné výsledky v celom integrovanom prihraničnom regióne.

Kľúčové slová: *migračná politika, totálna endoprotéza, funkčné testy*

1 INTRODUCTION

Total Hip Arthroplasty (THA) and Total Knee Arthroplasty (TKA) (Total Endoprosthesis TEP) stand as two of the most effective and prevalent surgical interventions in modern

medicine, designed to alleviate pain and restore function in patients with end-stage osteoarthritis. The success of these procedures, however, is not solely determined by surgical technique. A robust body of evidence (Meessen et al, 2020, van Leeuwen, 2014) indicates that the patient's pre-operative baseline status - encompassing physical function, muscle strength, and psychosocial health - is a critical predictor of post-operative outcomes, rehabilitation speed, and overall satisfaction.

This analysis is situated within the unique socio-economic context of the Austro-Slovak border region. Following the expansion of the European Union, this area has evolved into a highly integrated economic zone, characterized by significant cross-border labor mobility. A large contingent of the Slovak workforce commutes to Austria, particularly to the adjacent regions of Lower Austria and Burgenland. This mobility creates a fluid population that navigates two distinct healthcare systems. Under EU regulations, citizens have rights to necessary healthcare in their country of work or residence, facilitated by mechanisms like the European Health Insurance Card and specific bilateral agreements.

This cross-border dynamic presents profound challenges for health policy, moving beyond simple "health tourism" to complex issues of continuity of care. Disparities in the baseline health of patients awaiting elective surgery, such as TEP, can create unequal burdens on the respective healthcare systems. A patient with a poorer functional baseline pre-operatively may require a longer hospital stay and more intensive, costly post-operative rehabilitation, the costs of which are managed by the system in which the surgery is performed.

Therefore, understanding any existing disparities in the pre-operative condition of patients from these two interconnected populations is not merely an academic exercise. It is a critical data requirement for developing migration-sensitive health policies that ensure equitable, high-quality outcomes and a fair distribution of healthcare burdens (Long et al, 2021). This analysis provides a comparative snapshot of descriptive statistics from two cohorts of patients awaiting TEP: one from Austria (AT) (Löffler, 2025) and one from Slovakia (SK), to identify and contextualize these precise disparities.

2 COHORT COMPARISON: METHODOLOGY AND RESULTS

This analysis is a descriptive comparison of two pre-operative TEP cohorts, based on data collected within the project "Socio-economic Effects of Pre-Rehabilitation in Knee and Hip Transplantation in Cross-border Cooperation."

2.1 Demographic and Social Profile

The two cohorts are demographically homogeneous. The Austrian cohort consisted of 64 patients with valid questionnaires, the Slovak cohort 63 patients. The gender distribution was heavily skewed towards females in both groups: the AT cohort included 48 females (75%) and 16 males (25%), while the SK cohort included 45 females (73%) and 17 males (27%).

The distribution of surgical types was also comparable. The AT cohort was comprised of 39 (61%) TKA patients and 25 (39%) THA patients. The SK cohort had a near-even split, with 32 (51%) TKA patients and 31 (49%) THA patients.

Socially, the living and working situations were similar. In Austria, 49 patients (77%) lived with a partner, while 14 (22%) lived alone. In Slovakia, 44 patients (70%) lived with a partner and 19 (30%) lived alone. The majority in both groups were non-working or retired (AT: 48 patients, 76%; SK: 41 patients, 65%). The average age on Austrian side was 68.9 years (with st. error 8.9), Slovakian 66.1 years (with st. error 6.5) and a mean BMI of 31.0 ± 6.2 in Austria, while 30.1 ± 4.5 in Slovakia.

2.2 Socioeconomic Profile: Education

A stark divergence emerges in the socioeconomic data, specifically in educational attainment.

Austrian Cohort (N=31 sample): The educational background was predominantly vocational. Only 6% had a university degree, 10% high school with diploma, while 58% had completed high school without diploma and 26% had compulsory schooling.

Slovak Cohort (N=63): This group demonstrated a significantly higher level of formal education. More than half (52%) had a university degree and 37% had completed high school with diploma. Only 19% had high school 1.6% had compulsory schooling.

In summary, 80% of the Slovak cohort held a high school diploma or a university degree, compared to only 16% of the sampled Austrian cohort. This finding is critical, as education is a well-established socioeconomic determinant of health status and outcomes.

2.3 Baseline Health Status: Patient-Reported Outcomes

Despite the profound socioeconomic difference, the patients' subjective experience measured by Patient-Reported Outcomes (PROMs) of their disease was nearly identical.

EQ-VAS: The subjective perception of overall health, measured by the EQ Visual Analogue Scale (0-100, 100=best), was statistically indistinguishable. The AT cohort reported a mean score of 67 with standard error of 20. The SK cohort reported a mean of 64 with standard error of 19. These scores reflect a significant health burden, consistent with international data for pre-operative TEP patients (Cheng et al, 2024).

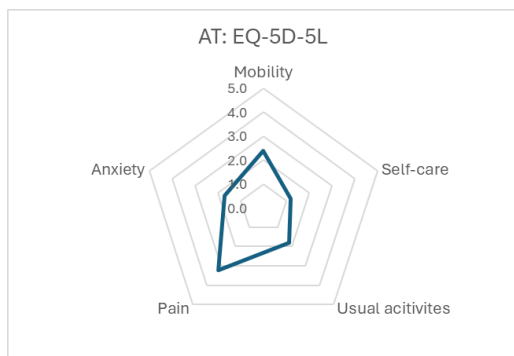


Figure 1: EQ-5D-5L in Austria

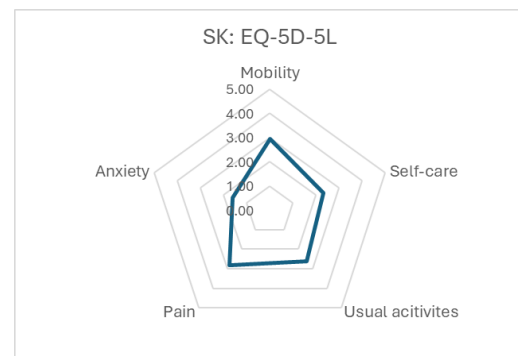


Figure 1: EQ-5D-5L in Slovakia

EQ-5D-5L Profile: The profile of health problems was also highly consistent. The Austrian radar plot (Figure 1) shows the most severe problems in the Pain/Discomfort (3.2) and Mobility (2.4) dimensions. This is mirrored precisely by the Slovak mean scores (N=63, on a 1-5 scale) (Figure 2): Mobility was the worst-ranked dimension (2.95), followed by Pain/Discomfort (2.83) and Usual Activities (2.59). Both cohorts reported the lowest problems in the Anxiety/Depression dimension (AT: less than 1; SK: 1.62). This demonstrates that both groups are functionally impaired and in pain, which are the primary drivers for seeking TEP surgery (Janssen, 2013).

2.4 Baseline Health Status: Objective Functional Tests

While the subjective experience was aligned, the objective measures of physical function revealed the most significant and clinically relevant disparities.

Hand Grip Strength (HGS): Upper body strength, often used as a proxy for overall sarcopenia and frailty, was comparable. The median HGS for the AT cohort (all) was approximately 30 kg. The mean HGS for the SK cohort (all) was 28 kg. Both values are robust and align with,

or are slightly above, mean pre-operative values reported in TKA cohorts 24 kg and 26 kg for THA in Austria, 29 kg (TKA) and 27 kg (THA) in Slovakia. This suggests that generalized, non-specific strength is not the primary issue.

Mobility (Timed Up and Go - TUG) test measures a combination of balance, gait speed, and lower-body strength. The AT cohort demonstrated a median TUG time of approximately 9 seconds. The SK cohort was clinically slower, with a mean TUG time of 11.9 seconds. Given that the minimal detectable change for TUG is cited between 1.6 to 2.5 seconds (University of British Columbia, 2024), the ~3-second difference between these cohorts is both statistically and clinically significant.

Lower Body Strength (Sit-to-Stand Test): This metric revealed the most dramatic disparity. The AT cohort performed a median of approximately 11 repetitions in the 30-second Sit-to-Stand test (30s-CST). In stark contrast, the SK cohort performed a mean of only 6.8 repetitions in this test.

3 DISCUSSION: A FUNCTIONAL PARADOX AND ITS POLICY IMPLICATIONS

The data presents a compelling paradox. The Slovak cohort, despite possessing a vastly superior educational profile - a key socioeconomic determinant consistently linked to better health outcomes and positive health behaviors - enters surgery with a profoundly inferior functional capacity in their lower extremities compared to the Austrian cohort. This functional gap exists even though both groups report an identical subjective disease burden (pain, mobility, and overall quality of life).

To quantify this functional deficit, the results must be set against normative data. For moderately active, community-dwelling adults in the 65-69 age range (aligning with the cohorts' mean age), the expected performance on the 30s-CST is between 11-16 stands for women and 12-18 for men (Shirley Ryan Ability Lab, 2013). The Austrian cohort's median of 11 repetitions places them at the absolute lowest threshold of this "moderately active" range. The Slovak cohort's mean of 6.8 repetitions, however, falls drastically below this benchmark, placing them in a category indicative of significant deconditioning or pre-frailty.

This analysis, being descriptive, cannot definitively establish causation for this disparity. However, it raises critical hypotheses that have direct implications for policy:

Systemic Differences in Pre-Surgical Care: Does the Austrian healthcare system provide more effective or earlier access to physiotherapy and prehabilitation programs for osteoarthritis patients? Conversely, do Slovak patients experience longer wait times for surgery, leading to a more prolonged period of inactivity and deconditioning?

Health Literacy vs. Health Behavior: The highly educated SK cohort may possess strong health literacy (understanding their condition) but may face barriers - be it systemic, financial, or cultural - to translating that knowledge into effective health behavior (e.g., adherence to a pre-operative exercise regimen).

These questions are central to migration-sensitive health policy in the region. The Austro-Slovak border is porous, with high levels of labor mobility. A Slovak citizen working in Austria has the right to access the Austrian healthcare system. If that patient, reflecting the baseline of their home country cohort, enters an Austrian hospital for a TEP with a functional capacity of 6.8 Sit-to-Stands, they present a significantly higher clinical risk. Poorer pre-operative strength is a known predictor of worse outcomes, longer hospital stays, slower rehabilitation, and a higher risk of post-operative complications.

This creates a tangible and unequal burden on the health system providing the care. The Austrian system, in this scenario, may absorb the costs and complexity of rehabilitating a patient from a much lower functional baseline. Current cross-border health policies, which focus primarily on ensuring access to care (e.g., the EHIC card and reimbursement), fail to address this underlying disparity in baseline health.

4 CONCLUSION AND LIMITATIONS

This comparative analysis of Austrian and Slovak pre-TEP patients reveals two cohorts that are demographically similar and report identical subjective health burdens. However, the data uncovers a significant functional paradox: the highly educated Slovak cohort demonstrates a severe pre-operative functional deficit, particularly in lower-body strength (6.8 repetitions), when compared to their Austrian counterparts (11 repetitions).

This finding has direct implications for the integrated Austro-Slovak region. It suggests that cross-border health policies must evolve beyond simple access-to-care protocols. To ensure equitable outcomes and a fair distribution of healthcare burdens, policies must become "migration-sensitive" by actively addressing and mitigating these underlying, systemic differences in pre-operative conditioning. Targeted, cross-border prehabilitation programs may be the most effective intervention to close this functional gap.

The findings of this analysis are based on small, randomized cohort samples (N=64 and N=63) and are descriptive in nature; they cannot prove causation. Furthermore, while the "30s Sit-to-Stand Test" and "Chair Rising Test" are functionally similar, minor protocol differences could exist. However, the magnitude of the difference (63% better performance in the AT group) is so large that it is unlikely to be a methodological artifact alone. The research continues and the sample size is targeted to reach 300, the descriptive comparisons will be more reliable, as they will be based on more robust samples. Moreover, the research will use econometric models to reveal the effects of pre-rehabilitation in both regions (Mitkova, 2025).

Literature

1. CHENG, L.J., CHEN, L.A., CHENG, J.Y., HERDMAN, M., LUO, N., 2024. Systematic review reveals that EQ-5D minimally important differences vary with treatment type and may decrease with increasing baseline score. *Journal of Clinical Epidemiology*, 174 (111487). DOI: 10.1016/j.jclinepi.2024.111487.
2. JANSSEN, M.F., PICKARD, A.S., GOLICKI, D., GUDEX, C., NIEWADA, M., SCALONE, L., SWINBURN, P., BUSSCHBACH, J., 2013. Measurement properties of the EQ-5D-5L compared to the EQ-5D-3L across eight patient groups: a multi-country study. In: *Quality of Life Research*, 22. DOI: 10.1007/s11136-012-0322-4
3. LÖFFLER, S. 2025. Result slides presented at Cross-Prehab meeting, november 2025 in Bratislava.
4. LONG, G., CHAO, C., MING-SHENG, T., PING, Y., 2021. Low Grip Strength Associated with Clinical Outcomes after Total Hip Arthroplasty - A Prospective Case-Control Study. In: *Orthopaedic Surgery* 13(5). DOI: 10.1111/os.13007.
5. MEESEN, J., FIOCCO, M., TORDOIR, R.L., SJER, A. 2020. Association of handgrip strength with patient-reported outcome measures after total hip and knee arthroplasty. In: *Rheumatology International* 40(4), DOI:10.1007/s00296-020-04532-5.
6. MITKOVA, V. 2025. Ekonometrické prístupy modelovania liečebných efektov pred-rehabilitácie. In: *Zborník zo seminára Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a praxi XVI. Nová Lehota.*

7. SHIRLEY RYAN ABILITYLAB, 2013. 30 Second Sit to Stand Test. <https://www.sralab.org/rehabilitation-measures/30-second-sit-stand-test> (cit. 7/11/2025)
8. UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA (UBC) PHYSICAL THERAPY. 2024. Timed Up and Go Test (TUG). <https://med-fom-clone-pt.sites.olt.ubc.ca/files/2024/01/Timed-Up-and-Go-Test-TUG-.pdf> (cit. 1/11/2025)
9. VAN LEEUWEN, D.M., DE RUITER, C.J., NOLTE, P.A., DE HAAN, A., 2014. Preoperative strength training for elderly patients awaiting total knee arthroplasty. In: Rehabilitation Research and Practice. 462750. DOI: 10.1155/2014/462750.

Contact

Ing. Veronika Mit'ková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

Tel: (421 2) 2066 9863

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

MUDr. Matej Majerčík

I. Ortopedicko-traumatologická klinika LFUK, UNB a SZU, Nemocnica Ružinov

Ružinovská 6, 826 06 Bratislava

Tel (421 2) 48234 613

Acknowledgment

This research is an output of the science project APVV-22-0526 entitled "The Economic and Fiscal Effects of Migration in Slovakia: An Integrated Modeling Approach" and the INTERREG project "Socio-economic Effects of Pre-Rehabilitation in Knee and Hip Transplantation in Cross-border Cooperation."

FINANČNÁ INTERPRETÁCIA KONTRIBÚCIE RIZIKA MIGRAČNÝCH POLITÍK¹

FINANCIAL INTERPRETATION OF MIGRATION POLICIES RISK CONTRIBUTION

Vladimír Mlynarovič

Abstrakt

Koncepcia kontribúcie rizika a percentuálna kontribúcia rizika je široko využívanou ako v manažmente rizika, v praxi rizikových rozpočtov, v oblasti alokácie aktív tak aj v aktívnom manažmente migračných politík. Avšak napriek jednoznačnej prítomnosti takýchto javov, stále zostávajú otázky týkajúce sa ich platnosti vzhľadom na presvedčenie, že rizika sú neaditívne a na nedostatok finančnej intuície týkajúcej sa matematických definícií týchto konceptov. Primárnou príčinou takýchto pretrvávajúcich pochybností môže byť skutočnosť, že finančný priemysel ešte stále úplne neuchopil finančné interpretácie, ktoré sú za východiskovými matematickými definíciami. Tieto otázky sú dôležité pre všetkých investičných profesionálov, ktorí musia uvažovať s rizikom, ako jedným z rozmerov investičného rozhodovacieho procesu. V tomto príspevku sa pokúšame odpovedať na tieto otázky prostredníctvom intuitívnej finančnej interpretácie pre kontribúciu rizika. Prezентujeme analytické výsledky, empirické príklady vzhľadom k súčasnému akademickému výskumu v tejto oblasti.

Kľúčové slová: kontribúcia rizika, očakávaný výnos, strata, beta koncept, hodnota v riziku

Abstract

The concept of risk contribution and percentage risk contribution is widely used in risk management, risk budgeting, asset allocation and active migration policy management. However, despite the clear presence of such phenomena, questions remain regarding their validity due to the belief that risks are non-additive and the lack of financial intuition regarding the mathematical definitions of these concepts. The primary reason for such persistent doubts may be that the financial industry has not yet fully grasped the financial interpretations behind the underlying mathematical definitions. These questions are important for all investment professionals who must consider risk as one of the dimensions of the investment decision-making process. In this paper, we attempt to answer these questions by providing an intuitive financial interpretation for risk contribution. We present analytical results, empirical examples in relation to current academic research in this area.

Keywords: risk contribution, return expectations, loss, beta concept, value at risk

¹ This project was supported by APVV-22-0526 The Economic and Fiscal Effects of Migration in Slovakia: An Integrated Modelling Approach.

1 ÚVOD

Koncepcia príspevku rizika a percentuálna príspevok rizika je široko využívanou ako v manažmente rizika, v praxi rizikových rozpočtov, v oblasti alokácie aktív tak aj v aktívnom manažmente migračných politík (Litterman 1996; Lee and Lam, 2001). Avšak napriek jednoznačnej prítomnosti takýchto javov, stále zostávajú otázky týkajúce sa ich platnosti vzhľadom na jednoduché presvedčenie, že rizika sú neaditívne a na nedostatok finančnej intuície týkajúcej sa matematických definícií týchto konceptov. Napríklad, Sharpe (2003) správne argumentuje, že čistá matematická dekompozícia rizika nemusí nutne kvalifikovať aj príspevok rizika. Tento argument je zmysluplný, pretože príspevok rizika je často definovaná s nízkym ekonomickou oprávnenosťou, prostredníctvom výpočtu obsahujúceho hraničný príspevok rizika – parciálnej derivácia rizika podľa váh jednotlivých aktív. Sharpe (2003) ďalej navrhuje celkovo odmietnuť koncepciu príspevku rizika na základe faktu, že riziko v terminológii buď štandardnej odchýlky, alebo VaR, nie je aditívne. Primárnou príčinou takýchto pretrvávajúcich pochybností môže byť skutočnosť, že finančný priemysel ako celok ešte stále úplne nechopil finančné interpretácie, ktoré sú za východiskovými matematickými definíciami. Má teda príspevok rizika nezávislú, intuitívnu finančnú interpretáciu? Spočítavajú sa rizikové rozpočty do hodnoty 100%? Tieto otázky sú dôležité pre všetkých investičných profesionálov, ktorí musia uvažovať s rizikom, ako jedným z rozmerov investičného rozhodovacieho procesu. V tomto príspevku sa pokúšame odpovedať na tieto otázky prostredníctvom intuitívnej finančnej interpretácie pre príspevok rizika. Prezentujeme analytické výsledky, empirické príklady vzhľadom k najnovšiemu akademickému výskumu v predmetnej oblasti.

2 KONTRIBÚCIA STRATY A STRATOVÉ ROZPOČTY

V prezentovanom metodologickom prístupe sa využíva koncepcia interpretácie príspevku straty a percentuálnej príspevku straty. Jedna zo všeobecne naliehavých otázok, ktorej čelia manažéri je: v prípade rozsiahlej straty portfólia migračných politík, aké sú pravdepodobné príspevky k strate od jednotlivých zložiek portfólia? Odpoveď sa ukazuje ako silne konzistentná s bežne definovanou príspevkou rizika. Odpoveď poskytujú podmienené očakávania výnosov uvažovaných aktív pre daný celkový výnos portfólia rovný strate. Najskôr predpokladáme, že výnosy všetkých aktív majú normálne rozdelenie a použijeme štandardnú odchýlku ako mieru rizika. Potom použijeme všeobecnejšiu mieru rizika VaR s relaxáciou predpokladu o normálnom rozdelení.

2.1 Podmienené očakávanie pri normálnom rozdelení

Kvôli jednoduchosti uvažujeme existujúce portfólio pozostávajúce z dvoch aktív, s ich váhami w_1 a w_2 . Taktiež predpokladáme volatility výnosov σ_1 , σ_2 a koreláciu ρ . Pre štandardnú odchýlku výnosov portfólia potom platí

$$\sigma = [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Pre hraničné príspevky jednotlivých aktív k riziku platí

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_1} = \frac{w_1 \sigma_1^2 + \rho w_2 \sigma_1 \sigma_2}{[w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_2} = \frac{w_2 \sigma_2^2 + \rho w_1 \sigma_1 \sigma_2}{[w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2]^{\frac{1}{2}}}$$

Percentuálne príspevky rizika sú potom opísané súčinom váhy aktíva a jeho hraničného príspevku k riziku vydeleným štandardnou odchýlkou, t.j.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{w_1 \frac{\partial \sigma}{\partial w_1}}{\sigma} = \frac{w_1^2 \sigma_1^2 + \rho w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} \\ p_2 &= \frac{w_2 \frac{\partial \sigma}{\partial w_2}}{\sigma} = \frac{w_2^2 \sigma_2^2 + \rho w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Poznamenajme, že súčet percentuálnych príspevkov k riziku je rovný 1, t.j. $p_1 + p_2 = 1$ a percentuálny príspevok je rovný nule, ak je váha rovná nule, t.j. $p_i = 0$, ak $w_i = 0$. V skutočnosti však uvedené vzťahy umožňujú alternatívnu interpretáciu percentuálneho príspevku p_i – je to podiel kovariancie medzi výnosom komponentu aktíva i a výnosom portfólia a celkovým rozptylom výnosov portfólia. Preto je to *beta* výnosu komponentu oproti výnosu portfólia a súčet takýchto faktorov *beta* je prirodzene rovný jednej. Takáto *beta* interpretácia je pôsobivejšia, pretože nie je nutne spojená s hraničným príspevkom. Napriek tomu však stále samotná neposkytuje explicitne nejaké ekonomické zdôvodnenie.

Aby sme spojili túto *beta* interpretáciu s nejakou ekonomickou interpretáciou budeme uvažovať s pojmom príspevku straty. Predpokladajme, že portfólio zaznamenalo stratu v rozsahu L . Termínom strata opisujeme záporný, resp. *down side* výnos, t.j. $L < 0$. Aké sú očakávané percentuálne príspevky jednotlivých aktív k tejto strate? V štatistickej terminológii máme

$$c_i = \frac{E[w_i r_i | w_1 r_1 + w_2 r_2 = L]}{L}, i = 1, 2$$

teda očakávané príspevky dvoch aktív vydelené stratou L . Podľa teórie podmienených príspevkov (kde podmienené očakávanie normálnej premennej je rovné nepodmienennej strednej hodnote plus jej *beta* k danej premennej), v tomto prípade celkový výnos portfólia vynásobený rozdielom medzi danou premennou a jej nepodmienenou strednou hodnotou) máme

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{w_1 \mu_1}{L} + p_1 \left(1 - \frac{w_1 \mu_1}{L} - \frac{w_2 \mu_2}{L} \right) = p_1 + \frac{p_2 w_1 \mu_1 - p_1 w_2 \mu_2}{L} \equiv p_1 + \frac{D_1}{L} \\ c_2 &= \frac{w_2 \mu_2}{L} + p_2 \left(1 - \frac{w_1 \mu_1}{L} - \frac{w_2 \mu_2}{L} \right) = p_2 + \frac{p_1 w_2 \mu_2 - p_2 w_1 \mu_1}{L} \equiv p_2 + \frac{D_2}{L} \end{aligned} \quad (3)$$

Predpokladáme, že nepodmienené očakávané výnosy dvoch aktív sú μ_1 a μ_2 a p_1 a p_2 sú percentuálne príspevky k riziku, alebo *beta* faktory, tak ako to bolo definované vyššie. Vidno, že súčet percentuálnych príspevkov k strate je tiež rovný 1, t.j. $c_1 + c_2 = p_1 + p_2 = 1$, pretože $D_1 = -D_2$. Definovali sme teda zložky pretože D_1 a D_2 , ktoré budeme ďalej detailne skúmať. Vidno však, že očakávané percentuálne príspevky k strate generujú vzťah, ktorý je blízky

k vzťahu percentuálnych príspevkov k riziku. V skutočnosti existujú tri situácie, z ktorých dve sa ukážu ako identické.

2.2 Špeciálne prípady

Najskôr budeme uvažovať, že nepodmienené očakávané výnosy μ_1 a μ_2 sú rovné nule. V tomto prípade sú príspevky k strate a príspevky k riziku rovnaké, t. j.

$$c_1 = p_1, c_2 = p_2$$

pre ľubovoľnú stratu L . Tento prípad platí pre krátke investičné horizonty, kde sa predpokladá, že očakávané výnosy sú rovné nule. V praxi je veľa analýz manažmentu rizika zameraných na krátke horizonty, také ako jeden deň alebo jeden týždeň.

Druhý prípad nastáva, ak jedno z aktív má nulovú váhu, a preto je jeho príspevok k riziku rovný nule. Ide o triviálny prípad, v ktorom na zostávajúce aktívum pripadá sto percent rizika a rovnako aj sto percent straty. Avšak takáto príspevková strata aproximácie platí aj ak je váha aktíva malá a strata L je relatívne vysoká v porovnaní so sub – optimálnosťou portfólia.

Tretí a zaujímavejší prípad vzniká, ak

$$D_1 = p_2 w_1 \mu_1 - p_1 w_2 \mu_2 = 0$$

alebo, ekvivalentne

$$\frac{w_1 \mu_1}{p_1} = \frac{w_2 \mu_2}{p_2} \quad (4)$$

Táto rovnica je podmienkou prvého rádu hraničnej užitočnosti pre optimálne portfólio v priestore stredná hodnota – rozptyl. Implikuje preto, že pre optimálne portfólia je percentuálna príspevková k riziku ekvivalentná s očakávanou percentuálnou príspevkovou k celkovému očakávanému výnosu portfólia. Inými slovami, rizikové rozpočty sa stávajú rozpočtami očakávaného výnosu. Táto ekvivalencia však platí len pre portfólia optimálne v priestore stredná hodnota – rozptyl. Pre portfólia reálneho sveta, ktoré nemusia byť optimálne v takomto zmysle, ale uvedená interpretácia percentuálneho príspevku k riziku stála dovoľuje manažérom odhadnúť pravdepodobný príspevok k danej strate.

Dodatočný prínos vzťahov (3) spočíva v tom, že umožňujú odhadnúť efekt sub – optimálnosti portfólia meranej prostredníctvom hodnôt D_i na percentuálny príspevok k strate. Ak je napríklad alokácia do aktíva 1 vyššia v porovnaní s optimálnou váhou v priestore stredná hodnota – rozptyl, potom

$$D_1 = p_2 w_1 \mu_1 - p_1 w_2 \mu_2 < 0$$

Je tomu tak preto, lebo ak váha w_1 vzrastie z jej optimálnej hodnoty, potom zvýšenie rizikového príspevku tohto aktíva dominuje zvýšeniu jeho príspevku k očakávanému výnosu. Preto to pre danú stratu L , ktorí nesie záporné znamienko, bude percentuálny príspevok c_1 k strate vyšší ako percentuálny príspevok p_1 k riziku, keďže hodnota D_1/L je kladná.

Taktiež poznamenajme, že ak strata L vysoko prevyšuje sub – optimálne miery, potom sú príspevky k strate aproximačne rovné príspevkom k riziku, t. j.

$$c_1 \cong p_1, \quad c_2 \cong p_2$$

Toto zistenie je zvlášť relevantné pre obdobia finančných kríz, kedy by straty portfólia mohli byť signifikantne vyššie v porovnaní s očakávanými výnosmi. To teda znamená, že príspevok strate bude v krízových obdobiach vyjadrený prostredníctvom príspevku k riziku. Naopak, v „kludných“ obdobiach, kedy sú straty portfólia relatívne nízke, medzi príspevkom k strate, alebo ex post príspevkom k výnosu, neexistuje žiadny vzájomný vzťah s príspevkom k riziku. Preto by ale tieto situácie s malými stratami nemali byť používané na spochybňovanie užitočnosti koncepcie príspevku k riziku.

Celkovo, percentuálny príspevok k riziku možno interpretovať ako percentuálny príspevok k danej strate celkového portfólia. Tieto dve miery sú identické v prípade nulových očakávaných výnosov, alebo ak je portfólia optimálne v priestore stredná hodnota - rozptyl. V ostatných prípadoch je táto interpretácia vhodná vtedy, ak je daná strata vysoká v porovnaní s mierami sub – optimálnosti D_i .

3 PERCENTUÁLNY PRÍSPEVOK K VAR

V tejto časti rozšírime rovnakú finančnú interpretáciu na príspevky k riziku meraného prostredníctvom hodnoty v riziku, t. j. VaR. Táto miera rizika, vyjadrujúca stratu s danou kumulatívnou pravdepodobnosťou, je všeobecnou mierou rizika, ktorú možno použiť pre portfólia s akýmkoľvek rozdeleniami pravdepodobnosti výnosov. Pre portfólia s normálnym rozdelením pravdepodobnosti je Var jednoducho rovná očakávaný výnos plus konštantný násobok štandardnej odchýlky. Pri rozdeleniach pravdepodobnosti, ktoré nie sú normálne, je $(1-\alpha)\%$ VaR definovaná rovnicou

$$Prob(r \leq VaR) = \int_{-\infty}^{VaR} p(r)dr = \alpha \quad (5)$$

kde $p(r)$ hustota pravdepodobnosti rozdelenia výnosov a α je kumulatívna pravdepodobnosť straty s typickými hodnotami 5% alebo 1%.

3.1 Príspevok k strate

V súvislosti s touto mierou rizika sú zaujímavé dve otázky. Najskôr nás bude zaujímať, či možno definovať percentuálny príspevok k riziku v rámci koncepcie VaR. Ak áno, potom nás bude zaujímať, či možno rozšíriť analogické finančné interpretácie aj pre percentuálne príspevky k VaR. Odpoveď na obidve otázky je áno. Keďže VaR je lineárna homogénna funkcia váh (Litterman, 1996), z matematického hľadiska platí

$$VaR = \sum_{i=1}^N w_i \frac{\partial VaR}{\partial w_i} \quad (6)$$

To ale znamená, že príspevky k VaR možno definovať a súčin váh a hraničných príspevkov k VaR. Ak rovnicu (6) vydelíme hodnotou VaR, dostaneme percentuálne príspevky k VaR, alebo faktory VaR – beta. Pokiaľ ide o druhú otázku, Hallerbach (2002) poskytol dôkaz toho, že príspevky k VaR opísané vzťahom (6) sú presne rovné očakávaným príspevkom k strate,

ktorej veľkosť je rovná VaR. To teda znamená, príspevok k VaR možno interpretovať ako príspevok k strate.

Hoci príspevky k riziku ako v prípade štandardnej odchýlky tak aj VaR majú rovnakú ekonomickú interpretáciu, existuje niekoľko jemných rozdielov. Po prvé, v prípade štandardnej odchýlky pri predpoklade o normálnom rozdelení, sú percentuálne príspevky k riziku nezávislé od strát. Pri určitých okolnostiach bolo ukázané, že aproximujú príspevky k strate s dostatočnou presnosťou bez ohľadu na veľkosť straty. Interpretácia príspevku k VaR je však na rozdiel reštriktívna – vzťahuje sa len na stratu, ktorá je práve rovná špecifickej VaR. Príspevky k VaR sa teda menia so zmenou VaR, sú teda odlišné pre 1% a 5% VaR. To znamená, že pre straty rôznych rozmerov sa príspevky k VaR musia prepočítavať. Druhý rozdiel spočíva vo výpočtovej zložitosti. Zatiaľ čo príspevok k riziku založený na štandardnej odchýlke je ľahko vypočítateľný, vypočítať príspevok k VaR nie je ľahká úloha, pretože len zriedka sú k dispozícii analytické vyjadrenia pre VaR ako funkcie váh aktív. Ak aj je k dispozícii nejaké analytické vyjadrenie, samotný výpočet parciálnych derivácií podľa váh môže predstavovať analytickú výzvu. Našťastie existujú analytické aproximácie VaR založené na momentoch rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré zas možno použiť aj na odhad príspevku k VaR.

3.2 Analytická aproximácia VaR dekompozície

Jedna z takýchto aproximácií VaR je založená na Cornish – Fisherovom rozvoji (Mina - Ulmer, 1999). Zachováva formu súčtu strednej hodnoty a z – score vynásobeného štandardnou odchýlkou v tvare

$$VaR = \mu + \tilde{z}_\alpha \sigma \quad (7)$$

kde z - score $\tilde{z}_\alpha$ obsahuje štandardný z_α kvantil a korekčné položky vyšších centrálnych momentov

$$\tilde{z}_\alpha \approx z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha^2 - 1)s + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)k - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)s^2 \quad (8)$$

Rovnica (8) poskytuje aproximáciu α percentilu rozdelenia so strednou hodnotou μ , štandardnou odchýlkou σ , šikmosťou s dodatočnou špicatosťou k . Po substitúcii do (7) opisuje $(1-\alpha)\%$ VaR. VaR opísaná rovnicami (7) a (8) je algebraickou funkciou váh aktív – stredná hodnota je lineárnou funkciou váh, štandardná odchýlka je druhá odmocnina kvadratickej funkcie váh, šikmosť a špicatosť sú polynomiálnymi rovnicami tretieho a štvrtého stupňa premenných váh. Pre dané portfólio viacerých aktív máme odhad kovariancií a momentov vyššieho rádu, napríklad na základe historických údajov. Potom možno odvodiť analytické parciálne derivácie ako funkcie váh a príspevkov k VaR.

4 ZÁVER

Teoretické dedukcie ukazujú, že dekompozícia rizika má zmysluplnú finančnú interpretáciu prostredníctvom terminológie príspevku straty portfólia. Ak sa predpokladá, že uvažovaný výnos bude normálny, potom možno ľahko získať príspevok k volatilitate portfólia a aproximácie stanoviť príspevok k strate. Príspevok k riziku v terminológii VaR je zase presne interpretovateľný v zmysle príspevku k strate a interpretácia je univerzálne aplikovateľná.

Použitá literatúra

1. W. G. HALLERBACH, and J. SPRONK, 2002. A Multidimensional Framework for Financial-Economic Decisions. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 11, pp. 111-124, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=485664>
2. LEE, W., and D. Y. LAM, 2001. Implementing Optimal Risk Budgeting. *The Journal of Portfolio Management*, 28, 73-80.
3. LITTERMAN, R., 1996. Hot Spots™ and Hedges. *The Journal of Portfolio Management*, 23 (5) 52 - 75. DOI: 10.3905/jpm.1996.052.
4. MINA, J. and A. ULMER, 1999. Delta-gamma four ways. Technical Report, Risk Metrics Group, LLC.
5. QIAN, E., 2006. On the Financial Interpretation of Risk Contribution: Risk Budget Do Add Up. *Journal of Investment Management*, Vol. 4, No. 4, pp. 41 -51.
6. SHARPE, W.F., 2002. Budgeting and monitoring pension fund risk. *Financial Analysts Journal* 58 (5), 74-86.
7. ZOU, X., 2013. Financial Interpretation of Risk Decomposition. In: 2nd International Conference on Science and Social Research, ICSSR, pp.417 – 420.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4 1/b, 821 05 Bratislava

Tel: +421 2 20 66 98 60

vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

VLIV ZPŮSOBU DYNAMICKÉHO INVESTOVÁNÍ PŘI MODELU OPTIMALIZACE PORTFOLIA S PODMÍNKAMI DRUHÉHO ŘÁDU STOCHASTICKÉ DOMINANCE

THE IMPACT OF DYNAMIC INVESTMENT STRATEGY WITHIN A PORTFOLIO OPTIMIZATION MODEL WITH SECOND-ORDER STOCHASTIC DOMINANCE CONSTRAINTS

Ing. Jakub Neugebauer

Abstrakt

Tato studie se zabývá analýzou dopadu periodického investování a rebalancování portfolia na jeho výkonnost v rámci modelu optimalizace založeného na stochastické dominanci druhého řádu (SSD). Na základě historických dat komponent indexu S&P 500 za období 2008–2025 jsou porovnávány tři přístupy: proporcionální investování dle původních vah portfolia, rebalancování portfolia podle rozpočtu a pravidelná investice do indexu S&P 500 jako referenční strategie. Výsledky simulace ukazují, že dynamické strategie dosahují v průměru vyššího zhodnocení než pasivní investice do indexu, avšak za cenu mírně zvýšené volatility. Rozdíl mezi proporcionálním a rebalancovaným přístupem je přitom zanedbatelný. Zjištění naznačují, že periodické investování do SSD-optimalizovaných portfolií může představovat efektivní strategii pro rizikově averzní investory v dlouhodobém horizontu.

Klíčová slova: optimalizace portfolia, stochastická dominance, simulace

Abstract

This study examines the impact of periodic investing and portfolio rebalancing on performance within a model based on second-order stochastic dominance (SSD). Using historical data of the S&P 500 index components over the period 2008–2025, three investment approaches are compared: proportional investing according to the initial portfolio weights, rebalancing based on budget proportions, and regular investment in the S&P 500 index as a benchmark strategy. Simulation results show that dynamic strategies achieve higher average returns than passive index investing, albeit at the cost of slightly increased volatility. The difference between the proportional and rebalanced approaches is negligible. The findings suggest that periodic investing in SSD-optimized portfolios can serve as an effective strategy for risk-averse investors over the long term.

Keywords: portfolio optimization, stochastic dominance, simulation

1 ÚVOD

Stochastická dominance představuje silný rámec pro rozhodování v podmínkách nejistoty, neboť umožňuje porovnávat celé distribuční funkce výnosů místo spoléhání se pouze na souhrnné statistiky, jako je střední hodnota nebo rozptyl. Poprvé byla představena v ekonomii v práci Hadara a Russella (1) a od té doby byla široce přijata ve financích jako nástroj pro modelování preferencí odpovídajících rizikově averznímu chování investorů. Na rozdíl od tradičních měř rizika, jako je rozptyl nebo Value-at-Risk (VaR), stochastická dominance zachycuje úplnější distribuci výnosů. Zejména podmínka stochastické dominance druhého řádu (SSD) zaručuje, že dané portfolio je preferováno všemi investory, kteří odmítají riziko.

Zatímco většina studií se zaměřuje na statické modely portfoliové optimalizace podmíněné SSD, tato práce analyzuje vliv periodického investování do portfolio vytvořené modelem s druhým řádem stochastické dominance. Cílem je zhodnotit, jak dva zkoumané přístupy ovlivňují výkonnost portfolio. Prvním přístupem je stabilní investování daných proporcí do portfolio a druhým přístupem je rebalancování vah v portfolio pro udržování původních vah aktiv v portfolio.

Struktura článku je následující. Kapitola 2 formuluje teoretický rámec SSD a jeho vyjádření jako optimalizačního problému. Sekce 3 popisuje investiční strategie a zvolené přístupy rebalancování portfolio spolu se simulací výnosů mimo testovací období. Závěrečná kapitola shrnuje hlavní zjištění.

2 MODEL OPTIMALIZACE PORTFOLIA S PODMÍNKAMI STOCHASTICKÉ DOMINANCE DRUHÉHO ŘÁDU

Nechť X a Y jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_X(x)$ a $F_Y(x)$. Definujme $D_X^1(x) = F_X(x)$ a pro $s \geq 2$:

$$D_X^s(x) = \int_{-\infty}^x D_X^{s-1}(t) dt.$$

Potom X dominuje Y ve slabém stochastickém smyslu řádu s , jestliže $D_X^s(x) \leq D_Y^s(x)$ pro všechna x .

V optimalizaci portfolio, jejíž teoretické základy položil Markowitz (2), lze stochastickou domínanci druhého řádu (SSD) implementovat pomocí lineárního programovacího modelu známého jako LPSSD, který původně navrhli Dentcheva a Ruszczyński (3). Nechť n je počet aktiv v portfolio a T počet historických pozorování. Při daných empirických výnosech r_{it} a referenčních hodnotách b_t má LPSSD problém tvar:

$$\max \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_{it} w_i p_t$$

za podmínek:

$$d_{tk} \geq b_k - \sum_{i=1}^n r_{it} w_i, \quad t, k = 1, \dots, T, \quad (1)$$

$$\sum_{t=1}^T d_{tk} p_t \leq v_k, \quad k = 1, \dots, T, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (3)$$

$$d_{tk}, w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t, k = 1, \dots, T, \quad (4)$$

kde $v_k = E((b_k - B)^+)$ je očekávaná ztráta (shortfall) referenčního portfolia B . Za předpokladu rovnoměrných pravděpodobností $p_t = 1/T$ lze omezení LPSSD přepsat pomocí Kolmogorov–Smirnovovy statistiky (4) jako:

$$KS_j = \sum_{t=1}^T \frac{1}{(s-1)!} \left[\max \left\{ 0, b_j - \sum_{i=1}^n r_{it} w_i \right\} - \max \{ 0, b_j - b_t \} \right] \leq 0, \quad \forall j. \quad (5)$$

Tato nelineární reformulace umožňuje vektorovou implementaci vhodnou pro optimalizační metody založené na populaci, jako jsou genetické algoritmy.

Pro zajištění praktických investičních pravidel zavádíme následující omezení:

$$w_i \geq w_{\min} z_i, \quad \forall i, \quad (6)$$

$$w_i \leq w_{\max} z_i, \quad \forall i, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i \leq k, \quad (8)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i, \quad (9)$$

kde $w_{\min}$ a $w_{\max}$ určují dolní a horní hranice vah jednotlivých aktiv a k omezuje kardinalitu portfolia. Tyto podmínky společně zajišťují, že $z_i = 1$ právě tehdy, když $w_i > 0$. Pro tuto práci jsou nastaveny hodnoty $w_{\min} = 0.05$, $w_{\max} = 0.2$ a $k = 20$ pro zohlednění racionálních požadavků investora na strukturu portfolia.

3 INVESTIČNÍ STRATEGIE

V této části jsou popsány tři zkoumané investiční strategie a následně struktura provedené simulace. Cílem je analyzovat jejich dopad na výkonnost portfolia podmíněného stochastickou dominancí druhého řádu (SSD).

3.1 Investiční strategie

Pro srovnání byly zvoleny tři přístupy pravidelného investování:

1. **Portfolio (proporcionální)** — strategie, která při každé nové investici zachovává původní poměr rozložení aktiv v portfoliu, stanovený při jeho optimalizaci. Každý příspěvek je tedy rozdělen mezi aktiva podle počátečních vah.
2. **Portfolio (rebalancované podle rozpočtu)** — strategie, která po každé investici upravuje váhy aktiv tak, aby se co nejvíce přiblížily původním optimálním proporcím portfolia. Cílem je omezit drift vah způsobený nerovnoměrným vývojem cen jednotlivých aktiv.
3. **Index S&P 500** — referenční strategie pravidelného investování do indexu S&P 500, sloužící jako benchmark pro hodnocení výkonnosti modelovaných portfolií.

3.2 Struktura simulace

Ve všech scénářích je pravidelně investována jednotková hodnota 1 v pětidenním intervalu, což přibližně odpovídá týdenní investiční frekvenci. Historická data byla získána z databáze Yahoo Finance a zahrnují jednotlivé komponenty indexu S&P 500 spolu s hodnotami samotného indexu jakožto benchmarku. Časové období pokrývá roky 2008 až září 2025, což umožňuje zachytit různé tržní fáze včetně finanční krize, období expanze i následné volatility.

Pro optimalizaci portfolia je použito historické období délky 1000 obchodních dní (přibližně čtyři roky), na němž jsou odhadovány parametry modelu a určovány optimální váhy aktiv. Výkonnost jednotlivých strategií je následně hodnocena v období *out-of-sample* o délce 750 dní, během něhož probíhá simulace postupného investování dle výše popsaných pravidel. Všechny výpočty jsou v této práci provedeny pomocí Genetického Algoritmu, jelikož je velikost modelu kvůli velkému počtu historických pozorování pro exaktní řešitele příliš velká.

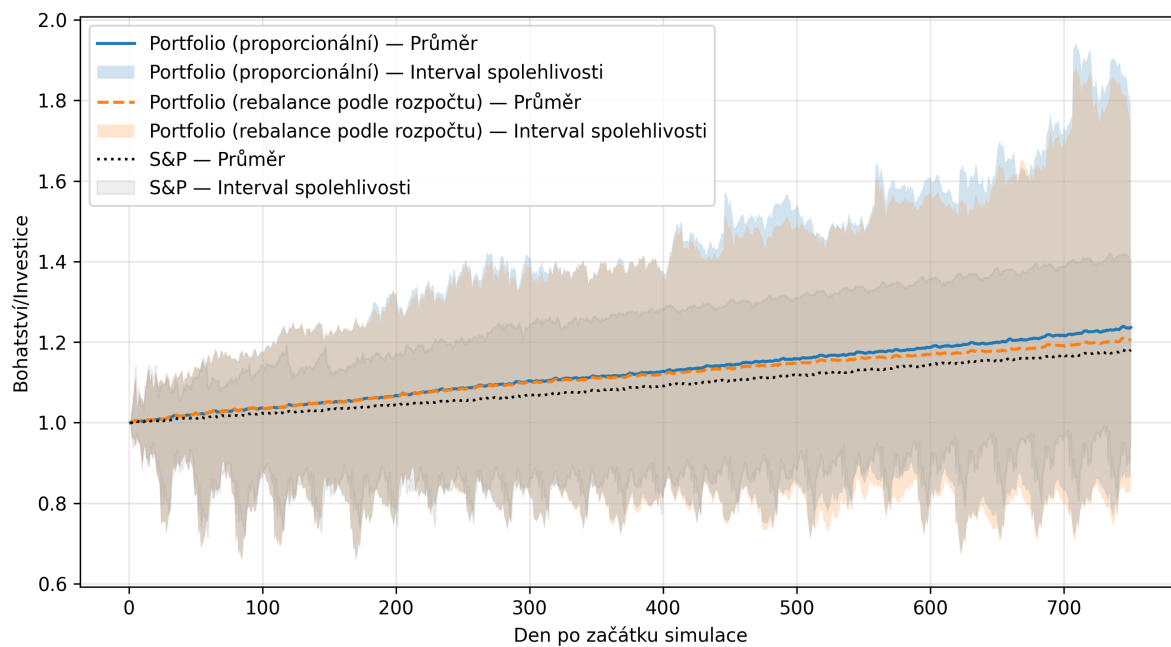
3.3 Výsledky

Obrázek 1 znázorňuje průběh vývoje bohatství vztaženého k celkově investované částce během simulace pro tři sledované strategie. Mezi dynamickými způsoby investování, tj. proporcionálním portfoliem a rebalancovaným portfoliem podle rozpočtu, není patrný významný rozdíl. Obě strategie vykazují velmi podobný průběh i rozptyl dosažených výsledků. Oproti tomu referenční strategie pravidelné investice do indexu S&P 500 dosahuje nižšího průměrného výnosu, avšak s mírně nižší volatilitou, což odpovídá konzervativnějšímu charakteru pasivního přístupu.

Tabulka 1 pak shrnuje konečné hodnoty poměru bohatství k celkově investovanému objemu. Výsledky potvrzují, že oba dynamické přístupy dosahují v průměru vyššího zhodnocení než pasivní investice do indexu, avšak za cenu mírně zvýšeného rizika, vyjádřeného větším rozptylem výsledků.

4 ZÁVĚR

Výsledky simulace ukazují, že dynamické přístupy k investování, založené na pravidelném rozložení prostředků mezi optimalizovaná aktiva, dosahují v průměru vyššího zhodnocení než pasivní investice do indexu S&P 500. Rozdíl mezi proporcionálním a rebalancovaným portfoliem



Obrázek 1: Vývoj výnosu portfolií mimo testovací období

Tabulka 1: Konečná bohatství ku investovanému množství v %

	Minimum	Průměr	Maximum
Portfolio (proporcionální)	86,2	123,6	179,4
Portfolio (rebalance podle rozpočtu)	82,2	120,8	174,3
S&P (DCA)	96,5	118,1	140,3

je zanedbatelný, což naznačuje, že časté vyrovnávání vah nepřináší významnou přidanou hodnotu. Vyšší výnosy jsou však dosaženy za cenu mírně zvýšené volatility, což odpovídá obecné charakteristice aktivně řízených strategií. Z hlediska podmínky stochastické dominance druhého řádu lze tyto výsledky interpretovat tak, že dynamické strategie poskytují lepší distribuci výnosů pro rizikově averzní investory, zejména v delším investičním horizontu.

Poděkování

Tento výzkumný projekt byl podpořen grantem č. IGA F4/18/2024 Interní grantové agentury Fakulty informatiky a statistiky, Vysoké školy ekonomické v Praze. Autor využil jazykový model GPT-5 společnosti OpenAI (5) k úpravě stylistické a formální stránky rukopisu. Za veškerý obsah a interpretaci textu nese plnou odpovědnost autor.

Použitá literatura

1. HADAR, Josef; RUSSELL, William R. Rules for Ordering Uncertain Prospects. *The American Economic Review* [online]. 1969, roč. 59, č. 1, s. 25–34 [cit. 2023-12-29]. ISSN 00028282. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/1811090>.
2. MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. *The Journal of Finance* [online]. 1952, roč. 7, č. 1, s. 77–91 [cit. 2023-11-23]. ISSN 00221082, ISSN 15406261. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/2975974>.
3. DENTCHEVA, Darinka; RUSZCZYŃSKI, Andrzej. Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. *Journal of Banking Finance*. 2006, roč. 30, č. 2, s. 433–451. ISSN 0378-4266. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2005.04.024>. Risk Management and Optimization in Finance.
4. MCFADDEN, Daniel. Testing for Stochastic Dominance. In: FOMBY, Thomas B.; SEO, Tae Kun (ed.). *Studies in the Economics of Uncertainty*. New York, NY: Springer New York, 1989, s. 113–134. ISBN 978-1-4613-8922-4.
5. OPENAI. *GPT-5 Language Model* [<https://openai.com/>]. 2025. Available at <https://openai.com/>.

Kontakt

Ing. Jakub Neugebauer

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky
nám. Winstona Churchilla 1938/4, 120 00 Praha 3-Žižkov

Tel: +420 725 516 362

email: jakub.neugebauer@vse.cz

NEVYUŽITÝ POTENCIÁL ESPORTU V EKONOMII

UNTAPPED POTENTIAL OF ESPORTS IN ECONOMICS

Jan Rejthar¹

Abstrakt

Esport vykazuje rychlý růst a sdílí klíčové charakteristiky s tradičními sporty, což z něj činí vhodné prostředí pro ekonomický výzkum. Bibliometrická analýza Web of Science Core Collection odhalila, že přes rozmach esportového výzkumu napříč obory zůstává ekonomický výzkum minimální - méně než dvě publikace ročně za poslední dvě dekády. To představuje nevyužitou příležitost, neboť esportová data jsou hojná, přesná a snadno dostupná. Studie argumentuje, že esport nabízí ideální podmínky pro studium rozhodování a pobídkových struktur v kontrolovaném, přesto přirozeném prostředí, a vyzývá ekonomy k většímu využití těchto dat.

Klíčové slova: *esport, bibliometrická analýza, ekonomie sportu*

Abstract

Esports exhibits rapid growth and shares key characteristics with traditional sports, making it a suitable environment for economic research. A bibliometric analysis of the Web of Science Core Collection revealed that despite the expansion of esports research across disciplines, economics research remains minimal—fewer than two publications annually over the past two decades. This represents an untapped opportunity, as esports data is abundant, precise, and readily accessible. The study argues that esports offers ideal conditions for studying decision-making and incentive structures in controlled yet naturalistic settings, and calls on economists to make greater use of these data.

Keywords: *esports, bibliometric analysis, sports economics*

1 ÚVOD

Ve svém příhodně nazvaném článku Bar-Eli a kolektiv (2020) tvrdí, že sport nabízí jedinečnou možnost testovat ekonomické teorie, nebo, jak sami uvádějí, výborné laboratorní prostředí pro studium lidského chování v reálném konkurenčním prostředí. Dodávají také, že tuto myšlenku, která tvoří základ oboru sportovní ekonomie, sdílejí nositelé Nobelovy ceny Daniel Kahneman a Gary Becker. Sport představuje skvělé přirozené experimenty, protože přináší výsledky s vysokými incentivy a data, která sport generuje, jsou vysoce kvalitní s téměř kompletními informacemi. Tyto výhody činí sportovní data cenná pro testování ekonomických teorií a zkoumání odchylek od klasických ekonomických modelů.

Výzkumníci využívají sportovní data k testování základních ekonomických teorií, jako je vliv výše odměn na výkon, efektivita trhu, optimalita rozhodování, záměrné snížené výkony nebo sabotáž. Podobně už byla sportovní data použita ke studiu odchylek od optimálního výkonu a dalších jevů z behaviorální ekonomie, jako je selhání pod tlakem, efekt horké ruky,

¹ This article was supported by The Internal Grant Agency of the Prague University of Economics and Business under Grant VŠE IGS F4/24/2025.

diskriminace, averze ke ztrátám, efekty referenčních bodů nebo přílišný optimismus. Sport však v tomto ohledu nemusí být jedinečný, protože esport může poskytovat podobné nebo dokonce větší výhody. Navzdory těmto potenciálním výhodám se zdá, že ekonomický výzkum esportu je vzácný, jak se tento článek pokusí demonstrovat.

2 METODOLOGIE

Tato studie provádí bibliometrickou analýzu nedávných trendů ve výzkumu esportu a výzkumu využívajícího esportová data. Pro shromáždění relevantních publikací byla použita databáze Web of Science (WoS) Core Collection. Vyhledávání se zaměřilo na časopisecké články, konferenční příspěvky a redakční materiály indexované ve WoS, které obsahovaly některý z termínů esport, esports, e-sport nebo e-sports v názvu, abstraktu, autorských klíčových slovech nebo v poli klíčová slova plus. Dále byly odstraněny stažené publikace a duplicitní záznamy, které mohou vzniknout, když je jeden článek indexován ve více databázích WoS.

Shromážděné články byly následně kategorizovány do šesti skupin: Ekonomie; Podnikání a management; Psychologie; Ostatní společenské a humanitní vědy; Sportovní vědy a medicína; a Informatika, přírodní vědy a inženýrství, na základě kategorizace WoS. Články z různých oblastí a podoborů (např. multidisciplinární vědy, interdisciplinární aplikace, aplikovaná matematika nebo volný čas, sport a turismus) byly kategorizovány ručně podle nejlepšího úsudku autora. Pokud článek spadá do více oborů, byly aplikovány následující priority: Ekonomie > Podnikání a management > Psychologie > Ostatní společenské a humanitní vědy > Sportovní vědy a medicína > Přírodní vědy a inženýrství > Informatika. Proto například, aby byla maximalizována možná velikost ekonomického výzkumu esportu, pokud je článek zařazen jak do ekonomie, tak do psychologie, spadá do kategorie ekonomie.

3 VÝSLEDKY VÝZKUMU

3.1 Výzkum esportu

Esport lze definovat jako organizované, kompetitivní digitální hraní her (Formosa a kolektiv, 2022). Z malé subkultury se vyvinul v odvětví srovnatelné s tradičními sporty v prizech i sledovanosti (Bavelier & Green, 2019). Wagner (2006) poznamenal, že diskuse o klasifikaci esportu jako sportu není relevantní pro jeho studium - esport sdílí klíčové charakteristiky tradičních sportů: konkurenční prostředí, vysoké sázky, podobné turnajové struktury a kvalitní data.

Přesto zůstává esport nedostatečně využíván ve výzkumu (Shengjie, 2019; Xenopoulos a kolektiv, 2020). Celkem 1 776 esportových článků se nachází v databázi WoS (1 584 od roku 2005), přičemž ekonomický výzkum je vzácný - méně než dva články ročně. Zájem je rostoucí napříč obory, ale v ekonomii je růst minimální. Esport byl přitom úspěšně použit ke studiu teorie turnajů, efektu přelévání, selhání pod tlakem, kontestabilních trhů, fenoménu horké ruky, ekonomie pozornosti či efektu supervězdy.

Při širším pojetí ekonomie (včetně podnikání a managementu dle JEL klasifikace) se obraz zlepšuje a ekonomický výzkum se vyrovná psychologii, což naznačuje větší potenciál, než se zdá při úzkém vymezení oboru.

3.2 Proč esport?

Navazujíc na Bar-Eli a kolektiv (2020) by se dalo argumentovat, že esport může nabídnout ještě větší příležitosti než sport pro testování ekonomické teorie, protože existují tři klíčové výhody esportu a esportových dat oproti sportu a sportovním datům.

Za prvé, esport není pouze podporován počítači tak, jak to je u sportu; je inherentně integrován do digitálního prostředí coby její produkt. Důsledkem toho esport produkuje velké a rozmanité množství dat, která jsou často snadno získatelná, což umožňuje studium široké škály problémů a využití širšího spektra metod.

Jedním zajímavým příkladem výhod vyplývajících z digitální povahy esportu je, že některé hry, jako Counter-Strike: Global Offensive (CS:GO) nebo Quake, používají takzvané demo záznamy k ukládání informací z každého zápasu. Demo záznamy jsou soubory podobné záznamům obsahující serializaci dat přenášených mezi herním serverem a jeho hráči, uložené jako text sekvenční sady událostí. Demo záznamy obsahují všechny informace nezbytné pro to, aby hra mohla zápas zrekonstruovat od začátku do konce. Proto obsahují informace jako souřadnice pozice, náklon a otočení každého hráče, stav jejich inventáře, jejich akce a tak dále, mnohokrát za sekundu (například 64krát za sekundu, čili s frekvencí 64Hz). Žádný z ekonomických článků v databázi WoS nevyužil demo záznamy jakýmkoli způsobem.

Dalším zajímavým příkladem je případ tréninkových programů na míření, specializovaného softwaru určeného ke zlepšování a měření schopností hráčů v míření ve střílečích, neboli takzvané kontroly myši, a používají se také k soutěžení. Rejthar (2024) ukazuje, že tréninkové programy na míření produkují reálná data experimentální kvality, což z nich činí slibný zdroj použitelných dat, zejména pro výzkum, kde experimentální design (zejména laboratorní experimenty) ovlivňuje lidské rozhodování, jako je slavný Hawthorneův efekt.

Několik studií využilo rozsáhlé soubory esportových dat k prozkoumání různých aspektů chování hráčů a dynamiky soutěží. Například Xenopoulos a kolektiv (2020) použili demo záznamy 4 682 profesionálních zápasů CS:GO, což představuje 73 milionů stavů, ke studiu hodnoty individuálních akcí hráčů; Shenkman a kolektiv (2024) použili data z 74 632 zápasů CS:GO, což představuje 149 264 pozorování, ke studiu pobídkových efektů rozptylu turnajových cen; a Rejthar a Kavřík (2025) použili data z 19 272 zápasů CS:GO představujících 74 451 pozorování ke studiu toho, zda pobídky ovlivňují přítomnost fenoménu horké ruky. Tyto studie překonávají předchozí literaturu o příslušných tématech z hlediska množství použitých dat.

Za druhé, pokud jsou k dispozici, esportová data by měla být přesnější s menším počtem chyb kvůli nižší pravděpodobnosti výskytu lidské chyby. Například výše zmíněné demo záznamy zápasů jsou vytvářeny programově, nevyžadují žádnou lidskou intervenci a mohou být použity k extrahování výsledků nebo akcí a statistik hráčů. Naproti tomu sběr sportovních dat často zahrnuje mnoho manuální práce nebo vyžaduje specializované, drahé sledovací nástroje, které se liší v spolehlivosti a mohou produkovat značný počet chyb (Pifer, 2024).

Za třetí, částečně související s prvním bodem, podle Hinnanta (2013) role, kterou esport hraje ve 21. století, odráží roli, kterou sport hrál ve 20. století. Hinnant tvrdí, že videohry a esport zahrnují hodnoty, které jsou relevantní pro život v digitálním věku, a že esport tak nabízí prostředí pro osvojení relevantních hodnot, jako je důrazný individualismus, digitální kultura nebo velká variabilita v možnostech a ideálech. Například liquipedia.net, běžně používaná esportová archivní webová stránka, je wiki provozovaná dobrovolníky, model, který se stal velmi běžným pro archivaci informací (Kalinichenko a kolektiv, 2024). Podobně jak herní, tak mimoherní esportové trhy mají tendenci fungovat 24 hodin denně, 7 dní v týdnu, podporované různými digitálními systémy. Tyto trhy jsou globálně přístupné, což umožňuje

všem účastníkům z různých regionů účastnit se kdykoli. Vzhledem k relativně nízkým fyzickým nárokům, minimální počáteční investici a nízkým transakčním nákladům mají hráči flexibilitu volněji alokovat svůj čas, což jim usnadňuje přepínání mezi různými esportovými tituly nebo účast na více z nich současně (podobně jako v mnoha částech současného trhu práce). Inherentní digitální a globální povaha esportu umožňuje dynamičtější formu účasti, která je méně omezena tradičními bariérami nacházejícími se ve fyzických sportech nebo minulých trzích práce.

3.3 Jak esport?

Jak poznamenali Shengjie (2019) a Xenopoulos a kolektiv (2020), esportová data jsou často snadno dostupná. Kromě výše zmíněné Liquipedie existuje mnoho dalších archivních stránek, jako jsou hltv.org nebo esportsearnings.com, a různí vývojáři a mnoho webových stránek a herních vydavatelů poskytuje veřejná API. Pro práci s CS demo záznamy mohou výzkumníci použít například awpy, bezplatnou a open source Python knihovnu pro parsování a analýzu CS demo záznamů (Xenopoulos a kolektiv, 2022). K dispozici jsou také esportové výzkumné datasety, jako je SC2EGSet, otevřený dataset obsahující data z 17 895 StarCraft demo záznamů (Bialecki a kolektiv, 2023), nebo ESTA, CS dataset obsahující data z 1 558 demo záznamů (Xenopoulos & Silva, 2022). K dispozici jsou také datasety videoher, které jsou volně dostupné na platformách Kaggle nebo Github. Navíc, na rozdíl od tradičních sportů, kde přístup k herním záznamům může být omezen nebo vyžadovat drahé předplatné, esportové události jsou často streamovány na platformách jako Twitch, YouTube a další. Proto jsou vysoce kvalitní záznamy hlavních (a dokonce i vedlejších) událostí velmi často volně dostupné online.

4 DISKUSE A ZÁVĚR

Tato studie navazuje na Bar-Eli a kolektiv (2020) a ukazuje, že esport slouží jako výborné laboratorní prostředí pro studium ekonomického chování s potenciálně většími výhodami než tradiční sporty.

Esport nabízí jedinečnou kombinaci výhod. Za prvé, digitální infrastruktura produkuje masivní, často veřejně přístupné datasety (např. demo záznamy zápasů, záznamy z tréninkových programů na míření) s granularitou a rozsahem přesahujícím tradiční sportovní výzkum, bez finančních nákladů. Za druhé, automatizace sběru dat minimalizuje chybu měření a snižuje náklady. Za třetí, globální a decentralizovaná povaha esportových trhů odráží charakteristiky současných digitálních ekonomik, poskytující přirozené prostředí pro testování moderních teorií.

Bibliometrická analýza ukazuje růst výzkumu esportu napříč disciplínami, ale ekonomický výzkum zůstává omezený. Výsledky mohou však být zkresleny omezením na databázi WoS - novější časopisy a publikace v jiných jazycích a ze zemí s etablovaným esportem (Brazílie, Jižní Korea, Čína) nemusí být zachyceny.

Navzdory podobnostem se sportem málo ekonomických studií využívá vlastností esportu, což představuje promarněnou příležitost pro analýzy experimentální kvality s naturalistickými daty. Veřejně dostupné nástroje (awpy) a datasety (SC2EGSet, ESTA) výrazně snižují vstupní bariéru. Přesun pozornosti k esportu může navíc snížit náklady a usnadnit financování výzkumu. Budoucí výzkum by měl zvážit využití těchto bohatých a jedinečných dat.

Použitá literatura

1. BAR-ELI, M., A. KRUMER, and E. MORGULEV. (2020). Ask Not What Economics Can Do for Sports—Ask What Sports Can Do for Economics. *Journal of Behavioral and Experimental Economics*, 89, 101597. <https://doi.org/10.1016/j.socec.2020.101597>.
2. BAVELIER, D., and C. S. GREEN. (2019). Enhancing Attentional Control: Lessons from Action Video Games. *Neuron*, 104(1), 147–163. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2019.09.031>.
3. BIAŁECKI, A., N. JAKUBOWSKA, P. DOBROWOLSKI, P. BIAŁECKI, L. KRUPIŃSKI, A. SZCZAP, R. BIAŁECKI, and J. GAJEWSKI. (2023). SC2EGSet: StarCraft II Esport Replay and Game-state Dataset. *Scientific Data*, 10(1), 600. <https://doi.org/10.1038/s41597-023-02510-7>.
4. FORMOSA, J., N. O'DONNELL, E. M. HORTON, S. TÜRKAY, R. L. MANDRYK, M. HAWKS, and D. JOHNSON. (2022). Definitions of Esports: A Systematic Review and Thematic Analysis. *Proceedings of the ACM on Human-Computer Interaction*, 6(CHI PLAY), 1–45. <https://doi.org/10.1145/3549490>.
5. HINNANT, N. (2013). Practicing Work, Perfecting Play: League of Legends and the Sentimental Education of E-Sports. <https://doi.org/10.57709/4864722>
6. KALINICHENKO, L., L. MELNYK, O. KUBATKO, I. BURLAKOVA, K. BABYCH, and T. PASKO. (2024). Wiki Communities' Management Tools in Conditions of Digitization. *Problems and Perspectives in Management*, 22(3), 303–313. [https://doi.org/10.21511/ppm.22\(3\).2024.24](https://doi.org/10.21511/ppm.22(3).2024.24).
7. NAIDENOVA, I., P. PARSHAKOV, I. TYLKIN, and G. VASILIEV. (2024). Choking under Pressure in Online and Live Esports Competitions. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 227, 106760. <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2024.106760>.
8. PIFER, N. D. (2024). Pitch-Level College Baseball Data Captured by Optical Tracking Technology. *Data in Brief*, 57, 111049. <https://doi.org/10.1016/j.dib.2024.111049>.
9. REJTHAR, J. (2024). Unlocking the Untapped Potential of Video Game Data: A Case Study of Aim Trainers. In L. VALE COSTA, N. ZAGALO, A. I. VELOSO, E. CLUA, S. ARNAB, M. VAIRINHOS, and D. GOMES (Eds.), *Videogame Sciences and Arts* (Vol. 1984, pp. 315–321). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51452-4_22.
10. REJTHAR, J., and D. KAVŘÍK. (2025). The Hot Hand in Esports. *SN Computer Science*, 6(4), 303. <https://doi.org/10.1007/s42979-025-03817-5>.
11. SHENGJIE, Y. (2019). For Love of the Game: A Study of Tournament Theory and Intrinsic Motivation in Dota 2 [PhD Thesis]. Duke University Durham.
12. SHENKMAN, E., M. MOLODCHIK, and P. PARSHAKOV. (2024). Online Versus Offline Esports Tournaments: Prize Structure and Individual Performance. *Journal of Sports Economics*, 15270025241284056. <https://doi.org/10.1177/15270025241284056>.

13. WAGNER, M. G. (2006). On the Scientific Relevance of Esports. International Conference on Internet Computing, 437–442.
14. XENOPOULOS, P., H. DORAISWAMY, and C. SILVA. (2020). Valuing Player Actions in Counter-Strike: Global Offensive. 2020 IEEE International Conference on Big Data (Big Data), 1283–1292.
<https://doi.org/10.1109/BigData50022.2020.9378154>.
15. XENOPOULOS, P., W. R. FREEMAN, and C. SILVA. (2022). Analyzing the Differences between Professional and Amateur Esports through Win Probability. Proceedings of the ACM Web Conference 2022, 3418–3427.
<https://doi.org/10.1145/3485447.3512277>.
16. XENOPOULOS, P., and C. SILVA. (2022). ESTA: An Esports Trajectory and Action Dataset (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2209.09861>.

Kontaktné údaje

Ing. Jan Rejthar

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 1938/4, 130 67 Praha 3 – Žižkov

Tel: (420 7) 73 276 790

email: jan.rejthar@vse.cz