

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ PRE OPERAČNÝ VÝSKUM  
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY  
EKONOMICKEJ UNIVERZITY V BRATISLAVE

**ZBORNÍK ZO SEMINÁRA**

**VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD VO VEDECKO-VÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XI**

27. - 29. máj 2015

Makov - Kysuce

- Andrej Babej, Pavel Gežík, Lucia Mieresová: [APLIKÁCIA MODELU VZÁJOMNÝCH ZÁPOČTOV NA INOM TYPE „DLŽNÍCKEJ“ ŠTRUKTÚRY](#)
- Martin Benkovič: [CHARAKTERISTIKA DYNAMICKÝCH STOCHASTICKÝCH MODELOV VŠEOBECNEJ ROVNOVÁHY](#)
- Ivan Brezina Jr.: [PORTFÓLIO, DYNAMIZÁCIA A NÁKLADY NA ZMENU PORTFÓLIA](#)
- Juraj Dubovec: [VYUŽITIE FRAKTÁLOVÝCH ŠTRUKTÚR PRI INOVÁCII VÝROBKU](#)
- Michal Fendek: [PODMIENKY OPTIMÁLNOSTI KUHNÁ-TUCKERA AKO EFEKTÍVNY NÁSTROJ ANALÝZY MODELOV ROVNOVÁHY NA TRHOCH SIEŤOVÝCH ODVETVÍ](#)
- Petr Fiala: [MODELOVÁNÍ POPTÁVKY](#)
- Andrea Furková: [KONŠTRUKCIA MATICE PRIESTOROVÝCH VÁH](#)
- Tomáš Gál, Zuzana Čičková: [APLIKÁCIE TEÓRIE HIER V SPOLOČENSKÝCH VEDÁCH](#)
- Pavel Gežík: [EKOLOGICKÝ PRÍSTUP A LEGISLATÍVA V ECO-ECO MODELOCH TRANSPORTU](#)
- Marián Goga: [MODELOVANIE ZMIEN V CENOVÝCH MODELOCH](#)
- Milan Horniaček, Ľubica Šimková: [ROVNOVÁHA TYPU OTVORENEJ SLUČKY V BILATERÁLNO M COURNOTOVOM DUOPOLE S VÝROBKOVÝMI INOVÁCIAMI VSTUPOV](#)
- Michaela Chocholatá: [PARITA KÚPNEJ SILY A PANELOVÉ TESTY JEDNOTKOVÉHO KOREŇA](#)

Ivaničová Zlatica, Rublíková Eva: [ANALÝZA KRAJOV SLOVENSKEJ EKONOMIKY Z HĽADISKA ICH KONVERGENCIE](#)  
Marta Janáčková, Alžbeta Szendreyová: [MALÁ ŠTÚDIA VPLYVU POČTU OBYVATEĽSTVA NA UMIESTNENIE STANÍC ZÁCHRANNEJ ZDRAVOTNEJ SLUŽBY](#)  
Brian König: [ANALÝZA PREZENTAČNÝCH ZRUČNOSTÍ VYSOKOŠKOLSKÉHO UČITEĽA S ORIENTÁCIOU NA ŠTUDENTA](#)  
Martina Kuncová, Jana Sekničková: [VÝBĚR DODAVATELE ELEKTŘINY NA ČESKÉM TRHU V ROCE 2015 POMOCÍ SIMULAČNÍHO MODELU](#)  
Patrik Kupkovič: [BELLMANOV PRINCÍP OPTIMALITY V JEDNODUCHOM MAKROEKONOMICKOM MODELI](#)  
Peter Laca, Zuzana Čičková: [PRINCÍP RIEŠENIA BIMATICOVEJ HRY POMOCOU GENETICKÉHO ALGORITMU](#)  
Martin Lukáčik, Karol Szomolányi: [SIMULÁCIA MOŽNOSTÍ SVAR MODELU V PROGRAME EIEWS](#)  
Adriana Lukáčiková, Martin Lukáčik: [BAYESOVSKÝ ODHAD VAR MODELU V PROGRAME EIEWS](#)  
Lucia Mieresová: [PANELOVÉ DÁTA KRAJÍN V4](#)  
Veronika Miťková: [EKONOMETRICKÝ ODHAD PARAMETROV PRODUKČNEJ FUNCIE MODELU VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY](#)  
Vladimir Mlynarovič, Eduard Hozlár: [NIEKTORÉ PRÍSTUPY K MANAŽMENTU PORTFÓLIA DLHOPISOV](#)  
Filip Ostrihoň: [VZŤAH MEDZI VÝSKUMOM A VÝVOJOM A PRODUKTIVITOU REGIÓNOV SLOVENSKA](#)  
Stanislav Palúch: [NIEKOĽKO PRÍSTUPOV K ZRÝCHLENIU VÝPOČTU MATICE VZDIALENOSTÍ](#)  
Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková: [TRIEDY MIER RIZIKA FINANČNÝCH AKTÍV](#)  
Štefan Peško: [VÝPOČET MATICE DRUHÝCH NAJKRATŠÍCH VZDIALENOSTÍ](#)  
Renáta Pitoňáková: [DETERMINANTY ÚSPOR DOMÁCNOSTI V ČR: ARDL PRÍSTUP](#)  
Marian Reiff: [MARKOVOVE ROZHODOVACIE PROCESY- OPTIMALIZÁCIA VOĽBY ALTERNATÍV POMOCOU LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA](#)  
Marian Reiff, Kvetoslava Surmanová: [MODELOVANIE ZÁSOB ZAMERANÉ NA REDUKCIU EMISÍ SKLENÍKOVÝCH PLYNOV](#)  
Ľubica Šimková: [SILNÁ DOKONALÁ ROVNOVÁHA V BILATERÁLNO M COURNOTOVOM DUOPOLE S VÝROBKOVÝMI INOVÁCIAMI VSTUPOV](#)  
Miroslav Šofranko, Ivan Brezina: [EKOLOGICKÝ ASPEKT V OKRUŽNÝCH ÚLOHÁCH](#)  
Anna Strešňáková: [MODELOVANIE ÚROKOVÝCH MIER VYUŽITÍM VAŠÍČKOVHO MODELU](#)  
Kvetoslava Surmanová: [SPOTREBNÁ FUNKCIA V PROCESSE VÝUČBY EKONOMETRIE](#)

### **Programový výbor:**

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava (predseda)  
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita, Bratislava  
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická, Praha  
prof. RNDR. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, Vysoká škola ekonomická, Praha  
doc. Ing. Jana Hančlová, CSc., Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava  
doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc., Žilinská univerzita, Žilina

**Prípravný výbor:**

Eva Balažovičová, Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Jan Fábry, PhD., Vysoká škola ekonomická, Praha  
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
Ing. Marian Reiff, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava

**Recenzenti:**

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Marián Goga, CSc., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. RNDr. Ladislav Kovaľ, CSc., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava  
doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., Ekonomická univerzita, Bratislava

Zborník neprešiel jazykovou úpravou.  
AH 15,43

**Kontakt:**

[ssov@euba.sk](mailto:ssov@euba.sk)

**Zostavovateľ:** Ing. Marian Reiff, PhD.

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre operačný výskum, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2015

**ISBN 978-80-225-4084-1**

# APLIKÁCIA MODELU VZÁJOMNÝCH ZÁPOČTOV NA INOM TYPE „DLŽNÍCKEJ“ ŠTRUKTÚRY<sup>1</sup>

## APPLICATION OF MODEL FOR MUTUAL DEBTS COMPENSATION ON ANOTHER TYPE OF „DEBTOR“ STRUCTURE<sup>1</sup>

*Andrej Babej, Pavel Gežík, Lucia Mieresová*

### Abstrakt

Kompenzácia dlhov prostredníctvom vzájomného zápočtu pohľadávok a záväzkov ponúka dlžným subjektom možnosť ako znížiť potrebu likvidných peňažných prostriedkov na úhradu svojich dlhov. Zároveň tento spôsob zániku vzájomných dlhov pomáha predchádzať vzniku platobnej neschopnosti. Matematický model na vykonávanie vzájomných zápočtov je možné aplikovať aj na iný typ štruktúry akou je „klasická“ dlžnícka štruktúra.

*Kľúčové slová: kompenzácia, dlhy,*

### Abstract

Mutual debt compensation through mutual offsetting of receivables and payables provides opportunity for debtors to reduce need for liquid funds to cover their debts. At the same time this method of compensation mutual debts helps to prevent the occurrence of insolvency. Mathematical model for the implementation of mutual dept compensation is also applicable to another type of structure such as a "classic" debtor structure.

*Keywords: compenzation, debts,*

## ÚVOD

Modely optimalizujúce vzájomný zápočet dlhov majú už pomerne dlhú históriu. V našich podmienkach ich navrhovali od roku 1993 viacerí autori (Fecenko, Gazda a iní), ktorí tento problém formulovali či už ako úlohu lineárneho programovania, úlohu o maximálnej cirkulácii v hranovo ohodnotenom orientovanom grafe alebo problém maximálneho toku.

V našom príspevku navrhujeme model na vykonávanie vzájomných zápočtov s možnosťou vytvárania nových dlžníckych vzťahov.

### 1 Model vzájomného zápočtu s možnosťou vytvárania nových dlžníckych vzťahov

Základným predpokladom je existencia súvislého hranovo orientovaného grafu s ohodnotenými hranami  $c_{ij}$ , ktoré predstavujú výšku dlhu medzi jednotlivými vrcholmi (subjektmi), teda graf  $G = (V, H, c)$ . Nech  $G = (V, H, c)$ . Z tejto dlžníckej siete vytvoríme úplnú

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantového projektu VEGA – číslo grantu 1/0245/15 „Plánovanie prepravy s cieľom znížovania emisií“

This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

súvislú sieť  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{H}, \tilde{c})$  s množinou vrcholov  $\tilde{V} = V$  a množinou hrán  $\tilde{H}$  definovanou nasledovne

$$\tilde{H} = \{(i, j) \mid i, j \in \tilde{V}, i \neq j\} \quad (1)$$

Funkcia  $\tilde{c} : \tilde{H} \rightarrow R_0^+$  je definovaná ako

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + M \text{ pre } (i, j) \in H \quad (2)$$

$$\tilde{c}_{ij} = M \text{ pre } (i, j) \notin H \quad (3)$$

kde  $M$  je veľké kladné reálne číslo ( $M \gg \max_{(i,j) \in H} c_{ij}$ ). Množina vrcholov  $\tilde{V}(i)^- = \{j \mid (j, i) \in \tilde{H}\}$  je vstupné okolie vrcholu  $i$  v sieti  $\tilde{G}$ .

Nech  $x_{ij}$  je podiel dlhu  $c_{ij}$ , ktorý bol započítaný medzi  $i$ -tou a  $j$ -tou firmou. Potom celková suma započítaných dlhov je daná vzťahom

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

Keďže  $x_{ij}$  predstavuje podiel započítaného (zníženého) dlhu  $c_{ij}$ , prevoditeľný na percentá a nemôže byť vyšší ako 100% a teda musí platiť

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (5)$$

Kompensácia vzájomných dlhov nesmie zmeniť bilanciu záväzkov a pohľadávok žiadnej firmy z množiny firiem  $\tilde{V}$ , a preto musí platiť:

$$\sum_{j \in \tilde{V}(i)^-} c_{ij} = \sum_{j \in \tilde{V}(i)^+} c_{ji} \text{ pre } (i, j) \in \tilde{H} \quad (6)$$

čo znamená, že sa kompenzované záväzky u každej firmy musia rovnať kompenzovaným pohľadávkam. Bilancia záväzkov a pohľadávok každej firmy pred procesom eliminácie je daná vzťahom

$$b(i) = \sum_{j \in \tilde{V}(i)^+} d_{ij} - \sum_{j \in \tilde{V}(i)^-} d_{ji} \quad (7)$$

Bilancia sa teda nezmení vtedy a len vtedy, ak podmienka (6) platí pre každú firmu  $i \in \tilde{V}$ . Úlohu maximalizácie celkového zápočtu dlhov s možnosťou vytvárania nových dlžníckych vzťahov formulujeme nasledovne:

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - (n \cdot n - n) \cdot M \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^n c_{ji} x_{ji} = 0 \text{ pre } i = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

## 2 Aplikácia modelu na inom type „dlžníckej“ štruktúry

Prezentovaný model si v nasledujúcej časti aplikujeme na konkrétny prípad fungujúcej inštitúcie. Nepôjde však o klasickú dlžnícku štruktúru tvorenú pohľadávkami a záväzkami (dlhmi) z obchodno-záväzkových vzťahov.

### 2.1 Základné informácie o inštitúcii a štruktúre subjektov

Ekonomická univerzita v Bratislave predstavuje v súčasnosti najväčšiu univerzitu v SR, ktorá zabezpečuje na všetkých stupňoch štúdia komplexné a ucelené vzdelávanie v ekonomických a manažérskych študijných programoch.

Pri analýze dlžníckych vzťahov budeme vychádzať z organizačnej štruktúry univerzity, pričom podstatné pre nás budú pracoviská poskytujúce výučbu študentom, čiže celouniverzitné ústavy a fakulty (univerzita má jedno celouniverzitné pracovisko a 7 fakúlt). Budeme pracovať s údajmi za akademický rok 2012/2013, konkrétne zimný semester. Podľa výročnej správy Ekonomickej univerzity (ďalej len EU v BA) bolo k 31.10.2012 na jej 7 fakultách vo všetkých študijných programoch zapísaných celkom 10634 študentov. Z toho na prvom stupni štúdia bolo zapísaných 5683 študentov, čo tvorí 53,44% všetkých študentov. Ako sme už spomenuli pri našich výpočtoch budeme používať dáta za rok 2012, ktoré sme získali z akademického informačného systému univerzity (ďalej len AIS). Pre lepšie vykreslenie dlžníckych štruktúr sme sa rozhodli pracovať len s dátami pre prvý stupeň štúdia z dôvodu, že na prvom stupni štúdia sa na vzdelávaní študentov podieľajú jednotlivé pracoviská spoločne. Na stupni druhom, kedy je študent už profilovaný v rámci svojho študijného programu, si z veľkej miery výučbu zabezpečujú jednotlivé fakulty vo vlastnej réžii, z čoho vyplýva že početnosť dlžných vzťahov je podstatne nižšia. Pri našich výpočtoch budeme používať mernú jednotku – „študentohodina“ čo je súčin počtu študentov zapísaných na jednotlivých fakultách s počtom hodín, ktoré absolvovali počas daného semestra výučby.

### 2.2 Analýza vstupných údajov

Po analýze vstupných údajov a priradení jednotlivých výkonov ich dodávateľom (stredisku zabezpečujúce výučbu) a odberateľom (stredisku na ktorom študujú študenti, ktorým bola poskytnutá výučba) sme zostavili maticu dlhov medzi jednotlivými strediskami. Riadky v matici predstavujú poskytnutú službu (výučbu), čiže z hľadiska obchodného pohľadávku voči jej prijímateľovi, stĺpce v matici predstavujú záväzky voči poskytovateľovi výučby.

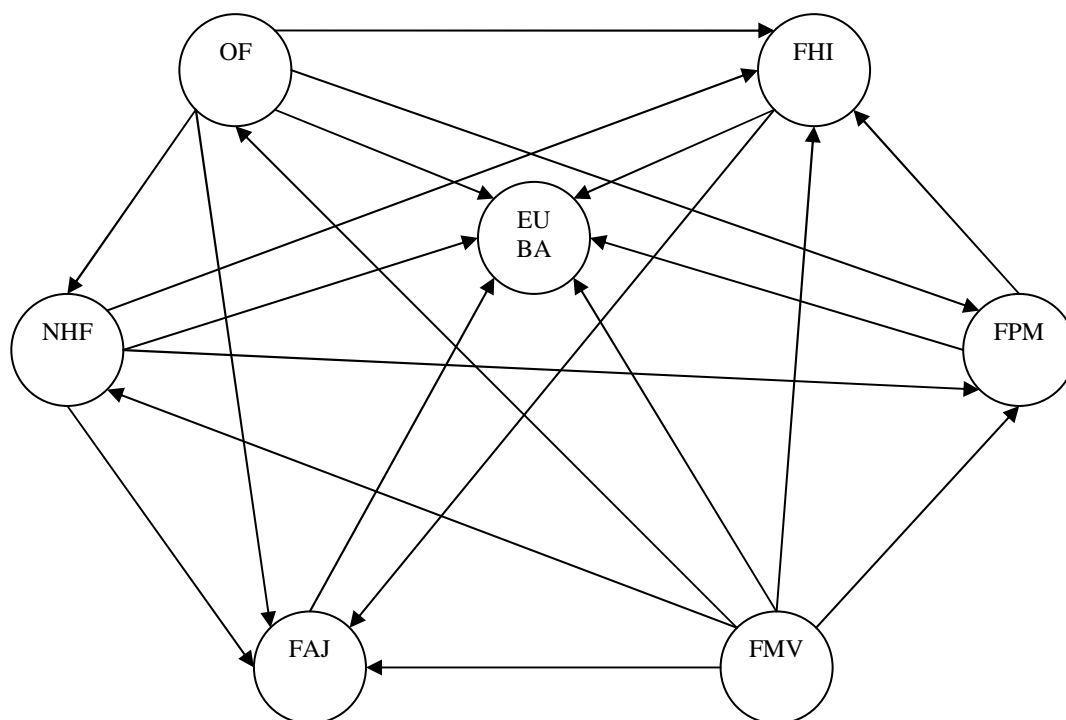
V danom sieťovom grafe vidíme vzťahy medzi jednotlivými dlžnými subjektmi. Vidíme, že fakulta/subjekt PHF nemá žiadny vzťah s iným subjektom v rámci EU v BA, toto je spôsobené sídlom fakulty, ktorá sa nachádza v Košiciach. V ďalších výpočtoch od nej preto môžeme abstrahovať. Pri analýze vstupných údajov sme vykonali vzájomnú kompenzáciu dlhov medzi prepojenými faktami. To znamená, že ak mali dva subjekty medzi sebou pohľadávku aj záväzok, tieto sa vzájomne zredukovali. Výsledná štruktúra je popísaná v nasledujúcej matici a grafe.

Tab. 1: Matica „dlhov“ po vzájomnej kompenzácii pohľadávok a záväzkov.

	euba	nhf	of	fhi	fpm	fmv	faj	phf	
euba	--	23200	9622	2184	1144	12090	2678	0	<b>50918</b>
nhf	0	--	13000	0	0	14187	0	0	<b>27187</b>
of	0	0	--	0	0	11302	0	0	<b>11302</b>
fhi	0	9374	28684	--	27558	45370	0	0	<b>110986</b>
fpm	0	5061	13614	0	--	15592	0	0	<b>34267</b>
fmv	0	0	0	0	0	--	0	0	<b>0</b>
faj	0	46038	63678	14856	28446	81874	--	0	<b>234892</b>
phf	0	0	0	0	0	0	0	--	<b>0</b>
	0	<b>83673</b>	<b>128598</b>	<b>17040</b>	<b>57148</b>	<b>180415</b>	<b>2678</b>	<b>0</b>	469552

Zdroj: vlastné spracovanie

Obr. 1: Dlžnícka štruktúra po započítaní vzájomných pohľadávok a záväzkov.



Zdroj: vlastné spracovanie

### 2.3 Vzájomný zápočet pohľadávok a záväzkov

V tejto fáze môžeme pristúpiť k vykonávaniu vzájomných zápočtov pohľadávok a záväzkov v sieťovom grafe, pre lepšiu ilustráciu si po kompenzácii, ktorú vykonáme zostavíme aj novú maticu dlhov k danému grafu.

#### Kompenzácia s vytvorením nových dlžníckych vzťahov

V tomto kroku pristúpime ku kompenzácii záväzkov s tým, že budem abstrahovať od aktuálne platnej legislatívy v Slovenskej republike. Po analýze sieťového grafu zistíme, že graf je acyklycký. To znamená, že neobsahuje žiadny cyklus, z tohto dôvodu pri kompenzácii môžeme použiť iba model akceptujúci nové dlžnícke vzťahy. Pri kompenzácii vychádzame

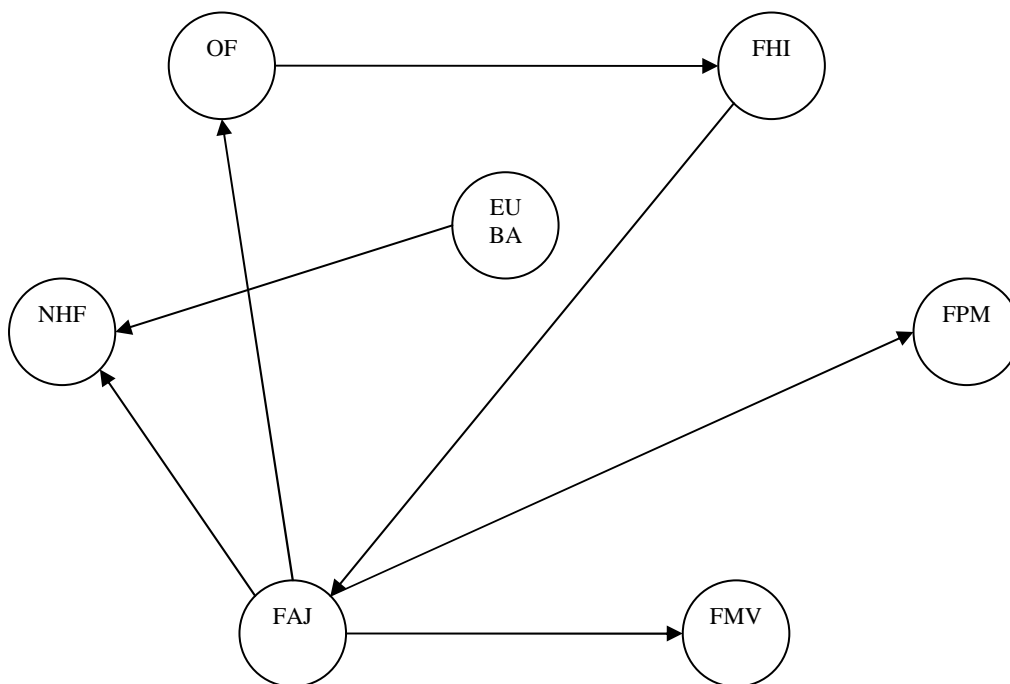
z predpokladu, že všetci účastníci súhlasia s možnosťou zmeny dlhovej štruktúry, ale so zachovaním podmienky konštantnosti bilancií jednotlivých uzlov. Po vykonaní kompenzácie dostávame novú maticu dlhov a nový sieťový graf.

Tab. 2: Matica dlhov po aplikácii modelu.

	euba	nhf	of	fhi	fpm	fmv	faj	
euba	--	50918	0	0	0	0	0	<b>50918</b>
nhf	0	--	0	0	0	0	0	<b>0</b>
of	0	0	--	0	0	0	0	<b>0</b>
fhi	0	0	0	--	0	93946	0	<b>93946</b>
fpm	0	0	0	0	--	0	0	<b>0</b>
fmv	0	0	0	0	0	--	0	<b>0</b>
faj	0	5568	117296	0	22881	86469	--	<b>232214</b>
	0	<b>56486</b>	<b>117296</b>	<b>0</b>	<b>22881</b>	<b>180415</b>	<b>0</b>	<b>377078</b>

Zdroj: vlastné spracovanie

Obr. 2: Sieťový graf po použití modelu s možnosťou zmeny dlžníckych vzťahov



Zdroj: vlastné spracovanie

### 3 Zhrnutie vykonaných vzájomných zápočtov

Z uvedených zápočtov, ktoré sme vykonali medzi jednotlivými fakultami EU v BA jasne vidíme zníženie potreby vykonávania transakcií medzi zapojenými subjektmi. Z počiatočného grafu dlhovej štruktúry po vzájomnom zápočte dosiahli zníženie celkových dlhov na úroveň 469 552 „študentohodín“. Po aplikovaní modelu s možnosťou vytvárania nových dlžných vzťahov sa celkový dlh znížil na 377 078 „študentohodín“ čo predstavuje úsporu o 92 474 študentohodín. V prípade, ak by sme ocenili 1 „študentohodinu“ len jedným Eurom (1 €),



celková úspora kapitálu by bola vo výške 92 474 €. Ak by sme uvažovali s tým, že jednotlivé subjekty by vykonali úhradu svojich záväzkov klasickým spôsobom a zohľadnili by sme ich náklady na bankové poplatky prípadne potrebu krátkodobého úveru, celková úspora nákladov by určite nebola zanedbateľná.

### **Použitá literatúra**

1. BABEJ, A. 2012. Modelovanie finančných tokov na báze teórie grafov = Cash flow modeling based on graph theory. In: Mladá veda AIESA 2012 – Participácia doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov na budovaní spoločnosti založenej na vedomostiach : zborník : VIII. medzinárodná vedecká konferencia doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov/ zostavovateľ Janette Brixová. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. ISBN 978-80-225-3546-5. - S. [1-4].
2. BABEJ, A. 2012. Vzájomné započítanie dlhov ako úloha maximálnej cirkulácie = Offsetting debts as a problem of maximal circulation. In: Nové trendy v ekonometrii a operačnom výskume [elektronický zdroj] : mezinárodní vědecký seminář : zborník : Praha, 10.-12. december / prosinec 2012 / editor Josef Jablonský, Katarína Čemická. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. - ISBN 978-80-225-3530-4. - S. [1-5].
3. BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z., GEŽÍK, P., 2012: *Sieťová analýza*, Bratislava : Vydavateľstvo Ekonóm, 2012. 198 s. ISBN 978-80-225-3503-8
4. FECENKO, J. 1994. K optimalizácii operácií zápočtov pohľadávok a záväzkov po lehote splatnosti. In: Ekonomický časopis = Journal of economics, roč. 42, č. 5, s. 360-374.
5. GAZDA, V. 2003. O nahradení klasického prístupu ku kompenzácii dlhov a pohľadávok. In: *Acta Oeconomica Cassoviensia* No 7. - Košice : Podnikovohospodárska fakulta so sídlom v Košiciach, 2003. ISBN 80-225-1713-5, s. 141-148.
6. HOZLÁR, E. 1993. Modelový prístup k riešeniu problematiky vzájomnej zadĺženosti podnikov. In Proceedings of the 2-nd seminar FHI EU, Bratislava 1993

### **Kontaktné údaje**

Ing. Andrej Babej

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 903 411 793

email: [andrej.babej@gmail.com](mailto:andrej.babej@gmail.com)

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 0908 333 360

email: [pavelgezik@gmail.com](mailto:pavelgezik@gmail.com)

Ing. Lucia Mieresová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 0904 389 298

email: [lucia.mieresova@gmail.com](mailto:lucia.mieresova@gmail.com)

# CHARAKTERISTIKA DYNAMICKÝCH STOCHASTICKÝCH MODELOV VŠEOBECNEJ ROVNOVÁHY<sup>1</sup>

## CHARACTERISTICS OF DYNAMIC STOCHASTIC GENERAL EQUILIBRIUM MODELS

*Martin Benkovič*

### **Abstrakt**

Dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy predstavujú v súčasnosti významný nástroj v makroekonomickom modelovaní. Tieto modely slúžia na analýzu obchodných cyklov, fiškálnej, či monetárnej politiky. Silnou vlastnosťou týchto modelov je fakt, že vychádzajú z mikroekonomickej teórie a sú založené na správaní sa optimalizujúcich reprezentatívnych ekonomických subjektov. Cieľom príspevku je všeobecne charakterizovať tieto modely.

*Kľúčové slová: DSGE, makroekonomické modely, kritika*

### **Abstract**

Dynamic stochastic general equilibrium models are important tools in macroeconomic modelling. Dynamic stochastic general equilibrium models analyse business cycles in economy, impacts of changes in fiscal or monetary policy. Strong attribute of these models is fact that they are based on strong microeconomic foundations. Behaviour of representative agents is based on optimization principle. Focus of this paper is generally characterize these models.

*Keywords: DSGE, macroeconomic models, criticism*

## **1 DYNAMICKÉ STOCHASTICKÉ MODELY VŠEOBECNEJ ROVNOVÁHY**

V súčasnosti dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy (DSGE modely), predstavujú významný nástroj pre analýzu ekonomického systému. Tvoria významný nástroj pre tvorcov hospodárskej politiky slúžiaci na analýzu obchodných cyklov, analýzu fiškálnej a monetárnej politiky. Prívlastok dynamické charakterizuje, že ide o skúmanie ekonomiky v čase, stochastické charakterizuje vplyv náhodných šokov a označenie všeobecná rovnováha je teoretickým smerom mikroekonómie, ktorý hľadá rovnováhu medzi ekonomickými subjektami (domácnosti, firmy, centrálna banka). Silnou stránkou týchto modelov sú silné mikroekonomické východiská.

DSGE modely sú v súčasnosti často využívané pre analýzu ekonomiky centrálnymi bankami. V minulosti boli často využívané štrukturálne modely na základe, ktorých boli odhadované medzisektorové vzťahy v ekonomike. Boli charakteristické veľkým množstvom premenných a medzisektorových vzťahov. Kritikou týchto modelov bol fakt, že odhadované parametre nie

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku"

sú štrukturálnymi parametrami modelu, čo sťažovalo ich ekonomickú interpretáciu. Naopak, DSGE modely postavené na silných mikroekonomických východiskách odhadujú štrukturálne parametre modelu. Ide o modely, ktoré sú náročnejšie na riešenie a analýzu, pričom ich výhodou je ľahšia logická interpretovateľnosť ekonomických vzťahov. Klasické makroekonomické modely vychádzajú z existujúcej hospodárskej politiky. Zmenou hospodárskej politiky sa menia aj parametre a simulácie na základe tradičného modelu môžeme označiť ako nepresné. Ako sme už naznačili, DSGE modely sa využívajú na simulácie rôznych typov šokov v ekonomike, alebo prognózovanie budúceho vývoja ekonomiky. Pri simuláciách je analyzovaný vplyv zmeny fiškálnej, monetárnej, alebo štrukturálnej politiky.

Dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy predstavujú významnú časť v makroekonomickom modelovaní. Tieto modely vysvetľujú ekonomické fenomény ako ekonomický rast, obchodné cykly, vplyvy monetárnej a fiškálnej politiky v makroekonomickom modeli odvodené z mikroeconomickej teórie. Posun v analýze obchodných cyklov bol prezentovaný Kydlandom a Prescottom (1982) v diele „Time to Build and Aggregate Fluctuations“. Obstfeld a Rogoff (1995) rozvinuli „model dvoch krajín“ založený na monopolistickej konkurencii a pružných nominálnych cenách. Pytlarczyk (2005) prezentuje DSGE „model dvoch krajín“, kde jedna krajina reprezentuje nemeckú ekonomiku a druhá krajina je reprezentovaná zvyškom Eurozóny. Štruktúra oboch ekonomík je symetrická a obe krajiny tvoria Eurozónu. Toto nastavenie umožňuje výskum domácich a zahraničných šokov prenášaných v oboch ekonomikách a ich relatívnych vplyvov na obe krajiny. Podobné nastavenie je použité v modeli rakúskej ekonomiky, prezentovanej autorom Breuss a Rabitsch (2009) a v modeli Národnej banky Španielska od autorov Andres, Burriel a Estrada (2006), ktorí model rozšírili o bývanie a sektor trvanlivých tovarov.

Za zmienku stoja rozsiahlejšie modely používané v Medzinárodnom menovom fonde (IMF) a Európskej Centrálnnej Banke (ECB). Model Globálnej ekonomiky (GEM) vypracovaný IMF oddelením výskumu bol prezentovaný v roku 2004. Európska centrálna banka pravidelne využíva „New Area Wide Model“ (NAWM) od autorov Chrisoffel, Coenen a Warne, (2008) pre makroekonomické prognózy. Model NAWM vychádza zo svojho predchodcu „Area Wide Model“, ktorý je založený na mikroekonomických východiskách a koncepte malej otvorenej ekonomiky pre Eurozónu. Model podporuje model Eurozóny a model Globálnej ekonomiky (EAGLE) od autorov Gomes, Jacquinet a Pisani (2010), ktorý predstavuje štvorkrajinový model Eurozóny a Svetovej ekonomiky určený pre analýzu ekonomických vzťahov medzi jednotlivými regiónmi Eurozóny a medzi krajinami Eurozóny a Svetovej ekonomiky

Ako už bolo spomenuté, DSGE modely vychádzajú zo silných mikroekonomických východísk. Ide o modely, ktoré predpokladajú existenciu rovnovážneho stavu v ekonomike a poskytujú informácie o vývoji ekonomiky na základe náhodného šoku. Tieto modely sú vhodným nástrojom pri modelovaní vplyvov zmien fiškálnych, či monetárnych politík, kde na základe funkcií reakcií na impulz, môžeme sledovať intenzitu a časový horizont, kedy ekonomika vráti do ustáleného stavu.

V osemdesiatych rokoch sa stali populárnymi modely reálnych hospodárskych cyklov tzv. RBC modely, ktoré sú založené na neoklasickej teórii. Neoklasická teória predpokladá, že fluktuácie reálnych veličín sú spôsobené reálnymi šokmi (technologický šok). Na RBC modely nadviazali modely, ktoré vychádzali z Keynesovskej teórie tzv. Nové keynesovské DSGE modely. Táto teória obohatila modely o predpoklad, že fluktuácie reálnych veličín nie

sú spôsobované, len reálnymi šokmi, ale aj nominálnymi šokmi. Táto teória predpokladá nastavenie cien monopolistickou konkurenciou – nepružné ceny a mzdy.

Modelované vzťahy v DSGE modeloch sú výsledkom optimalizácie. Štruktúra modelu sa skladá z reprezentatívnych ekonomických subjektov. Reprezentatívna domácnosť maximalizuje diskontovanú hodnotu očakávanej užitočnosti vzhľadom na rozpočtové ohraničenie. Cieľom reprezentatívnej domácnosti je maximalizovať svoju užitočnosť. Druhým ekonomickým subjektom sú reprezentatívne firmy. Cieľom reprezentatívnej firmy je maximalizácia zisku vzhľadom ohraničenia. Výsledkom optimalizačného procesu je Nová Keynesovská Phillipsova krivka. Tretím ekonomickým subjektom je centrálna banka. Centrálna banka nastavuje menovú politiku prostredníctvom Taylorovho pravidla. Modely začínajú zvyčajne analýzou zatvorenej ekonomiky, kde sa ďalej rozširujú o zahraničný sektor, ktorý môže v modeli vystupovať ako exogénny.

Už od vzniku makroekonómia poukazovali na obmedzenia DSGE modelovania. Modely boli kritizované vzhľadom na svoje predpoklady, metódy riešenia a ich celkovú implementáciu v procese rozhodovania. Vzhľadom na zjednodušujúce predpoklady zahrnuté v modeloch, prevažne v RBC modeloch predpoklady o úplnosti trhov a o efektívnosti trhov. Ďalším často kritizovaným nedostatkom je, že modely sú založené na reprezentatívnom správaní sa ekonomických subjektov, frikciách na finančných trhoch, alebo aj heterogenite agentov. Ako ďalšie nedostatky sú označované metódy riešenia modelov, kde linearizácia vedie k zjednodušeniu striktné nelineárnych vzťahov. Výsledkom aproximácie podmienok optimálnosti je systém rovníc s racionálnymi očakávaniami. Tento systém môže byť náročný na detailné pochopenie pre nezainteresovaného čitateľa. Vo väčšine prípadov nie je možné vypočítať analytické riešenie modelu, z čoho vyplýva potreba použitia numerických metód. Na záver môžeme konštatovať, že pochopenie a využívanie DSGE modelovania si vyžaduje skúseného ekonóma s matematicko-štatistickými a programovacími zručnosťami.

### Použitá literatúra

1. ANDRÉS,J. – BURRIEL,P. – ESTRADA,Á. 2006. A DSGE model for the spanish economy and the rest of the Euro area. In *Banco de España* working paper [online]. 2006 [cit. 2014-10-12]. Dostupné na internete: <http://www.bde.es/f/webbde/SES/Secciones/Publicaciones/PublicacionesSeridadas/DocumentosTrabajo/06/Fic/dt0631e.pdf>
2. BREUSS,F. – RABITSCH,K. 2008. An estimated two-country DSGE model of Austria and the Euro area. In *Wirtschaftsuniversität Wien: Research institute for European affairs* [online]. 2008 [cit. 2014-12-28]. Dostupné na internete: [http://www.wu.ac.at/europainstitut/noeg/breuss\\_rabitsch\\_s3.1-3](http://www.wu.ac.at/europainstitut/noeg/breuss_rabitsch_s3.1-3)
3. BUITER, W. 2009. The unfortunate Uselessness of most „state of the art“ academic monetary economics. *Financial times* [online]. 2009, [cit. 2014-1-13]. Dostupné na internete <http://blogs.ft.com/maverecon/2009/03/the-unfortunate-uselessness-of-most-state-of-the-art-academic-monetary-economics/#axzz3RSzF7x7a>
4. DEL NEGRO, M. – SCHORFHEIDE, F. 2012. DSGE Model-Based Forecasting. In *Federal Reserve bank of New York Staff Reports* [online]. 2012, no. 554 [cit. 2014-10-15]. Dostupné na internete: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2018451](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2018451)

5. CHRISTOFFEL,K. – COENEN,G. – WARNE,A. 2008. The new area-wide model of the Euro area: A micro-founded open-economy model for forecasting and policy analysis. In *European central bank working paper series* [online]. 2008, no. 944 [cit. 2014-12-19]. Dostupné na internete: <http://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp944.pdf>
6. KUPKOVIČ, P. - BENKOVIČ, M. Teoretický vývoj DSGE modelovania. In *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu*. [cit. 2015-04-10]. - Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2014. ISBN 978-80-225-3985-2, s. 5
7. KYDLAND,E.F. – PRESCOTT,E.C. 1982. Time to build and aggregate fluctuations. In *Econometrica* [online]. 1982, vol. 50, no. 6 [cit. 2014-12-28]. Dostupné na internete: <http://www.fep.up.pt/docentes/pcosme/s-e-1/kP-Econ.pdf>
8. PYTLARCZYK,E. 2005. An estimated DSGE model for the German economy within the Euro area. In *Deutsche Bundesbank discussion papers* [online]. 2005, no.33 [cit. 2014-12-20]. Dostupné na internete: [https://www.bundesbank.de/Redaktion/EN/Downloads/Publications/Discussion\\_Paper\\_1/2005/2005\\_09\\_27\\_dkp\\_33.pdf?\\_blob=publicationFile](https://www.bundesbank.de/Redaktion/EN/Downloads/Publications/Discussion_Paper_1/2005/2005_09_27_dkp_33.pdf?_blob=publicationFile)
9. SENAJ,M. 2007. DSGE modelovanie – nová výzva pre NBS. In *Biatec* odborný bankový časopis [online]. 2007, 30 s. [cit. 2014-12-18]. Dostupné na internete: [http://www.nbs.sk/img/Documents/PUBLIK\\_NBS\\_FSR/Biatec/Rok2007/Biatec\\_8\\_2007.pdf](http://www.nbs.sk/img/Documents/PUBLIK_NBS_FSR/Biatec/Rok2007/Biatec_8_2007.pdf)

### **Kontaktné údaje**

Ing. Martin Benkovič

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [benkovic.m@gmail.com](mailto:benkovic.m@gmail.com)

# PORTFÓLIO, DYNAMIZÁCIA A NÁKLADY NA ZMENU PORTFÓLIA

## PORTFOLIO, DYNAMIZATION AND THE COSTS OF CHANGE OF THE PORTFOLIO

*Ivan Brezina*

### **Abstrakt**

V príspevku sa autori zameriavajú na teoretický aspekt dynamického výberu portfólia založeného na rozhodovacom strome možností. Tvorba dynamického portfólia si pritom vyžaduje zahrnúť náklady na zmenu portfólia. Interakcia dynamického pohľadu na portfólio manažment a modelu zahŕňajúceho náklady vytvárajú vhodný základ na Autori v tomto príspevku modifikujú model výberu portfólia založený na miere rizika Mean Absolute Deviation (MAD) a zahŕňajú náklady na zmenu portfólia do modelu. Interakcia dynamického pohľadu na portfólio manažment a modelu zahŕňajúceho náklady na zmenu portfólia vytvárajú dobrý základ na tvorbu dynamického modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD a zahŕňajúceho náklady na zmenu portfólia.

***Kľúčové slová:** portfólio, rozhodovací strom, Mean Absolute Deviation (MAD)*

### **Abstract**

In this paper the authors focus on the theoretical aspect of dynamic portfolio selection based on event tree of possibilities. Building of the dynamic portfolio needs to include the cost of change of portfolio. The authors modify in this paper the portfolio selection model based on risk measure Mean Absolute Deviation (MAD) and include the costs of change of the portfolio into the model. The interaction of the dynamic view on portfolio management and the model included cost of change of portfolio make a good basis for creation the dynamic portfolio selection model based on MAD risk measure and included the costs of changes in portfolio.

***Keywords:** portfolio, event tree, Mean Absolute Deviation (MAD)*

## **1 ÚVOD**

Problematika výberu portfólia je značne rozsiahlou a v súčasnosti debatovanou témou. Tento príspevok sa venuje problematike dynamizácie výberu portfólia a navrhuje tiež i začlenenie nákladov a modifikáciu už existujúceho modelu výberu portfólia založeného na miere rizika Mean Absolute Deviation (MAD), ktorému sa vo svojej práci venovali autori Konno a Yamazaki.

Problematika dynamického výberu portfólia a zahrnutie nákladov pri jeho zostavovaní je pritom značne prepojená, keďže nemá zmysel uvažovať o zmenách v portfóliu v čase, pokiaľ nepredpokladáme náklady, ktoré sú reálne so zmenou portfólia spojené. Táto téma je značne rozsiahla a tak sa v tomto príspevku zameriame na teoretický náčrt a návrh schémy riešenia tohto problému.

## 2 DYNAMIZÁCIA PROBLÉMU VÝBERU PORTFÓLIA

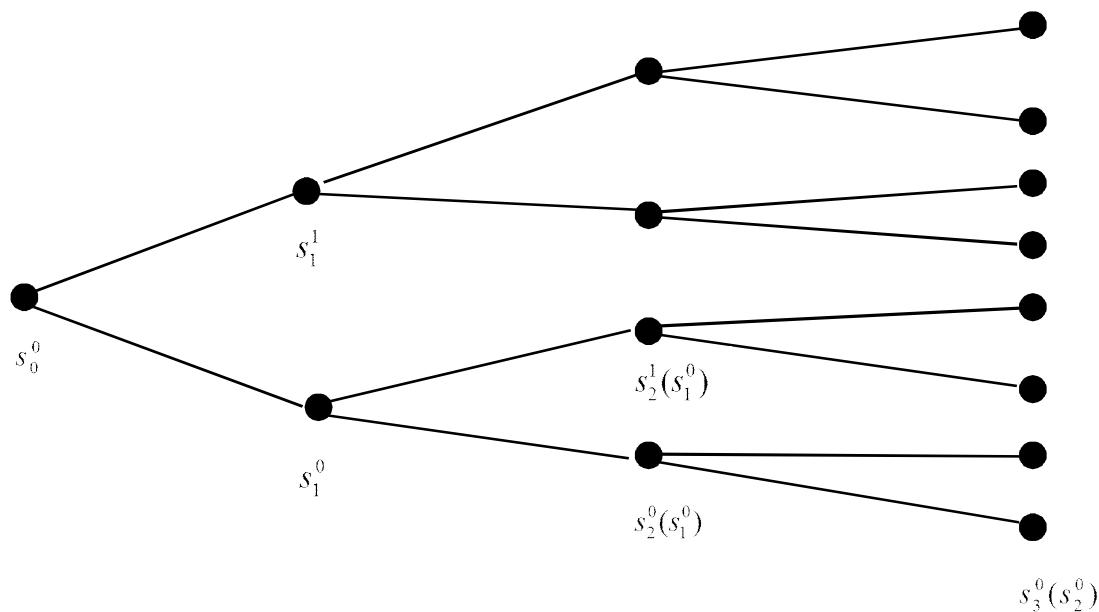
Štandardne sa dynamické modely výberu portfólia, ktorým sa venovali napríklad Norkin a kol. (1998), Zenios (2007), Brezina a Dolinajcová (2011), riešia na základe vetvenia rozhodovacieho stromu možností. Ako prvý krok je pritom potrebné zostaviť rozhodovací strom možností, ktoré môžu nastať pri práci s uvažovaným portfóliom. Predpokladajme pritom, že v každom stave (rozhodovacom kroku 0, 1, 2, ...) môžu nastať dve možnosti, stavy ( $s^0, s^1$ ).

Investor sa môže rozhodnúť, že je portfólio výhodnejšie zmeniť (stav  $s^1$ ), resp. ponechať si pôvodné portfólio (stav  $s^0$ ). Takto môžu napríklad v prvom rozhodovacom kroku nastať dva stavy  $s^0$  a  $s^1$ . Je preto nutné sledovať denný vývoj na trhu, najmä parametre, ktoré sú pre investora dôležité. Týmito parametrami môžu byť napríklad: cena, úrokové sadzby, náklady spojené s držbou, či zmenou portfólia, resp. cashflow. Informácia o týchto parametroch však musí byť náležite ohodnotená a následne zahrnutá do transakcií predaja a kúpy cenných papierov a krátkodobého poskytovania, či prijímania pôžičiek.

V ďalšej perióde tak získame ďalšie portfólio, ktoré slúži ako východiskový bod do nasledujúcej periódy, pričom sa stále opierame i o obe predošlé možnosti, že transakcia bola, či nebola vykonaná.

Rozhodnutia je potrebné urobiť vždy počas každej novej periódy. Takže rozhodnutia v konkrétnej perióde sú závislé od všetkých predošlých možných rozhodnutí, ktoré už boli realizované. Ilustrácia daného problému je zobrazená na obrázku 2.

Obrázok 2: Ukážka rozhodovacieho stromu možností pri dynamickej optimalizácii portfólia



Zdroj: Vlastné spracovanie

Pokiaľ teda predpokladáme vytvorenie začiatočného portfólia v stave  $s_0^0$ , v stave  $s_1$  sa investor na základe parametrov, ktoré pokladá za podstatné, rozhodne, či si dané portfólio ponechá a nastane tak stav  $s_1^0$ , alebo vytvorí nové portfólio, pričom musí zohľadniť náklady spojené so zmenou tohto portfólia, a tak nastane stav  $s_1^1$ .

Získané alternatívy je možné nanovo vyhodnocovať a v ďalšom kroku ich pokladať ako východiskové riešenie pre opätovné rozhodovanie sa o ponechaní si vytvoreného portfólia, resp. o jeho zmene. Takto napríklad v druhom stave (v druhom období)  $s_2$  na základe predchádzajúceho stavu  $s_1$  môžu nastať štyri stavy:  $s_2^0(s_1^0)$ , teda investor si ponechá portfólio z prvého kroku, pričom si v prvom kroku ponechal pôvodné portfólio,  $s_2^1(s_1^0)$ , teda vytvorí nové portfólio na základe portfólia z prvého kroku, pričom si v prvom kroku ponechal pôvodné portfólio,  $s_2^0(s_1^1)$ , teda ponechá si portfólio z prvého kroku, pričom v prvom kroku vytvorí nové portfólio a stav  $s_2^1(s_1^1)$ , teda vytvorí nové portfólio na základe portfólia z prvého kroku, pričom si v prvom kroku vytvoril taktiež nové portfólio.

Na konci investičného obdobia tak investor získa množinu všetkých možných stavov, z ktorých následne môže vyberať svoju stratégiu, ktorá je pre neho optimálna a pri ktorej maximalizuje svoj cieľ. V tomto príspevku pritom uvažujeme, že investor sa snaží maximalizovať konečnú hodnotu portfólia, pričom sa rozhoduje na základe výnosov jednotlivých aktív, ktoré sú počítané na základe ceny aktív v jednotlivých stavoch.

### **3 MODEL VÝBERU PORTFÓLIA SO ZAHRNUTÍM NÁKLADOV NA ZMENU ZLOŽENIA PORTFÓLIA**

Model výberu portfólia založený na miere rizika Mean Absolute Deviation (MAD), vytvorený Konnom a Yamazakim (1991), sa stretol s pozitívnym ohlasom odbornej verejnosti, no stále predstavoval iba statickú verziu výberu portfólia. Rozhodnutia boli vytvárané iba k určitému časovému okamihu, pričom sa predpokladalo s investovaním iba do ďalšieho stavu, pričom neboli zahrnuté možné zmeny v portfóliu počas doby trvania investície.

Vytvorenie dynamického modelu na báze vetvenia rozhodovacieho stromu možností na základe statického prístupu, ktorý je opísaný v kapitole predchádzajúcej časti, je však možné, pretože jednotlivé stavy na všetkých vetvách rozhodovacieho stromu môžu byť prepočítavané ako statické rozhodovanie sa v danom stave. Následne tak môže byť vypočítaná množina všetkých možných stavov a konečným riešením je teda výber takého portfólia, ktoré na konci investičného obdobia maximalizuje hodnotu portfólia, pričom v každom období je zohľadnené i riziko, ktoré je investor ochotný podstúpiť. Nevýhodou však je ignorovanie nákladov, ktoré vznikajú pri zmene portfólia a reálnu konečnú hodnotu portfólia teda znižujú.

Naším cieľom je vytvoriť model, ktorý by priamo určil maximálnu hodnotu portfólia, pričom bude brať ohľad na riziko, ktoré je investor ochotný podstúpiť. Súčasťou modelu však budú i náklady súvisiace so zmenou portfólia, bez ktorých nemá zmysel uvažovať o dynamickom modeli výberu portfólia. Pretože takéto náklady sú v praxi počítané na základe finančného objemu predávaných a nakupovaných aktív, budeme o takýchto nákladoch  $C$  uvažovať i my, pričom budú stanovené ako percento zo zmeny ich objemu. Vychádzať pritom budeme z modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD.

Predpokladajme, že investor sa rozhoduje na základe  $m$  historických údajov o  $n$  aktívach do ktorých uvažuje investovať. Investičný horizont  $T$  sa teda nachádza na konci investičného obdobia, pričom portfólio nadobúda stavy  $t = m + 1, m + 2, \dots, T$  a prvotná tvorba portfólia teda nastáva v stave  $t = m + 1$ .

Účelová funkcia je navrhnutá tak, aby v modeli výberu portfólia založenom na miere rizika MAD maximalizovala hodnotu portfólia v konečnom období  $T$ . Hodnota portfólia



v konečnom období  $T$  je pritom stanovená na základe ceny jednotlivých aktív  $p_{iT}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) v danom období  $T$  a ich množstva:

$$\max \sum_{i=1}^n p_{iT} x_{iT} \quad (1)$$

Model zároveň musí rešpektovať rozpočtové ohraničenie investora  $V_0$ , ktoré má na začiatku investície (2).

$$\sum_{i=1}^n p_{it} x_{it} = V_0 \quad t = m + 1 \quad (2)$$

Pre potreby vytvorenia modelu je potrebné zaviesť vstupnú premennú  $y_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$ ), ktorá bude nadobúdať hodnotu absolútnej odchýlky na základe ohraničení. Pokiaľ poznáme hodnotu absolútnej odchýlky, môžeme sa následne venovať riziku, ktoré je investor ochotný podstúpiť. Zohľadniť pritom však musíme nielen hodnotu vstupnej premennej  $y_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$ ), ale rovnako i množstvo vlastneného aktíva  $x_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$ ) v danom portfóliu, nakoľko odchýlka pri jednotlivých akciách môže byť rôzna a váha, ktorá prislúcha danému aktívu, bude veľmi dôležitá.

Práve váha významným spôsobom ovplyvní zvýšenie, či zníženie rizika celého portfólia. Ak by sme ako váhu brali iba cenu jednotlivých aktív  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), nebolo by dostatočne zhodnotené množstvo, ktoré bolo investované do daného aktíva.

Pri dynamickom modeli výberu portfólia musíme uvažovať i o množstve držaných aktív, ktoré sa v čase môže meniť, nakoľko samotná cena aktíva by mohla riziko skresľovať. Pri relatívne nízkej absolútnej odchýlke by bola do úvahy braná iba cena, ktorá však nevyjadruje vzťah k veľkosti rizika. A teda aj pri vlastníctve viacerých jednotiek aktíva s nízkou cenou, no vysokou absolútnou odchýlkou by mohlo byť vyhodnotené riziko rovnako, ako pri aktíve s nízkou absolútnou odchýlkou a vysokou cenou. Pritom je evidentné, že riziko je pri druhom spomínanom aktíve nižšie.

Ako vhodný parameter sa preto javí hodnota jednotlivých aktív v pomere k hodnote celého portfólia. Tento parameter predstavuje váhu rizika pri jednotlivých aktívach a zahrňuje ako ich cenu  $p_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$ ), tak i množstvo vlastneného aktíva  $x_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$ ). Ohraničenie (3.12) z pôvodného modelu výberu portfólia založeného na miere rizika MAD môžeme potom upraviť na tvar:

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_{it} x_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{it} x_{it}} y_{it} \leq MRV_0 \quad (3)$$

Podmienkou (3) je zabezpečené, že celkové riziko počas uvažovaných jednotlivých stavov investovania nepresiahne mieru rizika, ktorá je pre investora prijateľná.

Ako sme už uviedli, tvorba dynamického modelu výberu portfólia je zaujímavá iba v prípade, pokiaľ vezmeme do úvahy i náklady, ktoré sú spojené s jeho zmenou. Tieto náklady pritom berieme ako určité percento z hodnoty aktív, ktoré boli menené, teda ako isté percento z predaja, či nákupu aktív. Tento náklad na zmenu portfólia v percentách budeme ďalej

označovať ako  $C$ . Hodnotové vyjadrenie uvedeného nákladu spojeného so zmenou  $i$ -tého aktíva v  $t$ -tom období označíme ako  $yy_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1$ ).

Objem nakupovaného, či predávaného množstva stanovíme ako rozdiel v množstve spravovaného aktíva v súčasnom období oproti minulému obdobiu. Pretože uvažujeme o nákladoch z hodnoty nakupovaných či predávaných aktív, tento rozdiel medzi množstvom spravovaných aktív musíme rovnako spojiť s ich cenou v danom období, pričom získame hodnotu daného aktíva v príslušnom období.

Pokiaľ uvažujeme o nákupe akcií, zistíme hodnotu nákladu spojeného s ich nákupom ako:

$$yy_{i(t+1)} \geq (x_{i(t+1)} - x_{it})p_{i(t+1)}C \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (4)$$

kde:

$yy_{i(t+1)}$  – náklad spojený so zmenou  $i$ -tého aktíva v období  $t + 1$ ,

$C$  – náklad na zmenu aktíva v percentách.

O takomto náklade je samozrejme potrebné uvažovať iba v príslušnom investičnom období. V prípade prvotného vytvárania portfólia takýto náklad nemá zmysel, pretože predpokladáme, že investor na začiatku prvého nevlastnil žiadne z aktív a všetky aktíva sú teda nakupované na začiatku investičného obdobia.

Naopak, pokiaľ by sa uskutočnil predaj aktív, vzťah (4) by už viac nevyjadroval hodnotu nákladu spojeného so zmenou portfólia, pretože rozdiel v množstve držaných aktív v portfóliu by bol záporný. To by viedlo k tomu, že by množstvo držaného aktíva bolo nižšie ako v predošlom období. Veľkosť nákladov spojených s jeho zmenou by mohla následne nadobúdať i záporné hodnoty. Pretože náklady by nemali nadobúdať záporné hodnoty, je potrebné uvažovať iba o ich kladnej hodnote. To sa dá zabezpečiť tým, že budeme uvažovať s absolútnou hodnotou z rozdielu spravovaných aktív zo súčasného stavu a z predošlého stavu. Preto pre predaj aktíva je potrebné vzťah (4) mierne modifikovať do tvaru:

$$yy_{i(t+1)} \geq -(x_{i(t+1)} - x_{it})p_{i(t+1)}C \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (5)$$

kde:

$yy_{i(t+1)}$  – náklad spojený so zmenou  $i$ -tého aktíva v období  $t + 1$ ,

$C$  – náklad na zmenu aktíva v percentách.

Kombinácia podmienok (4) a (5) zabezpečí, že v modeli budú do úvahy brané iba hodnoty nákladu bez ohľadu na to, či investor uvažuje s nákupom alebo predajom príslušného aktíva.

Pokiaľ je známa výška nákladov súvisiacich so zmenou portfólia v predchádzajúcom období, možno určiť rozpočtové ohraničenie pre investora pre súčasné obdobie. Investor si z predchádzajúceho obdobia priniesol určité portfólio, ktorého hodnota sa však na základe zmeny ceny jednotlivých aktív zmenila. Tým nastal stav, v ktorom sa zmenilo rozpočtové ohraničenie investora.

V danom období môže investor investovať iba takú hodnotu aktív, ktorá je obmedzená hodnotou portfólia vytvoreného v predošlom období, no pri súčasných cenách, teda

$\sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{it}$ . Táto nová hodnota portfólia však musí byť znížená o náklady spojené s prípadnou zmenou portfólia  $\sum_{i=1}^n y y_{i(t+1)}$ . Tým dostávame nové rozpočtové ohraňenie, ktoré je aktuálne pre daný stav a má tvar:

$$\sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{i(t+1)} = \sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{it} - \sum_{i=1}^n y y_{i(t+1)} \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (6)$$

Zmena portfólia je teda limitovaná z jednej strany rizikom, ktoré je investor ochotný pri investícii podstúpiť, a z druhej strany by mala byť ohraňená nákladmi, ktoré sú spojené so zmenou portfólia.

Na základe už uvedených skutočností, ktorým zodpovedajú príslušné ohraňenia, môžeme vytvoriť nasledujúci model výberu portfólia založeného na miere rizika MAD, ktorý zohľadňuje náklady na zmenu portfólia:

$$\max \sum_{i=1}^n p_{iT} x_{iT} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{it} x_{it} = V_0 \quad t = m + 1 \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_{it} x_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{it} x_{it}} y_{it} \leq MRV_0 \quad (9)$$

$$y y_{i(t+1)} \geq (x_{i(t+1)} - x_{it}) p_{i(t+1)} C \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (10)$$

$$y y_{i(t+1)} \geq -(x_{i(t+1)} - x_{it}) p_{i(t+1)} C \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{i(t+1)} = \sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{it} - \sum_{i=1}^n y y_{i(t+1)} \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (12)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (13)$$

Takto zostavený model výberu portfólia založený na miere rizika MAD rieši výber portfólia pri akceptovaní nákladov na jeho zmenu, ako aj rizika spojeného s investovaním. Jeho značným nedostatkom je však skutočnosť, že sa nejedná o lineárny model, čo môže viesť k určitým problémom pri hľadaní jeho riešenia.

Pôvodný model výberu portfólia založený na miere rizika MAD rieši problém nelineárnosti zavedením premennej  $y$ . Pri nákladoch na zmenu portfólia sme taktiež zabezpečili lineárnosť modelu tým, že sme rozdelili ohraničenia pre nákup a predaj aktív. Problematickými však ostávajú váhy, ktoré sú použité pri zabezpečení maximálneho prípustného rizika pre investora (9). Toto ohraničenie sa však dá upraviť analogicky ako podobné predošlé ohraničenia zavedením umelej premennej. Zavedieme teda umelú premennú  $r_t$  ( $t = m + 1, m + 2, \dots, T$ ), pre ktorú bude platiť:

$$\sum_{i=1}^n p_{it}x_{it}y_{it} \leq r_t \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (14)$$

$$-\sum_{i=1}^n p_{it}x_{it}y_{it} \leq r_t \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (15)$$

Pomocou uvedenej premennej  $r_t$  ( $t = m + 1, m + 2, \dots, T$ ) potom môžeme následne upraviť vzťah pre zabezpečenie maximálneho prípustného rizika pre investora tak, aby bol adekvátny vzťahu (9) na tvar:

$$\frac{r_t}{\sum_{i=1}^n p_{it}x_{it}} \leq MRV_0 \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (16)$$

Pri takto zmenených ohraničeniach získame lineárny model výberu portfólia založený na miere rizika MAD v nasledujúcom tvare:

$$\max \sum_{i=1}^n p_{iT}x_{iT} \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{it}x_{it} = V_0 \quad t = m + 1 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{it}x_{it}y_{it} \leq r_t \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (19)$$

$$-\sum_{i=1}^n p_{it}x_{it}y_{it} \leq r_t \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (20)$$

$$\frac{r_t}{\sum_{i=1}^n p_{it} x_{it}} \leq MRV_0 \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (21)$$

$$yy_{i(t+1)} \geq (x_{i(t+1)} - x_{it}) p_{i(t+1)} C \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (22)$$

$$yy_{i(t+1)} \geq -(x_{i(t+1)} - x_{it}) p_{i(t+1)} C \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{i(t+1)} = \sum_{i=1}^n p_{i(t+1)} x_{it} - \sum_{i=1}^n yy_{i(t+1)} \quad t = m + 1, m + 2, \dots, T - 1 \quad (24)$$

$$x_{it} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n; t = m + 1, m + 2, \dots, T \quad (25)$$

Takto zostavený model výberu portfólia založený na miere rizika MAD sa dá použiť len na analýzu nákladov a rizika spojeného s investovaním, nie je pritom použiteľný pri investovaní na trhu, pretože stále pracuje s reálnou cenou a teda i s reálnym výnosom, ktoré pre investora nie sú dopredu reálne známe.

V prípade, že by v uvedenom modeli namiesto reálnej ceny bola použitá očakávaná cena, dalo by sa uvažovať i o použití modelu na reálnu investíciu. Takýto model by však vykazoval značné nezrovnalosti, nakoľko by zachovával trendy aktív, ktoré by sa najmä pri investovaní vo väčšom časovom horizonte mohli značne líšiť od skutočnosti.

## ZÁVER

V príspevku je prezentovaný predovšetkým návrh prístupu k tvorbe dynamického modelu portfólia založený na aplikácii rozhodovacieho stromu možností, ktorý zachycuje jednotlivé stavy investície a umožňuje tak nájdenie optimálneho riešenia, ktoré nikdy nemôže byť horšie než riešenie poskytnuté statickým modelom výberu portfólia, nakoľko takéto riešenie je tiež zohľadnené a berie sa ako jedno z možných. Takýto rozhodovací strom možností bol navrhnutý predovšetkým na prípadnú modifikáciu modelu výberu portfólia založeného na miere rizika Mean Absolute Deviation (MAD), ktorý je upraviteľný podľa tejto myšlienkového schémy.

Pre dynamizáciu modelu výberu portfólia je modifikovaný i model založený na miere rizika MAD, do ktorého sú zahrnuté i náklady na zmenu portfólia, bez ktorých nemá zmysel uvažovať o prípadných zásahoch do zloženia portfólia v čase.

Navrhované prístupy k vytváraniu a správe portfólia tvoria pritom teoretický základ vhodný na ďalší rozvoj v oblasti dynamického výberu portfólia.

### **Poznámka**

Tento príspevok vznikol v rámci riešenia projektu Interný grant mladých vedeckých pracovníkov a doktorantov EU v Bratislave č. I-15-105-00 „Komparácia podnikateľského prostredia vybraných krajín z hľadiska inovačných aktivít“.

### **Použitá literatúra**

1. BREZINA, I., DOLINAJCOVÁ, M. 2012. Výber dynamického portfólia založený na teórii rozhodovacích stromov. In: 6th International Scientific Conference Managing and Modelling of Financial Risks, Ostrava.
2. BREZINA, I. 2013. Rôzne prístupy k analýze portfólia. In: Information technology aplikations/ Aplikácie informačných technológií 1/2013, pp. 31–42
3. KONNO, H., YAMAZAKI, H. 1991. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. Management Science, Vol. 37, No. 5, s. 519–531
4. NORIKIN, V. I., PFLUG, G. CH., RUSZCZYŃSKI, A. 1998. A branch and bound method for stochastic global optimization. In: Mathematical Programming. Berlin: Springer. ISSN 0025-5610
5. ZENIOS, S. A. 2007. Practical financial optimization, Decision Making for Financial Engineers. Padstow: Blackwell Publishing.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Ivan Brezina, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Národohospodárska fakulta

Dolnozemska 1, 852 35 Bratislava

Tel: 02/6729 1556

email: ivan.brezina.nhf@euba.sk

# VYUŽITIE FRAKTÁLOVÝCH ŠTRUKTÚR PRI INOVÁCII VÝROBKU

## THE USE OF FRACTAL STRUCTURES FOR PRODUCT INNOVATION

*Juraj Dubovec*

### **Abstrakt:**

V príspevku sú popísané možnosti využitia vlastností fraktálových štruktúr pri inovácii výrobku. Základnou ideou fraktálových štruktúr je opakovateľnosť a spájanie určitých základných objektov do veľkej variability finálnych výrobkov. Na simulovanom príklade s využitím stavebnice „Lego“ sú popísané výsledky takejto inovácie

**Kľúčové slová:** *fraktál, inovácia, výrobok*

### **Abstract**

In the article, there are described possibilities of use of fractal structures characteristics for product innovation. The basic idea of fractal structures is their repeatability and assembling several basic objects into a big variability of final products. Results of such innovation are described on a simulated example using "Lego" building blocks.

**Key words:** fractal, innovation, product

## ÚVOD

Hoci pojem fraktálová geometria je známy od konca 70-tych rokov 20. storočia, neexistuje presná definícia fraktálu. Fraktály sú v podstate množiny, ktorých geometrický motív sa opakuje vo vlastnom materskom telese.

Fraktál možno najjednoduchšie definovať ako nekonečne členitý útvar. Opakom nekonečne členitého útvaru je geometricky hladký útvar. Príkladom geometricky hladkých útvarov sú euklidovské telesá, ako je priamka, kruh, kocka alebo guľa.<sup>1</sup> Mandelbrot vo svojom diele použil inú definíciu, pričom sa opieral o vlastnosť fraktálov nazývanú sebe podobnosť. Fraktál je podľa neho útvar zložený z častí, ktoré sú podobné celku. Je tak možné definovať sebe podobnostnú dimenziu, z ktorej je následne možné odvodiť fraktálovú dimenziu.<sup>2,3,4</sup>

Niektoré ďalšie definície hovoria, že fraktál je objekt, ktorého geometrická štruktúra sa opakuje v ňom samom.<sup>5,6</sup>

---

<sup>1</sup> <http://www.ksr.tul.cz/fraktaly/definice.html>

<sup>2</sup> BUNDE, A. – HAVLIN, S.: *Fractals in science*. 1994.

<sup>3</sup> MANDELBROT, B.B.: *The fractal geometry of nature*. 1982.

<sup>4</sup> PEITGEN, H.O. – JUERGENS, H. – SAUPE, D.: *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. 1992.

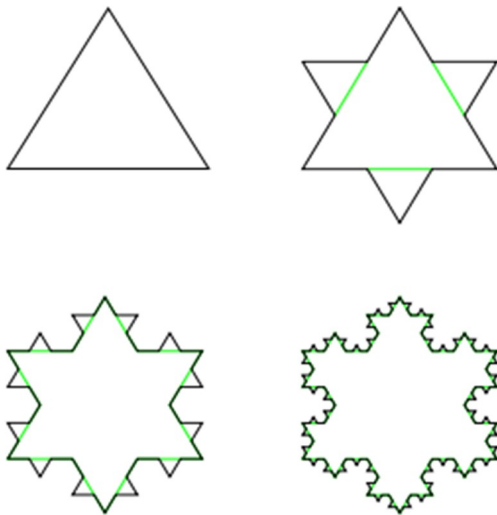
<sup>5</sup> ZELINKA, Ivan.: *Aplikovaná informatika aneb úvod do fraktální geometrie, buněčných automatů ...* 1999.

<sup>6</sup> ZELINKA, I. – VČELAR, F. – ČANDÍK, M.: *Fraktální geometrie - principy a aplikace*. 2006.

Dôležitým pojmom, ktorý je potrebné pri popisovaní fraktálov spomenúť, je sebe podobnosť. Sebe podobnosť je taká vlastnosť objektu, ktorá spôsobuje, že objekt alebo jeho časť vyzerá podobne, nech sa naň pozeráme v akomkoľvek zväčšení. Sebe podobnosť je jedným z hlavných znakov fraktálových útvarov. Sebe podobné sú napríklad kameň, hory, mraky, stromy, rastliny alebo aj krátery, teda objekty živej i neživej prírody. Sebe podobnosť je jednou z typických vlastností fraktálových štruktúr.<sup>7</sup>

Fraktály sú charakteristické súborom určitých typických vlastností. Tieto vlastnosti je možné popísať pomocou Kochovej krivky. O Kochovej krivke možno povedať, že:

- je spojitá, sama seba nikde nepretína a nikde nemá deriváciu,
- je striktne sebepodobná, čo znamená, že jej jednotlivé časti budú vždy presnou, zmenšenou replikou pôvodnej krivky,
- jej dĺžka je nekonečná, hoci sa vyskytuje na konečnej ploche,
- v prípade merania jej dĺžky pomocou rôznych merítok by dĺžka bola vždy odlišná; táto dĺžka by sa predlžovala so znižujúcou sa dĺžkou merítka.



Obrázok č. 1: Kochova krivka

Uvedené vlastnosti Kochovej krivky sú platné pre väčšinu fraktálov.

Ako príklad realizácie riešenia bola zvolená veľmi populárna stavebnica LEGO. Vďaka tejto stavebnici je možné vyskladať veľké množstvo rôznych výtvorov z nie príliš veľkého počtu rôznych dielov. A práve jednotlivé diely možno vnímať ako fraktály, teda akési základne objekty, ktoré sa opakujú, buď v jednom konkrétnom výtvore, alebo vo viacerých výtvoroch naraz a prispievajú tak k vysokej variabilite.

Stavebnica LEGO bola použitá na zostavenie modelov šiestich vozidiel. Každé z týchto vozidiel vychádza z tzv. *základu modelov*, čo je spoločné jadro všetkých šiestich modelov. Tie vznikli „rozvíjaním“ základu modelov o ďalšie špecifické komponenty.

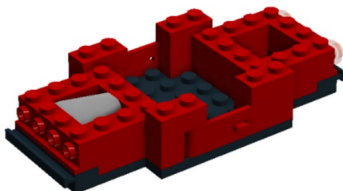
Na zostavenie modelov nebola použitá stavebnica LEGO v jej fyzickej podobe, ale vo virtuálnej a to prostredníctvom softvéru *LEGO Digital Designer*.

<sup>7</sup> <http://www.root.cz/clanky/fraktaly-v-pocitacove-grafice-iii/#k01>



# 1 ZÁKLAD MODELOV


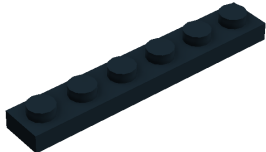
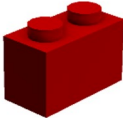
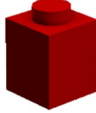
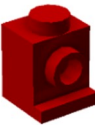
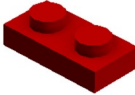
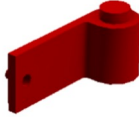
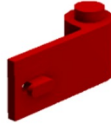

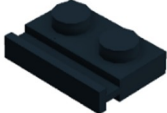

Základ modelov je štruktúra, ktorá je spoločná pre všetky vytvorené modely vozidiel a obsahuje karosériu modelov vozidiel spolu s osadeným motorom, dverami a zadnými svetlami.



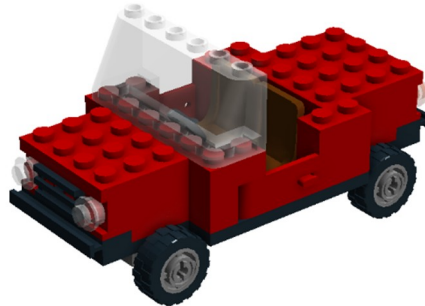
Obrázok č.2: Základ modelov

Kusovník, teda zloženie a počet jednotlivých komponentov základu modelov, je zobrazený v tabuľke 1.

Tabuľka 1: Kusovník základu modelov


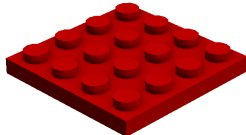


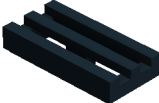




Podvozok 4 x 12 <i>1 - krát</i>		Podvozok 1 x 6 <i>2 - krát</i>	
Karoséria 1 x 2 vysoké <i>11 - krát</i>		Karoséria 1 x 1 vysoké <i>2 - krát</i>	
Karoséria 1 x 1 vysoké + bočné <i>6 - krát</i>		Karoséria 1 x 2 vysoké <i>16 - krát</i>	
Dvere ľavé <i>1 - krát</i>		Dvere Pravé <i>1 - krát</i>	
Motor <i>1 - krát</i>		Časť nárazníka <i>4 - krát</i>	
Svetlo červené <i>2 - krát</i>			

**Model „Lahkost“** predstavuje základnú konfiguráciu vozidla. V skutočnosti by tento model predstavoval automobil bez prémiového príslušenstva charakteristický najnižšou cenou a najväčším dopytom z pohľadu zákazníkov. Model Lahkost vznikol rozšírením základu modelov najpodstatnejšími časťami, ktorými sú predná a zadná kapota, kolesá, predné sklo, sedadlá, volant, predná mriežka a svetlá. Model je zobrazený na obrázku č.3.



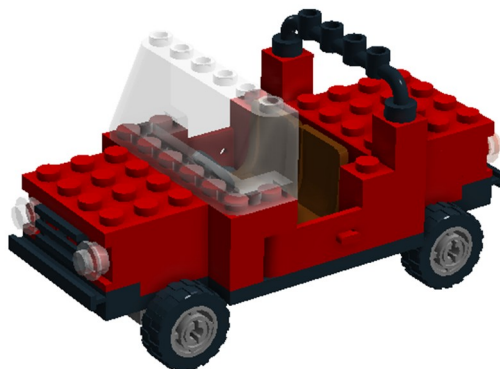
Obrázok č.3: Model „Lahkost“

Tabuľka 1: Nadštandardné komponenty modelu Lahkost

Diferenciál <i>2 - krát</i>		Karoséria 4 x 4 <i>2 - krát</i>	
Disk <i>4 - krát</i>		Pneumatika <i>4 - krát</i>	
Predná mriežka <i>1 - krát</i>		Svetlo biele <i>2 - krát</i>	
Sklo predné <i>1 - krát</i>		Sedadlo hnedé <i>2 - krát</i>	
Volant červený <i>1 - krát</i>			

V ďalšej časti sú zobrazené jednotlivé modely vozidiel, ktoré zdieľajú túto základnú štruktúru (rozpis dodatočných položiek na jednotlivé modely z dôvodu miesta neuvádzam).

**Model „Šport“** sa príliš nelíši od modelu Ľahkosť. Jediný rozdiel, spočíva v pridaní oblúku v zadnej časti vozidla. Model je zobrazený na obrázku č.4.



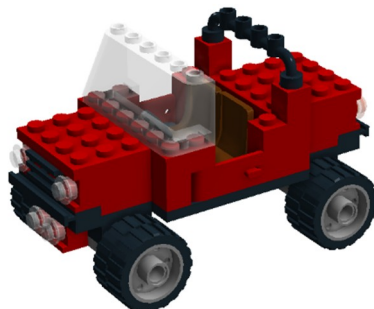
Obrázok č.42: Model „Šport“

**Model „LX“** zdieľa s modelom Šport väčšinu spoločných prvkov. Oproti modelu Ľahkosť spočívajú hlavné rozdiely, v inom farebnom prevedení prednej mriežky vozidla, predných svetiel a skla. Model je zobrazený na obrázku č.5.



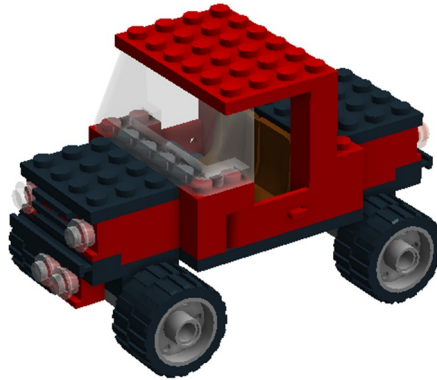
Obrázok č.5: Model „LX“

**Model „Terén“** taktiež obsahuje výrazný zadný oblúk, no oproti modelu Ľahkosť sa objavuje ešte viac odlišností ako predošlé modely. Väčšie kolesá sú podmienkou pre zvýšený podvozok, okrem toho ďalší pár svetiel na prednej strane. Model je zobrazený na obrázku č.6.



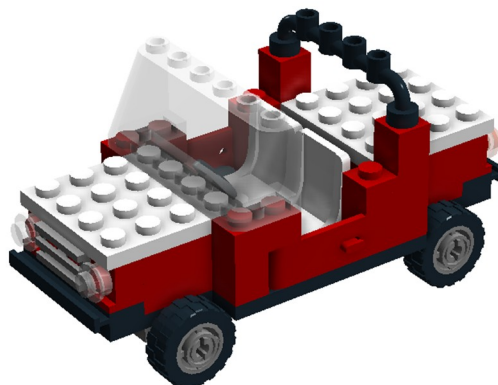
Obrázok č.6: Model „Terén“

**Model „Pickup“** vychádza z predchádzajúceho modelu Terén. Na rozdiel od Terénu nedisponuje zadným oblúkom, ale má namiesto neho strechu. Ďalšia odlišnosť spočíva vo farbe vrchnej časti karosérie v prednej aj zadnej časti vozidla. Model je zobrazený na obrázku č.7.



Obrázok č.7: Model „Pickup“

**Model „Elegant“** je model LX „prevlečený do bieleho kabátu“ a zároveň je to jeho drahšia verzia. Elegant sa odlišuje aj vo farbe prednej a zadnej kapoty, farbe volantu a sedadiel. Všetky tieto komponenty sú biele. Model taktiež disponuje šedou prednou mriežkou. Model je zobrazený na obrázku č.8.



Obrázok č.8: Model „Elegant“

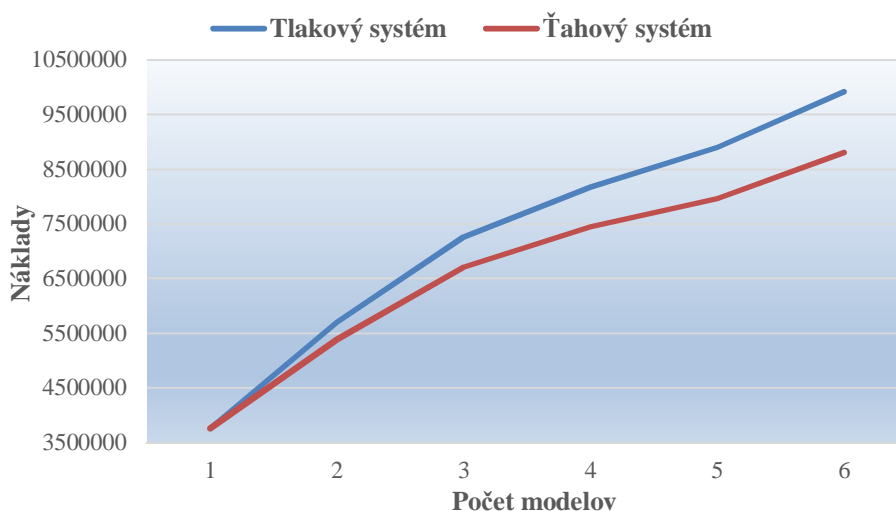
## 2 VÝPOČTY

Výpočet nákladov pre tlakový aj ťahový systém výroby bol simulovaný na produkcii 500 vozidiel rozdelených do šiestich modelov. Počet lacnejších modelov v tomto množstve je väčší ako počet tých drahších, resp. so stúpajúcou cenou vozidiel klesá aj ich produkované množstvo, pretože po drahších modeloch je menší dopyt. Počet 500 kusov vozidiel je daný odhadom týždennej produkcie automobilového výrobcu. Reálne čísla by sa samozrejme mohli závod od závodu významne líšiť.

Tabuľka 3: Počty vozidiel

Model	Počet základov modelov	Nadštandardné komponenty	
		Tlakový systém	Ťahový systém
Lahkosť	200	200	100
Šport	100	100	50
LX	80	80	40
Terén	40	40	25
Pickup	30	30	10
Elegant	50	50	25

Vývoj celkových nákladov prehľadne zobrazuje graf 1. Pri použití tlakového a ťahového systému riadenia výroby sa rozdiely v nákladoch zväčšujú. Zatiaľ čo pri dvoch modeloch v ponuke sú tieto rozdiely iba minimálne, pri šiestich modeloch sú už významné. Dosiahnuté výsledky sú dané skutočnosťou, že pri použití tlakového systému sa vytvárajú skladové zásoby, ktoré vychádzajú z prognózy dopytu na určité obdobie. Naproti tomu v ťahovom systéme sa objednávajú nadštandardné komponenty podľa toho, aké sú aktuálne požiadavky po konkrétnom modeli, čo však predlžuje dobu čakania zákazníkov (dnes sa táto dodacia lehota pohybuje okolo 8 týždňov).

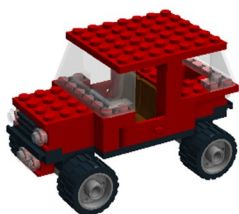


Graf 1: Porovnanie nákladov tlakového a ťahového systému riadenia výroby

Získané výsledky sú základom pre ďalší testovací scenár. Ten sa týka iba ťahového systému riadenia výroby a budeme v ňom zisťovať, do akej miery sa nám zvýšia náklady po pridaní ďalších modelov do produktového portfólia a aké budú tieto náklady v porovnaní s nákladmi tlakového systému za použitia doterajších šiestich modelov vozidiel.

### 3 ZVÝŠENIE POČTU MODELOV U ŤAHOVÉHO SYSTÉMU

Pridanými modelmi sú *SUV*, *Kombi* a *Sedan* a rovnako, ako tie predchádzajúce, aj tieto nové modely zdieľajú spoločné jadro alebo karosériu, základ modelov.



Obrázok 83: Model „SUV“

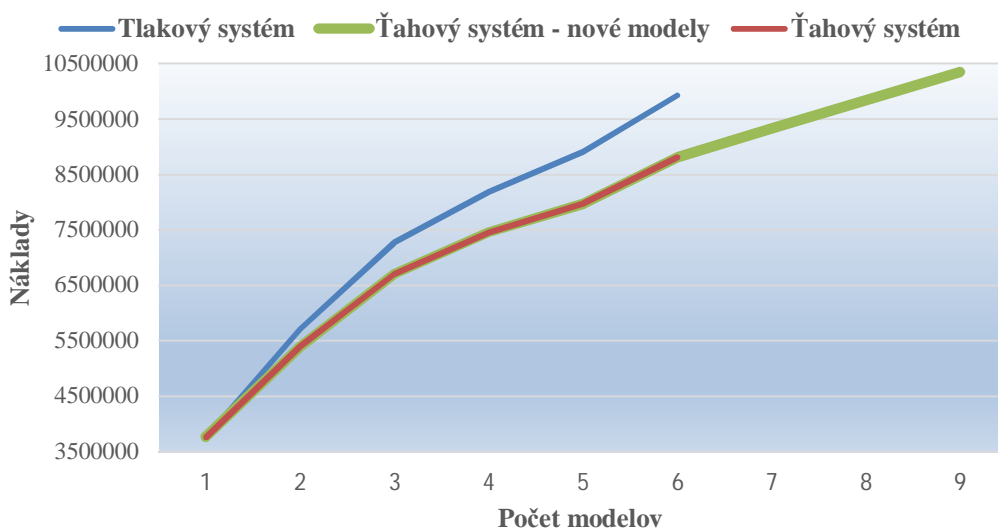


Obrázok 9: Model „Kombi“



Obrázok 10: Model „Sedan“

Výsledky prehľadnejšie zobrazuje graf 2. Modrá a červená čiara sú vyjadrením nákladov pri aplikácii tlakového a ťahového systému za použitia pôvodných šiestich modelov vozidiel. Pridaním modelov na obr. 8-10 s použitím ťahového systému sme udržali náklady podobné ako u tlakového systému, ale ponúkli sme o 3 modely viac pre zákazníkov.



Graf 2: Vývoj celkových nákladov po pridaní nových modelov do ťahového systému riadenia výroby

## 4 VÝSLEDKY

Simulácia ukázala o koľko viac modelov môžeme zaradiť do ponuky produktov, ak by sme použili ťahový systém a neprekročili náklady vynaložené na šesť pôvodných modelov (pri použití tlakového systému riadenia výroby).

Z testovaného príkladu vyplýva skutočnosť, že zavedením fraktálov do návrhu výrobku spolu s ťahovým systémom dokážeme zabezpečiť vysokú mieru variability pri priaznivých nákladoch. Vďaka kombinácii fraktálov a ťahového systému riadenia by sme boli schopní za približne rovnaké náklady, ktoré je potrebné vynaložiť pri pôvodných modeloch ponúknuť viac nových modelov a vykazovať vyššiu variabilitu produktov.

Fraktálové štruktúry možno zaviesť rovnako do tlakového aj ťahového systému. Efektívna je však práve kombinácia s ťahovým systémom, kedy sme schopní ponúknuť zákazníčkovi širokú škálu možností, ako si môže svoj konečný produkt nakonfigurovať, avšak nie je nevyhnutne potrebné, aby sme jednotlivé diely držali v zásobách. Dôležitý je fakt, že zákazník svojou objednávkou určuje, aké diely bude firma objednávať a montovať do finálneho produktu.

**Príspevok bol publikovaný v rámci projektu VEGA č. 1/0363/14 - Inovačný manažment.**

### Zoznam použitej literatúry:

1. Stránka spoločnosti SyNext  
<http://www.synext.cz/nastroje-stihle-vyroby-lean-production.html> (8.3.2015)
2. BUNDE, A. – HAVLIN, S.: *Fractals in science*. Berlin: Springer, 1994. ISBN: 0387562206.
3. FEDORČÁKOVÁ, M – ŠEBO, D.: *Logistické plánovanie a riadenie výroby*. In: Trendy v systémoch riadenia podnikov, 11. medzinárodná vedecká konferencia, Vysoké Tatry, Stará Lesná, 09.-11. december 2008, Zborník príspevkov, TU Košice, 2008. ISBN 978-80-553-0115-0.
4. Konfigurátor vozidiel BMW:  
[http://www.bmw.sk/sk/sk/general/ecom\\_uic/vco/vco.html](http://www.bmw.sk/sk/sk/general/ecom_uic/vco/vco.html) (10.4.2015)
5. Konfigurátor vozidiel Škoda:  
<http://cc-cloud.skoda-auto.com/svk/svk/sk-sk> (10.4.2015)

Adresa autora:

Ing. Juraj DUBOVEC, PhD.

Katedra manažérskych teórií

Fakulta riadenia a informatiky,

Žilinská univerzita

Univerzitná 8215/1, 01026 Žilina,

Tel: (421 41) 513 4454

e-mail: juraj.dubovec@fri.uniza.sk

# PODMIENKY OPTIMÁLNOTI KUHNA-TUCKERA AKO EFEKTÍVNY NÁSTROJ ANALÝZY MODELOV ROVNOVÁHY NA TRHOCH SIEŤOVÝCH ODVETVÍ

## KUHN-TUCKER OPTIMALITY CONDITIONS AS AN EFFECTIVELY TOOLS OF THE ANALYSIS OF EQUILIBRIUM MODELS ON NETWORK INDUSTRY MARKETS

*Michal Fendek*<sup>1</sup>

### **Abstrakt**

V súčasnosti sa v odborných diskusiách na rôznych úrovniach venuje značná pozornosť problematike sieťových odvetví. Je to pochopiteľné, veď sieťové odvetvia zabezpečujú v konečnom dôsledku výrobu a distribúciu energetických zdrojov, ktoré majú pre efektívne fungovanie rozvinutých ekonomík kľúčový význam. Stredobodom záujmu sú obvykle otázky primeraného zisku subjektov sieťových odvetví na jednej strane a otázky úrovne cien ich produkcie determinované odôvodnenými a pre spoločnosť akceptovateľnými nákladmi na strane druhej.

Samozrejme, stav rovnováhy na každom trhu, a teda i na trhu sieťových odvetví je kreovaný na základe konfrontácie medzi úrovňou dopytu a úrovňou ponuky na relevantnom trhu. V príspevku sa budeme zaoberať analýzou mikroekonomických optimalizačných modelov správania sa spotrebiteľa na trhu sieťových odvetví, t. j. analýzou fenoménu dopytu na tomto špecifickom trhu. Pre optimalizačné úlohy budeme formulovať podmienky optimálnosti Kuhna a Tuckera a preskúmame ich interpretačné možnosti pre tento typ ekonomických modelov.

**Kľúčové slová:** *sieťové odvetvia, optimalizačné modely, podmienky optimálnosti Kuhna - Tuckera*

### **Abstract**

Currently a considerable attention to the subject of network industries is being paid in discussions on various levels. It is understandable as network industries in fact ensure the production and distribution of energy sources which play a key role in the developed economies. The discussions are usually focused on the question of reasonable profit of network industries subjects and on the other hand the question of generally acceptable costs. Naturally, equilibrium on the network industries market, as well as on any market, is being created based on the level of demand and supply on said market. In this paper we will discuss the analysis of microeconomic optimization models of consumers and producers behavior on the network industries market, i.e. the analysis of demand and supply phenomena on this specific market. For the optimization problems we will formulate the Kuhn-Tucker optimality conditions and we will study their interpretation options.

**Keywords:** *network industries, optimization models, Kuhn-Tucker optimality conditions*

---

<sup>1</sup>Článok bol vydaný s podporou Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva SR a Slovenskej akadémie vied v rámci projektu „Optimalizačné modely a metódy ako nástroje efektívnej regulácie v modernej teórii organizácie sieťových odvetví“, 2015 – 2017. grant č. 1/0697/15



# 1 ÚVOD

Stredobodom problematiky analýzy vplyvu sieťových odvetví sú de facto otázky regulácie, resp. cenovej regulácie sieťových odvetví, ktoré sa v súčasnosti stávajú veľmi aktuálnou a relatívne frekventovanou témou diskusií odbornej ale i širšej verejnosti. Diskusie na túto tému sú spontánne a neraz i emotívne. Pritom ide v konečnom dôsledku o vysoko odbornú, a radi konštatujeme, že z hľadiska rozvoja ekonomickej teórie i veľmi zaujímavú problematiku.

Postupom času sa táto problematika, ktorá bola pôvodne rozpracovaná ako jedna z tém mikroekonomickej analýzy, etablovala kdesi na pomedzí mikroekonomickej a makroekonomickej analýzy, nakoľko efekty správania sa subjektov sieťových odvetví majú, nepochybne, celospoločenský dopad na ekonomiku krajiny. V posledných desaťročiach sa v rámci mikroekonomickej analýzy vytvorila relatívne samostatná vedná disciplína, ktorá sa venuje špeciálne otázkam rovnováhy na trhoch odvetví, v anglickej odbornej literatúre Industrial Organization (Pepall, L., Richards, D. J., Norman, D., 2004), (Martin, S., 1996) resp. v nemeckej Industrieökonomik (Bester, H., 2004), (Wied-Nebbeling, S., 2004). K tejto problematike sa publikujú rozsiahle monografie, usporadúvajú medzinárodné vedecké konferencie a existujú takto orientované odborné časopisy. Sú rozpracované a teoreticky zdôvodnené modely a metódy regulácie monopolov a teda i subjektov sieťových odvetví.

V príspevku prezentujeme úlohy matematického programovania popisujúce správanie spotrebiteľov na trhu produktov sieťových odvetví. Podmienky optimálnosti Kuhna a Tuckera pre tieto triedy úloh nelineárneho programovania sú skúmané najmä z hľadiska ich ekonomickej interpretovateľnosti.

## 2. PODMIENKY OPTIMÁLNOTI SPOTREBITEĽOV NA TRHU SIEŤOVÉHO ODVETVIA

Charakteristickou vlastnosťou modelov rovnováhy sieťových odvetví je určitá izolovanosť trhu, na ktorom sú produkty sieťových odvetví pre spotrebiteľa zväčša nesubstituovateľné, takže užitočnosť, ktorú spotrebiteľ pociťuje pri ich používaní môžeme kvantifikovať špecifickým spôsobom. Princiipiálne ide o takú prezentáciu funkcie užitočnosti, kedy produkt sieťového odvetvia je vnímaný ako tovar so samostatnou a exaktne formulovanou funkciou užitočnosti a ostatné tovary sú vnímané ako spotreba jedného prepočítaného, resp. agregovaného tovaru s normovanou jednotkovou cenou. (Carlton, D. W., Perloff, J. M., 2005).

V príspevku poukážeme na určité zvláštnosti kategórie nadbytok spotrebiteľa v prípade analýzy produktov sieťových odvetví. Toto špecifikum vyplýva z toho, že spotrebiteľ obvykle v krátkom časovom horizonte nie je reálne schopný substituovať produkt sieťového odvetvia, napr. plyn, iným tovarom s primeranými úžitkovými vlastnosťami, preto vníma produkt ako exkluzívny a táto exkluzivita sa dá potom aj formálne vyjadriť pri konštrukcii funkcie užitočnosti a z toho vyplývajúcich ďalších nadväzujúcich analytických úloh.

Predpokladajme, že na relevantnom trhu sieťového odvetvia pôsobí  $m$  spotrebiteľov  $S_i$  pre  $i = 1, 2, \dots, m$ . Tovar, alebo službu sieťového odvetvia, ktoré majú homogénny charakter, povedzme distribúciu elektrickej energie, poskytuje  $n$  subjektov, dodávateľov  $D_j$  pre  $j = 1, 2, \dots, n$ . Budeme teda skúmať trh homogénneho produktu, kde spotreba tovaru o objeme danom

premennou  $x_i$  je spotrebou homogénneho produktu u  $i$ -teho spotrebiteľa  $S_i$  a spotreba všetkých ostatných tovarov v spotrebnom koši tohto spotrebiteľa je prezentovaná prepočítanou agregovanou premennou  $x_{0i}$ . Ak je užitočnosť zo spotreby produktu sieťového odvetvia spotrebiteľa  $S_i$  daná funkciou  $u_i(x_i)$ , ktorá vyjadruje úroveň užitočnosti v peňažných jednotkách a cena prepočítaného tovaru je normovaná na hodnotu „1“, tak celková užitočnosť spotrebiteľa  $S_i$  je vyjadrená v peňažných jednotkách funkciou  $v_i(x_i, x_{0i})$  takto

$$v_i(x_i, x_{0i}) = u_i(x_i) + x_{0i}$$

pričom

$$v_i(x_i, x_{0i}): R^2 \rightarrow R$$

$$u_i(x_i): R \rightarrow R$$

Pri takto vnímanej funkcii užitočnosti ju potom môžeme pre potreby ďalších analýz interpretovať ako celkovú užitočnosť v „peňažných jednotkách“, ktorú pociťuje spotrebiteľ pri kúpe  $x_i$  jednotiek produktu sieťového odvetvia a súčasnej kúpe  $x_{0i}$  jednotiek agregovaných ostatných tovarov spotrebiteľského koša, ktoré sú ocenené normovanou cenou jedna peňažná jednotka.

Správanie sa  $i$ -teho spotrebiteľa  $S_i$  pre každé  $i=1, 2, \dots, m$  budeme skúmať prostredníctvom optimalizačnej úlohy maximalizácie funkcie celkovej užitočnosti  $i$ -teho spotrebiteľa  $S_i$  pri ohraničených výdavkoch na spotrebu so spotrebným limitom  $w_i$  a cenou komodity sieťového odvetvia  $p$ . Úloha je pre nezáporné premenné  $x_i$  a  $x_{0i}$  formulovaná takto:

$$v_i(x_i, x_{0i}) = u_i(x_i) + x_{0i} \rightarrow \max$$

pri ohraničení

$$px_i + x_{0i} = w_i$$

$$x_i, x_{0i} \geq 0$$

Hore uvedená optimalizačná úloha matematického programovania je úlohou maximalizácie na viazaný extrém (Jarre, F., Stoer, J., 2012). Upravme túto úlohu na štandardný tvar, t. j. na úlohu minimalizácie takto:

$$-v_i(x_i, x_{0i}) = -u_i(x_i) - x_{0i} \rightarrow \min \quad (1)$$

pri ohraničení

$$px_i + x_{0i} = w_i \quad (2)$$

$$x_i, x_{0i} \geq 0 \quad (3)$$

Pre túto úlohu sformulujme zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu. Poznamenajme len, že zovšeobecnená Lagrangeova funkcia nezahŕňa podmienky nezápornosti premenných explicitne, ale sú zohľadnené implicitne v podmienkach optimálnosti Kuhna – Tuckera (Bazaraa, M. - C. M. Shetty, C.M. 2006). Zovšeobecnená Lagrangeova funkcia úlohy matematického programovania (1), ..., (3) je formulovaná takto:

$$L_i(x_i, x_{0i}, \lambda_i) = -v_i(x_i, x_{0i}) + \lambda_i(px_i + x_{0i} - w_i) = -u_i(x_i) - x_{0i} + \lambda_i(px_i + x_{0i} - w_i) \quad (4)$$

Sformulujme podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera pre Lagrangeovu funkciu v tvare (4) pre  $i$ -teho spotrebiteľa  $S_i$  takto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_i(x_i, x_{0i}, \lambda_i)}{\partial x_i} &\geq 0 & \frac{\partial L_i(x_i, x_{0i}, \lambda_i)}{\partial x_{0i}} &\geq 0 & \frac{\partial L_i(x_i, x_{0i}, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} &= 0 \\
x_i \frac{\partial L_i(x_i, x_{0i}, \lambda_i)}{\partial x_i} &= 0 & x_{0i} \frac{\partial L_i(x_i, x_{0i}, \lambda_i)}{\partial x_{0i}} &= 0 & & \\
x_i &\geq 0 & x_{0i} &\geq 0 & & 
\end{aligned} \tag{5}$$

Podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera v tvare (5) po dosadení analytického tvaru Lagrangeovej funkcie (4) a po ďalšej úprave dostávame v tvare

$$\begin{aligned}
\frac{-\partial v_i(x_i, x_{0i})}{\partial x_i} + \lambda_i p &\geq 0 & \frac{-\partial v_i(x_i, x_{0i})}{\partial x_{0i}} + \frac{\partial \lambda_i x_{0i}}{\partial x_{0i}} &\geq 0 & \frac{\partial \lambda_i (px_i + x_{0i} - w_i)_i}{\partial \lambda_i} &= 0 \\
x_i \left( \frac{-\partial v_i(x_i, x_{0i})}{\partial x_i} + \lambda_i p \right) &= 0 & x_{0i} \left( \frac{-\partial v_i(x_i, x_{0i})}{\partial x_{0i}} + \frac{\partial \lambda_i x_{0i}}{\partial x_{0i}} \right) &= 0 & & \\
x_i &\geq 0 & x_{0i} &\geq 0 & & 
\end{aligned}$$

a po ďalšej úprave napokon dostávame takýto tvar podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera

$$\begin{aligned}
\lambda_i p - mu_i(x_i) &\geq 0 & (a) & & \lambda_i - 1 &\geq 0 & (d) & & px_i + x_{0i} = w_i & (g) \\
x_i (\lambda_i p - mu_i(x_i)) &= 0 & (b) & & x_{0i} (\lambda_i - 1) &= 0 & (e) & & & \\
x_i &\geq 0 & (c) & & x_{0i} &\geq 0 & (f) & & & 
\end{aligned} \tag{6}$$

Inými slovami, ak spotrebiteľ má ambíciu identifikovať optimálnu spotrebnú stratégiu  $(x_i^*, x_{0i}^*)$ , to znamená, že spotreba  $x_i^*$  jednotiek produkcie sieťového odvetvia s cenou  $p$  a spotreba  $x_{0i}^*$  jednotiek zostávajúcich tovarov agregovaného odvetvia s jednotkovou cenou maximalizujú jeho celkovú užitočnosť v  $(x_i^*, x_{0i}^*)$ , tak musí existovať taký multiplikátor  $\lambda_i^*$ , pre ktorý sú splnené podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera (6) (Bazaraa, M. - Shetty, C. M., 2006), čiže vektor premenných  $(x_i^*, x_{0i}^*, \lambda_i^*)$  je riešením sústavy rovníc a nerovnic (a), (b), ..., (g).

Poukážme teraz na niektoré zaujímavé ekonomicky interpretovateľné dôsledky podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera v kontexte analýzy správania sa spotrebiteľa na trhu produktov sieťových odvetví (Fendek, M., Fendeková, E., 2012).:

1. Z platnosti podmienky (g) vyplýva, že optimálny spotrebný kôš  $i$ -teho spotrebiteľa  $(x_i^*, x_{0i}^*)$  pri cene  $p$  produktu sieťového odvetvia a jednotkovej cene agregovaného tovaru sa dá obstaráť práve z rozpočtových prostriedkov  $w_i$  spotrebiteľa.
2. Z platnosti podmienky (e) vyplýva, že pre kladnú optimálnu spotrebu agregovaného tovaru  $x_{0i}^*$  je optimálna hodnota Lagrangeovho multiplikátora rovná jednej, t. j.  $\lambda_i^* = 1$ .
3. Za tohto predpokladu potom z platnosti podmienky (b) vyplýva, že pri kladnej spotrebe agregovaného tovaru  $x_{0i}^*$  a pre kladný objem spotreby produktu sieťového odvetvia  $x_i^*$ , ktorý maximalizuje užitočnosť, nutne platí, že v bode maxima užitočnosti zo spotreby komodity je marginálna užitočnosť spotreby tejto komodity sieťového odvetvia rovná cene komodity, nakoľko hodnota Lagrangeovho multiplikátora sa zároveň rovná jednej, čiže  $\lambda_i^* = 1$  a platí

$$mu_i(x_i^*) = \left[ \frac{du(x_i)}{dx_i} \right]_{x_i=x_i^*} = p \tag{7}$$

4. Dôsledok (3) zároveň potvrdzuje ďalší dôležitý teoretický postulát, a to, že spotrebiteľ dovtedy zvyšuje spotrebu, v tomto prípade produktu sieťového odvetvia, kým marginálna užitočnosť nedosiahne úroveň trhovej ceny produktu.
5. Toto konštatovanie napokon nepriamo vyplýva aj z podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera (a), (b), kde vidíme, že v prípade ak sa podmienka (a) realizuje pre optimálnu štruktúru vektora  $(x_i^*, x_{0i}^*, \lambda_i^*)$  ako ostrá nerovnosť, t. j. platí

$$-mu_i(x_i) + p > 0$$

a marginálna užitočnosť tovaru sieťového odvetvia je teda nižšia ako jeho trhovú cenu, tak z podmienky (b) vyplýva, že spotrebiteľ tovar sieťového odvetvia nekupuje a platí

$$x_i^* = 0.$$

Záver je úplne logický a ekonomicky plne zdôvodniteľný, lebo v tomto prípade by prírastok užitočnosti vyvolaný nákupom tovaru nepokryl ani jeho cenu.

6. Preskúmajme ešte podrobnejšie istým spôsobom špecifickú situáciu, ktorá by nastala za predpokladu, že optimálna hodnota Lagrangeovho multiplikátora je väčšia ako jedna, t. j. platí  $\lambda_i^* > 1$ . Pri platnosti podmienok (d) a (e) potom ale spotrebiteľ vôbec nekupuje komodity agregovanej skupiny tovarov a platí  $x_{0i}^* = 0$ . Z podmienky (g) súčasne vyplýva, že spotrebiteľ všetky svoje finančné prostriedky  $w$  investuje do obstarania produktu sieťového odvetvia v objeme

$$x_i^* = \frac{w}{p_i}$$

Zároveň na základe platnosti podmienky (b) platí zaujímavé konštatovanie, a to, že marginálna užitočnosť poslednej nakúpenej jednotky sieťového odvetvia je ešte stále väčšia ako je jeho trhovú cenu pri súčasnej platnosti podmienky (a) ako nerovnosti a platí

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \\ (-mu_i(x_i) + (1 + \varepsilon)p) &= 0 \\ mu_i(x_i) &= (1 + \varepsilon)p \\ p &< mu_i(x_i) \end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto prípade je rozhodnutie spotrebiteľa jednoznačne efektívne, nakoľko kúpa „poslednej“ jednotky tovaru sieťového odvetvia mu prináša väčší prírastok užitočnosti, ako je trhovú cenu tohto tovaru, takže spotrebiteľ v tejto situácii investuje všetky svoje finančné prostriedky definované pre tento spotrebný kôš do kúpy produktu sieťového odvetvia.

## ZÁVER

V príspevku sme skúmali podmienky optimálnosti pre parciálne modely optimálneho správania spotrebiteľov a výrobcov produktov na trhu sieťových odvetví, ako aj podmienky optimálnosti pre model efektívnej alokácie produktov na tomto trhu. Ukázali sme, ako poznatky vyplývajúce z analýzy podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera formulované pre relevantné úlohy matematického programovania možno efektívne využiť pri interpretácii vecných vzťahov, zákonitostí a strategických rozhodnutí pri správaní sa spotrebiteľov a výrobcov na trhu sieťového odvetvia. Porušenie podmienok rovnováhy samozrejme nemožno vylúčiť, reálny ekonomický život totiž aj predpokladá určitý vývoj a nestabilitu na každom trhu a teda aj relatívnu krátkodobosť platnosti podmienok rovnováhy, čo v konečnom dôsledku napokon ani

nepredstavuje neriešiteľný problém, je však potrebné situáciu kvalifikovane identifikovať a vyhodnotiť možné reakcie na zmenu parametrov systému.

Keby nenastali hore uvedené situácie, mohli by niektorí spotrebiteľia prostredníctvom efektívnych substitúcií v spotrebiteľskom koši zvýšiť svoju užitočnosť. V takomto prípade by totiž spotrebiteľ s vyššou hraničnou užitočnosťou a teda aj s vyššou hraničnou ochotou zaplatiť za agregovaný tovar mohol zodpovedajúci počet jednotiek produktu sieťového tovaru získať za adekvátny objem agregovaného tovaru od spotrebiteľa s nižšou marginálnou užitočnosťou, čím by si mohli v konečnom dôsledku obaja spotrebiteľia svoje pozície na trhu zlepšiť. Ukázali sme teda, že využitie modelových prístupov a teórie optimalizácie pri analýze podmienok rovnováhy na trhu ponuky sieťových odvetví umožňuje efektívne skúmať podmienky vzniku rovnováhy ako i dôsledky zmien parametrov trhového prostredia, ktoré majú za následok prehodnotenie atribútov rovnovážneho stavu.

### **Použitá literatúra**

1. AVRIEL, M. 2003. Nonlinear Programming - Analysis and Methods. New York: Dover publications, Inc., 2003.
2. BAZARAA, M. - C. M. SHETTY, C.M. (2006). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Wiley-Interscience. New York.
3. CARLTON, D.W.; PERLOFF, J. M. (2005). Modern Industrial Organization. Boston: Addison Wesley, 2005. ISBN 0-321-22341-1.
4. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. (2008). Mikroekonomická analýza. IURA Edition. Bratislava 2008. 557 strán. ISBN 80-88715-54-7.
5. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. (2010). Modely cenovej regulácie sieťových odvetví. Ekonomický časopis: časopis pre ekonomickú teóriu a hospodársku politiku, spoločensko-ekonomické prognózovanie. Bratislava : Ekonomický ústav SAV: Prognostický ústav SAV, ISSN 0013-3035, 2010, roč. 58, č. 10, pp. 1039 – 1055.
6. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. (2009). Models of regulation of network industries in Slovakia. In International journal of economics and business research. - UK : Inderscience Enterprises Ltd, ISSN 1756-9850, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 479-495.
7. FENDEK, M. (2008). Natural monopoly cost-oriented price regulation. (2008). Quantitative methods in economics: multiple criteria decision making XIV. - Bratislava ; Bratislava : IURA EDITION, 2008. ISBN 978-80-8078-217-7, pp. 45-53.
8. JARRE, F.; STOER, J. Optimierung. Berlin: Springer Verlag. (2004). ISBN3-540-43575-1. Martin, S. 2012. Industrial Organization: A European Perspective. Oxford: Oxford University Press, USA.
9. MARTIN, S. Advanced Industrial Economics. Cambridge: Blackwell, 1996.

### **Kontaktné údaje**

Prof. Ing. Michal Fendek, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 883

email: [fendek@euba.sk](mailto:fendek@euba.sk)

# MODELOVÁNÍ POPTÁVKY

## DEMAND MODELING

*Petr Fiala*

### **Abstrakt**

Současné produkty mají stále kratší životní cykly, částečně ovlivněné rychlými technologickými změnami u high-tech produktů. Výsledkem je skutečnost, že firmy mají stále méně historických dat použitelných pro prognózování a každý trend, který se zdá zřejmý z historických dat je nespolehlivý pro predikování budoucího vývoje. Pro modelování poptávky jsou v příspěvku diskutovány dvě techniky, Bassův difuzní model a metoda vedoucího indikátoru.

*Klíčová slova: poptávka, modely, Bassův difuzní model, metoda vedoucího indikátoru.*

### **Abstract**

Current products have increasingly shorter life cycles, partially influenced by rapid technological change in high-tech products. The result is that companies have become less useful historical data for forecasting and every trend that seems evident from historical data is unreliable for predicting future trends. Two techniques for demand modeling, Bass diffusion model and leading indicator method, are discussed in this paper.

*Key words: demand, models, Bass diffusion model, leading indicator approach*

## **1 ÚVOD**

V příspěvku jsou diskutovány dvě metody, které mohou být použity pro predikci poptávky po nových produktech nebo produktech, u kterých není k dispozici mnoho historických dat. Pro odlišení těchto metod od klasických metod časových řad je budeme nazývat technikami modelování poptávky.

Metody, které jsou zde diskutovány, vycházejí z teorie a používají matematické modely s parametry, které musejí být kalibrovány. Na rozdíl od populárních metod pro prognózování poptávky s omezenými historickými daty, jako je např. metoda Delphi, opírajících se o expertní kvalitativní posouzení nebo dotazníky. Pro modelování poptávky uvedeme dvě techniky, Bassův difuzní model a metodu vedoucího indikátoru.

## **2 BASSŮV DIFUZNÍ MODEL**

Jak technologické změny akcelerují, tak firmy zavádějí stále rychleji nové produkty, aby zůstaly konkurenceschopné. Existuje difuzní proces spojený s poptávkou po každém novém produktu, takže firmy musejí opatrně plánovat načasování a množství nových produktů, aby co nejtěsněji sladily nabídku a poptávku. Aby to dokázaly, musejí rozumět životním cyklům a dynamice poptávky u svých produktů.

Vzory prodeje nových produktů typicky procházejí třemi fázemi: rychlý růst, nasycení a pokles. Bassův difuzní model (Bass, 1969) je dobře známý parametrický postup pro odhad trajektorie poptávky po jednom novém produktu během času. Základní Bassův tříparametrový model prokázal, že je velmi efektivní pro poskytování přesných předpovědí pro zavádění široké škály nových produktů bez ohledu na cenová a reklamní rozhodnutí. Model poskytuje dobré prognózy při omezených nebo dokonce žádných historických datech.

## 2.1. Základní model

Bassův model vychází z rozdělení zákazníků na inovátory a imitátory. Inovátoři kupují zboží bez ohledu na rozhodnutí ostatních zákazníků. Naopak imitátoři jsou v načasování jejich nákupů ovlivněni předchozími kupujícími pomocí komunikace. Počet inovátorů v čase klesá, počet imitátorů kupujících produkt nejdříve roste a potom klesá. Cílem Bassova modelu je charakterizovat toto chování za účelem předpovědi poptávky. Model matematicky charakterizuje komunikaci mezi inovátory a imitátory. Navíc se snaží predikovat dvě základní složky prognózy, kolik zákazníků si pořídí nový produkt a kdy si jej pořídí. Znalost načasování pořizování je důležitá pro chytrý marketing nového produktu.

Bassův model předpokládá, že  $P(t)$  je pravděpodobnost prvního zakoupení produktu v čase  $t$  a že je lineární funkcí počtu předchozích kupujících

$$P(t) = p + \frac{q}{m} D(t), \quad (1)$$

kde

$p$  je koeficient inovace,

$q$  je koeficient imitování,

$m$  je velikost trhu,

$D(t)$  je kumulativní poptávka v čase  $t$ .

Pravděpodobnost  $P(t)$  je součet dvou faktorů tj. koeficientu inovace  $p$ , který nezávisí na počtu kupujících před časem  $t$  a druhého faktoru  $\frac{q}{m} D(t)$ , který měří efekt přenosu mezi inovátory a imitátory a je úměrný počtu zákazníků, kteří si již koupili produkt do času  $t$ . Koeficienty inovace a imitování se liší podle produktů, v práci (Sultan aj., 1990) se jako průměrné hodnoty uvádějí hodnoty  $p = 0,03$  a  $q = 0,38$ .

Budeme předpokládat, že hodnota  $p < q$  a že čas  $t$  je měřen v letech. Necht'  $d(t)$  je derivace kumulované poptávky  $D(t)$ , tj. poptávková míra v čase  $t$ . Je možno ukázat, že

$$P(t) = \frac{d(t)}{m - D(t)}, \quad (2)$$

Ze vzorců (1) a (2) dostáváme

$$d(t) = \left( p + \frac{q}{m} D(t) \right) (m - D(t)). \quad (3)$$

Vztah (3) je diferenciální rovnicí, ze které dostáváme řešení pro kumulovanou poptávku  $D(t)$  a poptávkovou míru  $d(t)$ :

$$D(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (4)$$

$$d(t) = \frac{mp(p+q)^2 e^{-(p+q)t}}{(p+q e^{-(p+q)t})^2} \quad (5)$$

Dále je možno určit čas  $t^*$ , ve kterém poptávková míra dosáhne vrcholu, a poptávkovou míru a kumulativní poptávku v tomto čase:

$$t^* = \frac{1}{p+q} \ln\left(\frac{q}{p}\right), \quad (6)$$

$$d(t^*) = \frac{m(p+q)^2}{4q}, \quad (7)$$

$$D(t^*) = \frac{m(q-p)}{2q}, \quad (8)$$

Jestliže je hodnota  $p$  malá, potom růst poptávky nastává velmi pomalu. Jestliže jsou hodnoty  $p$  a  $q$  velké, poptávka roste rychle a po dosažení maxima pak rychle klesá. Výsledky platí za předpokladu, že hodnota  $p < q$ .

Jestliže však platí  $q < p$ , potom inovační efekt převýší efekt imitování a poptávka dosáhne svého vrcholu hned po zavedení produktu a potom bude klesat. Změnami hodnot  $p$  a  $q$  je možno modelovat vzorů poptávky.

## 2.2. Modifikace základního modelu

Existuje řada modifikací základního Bassova modelu. Jeden ze směrů rozvoje modelu je zahrnutí dalších složek prognózy. Uvedeme model se sezonní složkou. Další modifikací je diskrétní verze modelu. Odhad parametrů modelu je velmi důležitou záležitostí, na které silně závisí vypovídací schopnost modelu.

### Model se sezonní složkou

Do Bassova modelu je možno zahrnout i sezonní vlivy. V článku (Kurawarwala a Matsuo, 1996) je prezentován růstový model pro prognózování poptávky pro produkty s krátkým životním cyklem, založený na Bassově modelu. Používají sezonní parametr  $a_t$  v čase  $t$  jako funkci s periodou 12 měsíců. Potom je model charakterizován následující diferenciální rovnicí:

$$d(t) = \left(p + \frac{q}{m} D(t)\right) (m - D(t)) a_t, \quad (9)$$

která je rozšířením rovnice (6.3) o růstový multiplikátor  $a_t$ . Kumulativní poptávka  $D(t)$  je potom ve tvaru

$$D(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q) \int_0^t a_\tau d\tau}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q) \int_0^t a_\tau d\tau}}, \quad (10)$$



### Diskrétní verze modelu

Existuje verze Bassova modelu pro diskrétní čas. V tomto případě  $d_t$  reprezentuje poptávku v čase  $t$  a  $D_t$  reprezentuje kumulativní poptávku do časové periody  $t$ . Potom je možno analogicky vyjádřit

$$d_t = \left(p + \frac{q}{m} D_{t-1}\right)(m - D_{t-1}), \quad (11)$$

kde  $D_0 = 0$ .

### Odhad parametrů

Bassův model je silně ovlivněn parametry  $m$ ,  $p$  a  $q$ . Podívejme se na možnosti odhadu parametrů. Protože Bassův model je použit zejména v případech nových produktů, kdy nejsou k dispozici data o předchozích prodejích pro odhadnutí tržního podílu  $m$ . Parametr  $m$  je potom odhadnut kvalitativně s využitím manažerské intuice, průzkumu trhu nebo metodou Delphi. Pro některé trhy je možnost odhadu poptávky přesnější na základě vazeb mezi poptávkou a jinými ukazateli, které jsou lépe měřitelné. Parametry  $p$  a  $q$  je možno určit na základě odhadnutých parametrů pro podobné produkty. K dispozici jsou data pro řadu odvětví (Lilien a Rangaswamy, 1998). V tabulce 1 je uvedeno několik příkladů odhadnutých parametrů pro různé produkty.

*Tab. 1. Parametry Bassova modelu*

Produkt	$p$	$q$
Rozhlas	0,027	0,435
VCR	0,025	0,603
PC	0,121	0,281
Mobil	0,008	0,421
Kamera	0,044	0,304

Pokud jsou k dispozici alespoň částečná historická data, potom můžeme odhadnout parametry  $m$ ,  $p$  a  $q$  s využitím lineárního regresního modelu

$$d_t = a + b D_{t-1} + c(D_{t-1})^2, \quad t = 2, 3, \dots \quad (12)$$

Nejdříve se metodou nejmenších čtverců odhadnou parametry  $a$ ,  $b$  a  $c$ . Parametry Bassova modelu mohou být určeny následovně:

$$m = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}, \quad (13)$$

$$p = \frac{a}{m}, \quad (14)$$

$$q = -mc. \quad (15)$$

### 3 METODA VEDOUCÍHO INDIKÁTORU

Životní cykly produktů se stále zkracují, takže je obtížné získat dostatečná historická data pro přesnou prognózu poptávky. Metoda založená na tzv. vedoucích indikátorech (Aytac a Wu, 2010) prokázala, že pracuje dobře v takových situacích. Postup je aplikován v situacích, kdy firma zavádí mnoho podobných produktů, jako jsou různé modifikace mobilních telefonů, polovodičů, drogistického zboží atd. Nejdříve se produkty seskupí do skupin, kde všechny produkty ve skupině mají podobné charakteristiky. Existuje několik postupů pro takové seskupování. Je možné identifikovat několik vzorů poptávky pro všechny produkty, potom je snadné seskupit produkty sdílející stejné vzory do stejných skupin. Maixell a Wu (2001) zjistili po prozkoumání poptávkových dat u 3500 produktů, že produkty vykazují 6 základních poptávkových vzorů (tj. difuzních křivek Bassova modelu) a mohou být seskupeny podle těchto vzorů s využitím statistické shlukové analýzy. Wu aj. (2006) se zaměřili na exogenně definované charakteristiky, jako jsou zdroje, technologické skupiny, nebo oblasti prodeje, a seskupili produkty s podobnými charakteristikami do stejné skupiny.

Cílem je potom identifikovat v každé skupině určité produkty jako potenciální vedoucí indikátory. Produkt je vedoucím indikátorem, jestliže poptávkový vzorek tohoto produktu bude přibližně následován později dalšími produkty ze stejné skupiny. Produkt, který je vedoucím indikátorem, poskytuje určitou základnu pro predikci poptávky po ostatních produktech ze stejné skupiny.

Wu aj. (2006) navrhuje následující proceduru pro identifikaci vedoucího indikátoru v dané skupině. Nechť  $C$  je skupina produktů. Každý produkt  $i \in C$  může být považován za potenciální vedoucí indikátor. Předpokládejme, že máme historická data v periodě  $T$ . Nechť  $D_{it}$  je pozorovaná poptávka po produktu  $i$  v čase  $t$  a  $D_t$  je celková poptávka pro celou skupinu v čase  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Vedoucí indikátor může být určen pomocí následujícího algoritmu:

#### **Krok 1** (Inicializace):

Stanoví se prahové hodnoty, které určují minimální časovou prodlevu  $k_{min}$ , maximální časovou prodlevu  $k_{max}$  a minimální koeficient korelace  $\rho_{min}$ . Jestliže produkt vede ostatní produkty  $k$  časových period  $k_{min} \leq k \leq k_{max}$  a jejich poptávka má korelační koeficient větší než  $\rho_{min}$ , potom je tento produkt kandidátem na vedoucí indikátor.

#### **Krok 2** (Výpočet korelace):

Pro každý produkt  $i \in C$ :

- Položte časovou prodlevu  $k = k_{min}$ .
- Posuňte poptávkové časové řady po produktu  $i$  o  $k$  časových period. Vypočtete korelační koeficient ( $\rho_{ik}$ ) mezi posunutými časovými řadami a poptávkovými časovými řadami pro skupinu  $C - \{i\}$ :

$$\rho_{ik} = \frac{\sum_{t=k+1}^T (D_{i,t-k} - \bar{D}_i)(D_t - \bar{D}^{-i})}{\sqrt{\sum_{t=k+1}^T (D_{i,t-k} - \bar{D}_i)^2 (D_t - \bar{D}^{-i})^2}}, \quad (16)$$

kde  $D_{it}$  je napozorovaná poptávka po produktu  $i$  v časové periodě  $t$ ,  $\bar{D}_i$  je její střední hodnota během časového intervalu  $[k + 1, T]$ ,  $D_t$  je celková poptávka po všech produktech s výjimkou produktu  $i$  v časové periodě  $t$ ,  $\bar{D}^{-i}$  je její střední hodnota během časového intervalu  $[k + 1, T]$ . Korelační koeficient  $\rho_{ik}$  měří, jak dobře

predikuje poptávka po produktu  $i$  během časového intervalu  $[1, T - k]$  poptávku celé skupiny během časového intervalu  $[k + 1, T]$ .

(c) Položte  $k = k + 1$ . Jestliže  $k \leq k_{max}$ , jděte na krok 2 (a).

**Krok 3** (Identifikace vedoucích indikátorů):

Pro každý produkt  $i \in C$  a každou časovou prodlevu  $k \in \{k_{min}, \dots, k_{max}\}$ , jestliže  $\rho_{ik} \geq \rho_{min}$ , potom označte produkt  $i$  za vedoucí indikátor s časovou prodlevou  $k$ . Pokud jsou nalezeny takové vedoucí indikátory, jděte na krok 5, jinak jděte na krok 4.

**Krok 4** (Rozdělení do podskupin):

Rozdělte do podskupin následovně:

- (a) S využitím statistické shlukové analýzy, rozdělte skupinu  $C$  do více podskupin podle statistických vzorů poptávky. Charakteristiky použité pro shlukovou analýzu mohou být průměrná poptávka, volatilita poptávky, frekvence dodávek atd.
- (b) Opakujte kroky 2 až 4 pro každou novou skupinu.

**Krok 5** (Zakončení):

Dostaneme vedoucí indikátory a odpovídající podskupiny. Jakmile je identifikován vedoucí indikátor  $i$  s časovou prodlevou  $k$  a korelačním koeficientem  $\rho_{ik}$ , můžeme prognózovat poptávku pro zbytek produktové skupiny s využitím poptávkové historie vedoucího indikátoru:

1. Použijte regresní analýzu pro časové řady produktové skupiny  $C$  s výjimkou produktu  $i$  během časového intervalu  $[k + 1, T]$  a časových řad vedoucího indikátoru během časového intervalu  $[1, T - k]$  s využitím modelu

$$D_t^{-i} = \beta_0 + \beta_1 D_{t-k} \tag{17}$$

a určete regresní parametry  $\beta_0$  a  $\beta_1$ .

2. Pro časovou periodu  $t > T$  (pro periodu pro kterou chcete predikovat, ale nejsou historická data), generujte prognózu  $\tilde{D}_t^{-i}$  pro skupinu s využitím časových řad vedoucího indikátoru  $i$  z předchozích  $k$  period:

$$\tilde{D}_t^{-i} = \beta_0 + \beta_1 D_{t-k} \tag{18}$$

**4. ZÁVĚR**

V příspěvku jsou analyzovány postupy pro modelování poptávky v případech zavádění nových produktů, kdy nejsou známy dlouhé řady historických dat pro prognózování poptávky. Postupy vycházejí z teorie a používají matematické modely s parametry, které musejí být kalibrovány. Metody se osvědčily v praxi a umožňují zavedení modifikací, které zpřesňují vypovídací schopnost modelů ve specifických situacích. Tyto nástroje se pak stávají vhodným nástrojem pro prognózování a analýzu poptávky.

**Poděkování:**

Projekt je podporován grantem č. 13-07350S Grantové agentury České republiky a grantem č. IGA F4/54/2015, Fakulty informatiky a statistiky, VŠE v Praze.

## Použitá literatura

1. Aytac B, Wu DS (2010) "Characterization of demand for short life-cycle technology products", *Annals of Operations Research*, 203 (1), 255-277.
2. Bass F (1969) "New product growth for model consumer durables", *Management Science*, 15 (5), 215-227.
3. Kurawarwala AA, Matsuo H (1996) "Forecasting and inventory management of short life-cycle products", *Operations Research*, 44 (1), 131-1509.
4. Lilien GL, Rangaswamy A (1998) *Marketing Engineering: Computer-Assisted Marketing Analysis and Planning*, Reading, Addison-Wesley.
5. Meixell MJ, Wu DS (2001) "Scenario analysis of demand in a technology market using leading indicators", *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 14 (1), 65-75.
6. Sultan F, Farley, JU, Lehmann DR (1990) "A meta-analysis of applications of diffusion models", *Journal of Marketing Research*, 27 (1), 70-77.
7. Wu DS, Aytac B, Berger R, Armbruster C (2006) "Managing short life-cycle technology products for Agere systems", *Interfaces*, 36 (3), 234-247.

## Kontaktní údaje

Prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420 2) 24 095 447

email: [pfiala@vse.cz](mailto:pfiala@vse.cz)

# KONŠTRUKCIA MATICE PRIESTOROVÝCH VÁH\*

## SPATIAL WEIGHT MATRICE CONSTRUCTION

*Andrea Furková*

### Abstrakt

V príspevku je pozornosť zameraná na konštrukciu matice priestorových váh **W**, ktorá zachytáva priestorovú závislosť medzi priestorovými jednotkami a je nevyhnutným predpokladom pre priestorovú analýzu. Zohľadnenie priestorovej interakcie medzi sledovanými geografickými jednotkami sa v súčasnosti dostáva do popredia v oblasti aplikovanej ako aj teoretickej ekonometrie. V príspevku uvádzame dve skupiny prístupov ku konštrukcii danej matice a to prístup na základe vzdialeností a na základe hraníc.

**Kľúčové slová:** *matica priestorových váh, priestorová závislosť, priestorová jednotka*

### Abstract

Paper deals with the construction of spatial weight matrix **W** which captures the spatial dependence between spatial units and it is inevitable condition for spatial analysis. Nowadays, taking into account the spatial interactions between geographic units become popular in applied and theoretical econometrics. In this paper we present two approaches to the construction of the spatial matrix, i.e. weights based on distance and weights based on boundaries.

**Keywords:** *spatial weight matrix, spatial dependence, spatial unit*

## 1 ÚVOD

Tradičné regresné modely nezohľadňujú skutočnosť, že regióny, štáty, či iné hospodárske jednotky existujú a fungujú v spoločnom hospodárskom priestore a teda sa často vzájomne významne ovplyvňujú. Zohľadnenie priestorovej interakcie medzi sledovanými geografickými jednotkami sa v súčasnosti dostáva do popredia v oblasti aplikovanej ako aj teoretickej ekonometrie. Priestorová ekonometria ponúka množstvo modelov a metód, ktoré umožňujú zachytiť a zohľadniť priestorové efekty. V súčasnosti sa o nástroje priestorovej ekonometrie rozširujú najmä modely z oblasti modelovania ekonomického rastu, či reálnej ekonomickej konvergenencie regiónov, čo je v súčasnosti najmä v podmienkach EÚ rezonujúcou problematikou.

Jednou z kľúčových otázok priestorovej ekonometrie je problém zachytenia a začlenenia štruktúry priestorovej závislosti do ekonometrického modelu. Priestorovú závislosť môžeme formálne vyjadriť nasledujúco:

$$y_i = f(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i \quad (1)$$

---

\* This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA grant No. 1/0285/14 “Regional modelling of the economic growth of EU countries with concentration on spatial econometric methods“.

Na špecifikáciu tejto funkčnej závislosti definovanej sa využíva „priestorovo posunutá“ hodnota premennej. Zavedenie operátora priestorového posunu (označovaného ako „spatial lag“) nie je také jednoznačné ako pri posune po časovej osi. Priestorová závislosť je definovaná ako vážený priemer náhodných premenných v susedných lokalitách. Priestorový posun premennej  $y$  pre  $i$ -tu jednotku môžeme vyjadriť nasledujúco:

$$[\mathbf{W}y]_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}y_j \quad (2)$$

kde  $\mathbf{W}$  je matica priestorových váh typu  $n \times n$ , ktorá zachytáva priestorovú závislosť medzi  $n$  priestorovými jednotkami. Každý prvok matice  $w_{ij}$  zachytáva priestorovú závislosť jednotky  $j$  na jednotku  $i$ . Na hlavnej diagonále tejto štvorcovej, symetrickej matice sa nachádzajú nuly a na určenie mimo diagonálnych prvkov existuje viacero prístupov. Táto matica sa najčastejšie konštruuje na základe vzájomnej polohy, resp. vzdialenosti. Cieľom tohto príspevku je práve problematika konštrukcie danej matice.

## 2 PRÍSTUPY KU KONŠTRUKCII MATICE PRIESTOROVÝCH VÁH

Ako bolo uvedené vyššie konštrukcia matice priestorových váh je zvyčajne založená buď na prístupe vzájomnej vzdialenosti alebo vzájomnej polohy priestorových jednotiek. Taktiež existujú prístupy, ktorú sú kombináciou prístupu vzájomnej vzdialenosti a polohy. V nasledujúcej časti budeme prezentovať uvedené prístupy.

### 2.1 Konštrukcia matice váh na základe vzdialeností

Matice priestorových váh na základe vzdialeností vychádzajú z ťažiskových vzdialeností  $d_{ij}$  medzi každým párom priestorových jednotiek  $i$  a  $j$ . Vzniká otázka čo označiť za ťažisko priestorovej jednotky. Za ťažisko sa môže určiť napr. hlavné mesto a následne sa vypočítajú vzdialenosti medzi ťažiskami. Do tejto skupiny prístupov patria napr. matice váh:

- **Matica váh  $k$  – najbližších susedov.** Nech ťažiská vzdialeností každej priestorovej jednotky  $i$  ku všetkým ostatným jednotkám  $j \neq i$  sú usporiadané nasledujúco:  $d_{ij(1)} \leq d_{ij(2)} \leq \dots \leq d_{ij(n-1)}$ . Potom pre každú jednotku  $k = 1, \dots, n-1$ , množina  $N_k(i) = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\}$  obsahuje  $k$  najbližších jednotiek  $k$  jednotke  $i$ . Pre každé zadané  $k$ , matica váh  $\mathbf{W}$   $k$  – najbližších susedov má nasledujúci tvar:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in N_k(i) \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad (3)$$

- **Matica váh radiálnych vzdialeností (Radial Distance Weights).** Tento prístup sa uplatňuje v prípade ak vzdialenosť priestorových jednotiek je významným faktorom priestorovej závislosti. Ak označíme  $d$  ako prahovú hodnotu vzdialenosti, po prekročení ktorej už hovoríme o neexistencii priamej priestorovej závislosti medzi priestorovými jednotkami, potom matica váh radiálnych vzdialeností má tvar:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & 0 \leq d_{ij} \leq d \\ 0, & d_{ij} > d \end{cases} \quad (4)$$

- **Matica váh mocninových vzdialeností (Power Distance Weights).** V prípade váh počítaných na základe radiálnych vzdialeností sa nepredpokladá klesajúci efekt vo vzdialenosti po úroveň prahovej vzdialenosti  $d$ . Ak predpokladáme klesajúci efekt vo vzdialenosti, potom jednou z možností pre konštrukciu váh je záporná mocninová funkcia vzdialeností v nasledujúcom tvare:

$$w_{ij} = d_{ij}^{-\alpha} \quad (5)$$

kde  $\alpha$  je akýkoľvek kladný exponent, najčastejšie  $\alpha = 1$  alebo  $\alpha = 2$ .

- **Matica váh exponenciálnych vzdialeností (Exponential Distance Weights).** Prístup záporných exponenciálnych funkcií je alternatívnym prístupom k záporným mocninovým funkciám vzdialeností a prvky matice váh sa vypočítajú na základe nasledujúceho vzťahu:

$$w_{ij} = \exp(-\alpha d_{ij}) \quad (6)$$

kde  $\alpha$  je akýkoľvek kladný exponent.

## 2.2 Konštrukcia matice váh na základe hraníc

Hlavnou výhodou prístupov vychádzajúcich zo vzdialeností medzi priestorovými jednotkami je výpočtová nenáročnosť. Avšak stretávame sa so situáciami kedy spoločné hranice medzi priestorovými jednotkami sú hlavným determinantom stupňa ich priestorovej závislosti. Do tejto skupiny prístupov patria napr. matice váh:

- **Matica váh priestorového susedstva (Spatial Contiguity Weights).** V tomto prípade jednoducho zistíme, či priestorové jednotky majú spoločné hranice alebo nie. Ak označíme množinu hraničných bodov priestorovej jednotky  $i$  ako  $bnd(i)$ , potom môžeme váhy priestorového susedstva typu „kráľovná“ zdefinovať nasledujúco:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & bnd(i) \cap bnd(j) \neq \emptyset \\ 0, & bnd(i) \cap bnd(j) = \emptyset \end{cases} \quad (7)$$

V tomto prípade váh typu „kráľovná“ sa predpokladá, že priestorové jednotky sú „susedia“ v prípade, ak majú spoločnú akúkoľvek časť hranice. Avšak silnejším predpokladom môže byť definovaná podmienka určitej spoločnej časti hranice. Napr. ak označíme  $l_{ij}$  ako vzdialenosť spoločnej hranice medzi  $i$  - tou a  $j$  - tou priestorovou jednotkou, potom môžeme váhy priestorového susedstva typu „veža“ zdefinovať nasledujúco:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & l_{ij} > 0 \\ 0, & l_{ij} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

- **Matica váh spoločných hraníc (Shared-Boundary Weights).** Ak  $l_i$  bude definovať celkovú dĺžku hraníc jednotky  $i$ , ktorú má spoločnú s ostatnými priestorovými jednotkami, t.j.  $\sum_{j \neq i} l_{ij}$ , potom môžeme množinu váh spoločných hraníc zdefinovať nasledujúco:

$$w_{ij} = \frac{l_{ij}}{l_i} = \frac{l_{ij}}{\sum_{k \neq i} l_{ik}} \quad (9)$$

## 3 ZÁVER

Príspevok je zameraný na prístupy ku konštrukcii matice priestorových váh  $\mathbf{W}$ . Keďže konštrukcia danej matice je prvým a nevyhnutným krokom akejkoľvek priestorovej analýzy je nutné jej venovať dostatočnú pozornosť. Matica  $\mathbf{W}$  zachytáva priestorovú závislosť medzi sledovanými jednotkami a teda je zrejmé, že výrazne ovplyvňuje celý proces analýzy. Uviedli sme dve skupiny prístupov ku konštrukcii danej matice a to prístup na základe vzdialeností a na základe hraníc. Taktiež sa v odbornej literatúre môžeme stretnúť aj s kombináciou týchto dvoch uvedených prístupov. Odpoveď na otázku výberu vhodnej matice priestorových váh nie je jednoznačná a je podmienená analyzovaným problémom a existenciou potrebných údajov

pre konštrukciu matice. Taktiež je v mnohých prípadoch dôležitá aj otázka normalizácie matice priestorových váh. Samotnú konštrukciu matice umožňujú softvéry zamerané na priestorovú analýzu dát.

### **Použitá literatúra**

1. ANSELIN, L. 1988. *Spatial econometrics: Methods and models*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988. s. 284. ISBN 90-247-3735-4.
2. CHOCHOLATÁ, M. 2013. Regional convergence: a spatial econometric approach. In: *Ekonomika a informatika*, roč. 11, 2013, č. 2, s. 85-95.
3. LeSAGE, J.P. 1998. *Spatial Econometrics*. <http://www.spatial-econometrics.com/html/wbook.pdf> [Dostupné 12. 5. 2013].
4. SMITH, E.T. *Spatial Weight Matrices*. [http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra\\_materials/SPATIAL%20WEIGHT%20MATRICES.pdf](http://www.seas.upenn.edu/~ese502/lab-content/extra_materials/SPATIAL%20WEIGHT%20MATRICES.pdf) [Dostupné 12. 4. 2015].
5. VITON, A. P. 2010. *Notes on Spatial Econometric Models*. <http://facweb.knowlton.ohio-state.edu/pvixon/courses2/crp8703/spatial.pdf> [Dostupné 12. 5. 2013].

### **Kontaktné údaje**

Ing. Andrea Furková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: [andrea.furkova@euba.sk](mailto:andrea.furkova@euba.sk)



# APLIKÁCIE TEÓRIE HIER V SPOLOČENSKÝCH VEDÁCH<sup>1</sup>

## APPLICATION OF GAME THEORY IN SOCIAL SCIENCE

*Tomáš Gál, Zuzana Čičková*

### **Abstrakt**

Hlavnou náplňou teórie hier je skúmanie prevažne konfliktných situácií, pričom ponúka rôzne nástroje pomocou ktorých ich možno formalizovať zvyčajne formou matematických modelov. Empirické pozorovania však ukazujú zásadné rozdiely medzi efektívnym správaním účastníkom a skutočne vykonanou akciou. Táto je ovplyvňovaná limitovanou racionalitou účastníkov, ktorú je možné v prostredí spoločenských vied skúmať a vysvetliť práve komparáciou dosiahnutých horších výsledkov v porovnaní s paradigmou.

### **Kľúčové slová**

Teória hier, sociálne vedy, Limitovaná racionalita,

### **Abstract**

The main topic of the game theory is study of conflict strategies, where it provides various tools enabling using mathematical models. On the contrary, empirical observations show significant distinction between optimal strategy and the action actually made. The second one is determined by limited rationality, which could be examined and explained in the field of social science, when comparing achieved worse results and the paradigm.

### **Key words**

Game Theory, Social Science, Limited rationality

## **1. Úvod**

Teória hier je odvetvím aplikovanej matematiky, ktoré je zamerané najmä na analýzu konfliktných rozhodovacích situácií, v ktorých sa stretávajú záujmy cieľovo sa správajúcich aktérov; indivíduí a kolektívov. Aj keď matematické metódy používané v spoločenských vedách vychádzajú predovšetkým z nástrojov používaných v oblasti prírodných vied, je zrejmé, že použitie všeobecného matematického aparátu na analýzu spoločenských javov nie je postačujúce. Teória hier rozvíja špecifické nástroje odrážajúce osobitosti spoločenských javov predovšetkým konfliktného charakteru, v ktorých sa stretávajú záujmy organizovaných systémov v najširšom zmysle (Chobot a kol., 1991, Goga, 2013).

## **2. Rozhodovacie situácie**

Hlavným znakom rozhodovacích situácií je výber z väčšieho počtu variantov. Tieto situácie možno vo všeobecnosti charakterizovať na základe počtu účastníkov ako nekonfliktné (jeden účastník, ktorý pozná dôsledky svojich rozhodnutí a vie ich oceniť) alebo konfliktné (viacero účastníkov, ktorí vedú oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov). Rozhodovacie situácie viacerých účastníkov (hry) možno tiež charakterizovať podľa možnosti a stupňa ich spolupráce ako nekooperatívne (antagonistický konflikt) alebo kooperatívne hry

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

(neantagonistický konflikt). Ďalšie možné možnosti zohľadnenia stochastiky, indiferentnosti niektorých hráčov, či možné zohľadnenie sekvencie rozhodnutí predurčujú široké využitie modelov a metód teórie hier.

Charakteristika teórie hier predurčuje využitie v rámci tvorby strategických plánov v závislosti od interakcie prostredia. Vplyv rôznych faktorov na ekonomické subjekty vedie často k vzniku konfliktov medzi elementmi systému. Príklady použitia modelov a metód teórie hier možno nájsť v oblasti cenotvorby, modelovania výdavkov na marketing, vyjednávania, modelov volebného rozhodovania a v neposlednom rade v modelovaní správania sa duopolu a oligopolu (Goga, 2013, Chobot a kol., 1991, Čemická a Čičková, 2011, Gibbons 1992, Rasmusen 2005). Teória hier však široko prekračuje rámec ekonomických aplikácií. Okrem ekonomicky kvantifikovateľných aplikácií, môže byť teória hier využívaná pri vysvetľovaní etologických, sociologických, antropologických a kultúrnych javov, ako aj pri vysvetľovaní konaní spojených s etickými a morálnymi dilemami.

Interpretácie výsledkov teórie hier sú nápomocné pri vysvetľovaní lokálnej stability dynamických systémov, medzi ktoré patrí aj koexistencia živočíchov v ekosystéme a ich vývoj. Modely teórie hier možno použiť pri skúmaní pravidiel prežitia najschopnejšieho jedinca v ekosystéme, tak vnútrodruhovo, ako aj medzidruhovo. V rámci teórie hier možno modelovať napríklad prejavy mutualizmu, altruizmu, spolupráce a konkurencie.

### 3. Využitie v spoločenských vedách

Zjednotenie v používaní formalizovaných modelov v ekosystéme, založených na etológii, kde nie sú zúčastnené organizmy s ľudskou racionalitou a modelmi, ktoré počítajú s ľudským rozhodovaním je možné na základe dvoch paradigiem: (1) Aj pri ľudskom rozhodovaní bolo empiricky overené, že aktér koná podľa suboptimálnej stratégie, alebo predpojatosti, alebo je indiferentný a nekoná vôbec (Kahneman, Tversky, 2004), (2) kým u ľudských aktérov je zvykom vyhodnocovanie výhodnosti ich konania na základe rôznych kvantifikátorov, u iných organizmov je toto možné napríklad na základe relatívneho zisku kalórií pri získavaní potravy. Navyše, možno predpokladať, že ľudské správanie sa je špeciálnym prípadom etológie živočíchov, čo umožňuje použitie rovnakého modelového prístupu, pričom jednotliví aktéri (hráči) tohto procesu sú konajúci (inteligentní) a jednak indiferentní (príroda). Indiferentný účastník môže byť človek, ktorý vyberá varianty bez hodnotenia výsledkov, ale aj faktor náhodného charakteru, napríklad prírodné podmienky, vo vzťahu s ktorým nemá pojem hodnotenia výsledkov vôbec zmysel. V oboch prípadoch možno k indiferentnému účastníkovi pristupovať ako k náhodnému mechanizmu, ktorý vyberá varianty podľa určitého pravdepodobnostného rozdelenia.

Modely rozhodovacích situácií sú spravidla stavané na predpoklade, že existuje aspoň jeden účastník u ktorého predpokladáme intencionalitu. Upúšťame od požiadavky na to, aby bol aktér racionálny. Hodnotiť aktéra ako racionálneho možno za splnenia dvoch podmienok: (1) aktér sa svojou akciou snaží maximalizovať profit v danej situácii a (2) očakáva rovnakú racionalitu aj od ostatných zúčastnených. V prípade jedného záujmu sa jedná o situácie so skalárnym ohodnotením výsledku (jednokriteriálne), v prípade viacerých záujmov o situácie s vektorovým ohodnotením výsledkov (viackriteriálne).

Reálne rozhodovacie situácie možno zvyčajne charakterizovať na základe typu konfliktu. Príkladom nekonfliktnej situácie je zdieľanie získaných zdrojov za dopredu dohodnutých pravidiel. Antropologické výskumy sa sústredili práve na vyhodnocovanie nekonfliktných situácií zdieľania v spoločenstvách, v ktorých nikdy neexistovalo trhové hospodárstvo (Boyd and Richerson, 2005). Práve tieto výskumy za pomoci hry *ultimate bargaining* testovali

prejavy intuitívnej morálky, ktorá vystupuje ako faktor limitujúci racionalitu pri rozhodovacích problémoch.

Konfliktná rozhodovacia situácia je taká, kde profit jedného z aktérov automaticky znamená stratu ostatných. Minimalizovať stratu je možné vytváraním koalícií. Využitie v sociálnych vedách je potom zamerané na testovanie správania sa aktérov pri tvorbe koalícií, spojené s javmi akými sú individuálna reputácia, trestanie nekooperatívnych aktérov, ale aj odpúšťanie trestu. Schelling (1960) uvádza pozorovanie, že existuje približne 4 % šanca na odpustenie nekooperatívneho správania a obnovenie spolupráce. Experimenty v kognitívnej psychológii ďalej ukázali, že rodičovský hormón oxytocín zvyšuje takúto mieru obnovenia kooperácie o 17 % (Koukolík, 2006).

Teória hier vstupuje aj do výskumov behaviorálnej ekonómie, kedy sú štandardné modely používané pri analyzovaní predpojatostí (*biasov*) ľudskej racionality. Predpojaté tak môžu byť rozhodovacie stratégie, prejavujúce sa napríklad: (1) Selektívnym zhromažďovaním dôkazov, prípadne zhromažďovanie len takých, ktoré potvrdzujú dopredu zadanú teóriu (Skyrms, 2005). (2) Predčasné ukončenie hľadania riešenia a akceptovanie prvej z alternatív, ktorá sa zdá byť výhodnou z estetického, kultúrneho alebo iného subjektívneho hľadiska. (3) Nečinnosť ako stratégia, keď sa aktér zámerne rozhodne stať sa indiferentným. Neschopnosť zmeniť zaužívané postoje pri konfrontácii s novými podmienkami. Obdobne pôsobí aj (4), selektívne vnímanie informácií, ktoré sú k dispozícii, kedy aktéri ignorujú fakty, ktoré odporujú ich etickému alebo estetickému postoju. (5) *Wishful thinking*, kedy aktéri majú tendenciu vidieť veci v pozitívnejšom svetle, než je objektívne overiteľné. (6) Faktor novosti (*recency*), kedy aktéri dávajú prednosť novej informácii a ignorujú alebo zabúdajú staršie. (7) Faktor opakovania, kedy aktéri prijímajú opakujúcu sa informáciu ako platnejšiu.

Skúmania behaviorálnej ekonómie ukázali aj vplyv kognitívnej dizonancie, čo je problém dvoch protichodných vstupov, kedy aktér ktorý je zvyknutý na správať sa podľa konkrétnej osvedčenej stratégie, má tendenciu samého seba presvedčiť, že ďalšie, neúspešné kolo bolo vlastne úspešné (Tversky, Kahneman, 2004). Pri ekonomicky kvantifikovateľných problémoch majú aktéri tiež oveľa menšiu tendenciu považovať riskantnú situáciu za nebezpečnú, v prípade, že majú možnosť sami intervenovať, ako keď sú len pozorovateľmi takejto situácie. Skúmanie kooperatívnych a kompetitívnych stratégií iných organizmov nie je v súčasnosti nezahŕňa predpojatosti.

V prípade aplikácie v evolučnej ekológii, majú modely teórie hier za cieľ vysvetliť etológiu živočíchov a vzťahy medzi nimi pri obstarávaní zdrojov (Veselovský 2008, Goodnight 2012). Možné stratégie sa pohybujú od nepriateľstva, cez prejavy kompetitívneho správania, po altruizmus. Interakcie medzi aktérmi sú nákladné v každom prípade, keďže energia je investovaná tak pri konfrontácii pri získavaní zdroja, ako aj pri spolupráci, sporej s jeho dodatočnou deľbou. Aj vyhýbanie sa konfrontácii možno považovať za nákladné, ak je energia naň vynaložená a žiadne prostriedky nie sú získané.

Vynaložená energia tvorí náklady, použité prostriedky interakcie sú potenciálne evolučnou výhodou. Pri porovnaní vynaložených nákladov možno určiť čistý zisk alebo stratu, ktoré vznikajú organizmu používaním interakcie. Najúspešnejšie organizmy maximalizujú prínosy z interakcie a zvyšujú tak svoju individuálnu schopnosť získavania potravy na každodenné prežitie a sekundárne schopnosť vytvárať a živiť potomstvo (*fitness*). Interakcie medzi organizmami s konkurenčnými alebo rovnakými stratégiami možno modelovať ako hry viacerých hráčov.

#### 4. Záver

Charakteristika rôznych typov rozhodovacích situácií, ktoré možno modelovo zaradiť do oblasti teórie hier predurčuje ich využitie nielen v ekonomickej oblasti. Pole výskumu spoločenských vied skúmajúce obmedzenia ľudskej racionality je perspektívnou aplikačnou

oblasťou v rámci využitia modelov a metód teórie hier. Modelovanie formalizovaných problémov ponúka paradigmy správania sa účastníkov, ktoré sa líšia od pozorovaní z bežného života. Vysvetlenie týchto rozdielov prispeje k hlbšiemu poznaniu ľudskej racionality. Širšie aplikácie zahŕňajúce limity ľudskej racionality môžu viesť k ekonomicky významným prínosom najmä v poisťovníctve, finančníctve, manažmente, medzinárodných vzťahov, ale napríklad aj pri humánnej ekológii a budovaní ľudských sídiel.

### **Použitá literatúra**

1. AXELROD, R. 1990. *The Evolution of Co-operation*, New York, Penguin Books.
2. AXELROD, R. 2006. *The Complexity of Cooperation*, New Delhi, New Age International Limited Publishers.
3. BOYD, R. & RICHERSON, P. J. 2005. *The Origin and Evolution of Cultures*, New York, Oxford University Press.
4. BOYD, R; GINTIS, H; BOWLES, S. & RICHERSON P. J. 2005. *The Evolution of Altruistic Punishment* In: GINTIS, H; BOWLES, S; BOYD, R. & FEHR, E. eds. *Moral Sentiments and Material Interests*, Cambridge, MIT Press.
5. ČEMICKÁ, K., ČIČKOVÁ, Z. 2011. Teória hier a aukcie na Slovensku a ich porovnanie s ostatnými vo svete. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu*. EKONÓM, Bratislava, s. 1-5.
6. DUNBAR, R. 2002. *Grooming, Gossip, and the Evolution of Language*, London, Faber and Faber, Ltd.
7. FEHR, E; GÄCHTER, S. 2002. Altruistic punishment in humans, *Nature* č. 415, Jan. 2002, s. 138-140.
8. FOX, C. R. & TVERSKY, A. 2005. A Belief-Based Account of Decision under Uncertainty In: SHAFIR, E. (ed.) *Preference, Belief, and Similarity*, Cambridge, MIT Press.
9. GIBBONS, R. 1992. *Game Theory for Applied Economist*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
10. GOGA, M. 2013. *Teória hier*, Iura Edition, Bratislava
11. GOODNIGHT, C. J. 2012. Wright's shifting balance theory and factors affecting the probability of peak shifts. In: *The adaptive landscape in evolutionary biology*; Erik Svensson and Ryan Calsbeek eds. Oxford University Press., s. 74-86.
12. HAMPTON, A. N; BOSSAERTS , P; O'DOHERTY, J. 2006. The Role of the Ventromedial Prefrontal Cortex in Abstract State-Based Inference during Decision Making in Humans, *The Journal of Neuroscience*, August 9, 2006. S. 26.
13. HAWKES, K. 1992. Sharing and collective action. In E. A. SMITH, E. A. & WINTERHALDER, B (eds.) *Evolutionary Ecology and Human Behavior*. New York.
14. CHOBOT M., TURNOVEC, F. ULAŠÍN, V., 1991. *Teória hier a rozhodovania*. Alfa, Bratislava.
15. KAHNEMAN, D; TVERSKY A. 2004. Conflict Resolution: A Cognitive Perspective In: SHAFIR, E. (ed.) *Preference, Belief, and Similarity*, Cambridge, MIT Press.
16. KAPLAN, H. & GURVEN. M. 2005. The Natural History of Human Food Sharing and Cooperation In: GINTIS, H; BOWLES, S; BOYD, R. & FEHR, E. (eds.) *Moral Sentiments and Material Interests*, Cambridge, MIT Press.
17. KNIGHT, C. 2000.(a) Culture, cognition and conflict. *Cambridge Archaeological Journal*, č. 10/2000.
18. KNIGHT, C. 2000.(b). Introduction: the evolution of cooperative communication. In C. KNIGHT, J. HURFORD AND M. STUDDERT-KENNEDY (eds.), *Evolutionary Emergence of Language: Social Function and the Origins of Linguistic Form*. Cambridge: Cambridge University Press.

19. KOUKOLÍK, F. 2006. Sociální mozek, Praha, Karolinum.
20. RASMUNSEN, E., 2005. Games and information: an introduction to game theory (3rd ed.). Blackwell Publishing.
21. SCHELLING, T. 1960. The Strategy of Conflict, Harvard University Press, Cambridge.
22. SILK, J. B. 2005. The Evolution of Cooperation in Primate Groups in: GINTIS, H; BOWLES, S; BOYD, R. and FEHR, E. (eds.) Moral Sentiments and Material Interests, Cambridge, MIT Press.
23. SKYRMS, B. 2005. Evolution of the Social Contract., Cambridge, Cambridge University Press.
24. VESELOVSKÝ, Z. 2008. Etologie, Biologie chování zvířat, Praha, Academia
25. WINDMAN, S. a kol. 2006. On Framing Effects in Decision Making: Linking Lateral versus Medial Orbitofrontal Cortex Activation to Choice Outcome Processing, Journal of Cognitive Neuroscience. Č. 18/2008.
26. WHEELER, E. Z; FELLOWS, L. K. 2008. The human ventromedial frontal lobe is critical for learning from negative feedback, Brain, č. 131/2008(5).

### **Kontaktné údaje**

PhDr. Ing. Tomáš Gál, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Tel: (421 2) 59 244 978

email: [tomas.gal@uniba.sk](mailto:tomas.gal@uniba.sk)

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: [cickova@euba.sk](mailto:cickova@euba.sk)

# EKOLOGICKÝ PRÍSTUP A LEGISLATÍVA V ECO-ECO MODELOCH TRANSPORTU<sup>1</sup>

## ECOLOGICAL APPROACH AND LEGISLATION IN ECO-ECO MODELS OF TRANSPORTATION<sup>2</sup>

*Pavel Gežík*

### **Abstrakt**

Optimalizácia prostredníctvom Eco-Eco modelov sleduje nie len ekonomické, ale aj ekologické ciele. Práve ekologický aspekt týchto modelov je často podmienený legislatívou, ktorú musia subjekty na trhu spĺňať. Pri modeloch transportu, resp. pri modeli, ktoré riešia najkratšie cesty sa jedná najmä o legislatívu spojenú s ochranou ovzdušia a emisiami. Na Slovensku je v platnosti mnoho zákonov a vyhlášok, ktoré vychádzajú z legislatívy Európskej únie a predpisov spojených s tvorbou emisií práve dopravnými prostriedkami.

Ekonomická časť Eco-Eco modelu zväčša spočíva v minimalizácii nákladov spojených s prejazdenou vzdialenosťou. Tato skutočnosť umožňuje zahrnúť i ekologickú časť, keďže produkcia emisií sa viaže na spotrebované palivo, ktoré možno približne určiť na základe uvedenej vzdialenosti.

***Kľúčové slová:** Eco-Eco model, legislatíva, optimalizácia, emisie*

### **Abstract**

Optimization through the Eco-Eco model concentrates not only on economic but also on environmental objectives. Ecological aspect of these models are often conditioned by the legislation which has to be fulfilled by subjects on the market. In transportation models, particularly in the model which solves finding of the shortest path, it is dealing with the relevant legislation of the climate quality protection and emissions. There are many laws and regulations in Slovakia which stem from the EU legislation and regulations related to the emission production from transportation.

The economic part of the Eco-Eco model mainly consists in minimizing the costs associated with the spent distance. This fact allows to include the ecological part to the model because the emission production is linked to the spent fuel which can be roughly defined on the basis of the spent distance.

***Keywords:** Eco-Eco Model, Legislation, Optimization, Emissions*

---

<sup>1</sup> Tento príspevok je podporený Vedeckou grantovou agentúrou - VEGA, grant č. 1/0245/15 „Plánovanie prepravy s cieľom znižovania emisií“.

<sup>2</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic - VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

# 1 ÚVOD

Pojem Eco-Eco model predstavuje model, ktorý je zameraný nie len na sledovanie ekonomických cieľov. Označenie Eco-Eco vychádza z anglického označenia eco(nomy)-eco(logy), teda ekonomicko-ekologický model (*Lifset and Lombardi, 1997*).

Väčšina modelov zameraných na optimalizáciu transportu, resp. hľadanie najkratších ciest je spojených s minimalizáciou prepravných nákladov, resp. s minimalizáciou času prepravy, teda sa často jedná o minimalizáciu, ktorá nezohľadňuje iné ako ekonomické ciele.

Ekologický prístup je často považovaný za prístup, ktorý naopak zvyšuje náklady a teda nemá pozitívny vplyv na ekonomickú časť modelu. Z toho dôvodu na zavedenie práve ekologického prístupu do modelovania ekonomických procesov slúži istý spoločenský tlak na ekologické uvažovanie pri optimalizácii procesov. Uvedený spoločenský tlak je obsiahnutý v legislatíve, ktorá upravuje množstvo skutočností spojených s optimalizáciou a teda tvorbou eco-eco modelov. Práve legislatíva Európskej únie (EÚ) je často spomínaná ako základný rámec pri tvorbe eco-eco modelov (*Dekker a spol. 2004*), a preto predstavuje základ pre zavádzanie ekologických cieľov do ekonomicky orientovaných procesov.

## 2 ECO-ECO MODEL

Pod pojmom model transportu možno rozumieť rôzne úlohy o hľadaní najkratšej cesty medzi jednotlivými miestami ale i okružné úlohy, kde je cieľom začať a skončiť cestu v tom istom uzle a pritom prejsť najkratšiu vzdialenosť. Minimálna vzdialenosť je ekonomický cieľ, lebo sa spája s nákladmi spojenými so spotrebovaným palivom.

A práve so spotrebovaným palivom sa spája tvorba emisií, keďže väčšia spotreba znamená viac emisií. Vychádzajúc z tohto predpokladu možno o každom modeli transportu, ktorý sleduje minimalizáciu prejazdenej vzdialenosti, resp. minimalizáciu spotreby paliva povedať, že sa jedná o Eco-Eco model.

Samozrejme, ciele spojené s minimalizáciou tvorby emisií možno zaviesť do spomínaných modelov transportu. Najčastejšie sa jedná o zaradenie ďalšieho cieľa, teda pri lineárnom programovaní pôjde o ďalšiu účelovú funkciu. Následne sa využije princíp agregácie cieľových kritérií pre úlohy s viacerými účelovými funkciami a vytvorí sa agregovaná

účelová funkcia v tvare:  $f_0(x) = \sum_{k=1}^s v_k f_k(x) = \sum_{k=1}^s v_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_{ij}$ , kde  $f_k$ , pre  $k \in (1, 2, \dots, s)$

predstavuje jednotlivé účelové funkcie s ekonomickým a s ekologickým cieľom z množiny  $s$ , ktorá predstavuje všetky ciele Eco-Eco modelu. K jednotlivým cieľom môžu byť priradené

váhy  $v_k$ , pre ktoré platí  $\sum_{k=1}^s v_k = 1$ . Jednotlivé funkcie sa skladajú z premenných  $x_{ij}$ , ktoré

predstavujú spojenie medzi jednotlivými miestami a k ním prislúchajúce ohodnotenie  $c_{ijk}$ , pre  $i, j \in (1, 2, \dots, n)$ , kde  $n$  predstavuje množinu všetkých miest, medzi ktorými prebieha optimalizácia. O  $c_{ijk}$  platí, že  $c_{ijk} = c_{jik}$ , ak existuje spojenie medzi miestami  $i$  a  $j$ ,  $c_{ijk} = 0$ , ak  $i = j$  a ak spojenie neexistuje medzi danými miestami, využíva sa hodnota  $\infty$ .

### 2.1 Ekonomický prístup

Ekonomický prístup v Eco-Eco nie je možné jednoznačne vymedziť len ako ekonomický, keďže ako bolo vyššie naznačené, minimalizácia vzdialenosti je tak ekonomický ako i ekologický cieľ. Väčšinou sa pod pojmom  $c_{ijk}$ , uvádzajú práve jednotky vzdialenosti (najčastejšie kilometre), na základe ktorých je možné určiť náklady vychádzajú zo spotreby paliva.

K ekonomickému prístupu prislúchajú i ohraničenia, ktoré môžu byť považované aj za ekologické ako napr. snaha sa vyhnúť trasám v obci, kde je spotreba paliva vyššia. Ale môže sa jednať i o čisto ekonomické ohraničenia ako napr. ohraničenie, ktoré zamedzuje prejazd spoplatneným úsekom trasy.

## 2.2 Ekologický prístup

Ako už bolo spomínané, základom ekologického prístupu je to isté ako v ekonomickom prístupe, a to minimalizácia spotreby paliva. Podľa doterajších analýz obsahujú výfukové plyny piestových spaľovacích motorov takmer 160 jednotlivých zložiek, ale len približne 0,3% predstavujú škodlivé emisie vo výfukových plynach [3]. Tvorba výfukových plynov je priamo úmerná spotrebe, a teda čím menšia spotreba, tým menej emisií v ovzduší.

Ekologický prístup nespočíva len v minimalizácii emisií. Napr. pre dokonalé spálenie 1 kg nafty sa spotrebuje 14,78 kg vzduchu (z toho 3,4 kg kyslíka) a vyprodukuje sa 3,15 CO<sub>2</sub> [3]. Minimalizácia produkcie CO<sub>2</sub> patrí k hlavným ekologickým cieľom pri modeloch transportu.

Ak sa jedná o modely transportu osôb, tak cieľom je znižovať podiel produkcie CO<sub>2</sub> na prepravovanú osobu. Na základe údajov z Európy (množstvo vykonaných jazd, počet najazdených kilometrov, rôzne typy paliva, priemerná využitelnosť, počet osôb vo vozidle, rôzne typy motorov, vrátane hodnoty produkcie CO<sub>2</sub> z výrobného procesu) sa vypočítalo množstvo produkovaných emisií na 271 g CO<sub>2</sub> na kilometer a jedného pasažiera. Toto číslo je oveľa vyššie ako hovorí údaj v technickom preukaze väčšiny automobilov (okolo 170 g) a oveľa vyššie ako udávajú plány v smerniciach Európskej komisie (130 g do roku 2015) [4].

Ekologický prístup v ohraničeniach úlohy môže byť spojený s výberom a druhom dopravných prostriedkov a ich tvorbou emisií ale aj s teritoriálnym obmedzením, kedy z ekologických dôvodov nie je vhodné plánovať transport daným územím.

## 3 LEGISLATÍVNY ASPEKT ECO-ECO MODELOV

Emisie spaľovacích motorov obsahujú stovky chemických látok v rôznych koncentráciách, ktorých biologické vlastnosti neboli doteraz jednoznačne určené avšak ich škodlivý účinok na životné prostredie bol preukázaný. Spaľovacie motory sú zodpovedné za viac než 70 % globálnej produkcie CO emisii a 19 % CO<sub>2</sub>. Z hľadiska ochrany životného prostredia sa niektoré zložky výfukových plynov upravujú legislatívnymi predpismi a dovoľené hodnoty sa sprísňujú a periodicita ich sprísňovania sa skracaje (aktuálne cca každých 5 rokov) [3].

### 3.1 Legislatíva EÚ

Predpisy a nariadenia EÚ sú povinné pre všetky členské štáty EÚ a v súvislosti s transportom sú rozdelené do dvoch základných kategórií. Prvá sú emisné predpisy pre osobné a ľahké úžitkové vozidlá označené ako EURO 1 až EURO 6. Druhá sú emisné predpisy pre ťažké nákladné vozidlá a autobusy (EURO I až EURO IV).

Za dôležité predpisy možno považovať hlavne smernice Európskeho parlamentu a Rady 94/63/ES o obmedzení emisií prchavých organických zlúčenín vznikajúcich pri skladovaní benzínu a jeho distribúcii z terminálov do čerpacích staníc, 96/62/ES o určovaní kvality ovzdušia, 98/70/ES o kvalite benzínu a motorovej nafty, 1999/13/ES o obmedzení prchavých organických zlúčenín unikajúcich pri používaní organických rozpúšťadiel pri určitých činnostiach a v určitých zariadeniach, 1999/32/ES o znížení obsahu síry v niektorých kvapalných palivách, 2000/76/EC o spaľovaní odpadov, 2001/80/ES o obmedzení emisií niektorých znečisťujúcich látok do ovzdušia z veľkých spaľovacích zariadení, 2001/81/ES o národných emisných stropoch pre určité látky znečisťujúce ovzdušie.



Následne smernice Európskeho parlamentu a Rady 2004/42/ES o obmedzení emisií prchavých organických zlúčenín unikajúcich pri používaní organických rozpúšťadiel v určitých farbách a lakoch a vo výrobkoch na povrchovú úpravu vozidiel, 2004/107/ES, ktorá sa týka arzenu, kadmia, ortuti, niklu a polycyklických aromatických uhl'ovodíkov v okolitom ovzduší, 2005/33/ES, ktorou sa mení a dopĺňa smernica 1999/32/ES vzhľadom na obsah síry v lodných palivách, 2008/1/ES o integrovanej prevencii a kontrole znečisťovania životného prostredia, 2008/50/ES o kvalite okolitého ovzdušia a čistejšom ovzduší v Európe, 2009/30/ES, ktorou sa menia a dopĺňajú smernice 98/70/ES a 1999/32/ES, 2009/31/ES o geologickom ukladaní oxidu uhličitého a 2010/75/EÚ o priemyselných emisiách (integrovaná prevencia a kontrola znečisťovania životného prostredia) [5].

Ďalej sú to Rozhodnutie Európskeho parlamentu a Rady č. 529/2013/EÚ, Rozhodnutie Rady 97/101/ES, Rozhodnutia Komisie 2004/224/ES, 2004/461/ES, 2005/166/ES, 2006/329/ES, 2006/534/ES, 2007/205/ES, 2007/531/ES, 2009/73/ES, 2010/681/EÚ, 2010/693/ES, 2010/731/EÚ, 2011/540/EÚ, Vykonávacie rozhodnutia Komisie 2011/850/EÚ, 2012/115/EÚ a 2012/795/EÚ a Nariadenia Komisie (EÚ) č. 389/2013 a č. 601/2012 [5].

### **3.2 Legislatíva SR**

Všetky smernice ale i iné nariadenia a rozhodnutia sú zohľadnené i v legislatíve SR. Jedná sa najmä o zákony, ale aj o vyhlášky a oznámenia [6]:

Zákon NR SR č. 401/1998 Z. z. o poplatkoch za znečisťovanie ovzdušia v znení zákona č. 161/2001 Z. z., zákona č. 553/2001 Z. z., zákona 478/2002 Z. z., zákona č. 525/2003 Z. z., zákona č. 587/2004 Z. z., zákona č. 571/2005 Z. z., zákona č. 203/2007 Z. z., zákona č. 529/2007 Z. z., zákona č. 515/2008 Z. z. a zákona č. 286/2009 Z. z. Zákon ustanovuje poplatkovú povinnosť, pôsobnosť orgánov ochrany ovzdušia, výpočet poplatku; oznamovanie údajov, konanie vo veciach poplatkov, platenie poplatkov, príjemcu poplatku; pokuty. V prílohách sú uvedené znečisťujúce látky podliehajúce poplatkovej povinnosti a ich zaradenie do sadzobných tried, výpočet výšky poplatku prevádzkovateľa veľkého alebo stredného zdroja.

Zákon NR SR č. 137/2010 Z. z. o ovzduší, ktorý upravuje cieľ v kvalite ovzdušia, hodnotenie kvality ovzdušia a informovanie verejnosti o kvalite ovzdušia, práva a povinnosti osôb pri ochrane ovzdušia pred vznášaním znečisťujúcich látok ľudskou činnosťou a pri obmedzovaní príčin a zmierňovaní následkov znečisťovania ovzdušia, osvedčovanie odbornej spôsobilosti a povinnosti oprávnených posudzovateľov pri vyhotovovaní odborných posudkov alebo čiastkových odborných posudkov, oprávnené merania, kalibrácie, skúšky a inšpekciu zhody, pôsobnosť orgánov štátnej správy ochrany ovzdušia, správne delikty v oblasti ochrany ovzdušia.

Zákon MŽP SR č. 318/2012 Z. z., ktorým sa mení a dopĺňa zákon č. 137/2010 Z. z. o ovzduší.

Vyhlášky Ministerstva životného prostredia Slovenskej republiky č. 314/2010 Z.z., č. 410/2012 Z.z., č. 411/2012 Z.z., č. 231/2013 Z.z. a č. 270/2014 Z.z..

Vyhlášky Ministerstva pôdohospodárstva, životného prostredia a regionálneho rozvoja Slovenskej republiky č. č. 356/2010 Z. z., č. 357/2010 Z. z., č. 358/2010 Z. z., č. 359/2010 Z. z., č. 360/2010 Z. z., č. 361/2010 Z. z., č. 362/2010 Z. z. a č. 363/2010 Z. z..

Oznámenia Ministerstva zahraničných vecí Slovenskej republiky č. 344/1998 Z. z. a č. 516/2006 Z. z.

### 3.3 Emisie v SR

Vývoj emisií hlavných znečisťujúcich látok na území Slovenskej republiky sa sleduje prostredníctvom databázy Registra emisií a zdrojov znečistenia ovzdušia (REZZO), ktorá sa od roku 1985 spracováva na Slovenskom hydrometeorologickom ústave (SHMÚ). Web stránka SHMÚ poskytuje aktuálne informácie o kvalite ovzdušia a obsahuje hodinové koncentrácie znečisťujúcich látok. Aktuálne zverejnené hodinové údaje majú len informatívny charakter a vyhodnocované sú na základe technických parametrov prístroja nasledujúci pracovný deň v ranných hodinách.

SHMÚ zároveň poskytuje hodnotenie kvality ovzdušia vychádzajúc zo zákonom č. 137/2010 Z. z. stanoveného postupu pre jej hodnotenie (aktuálne od 2004 po 2012), kde kvalitu ovzdušia vo všeobecnosti určuje obsah znečisťujúcich látok vo vonkajšom ovzduší. Kritériá kvality ovzdušia sú uvedené vo vyhláske MŽP SR č. 360/2010 Z. z. o kvalite ovzdušia. Základným východiskom pre hodnotenie kvality ovzdušia na Slovensku sú výsledky meraní koncentrácií znečisťujúcich látok v ovzduší. V nadväznosti na merania sa pre plošné hodnotenie kvality ovzdušia využívajú metódy matematického modelovania na základe rozdelenia územia. Aktuálne sa jedná o 18 oblastí riadenia kvality ovzdušia v 8 zónach a v 2 aglomeráciách. Vymedzené oblasti zaberajú rozlohu 2 882 km<sup>2</sup>. Na tomto území v roku 2012 žilo 1 448 417 obyvateľov, čo predstavuje 27 % z celkového počtu obyvateľov SR.

V rámci SHMÚ existuje pracovná skupina „Emisie“, ktorá pracuje pod Odborom Kvalita ovzdušia a je poverená plnením úloh a kompetenciami, vyplývajúcimi zo zákonov č. 478/2002 a č. 245/2003 Z. z., vyhlášok MŽP SR č. 61/2004 a č. 391/2003 Z.z., ako aj plnením úloh, ktoré pre SR vyplývajú z medzinárodných zmlúv a dohovorov a európskej legislatívy.

Táto skupina zabezpečuje kontinuálne zber a spracovanie údajov o zdrojoch znečisťovania ovzdušia prostredníctvom databázového systému NEIS. Pre úlohy vyplývajúce z požiadaviek Dohovoru EHK OSN o diaľkovom znečisťovaní ovzdušia prechádzajúcom hranicami štátov a jeho vykonávaných protokolov a Rámcového dohovoru o zmene klímy zabezpečuje reporty emisných údajov a doplňujúcich informácií.

Pracovná skupina Emisie je zároveň definovaná ako samostatná národná jednotka pre Kjótsky protokol (protokol k Rámcovému dohovoru OSN o zmene klímy) a plní koordinačnú funkciu Národného inventarizačného systému pre emisie skleníkových plynov Slovenskej republiky ISSP. ISSP je informačný systém o emisiách skleníkových plynov SR určený pre odbornú a laickú verejnosť. Obsahuje údaje o emisiách vyprodukovaných za sledované obdobie od roku 1990. V systéme sa nachádzajú údaje o emisiách skleníkových plynov a o projekciách týchto emisií až do roku 2035 a o metodikách stanovenia emisií využívaných v SR. Údaje je možné vyhľadávať podľa kritérií a následne prezerat' v textovej, prípadne v grafickej podobe použitím časových radov. Informačná databáza obsahuje posledné oficiálne validované a v rámci plnenia medzinárodných záväzkov poskytnuté údaje, ktoré budú minimálne raz ročne dopĺňané a aktualizované.

## 4 ZÁVER

Na základe skutočnosti, že existuje vzťah medzi tvorbou emisií a spotrebou paliva, možno povedať o modeloch transportu, ktoré minimalizujú spotrebu, že sa jedná o Eco-Eco modely. I keď nižšia spotreba paliva pri optimálnej trase ma za následok menšie množstvo emisií v ovzduší, nie je to jediný ekologicky cieľ, ktorý možno v týchto modeloch sledovať.

Ekologické ciele, ktoré sa často sledujú sú spojené s dodržiavaním prísnej legislatívy, ktorá upravuje množstvo aspektov týkajúcich sa dopravy a najmä dopravných prostriedkov. Táto legislatíva, ktorá sa zavádza najmä s cieľom ochrany životného prostredia je čoraz prísnejšia aj k výrobe dopravných prostriedkov a obsahuje množstvo kvantifikovaných reštrikcií, ktoré je nutné spĺňať už pri formulácii Eco-Eco modelov. Práve znalosť legislatívy a správna tvorba modelu, ktorý reflektuje skutočnosti z nej vyplývajúce môže prispieť k tomu, že optimálny model transportu bude využitý v reálnej praxi.

### **Použitá literatúra**

- [1.] DEKKER, R. et al. 2004. *Reverse Logistics*. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 436 s., ISBN 3-540-40696-4.
- [2.] LIFSET, R. a LOMBARDI, D. R. 1997. *Who Should Pay? And Why? Some Thoughts on the Conceptual Foundations for the Assignment of Extended Producers Responsibility*. Príspevok prezentovaný na OECD EPR Workshop, december 1997, Ottawa.
- [3.] MORAVČÍK, Ľ. 2013. *Sprísňovanie emisných limitov cestných motorových vozidiel*. In: Svet Dopravy, online, december 2013, ISSN 1338-9629.
- [4.] [http://www.ecf.com/wp-content/uploads/ECF\\_CO2\\_WEB.pdf](http://www.ecf.com/wp-content/uploads/ECF_CO2_WEB.pdf)
- [5.] <https://enviroportal.sk/ovzdušie/pravne-predpisy-eu>
- [6.] <https://enviroportal.sk/ovzdušie/pravne-predpisy-sr>
- [7.] <http://www.shmu.sk/>

### **Kontaktné údaje**

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: [pavel.gezik@euba.sk](mailto:pavel.gezik@euba.sk)

# MODELOVANIE ZMIEN V CENOVÝCH MODELOCH<sup>1</sup>

## MODELING OF CHANGE ON PRICE MODELS

*Marián Goga*

### **Abstrakt**

V tomto príspevku autor zameriava pozornosť na možnosti modelovať zmeny v hodnotových vzťahov a proporciách v niektorých typoch cenových modelov, najmä na možnosti modelovať zmeny vo vzájomných vzťahoch medzi cenami produkcie a jej zložkami. Uvedené sú dva typy cenových modelov – cenový model s väzbou na celkovú produkciu a konečnú spotrebu a cenový model s rovnovážnymi cenami.

**Kľúčové slová:** input-output model, cenový model, zmeny cien primárnych vstupov, rovnovážna cena,

### **Abstract**

In this article the author draws attention to the possibility to model changes in value relations and proportions in some types of pricing models, in particular the possibility of changes in the model of correlation between cost of production and its components. There are listed two types of pricing models - pricing model with relation to total production and final consumption and pricing model with the equilibrium price.

**Keywords:** input-output model, price model, change price of input factors, equilibrium price

**JEL:** C 67

### **ÚVOD**

Input-output analýza sa v ekonomickej literatúre aj v praxi používa v mnohých aplikáciách. V tomto príspevku zameriame pozornosť na možnosti modelovať zmeny v hodnotových vzťahov a proporciách v niektorých typoch cenových modelov, najmä na možnosti modelovať zmeny vo vzájomných vzťahoch medzi cenami produkcie a jej zložkami. Modelovací prístup sa opiera o otvorený input-output model W. Leontiefa a východiskom pre rozpracovanie problematiky tvorby a analýzy cien je input-output tabuľka<sup>2</sup>.

Je známe, že objektívnym základom ceny sú nevyhnutné náklady na výrobu a realizáciu produkcie, pričom cena musí zohľadňovať nielen výrobné náklady, ale musí zabezpečovať aj zisk a rentabilitu. Dôležitým smerom použitia input-output tabuľky je nielen analýza existujúcich cien, ale aj analýza vplyvu a dôsledkov zmien ceny produkcie v jednom odvetví na výrobné náklady a ceny produkcie v iných odvetviach, pretože previazanosť odvetví národného hospodárstva je veľmi úzka. Ak sa zmenia ceny produkcie v jednom odvetví,

<sup>1</sup> Príspevok je výstupom z riešenia projektu VEGA č. 1/0285/14 - *Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na metódy priestorovej ekonometrie.*

<sup>2</sup> LEONTIEF, W.: Input-Output Economics. In: *Scientific American*, No. 4, 1951, s. 15-21.

spôsobí to reťazové reakcie priamych zmien materiálových nákladov a tým aj cien (alebo niektorých jej zložiek) v odvetviach, ktoré túto produkciu spotrebúvajú. Zmeny sa ďalej šíria aj do ostatných odvetví hospodárstva, resp. pôsobia spätne na cenu produkcie odvetvia, ktoré zmeny spôsobilo. To znamená, že zmena cien produkcie v jednom odvetví spôsobí úpravu cien produkcie v ďalších odvetviach. Napríklad, ak sa zvýšia ceny vstupov v chemickom priemysle, spôsobí to zvýšenie výrobných nákladov a zároveň aj zvýšenie ceny priemyselných hnojív, čo má za dôsledok zvýšenie cien vstupov do poľnohospodárstva a zároveň zvýšenie cien poľnohospodárskej produkcie.

Zmeny cien v niektorom odvetví však zároveň spôsobujú zmeny nielen vo výrobe, ale aj v rozdeľovaní miezd a zisku v iných odvetviach. Takto dotknuté odvetvia sa snažia aspoň čiastočne preniesť zvýšenie cien na spotrebiteľov, prípadne ho kompenzovať na úkor zisku, čo môže mať vplyv na zhoršenie ekonomickej situácie tohto odvetvia. V konečnom dôsledku sa všetky tieto zmeny prejavujú aj vo finálnej spotrebe.

Uvedené zmeny je možné modelovať (kvantifikovať) a riešiť pomocou input-output modelov a ich modifikácií. Tieto modely sú vhodným prostriedkom na rýchle a pomerne presné výpočty:

- vplyvu vzájomného pôsobenia zmeny cien produkcie odvetví,
- vplyvu zmien ceny na náklady spotrebiteľov,
- vplyvu zmien v pridanej hodnote na ceny produkcie odvetví,
- efektu zvýšenia alebo zavedenia nového druhu daní v jednom, či viacerých odvetviach na zmeny cien produkcie v ostatných odvetviach,<sup>3</sup>
- vplyvu zmien ceny na novovytvorenú hodnotu a jej zložky<sup>4</sup>.

Ďalej uvedieme dva typy cenových modelov – cenový model s väzbou na celkovú produkciu a konečnú spotrebu a cenový model s rovnovážnymi cenami.

## 1 CENOVÝ MODEL S VÄZBOU NA CELKOVÚ PRODUKCIU A KONEČNÚ SPOTREBU

Tento typ modelu je úzko viazaný na celkovú produkciu  $\mathbf{x}$  a konečnú spotrebu  $\mathbf{y}$ , za predpokladu, že je zadaná matica technických koeficientov  $\mathbf{A}$ , vektor finálnej spotreby  $\mathbf{y}$  a koeficienty zložiek pridanej hodnoty<sup>5</sup>. Väzby sú dané základným otvoreným leontiefovským input-output modelom v tvare  $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}$  a cenovým modelom  $\mathbf{p} = \mathbf{c}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{*T})^{-1}$ , pričom  $\mathbf{p}$  vyjadruje úroveň cien produkcie jednotlivých odvetví,  $\mathbf{A}^{*T}$  je transponovaná matica koeficientov priamej spotreby a  $\mathbf{c}^*$  je vektor koeficientov pridanej hodnoty vzťahovaných na jednotku celkovej produkcie príslušných odvetví. Medzi oboma modelmi existujú závislosti, ktoré sa prejavujú najmä pri pôsobení ceny ako určitého nástroja regulácie rovnováhy na trhu. Môže sa zisťovať empiricky a dá sa vyjadriť adekvátnymi funkciami.

Ako funkcie možno použiť jednoduché lineárne funkcie, ktoré vyjadrujú:

a) vzťah medzi objemom celkovej produkcie a cenami v tvare **funkcie ponuky**

<sup>3</sup> HUSÁR, J. – SZOMOLÁNYI, K.: Strategické skúmanie vplyvu cien na ekonomickú pozíciu odvetvia. In: *Ekonomické rozhľady*, XXV, č. 4, 2006, s. 417-427.

<sup>4</sup> FECANIN, J. a kol.: *Štruktúrna analýza a rozmiestňovacie modely*. Bratislava – Praha: Alfa – SNTL, 1985, s. 100-103.

<sup>5</sup> Tamtiež, s. 103-104.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

b) vzťah medzi konečnou spotrebou a cenami v tvare **funkcie dopytu**

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{p}, \quad (2)$$

kde

$\mathbf{x}$  je vektor celkovej produkcie,

$\mathbf{y}$  – vektor konečnej spotreby,

$\mathbf{p}$  – vektor cien,

$\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1$  – vektory parametrov, ktorých hodnoty sa odhadujú štatistickými metódami (napríklad metódou najmenších štvorcov a pod.)<sup>6</sup>.

Spojením otvoreného input-output modelu výroby a rozdelenia produkcie, cenového modelu, funkcie ponuky a funkcie dopytu vznikne systém rovníc v tvare

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{c}^* \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{*T})^{-1} \\ \mathbf{x} &= \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p} \\ \mathbf{y} &= \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3)$$

Za predpokladu, že leontiefovská matica  $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$  je regulárna, možno nájsť jednoznačné riešenie, ktoré zohľadňuje závislosť medzi cenami na jednej strane a celkovou produkciou, konečnou spotrebou a pridanou hodnotou na strane druhej.

## 2 CENOVÝ MODEL S ROVNOVÁŽNYMI CENAMI

Input-output analýza poskytuje rôzne metódy a modely, pomocou ktorých je možné vypočítať rovnovážne ceny. Jeden z prístupov pri formovaní cenového modelu, založeného na výpočte rovnovážnych cien uvádza Chiou – Shuang Yan<sup>7</sup>.

Yan v modeli predpokladá, že každé výrobné odvetvie stanovuje cenu produkcie tak, aby sa rovnala priemerným nákladom plus zisku. Matematicky zapisuje rovnicu ceny produkcie odvetvia  $i$  v tvare

$$p_i = p_1 \cdot a_{1i} + p_2 \cdot a_{2i} + \dots + p_n \cdot a_{ni} + p_l \cdot l_i + p_i \cdot r, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

kde

$p_j \cdot a_{ji}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) sú priame náklady na vstupy, nakúpené z iných výrobných odvetví ( $a_{ji}$  sú technické koeficienty),

$p_l \cdot l_i$  – vyjadruje priame náklady práce ( $p_l$  je cena práce  $l$ ),

$r \cdot p_i$  – označuje veľkosť zisku ( $r$  je miera zisku).

Ak sa všeobecne predpokladá hospodárstvo  $n$  odvetví, potom sa vzťah (4) zmení na tvar

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + p_l \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

alebo vo vektorovo-maticovom tvare

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{p} + p_l \cdot \mathbf{l} + r \cdot \mathbf{p}, \quad (6)$$

kde

<sup>6</sup> HATRÁK, M.: *Ekonometria*. Bratislava: IURA Edition, 2007.

<sup>7</sup> CHIOU – SHUANG YAN: *Introduction to Input-Output Economics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

$\mathbf{A}^T$  je transponovaná matica technických koeficientov,

$\mathbf{p}$  – vektor cien produkcie odvetví,

$\mathbf{l}$  – vektor faktora práce.

Zo vzťahu (6) sa po úprave vyjadria priame náklady práce v tvare<sup>8</sup>

$$p_l \cdot \mathbf{l} = \mathbf{p} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{p} - r \cdot \mathbf{p}, \quad (7)$$

resp. po ďalšej úprave

$$p_l \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{p} \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} \quad (9)$$

čo znamená, že ak je zadaná mzda a miera zisku, vektor rovnovážnych cien produkcie odvetví sa dá získať vypočítaním inverznej matice a priamych nákladov práce zo vzťahu (9).

Za predpokladu, že sa nevytvára zisk, vzťah (9) má tvar

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} \quad (10)$$

Yan sa vo svojich úvahách ďalej zaoberal problémom, ako sa zmení rovnovážna štruktúra cien, ak sa zmenia mzdy, prípadne zisk. Zmeny v mzde ( $\Delta p_l$ ) a v miere zisku ( $\Delta r$ ) majú za dôsledok zmeny v cenách produkcie ( $\Delta \mathbf{p}$ ). Tieto zmeny sa premietajú aj do modelu (9), ktorý má tvar

$$\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - (r + \Delta r) \cdot \mathbf{I}]^{-1} \cdot (p_l + \Delta p_l) \cdot \mathbf{l} \quad (11)$$

Ak sa ďalej odpočíta vzťah (9) od vzťahu (11), vznikne matematický model v tvare

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - (r + \Delta r) \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot (p_l + \Delta p_l) \cdot \mathbf{l} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} \quad (12)$$

Analyzovaním modelu (12) Yan dospel k záveru, že:

a) ak sa zmenia iba mzdy v odvetviach, vzťah (12) má tvar

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot (p_l + \Delta p_l) \cdot \mathbf{l} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \Delta p_l \cdot \mathbf{l} \quad (13)$$

b) ak sa zmení iba miera zisku, potom vzťah (12) má tvar

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I} - \Delta r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} \quad (14)$$

Čiže, ak by sa mzdy v odvetviach zvýšili o jednu peňažnú jednotku, potom by vzťah (13) mal tvar

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{l} \quad (15)$$

a ak by sa miera zisku zvýšila o 1 %, potom by vzťah (14) mal tvar

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I} - 0,01 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - r \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot p_l \cdot \mathbf{l} \quad (16)$$

V predchádzajúcich vzťahoch sa predpokladala rovnaká mzda a rovnaká miera zisku vo všetkých odvetviach hospodárstva. V skutočnosti sa však mzdy aj miera zisku v odvetviach odlišujú. Rozdielne mzdy a mieru zisku Yan premietol do modifikácie modelu (12) do tvaru

$$\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{I} - \Delta \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{P}}_l + \Delta \hat{\mathbf{P}}_l) \cdot \mathbf{l} - (\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_l \cdot \mathbf{l}, \quad (17)$$

kde

$\hat{\mathbf{R}}$  je diagonálna matica, ktorej prvky  $r_i$  sú mierou zisku v odvetví  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$\hat{\mathbf{P}}_l$  – diagonálna matica, ktorej prvky  $p_{li}$  predstavujú mzdu v odvetví  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

$\Delta \hat{\mathbf{R}}$  – zmeny miery zisku v diagonálnej matici v odvetviach hospodárstva,

$\Delta \hat{\mathbf{P}}_l$  – zmeny miezd v diagonálnej matici v odvetviach hospodárstva.

Model, ktorým Yan odhadoval efekt zmien v cenách faktorov predpokladá, že výrobcovia tvoria ceny tak, aby mali pokryté výrobné náklady a prijateľnú mieru zisku. Berie do úvahy aj fakt, že ponuka určuje ceny. Z krátkodobého hľadiska je zrejmé, že dopyt dominuje nad

<sup>8</sup> HUSÁR, J. – MOKRÁŠOVÁ, V. – GOGA, M.: *Input-output analýza a systém národných účtov*. Bratislava: EKONÓM, 2007, s. 62-65.

ponukou pri určovaní cien produkcie. Z dlhodobého hľadiska sú však kľúčovým faktorom pri stanovovaní cien produkcie náklady na produkciu.

Modely (12) a (17) sa v input-output analýze používajú na vypočítanie efektu zmien v cenách primárnych faktorov za celé národné hospodárstvo, ktoré vyplývajú z danej zmeny v štruktúre miezd a ziskov v odvetviach výrobnjej sféry.

## ZÁVER

Ekonomický systém každej krajiny obsahuje sústavu vzájomne previazaných odvetví výrobnjej sféry, v ktorej zmeny cien produkcie jedného odvetvia majú za dôsledok ďalšie zmeny vyvolané v iných odvetviach. Nárast cien produkcie v niektorom odvetví spôsobí zmeny, ktoré sa rôznou intenzitou prejavia v celom ekonomickom systéme. Ak vzrastie cena v odvetví, ktoré vyrába produkciu pre medzispotrebu (suroviny, energia, polotovary a pod.), potom táto zmena ceny má za dôsledok zdraženie primárnych vstupov v odvetviach, ktoré túto produkciu spotrebúvajú vo svojej výrobe. To však má ďalej za dôsledok to, že tieto odvetvia zároveň zdražia výstupy (produkciu) a tým sa snažia zvýšenie cien vstupov čiastočne preniesť na spotrebiteľa, alebo ho kompenzujú na úkor zisku, čo však môže zhoršiť ekonomickú situáciu daného odvetvia. Zvýšenie nákladov v nejakom odvetví sa priamo či nepriamo šíri ďalej do iných odvetví, čo má za dôsledok vytváranie novej trhovej rovnováhy.

Uvedené procesy, ako je uvedené v príspevku, je možné kvantifikovať pomocou input-output modelov. Pri kvantifikácii zmeny cien sa používajú rôzne cenové modely, ktorými sa dajú analyzovať *tri oblasti zmien*<sup>9</sup>. Ide o analýzu týchto problémov:

- a) aký dopad má na zmeny cien produkcie v ostatných odvetviach, ak sa napríklad zavedie v niektorom odvetví nový druh dane (resp. sa zvýšia či znížia dane),
- b) aké dôsledky má autonómne zvýšenie cien produkcie v niektorých odvetviach na ceny produkcie v ostatných odvetviach, ktoré môžu presunúť zvýšenie cien svojich materiálových vstupov na spotrebiteľov bez zmeny svojej relatívnej ekonomickej pozície,
- c) aké dôsledky má autonómne zvýšenie cien produkcie v niektorých odvetviach na ekonomickú pozíciu ostatných odvetví, ktoré kvôli administratívnej cenovej kontrole alebo danej trhovej situácii nemôžu presunúť zdraženie primárnych vstupov na spotrebiteľov.

K týmto trom problémovým okruhom sa dajú použiť adekvátne leontiefovské input-output modely pre ekonomický systém s  $n$  odvetviami.

## Použitá literatúra

1. CIASCHINI, M.: *Input-Output Analysis. Current Developments*. New York: Springer, 2001.
2. DUCHIN, F. – STEENGE, A. E.: *Mathematical Models in Input-Output Economics*. New York: Rensselaer, 2007.

---

<sup>9</sup> HUSÁR, J. – MOKRÁŠOVÁ, V. – GOGA, M.: *Input-output analýza a systém národných účtov*. Bratislava: EKONÓM, 2007, s. 70-78, alebo HUSÁR, J. – SZOMOLÁNYI, K.: Strategické skúmanie vplyvu cien na ekonomickú pozíciu odvetvia. In: *Ekonomické rozhľady*, XXV, č. 4, 2006, s. 417-427.



3. FECANIN, J. a kol.: *Štruktúrna analýza a rozmiestňovacie modely*. Bratislava – Praha: Alfa – SNTL, 1985.
4. GOGA, M.: *Input-output analýza*. Bratislava: IURA EDITION, 2009.
5. HATRÁK, M.: *Ekonometria*. Bratislava: IURA Edition, 2007.
6. HUSÁR, J. – MOKRÁŠOVÁ, V. – GOGA, M.: *Input-output analýza a systém národných účtov*. Bratislava: EKONÓM, 2007.
7. HUSÁR, J. – SZOMOLÁNYI, K.: Strategické skúmanie vplyvu cien na ekonomickú pozíciu odvetvia. In: *Ekonomické rozhlady*, XXV, č. 4, 2006, s. 417-427.
8. CHIOU – SHUANG YAN: *Introduction to Input-Output Economics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.
9. LEONTIEF, W.: Input-Output Economics. In: *Scientific American*, No. 4, 1951, s. 15-21.
10. MILLER, R. E. – BLAIR, P. D.: *Input-Output Analysis: Foundations and Extensions*. New Jersey: Prentice Hall, 1985.
11. PELTZMAN, S.: Prices Rise Faster than they Fall. In: *Journal of Political Economy*, No. 108, 2000, s. 486-502.
12. ROSE, A. Z.: Input-Output Economics and Computable General Equilibrium Models. In: *Structural Change and Economic Dynamics*, Vol. 6, 1995, s. 295-304.

### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Marián Goga, CSc.  
Fakulta hospodárskej informatiky  
Ekonomická univerzita v Bratislave  
Dolnozemska 1, 852 35 Bratislava  
Tel.: (421 2) 67 295 824  
e-mail: [goga@euba.sk](mailto:goga@euba.sk)

# ROVNOVÁHA TYPU OTVORENEJ SLUČKY V BILATERÁLNO COURNOTOVOM DUOPOLE S VÝROBKOVÝMI INOVÁCIAMI VSTUPOV

## OPEN-LOOP EQUILIBRIUM IN A BILATERAL COURNOT DUOPOLY WITH PRODUCT INNOVATION OF INPUTS

*Milan Horniaček, Ľubica Šimková*

### **Abstrakt**

V článku analyzujeme model bilaterálneho Cournotovho duopolu s nekonečným časovým horizontom a diskontovaním budúcich platieb. Každý z duopolistov na nižšom stupni výrobnjej vertikály vyrába jeden druh vstupu. Každý z duopolistov na vyššom stupni výrobnjej vertikály používa tieto vstupy na výrobu jedného druhu finálneho výrobku. Pre výrobcov finálnych výrobkov sú ceny vstupov parametrami. Výrobcovia vstupov môžu v každom období inovovať svoje výrobky. Inovácia sa prejaví v nasledujúcom období zvýšením parametrov produkčných funkcií finálnych výrobcov. Inverzné dopytové funkcie pre vstupy vyplývajú zo statickej Cournotovej rovnováhy na trhu finálnych výrobkov. Konceptom rovnováhy na trhu vstupov je Nashova rovnováha s otvorenou slučkou. Pri splnení predpokladov v našom modeli existuje pre ľubovoľný diskontný faktor.

**Kľúčové slová:** bilaterálny duopol, Cournotov duopol, výrobkové inovácie, Nashova rovnováha s otvorenou slučkou.

### **Abstract**

In the paper we analyze model of bilateral Cournot duopoly with infinite time horizon and discounting of future payoffs. Each of the upstream duopolists produces one type of input. Each of the downstream duopolists uses these inputs to produce one type of final good. The producers of final goods are price takers in the input market. In each period, the producers of inputs can innovate their products. An innovation will manifest itself in increases of parameters of production functions of producers of final goods in the following period. Inverse demand functions for inputs are derived from the static Cournot equilibrium in the market for final goods. An open-loop Nash equilibrium is the equilibrium concept in the market for inputs. Under the assumptions made in our model it exists for any discount factor.

**Keywords:** bilateral duopoly, Cournot duopoly, product innovation, open-loop Nash equilibrium.

## **1 ÚVOD**

V súčasnosti má väčšina priemyselných odvetví oligopolný charakter. Ekonomické aj technologické podmienky ich činnosti sú ovplyvnené oligopolnými odvetviami na predchádzajúcom alebo nasledujúcom stupni výrobnjej vertikály. Strategická interakcia v oligopoloch na naväzujúcich stupňoch výrobnjej vertikály je kľúčovým faktorom pri výrobkovej inovácii vstupov, ktorá vedie k technologickej inovácii pri výrobe používajúcej tieto vstupy. Jej modelovej analýze sa venujeme v tomto príspevku. Zameriavame sa pri tom na strategickú interakciu bez kolúzie. Analýzou podobného modelu s kolúziou všetkých štyroch podnikov sa zaoberá Šimková v [3].

## 2 MODEL

Podniky 1 a 2 vyrábajú vstupy, ktoré podniky 3 a 4 používajú na výrobu finálnych výrobkov. Maximálny možný objem produkcie podniku  $k \in \{1,2,3,4\}$  (z hľadiska kapacitných obmedzení alebo z hľadiska možnosti dosiahnuť kladnú cenu) je  $y_k^{\max} > 0$ . Inverzné dopytové funkcie pre výrobky podnikov 3 a 4,  $P_i : [0, y_3^{\max}] \times [0, y_4^{\max}] \rightarrow [0, \infty)$ ,  $i \in \{3,4\}$ , priradujú každému vektoru objemov produkcie  $(y_3, y_4)$  jednotkové ceny výrobkov podnikov 3 a 4, pri ktorých sa vektor dopytov po nich rovná  $(y_3, y_4)$ . Predpokladáme, že pre každé  $i \in \{3,4\}$   $P_i$  je spojitá v oboch argumentoch a nerastúca v  $y_i$  na celom definičnom obore a rýdzo klesajúca, dvakrát spojitاً diferencovateľná a konkávna v  $y_i$  v každom bode  $(y_3, y_4)$  z jej definičného oboru, pre ktorý  $P_i(y_3, y_4) > 0$ . Produkčná funkcia pre výrobok podniku  $i \in \{3,4\}$ ,  $f_i : [0, y_1^{\max}] \times [0, y_2^{\max}] \times [a_{i1}, a_{i1}^{\sup}] \times [a_{i2}, a_{i2}^{\sup}] \rightarrow [0, \infty)$ , kde  $a_{i1}^{\sup} > a_{i1} > 0$  a  $a_{i2}^{\sup} > a_{i2} > 0$ , priraduje každému prípustnému vektoru vstupov  $(x_{i1}, x_{i2})$  a každému prípustnému vektoru  $(a_{i1}, a_{i2})$  parametrov účinnosti vstupov vyrobených podnikmi 1 a 2 maximálny objem produkcie podniku  $i$ ,  $f_i(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2})$ . Predpokladáme, že táto funkcia je spojitá v celom vektore argumentov, rýdzo rastúca vo vektore vstupov  $(x_{i1}, x_{i2})$  (t.j., ak  $(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2})$  je z definičného oboru  $f_i$ ,  $z_{i1} > x_{i1}$  a  $z_{i2} > x_{i2}$ , potom  $f_i(z_{i1}, z_{i2}, a_{i1}, a_{i2}) > f_i(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2})$ ), rýdzo rastúca vo vektore parametrov účinnosti vstupov  $(a_{i1}, a_{i2})$  (t.j., ak  $(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2})$  je z definičného oboru  $f_i$ ,  $b_{i1} > a_{i1}$  a  $b_{i2} > a_{i2}$ , potom  $f_i(x_{i1}, x_{i2}, b_{i1}, b_{i2}) > f_i(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2})$ ) a možno ju vyjadriť v tvare

$$f_i(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2}) = [h_i(a_{i1}, x_{i1}, a_{i2}, x_{i2})]^{\gamma_i}, \gamma_i \in (0, 1], \quad (1)$$

kde funkcia  $h_i : [0, a_{i1}^{\sup} y_1^{\max}] \times [0, a_{i2}^{\sup} y_2^{\max}] \rightarrow [0, \infty)$  je lineárne homogénna a konkávna.

Podnik  $j \in \{1,2\}$  môže výrobkovou inováciou svojho výrobku v období  $t \in N$  (kde  $N$  označuje množinu prirodzených čísel) zvýšiť jeho účinnosť pri výrobe výrobkov podnikov 3 a 4 (t.j. zvýšiť parametre  $a_{3j}$  a  $a_{4j}$ ) v období  $t+1$ . V tomto príspevku sa obmedzujeme na deterministické výrobkové inovácie. Nech v období  $t \in N$  parametre účinnosti vstupu vyrábaného podnikom  $j \in \{1,2\}$  sú  $a_{3j}(t)$  a  $a_{4j}(t)$  a investície podniku  $j$  do výrobkovej inovácie sú  $m_j(t)$ . Potom parameter účinnosti vstupu vyrobeného v podniku  $j$  vo výrobe výrobku podniku  $i \in \{3,4\}$  v období  $t+1$  je  $\eta_{ij}(a_{ij}(t), m_j(t))$ . Predpokladáme, že pre každé  $i \in \{3,4\}$  a každé  $j \in \{1,2\}$  funkcia  $\eta_{ij} : [a_{ij}, a_{ij}^{\sup}] \times [0, \infty) \rightarrow [a_{ij}, a_{ij}^{\sup}]$  je spojitá, rýdzo rastúca v každom argumente, rýdzo konkávna v  $m_j$  (teda hraničné výnosy z investície do výrobkovej inovácie sú rýdzo klesajúce),  $\eta_{ij}(a_{ij}, 0) = a_{ij}$  pre každé  $a_{ij} \in [a_{ij}, a_{ij}^{\sup}]$ ,  $\lim_{a_{ij} \rightarrow a_{ij}^{\sup}} \eta_{ij}(a_{ij}, m_j) = a_{ij}^{\sup}$  a  $\lim_{m_j \rightarrow \infty} \eta_{ij}(a_{ij}, m_j) = a_{ij}^{\sup}$  pre každé  $(a_{ij}, m_j)$  z jej definičného oboru. Príkladom funkcie spĺňajúcej tieto predpoklady je  $\eta_{ij}(a_{ij}, m_j) = a_{ij} + (a_{ij}^{\sup} - a_{ij}) \frac{m_j}{m_j + 1}$ .

Časový horizont modelu je  $N$ . Parametre účinnosti vstupov v období  $t \in N$  označíme  $a_{ij}(t)$ ,  $i \in \{3,4\}$ ,  $j \in \{1,2\}$ . Ich hodnoty v období 1 sú dané. Pri interakcii všetkých štyroch podnikov bez kolúzie v rozhodovaní podnikov 3 a 4 nie sú žiadne väzby medzi obdobiami. V každom

období  $t \in N$  pri cenách vstupov  $w_1(t) > 0$  a  $w_2(t) > 0$  a parametroch účinnosti vstupov, ktoré nemôžu ovplyvniť (avšak ktoré vyplývajú z rozhodnutí podnikov 1 a 2 o objemoch produkcie v období  $t$  a o investíciách do výrobných inovácií v období  $t-1$ ), je výsledkom ich interakcie statická Cournotova rovnováha (s použitými množstvami vstupov ako rozhodovacími premennými)  $((x_{31}^*(t), x_{32}^*(t)), (x_{41}^*(t), x_{42}^*(t)))$ . Táto spĺňa

$$(x_{31}^*(t), x_{32}^*(t)) = \arg \max \left\{ P_3(f_3(x_{31}, x_{32}, a_{31}(t), a_{32}(t)), f_4(x_{41}^*(t), x_{42}^*(t), a_{41}(t), a_{42}(t))) f_3(x_{31}, x_{32}, a_{31}(t), a_{32}(t)) \right\} \\ \left. \begin{array}{l} -w_1(t)x_{31} - w_2(t)x_{32} \\ x_{31} \in [0, y_1^{\max}] \\ x_{32} \in [0, y_2^{\max}] \end{array} \right\} \quad (2)$$

a

$$(x_{41}^*(t), x_{42}^*(t)) = \arg \max \left\{ P_4(f_3(x_{31}^*(t), x_{32}^*(t), a_{31}(t), a_{32}(t)), f_4(x_{41}, x_{42}, a_{41}(t), a_{42}(t))) f_4(x_{41}, x_{42}, a_{41}(t), a_{42}(t)) \right\} \\ \left. \begin{array}{l} -w_1(t)x_{41} - w_2(t)x_{42} \\ x_{41} \in [0, y_1^{\max}] \\ x_{42} \in [0, y_2^{\max}] \end{array} \right\} \quad (3)$$

Predpokladáme, že inverzné dopytové funkcie pre výrobky podnikov 3 a 4 a produkčné funkcie týchto podnikov sú také, že pre každý vektor kladných cien vstupov a prípustných hodnôt parametrov účinnosti vstupov existuje jediná Cournotova rovnováha medzi podnikmi 3 a 4. Z vety o maxime a vzťahov (2) a (3) vyplýva, že táto je spojitou funkciou cien vstupov a parametrov ich účinnosti. Určuje teda spojité dopytové funkcie podnikov 3 a 4 po vstupoch, ktorých súčet dáva agregátne dopytové funkcie po vstupoch. (V prípade vektora cien  $\bar{w}$  s jednou alebo obidvoma zložkami rovnými nule položíme dopytované množstvo rovné limite dopytovaných množstiev pre ľubovoľnú postupnosť kladných cenových vektorov spejúcu k  $\bar{w}$ .) Z vlastností inverzných dopytových a produkčných funkcií pre podniky 3 a 4 vyplýva, že agregátne dopytová funkcia pre vstup vyrábaný podnikom  $j \in \{1, 2\}$  je rýdzo klesajúca v jeho cene v každom bode svojho definičného oboru, v ktorom má funkčnú hodnotu z intervalu  $(0, y_j^{\max})$ . Invertovaním agregovaných dopytových funkcií pre vstupy vzhľadom na ceny vstupov dostaneme spojité inverzné dopytové funkcie pre vstupy (t.j. výrobky podnikov 1 a 2)  $P_j : \prod_{k=1}^2 [0, y_k^{\max}] \times \prod_{i=3}^4 \prod_{k=1}^2 [a_{ik}, a_{ik}^{\sup}] \rightarrow [0, \infty)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , kde  $P_j(y_1, y_2, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42})$  je jednotková cena vstupu vyrobeného podnikom  $j$ , keď objemy výroby podnikov 1 a 2 sú  $y_1$  a  $y_2$  a parametre účinnosti vstupov sú  $a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ . Tieto dopytové funkcie používajú vo svojom rozhodovaní o objemoch výroby a investíciách do výrobných inovácií podniky 1 a 2. Keďže agregátne dopytová funkcia pre každý vstup je rýdzo klesajúca v jeho cene v každom bode svojho definičného oboru, v ktorom má funkčnú hodnotu z intervalu  $(0, y_j^{\max})$ , pre každé  $j \in \{1, 2\}$  funkcia  $P_j$  je rýdzo klesajúca v  $y_j$  v každom bode svojho definičného oboru, v ktorom má kladnú funkčnú hodnotu.

Predpokladáme, že inverzné dopytové a produkčné funkcie pre podniky 3 a 4 majú také vlastnosti, že pre každé  $j \in \{1, 2\}$  funkcia  $P_j$  je konkávna v  $y_j$  v každom bode svojho definičného oboru, v ktorom má kladnú funkčnú hodnotu.

Podnik  $j \in \{1, 2\}$  má nákladovú funkciu  $c_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , ktorá je dvakrát spojitou diferencovateľná, rýdzo rastúca a konvexná. (V záujme zjednodušenia modelu nepredpokladáme závislosť výrobných nákladov vstupu od parametrov jeho účinnosti. Zahnutie takejto závislosti do modelu by nezmenilo naše kvalitatívne výsledky.)

Rozhodnutia podnikov 1 a 2 o výrobkovej inovácii svojho vstupu v období  $t \in N$  ovplyvňujú jeho cenu ako aj výsledok investícií do jeho inovácie aj v nasledujúcich obdobiach. Z tohto

dôvodu rozhodovanie podnikov 1 a 2 analyzujeme v nekonečnom časovom horizonte. Podnik  $j \in \{1,2\}$  diskontuje zisky v budúcich obdobiach pomocou diskontného faktora  $\delta_j \in (0,1)$ . Rozhodnutia podniku 1 v období  $t \in N$  však neovplyvňujú množiny prípustných rozhodnutí podniku 2 v nasledujúcich obdobiach a opačne. Pri analýze strategickej interakcie podnikov 1 a 2 v nekonečnom horizonte môžeme teda použiť stratégie a rovnováhu typu otvorenej slučky. Čistá stratégia typu otvorenej slučky podniku  $j \in \{1,2\}$  je funkcia  $s_j : N \rightarrow [0, y_j^{\max}] \times [0, \infty)$ , ktorá priraduje každému obdobiu  $t \in N$  objem produkcie  $y_j(t)$  a investície do výrobkovej inovácie  $m_j(t)$ . Množinu všetkých čistých stratégií typu otvorenej slučky hráča  $j \in \{1,2\}$  označíme  $S_j$  a položíme  $S = S_1 \times S_2$ . Pre  $j \in \{1,2\}$  a  $s_j \in S_j$  postupnosť rozhodnutí podniku  $j$  generovanú jeho stratégiou  $s_j$  zapíšeme v tvare  $\{(y_j(t, s_j), m_j(t, s_j))\}_{t=1}^{\infty}$ . Platobná funkcia  $\pi_j : S \rightarrow \mathfrak{R}$  podniku  $j \in \{1,2\}$  (kde  $\mathfrak{R}$  je množina reálnych čísel) je definovaná vzťahom

$$\pi_j(s) = (1 - \delta_j) \sum_{t=1}^{\infty} \delta_j^{t-1} [P_j(y_1(t, s_1), y_2(t, s_2), a_{31}(t), a_{32}(t), a_{41}(t), a_{42}(t)) y_j(t, s_j) - c_j(y_j(t, s_j)) - m_j(t, s_j)]$$

(4)

kde

$$a_{ij}(t+1) = \eta_{ij}(a_{ij}(t), m_j(t)), \forall i \in \{3,4\}, \forall j \in \{1,2\}, \forall t \in N. \quad (5)$$

$G = \langle \{1,2\}, S_1, S_2, \pi_1, \pi_2 \rangle$  je nekooperatívna hra medzi podnikmi 1 a 2, keď môžu používať iba stratégie typu otvorenej slučky. Vzhľadom na obmedzenie na stratégie typu otvorenej slučky môžeme  $G$  považovať za nekooperatívnu hru v strategickom tvare.

**Definícia:** Profil čistých stratégií  $s^* \in S$  je Nashovou rovnováhou typu otvorenej slučky v  $G$ , ak neexistuje taká stratégia  $s_1 \in S_1$ , že  $\pi_1(s_1, s_2^*) > \pi_1(s^*)$ , ani taká stratégia  $s_2 \in S_2$ , že  $\pi_2(s_1^*, s_2) > \pi_2(s^*)$ .

Nashova rovnováha typu otvorenej slučky v  $G$  v čistých stratégiách určuje rovnovážne ceny a parametre účinnosti vstupov v každom období. Pomocou nich možno vypočítať rovnovážne objemy produkcie a ceny výrobkov podnikov 3 a 4 v každom období.

### 3 EXISTENCIA ROVNOVÁHY

**Tvrdenie:** Hra  $G$  má Nashovu rovnováhu typu otvorenej slučky v čistých stratégiách.

**Dôkaz:** Je jasné, že podnik  $j \in \{1,2\}$  nebude v žiadnom období investovať do výrobkovej inovácie sumu prevyšujúcu

$$m_j^{\max} = \frac{\delta_j}{1 - \delta_j} \max \{P_j(y_1, y_2, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}) y_j - c_j(y_j) \mid y_k \in [0, y_k^{\max}], a_{ik} \in [a_{ik}, a_{ik}^{\sup}], \forall k \in \{1,2\}, \forall i \in \{3,4\}\}$$

Označme  $S_j^+$  podmnožinu  $S_j$ , ktorej každý prvok v každom období predpisuje investície do výrobkovej inovácie z intervalu  $[0, m_j^{\max}]$ . Položme  $S^+ = S_1^+ \times S_2^+$ .  $S^+$  je neprázdna kompaktná konvexná podmnožina metrizovateľného (a teda lokálne konvexného) vektorového priestoru  $(\mathfrak{R}^4)^{\infty}$ .

Pre každé  $j \in \{1,2\}$  a  $k \in \{1,2\} \setminus \{j\}$  zo spojitosti funkcie  $P_j$  a jej konkávnosti v  $y_j$ , zo spojitosti a konvexnosti funkcie  $c_j$  a z vety o maxime vyplýva, že funkcia  $r_j : [0, y_k^{\max}] \times \prod_{i=3}^4 \prod_{n=1}^2 [a_{in}, a_{in}^{\sup}] \rightarrow [0, y_j^{\max}]$  definovaná vzťahom

$r_j(y_k, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}) = \arg \max \{P_j(y_1, y_2, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42})y_j - c_j(y_j) \mid y_j \in [0, y_j^{\max}]\}$  je dobre definovaná (t.j. je funkciou) a je spojitá a funkcia  $v_j : [0, y_k^{\max}] \times \prod_{i=3}^4 \prod_{n=1}^2 [a_{in}, a_{in}^{\sup}] \rightarrow \Re$  definovaná vzťahom  $v_j(y_k, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}) = \max \{P_j(y_1, y_2, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42})y_j - c_j(y_j) \mid y_j \in [0, y_j^{\max}]\}$

je spojitá. Definujme funkciu  $\alpha : S^+ \rightarrow S^+$  vzťahom  $\alpha(s) = (\alpha_1(s_2), \alpha_2(s_1))$ , kde pre každé  $j \in \{1,2\}$  a  $k \in \{1,2\} \setminus \{j\}$   $\alpha_j(s_k)$  je najlepšia odpoveď podniku  $j$  na  $s_k$ . Z vyššie uvedeného vyplýva, že pri výpočte  $\alpha_j(s_k)$  stačí najprv určiť investície do výrobkovej inovácie s využitím funkcie  $v_j$  a následne jednoznačne určiť objemy produkcie pomocou funkcie  $r_j$ . Z rýdzej konkávnosti funkcie  $\eta_j$  v  $m_j$ , z (1) a z konkávnosti  $P_i$  v  $y_i$  pre  $i \in \{3,4\}$  vyplýva, že postupnosť investícií do výrobkovej inovácie je určená jednoznačne. Vzhľadom na spojitosť funkcií  $\eta_j$ ,  $i \in \{3,4\}$ , a  $v_j$  uvedená postupnosť je spojitou funkciou  $s_k$ . Funkcia  $\alpha$  je teda spojitá. Z tohto a vlastností jej definičného oboru vyplýva, že spĺňa predpoklady vety 1 v [1] a má pevný bod  $s^*$ . Tento je Nashovou rovnováhou typu otvorenej slučky v čistých stratégiách v hre  $G$ . Q.E.D.

## 4 ZÁVER

Výsledky výskumu uvedené v tomto príspevku možno použiť pri analýze výrobkovej inovácie vstupov v situácii, keď ich výrobcovia ani spracovatelia nespolupracujú. Možno ich teda použiť ako porovnávací základ pri hodnotení priebehu procesu výrobkovej inovácie vstupov v situácii spolupráce podnikov na obidvoch stranách trhu analyzovaného v [3]. Dajú sa využiť aj pri skúmaní činnosti podnikov – emitentov cenných papierov tvoriacich analyzované portfolio (teda k rozvinutiu typu analýzy opísanej v [2]).

### Použitá literatúra

1. BROWDER, F. E. 1967. A new generalization of the Schauder fixed point theorem. In: *Mathematische Annalen*, roč. 174, č. 4, s. 285-290.
2. MLYNAROVIC, V. 2013. Rozvinuté schémy dekompozície výnosov portfólia. In: *Mezinárodní vědecký seminář Nové trendy v ekonometrii a operačním výzkumu*. Ekonóm, Bratislava, 10 s.
3. ŠIMKOVÁ, Ľ. 2015. Silná dokonalá rovnováha v bilaterálnom Cournotovom duopole s výrobovými inováciami vstupov. In: *Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi XI*.

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Milan Horniaček, CSc.

Mgr. Ľubica Šimková

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 5 Bratislava

Tel: (421 2) 20 669 861

email: [milan.horniacek@fses.uniba.sk](mailto:milan.horniacek@fses.uniba.sk)

[lubica.simkova@fses.uniba.sk](mailto:lubica.simkova@fses.uniba.sk)

# PARITA KÚPNEJ SILY A PANELOVÉ TESTY JEDNOTKOVÉHO KOREŇA<sup>1</sup>

## PURCHASING POWER PARITY AND PANEL UNIT ROOT TESTS

*Michaela Chocholatá*

### Abstrakt

Predmetom príspevku je problematika parity kúpnej sily a testovanie jej platnosti na báze panelových testov jednotkového koreňa. Prezentované sú dva panelové testy jednotkového koreňa (Levinov-Linov a Imov, Pesaranov a Shinov test) na testovanie reálnych výmenných kurzov s poukázaním na ich prínos a nedostatky.

*Kľúčové slová:* parita kúpnej sily, stacionarita, panelové testy jednotkového koreňa

### Abstract

This paper deals with the purchasing power parity and with testing of its validity based on panel unit root tests. Two panel unit root tests (Levin-Li and Im, Pesaran, Shin test) are presented in order to test the real exchange rates with pointing out to their advantages and limits.

*Keywords:* purchasing power parity, stationarity, panel unit root tests

## 1 ÚVOD

Koncepcia parity kúpnej sily (PPP – Purchasing Power Parity) zohráva už pomerne dlhý čas prominentnú úlohu tak v oblasti teoretického výskumu ako aj v empirickej oblasti. Označenie tejto teórie pojmom „parita kúpnej sily“ je však spojené až so švédskym ekonómom Casselom, ktorý sa v 20. rokoch 20. storočia výrazným spôsobom zaslúžil o jej spopularizovanie. Značná popularita PPP a s tým súvisiace testovanie jej platnosti sú však spojené až s prechodom na flexibilné výmenné kurzy v 70. rokoch 20. storočia, pričom počnúc týmto obdobím bolo publikované obrovské množstvo rôznych analytických štúdií, ktoré sa odlišujú napr. z hľadiska analyzovaného časového obdobia, režimu výmenného kurzu, typu cenového indexu či prístupu k testovaniu hypotézy PPP (viac pozri napr. Breuer (1994)).

Jedným z prístupov testovania je analyzovanie viacerých výmenných kurzov súčasne na báze analýzy panelových dát, čo predstavuje jednu z možností ako sa vyhnúť problémom s nízkou silou štandardne používaných testov jednotkového koreňa. Pomerne časté sú totiž prípady, kedy sa preukáže platnosť PPP pre konkrétnu krajinu pri testovaní v rámci panelového prístupu, avšak pri testovaní platnosti bez využitia panelových dát je výsledok spravidla záporný. S tendenciou automaticky používať panelové testy jednotkového koreňa na overenie platnosti PPP je však spojených veľa úskalí a viacerí autori vyslovene v literatúre pred takýmto prístupom varujú (pozri napr. Caporale a Cerrato (2004), Banerejee, Marcellino a Osbat (2005)). Pri neadekvátnom použití panelových testov jednotkového koreňa totiž často

---

<sup>1</sup> Tento príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0285/14 „Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na modely priestorovej ekonometrie“.

prichádza k zamietnutiu nulovej hypotézy o existencii jednotkového koreňa aj keď táto je v skutočnosti pravdivá.

Pri analýze s využitím panelových dát je časový rozmer obohatený prierezným rozmerom, pričom vo všeobecnosti uvažujeme s  $T$  časovými obdobiami a  $N$  priereznými jednotkami (v prípade analýzy PPP predstavujú prierezné jednotky analyzované výmenné kurzy), pričom testovanie existencie jednotkového koreňa pri analýze na báze panelových dát predstavuje pomerne novú problematiku. Cieľom príspevku je preto popísať vybrané panelové testy jednotkového koreňa s poukázaním nielen na ich výhody, ale aj nedostatky. Predstavíme koncepciu PPP a uvedieme dva najčastejšie v literatúre používané panelové testy jednotkového koreňa (Levinov-Linov test a Imov, Pesaranov a Shinov test), ktoré sú v súčasnosti už pomerne dobre softvérovo dostupné.

## 2 PARITA KÚPNEJ SILY A JEJ TESTOVANIE

Parita kúpnej sily je jednou zo základných teoretických koncepcií popisujúcich správanie výmenných kurzov z dlhodobého hľadiska, pričom vychádza zo vzťahu medzi výmenným kurzom ( $E_t$ ) a vývojom domácej a zahraničnej cenovej hladiny ( $P_t$  a  $P_t^*$ ). Pri analýze platnosti teórie PPP sa najčastejšie vychádza z logaritmických transformácií premenných  $E_t$ ,  $P_t$  a  $P_t^*$  označovaných  $e_t$ ,  $p_t$  a  $p_t^*$ . Najvšeobecnejší model testovania PPP má tvar (pozri napr. Isard (1995)):

$$e_t = \theta_0 + \theta_1 p_t - \theta_2 p_t^* + \varepsilon_t \quad (1)$$

kde  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  a  $\theta_2$  sú neznáme parametre a  $\varepsilon_t$  reprezentuje akúkoľvek krátkodobú odchýlku od dlhodobej rovnováhy v období  $t$  vyvolanú stochastickými šokmi.

Najreštriktívnejšiu verziu PPP, nazývanú tiež „silná“ PPP, predstavuje analýza reálneho výmenného kurzu, ktorá predpokladá súčasné splnenie podmienky symetrickosti a proporcionality, t. j.  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ :

$$q_t = e_t + p_t^* - p_t = \theta_0 + \varepsilon_t \quad (2)$$

Hoci na testovanie platnosti PPP boli využívané rôzne metódy, vývoj ekonometrie v oblasti nestacionarity ukázal, že väčšina ekonomických premenných nemá stacionárny charakter, z čoho vyplýva, že použitie štandardných  $t$  štatistík je neadekvátne.

Je zrejmé, že potvrdenie platnosti PPP vychádzajúc zo vzťahu (2) vyžaduje stacionaritu reálneho výmenného kurzu  $q_t$ . Ak by totiž časový rad reálneho výmenného kurzu obsahoval jednotkový koreň, t. j. bol nestacionárny, znamenalo by to, že reálny výmenný kurz je výsledkom postupnosti reálnych šokov, pričom každý z týchto šokov trvalo ovplyvňuje úroveň reálneho výmenného kurzu, v takomto prípade teda neexistuje tendencia návratu reálneho výmenného kurzu k jeho rovnovážnej úrovni, resp. trendu. Z toho teda vyplýva, že za týchto okolností PPP nemôže platiť. Zamietnutie hypotézy o existencii jednotkového koreňa na druhej strane však neznamená, že by reálny výmenný kurz mal charakter fixnej konštanty a ani to, že odchýlky od tejto konštanty sú nezávislé s rovnakým pravdepodobnostným rozdelením, ale iba to, že reálny výmenný kurz má charakter stacionárneho stochastického procesu s tendenciou vrátiť sa k svojej rovnovážnej úrovni (Breuer (1994)).



Medzi najčastejšie používané testy jednotkového koreňa, t.j. testy na overenie stacionárneho, resp. nestacionárneho charakteru reálneho výmenného kurzu  $q_t$ , patria rozšírený Dickeyho-Fullerov ADF test, Phillipsov-Perronov PP test, príp. KPSS test Kwiatkowského, Phillipsa, Schmidta a Shina (Arlt a Arltová (2003)). Problematickým aspektom pri aplikácii testov jednotkového koreňa na individuálne reálne výmenné kurzy je však často nízka sila týchto testov. Jedným z možných riešení je preto testovanie PPP pre viaceré výmenné kurzy súčasne na báze panelových testov jednotkového koreňa, čomu sa venujeme nižšie, pričom vychádzame predovšetkým z publikácií Asteriou a Hall (2007), Banerjee, Marcellino a Osbat (2005), Baltagi a Kao (2000) a Breitung a Pesaran (2008).

### 3 PANELOVÉ TESTY JEDNOTKOVÉHO KOREŇA

Hoci väčšina panelových testov jednotkového koreňa vychádza z ADF testu, procedúra odhadu je v prípade panelových dát komplexnejšia ako v prípade časových radov. Kľúčovú úlohu pri odhade na báze panelových dát zohráva stupeň heterogenity. Obzvlášť je dôležité uvedomiť si, že všetky analyzované výmenné kurzy v paneli nemusia mať rovnaké vlastnosti, t. j. nemusia byť všetky stacionárne, resp. nestacionárne. Znamená to teda, že pokiaľ aplikujeme panelový test jednotkového koreňa na panel, kde niektoré časové rady majú jednotkový koreň a iné nie, situácia je komplikovanejšia.

Medzi najčastejšie v literatúre používané a na testovanie PPP aplikované testy patria: Levinov-Linov (LL) test a Imov, Pesaranov a Shinov (IPS) test, ktoré budeme ďalej podrobnejšie charakterizovať.

#### 3.1 Levinov – Linov (LL) test

Jedným z prvých panelových testov jednotkového koreňa je test autorov Levina a Lina, ktorý bol však vo finálnej forme publikovaný až v roku 2002 (Levin, Lin a Chu (2002)). LL test možno chápať ako rozšírenie DF testu, pričom zodpovedajúci model možno zapísať v tvare:

$$\Delta q_{i,t} = \mu_i + \rho q_{i,t-1} + \delta_i t + \sum_{k=1}^p \phi_k \Delta q_{i,t-k} + \theta_t + \vartheta_{i,t} \quad (3)$$

kde  $i = 1, 2, \dots, N$  označuje jednotky v paneli (v našom prípade reálne výmenné kurzy jednotlivých krajín),  $t = 1, 2, \dots, T$  je index označujúci časové obdobie a  $\vartheta_{i,t}$  predstavuje náhodné zložky s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom. Model (3) umožňuje zachytiť jednotkovo špecifické fixné efekty  $\mu_i$  a tiež jednotkovo špecifické časové trendy  $\theta_t$ , o parametri  $\rho$  stojacom pri oneskorenej hodnote  $q_i$  sa predpokladá, že je pre všetky jednotky v paneli homogénny. LL test teda vychádza z predpokladu, že všetky časové rady v paneli sú z pohľadu stacionarity, resp. nestacionarity identické, t. j. I(0) alebo I(1), čo je však v praxi len málo pravdepodobné.

Nulová a alternatívna hypotéza v tomto teste majú potom tvar:  $H_0 : \rho = 0$  a  $H_1 : \rho < 0$ . Podobne ako väčšina panelových testov jednotkového koreňa, aj LL test predpokladá prierezovú nezávislosť medzi jednotkami v paneli. LL testovacia štatistika má tvar bežnej  $t$ -štatistiky, t. j.:

$$t_\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_\rho} \quad (4)$$

### 3.2 Imov, Pesaranov a Shinov (IPS) test

Im, Pesaran a Shin (2003) rozšírili LL test umožnením heterogenity aj pre parameter stojaci pri premennej  $q_{i,t-1}$ , pričom ich testovacia procedúra je založená na štatistike vypočítanej ako priemer štatistík získaných z individuálnych testov jednotkového koreňa.

IPS test poskytuje odhady zvlášť pre každú jednotku  $i$ , pričom vychádza z modelu ( $t = 1, 2, \dots, T$ ):

$$\Delta q_{i,t} = \mu_i + \rho_i q_{i,t-1} + \delta_i t + \sum_{k=1}^p \phi_k \Delta q_{i,t-k} + \vartheta_{i,t} \quad (5)$$

kde nulová a alternatívna hypotéza majú tvar:  $H_0 : \rho_i = 0$  pre všetky  $i = 1, 2, \dots, N$  a  $H_1 : \rho_i < 0$  aspoň pre jedno  $i$ .

Nulová hypotéza tohto testu teda tvrdí, že všetky časové rady sú nestacionárne, kým alternatívna predpokladá, že časť časových radov (resp. aspoň jeden), ktoré sú súčasťou panelu, je stacionárna. Z formulácie alternatívnej hypotézy je teda zrejmý značný rozdiel oproti LL testu, v ktorom alternatívna hypotéza predpokladala stacionaritu všetkých časových radov. Výpočet testovacej štatistiky  $\bar{t}$  vychádzal z vybilancovaného panelu, t.j.  $\bar{t}$  potom možno vypočítať ako priemer jednotlivých ADF  $t$ -štatistík testujúcich, že  $\rho_i = 0$  pre všetky  $i$  (tieto štatistiky označíme  $t_{\rho_i}$  - pozri Asteriou a Hall (2007)):

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{\rho_i} \quad (6)$$

## 4 ZÁVER

Hoci panelové testy jednotkového koreňa na jednej strane predstavujú jednu z možností ako sa vyhnúť problémom s nízkou silou testov jednotkového koreňa aplikovaných na individuálne časové rady, v súvislosti s ich aplikáciou však treba mať na pamäti možné riziká. Základným nedostatkom vyššie uvedenej dvojice testov je predpoklad o prierezovej nezávislosti, čo je z pohľadu makroekonomickej aplikácie testov jednotkového koreňa značne nerealistické, keďže ekonomiky veľmi často vykazujú tendenciu k spoločnému pohybu. Poslednom období sa preto v čoraz väčšej miere začínajú objavovať i ďalšie testy umožňujúce sa vysporiadať s problémom prierezovej závislosti medzi analyzovanými jednotkami.

### Použitá literatúra

1. ARLT, J. – ARLTOVÁ, M. 2003. Finanční časové řady. Praha: Grada, 2003, 220 s.
2. ASTERIOU, D. – HALL, S. G. 2007. Applied Econometrics. A Modern Approach using EViews and Microfit. Houndmills, Basingstoke, Hampshire and New York: PALGRAVE MACMILLAN, 2007, 256 p.
3. BALTAGI, B. H. – KAO, C. 2000. Nonstationary Panels, Cointegration in Panels and Dynamic Panels, A Survey. In BALTAGI, B. H. (ed.): Nonstationary Panels, Panel Cointegration, and Dynamic Panels, Advances in Econometrics, Amsterdam: Elsevier Science Inc., 2000, vol. 15, p. 7–52.
4. BANERJEE, A. – MARCELLINO, M. – OSBAT, C. 2005. Testing for PPP: Should we use Panel Methods? In Empirical Economics, 2005, vol. 30, p. 77-91.

5. BREITUNG, J. – PESARAN, M. H. 2008. Unit Roots and Cointegration in Panels. In MÁTYÁS, L. – SEVESTRE, P.: The Econometrics of Panel Data. Fundamentals and Recent Developments in Theory and Practice. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 2008, p. 279-322.
6. BREUER, J. B. 1994. An Assessment of the Evidence on Purchasing Power Parity. In WILLIAMSON, J.: Estimating Equilibrium Exchange Rates. Washington, D. C. Institute for International Economics, 1994, p. 245-277.
7. CAPORALE, G. M. – CERRATO, M. 2004. Panel Data Tests of PPP: A Critical Overview. In Reihe Ökonomie/Economics Series 159, Institut für Höhere Studien (IHS), Wien/Institute for Advanced Studies, Vienna, ISSN: 1605-7996 , 2004, July, 39 p.
8. IM, K. S. – PESARAN, M.H. – SHIN, Y. 2003. Testing for Unit Roots in Heterogenous Panels. In Journal of Econometrics, 2003, vol. 115, p. 53-74.
9. ISARD, P. 1995. Exchange Rate Economics. Cambridge, Cambridge University Press 1995. 275 s.
10. LEVIN, A. – LIN, C. F. – CHU, C. S. J. 2002. Unit Root Tests in Panel data: Asymptotic and Finite-Sample Properties. Journal of Econometrics, 2002, vol. 108, p. 1-24.

#### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemská 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: [michaela.chocholata@euba.sk](mailto:michaela.chocholata@euba.sk)

# ANALÝZA KRAJOV SLOVENSKEJ EKONOMIKY Z HĽADISKA ICH KONVERGENCIE<sup>1</sup>

## ANALYSIS OF SLOVAK REGIONS ECONOMY IN TERMS OF THEIR CONVERGENCE

*Ivaničová Zlatica, Rublíková Eva*

### Abstrakt

Od vstupu slovenskej ekonomiky do Menovej únie sa očakávalo zrýchlené zvýšenie životnej úrovne a jej postupné vyrovnávanie vo všetkých krajoch Slovenska. Analýzu efektívneho vývoja produkčných schopností krajov (regiónov) možno realizovať rôznymi spôsobmi. Často využívanými nástrojmi sú koncepcie podmienenej konvergenencie – beta a sigma konvergenencie. V príspevku sú uvedené výsledky z verifikácie obidvoch konvergencií na základe hrubého domáceho produktu v b. c. v prepočte na rok a na obyvateľa v EUR podľa klasifikácie NUTS3 pre slovenskú ekonomiku za roky 1995 až 2013. Rast HDP na obyvateľa bratislavského kraja vysoko prevyšuje rast HDP na obyvateľa v ostatných, chudobnejších krajoch slovenskej ekonomiky. Na základe dosiahnutých výsledkov možno konštatovať, že v slovenskej ekonomike zatiaľ neexistuje všeobecná tendencia rýchlejšieho rastu chudobnejších krajov v porovnaní s bohatšími krajoimi.

***KLúčové slová:*** hrubý domáci produkt na obyvateľa podľa krajov slovenskej republiky, beta konvergenca, sigma konvergenca

### Abstract

After entry of Slovak economy into monetary union it has been expected rapid increase in living standard and a successive equalization of all regions of Slovakia. Analysis of efficiency of development of regions production capabilities can be realized in different ways. Beta and sigma convergence frequently used approach as the concept of conditional convergence. The paper presents the results of the verification of both convergences of gross domestic product, calculated per year and per capita in EUR by classification NUTS3 for Slovak economy in years 1995 to 2013. The growth of GDP per capita in Bratislava region is much higher than the other, poorer regions of the Slovak economy. On the received results it can be concluded, that in Slovak economy exist the general tendency for faster growth of poorer regions in comparing with richer regions.

***Keywords:*** gross national product per capita in region, beta convergence, sigma convergence,

---

<sup>1</sup>Tento príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0285/14 “Regionálne modelovanie rastu krajín EU s dôrazom na modely priestorovej ekonometrie“.

# 1. Konvergencia ekonomických subjektov

Doma i v zahraničí je publikovaných veľa článkov týkajúcich sa teoretických aspektov konvergence ekonomických subjektov (jednotlivých štátov, regiónov resp. inak zvolených územno-ekonomických celkov), ktoré vychádzajú z teórií rastu. Možno konštatovať, že za teoretický základ skúmania konvergence sa zväčša považujú neoklasické modely ekonomického rastu. Novšie práce využívajú teoretické koncepcie publikované autormi Barro a Sala-i-Martin<sup>2</sup>.

Rastúca nespokojnosť s vývojom konvergence, t.z. pomalé odstraňovanie regionálnej disparity, podporilo tvorbu mnohých protichodných rastových teórií. Stručný popis najvýznamnejších teórií ktoré vysvetľujú regionálny rast a mechanizmus procesu regionálnej konvergence resp. divergencie sa nachádza v práci Hančlová a kol.<sup>3</sup>

Z hľadiska prezentovanej analýzy sú zaujímavé také publikované analytické práce, ktoré poskytujú čitateľovi informácie o reálnom vývoji ekonomických území podľa rôzneho členenia, a o tom, či ekonomický vývoj skúmaných regiónov (štátov) má tendenciu zabezpečovať vyrovnávanie ekonomického potenciálu a tým aj životnej úrovne obyvateľstva, alebo dochádza k divergencii, t.z. k otváraniu nožníc medzi bohatými a chudobnými krajinami (regiónmi). Pri vytváraní únií, ktoré tvoria rôzne silné ekonomiky sa všeobecne očakáva, že politické a ekonomické väzby a rozhodnutia budú garantom zvyšovania životnej úrovne obyvateľstva v chudobnejších častiach únie, vyrovnávania ekonomickej efektívnosti a dynamiky, takže v konečnom dôsledku bude dochádzať k postupnej ekonomickej konvergencii členských štátov únie resp. jej regiónov.

Cieľom predloženého príspevku je analýza vývoja  $\beta$ - a  $\sigma$ - konvergence (divergencie) medzi regiónmi slovenskej ekonomiky, v štruktúre podľa NUTS3.

## 1.1 Modely beta a sigma konvergence

Vo všeobecnosti možno konštatovať, že koncepcia  $\beta$ - konvergence je popísaná ako situácia, keď krajiny s nižším reálnym dôchodkom na obyvateľa rastú rýchlejšie ako bohatšie krajiny. Koncepcia  $\sigma$ - konvergence je chápaná ako tendencia k redukcii variability v úrovni reálneho hrubého domáceho produktu na obyvateľa medzi jednotlivými regiónmi za skúmané časové obdobie.

Pre analýzu sme použili modifikáciu vzťahu  $\beta$ - konvergence formulovaného autormi Barro a Sala-i-Martin (2004) v tvare

$$\frac{1}{T} \log \frac{Y_{i,t_0+T}}{Y_{i,t_0}} = \alpha - (1 - e^{-\beta T}) \frac{\log(Y_{i,t_0})}{T} + u_{i,t_0,t_0+T} \quad (1)$$

kde  $\beta$  - rýchlosť konvergence,

$\alpha$  - úrovňová konštanta,

$Y_{i,t_0+T}$  - reálny HDP na obyvateľa v i-tom regióne v roku  $t_0+T$ ,

$Y_{i,t_0}$  - reálny HDP na obyvateľa v i-tom regióne v roku  $t_0$ ,

<sup>2</sup> Koncepciu konvergence rozvíjali vo svojich prácach autori Barro a Sala-i-Martin (najnovšia práca-2004)

<sup>3</sup> Popísané v práci Hančlová a kol. 2010, str.180-183

$T$  - dĺžka skúmaného obdobia ,

$u_{i,t_0,t_0+T}$  - náhodná zložka, s časovým posunom medzi  $t_0$  a  $t_0+T$  .

*Podmienka 1:*

Podmienkou  $\beta$  - konvergenzie je, aby výraz  $(1 - e^{-\beta T})$  bol kladný, teda  $\beta > 0$  .

V modeli sa predpokladá, že náhodná zložka má nulovú strednú hodnotu, je nezávislá od  $\log(Y_{i,t_0})$  a neexistuje v modeli autokorelácia. Parameter  $\beta$  vyjadruje mieru, ktorou sa regióny približujú k ustálenému stavu. Ku konvergencii dochádza vtedy, ak  $\beta > 0$  .

Mierne odlišná je  $\sigma$  - konvergenzia, ktorá je venovaná distribučnej dynamike dôchodku na obyvateľa a skúma variabilitu dôchodku na obyvateľa medzi regiónmi a jej vývoj v čase<sup>4</sup>. Vzhľadom na prepojenie  $\beta$  - a  $\sigma$  - konvergenzie, pozitívny parameter  $\beta$  neznamena nutne zníženie  $\sigma_{y_i}$ .  $\beta$  - konvergenzia je nutnou, ale nie postačujúcou podmienkou pre  $\sigma$  - konvergenziu. Pre analýzu  $\sigma$  - konvergenziu sme využili modifikovaný vzťah v tvare

$$\sigma_{y_i} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\log y_{it} - \overline{\log y_i})^2}{n-1}} \quad (2)$$

kde  $n$  - počet regiónov,

$y_{it}$  - reálny HDP na obyvateľa v i-tom regióne a v roku  $t$  .

*Podmienka 2:*

$\sigma$  - konvergenzia existuje vtedy, keď sa variabilita dôchodku na obyvateľa znižuje. Ak označíme štandardnú odchylku logaritmu HDP na obyvateľa v skupine regiónov v čase  $t$  , potom  $\sigma$  - konvergenziu v období  $t$  a  $t+1$  môžeme popísať vzťahom  $\sigma_t > \sigma_{t+1}$  .

## 1.2 Analýza vývoja regiónov slovenskej ekonomiky z hľadiska vývoja HDP na obyvateľa

Analýza vývoja regiónov slovenskej ekonomiky je zameraná na zisťovanie či medzi kraji existuje konvergenzia alebo divergenzia v tvorbe hrubého domáceho produktu. Údaje o hrubom domácom produkte na obyvateľa v bežných cenách v Eur za roky 1995 až 2013 sú čerpané z portálu statistics.sk z databázy DATAcube, národné účty. Ako analytický nástroj pre analýzy sme využili  $\beta$  - a  $\sigma$  - konvergenzie. Pre odhad parametra  $\beta$  - konvergenzie sme použili software EViews6 a pomocou Excelu sme analyzovali  $\sigma$  - konvergenziu.

Vývoj hrubého domáceho produktu na obyvateľa v EUR v bežných cenách podľa krajov zaznamenáva počas skúmaného obdobia 1995 až 2013 rast<sup>5</sup> (obr.1). Z grafu je vidno, že vývoj HDP na obyvateľa je najrýchlejší v bratislavskom kraji, ostatné kraje zaznamenávajú v podstate rovnomerný vývoj. Do roku 2004, keď slovenská ekonomika vstúpila do menovej únie, bol rast HDP (okrem bratislavského kraja) „paralelný“, po tomto roku v dôsledku vstupu

<sup>4</sup> Sojková, Z., Kropková, Z. 2007

<sup>5</sup> Podľa NUTS3 je slovenská ekonomika rozdelená do 8 krajov : (bratislavský (BA), trnavský (TT), trenčiansky (TN), nitriansky (NR), žilinský (ZA), banskobystrický (BB), prešovský (PR) a košický (KE))

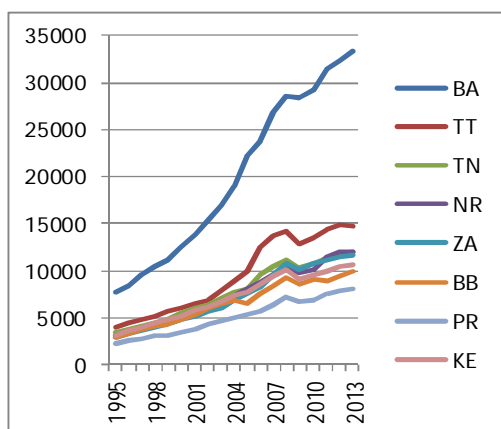
zahraničného kapitálu sa tvorba HDP v krajoch zdynamizovala, predovšetkým v trnavskom kraji. Pokles HDP bol prechodne zaznamenaný v období krízy.

Vývoj HDP na obyvateľa

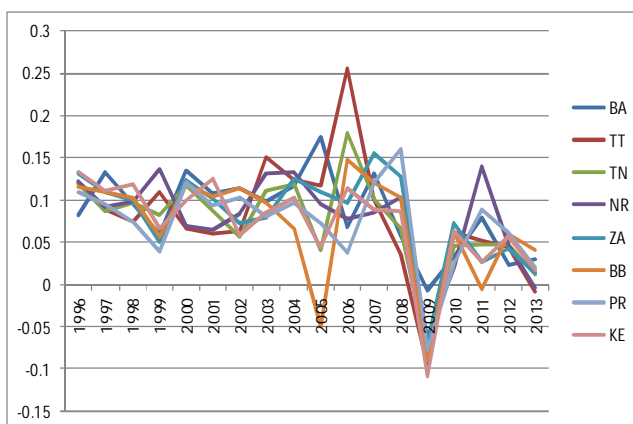
Obrázok 1

Vývoj prírastkov HDP na obyvateľa

Obrázok 2



Zdroj: Vlastné výpočty



Zdroj: Vlastné výpočty

Iný pohľad na vývoj HDP v tvare prírastkov v jednotlivých krajoch slovenskej ekonomiky poskytuje obr. 2. Vývoj prvých diferencií HDP v jednotlivých krajoch možno charakterizovať ako chaotický vývoj. Pred vstupom do Menovej únie, v rokoch 1996-2004, prírastky hodnôt HDP v jednotlivých krajoch sa pohybovali od 5 až 14 %. Po vstupe do Menovej únie dochádza k rôznym štrukturálnym zmenám (vstup zahraničného kapitálu, žiaľ nerovnomerne do jednotlivých krajov) a tým aj k vysokým výkyvom v prírastkoch vývoja HDP v jednotlivých krajoch. Silný pokles prírastkov HDP sa prejavil v čase krízy. V roku 2012 sa rast stabilizoval okolo 5 % a v súčasnosti zaznamenáva pokles<sup>6</sup>.

Vývoj HDP na obyvateľa zobrazený grafmi 1 a 2 nenaznačuje v jednotlivých krajoch existenciu konvergencie ekonomickej výkonnosti. Potvrdenie alebo zamietnutie tohto konštatovania overíme pomocou  $\beta$ -konvergencie a  $\sigma$ -konvergencie.

### 1.3 Beta - konvergencia

V tabuľke 1 sú uvedené výstupy odhadov parametrov na základe modelu (1).

Tabuľka 1

Použitý vzťah pre výpočet	odhad parametra $\hat{\alpha}$	odhad parametra $\hat{\beta}$	Prob.	DW test $d_U = 1,401; d_{4-d_t} = 2,599$	Vypočítaná hodnota $\beta$ -konvergencie
(1)	-0,02725	0,163878	0,0764	1,593732	0,00994

Zdroj: vlastné výpočty

Vypočítaná hodnota  $\beta$ -konvergencie (podmienka 1) je kladná, ale veľmi nízka. Zrejme existuje určitý, veľmi nízky stupeň konvergencie v rámci krajov slovenskej ekonomiky. Je to vidno aj na obrázku vývoja prírastkov hrubého domáceho produktu na obyvateľa. Chaotický vývoj prírastkov v rokoch 1995-2003 sa po vstupe slovenskej ekonomiky do Európskej únie

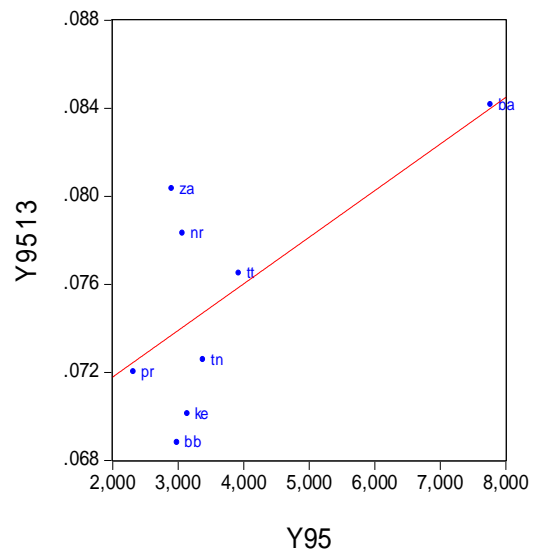
<sup>6</sup> Podobné výsledky sú konštatované v „Analýza konvergencie slovenskej ekonomiky“ odbor výskumu 2014, NB Slovenska. „Tempo oživenia dobiehania z historického hľadiska bude veľmi nízke a nepriaznivý geopolitický vývoj môže očakávané oživenie dobiehania oddialiť.“ Jedná sa však o porovnanie slovenskej ekonomiky v rámci krajín Európskej únie.

zdynamizoval. Prepad HDP na obyvateľa vo všetkých krajoch nastal počas krízy. V roku 2012 prírastky tvoria „zhluk“ a v roku 2013 sa ich hodnoty pozvoľne znižujú.

Zaujímavý graf  $\beta$ - konvergenzie sme získali pomocou softwaru EViews. Na obr. 3 je zobrazený vývoj relácie  $\beta$ - konvergenzie medzi počiatočnými hodnotami vyprodukovaného HDP na obyvateľa – rok 1995 (os x) a priemernými ročnými prírastkami hrubého domáceho produktu na obyvateľa (os y) pre jednotlivé kraje slovenskej ekonomiky.

Na základe grafu (obr. 3), môžeme konštatovať skôr divergenciu produkčnej schopnosti jednotlivých krajov, čo naznačuje aj záporná hodnota  $\beta$ . Kraje, ktoré ležia pod priamkou majú nízke ročné prírastky HDP na obyvateľa a zaostávajú za vývojom v ostatných krajoch. Kombinácia počiatočnej hodnoty HDP na obyvateľa s rýchlejším rastom poukazuje na určitý stupeň konvergenzie. Jedná sa o kraje : žilinský vzhľadom na banskobystrický a nitriansky vzhľadom na košický. Zrejme kraje žilinský a nitriansky majú tendenciu konvergovať k určitému ustálenému rastu. Možno by bolo zaujímavé zrealizovať analýzu bez bratislavského kraja.

Výstup z EViews Obrázok 3



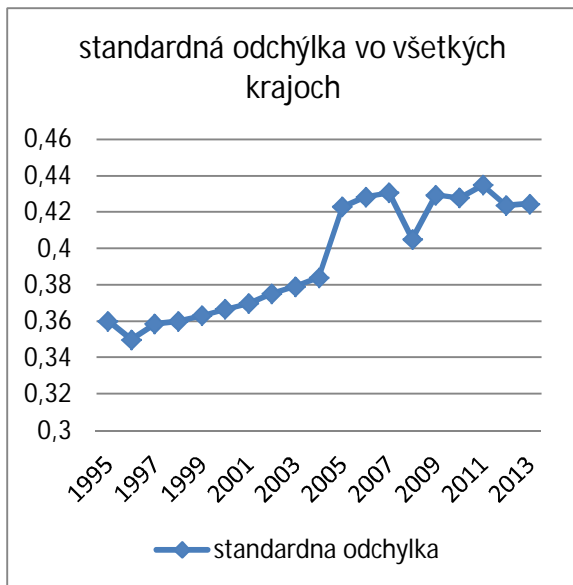
#### 1.4 Sigma - konvergenca

Ako bolo spomenuté, výpočet štandardnej odchýlky  $\sigma$  a jej vývoj analyzovaný pre kraje v skúmanom časovom období môže potvrdiť konvergenciu alebo divergenciu produkčnej

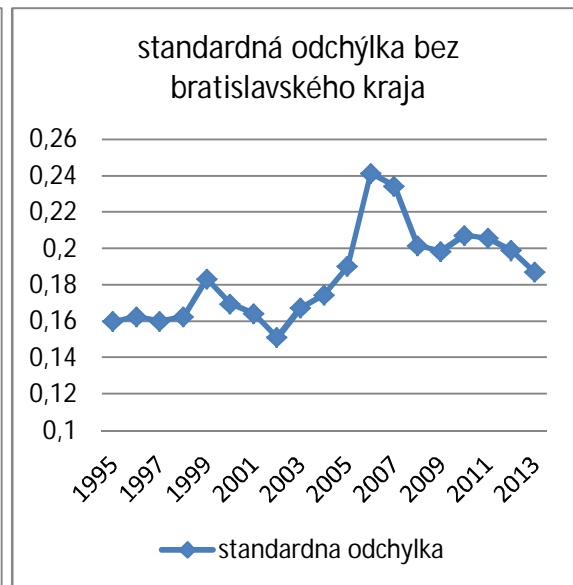
Obrázok 4

Obrázok 5





Zdroj : Vlastné výpočty



Zdroj: Vlastné výpočty

schopnosti jednotlivých krajov. Nakoľko bratislavský kraj silne ovplyvňuje variabilitu produkčnej schopnosti krajov, uvádzame dva grafy. Štandardná odchýlka v rámci všetkých krajov sa nachádza v intervale 0,34 až 0,44. Pri vynechaní bratislavského kraja štandardná odchýlka klesne na hodnotu 0,14 až 0,24. Možno však konštatovať, že po vstupe slovenskej ekonomiky do Eurozóny (2009) sa štandardná odchýlka znižuje a teda dochádza ku konvergencii v produkčnej schopnosti krajov slovenskej ekonomiky. Dá sa preto očakávať, že v dlhodobom horizonte sa chudobnejšie kraje vyrovnajú bohatším krajom v životnej úrovne.

## 1.5 Diskusia

Kľúčovou otázkou ekonómov je otázka, či chudobné regióny majú v dlhodobom časovom horizonte tendenciu dosiahnuť bohatšie regióny v produkčnej schopnosti a v oblasti vyrovnávania životnej úrovne. Je samozrejmé, že chudobnejšie krajiny zaznamenávajú rýchlejší rast hospodárstva vzhľadom na ich nízku ekonomickú úroveň. To by naznačovalo, že existuje náznak konvergenie chudobnejších ekonomík k bohatším ekonomikám. Na otázku, či bude dochádzať v budúcnosti k zblížovaniu alebo divergencii ekonomík a v akom horizonte, môžeme získať odpoveď na základe empirických analýz, ktoré v súčasnosti nedávajú jasnú odpoveď. Vývoj metodológie konvergenie ekonomických subjektov vyžaduje zahrnúť do analýz aj ďalšie makroekonomické indikátory, ale aj zosúladenie ekonomických a politických rozhodnutí o štruktúre vývoja jednotlivých regiónov (štátov).

### Literatúra:

1. BARRO, R.J., SALA-I-MARTIN, X. 2004. Economic Growth, Cambridge: The MIT Press, Cambridge Massachusetts, ISBN 0-262-02553-1
2. HANČLOVÁ, J. a kol. 2010. Makroekonomické modelování České ekonomiky a vybraných ekonomik EU. Grafico, s.r.o., VGŠB-TO Ostrava, S.179-2010, ISBN 978-80-248-2353-9
2. KOVÁČ, U., KOVÁČ GERULOVA, L., BUČEK M. 2011. Metodologické prístupy k meraniu konvergenie, Prognostické práce, 3, č. 5, VEGA č. 2/0016/11 EU Bratislava, S. 395-407
3. SOJKOVA, Z., KROPKOVA, Z, 2007. Investigation of convergence tendencies in EU. In: The path of internationalization and integration in the Europe of regions. Bucurest: Editura Ceres, ISBN 978-973-709-322-6 S. 64-88.

4. [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk) 2014 Analýza konvergenie slovenskej ekonomiky, NBS, Odbor výskumu,  
ISSN 1337-5830

**Kontaktné údaje:**

Prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 8304

email: [ivanic@euba.sk](mailto:ivanic@euba.sk)

Prof. RNDr. Eva Rublíková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra štatistiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 714

email: [rublik@euba.sk](mailto:rublik@euba.sk)

# MALÁ ŠTÚDIA VPLYVU POČTU OBYVATEĽSTVA NA UMIESTNENIE STANÍC ZÁCHRANNEJ ZDRAVOTNEJ SLUŽBY

## SMALL STUDY ON EFFECT OF POPULATION SIZE ON EMERGENCY MEDICAL SERVICE STATIONS LOCATION.

*Marta Janáčková, Alžbeta Szendreyová*

### **Abstrakt**

V príspevku sa zaoberáme umiestnením istého počtu stredísk záchranej zdravotnej služby (ZZS). Úlohu riešime ako  $p$ -medián, pričom optimalizačným kritériom je maximalizácia systémovej užitočnosti pre zákazníkov. Z pohľadu záchrany života je poskytnutie takejto služby považované za užitočné len do istého času. To zabezpečuje funkcia použitého kritéria užitočnosti. Porovnáваме optimálne riešenia úlohy pre dve rôzne množiny zákazníkov. V prvej množine je za jedného zákazníka považovaná obec, v druhej je počet zákazníkov vždy úmerný počtu obyvateľov v obci. Zaujímá nás, aký vplyv má na umiestnenie stredísk zohľadnenie počtu obyvateľov v jednotlivých obciach.

*KLúčové slová:*  $p$ -medián, stanice záchranej zdravotnej služby, užitočnosť služby pre zákazníka

### **Abstract**

In the paper we are dealing with the location of the centers of the emergency medical services (EMS). The problem is solved as a  $p$ -median, where the optimization criterion is to maximize the system utility of the customers. The provision of emergency medical services is useful only in a limited period. This characteristic is provided by the utility criterion. We compare the optimal solution of the problem for two sets of customers. In the first one, the municipality is the customer. In the second one, the inhabitants are customers. We are interested in the impact, which has the sets of the customers on the centers locations.

*Keywords:*  $p$ -median, center, utility

## **1 ÚVOD**

Jednou zo služieb verejného obslužného systému je poskytovanie zdravotnej starostlivosti pre obyvateľstvo. Súčasťou tejto starostlivosti je aj poskytovanie rýchlej zdravotnej služby v naliehavých prípadoch. Tá je realizovaná nepretržite a zabezpečujú ju posádky sanitiek z lekárom (RLP) i bez neho (RZP), ktoré sú umiestnené v staniciach ZZS. Stanice majú byť umiestnené tak, aby umožnili poskytnutie pomoci ktorémukoľvek zákazníkovi do 15 minút od nahlásenia požiadavky. V tomto príspevku sa zaoberáme návrhom na optimálne umiestnenie staníc ZZS. Úlohu riešime ako klasický  $p$ -medián a tiež ako vážený  $p$ -medián. Porovnáваме dostupnosť služby z pohľadu užitočnosti, kilometrickej vzdialenosti a počtu rozdielov v umiestnení staníc ZZS pre dané dva prístupy.

### **1.1 $P$ -medián**

Úloha  $p$ -mediánu slúži na rozhodovanie o umiestnení  $p$  stredísk tak, aby sa dosiahla optimálna hodnota účelovej funkcie. V našom príspevku bude kritériom pre optimalizáciu systémovej užitočnosť. Formulácia úlohy potom znie nasledovne:

Majme množinu  $I$  prípustných kandidátov na umiestnenie stredísk a množinu zákazníkov, ktorí sa nachádzajú v uzloch množiny  $J$  danej siete. Úseky medzi uzlami  $i$  a  $j$  sú ohodnotené v matici  $c_{ij}$  pre každé umiestnenie  $i \in I$  a pre každú obec  $j \in J$ . Našou úlohou je umiestniť daný počet  $p$  stredísk do niektorých uzlov z množiny  $I$  a z nich obslužiť zákazníkov pre každý uzol  $j \in J$  tak, aby hodnota užitočnosti bola maximálna. Rozhodnutie o umiestnení alebo neumiestnení obslužného strediska v mieste  $i$  bude modelované premennou  $y_i$ , ktorá nadobúda hodnotu 1 vtedy, ak je stredisko umiestnené v mieste  $i$  a v opačnom prípade nadobúda hodnotu 0. Rozhodnutie o priradení zákazníka z uzla  $j$  k stredisku v mieste  $i$  je modelované premennou  $z_{ij}$ . Tá nadobúda hodnotu 1, ak zákazník z uzla  $j$  bude obslužený zo strediska v mieste  $i$ , hodnotu 0 nadobudne v opačnom prípade. Model úlohy potom bude mať tvar:

$$\text{Maximalizujte } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} z_{ij} \quad (1)$$

$$\text{Za podmienok } \sum_{i \in I} z_{ij} = 1 \quad \text{pre } j \in J \quad (2)$$

$$z_{ij} \leq y_i \quad \text{pre } i \in I, j \in J \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (4)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pre } i \in I \quad (5)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pre } i \in I, j \in J, \quad (6)$$

kde použité koeficienty majú nasledujúci význam:

$c_{ij}$	...	ohodnotenie úsekov medzi miestami $i$ a $j$ ,
$p$	...	požadovaný počet umiestnení obslužných stredísk,
$I$	...	množina možných umiestnení obslužných stredísk,
$J$	...	množina uzlov (obcí).

V prípade klasického  $p$ -mediánu bude v našej štúdii  $c_{ij}$  určené vzdialenosťou medzi uzlami (v km), v prípade váženého  $p$ -mediánu bude  $c_{ij}$  predstavovať súčin vzdialenosti a váhy uzla (váha je úmerná počtu obyvateľov v uzle).

## 1.2 Funkcia užitočnosti

Pri poskytovaní neodkladnej zdravotnej starostlivosti veľmi záleží na čase jej poskytnutia. Podľa predpisov SR má byť služba poskytnutá do 15 minút od nahlásenia požiadavky. Pri vážnych zdravotných stavoch môže byť poskytnutie služby po tomto čase neužitočné (zbytočné). Preto pri umiestňovaní staníc ZZS nestačí na maximalizáciu užitočnosti minimalizovať vzdialenosti (v kilometroch či v minútach). Na jej vyjadrenie potrebujeme funkciu, ktorá má klesajúci a „skokový“ charakter. Aby sme mohli jednoducho porovnávať užitočnosť služby pre zákazníka, je vhodný „znormovaný“ tvar, v ktorom nadobudne vždy maximálna možná užitočnosť pre zákazníka rovnakú hodnotu.

V našich experimentoch používame funkciu v tvare

$$u(d) = \frac{1 + e^{-\frac{d_{krit}}{T}}}{1 + e^{\frac{d - d_{krit}}{T}}}$$

Premenná  $d$  vyjadruje vzdialenosť medzi strediskom a zákazníkom (kilometrickú alebo časovú). Parameter  $d_{krit}$  predstavuje hodnotu, v ktorej dochádza u funkcie ku skoku, užitočnosť sa zásadne mení (prekročením  $d_{krit}$  sa stáva užitočnosť zanedbateľnou). Parameter  $T$  je tvarovacím koeficientom funkcie, má vplyv na „strmosť“ jej priebehu v okolí bodu  $d_{krit}$ . S rastúcim  $T$  sa stáva priebeh funkcie „plytším“, zjemňuje sa význam skoku a postupne sa priebeh funkcie približuje k lineárnemu charakteru. Pre všetky hodnoty parametrov  $d_{krit}$  a  $T$  nadobúda  $u(d)$  maximum pre  $u(0)=1$ .

## 2 EXPERIMENTY

V súčasnosti je na Slovensku podľa vyhodnotenia stavu k 31.12.2013 umiestnených 92 staníc (RLP), 181 staníc RZP a 7 staníc vrtuľníkovej zdravotnej pomoci. Ich činnosť riadi 8 krajských operačných stredísk ZZS. V snahe priblížiť sa k realite umiestňujeme v návrhu počet stredísk zhodný s počtom obcí, v ktorých sú stanice ZZS reálne umiestnené. V niektorých väčších obciach je viac staníc ZZS. To náš model neumožňuje zohľadniť, preto v návrhu umiestňujeme menej stredísk oproti súčasnému stavu.

### 2.1 Základné údaje k návrhu

Experimenty riešime na území Žilinského a Prešovského samosprávneho kraja. Testovanie sa robí na cestnej sieti regiónov. Riešime dve úlohy: klasický  $p$ -medián, v ktorom je zákazníkom každá obec regiónu, a tiež vážený  $p$ -medián, v ktorom predstavuje zákazníka vždy 100 obyvateľov obce (zaokrúhlené na celé čísla). Kandidátom na umiestnenie strediska je každá obec regiónu. Účelovou funkciou je funkcia užitočnosti, popísaná v odseku 1.2. Všetky úlohy riešime pre kritickú hodnotu  $d_{krit}=20$  (km). Tvarovací koeficient  $T$  nadobúda postupne hodnoty od 1 do 22. V ŽSK je 12 staníc RLP a 24 staníc RZP, ktoré sú umiestnené v 29 obciach. Podľa dostupných údajov má kraj cca 691 100 obyvateľov v 315 obciach. V PoSK je 16 staníc RLP a 28 staníc RZP, ktoré sú umiestnené v 32 obciach. Kraj má cca 818 300 obyvateľov v 664 obciach.

### 2.2 Vyhodnotenie výsledkov

V našom návrhu umiestňujeme  $p$  stredísk tak, aby hodnota užitočnosti bola maximálna. Celková užitočnosť optimálneho riešenia závisí od počtu zákazníkov. Pre relevantné porovnanie preto počítame aj relatívnu užitočnosť (priemer na 1 zákazníka). Popri užitočnosti sledujeme najazdené kilometre medzi strediskom a priradeným zákazníkom. V prípade váženého  $p$ -mediánu je to okrem vzdialenosti stredisko-zákazník aj vzdialenosť stredisko-obec, v ktorej sa nachádza zákazník. Ďalším sledovaným údajom je maximálna vzdialenosť zákazníka od priradeného strediska v optimálnom riešení.

Pre žilinský región je  $p=29$  a počet kandidátov na umiestnenie strediska je 315. V tab.1 sú výsledky z úlohy klasického  $p$ -mediánu. Počet zákazníkov je 315. V jednotlivých stĺpcoch tabuľky je postupne uvedená hodnota tvarovacieho koeficientu  $T$ , celková užitočnosť optimálneho riešenia, relatívna užitočnosť, celková vzdialenosť medzi strediskami a priradenými zákazníkmi (obce), relatívna vzdialenosť a maximálna vzdialenosť (najhoršia dostupnosť pre zákazníka).

Tab. 1 Vyhodnotenie užitočnosti pre Žilinský kraj  
Poč. kand. na umiest. = 315,  $p=29$ ,  $d_{krit}=20$ , poč. zák. = 315

T	Celková užitočnosť	Relatívna užitočnosť	Vzdialenosť strediská-obce	Relatívna vzdialenosť na obec	Maximálna vzdialenosť
1	314,96	1,00	2089	6,63	15
4	303,27	0,96	1949	6,19	16
7	289,61	0,92	1881	5,97	20
10	284,71	0,90	1876	5,96	20
13	284,19	0,90	1876	5,96	20
16	285,32	0,91	1874	5,95	20
19	286,99	0,91	1874	5,95	20
22	288,76	0,92	1874	5,95	20

V tab.2. sú výsledky z úlohy váženého  $p$ -mediánu. Počet zákazníkov je 6911. V stĺpcoch sú údaje: hodnota  $T$ , celková užitočnosť, relatívna užitočnosť, celková a relatívna vzdialenosť medzi strediskami a priradenými zákazníkmi (obyvatelia), maximálna vzdialenosť, celková a relatívna vzdialenosť medzi strediskami a priradenou obcou, z ktorej je zákazník.

Tab. 2 Vyhodnotenie návrhu staníc ZZS pre Žilinský kraj  
Počet kandidátov na umiestnenie= 315,  $p=29$ ,  $d_{krit}=20$ , počet zákazníkov=6911

T	Celková užitočnosť	Relatívna užitočnosť	Vzdialenosť str.-zák.	Relatívna vzd. na zák.	Maximálna vzdialenosť	Vzdialenosť str.-obce	Rel. vzd. na obec
1	6910,63	1,00	30123	4,36	17	2125	6,75
4	6779,45	0,98	23363	3,38	26	2059	6,54
7	6609,49	0,96	22995	3,33	26	2067	6,56
10	6545,18	0,95	22995	3,33	26	2067	6,56
13	6537,12	0,95	22876	3,31	26	2102	6,67
16	6550,12	0,95	22876	3,31	26	2102	6,67
19	6570,05	0,95	22861	3,31	26	2138	6,79
22	6591,37	0,95	22861	3,31	26	2138	6,79

Pre prešovský región je  $p=32$  a počet kandidátov na umiestnenie strediska je 664. Pre klasický a  $p$ -medián je počet zákazníkov 664 a pre vážený  $p$ -medián 8183. Výsledky sú v tabuľkách 3 a 4.

Tab. 3 Vyhodnotenie užitočnosti pre Prešovský kraj  
Poč. kand. na umiest. = 664,  $p=32$ ,  $d_{krit}=20$ , poč. zák.=664

T	Celková užitočnosť	Relatívna užitočnosť	Vzdialenosť strediská-obce	Relatívna vzdialenosť na obec	Maximálna vzdialenosť
1	662,00	1,00	6031	9,08	19
4	614,13	0,92	5681	8,56	31
7	577,42	0,87	5585	8,41	35
10	567,22	0,85	5583	8,41	35
13	568,23	0,86	5583	8,41	35
16	573,04	0,86	5583	8,41	35
19	578,84	0,87	5583	8,41	35
22	584,62	0,88	5583	8,41	35

Tab. 4 Vyhodnotenie návrhu staníc ZZS pre Prešovský kraj  
Počet kandidátov na umiestnenie= 664,  $p=32$ ,  $d_{krit}=20$ , počet zákazníkov=8183

T	Celková užitočnosť	Relatívna užitočnosť	Vzdialenosť str.-zák.	Relatívna vzd. na zák.	Maximálna vzdialenosť	Vzdialenosť str.-obce	Rel. vzd. na obec
1	8174,81	1,00	59342	7,25	20	6167	9,29
4	7915,29	0,97	35409	4,33	24	6124	9,22
7	7677,08	0,94	34479	4,21	35	6181	9,31
10	7604,25	0,93	34195	4,18	35	6254	9,42
13	7604,95	0,93	34195	4,18	35	6254	9,42
16	7631,44	0,93	34144	4,17	42	6340	9,55
19	7665,42	0,94	34144	4,17	42	6340	9,55
22	7699,79	0,94	34134	4,17	42	6339	9,55

V tab.5 uvádzame v koľkých uzloch sa líšia množiny optimálnych umiestnení z úloh klasického a váženého  $p$ -mediánu.

Tab. 5 Počet rozdielov v optimálnom umiestnení staníc ZZS

Žilinský kraj								Prešovský kraj									
T	1	4	7	10	13	16	19	22	T	1	4	7	10	13	16	19	22
H	3	14	16	15	16	14	14	14	H	18	19	25	26	26	25	25	24

Z výsledkov vidno, že pri váženom  $p$ -mediáne je podľa očakávania dosiahnutá lepšia relatívna užitočnosť. Posunom stredísk do viac osídlených obcí získalo výhodu viac obyvateľov, čo vidieť na znížení relatívnej vzdialenosti na zákazníka. Relatívna vzdialenosť na obec sa pri váženom  $p$ -mediáne síce zhoršila, ale nie tak výrazne (hlavne pre malé hodnoty  $T$ ). Zhoršila sa ale maximálna dostupnosť.

### 3 ZÁVER

Pre neodkladnú zdravotnú pomoc najlepšie vyhovuje model s malými hodnotami parametra  $T$ . Nemáme relevantné údaje o tom, ako počet zásahov staníc ZZS v obciach koreluje s počtom ich obyvateľov. Vážený  $p$ -medián lepšie vystihuje situáciu, ak sa korelácia potvrdí. Klasický model je vhodný najmä pre oblasti s rovnomerným rozložením obyvateľstva, ale aj v období, keď sa počet obyvateľov v obciach mení (napr. prázdniny).

#### Použitá literatúra

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. ERLKOTTER, D. (1978): A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location, *Operations Research*, Vol. 26, No. 6, pp 992-1009.
2. JANÁČEK, J., Emergency Public Service System Design Using IP-Solver, in *Proceedings of the 1st WSEAS International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13)*, Antalya 2013, pp. 97-101
3. JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, M.: *Properties of the cost matrix and the  $p$ -median problem*. In: *International Journal of Applied Mathematics and Informatics*. ISSN 2074-1278. - Roč.8 (2014), s. 34-41.

#### Kontaktné údaje

RNDr. Marta Janáčková, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta aplikovanej matematiky

Univerzitná 8215, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4953

email: [marta.janackova@fstroj.uniza.sk](mailto:marta.janackova@fstroj.uniza.sk)

RNDr. Alžbeta Szendreyová, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4205

email: [Alzbeta.Szendreyova@fria.uniza.sk](mailto:Alzbeta.Szendreyova@fria.uniza.sk)

# ANALÝZA PREZENTAČNÝCH ZRUČNOSTÍ VYSOKOŠKOLSKÉHO UČITEĽA S ORIENTÁCIOU NA ŠTUDENTA

## PRESENTATION SKILLS ANALYSIS OF UNIVERSITY LECTURER REGARDING TO THE REQUIREMENTS OF STUDENT

*Brian König*

### **Abstrakt**

Článok sa zoberá analýzou prezentačných zručností vysokoškolského učiteľa so zreteľom na požiadavky študenta. Analýza je vykonaná na základe výsledkov zozbieraných z dotazníka, ktorý vyplnila približne stovka študentov. Článok tiež obsahuje zoradenie jednotlivých otázok podľa hodnotenia dôležitosti jednotlivých študentov. Okrem iného v príspevku pojednávame o existencii korelácie medzi jednotlivými odpoveďami, za účelom zistiť, či rozhodnutie respondenta odpovedať v jednej otázke určitým spôsobom súviselo s voľbou odpovede v ostatných otázkach.

**Kľúčové slová:** *Prezentačné zručnosti, korelačný koeficient.*

### **Abstract**

Presented article deals with the analysis of a university lecturer presentation skills with regard to the requirements of the student. The analysis is based on the results collected from a questionnaire filled about a hundred students. The article also includes ordering of individual questions by assessing the importance of each student. Furthermore, the paper discusses the existence of correlation between the individual answers in order to determine whether the decision of the respondent to answer the one question in a certain way was related to the choice of answers to other questions.

**Keywords:** *Presentation skills, correlation coefficient.*

## **1. Úvod**

Prezentačné zručnosti spolu so schopnosťou vystupovania na verejnosti a verbálnymi zručnosťami sú v súčasnosti často využívané nástroje komunikácie, ktoré môžu byť využívané v rôznych aspektoch nášho života. Či sa jedná o oblasť školstva, komunikácie na úrovni podniku, uchádzanie sa o pracovné miesto, oslovenie potenciálnych zákazníkov, alebo ide o rôzne iné situácie, môže sa stať, že sa od nás vyžaduje prezentácia nejakej oblasti pred určitým publikom.

Efektívne využitie prezentačných a verbálnych zručností zohráva významnú úlohu nie len v oblasti obchodu a predaja, výučbe a kurzoch, ale je dôležitou súčasťou nášho života na dennej báze. Ovládanie týchto zručností všeobecne zabezpečuje, že sa cítime príjemne, pohodlne a sebedovo, či už pri komunikácii s jednotlivcom, alebo keď rozprávame pred väčšou skupinou ľudí. Ako väčšina zručností i tieto vyžadujú prípravu a tréning.

Z vyššie uvedeného môžeme povedať, že rozvíjanie sebedovomia v oblasti prezentačných a verbálnych schopností nie je limitované iba pre skupinu ľudí, ktorá sa využívaním uvedených zručností živí, ale je vhodné aj pre jednotlivcov, ktorí s prezentovaním nepracujú dennodenne.

Zámerom príspevku je naplniť dva ciele. Za hlavný cieľ bola zvolená analýza dôležitosti vybraných prezentačných vlastností vysokoškolského pedagóga z pohľadu študentov. Úlohou



bolo zistiť, čo je pre študentov dôležité a čo od prednášajúceho očakávajú. Analýza bola vytvorená z dát zozbieraných pomocou dotazníka vytvoreného v prostredí dokumentov google. Druhým čiastkovým cieľom bolo zistiť, či existuje korelácia medzi jednotlivými odpoveďami resp. či rozhodnutie respondenta odpovedať v jednej otázke určitým spôsobom súviselo s voľbou odpovede v ostatných otázkach.

## 2. Metodológia a výsledky

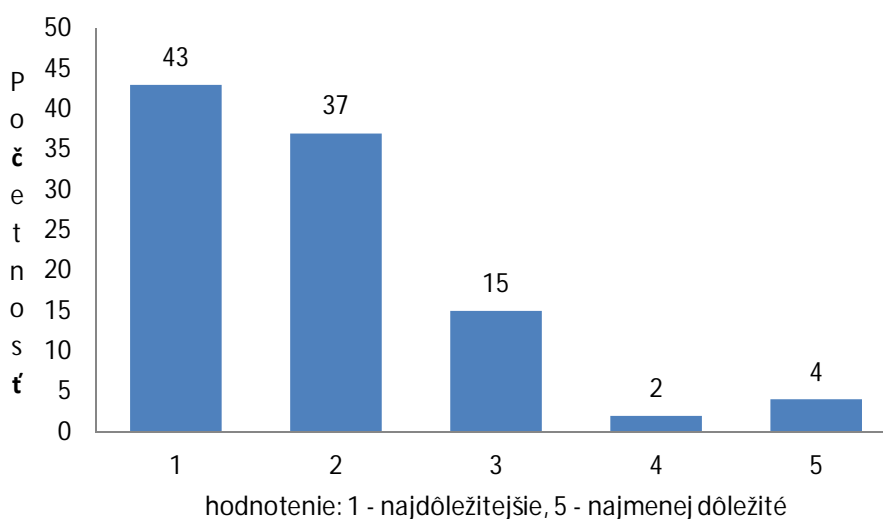
Ako už bolo spomenuté v úvode, cieľom príspevku je analýza prezentačných zručností vysokoškolského učiteľa z pohľadu študentov. Zaujíma nás, do akej miery sú dôležité prezentačné zručnosti pedagóga z hľadiska študentov a či sa ich názory stotožňujú s názormi odborníkov. Na analýzu je použitý dotazník, ktorý bol zaslaný študentom autora článku. Dotazník je zameraný na využívanie základných prezentačných nástrojov v rámci procesu výučby, pričom v rámci príspevku je vykonaná analýza na štyroch otázkach dotazníka<sup>1</sup> z tejto oblasti. Dotazník bol poslaný približne 140 študentom fakulty hospodárskej informatiky, pričom odpovedalo 101 respondentov. Dotazník obsahoval otázky týkajúce sa prezentačných zručností a bol anonymný. Na otázky študenti odpovedali v stupnici od 1 do 5, pričom 1 reprezentuje vysokú dôležitosť a 5 indikuje nízku mieru dôležitosti z pohľadu študentov.

### 2.1 Analýza zodpovedaných otázok

Cieľom prvej otázky bolo zistiť, či si študenti vyžadujú niektorý z vizuálnych nástrojov prezentácie, ktoré sa v súčasnosti bežne využívajú (powerpoint, multimediálna tabuľa, priesvitky). Znenie otázky č.1: „Je pre Vás dôležité, aby prezentujúci/lektor využíval powerpoint resp. inú vizuálnu formu počas prezentácie/výučby (priesvitka, multimediálna tabuľa...)?“ V súčasnosti uvedené vizuálne nástroje reprezentujú aktuálny a často využívaný balík prezentačných pomôcok a tak sme chceli vedieť, aký názor majú naši študenti na ich použitie vo výučbe.

Graf č. 1 – vyhodnotenie študentov otázky č. 1.

#### Otázka č.1 - využite powerpointu alebo multimediálnej tabuľe

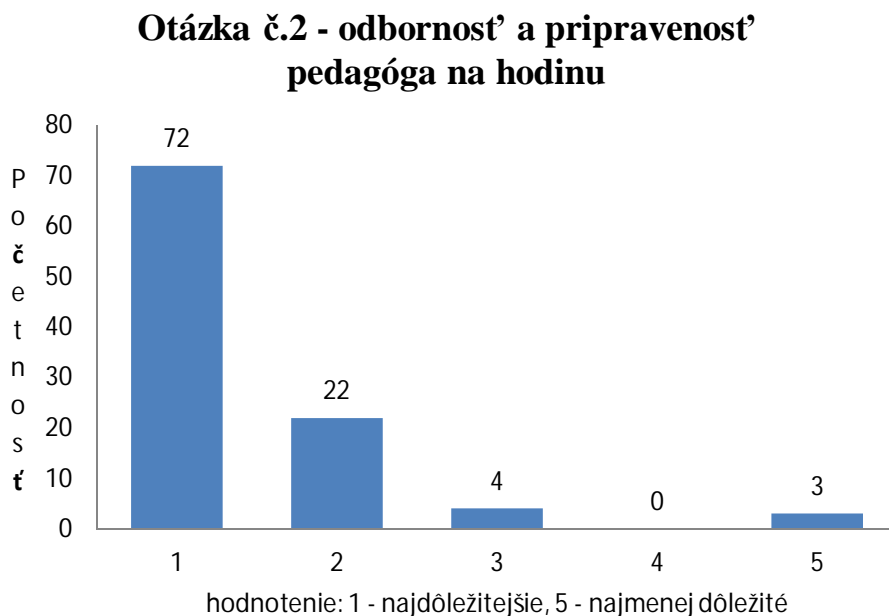


Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe výstupov z dotazníka

Priemerná známka udelená študentmi prvej otázke je 1,88 čo poukazuje na relatívne vysokú významnosť využitia vizuálnych nástrojov. Z grafu č.1 môžeme vidieť, že najvyššia početnosť je priradená hodnoteniu 1 a v závese hodnoteniu 2. Prvé dve hodnotenia získali zhruba 80% z celkového počtu hodnotení. Z výsledku vyplýva odporúčanie pre vysokoškolských pedagógov, že využitie powerpointu a iných vizuálnych pomôcok v rámci výučby z pohľadu študentov zohráva dôležitú rolu.<sup>2</sup>

Zámerom otázky číslo 2 bolo preveriť dôležitosť odbornosti pedagóga a jeho pripravenosti na hodinu. Znenie otázky č.2: „Do akej miery je pre Vás dôležité, aby bol vyučujúci odborník vo svojej oblasti a bol perfektne pripravený na hodinu?“.

Graf č. 2 – vyhodnotenie študentov otázky č. 2.



Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe výstupov z dotazníka

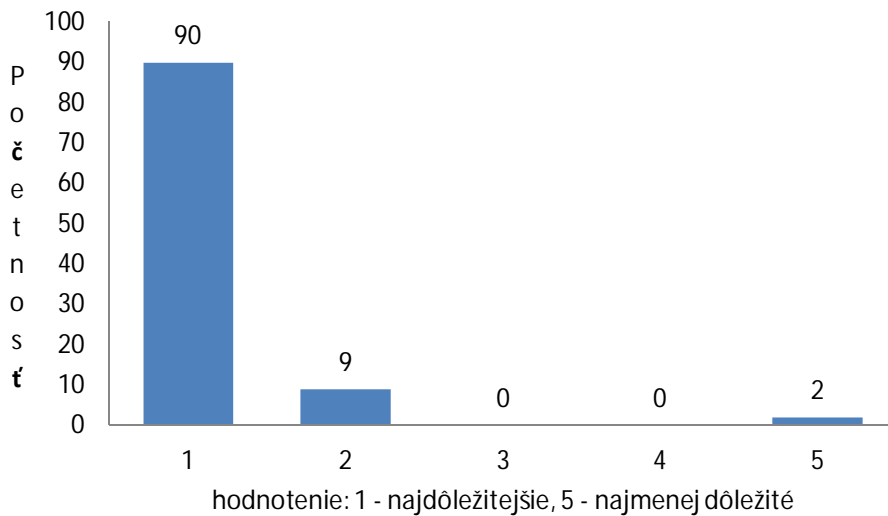
Z odpovedí je zrejmé, že pripravenosť a odbornosť pedagóga je veľmi vyžadovaná zo strany študentov. Vyše 70% odpovedí ohodnotilo otázku č.2 najvyššou dôležitosťou. Priemerné hodnotenie študentov je 1,42, čiže otázka pripravenosti a odbornosti pedagóga nie je iba znakom profesionality, ale z pohľadu študentov určitou samozrejmosťou.

Otázka číslo 3 sledovala, či je aj pre vysokoškolákov dôležitá jednoduchosť a jasné podanie problematiky. Často sa môžeme stretnúť s názorom, že na vysokej škole sa netreba tak jednoducho a zreteľne vyjadrovať, ako na nižších stupňoch štúdia a skôr je možné využívať odbornú rétoriku. Nasledujúcou otázkou sme chceli zistiť, ako túto skutočnosť vnímajú študenti. Znenie otázky č.3: „Do akej miery je pre Vás dôležité, aby sa prezentujúci/lektor počas prezentácie/výučby vyjadroval zrozumiteľne, jasne a čo možno najjednoduchšie?“.

Graf č. 3 – vyhodnotenie študentov otázky č. 3.

<sup>2</sup> Závety z jednotlivých otázok by nemali byť chápané ako všeobecne platné odporúčania pre všetkých pedagógov vysokých škôl, nakoľko vybraná vzorka nie je reprezentatívna. Ide prevažne o študentov jedného ročníka, predovšetkým jedného odboru, z ktorých dve tretiny sú tvorené ženami a približne jedna pätina študentov sú študenti externého štúdia.

### Otázka č.3 - jednoduché, jasné a zrozumiteľné vyjadrovanie



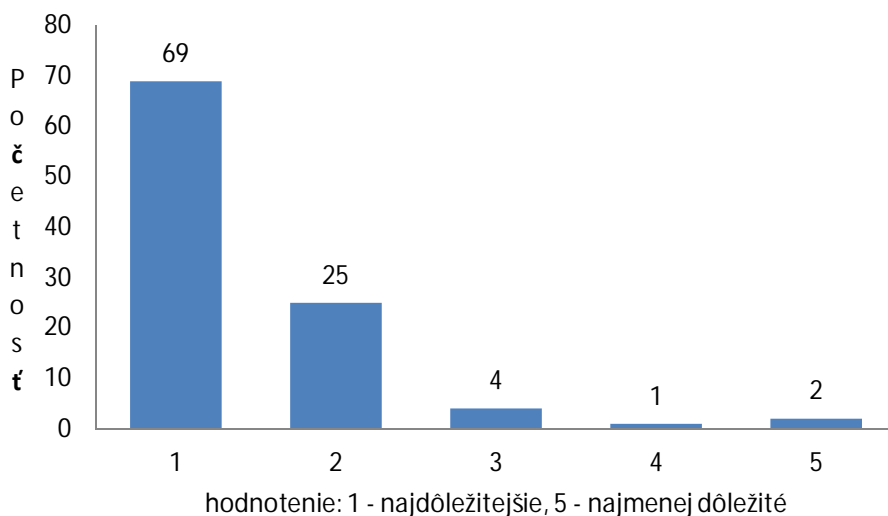
Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe výstupov z dotazníka

Z výsledkov vyplýva, že v rámci opýtaných otázok najvyššiu váhu študenti priradujú jednoduchému a jasnému vyjadrovaniu sa pedagógov. Zhruba 90% respondentov označilo hodnotenie 1, čiže oblasti jasného a zrozumiteľného vyjadrovania pripisujú najvyššiu dôležitosť. Priemerná výška hodnotenia bola 1,17. Z výsledkov vyplýva, že pre pedagóga nie je dôležité len, aby bol odborne pripravený, ale predovšetkým schopný odbornú látku jednoducho a zrozumiteľne podať.

V otázke s poradovým číslom 4 sme sa chceli dozvedieť do akej miery je pre študentov dôležité, aby pedagóg bol voči nim chápaný a dokázal s nimi jednať empaticky. Otázka č.4: „Do akej miery je pre Vás dôležité, aby vyučujúci zaujal chápaný, ľudský a empatický prístup voči študentom?“.

Graf č. 4 – vyhodnotenie študentov otázky č. 4.

### Otázka č.4 - ľudský, chápaný a empatický prístup



Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe výstupov z dotazníka

Viacerí študenti v rámci dotazníka reagovali, že by prijali od učiteľov väčšiu mieru pochopenia a ľudského prístupu. Dokonca niektorí uvádzali, že majú skúsenosti s aroganciou, povýšenosťou a prejavmi nadradenosti zo strany vyučujúcich. Z výsledkov v grafe č.4 vyplýva, že ľudský a empatický prístup zohráva významnú úlohu vo výučbe a v prístupe pedagógov voči študentom. Priemerné hodnotenie k uvedenej otázke bolo 1,44.

Ak by sme zhodnotili výsledky z analyzovaných otázok a zoradili ich podľa dôležitosti z pohľadu študentov, vyzeralo by to nasledovne:

Tabuľka č.1: poradie otázok podľa hodnotenia dôležitosti

poradie	číslo otázky	priemerné hodnotenie
1	Otázka č.3 - jednoduché, jasné a zrozumiteľné vyjadrovanie	1.17
2	Otázka č.2 - odbornosť a pripravenosť pedagóga na hodinu	1.42
3	Otázka č.4 - ľudský, chápaný a empatický prístup	1.44
4	Otázka č.1 - využite powerpointu alebo multimedialnej tabule	1.88

Zdroj: Vlastné vypracovanie na základe výstupov z dotazníka

Najvyššia dôležitosť bola priradená otázke č.3 týkajúcej sa zrozumiteľného a jednoduchého podania obsahu prednášky. Za ňou nasledovala skupina otázok s trochu vyšším hodnotením v nasledujúcom poradí: na druhej priečke sa umiestnila otázka č.2 zohľadňujúca odbornosť a pripravenosť pedagóga, v tesnom závесе otázka č.4 orientujúca sa na ľudský a chápaný prístup vyučujúceho a na poslednom mieste otázka č.1, ktorá sa zaoberala využitím powerpointu a multimedialnej tabule.

## 2.2 Analýza závislosti medzi jednotlivými odpoveďami

Ďalej nás bude zaujímať, či existuje korelácia medzi jednotlivými odpoveďami resp. či rozhodnutie respondenta odpovedať v jednej otázke určitým spôsobom súviselo s voľbou odpovede v ostatných otázkach. Za účelom analýzy použijeme párové koeficienty korelácie.

Tabuľka č.1 – porovnanie párových koeficientov korelácie v rámci jednotlivých odpovedí.

číslo otázky	1	2	3	4
1	1,0000	0,3974	0,4201	0,3174
2		1,0000	0,5072	0,4526
3			1,0000	0,5637
4				1,0000

Zdroj: Vlastné výpočty v softvéri Gretl

Ako možno vidieť v tabuľke č.1, všetky koeficienty korelácie sú pozitívne, pričom najvyššiu koreláciu badať medzi otázkami č. 3 a č. 4 na úrovni 0,56 a medzi odpoveďami v otázkach č.2 a č.3 vo výške 0,51. Zvyšné koeficienty korelácie sú menšie ako 0,5. Z uvedených výsledkov možno konštatovať, že študenti nemali tendenciu hodnotiť všetky otázky rovnakým spôsobom, čím vyjadrovali odlišné preferencie v dôležitosti jednotlivých otázok.

## Záver

Prezentačné zručnosti reprezentujú dôležitý nástroj komunikácie predovšetkým v oblastiach, kde je nevyhnutné vystupovať pred skupinou ľudí. Jedným z odvetví, kde sú tieto zručnosti nevyhnutné je práve školstvo, konkrétne u samotných vyučujúcich. V článku sme sa snažili analyzovať dôležitosť niektorých prezentačných zručností vysokoškolského učiteľa so zreteľom na požiadavky a očakávania študenta. Odozva študentov bola získaná prostredníctvom formulára, ktorý obsahoval otázky týkajúce sa prezentačných zručností resp. osobnostných vlastností pedagóga. Na základe výsledkov môžeme konštatovať, že podľa respondentov je veľmi dôležité, aby sa pedagóg vyjadroval jasne, zrozumiteľne a jednoducho, bol perfektne pripravený na hodinu a zároveň mal chápaný a ľudský prístup voči študentom. Študenti pozitívne hodnotia využívanie vizuálnych nástrojov ako sú napr. powerpoint a multimediálna tabuľa. Z výsledkov môže plynúť ponaučenie pre pedagógov, že veľká časť úspechu učiteľa je v jeho rukách, na jeho prístupe ku študentom, spôsobe výučby a schopnosti ľahko, zrozumiteľne a zaujímavo vyjadriť obsah učiva.<sup>3</sup>

## Použitá literatúra

- [1] REYNOLDS, G.: *Prezentace a zen*. Brno: Zoner Press, 2009.

Internetové zdroje:

<http://www.skillsyouneed.com/presentation-skills.html> platné ku dňu 12.5.2015.

<http://www.businessballs.com/presentation.htm> platné ku dňu 12.5.2015.

[http://www.mindtools.com/pages/article/newCS\\_96.htm](http://www.mindtools.com/pages/article/newCS_96.htm) platné ku dňu 12.5.2015.

<http://www.kent.ac.uk/careers/presentationskills.htm> platné ku dňu 12.5.2015.

## Kontaktné údaje

Ing. Brian König, PhD.,  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky,  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava,  
Tel: (421 2) 67 295 826  
email: konigbrian@gmail.com

---

<sup>3</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0285/14 "Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na metódy priestorovej ekonometrie"

# VÝBĚR DODAVATELE ELEKTŘINY NA ČESKÉM TRHU V ROCE 2015 POMOCÍ SIMULAČNÍHO MODELU

## THE ELECTRICITY SUPPLIER SELECTION ON THE CZECH ELECTRICITY MARKET IN 2015 USING SIMULATION MODEL

*Martina Kuncová, Jana Sekničková*

### Abstrakt

Elektrina je jednou z nejdůležitějších komodit, bez které si již nedokážeme představit běžný život. Transformace českého trhu s elektřinou vedla k nárůstu počtu dodavatelů nabízejících elektřinu domácnostem a firmám. Česká republika je dále rozdělena na 3 distribuční oblasti, odběratel tak může vybírat pouze dodavatele, nikoli distributora. Každá domácnost má pak svým dodavatelem přidělenou určitou sazbu odpovídající spotřebě a podmínkám dodavatele. V tomto článku se zaměřujeme na dvoutarifovou sazbu D25d. Pro tuto sazbu je dodavatelů v roce 2015 nabízeno 60 produktů, není tedy jednoduché si vybrat ten správný. Rozhodnutí je ovlivněno především distribuční oblastí, výší spotřeby ve vysokém a nízkém tarifu a cenami elektřiny, které se každoročně mění. Na základě simulace výše roční spotřeby srovnáváme finální cenu všech dostupných produktů.

***Klíčová slova:** spotřeba elektřiny, tarifní sazba D25d, distribuční oblast, dodavatelé elektřiny, roční náklady, rok 2015*

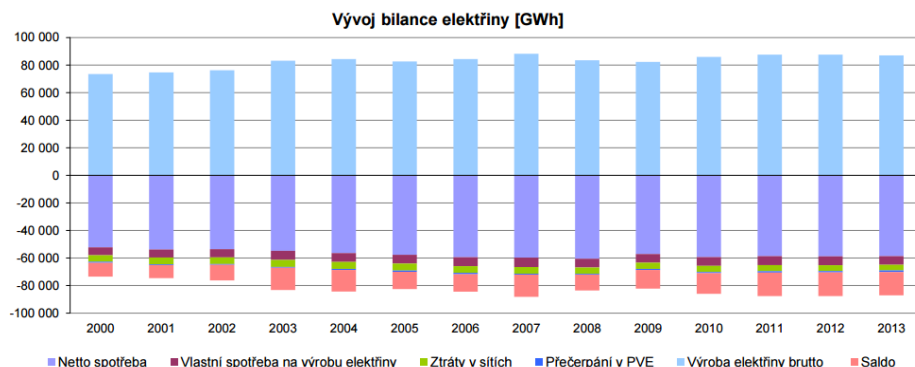
### Abstract

Electricity is one of the most important commodities and it would be hard to live without it. The transformation of the Czech electricity market led to the increase of the number of suppliers offering the electricity to households and companies. The Czech Republic is divided into 3 regions operated by 3 distributors. The customer can choose only the supplier, not the distributor. Every household has its own tariff rate given by the supplier that corresponds with the consumption and the supplier's conditions. In this article we aim at the dual tariff rate D25d. For this tariff rate the suppliers offer 60 products in 2015 so it is not easy to choose the best one. The selection is influenced mainly by the distribution area, by the level of electricity consumption in high and low tariff and by the prices of electricity that change every year. On the basis of the annual electricity consumption simulation we compare the final costs of all the products.

***Keywords:** electricity consumption, tariff rate D25d, distribution area, electricity suppliers, annual costs, year 2015*

## 1 ÚVOD

Elektrina patří mezi komodity, bez kterých si již běžný život v moderní společnosti nelze představit. Neustálý rozvoj různorodých spotřebičů vede k neklesajícímu trendu výroby i spotřeby elektřiny i v České republice, bez ohledu na snahu vyvíjet úsporné spotřebiče (obr. 1).

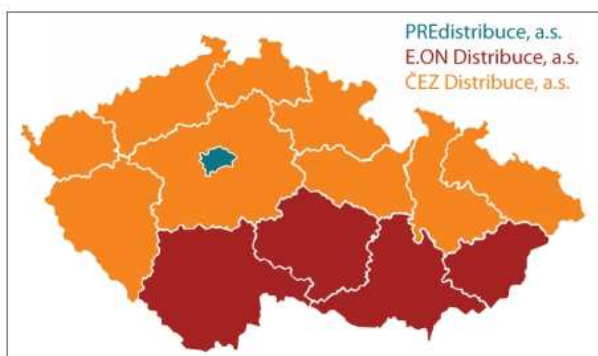


**Obr. 1** – Vývoj bilance elektřiny (Zdroj: [www.eru.cz](http://www.eru.cz))

Od roku 2002 došlo na českém trhu s elektřinou k postupné liberalizaci, do roku 2006 si už každá domácnost může sama vybírat dodavatele elektřiny (do té doby byli výhradními dodavateli provozovatelé elektrizační soustavy). Počet dodavatelů a jimi nabízených produktů se rozrůstá. Kromě těchto dodavatelů ovlivňují cenu elektřiny také distributoři, Energetický regulační úřad (ERÚ) a Operátor trhu s elektřinou (OTE). OTE organizuje mimo jiné krátkodobý trh s elektřinou a plynem, zpracovává měsíční a roční zprávy o trhu s elektřinou a plynem a vytváří analýzy budoucí očekávané spotřeby. ERÚ reguluje ceny elektřiny a plynu a distribuci elektřiny. Nepřehlednost trhu z pohledu domácnosti komplikuje výběr a změnu dodavatele elektřiny. Na internetu sice existuje několik různých kalkulátorů cen, ale ani ty si neporadí v situaci kolísající spotřeby. Simulační model je jednou z možností, jak analyzovat nabídku dodavatelů elektřiny a vybrat nejlevnější produkt při daných podmínkách (výše odběru, sazba). V tomto článku ukážeme využití simulace Monte Carlo pro generování výše měsíční potřeby a následný výpočet ročních nákladů na spotřebu elektřiny jedné domácnosti (sazba D25d) a výsledky srovnáme s rokem 2014, kdy byla provedena obdobná analýza (Kuncová, Sekničková 2014).

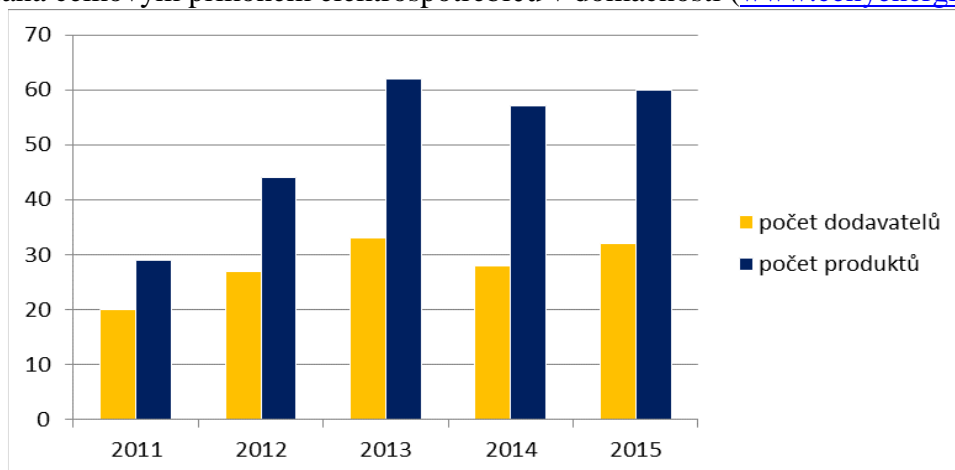
## 2 TRH S ELEKTRINOU V ČR

Česká republika je z pohledu trhu s elektřinou rozdělena na 3 distribuční oblasti obhospodařované třemi distributory, kterými jsou PRE, ČEZ a E.ON. (obr. 2). Distributor elektřiny vlastní přenosovou soustavu a stará se především o distribuci energie. Domácnosti si tak nemohou vybírat distributora elektřiny, ale pouze dodavatele, který danou komoditu prodává. Počet dodavatelů a jimi nabízených produktů od uvolnění trhu víceméně roste (obr. 3).



**Obr. 2** – Distributoři a distribuční oblasti v ČR ([www.penize.cz](http://www.penize.cz))

Změna dodavatele elektřiny nemusí být vždy zcela jednoduchá, ale může pro domácnost znamenat významné úspory ve výdajích za elektřinu. Každá domácnost má na základě pravidel dodavatele přidělenou sazbu spojenou se způsobem využívání elektřiny. Pro běžnou spotřebu bývá využívána jedna z tzv. jednotarifových sazeb (D01d a D02d), kdy spotřebitel platí stejnou cenu po celý den. Při využívání elektřiny pro ohřev vody či vytápění lze využít jednu z dvoutarifových sazeb, kdy se liší ceny v tzv. vysokém a nízkém tarifu. Pro akumulaci ohřevu vody s osmihodinovou délkou nízkého tarifu a nižší spotřebou je stanovena sazba D25d. Podmínkou pro zařazení do distribuční sazby je také velikost hlavního jističe, která je dána celkovým příkonem elektrospotřebičů v domácnosti ([www.cenyenergie.cz](http://www.cenyenergie.cz)).



**Obr. 3:** Počet dodavatelů a jimi nabízených produktů v sazbě D25d v období 2011-2015 (zdroj: ERÚ, Kalkulátor cen 2015)

Výběr vhodného produktu je ovlivněn především výší spotřeby elektřiny a dále cenami za odběr elektřiny. Finální cena je však závislá na více faktorech – zahrnuje cenu za spotřebu (rozdělenou případně na vysoký a nízký tarif), fixní sazby či daně. Zjednodušeně lze cenu rozdělit na 2 hlavní části. První z nich souvisí se službami přenosu elektřiny a je každoročně stanovena Energetickým regulačním úřadem (ERÚ 2015). Zahrnuje tyto položky:

- měsíční nájem jističe,
- cena za megawatthodinu (MWh) ve vysokém tarifu (VT),
- cena za megawatthodinu v nízkém tarifu (NT),
- cena za systémové služby,
- platba za podporu výkupu elektřiny z obnovitelných zdrojů OZE,
- platba za činnost OTE,
- ekologická daň z elektřiny (28,30 Kč za 1 MWh).

Druhá část ceny je stanovena dodavatelem. Zahrnuje:

- fixní měsíční platbu dle daného produktu,
- cenu za megawatthodinu ve vysokém tarifu,
- cenu za megawatthodinu v nízkém tarifu.

Finální cena je následně zvýšena o daň z přidané hodnoty (DPH), což je 21 % pro rok 2015.

### 3 SIMULAČNÍ MODELY

Simulace je jednou z metod, které slouží ke studiu komplexních systémů, a to zejména v situacích, kdy není možné využít standardní analytické přístupy. Simulační modely jsou využívány v různorodých situacích zahrnujících modelování systémů ve snaze posoudit jejich



funkčnost a hledání úzkých míst, jako jsou např. výrobní problémy (Manlig 2008), logistické procesy, modely hromadné obsluhy (Dlouhý a kol. 2011), modely zdravotnických zařízení (Voráček a kol. 2014), a dále v situacích ovlivněných náhodnými výkyvy způsobenými lidským faktorem či dynamickým tržním prostředím, jako např. výkyvy poptávky (Dlouhý a kol. 2011), či změny při řízení projektů (Majtán 2014). Simulační modelování bývá nejčastěji rozdělováno na simulace Monte Carlo, diskrétní simulace a spojité simulace (Dlouhý a kol. 2011). Pro uvedený problém se hodí první jmenovaná část, tj. simulace Monte Carlo. Jde o opakované náhodné pokusy, na jejichž základě jsou následně počítány další zkoumané ukazatele, tj. např. cena. Náhodné vstupy jsou generovány z předem vybraných pravděpodobnostních rozdělení. Pro realizaci běžného modelu lze využít MS Excel, při nutnosti použití složitějších pravděpodobnostních rozdělení je pak vhodnější některý z doplňků do MS Excelu, např. program Crystal Ball (Kuncová 2006). Typické využití simulace Monte Carlo najdeme např. ve financích (Razgaitis 2003), bankovníctví (Kuncová, Lízalová 2012), výběru tarifu mobilního operátora (Kuncová 2006). V souvislosti s elektřinou bývá simulace Monte Carlo používána např. pro generování celkové poptávky na trhu po elektrické energii (Hegazy a kol. 2003). V našich analýzách jsme se již pokusili o simulaci odběru elektřiny domácnosti a výběr vhodného dodavatele pro rok 2014 (Kuncová, Sekničková 2014), v tomto článku tedy porovnáme s výsledky pro rok 2015.

## 4 DATA

Na základě předchozí analýzy (Kuncová, Sekničková 2014) srovnáváme tutéž situaci, tj. výběr dodavatele elektřiny pro domácnost využívající tarifní sazbu D25d s roční spotřebou kolem 10 MWh (resp. měsíční kolem 800-900 kWh), jističem 3x20A-3x25A a poměrem využití vysokého a nízkého tarifu 45 % / 55 %. Dle údajů dostupných na stránkách ERÚ nabízí v roce 2015 na českém trhu 32 dodavatelů pro danou tarifní sazbu 60 produktů. V tab. 1 jsou uvedeny ceny jednotlivých distributorů za spotřebu 1 MWh při vysokém a nízkém tarifu a za jistič (cena za další služby je pro všechny distributory stejná). Vidíme, že nejdražší distribuční oblastí je oblast distributora ČEZ. Na základě této skutečnosti jsou pravděpodobně dodavatelé nuceni nabízet v daném regionu nižší ceny, což je vidět především na průměrné ceně od dodavatelů za nízký tarif, která je nejnižší, prům. fixní sazba dodavatele a prům. cena dodavatele ve vysokém tarifu pak druhá nejnižší.

Tab. 1 – Průměrné ceny dodavatelů v jednotlivých distribučních oblastech (zdroj: ERÚ 2015)

distrib. region	Dodavatelé – prům. fixní sazba měsíční	Dodavatelé VT prům. cena za 1 MWh	Dodavatelé NT prům. cena za 1 MWh	Fixní sazba za jistič měsíčně	distrib. VT cena za 1 MWh	distrib. NT cena za 1 MWh	distrib. cena dalších služeb za 1 MWh
E.ON	43,092	1396,748	862,512	95	1518,43	29,99	607,21
PRE	46,708	1376,031	859,079	102	1508,54	24,37	
ČEZ	43,925	1382,631	856,546	110	1727,62	36,94	

Simulační model je založen na generování měsíční spotřeby (na základě normálního rozdělení s daným průměrem a 20% směrodatnou odchylkou) a určení celoroční spotřeby vybrané domácnosti. Vzorec pro výpočet celkových ročních nákladů je následující:

$$COST_{ij} = (1 + VAT) \cdot [12 \cdot (mf_{ij} + mf_j) + 0.45 \cdot gc \cdot (ph_{ij} + ph_j) + 0.55 \cdot gc \cdot (pl_{ij} + pl_j) + gc \cdot (os + t)]$$

kde

$i$  ... produkt,  $i = 1, \dots, 60$ ,

$j$  ... distributor,  $j = 1, \dots, 3$ ,

VAT ... daň z přidané hodnoty (DPH = 0,21 pro rok 2015),

$mf$  ... fixní měsíční platba dodavatele,

$gc$  ... simulovaná roční spotřeba v MWh,

$ph$  ... cena ve vysokém tarifu za 1 MWh,

$pl$  ... cena v nízkém tarifu za 1 MWh,

$os$  ... cena za další služby za 1 MWh,

$t$  ... daň z elektřiny za 1 MWh ( $t = 28,3$  Kč pro rok 2015).

## 5 VÝSLEDKY

Srovnání dodavatelů bylo provedeno na základě 1000 simulačních experimentů v programu Crystal Ball pro každého distributora zvlášť. Výsledky potvrzují to, co již bylo patrné z předchozí části, a to nejvyšší ceny v distribuční oblasti ČEZ. Pořadí dodavatelů to však příliš neovlivnilo, ve všech třech regionech se na prvním místě s nejnižšími průměrnými ročními náklady umístily firmy ST Energy a CARBOUNION KOMODITY s jediným nabízeným produktem v dané tarifní sazbě (tab. 2). Do pětice nejlepších se ještě prosadily firmy Nano Energies Trade (jediný nabízený produkt), Europe Easy Energy (jeden ze 4 nabízených produktů, a to Company aku) a Fonergy (s jedním ze dvou nabízených produktů, konkrétně produkt Premium).

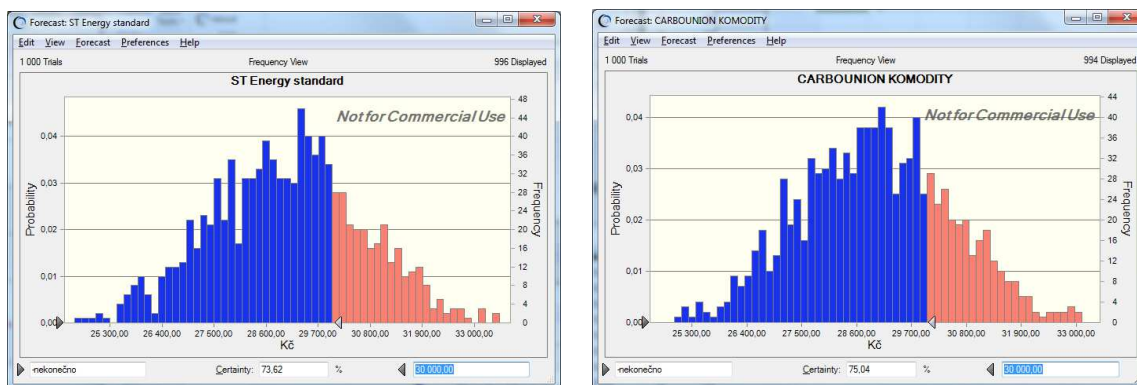
**Tab. 2** – Pořadí dodavatelů v roce 2015 pro všechny distribuční oblasti a vypočtené průměrné roční náklady pro danou domácnost

pořadí / distrib.	E.ON	Prům. roční náklady v Kč	PRE	Prům. roční náklady v Kč	CEZ	Prům. roční náklady v Kč
1	CARB.KOM.	28961	ST Energy	28850	ST Energy	30262
2	ST Energy	29040	CARB.KOM.	28944	CARB.KOM.	30390
3	Nano En.Tr.	29063	Nano En.Tr.	29062	Nano En.Tr.	30474
4	Europe Easy Energy Comp.aku	29385	Fonergy Premium	29179	Fonergy Premium	30591
5	Fonergy Premium	29462	Europe Easy Energy Comp.aku	29231	Europe Easy Energy Comp.aku	30643
58	E.ON elekt.	32927	E.ON elekt.	32925	E.ON elekt.	34342
59	Global Energy fix 2015 G aku	33241	Global Energy fix 2015 G aku	33075	Global Energy fix 2015 G aku	34503
60	Global Energy G aku	34564	Global Energy G aku	34339	Global Energy G aku	35693

U firem s více nabízenými produkty je však často nutné splnit dodatečné podmínky pro výběr daného produktu. Mezi posledními se umístila firma E.ON jako dodavatel s jedním ze 3 nabízených produktů (zbylé 2 se umístily na 57. a 47. místě) a dále firma Global Energy se

dvěma ze tří nabízených produktů (třetí z nich s názvem fix24, tj. se zafixováním podmínek, se umístil na 36 místě).

Nejnižší roční náklady v této situaci se pohybují kolem 28-30 tisíc korun. Pokud se podíváme na výsledky simulačních experimentů, můžeme zjistit (Obr. 4), že pravděpodobnost, že roční náklady za daných podmínek budou nižší než 30 tisíc korun je vysoká u obou vítězných firem (vyšší než 70 %) v distribuční oblasti E.ON i PRE, kdežto u distributora ČEZ je jen kolem 45 %.



**Obr. 4** – Histogram výsledných ročních nákladů pro vítězné produkty (distributor E.ON)

Jestliže se podíváme na výsledky v roce 2014, najdeme produkt firmy CARBOUNION KOMODITY na prvním místě, tj. tato firma si zatím po oba roky drží nízké ceny (v roce 2014 se nejnižší náklady pohybovaly zhruba o tisíc korun výše). Druhá v popředí pro rok 2015, ST Energy, byla však v roce 2014 až na 26. místě co se týče průměrných ročních nákladů domácnosti, které byly 32-33 tisíc korun (v roce 2015 jsou zhruba o 3 tisíce nižší). Mezi prvními pěti v roce 2014 figurovala ještě firma Fonergy na pátém místě, Europe Easy Energy měla nejlepší produkt v roce 2014 na 6. místě, Nano Energies Trade až na 35. místě. Pokud jde o umístění na posledních místech, pak Global Energy s produktem G aku byla v roce 2014 na posledním 57. místě s náklady kolem 35-36 tisíc korun, což se pro rok 2015 téměř nezměnilo, produkt fix 2014 G aku pak byl na 52. místě. Produkt firmy E.ON. elektřina aku na tom byl o něco lépe, v roce 2014 se umístil na 51. místě (s průměrnými ročními náklady kolem 34 tisíc korun). Z uvedených informací je patrné, že téměř ve všech případech dochází k poklesu cen a tedy k poklesu nákladů spojených se spotřebou elektřiny.

## 6 ZÁVĚR

Situace na českém trhu při výběru vhodného dodavatele elektřiny pro domácnost je dosti nepřehledná a není snadné se v ní orientovat. Náklady spojené se spotřebou elektřiny jsou dány několika různými položkami jak z pohledu distributora elektřiny, tak z pohledu dodavatele. V roce 2015 je obecně nejdražším regionem distribuční oblast ČEZ. Oproti roku 2014 však dochází k poklesu cen a tím i k poklesu nákladů domácnosti na spotřebu elektřiny. Simulační model ukázal, že výběr vhodného dodavatele může domácnosti ušetřit až 20 % nákladů ročně.

### Poděkování

Výzkum byl podpořen z grantu č. 13-07350S Grantové agentury České republiky a interního grantu FIS VŠE č. F4/54/2015.

## Použitá literatura

1. Ceny energie 2014: Tarify a sazby elektřiny: Jak se v nich vyznat? [online], dostupné z: <http://www.cenyenergie.cz/tarify-a-sazby-elektřiny-jak-se-v-nich-vyznat/#/promo-ele> [cit. 2015-04-20]
2. Dlouhý, M., Fábry, J., Kuncová, M. and Hladík, T. 2011: *Simulace ekonomických procesů*. 2. ed. Computer Press, Brno, 2011.
3. Energetický regulační úřad (ERÚ) 2015: *Kalkulátor cen* [online], dostupné z: <http://kalkulator.eru.cz/VstupniUdaje.aspx> [cit. 2015-04-20]
4. Hegazy, Y.G., Salama, M.M.A. and Chickhani, A.Y. 2003: Adequacy assessment of distributed generation systems using Monte Carlo Simulation. *Power Systems - IEEE Transactions* 18/1 (2003), 48-52.
5. Kuncová, M.: Practical Application of Monte Carlo Simulation in MS Excel and its Add-ons – The Optimal Mobile Phone Tariffs for Various Types of Consumers in the Czech Republic. In: *Proceedings of Mathematical Methods in Economics*, Pilsen, 2006, 323-332.
6. Kuncová, M. and Lízalová, L. 2012: Monte Carlo simulation – the bank account selection in the Czech Republic according to the bank charges. In: *Proceedings of the International Conference on Modeling and Applied Simulation*. Wien, 2012, 153-161.
7. Kuncová, M., Sekničková, J. (2014). Analysis of the efficiency of the electricity supplier selection depending upon the price changes. In: *Mathematical Methods in Economics (MME2014)* [CD]. Olomouc, 10.09.2014 - 12.09.2014. Olomouc : Palacký University in Olomouc, 2014, s. 542-547. ISBN 978-80-244-4208-2. CD ISBN 978-80-244-4209-9.
8. Majtán, M., Mizla, M., Mizla, P. 2014. Využitie simulácií pri manažovaní projektu. *Ekonomický časopis*, Bratislava: Slovak Akad. Press, ISSN 0013-3035, Vol. 62, no.5(2014), pp. 508-521
9. Manlig, F., Vavruška, J., Dušáková, A. 2008. Podpora rozvrhování výroby pomocí počítačové simulace. *Strojírenská technologie* (2008), pp. 157-160.
10. Razgaitis, R. 2003: *Dealmaking Using Real Options and Monte Carlo Analysis*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2003.
11. Voráček, J., Vojáčková, H., Kuncová, M., Zažímal, D. 2014. Modelling, Visualization and Optimization of Hospital Emergency Department. *Proceedings of Mathematical Methods in Economics 2014 Conference*. September 10-12, 2014, pp. 1084-1090. ISBN 978-80-244-4209-9

## Kontaktní údaje

Ing. Martina Kuncová, PhD.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 449

email: [martina.kuncova@vse.cz](mailto:martina.kuncova@vse.cz)

Mgr. Jana Sekničková, PhD.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky  
nám. W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 449

email: [jana.seknickova@vse.cz](mailto:jana.seknickova@vse.cz)

# BELLMANOV PRINCÍP OPTIMALITY V JEDNODUCHOM MAKROEKONOMICKOM MODELI<sup>1</sup>

## BELLMAN'S PRINCIPLE OF OPTIMALITY IN SIMPLE MACROECONOMIC MODEL

*Patrik Kupkovič*

### Abstrakt

Dynamické rozhodovacie problémy ekonomických subjektov, ktorých cieľom je maximalizácia funkcie užitočnosti vzhľadom na ich rozpočtové ohraničenie v nekonečnom časovom horizonte, sú základným stavebným prvkom moderných makroekonomických modelov. Tieto typy makroekonomických modelov sa študujú v kontexte dynamických optimalizačných modelov. Na popísanie optimálneho správania dynamického systému sa využíva Bellmanov princíp optimality. V tomto príspevku si ukážeme dve jednoduché metódy využívajúce Bellmanovu rovnicu. A to iteráciu hodnotovej funkcie a metódu neurčitých koeficientov.

**Kľúčové slová:** *Bellmanov princíp, iterácia hodnotovej funkcie, metóda neurčitých koeficientov*

### Abstract

Dynamic decision problems of economic agents aimed at maximizing the utility function with respect to their budget constraint in an infinite time horizon is the basic building block of modern macroeconomic models. These types of macroeconomic models are studied in the context of dynamic optimization models. To describe the optimal behavior of a dynamic system is used Bellman's principle of optimality. In this paper we show two simple methods which make use of the Bellman's equation. It is the value function iteration and the method of undetermined coefficients.

**Keywords:** *Bellman's principle, Value function iteration, method of undetermined coefficients*

## 1 METODOLÓGIA DYNAMICKÉHO PROGRAMOVANIA

Gong a Semmler (2004) predpokladajú reprezentatívny subjekt v ekonomike, ktorého cieľom je nájsť rozhodovaciu sekvenciu  $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  pričom platí

$$\max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, u_t) \right], \quad (1.1)$$

vzhľadom na ohraničenie

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t, z_t). \quad (1.2)$$

Kde  $x_t$  je vektor  $m$  stavových premenných<sup>2</sup> v období  $t$ ,  $u_t$  je vektor  $n$  kontrolných (rozhodovacích) premenných<sup>3</sup>,  $z_t$  je vektor  $s$  exogénnych premenných, ktorých dynamika

---

<sup>1</sup> Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia grantu VEGA 1/0444/15 „*Ekonomická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku*“.

nezávisí na  $x_t$  ani na  $u_t$ ,  $E_t$  je operátor matematických očakávaní závislý na informáciách dostupných v čase  $t$  a  $\beta \in (0,1)$  je diskontný faktor. Neistota v modeli pramení z exogénnej premennej, ktorá sa zvyčajne modeluje autoregresnou schémou prvého rádu  $AR(1)$ :

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_{t+1}. \quad (1.3)$$

Kde  $\varepsilon_t$  je náhodná premenná, ktorá je nezávisle a identicky normálne rozdelená. Dopredu sú známe aj iníciaľne podmienky tohto dynamického rozhodovacieho problému  $(x_0, z_0)$ .

Riešením tohto dynamického systému sa snažíme nájsť časovo nemennú „*Policy function*“ (riadiacu funkciu)  $G$  do ktorej vstupujú stavové a exogénne premenné (nezávislé premenné) a výstupom sú kontrolné premenné (závislé premenné)

$$u_t = G(x_t, z_t). \quad (1.4)$$

Pri zadaných iníciaľných hodnotách  $(x_0, z_0)$  si vieme pomocou (1.4) vypočítať hodnotu  $u_0$ . Dosadením hodnôt  $(x_0, u_0, z_0)$  do (1.2) získame hodnotu stavovej premennej  $x_1$ . Zo vzťahu (1.3) vieme získať  $z_1$  a môžeme obdobným spôsobom pokračovať až kým nezískame sekvenciu kontrolných premenných  $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$  a sekvenciu stavových premenných  $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ . Takéto riešenie nazývame rekurzívne.

## 1.1 Bellmanova rovnica

Aby sme našli riadiacu funkciu  $G$ , musíme si definovať pomocnú funkciu  $V(x)$ , ktorá nám vyjadruje optimálnu hodnotu systému štartujúceho z ľubovoľného stavu  $x \in X, z \in Z$ . Táto funkcia sa volá „*Value function*“ (hodnotová funkcia). Symbolicky sa zapisuje nasledovne:

$$V(x_0, z_0) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(x_t, u_t) \right]. \quad (1.5)$$

Táto hodnotová funkcia sa maximalizuje vzhľadom na rozpočtové ohraničenie (1.2) a proces pre exogénnu premennú (1.3) pri daných iníciaľných podmienkach  $(x_0, z_0)$ . Je to funkcia, ktorej sa v každom období priradí hodnota rozhodovacích premenných maximalizujúca (1.5), ktoré sú vyjadrené iba pomocou stavových premenných. Hodnotová funkcia (1.5) sa dá prepísať tak, aby sme odhalili jej rekurzívnu štruktúru:

$$V(x_0, z_0) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \left[ U(x_0, u_0) + E_0 \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(x_t, u_t) \right], \quad (1.6)$$

V tomto vyjadrení (1.6) si vieme upraviť časové indexy pri sumácii, vyňať diskontný faktor a uviesť si, že takto formulovaný problém má rekurzívnu štruktúru. Dostávame sa potom k tvaru:

$$V(x_0, z_0) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ U(x_0, u_0) + \beta E_0 [V(x_1, z_1)] \right\}. \quad (1.7)$$

V každej perióde  $t$ , rozhodovateľ čelí tomu istému rozhodovaciemu problému: vybrať si rozhodovaciu premennú  $u_t$  tak aby maximalizoval svoju súčasnú funkciu užitočnosti plus diskontovanú hodnotu optimálneho plánu od  $t+1$ . Tento problém sa opakuje každú periódu a tak je časový index nepodstatný. (1.7) si môžeme prepísať ako:

<sup>2</sup> Stavová premenná je premenná, ktorá kompletne charakterizuje súčasný stav rozhodovateľa. Nie je rozhodovaná v súčasnom období, ale v predchádzajúcom.

<sup>3</sup> Kontrolná (rozhodovacia) premenná je premenná, ktorá je rozhodovaná v súčasnom období.

$$V(x, z) = \max_u \left\{ U(x, u) + \beta E[V(\tilde{x}, \tilde{z})] \right\}. \quad (1.8)$$

Kde vlnovka označuje hodnotu v ďalšom období. Samozrejme, vždy sa táto optimalizácia uskutočňuje vzhľadom na ohraničenia (1.2) a (1.3) pri daných iníciaľných podmienkach. Rovnica (1.8) sa nazýva Bellmanova rovnica a je pomenovaná po Richardovi Bellmanovi (1957). Táto rovnica nám popisuje Bellmanov princíp optimality: optimálne riadenie má tú vlastnosť, že nech vychádzame z akejkoľvek iníciaľnej podmienky a máme akékoľvek iníciaľne rozhodnutie, zvyšné rozhodnutia musia tvoriť optimálny riadiaci plán vyplývajúci z týchto iníciaľných podmienok<sup>4</sup>. Funkcia (1.8) sa používa na nájdenie hodnotovej funkcie  $V(x, z)$  a následne riadiacej funkcie  $G(x, z)$ .

## 2 ILUSTRÁCIA ZÁKLADNÝCH VÝPOČTOVÝCH METÓD NA JEDNODUCHOM MAKROEKONOMICKOM MODELI

Na ilustráciu základných výpočtových metód využívajúcich Bellmanovu rovnicu (1.8) si uveďme jednoduchý makroekonomický model Brocka a Mirmana (1972). Rozhodovateľ sa snaží maximalizovať svoju funkciu užitočnosti

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t), \quad (2.1)$$

vzhľadom na rozpočtové ohraničenie

$$k_{t+1} + c_t = Ak_t^\alpha. \quad (2.2)$$

Domácnosť (rozhodovateľ) sa rozhoduje koľko svojich prostriedkov  $y_t = Ak_t^\alpha$  spotrebuje  $c_t$  alebo investuje do kapitálu  $i_t = k_{t+1}$ <sup>5</sup>, ktorý bude k dispozícii pre budúce obdobie. Pre jednoduchosť predpokladáme, že úroveň technológie  $A$  je konštantná a nie je stochastická. Poznáme  $k_0$  a  $A > 0, \alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1)$ . V tomto modeli sú rozhodovacie premenné spotreba  $c_t$  a objem kapitálu pre budúce obdobie  $k_{t+1}$ . Stavová premenná je objem kapitálu v súčasnom období  $k_t$ . Ukážeme si dve jednoduché metódy využívajúce Bellmanovu rovnicu (1.8) na riešenie takto formulovaného modelu.

### 2.1 Iterácia hodnotovej funkcie

Táto metóda je založená na konštrukcii sekvencií hodnotových funkcií a jej prislúchajúcich sekvencií riadiacich funkcií. Iterácia hodnotovej funkcie je založená na iterácii nasledovnej funkcie:

$$V_{j+1}(x, z) = \max_u \left\{ U(x, u) + \beta E[V_j(\tilde{x}, \tilde{z})] \right\}. \quad (2.3)$$

Algoritmus sa skladá z troch krokov:

- 1) nastavenie štartovacej hodnoty pre hodnotovú funkciu  $V_j \rightarrow V_0 = 0$ ,
- 2) využijeme vzťah (2.3) a vypočítame hodnotu ďalšej hodnotovej funkcie  $V_{j+1}(x, z)$ ,
- 3) ak  $V_{j+1} = V_j$ , resp. sú splnené zadané konvergenčné kritériá, tak algoritmus končí, inak aktualizujeme hodnotu  $V_j$  a prechádzame na krok 1.

Riešenie je v našom prípade nasledovné:

<sup>4</sup> Bellman (1957).

<sup>5</sup> Pre jednoduchosť Brock a Mirman (1972) predpokladajú, že miera opotrebenia kapitálu je rovná 1.

### **j = 0:**

Najprv si stanovme štartovaciu hodnotu pre hodnotovú funkciu  $V_0(\tilde{k}) = 0$ .

### **j = 1:**

Zapíšme si vzťah (2.3) pre náš problém ako

$$V_1(k) = \max_{c, \tilde{k}} \left\{ \ln c + \beta \left[ V_0(\tilde{k}) \right] \right\}, \quad (2.4)$$

vzhľadom na ohraničenie

$$k_{t+1} + c_t = Ak_t^\alpha. \quad (2.5)$$

Dosaďme štartovaciu hodnotu do hodnotovej funkcie (2.4) a dostaneme:

$$V_1(k) = \max_{c, \tilde{k}} \{ \ln c \}.$$

Túto maximalizačnú úlohu budeme maximalizovať vzhľadom na (2.5). Je jasné, že maximum takéhoto systému sa dosiahne keď sa všetky prostriedky vložia do spotreby  $c = Ak^\alpha$  a nič sa neušetrí (neinvestujú sa žiadne prostriedky do budúceho kapitálu)  $\tilde{k} = 0$ . Hodnota hodnotovej funkcie je potom  $V_1(k) = \ln c = \ln Ak^\alpha = \ln A + \alpha \ln k$ .

### **j = 2:**

Vzťah (2.3) je v druhom kroku nasledovný:

$$V_2(k) = \max_{c, \tilde{k}} \left\{ \ln c + \beta \left[ V_1(\tilde{k}) \right] \right\}, \quad (2.6)$$

vzhľadom na ohraničenie (2.5). Úlohu na viazaný extrém si vieme transformovať na úlohu na voľný extrém dosadením ohraničenia (2.5) do (2.6). Tiež si do tejto hodnotovej funkcie dosaďme hodnotu hodnotovej funkcie z predchádzajúcej iterácie  $V_1(\tilde{k}) = \ln A + \alpha \ln \tilde{k}$  vyjadrenú pre budúce obdobie

$$V_2(k) = \max_{\tilde{k}} \left\{ \ln(Ak^\alpha - \tilde{k}) + \beta \left[ \ln A + \alpha \ln \tilde{k} \right] \right\}. \quad (2.7)$$

Je to maximalizačná úloha na voľný extrém. Derivujme túto funkciu podľa jedinej kontrolnej premennej  $\tilde{k}$  a túto deriváciu položíme rovnú nule

$$\frac{\partial V_2(k)}{\partial \tilde{k}} = -\frac{1}{Ak^\alpha - \tilde{k}} + \frac{\alpha\beta}{\tilde{k}} = 0.$$

Z tejto derivácie si vyjadrime maximálnu hodnotu<sup>6</sup> pre kapitál v budúcom období

$\tilde{k} = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} Ak^\alpha$  a následne z rozpočtového ohraničenia (2.5) optimálnu hodnotu pre spotrebu

$c = \frac{1}{1 + \alpha\beta} Ak^\alpha$ . Ak si dosadíme tieto optimálne hodnoty do hodnotovej funkcie (2.6),

dostaneme hodnotu hodnotovej funkcie v druhej iterácii:

$$V_2(k) = \left[ \ln \frac{A}{(1 + \alpha\beta)} + \beta \ln A + \alpha\beta \ln \frac{\alpha\beta A}{1 + \alpha\beta} \right] + \alpha(1 + \alpha\beta) \ln k,$$

člen v zátvorke je len konštanta a pre zjednodušenie si ho označme ako  $C$  a teda

$$V_2(k) = C + \alpha(1 + \alpha\beta) \ln k. \quad (2.8)$$

---

<sup>6</sup> Druhá derivácia  $\frac{\partial^2 V_2(k)}{\partial \tilde{k}^2} = -\frac{1}{(Ak^\alpha - \tilde{k})^2} - \frac{\alpha\beta}{\tilde{k}^2} < 0$  je vždy menšia ako nula.



$j = \infty$ :

Takto by sme mohli pokračovať až kým by sme nesplnili zadané konvergenčné kritérium, alebo ako v tomto prípade, môžeme využiť vlastnosti nekonečného radu. V Tab.1 máme zobrazené jednotlivé iterácie až po  $j = \infty$ .

**Tab. 1:** Vývoj kontrolných premenných a hodnotovej funkcie

$j$	$c$	$\tilde{k}$	$V_j(k)$
0	–	–	0
1	$Ak^\alpha$	0	$B + \alpha \ln k$
2	$\frac{1}{1 + \alpha\beta} Ak^\alpha$	$\frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} Ak^\alpha$	$C + \alpha(1 + \alpha\beta) \ln k$
3	$\frac{1}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2} Ak^\alpha$	$\frac{\alpha\beta + (\alpha\beta)^2}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2} Ak^\alpha$	$D + \alpha(1 + \alpha\beta(1 + \alpha\beta)) \ln k$
...	...	...	...
$\infty$	$\frac{1}{1 - \alpha\beta} Ak^\alpha$	$\alpha\beta Ak^\alpha$	$E + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k$

**Zdroj:** Vlastné výpočty.

Vidíme, že sme sa dopracovali ku konečnému analytickému riešeniu. Kontrolné premenné spotreba a kapitál v budúcom období sú exaktne vyjadrené len pomocou stavovej premennej kapitál. Dopracovali sme sa ku analytickej forme riadiacej funkcie (1.4).

## 2.2 Metóda neurčitých koeficientov

Tento typ metódy je založený na jednoduchom princípe kedy odhadujeme riešenie pre hodnotovú funkciu  $V(x, z)$  a následne ho overujeme.

Z predchádzajúceho výpočtu vieme aký má mať funkčný tvar hodnotová funkcia (pozri Tab. 1), ale nepoznáme jej koeficienty. Návrh hodnotovej funkcie bude v tvare:

$$V(k) = E + F \ln k, \quad (2.9)$$

kde  $E, F$  sú neurčité koeficienty.

**Krok 1:** Použijeme odhad (2.9) a Bellmanovu rovnicu (2.7) aby sme určili predbežnú riadiacu funkciu. Bellmanova funkcia bude teda v tvare:

$$E + F \ln k = \max_{\tilde{k}} \left\{ \ln(Ak^\alpha - \tilde{k}) + \beta E + \beta F \ln(\tilde{k}) \right\}. \quad (2.10)$$

Maximalizujme pravú stranu funkcie (2.10) a dostaneme hodnotu riadiacej premennej vyjadrenej pomocou nedeterminovaných koeficientov:

$$\tilde{k} = \frac{\beta F}{1 + \beta F} Ak^\alpha. \quad (2.11)$$

**Krok 2:** Použijeme riešenie pre  $\tilde{k}$  (2.11) a späťme ho dosadíme do Bellmanovej rovnice (2.10):

$$E + F \ln k = \ln \left[ \left( 1 - \frac{\beta F}{1 + \beta F} \right) Ak^\alpha \right] + \beta E + \beta F \ln \left( \frac{\beta F}{1 + \beta F} Ak^\alpha \right),$$

a vyjadrieme si z tohto vzťahu nedeterminované koeficienty  $E, F$

$$E = \ln \left( \frac{A}{1 + \beta F} \right) + \beta E + \beta F \ln \left( \frac{\beta F A}{1 + \beta F} \right), \quad (2.12)$$

$$F = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}, \quad (2.13)$$

dosadíme (2.13) do (2.12) a získame vyjadrenie pre koeficient  $E$

$$E = \frac{1}{1 - \beta} \left[ \ln(A(1 - \alpha\beta)) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln(\alpha\beta A) \right]. \quad (2.14)$$

Teraz použijeme hodnotu nedeterminovaného koeficientu (2.13) a dosadíme ju do optimálneho vyjadrenia pre riadiacu premennú (2.11) a dostaneme finálnu hodnotu kapitálu pre budúce obdobie

$$\tilde{k} = \alpha\beta Ak^\alpha, \quad (2.15)$$

a z rozpočtového ohraničenia získame vyjadrenie pre spotrebu  $c = (1 - \alpha\beta) Ak^\alpha$ . Dosadením (2.13) a (2.14) do nášho odhadu pre hodnotovú funkciu by sme dostali:

$$V(k) = \frac{1}{1 - \beta} \left[ \ln(A(1 - \alpha\beta)) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln(\alpha\beta A) \right] + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k, \quad (2.16)$$

pričom tieto hodnoty sa zhodujú s našimi závermi z predchádzajúceho algoritmu.

## ZÁVER

Cieľom tohto príspevku bola aplikácia základných výpočtových metód dynamického programovania v jednoduchom makroekonomickom modeli využívajúcich Bellmanovu rovnicu. Ukázali sme si metódu založenú na iterácii hodnotovej funkcie a metódu neurčitých koeficientov na nájdenie funkčného tvaru hodnotovej funkcie. Pri zložitejších modeloch je uplatnenie týchto metód výpočtovo menej výhodné, ale Bellmanov princíp optimality na popísanie optimálneho správania dynamického systému v zložitejších modeloch je v odbornej literatúre bežným javom.

### Použitá literatúra

1. BELLMAN, R.E. 1957. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ. Republished 2003: Dover, ISBN 0-486-42809-5.
2. BROCK, W. A. - MIRMAN, L. J. 1972. Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case. In *Journal of Economic Theory*. 1972, No. 4, pp. 497-513.
3. GONG, G. – SEMMLER, W. 2004. *Stochastic Dynamic Macroeconomics: Theory and Empirical Evidence*. New York : Oxford University Press, 2004. 200 s. ISBN 0195301625.
4. JUDD, K. L. 1988. *Numerical methods in Economics*. USA: MIT Press. 1988. 633 s. ISBN 0-262-10071-1 .
5. LJUNGQVIST, L. - SARGENT, T. J. 2000. *Recursive Macroeconomic Theory*. Second edition. USA: MIT Press, 2000. 1002 s. ISBN 0-262-1945-1.

### Kontaktné údaje

Ing. Patrik Kupkovič

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

email: [patrik.kupkovic@gmail.com](mailto:patrik.kupkovic@gmail.com)

# PRINCÍP RIEŠENIA BIMATICOVEJ HRY POMOCOU GENETICKÉHO ALGORITMU<sup>1</sup>

## PRINCIPLE OF SOLVING BIMATRIX GAME USING GENETIC ALGORITHMS

*Peter Laca, Zuzana Čičková*

### **Abstrakt**

Použitie evolučných algoritmov na riešenie úloh z oblasti teórie hier vyžaduje použitie niektorých špeciálnych operácií zabezpečujúcich validitu získaných riešení. Príspevok je zameraný na riešenie bimaticovej hry genetickým algoritmom. Softvérová implementácia bola realizovaná v jazyku RUBY, pričom uvedený postup môže byť východiskom na riešenie rôznych iných typov úloh z oblasti teórie hier. Genetické algoritmy sú tak alternatívou k použitiu štandardných spôsobov riešenia.

*Kľúčové slová: genetické algoritmy, bimaticové hry*

### **Abstract**

Applying of evolutionary algorithms for solving problems in the field of game theory requires using some special operations, ensuring the validity of the obtained solutions. The paper is aimed at solving bimatrix games using genetic algorithms. Software implementation was realized in Ruby, while presented approach may be used in general for solving other types of problems in the field of game theory. Genetic algorithms may present an alternative to using standard techniques.

*Keywords: genetic algorithms, bimatrix games*

## **1 ÚVOD**

Evolučné algoritmy vo všeobecnosti predstavujú univerzálny nástroj na riešenie rôznych typov optimalizačných úloh. Riešenie úloh z oblasti teórie hier možno nájsť napr. v (Ismail a kol, 2007), kde sa autori zaoberali riešením hry dvoch hráčov s nulovým súčtom. Riešenie opakovanej väzenskej dilemy je uvedené v práci (Vilá, 2009). Viackritériálnu optimalizáciu v teórii hier využívali autori v publikáciách (Cheng a Li, 1996) a (Sim a kol.,2004). Tento príspevok je zameraný na riešenie bimaticovej hry štandardnými genetickými algoritmami, pričom prezentovaný spôsob riešenia bimaticových hier umožňuje použitie aj iných evolučných techník.

## **2 EVOLUČNÉ ALGORITMY**

Na rozdiel od klasických techník, evolučné algoritmy patria do množiny tzv. populačných prehľadávacích algoritmov, t. j. pracujú súčasne s množinou riešení. Ak využijeme terminológiu vlastnú evolučným technikám, sú založené na práci s *populáciou*

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

*jedincov*, kde každý *jedinec* (niekedy tiež používame pojem *chromozóm*) predstavuje aktuálne riešenie daného problému. V podstate je to množina argumentov účelovej funkcie, ktorej optimálnu hodnotu hľadáme. Z hľadiska fungovania algoritmov je dôležitý postupný vývoj, kooperácia a fungovanie celej *populácie* (vývoj populácie prebieha spravidla v diskrétnych krokoch).

Ak parametrom  $np$  označíme počet jedincov v populácii, potom populáciu jedincov v čase (kroku)  $t$  možno znázorniť ako množinu  $P^t = \mathbf{x}_1^t, \mathbf{x}_2^t, \dots, \mathbf{x}_{np}^t$ , kde  $\mathbf{x}_i^t$ ,  $i = 1, 2, \dots, np$  predstavuje  $i$ -tého jedinca v populácii. Populáciu tiež možno znázorniť ako maticu rozmeru  $np \times (d+1)$ , kde  $d$  predstavuje počet parametrov jedinca (zvyčajne je tento parameter totožný s počtom argumentov účelovej funkcie), pričom jednotlivé parametre jedinca sú závislé od typu riešenej úlohy. Každý jedinec je takto charakterizovaný  $d+1$ -rozmerným vektorom ( $d$  parametrov jedinca a jeho ohodnotenie). Potom stĺpce matice predstavujú jednotlivých jedincov a riadky sú parametrami tohto jedinca (v terminológii genetických algoritmov môžeme tiež použiť pojem *gén*). Každý jedinec v populácii je ohodnotený reálnym číslom, ktoré určuje jeho *vhodnosť* (*fitness* –  $f_c$ ). Funkcia musí vyhovovať podmienke, že jedincovi  $\mathbf{x}_i^t \in P^t$  s malou (veľkou) funkčnou hodnotou účelovej funkcie  $f(\mathbf{x}_i^t)$ , bude priradená malá (veľká) hodnota funkcie vhodnosti  $f_c(\mathbf{x}_i^t)$ . Na vlastnosti tejto funkcie sa vo všeobecnosti príliš veľké nároky nekladú (zvyčajne by stačilo porovnať dva jedince). Jednotlivé populácie jedincov často označujeme pojmom *generácie*. Nové riešenia vznikajú *rekombinačnými operátormi* (deterministicky), ktoré môžu byť *mutované*, t. j. je možná náhodná zmena v niektorom (alebo niekoľkých) z parametrov jedinca. Zmyslom evolučných algoritmov je náhrada populácie  $P^t$  novou populáciou  $P^{t+1}$  (tzv. evolučný vývoj) s cieľom identifikovať riešenie, pre ktoré účelová funkcia nadobúda extrém. Použitá reprezentácia jedincov v populácii a pravidlá náhrady populácií určujú, o aký druh evolučného algoritmu ide (genetické algoritmy, samoorganizujúci sa migračný algoritmus, diferenciálna evolúcia atď.).

Aj keď jednotlivé evolučné techniky sa navzájom líšia, ďalej uvedieme všeobecný princíp činnosti evolučného algoritmu formou pseudokódu (Čičková a kol, 2013), (Čičková a Brezina, 2008):

## **BEGIN**

*NASTAVENIE* riadiacich parametrov;

*INICIALIZÁCIA* populácie;

*VYHODNOTENIE* riešení;

**WHILE** (nie je splnená ukončujúca podmienka) **DO**

*SELEKCIA*

*GENEROVANIE POTOMKOV*

*NÁHRADA POPULÁCIE*

*VYHODNOTENIE* riešení;

**ENDWHILE**

*VYHODNOTENIE* výpočtu

## **END**

*Nastavenie riadiacich parametrov.* Evolučné algoritmy vo všeobecnosti závisia od riadiacich parametrov, ktoré sa líšia podľa druhu použitého algoritmu (počet generácií, miera mutácie atď.) Toto nastavenie býva zvyčajne realizované na základe experimentálnych výsledkov, resp. možno tiež použiť niektoré štatistické metódy.

*Inicializácia.* V tomto kroku je vhodným spôsobom vytvorená začiatková populácia jedincov

$P^0 = \mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_{np}^0$ . Obvykle sa populácia inicializuje ako množina náhodných riešení. Ak sú však dostupné apriórne informácie o riešenom probléme, možno vytvoriť  $P^0$  iným spôsobom, ktorý tieto informácie využíva (napr. využitím niektorej z klasických heuristických metód).

*Vyhodnotenie.* Táto operácia priradzuje každému jedincovi jeho vhodnosť  $f_c(\mathbf{x}_i^t)$ ,  $\mathbf{x}_i^t \in P^t$ . Obvykle algoritmus vyhodnotí najlepšieho jedinca z populácie alebo aj nejaké štatistické vlastnosti celej populácie (priemer, rozptyl atď.).

*Kontrola splnenia ukončujúcej podmienky.* Ukončujúca podmienka môže nadobúdať viacero tvarov, ide napr. o dosiahnutie stanovenej hodnoty účelovej funkcie  $f$ , alebo ak ohodnotenie najlepšieho jedinca  $f_c \mathbf{x}_{Best}^t$  je menší ako vopred zadaná konštanta, alebo ak rozdiel ohodnotenia najlepšieho  $f_c \mathbf{x}_{Best}^t$  a najhoršieho jedinca  $f_c \mathbf{x}_{Worst}^t$  v populácii je menší ako nejaké malé, vopred zadané číslo, resp. vyčerpanie stanovenej zadaného počtu generácií atď. Ak je splnená ukončujúca podmienka, algoritmus sa končí.

*Selekcia.* Pod selekciou rozumieme výber jedincov, ktorí budú vstupovať do reprodukcie. Títo jedinci sú označovaní ako rodičia, a sú zvyčajne vyberaní na základe ich ohodnotenia. Pomocou selekcie sa z  $np$  jedincov celej populácie vyberie  $s$  rodičov. Jediniec s vyššou vhodnosťou by mal mať vyššiu šancu na reprodukciu ako ten, ktorý bude mať menšiu vhodnosť.

*Generovanie potomkov.* V tomto kroku sa na základe výberu rodičov generuje množina potomkov. Inovatívnym prvkom v celom vývojovom procese je zmena v parametroch jedincov, realizovaná pomocou tzv. rekombinačných operátorov, ktoré sú obvykle dvoch typov: mutácia (vytvára nového jedinca malou náhodnou zmenou pôvodného jedinca) a kríženie (generuje jedného (alebo viac) jedincov z dvoch (alebo z viacerých) rodičov).

*Náhrada populácie.* Náhrada populácie predstavuje postup, ako z generácie  $P^t$  získame generáciu  $P^{t+1}$ . Spravidla je snahou zachovať konštantnú veľkosť populácie. Existuje viacero typov náhrad populácie, napr. *generačná*, *postupná* atď.

### 3 RIEŠENIE BIMATICOVÝCH HIER POMOCOU EVOLUČNÉHO ALGORIMU

Bimaticové hry možno vo všeobecnosti charakterizovať takto:

1. Vystupujú dvaja hráči
2. Každý z hráčov volí jednu z množiny stratégií s cieľom maximalizovať vlastnú platbu
3. Záujmy hráčov nemusia byť v priamom protiklade (neantagonistický konflikt)

Nech  $X$  a  $Y$  reprezentujú množiny stratégií prvého a druhého hráča. Hráči volia (nezávisle alebo po dohode) stratégie  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \times Y$ . V závislosti od výsledku hry získava prvý hráč platbu  $M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  a druhý hráč platbu  $M_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Riešením hry je rovnovážny bod  $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$  udávajúci čisté, resp. zmiešané stratégie oboch hráčov (pozri napr. Chobot a kol, 1991, Goga, 2013).

*Reprezentácia jedinca.* Riešenie bimaticových hier pomocou evolučných algoritmov vyžaduje voľbu vhodnej reprezentácie jedinca. Pri bimaticovej hre je jediniec reprezentovaný ako

usporiadaná dvojica stratégií prvého a druhého hráča. Ak chceme uplatniť štandardné operácie mutácie a kríženia pre genetické algoritmy, je vhodné túto reprezentáciu upraviť tak, aby jednotlivé stratégie vytvárali  $d$ -rozmerný vektor. Toto možno dosiahnuť operáciou spojenia vektorov vyjadrujúcich stratégie oboch hráčov.

*Transformácia neprípustných jedincov.* Použitie štandardných operácií kríženia a mutácie nezabezpečí vznik prípustných jedincov. Z toho dôvodu boli zvolené tieto typy opravy jedinca:

- Ak príslušná zložka stratégie hráča nie je z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ , táto zložka je nastavená na hodnotu 0.
- Ak je porušená podmienka jednotkového súčtu stratégií hráča, Zložky vektora sú potom upravené na pomerovo ekvivalentné hodnoty (predelením súčtom týchto zložiek).

Za fitness jedinca budeme ďalej považovať tzv. funkciu úspešnosti stratégií  $S^t \mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t$  v  $t$ -tej generácii, udávajúcu počet dvojíc všetkých stratégií  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \times Y$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}', \mathbf{y} \neq \mathbf{y}'$ , ktoré sú úspešnejšie ako stratégia  $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$  v generácii. Je zrejmé, že pre rovnovážny bod  $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$  platí:  $S^t \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 = 0$ .

Riešenie budeme ilustrovať na príklade. Nech  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Rovnovážna

stratégia takejto hry je :  $\mathbf{x}^T = \left( \frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right)$  a  $\mathbf{y}^T = \left( \frac{7}{13}, \frac{6}{13} \right)$ .

Počet jedincov bol nastavený na 32, pravdepodobnosť mutácie na 0,05 (použitá bola aditívna mutácia, pričom interval zmeny hodnôt bol  $\langle -0.1, 0.1 \rangle$ ) a pravdepodobnosť kríženia na 0,7 (použitá bola štandardné jednobodové kríženie). Praktická implementácia algoritmov bola realizovaná v programovacom jazyku Ruby.

Výsledky získané pomocou evolučného algoritmu (4 simulácie) sú uvedené v Tabuľke 1:

Sim.	Strat.1.hráča	Strat.2.hráča	Platba 1.hráča	Platba 2.hráča
1	(0,258;0,742)	(0,527;0,473)	0,746	2,36
2	(0,107;0,893)	(0,717;0,283)	-0,489	3,003
3	(0,293;0,707)	(0,538;0,462)	0,696	2,266
4	(0,039;0,961)	(0,534;0,466)	0,722	2,962

## 4 ZÁVER

Evolučné algoritmy predstavujú univerzálny rámec na riešenie širokého spektra optimalizačných úloh. Príspevok bol venovaný bimaticovým hrám riešených pomocou štandardných genetických algoritmov. Aj keď na riešenie uvedeného typu hier sú známe exaktné postupy, použitie genetických algoritmov predstavuje alternatívu hľadanie rovnovážnych stratégií. Uvedený postup môže byť považovaný za východisko hľadanie rovnovážnych stratégií aj pre iné typy hier (hry  $n$  hráčov a pod.). Ďalšou možnosťou zefektívnenia výpočtu by mohlo byť vytvorenie špeciálnych modifikácií niektorého z evolučných algoritmov, ktoré by boli usmernené priamo na riešenie rôznych úloh z oblasti teórie hier.

## **Použitá literatúra**

1. ČIČKOVÁ, Z., BREZINA, I., PEKÁR, J. 2013 Solving the Real-life Vehicle Routing Problem with Time Windows Using Self Organizing Migrating Algorithm. Ekonomický časopis. 2013 roč. 61, č. 5, s. 497–513.
2. ČIČKOVÁ, Z., BREZINA, I. 2008 An evolutionary approach for solving vehicle routing problem. In: Quantitative methods in economics multiple criteria decision making XIV. IURA EDITION, Bratislava, 2008, s.40–44.
3. GOGA, M. 2013. Teória hier, Iura Edition, Bratislava
4. CHENG F, LI D. 1996 Genetic algorithm and game theory for multiobjective optimization of seismic structures with/without control. In: Eleventh World Conference on Earthquake Engineering.
5. CHOBOT M., TURNOVEC, F. ULAŠÍN, V., 1991. Teória hier a rozhodovania. Alfa, Bratislava
6. ISMAIL I. A, EL RAMLY N. A., EL KAFRAWY M. M, NASEF M. M. 2007 Game theory using genetic algorithms. In: World Congress on Engineering vol 1 pp 61-64.
7. SIM K., LEE D, KIM J 2004 Game theory based coevolutionary algorithm: a new computational coevolutionary approach. In: International Journal of Control, Automatization, and Systems 2, pp. 463-474.
8. VILÀ X 2009 A Model-to-Model Analysis of the Repeated Prisoners' Dilemma> Genetic Algorithm vs. Evolutionary Dynamics In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Szstems. Springer Verlag.

## **Kontaktné údaje**

Bc. Peter Laca

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: [cickova@euba.sk](mailto:cickova@euba.sk)

# SIMULÁCIA MOŽNOSTÍ SVAR MODELU V PROGRAME EViews<sup>#</sup>

## SIMULATION OF POSSIBILITIES OF SVAR MODEL IN EViews

*Martin Lukáčik, Karol Szomolányi*

### Abstrakt

Jednou zo základných úloh každého makroekonomického analytika je porozumieť, ako ekonomika reaguje na otrasy, ktorým je neustále vystavená. Z tohto dôvodu bola vytvorená široká škála ekonomických modelov, ktoré im majú pomôcť pri tejto úlohe. Medzi ne patria aj vektorovo autoregresné modely. Tieto modely sú obľúbené z toho dôvodu, že sú vytvorené pomocou malého počtu kľúčových veličín, ktoré by mali zachytiť významné javy v systéme. Napriek ich zdanlivej jednoduchosti môže byť ich uchopenie v prostredí odborného softvéru problémom. Kvôli uľahčeniu tejto úlohy v prostredí programu EViews vysvetlíme jeho možnosti pomocou simulácie jednoduchého štruktúrneho vektorovo autoregresného modelu.

*Kľúčové slová: štruktúrny vektorovo autoregresný model, EViews, štruktúrne šoky*

### Abstract

One of the primary roles of each macroeconomic analyst is to understand how the economy responds to shocks, which is constantly exposed. A lot of economic models were created to help them in this task. Vector auto-regression models are one of these prominent models. These models are popular due to the fact that they are formed by a small number of key variables that should capture important events in the system. Despite their apparent simplicity it may be a problem to get them under control in an environment of professional software. To facilitate this task in the EViews we try to explain its possibilities by simulating a simple structural vector auto-regression model.

*Keywords: structural vector auto-regression model, EViews, structural shocks*

## 1 ÚVOD

Vektorovo autoregresné (VAR) modely našli uplatnenie v mnohých oblastiach ekonomickej analýzy. Stock a Watson (2001) uvádzajú, že makroekonometria robia v podstate štyri základné veci, pričom pri každej z nich sa dajú využiť vektorovo autoregresné modely. Prvou sférou záujmu je popis a súhrn makroekonomických údajov. Druhou oblasťou záujmu je tvorba makroekonomických prognóz. V týchto oblastiach považujú Stock a Watson VAR modely za osvedčený nástroj. Tretím poľom pôsobnosti je kvantifikácia štruktúry ekonomiky a poslednou oblasťou je vplyv na tvorcov hospodárskej politiky. V týchto oblastiach je využitie jednoduchých VAR modelov obmedzenejšie, lebo záleží aj na ďalších okolnostiach.

Vektorovo autoregresný model rádu  $p$ , v ktorom sú všetky premenné endogénne, nekointegrované (Lukáčiková, 2013) a každá je vysvetľovaná zvyšnými premennými toho istého obdobia a o 1 až  $p$  období oneskorenými hodnotami všetkých premenných modelu:

$$\Gamma \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{B}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t, \quad \boldsymbol{\Sigma}_u = E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t^T) = \text{diag} \quad (1)$$

<sup>#</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku".



nazývame štruktúrnym tvarom modelu. Štruktúrny model tvorí  $(p + 1)n^2$  parametrov, ale len  $n$  rozptylov, ak sú náhodné zložky  $u_i$  a  $u_j$  pre  $\forall i \neq j$  vzájomne nekorelované. Kovariančná matica náhodných zložiek  $u_i$  je vtedy diagonálnou maticou. Úpravami získame z (1) redukovaný tvar modelu, ktorého parametre odhadujeme metódou najmenších štvorcov:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Pi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{v}_t, \quad \boldsymbol{\Sigma}_v = E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T) \quad (2)$$

Skúmaním identifikácie rovníc modelu zistíme, že model je neidentifikovaný. Redukovaný tvar tvorí  $n + pn^2$  parametrov modelu a  $(n^2 + n)/2$  prvkov symetrickej kovariančnej matice náhodných zložiek  $v_i$  (viac o VAR modeloch pozri v Lukáčik, 2012a resp. 2012b)

Pri identifikácii si vyberáme medzi krátkodobými (Kilian, 2011 resp. Keating, 1992) a dlhodobými ohraničeniami (Blanchard a Quah, 1989), prípadne ich kombináciu. Softvérové riešenia vychádzajú zo vzťahu medzi štruktúrnymi a redukovanými šokmi, a to v tvare:

$$\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}_t \text{ resp. } \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}_t \quad (3)$$

Z neho odvodíme vzťah medzi kovariančnými maticami  $\boldsymbol{\Sigma}_u$  a  $\boldsymbol{\Sigma}_v$ :

$$\boldsymbol{\Sigma}_v = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Sigma}_u \boldsymbol{\Lambda}^T (\boldsymbol{\Gamma}^{-1})^T \text{ resp. po normalizácii, ak } \boldsymbol{\Sigma}_u = \mathbf{I}, \text{ platí } \boldsymbol{\Sigma}_v = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^T (\boldsymbol{\Gamma}^{-1})^T \quad (4)$$

Identifikácia sa v rôznych aplikáciách odlišuje spôsobmi, akými sa zavedú ohraničenia na parametre matíc  $\boldsymbol{\Gamma}$  a  $\boldsymbol{\Lambda}$ . Základnou stratégiou je Choleskeho dekompozícia, ktorá znamená trojuholníkovú  $\boldsymbol{\Gamma}$  a diagonálnu  $\boldsymbol{\Lambda}$ . Okrem nej je bežnou identifikačná schéma krátkodobých ohraničení líšiaca sa od Choleskeho dekompozície. Ohraničenia vyplývajú z apriórnej informácie. Takéto modely sú často preidentifikované a ohraničenia sa dajú testovať.

Pri dlhodobých ohraničeniach  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}$  nebýva ohraničená a pre maticu dlhodobých vplyvov štruktúrnych šokov na premenné platí:

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_1 - \boldsymbol{\Pi}_2 - \dots - \boldsymbol{\Pi}_p)^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\Pi}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}_t \quad (5)$$

Koeficienty  $\boldsymbol{\Pi}^{-1}$  sa získajú z odhadu redukovaného tvaru a následne sa tu zavedú ohraničenia.

Prepisom modelu (2) pomocou polynómu operátora oneskorenia získame tvar:

$$\boldsymbol{\Pi}(L) \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\Pi}_1 L \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\Pi}_2 L^2 \mathbf{y}_t - \dots - \boldsymbol{\Pi}_p L^p \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi}_0 + \mathbf{v}_t \quad (6)$$

kde  $\boldsymbol{\Pi}(L) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_1 L - \boldsymbol{\Pi}_2 L^2 - \dots - \boldsymbol{\Pi}_p L^p$ . Každý stacionárny VAR proces sa dá Woldovou dekompozíciou zapísať v tvare kľzavých priemerov nekonečného rádu:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Pi}(L)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}(L)^{-1} \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{v}_{t-k}, \text{ kde } \boldsymbol{\Theta}_0 = \mathbf{I}, \lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\Theta}_k = \mathbf{0} \quad (7)$$

Jednotlivé Woldove koeficienty získame riešením  $\boldsymbol{\Pi}(L) \boldsymbol{\Theta}(L) = \mathbf{I}$ , z ktorého vyplýva  $\boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Pi}_1$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_2 = \boldsymbol{\Pi}_1 \boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2$  až  $\boldsymbol{\Theta}_k = \boldsymbol{\Pi}_1 \boldsymbol{\Theta}_{k-1} + \dots + \boldsymbol{\Pi}_p \boldsymbol{\Theta}_{k-p}$ . Závislosť od štruktúrnych šokov je:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Pi}(L)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}(L)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{u}_{t-k}, \text{ kde } \boldsymbol{\Psi}_0 = \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \text{ a } \boldsymbol{\Psi}_k = \boldsymbol{\Theta}_k \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \quad (8)$$

Prvky matice  $\boldsymbol{\Psi}_k$ , teda  $\boldsymbol{\Psi}_{ij}^{(k)}$  predstavujú reakciu  $i$ -tej premennej na jednotkovú zmenu  $j$ -tého štruktúrneho šoku po  $k$  obdobiach. Krátkodobý multiplikátor okamžitej reakcie prvej premennej na šok z druhej rovnice je označený  $\boldsymbol{\Psi}_{12}^{(0)}$  a krátkodobý multiplikátor reakcie po jednom období  $\boldsymbol{\Psi}_{12}^{(1)}$ . Zobrazením  $\boldsymbol{\Psi}_{12}^{(k)}$  s meniacim sa  $k$  získame funkciu reakcie prvej premennej na impulz z druhej rovnice. Ich spočítaním získame dlhodobý multiplikátor.

## 2 SIMULÁCIA SVAR MODELU

Vzťahy medzi štruktúrnym a redukovaným tvarom vektorovo autoregresného modelu rovnako ako medzi štruktúrnymi šokmi  $u_i$  a šokmi redukovaného tvaru  $v_i$  sú zrejmé a jednoducho pochopiteľné. Problém nastane, keď sa majú tieto modely použiť v aplikáciách s využitím softvéru, v našom prípade programu EViews. Odhad redukovaného tvaru, ktorý získame zadaním špecifikácie obsahujúcej zoznam premenných a použitých oneskorení, je postačujúci a zrozumiteľný, ak sa VAR model využíva na prognózovanie. Ak je však potrebné získať štruktúrny tvar modelu a následne analyzovať dôsledky štruktúrnych šokov, dochádza často k dezinterpretáciám dosiahnutých výsledkov. Preto prezentujeme všetky výpočty na simulovanom štruktúrnym vektorovom modeli, v ktorom všetko, čo nás zaujíma, dopredu vypočítame. Následne ukážeme výstupy získané bežným postupom z odhadov. Porovnanie ozrejní výsledky ponúkané programom EViews.

Nech simulovaný štruktúrny vektorovo autoregresný model rádu 2 má tvar:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,1 \end{bmatrix}}_{\beta_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix}}_{y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-2} \\ x_{t-2} \end{bmatrix}}_{y_{t-2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{ty} \\ u_{tx} \end{bmatrix}}_{u_t}, \quad \Sigma_u = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

z neho získame vektorovo autoregresný model v redukovanom tvare:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,45 \end{bmatrix}}_{\pi_0 = \Gamma^{-1}\beta_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,25 \end{bmatrix}}_{\Pi_1 = \Gamma^{-1}B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix}}_{y_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,05 & 0,1 \end{bmatrix}}_{\Pi_2 = \Gamma^{-1}B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-2} \\ x_{t-2} \end{bmatrix}}_{y_{t-2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{ty} \\ v_{tx} \end{bmatrix}}_{v_t}, \quad \Sigma_v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1,25 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}\Lambda\Sigma_u\Lambda^T(\Gamma^{-1})^T} \quad (10)$$

a tvar kľzavých priemerov nekonečného rádu závisiaci od štruktúrnych šokov:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}}_{y_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1,163 \\ 1,14 \end{bmatrix}}_{\mu = \Pi(L)^{-1}\pi_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}}_{\Psi_0 = \Gamma^{-1}\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{ty} \\ u_{tx} \end{bmatrix}}_{u_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,25 & 0,1 \\ 0,325 & 0,25 \end{bmatrix}}_{\Psi_1 = \Pi_1\Gamma^{-1}\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{t-1,y} \\ u_{t-1,x} \end{bmatrix}}_{u_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,183 & 0,045 \\ 0,231 & 0,183 \end{bmatrix}}_{\Psi_2 = (\Pi_1\Pi_1 + \Pi_2)\Gamma^{-1}\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{t-2,y} \\ u_{t-2,x} \end{bmatrix}}_{u_{t-2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,183 & 0,045 \\ 0,231 & 0,183 \end{bmatrix}}_{\Psi_3 = (\Pi_1\Pi_1\Pi_1 + 2\Pi_1\Pi_2 + \Pi_3)\Gamma^{-1}\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{t-3,y} \\ u_{t-3,x} \end{bmatrix}}_{u_{t-3}} + \dots$$

Na simuláciu v programe EViews sme zvolili pracovný súbor so 100 pozorovaniami. Aby sme pracovali s časovými radmi, pre ktoré sú VAR modely určené, zvolili sme frekvenciu štvrťročných údajov (100 pozorovaní je napr. od 24.4.2001 do 31.12.2014). Najprv nastavíme parametre simulácie: počet premenných, počet oneskorení a počet generovaných náhodných zložiek. Program je koncipovaný tak, aby sa dal simulovaný model jednoduchými úpravami zmeniť podľa vlastných požiadaviek, preto je na tieto parametre viazaných viacero štruktúr.

Následne deklarujeme všetky premenné potrebné na simuláciu pomocou redukovaného tvaru modelu – premenné modelu  $y$  a  $x$  aj šoky redukovaného tvaru  $v_y$  a  $v_x$ . Keďže simulujeme autoregresné procesy závisiace od predchádzajúcich hodnôt, potrebujeme si vytvoriť rovnaký počet štartovacích hodnôt pre každú premennú, ako je rád VAR modelu.

Ďalej vytvoríme matice parametrov štruktúrneho tvaru modelu  $\mathbf{G}$  a  $\mathbf{B}_i$  spolu s vektorom  $\mathbf{b}_0$ . Pre štruktúrny tvar definujeme kovariančnú maticu  $\mathbf{S}_u$ , ktorá sa rovnako ako diagonálna matica  $\Lambda$  (kvôli zjednodušeniu) rovná jednotkovej matici. Z parametrov štruktúrneho tvaru vypočítame matice parametrov redukovaného tvaru  $\mathbf{P}_i$ , vektor  $\mathbf{p}_0$  a kovariančnú maticu  $\mathbf{S}_v$ .

Podľa kovariančných matíc generujeme matice náhodných zložiek – šokov. Pri štruktúrnych šokoch sú to nezávislé vektory náhodných hodnôt z rozdelenia  $N(0,1)$  usporiadané do matice  $\mathbf{U}$ . Vypočítame Choleskeho dekompozíciu kovariančnej matice  $\mathbf{S}_v$ , ktorou vynásobíme maticu  $\mathbf{U}$  a takto získame maticu šokov redukovaného tvaru  $\mathbf{V}$  s požadovanou kovariančnou maticou  $\mathbf{S}_v$ . Stĺpce matice  $\mathbf{V}$  prevedieme na vopred pripravené časové rady  $v_y$  a  $v_x$ .

Premenné modelu  $y$  a  $x$  vypočítame podľa redukovaného tvaru (10). V programe EViews sa na výpočet dynamických jednorovnicových autoregresných modelov dá využiť dátumový ofset definovaný cez príkaz výberu pozorovaní *smp1*. Ale v prípade vektorových previazaných autoregresných modelov sa musí využiť objekt typu *model*. Ten výpočty vytvára do premenných s príponou *\_0*. Preto ich následne prevedieme do pôvodných premenných  $y$  a  $x$ .

```
wfcreate(wf=simulacia) D7 4/24/2001 12/31/2014 ' vytvorenie pracovného súboru s dennými údajmi
' NASTAVÍME PARAMETRE SIMULÁCIE
!n = 2 ' počet premenných
!p = 2 ' počet oneskorení = rád VAR modelu
!t = @obsrange ' počet generovaných !n-tíc náhodných zložiek = počet pozorovaní
' DEKLARÁCIA VŠETKÝCH PREMENNÝCH MODELU A NASTAVENIE ŠTARTOVACÍCH HODNÔT
series y ' deklaruje časový rad 1. premennej y
series x ' deklaruje časový rad 2. premennej x
series vy ' deklaruje časový rad 1. šoku redukovaného tvaru modelu vy
series vx ' deklaruje časový rad 2. šoku redukovaného tvaru modelu vx
group gv vy vx ' vytvoríme skupinu šokov redukovaného tvaru, ktoré sa po generovaní doplnia
smp1 @first @first+!p-1 ' nastavíme výber pozorovaní pre prvých !p štartovacích hodnôt
y=@nrnd ' generujeme generátorom náhodných čísel prvých !p hodnôt y z N(0,1)
x=2*@nrnd ' generujeme generátorom náhodných čísel prvých !p hodnôt x z N(0,√2)
' NASTAVENIE PARAMETROV ŠTRUKTURÁLNEHO VAR MODELU
sym Su=@identity(!n) ' vytvoríme kovariančnú maticu štruktúrnych šokov = jednotkovej matici
matrix(!n,!n) G ' deklaruje maticu štruktúrnych parametrov G pre premenné v čase t
G.fill 1,-0.5,0,1 ' naplníme maticu údajmi postupne po stĺpcoch
vector(!n) b0 ' deklaruje vektor štruktúrnych parametrov – absolútne členy
b0.fill 0.7,0.1 ' naplníme vektor údajmi
for li = 1 to !p ' začiatok cyklu na deklarovanie matic štruktúrnych parametrov Bi
    matrix(!n,!n) Bli ' deklaruje maticu štruktúrnych parametrov pre premenné v čase t-i
next ' koniec cyklu
B1.fill 0.2,0.1,0.1,0.2 ' naplníme maticu údajmi postupne po stĺpcoch
B2.fill 0.1,0,0,0.1 ' naplníme maticu údajmi postupne po stĺpcoch
' VÝPOČET PARAMETROV REDUKOVANÉHO VAR MODELU
matrix Ginv=@inverse(G) ' vypočítame inverznú maticu k matici G
vector p0=Ginv*B0 ' vypočítame vektor redukovaných parametrov – absolútne členy
matrix pom=@identity(!n) ' definujeme pomocnú maticu na výpočet dlhodobých multiplikátorov
for li = 1 to !p ' začiatok cyklu na výpočet matic parametrov Pi
    matrix(!n,!n) Pli=Ginv*Bli ' vypočítame maticu redukovaných parametrov Pi
    pom=pom-Pli ' odpočítame od pomocnej matice vypočítanú maticu parametrov Pi
next ' koniec cyklu
sym Sv= Ginv*Su*@transpose(Ginv) ' vypočítame kovariančnú maticu šokov redukovaného tvaru
matrix longr=@inverse(pom)*Ginv ' vypočítame maticu dlhodobých multiplikátorov
' VYGENEROVANIE ŠOKOV ŠTRUKTURÁLNEHO AJ REDUKOVANÉHO TVARU MODELU
matrix(!t,!n) U ' deklaruje maticu štruktúrnych šokov
nrnd(U) ' generujeme maticu štruktúrnych šokov náhodnými hodnotami z rozdelenia N(0,1)
matrix CH = @transpose(@cholesky(Sv)) ' vypočítame Choleskeho dekompozíciu matice Sv
matrix V = U*CH ' vypočítame maticu šokov redukovaného tvaru
mtos(V,gv) ' stĺpce matice V prevedieme na časové rady vy a vx tvoriace skupinu gv
' VÝPOČET HODNÔT PREMENNÝCH VAR MODELU
model m ' vytvoríme objekt model na dopočítanie premenných podľa redukovaného tvaru
m.append y=P0(1)+P1(1,1)*y(-1)+P1(1,2)*x(-1)+P2(1,1)*y(-2)+P2(1,2)*x(-2)+vy ' rovnica 1. prem.
m.append x=P0(2)+P1(2,1)*y(-1)+P1(2,2)*x(-1)+P2(2,1)*y(-2)+P2(2,2)*x(-2)+vx ' rovnica 2. prem.
m.solve ' riešime model pre zadaný výber pozorovaní, výsledky sa zapíšu do premenných s _0
smp1 @first+!p @last ' nastavíme výber pozorovaní pre výpočet
y=y_0 ' prevedieme hodnoty z vypočítanej premennej y_0 do časového radu 1. premennej y
x=x_0 ' prevedieme hodnoty z vypočítanej premennej x_0 do časového radu 2. premennej x
smp1 @all ' vrátime výber pozorovaní pre všetky hodnoty pracovného súboru
```

### 3 ODHAD SVAR MODELU

Po získaní premenných odhadneme vektorovo autoregresný model v redukovanom tvare a následne zadáme krátkodobé alebo dlhodobé ohraňenia na parametre štruktúrneho modelu. Ich kombinácia v programe EViews nie je povolená. Po odhade zapíšeme získané výsledky.

```
' ODHAD PARAMETROV REDUKOVANÉHO A NÁSLEDNE ŠTRUKTURÁLNEHO VAR MODELU
var simul.ls 1 lp y x @ c ' odhadneme model v redukovanom tvare
' prvý spôsob odhadu SVAR s krátkodobým ohraňením cez text
simul.cleartext(svar) ' vymažeme okno zápisu ohraňení SVAR modelu textom
simul.append(svar) @e1 = C(1)*@u1 ' zadáme ohraňenia medzi šokmi @e1 = vy, @e2 = vx
simul.append(svar) @e2 = C(2)*@e1 + C(3)*@u2 ' zadáme ohraňenia @u1 = uy, @u2 = ux
simul.svar(rtype=text) ' odhad štruktúrnych parametrov
' druhý spôsob získania totožného odhadu SVAR s krátkodobým ohraňením zadaný cez maticu
matrix(!n,!n) mata ' deklarujeme maticu, kde sa zapíšu ohraňenia a čo odhadujeme v Gama
mata.fill 1,na,0,1 ' zadáme jednotlivé prvky matice Gama, tam kde chceme odhad uvedieme text na
matrix(!n,!n) matb ' deklarujeme maticu, kde sa zapíšu ohraňenia a čo odhadujeme v Lambda
matb.fill na,0,0,na ' zadáme prvky matice Lambda, tam kde chceme odhad uvedieme text na
freeze(sr2_matrix) simul.svar(rtype=patsr,namea=mata,nameb=matb) ' odhad štrukt. parametrov
' prvý spôsob odhadu SVAR s dlhodobým ohraňením cez text
simul.cleartext(svar) ' vymažeme okno zápisu ohraňení SVAR modelu textom
simul.append(svar) @LR1(@u2) = 0 ' ohraňenie pre dlhodobé multiplikátory, 1.premenná na 2.šok
freeze(lr1_text) simul.svar(rtype=text) ' odhad štruktúrnych parametrov
' druhý spôsob získania totožného odhadu SVAR s dlhodobým ohraňením zadaný cez maticu
matrix(!n,!n) matlr ' deklarujeme maticu, kde sa zapíšu ohraňenia dlhodobých multiplikátorov
matlr.fill na,na,0,na ' zadáme prvky matice Longr, tam kde chceme odhad uvedieme text na
freeze(lr2_matrix) simul.svar(rtype=patlr,namelr=matlr) ' odhad štruktúrnych parametrov

' ZÁPIS VÝSLEDKOV
matrix outp = simul.@coefmat ' zápis výstupu odhadu všetkých parametrov do jednej matice
for li = 1 to !n ' začiatok cyklu deliaceho výstup odhadu do jednotlivých matíc Pi
  for lj = 1 to !p ' začiatok vnoreného cyklu deliaceho výstup odhadu do jednotlivých matíc Pi
    vector q!li = @rowextract(outp,!p*(!li-1)+!lj) ' rozdelenie matice výstupu na riadkové vektory
    next ' koniec vnoreného cyklu
  next ' koniec cyklu
vector q0 = @rowextract(outp,!n*!p+1) ' zápis riadku s odhadom konštánt do riadkového vektora
vector Pi0 = @transpose(q0) ' vytvorenie stĺpcového vektora konštánt
for lj = 1 to !p ' začiatok cyklu spájajúceho vektory z výstupu do príslušných matíc
  matrix(!n,!n) Pi!lj ' deklarácia j-tej matice Pi redukovaných parametrov
  for li = 1 to !n ' začiatok vnoreného cyklu spájajúceho vektory z výstupu do príslušných matíc Pi
    colplace(Pi!lj,@transpose(q!li),!li) ' naplnenie j-tej matice Pi stĺpcovými vektormi parametrov
  next ' koniec vnoreného cyklu
next ' koniec cyklu
matrix gama=simul.@svaramat ' zápis odhadnutej matice štruktúrnych parametrov Gama
matrix lambda=simul.@svarbmat ' zápis odhadnutej matice Lambda
matrix sigmav=simul.@svarrcov ' zápis odhadnutej kovariančnej matice redukovaných šokov
simul.impulse(!p*!n,imp=struct,t,se=a) 1 2 @ 1 2 ' výpočet funkcie reakcie na impulz štrukt. šokov
matrix PSI0=simul.@impfact ' zápis matice okamžitých multiplikátorov (funguje iba po výpočte IRF)
for li=1 to !p ' začiatok cyklu výpočtu matíc krátkodobých oneskorených multiplikátorov
matrix(!n,!n) PSI!li=0 ' deklarácia matice krátkodobých multiplikátorov oneskorených o i-té obdobie
  for lj=1 to !i ' začiatok vnoreného cyklu výpočtu matíc krátkodobých oneskorených multiplikátorov
    !k=!i-lj ' vytvorenie pomocnej premennej
    matrix PSI!li=Pi!lj*PSI!k+PSI!i ' výpočet matice krátkodobých multiplikátorov Psi s indexom i
  next ' koniec vnoreného cyklu
next ' koniec cyklu
matrix gamalambda=simul.@lrrsp ' zápis odhadnutej matice Gama*Lambda
simul.makesresids ry rx ' vytvorenie časových radov reziduálov redukovaného tvaru modelu
group gr ry rx ' vytvoríme skupinu reziduálov redukovaného tvaru – reprezentujú šoky reduk. tvaru
stomna(gr,vres) ' prevedieme skupinu časových radov na maticu reziduálov redukovaného tvaru
matrix ures=gama*@transpose(vres) ' dopočítame maticu reziduálov (odhad šokov) štrukt. modelu
```

## 4 ZÁVER

Porovnaním odhadnutých a simulovaných hodnôt jednotlivých matíc vidíme, akým spôsobom sa dajú odhadovať štruktúrne vektorovo autoregresné modely. Vzhľadom na jedno generovanie hodnôt náhodných čísel pre štruktúrne šoky, z čoho vychádzala celá uvedená simulácia, budú medzi simulovanými a odhadnutými hodnotami parametrov isté nepatrné rozdiely. Opakované generovanie štruktúrnych šokov a celého postupu v zmysle simulácie Monte Carlo nám po spriemerovaní výsledkov jednotlivých simulácií potvrdí zvolené hodnoty parametrov.

### Použitá literatúra

1. BLANCHARD, O. – QUAH, D. 1989. The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. In: American Economic Review, roč. 79, 1989, s. 655-673.
2. KEATING, J. 1992. Structural Approaches to Vector Autoregressions. Review, Federal Reserve Bank of St. Louis, issue Sep, 1992, s. 37-57.
3. KILIAN, L. 2011. Structural Vector Autoregressions. Centre for Economic Policy Research, 2011, Discussion Paper 8515.
4. LUKÁČIK, M. 2012a. Vektorovo autoregresné modely v ekonometrii. In: Ekonomika a informatika, roč. X, 2012, č. 1, s. 130-144.
5. LUKÁČIK, M. 2012b. Štruktúrne vektorovo autoregresné modely v ekonometrii. In: Ekonomika a informatika, roč. X, 2012, č. 2, s. 67-83.
6. LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Vektorovo autoregresné modely a ich aplikácie v makroekonomickej analýze. 1. vyd. Bratislava: EKONÓM, 2013.
7. LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Englova-Grangerova procedúra a dynamická metóda najmenších štvorcov. In: AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach, zborník 15. medzinárodnej vedeckej konferencie. Bratislava: EKONÓM, 2013.
8. STOCK, J. H. – WATSON, M. W. 2001. Vector Autoregressions. In: Journal of Economic Perspectives, vol. 15, 2001, s. 101-115.

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 822  
email: lukacik@euba.sk, szomolan@euba.sk

# BAYESOVSKÝ ODHAD VAR MODELU V PROGRAME EViews<sup>#</sup>

## BAYESIAN ESTIMATE OF VAR MODEL IN EViews

*Adriana Lukáčiková, Martin Lukáčik*

### Abstrakt

Vektorovo autoregresné modely predstavujú užitočný ekonometrický nástroj na analýzu dynamických ekonomických problémov. Kvôli problému preparametrizovania sa pri nich využíva bayesovský odhad, ktorý žiadnemu parametru neprisuduje príliš veľkú váhu. Naším cieľom je vysvetliť uvedené súvislosti a poukázať na možnosti takýchto odhadov v EViews-e.

*Kľúčové slová: prior, posterior, bayesovský odhad, EViews, VAR model, prognózovanie*

### Abstract

Vector autoregressive models are useful econometric tool for the analysis of dynamic economic problems. Because of the problem of over-parametrisation we use Bayesian approach to estimate them. It does not assign too much weight for any parameter. Our aim is to explain this background, and demonstrate the possibility of such estimates in EViews.

*Keywords: prior, posterior, bayesian estimate, EViews, VAR model, forecasting*

## 1 ÚVOD

Vektorovo autoregresné (VAR) modely sú užitočným ekonometrickým nástrojom na analýzu dynamických ekonomických problémov. VAR modely sa používajú na skúmanie interakcií medzi dôležitými ekonomickými premennými bez zavádzania množstva ohraničení, ako je to bežné v simultánných viacrovnicových modeloch. Kvôli ich výborným vlastnostiam sa využívajú aj pri prognózovaní. Pre veľký počet parametrov, ktoré sa v nich odhadujú, je ich hlavným problémom preparametrizovanie (pozri Lukáčik a Lukáčiková, 2013).

Štruktúrny vektorovo autoregresný model rádu  $p$ , v ktorom sú všetky premenné endogénne a každá je vysvetľovaná zvyšnými premennými toho istého obdobia a o 1 až  $p$  období oneskorenými hodnotami všetkých premenných modelu, môžeme zapísať v tvare:

$$\Gamma \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{B}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t \quad (1)$$

Štruktúrny model tvorí  $(p+1)n^2$  parametrov a  $n$  rozptylov, ak sú náhodné zložky  $u_i$  a  $u_j$  pre  $\forall i \neq j$  vzájomne nekorelované. Vynásobením (1) zľava  $\Gamma^{-1}$  získame redukovaný tvar modelu:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\Pi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \boldsymbol{\Pi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{v}_t \quad (2)$$

Skúmaním identifikácie rovníc modelu zistíme, že model je neidentifikovaný. Jednoznačný postup na znižovanie počtu odhadovaných parametrov neexistuje. V  $n$ -rozmernom  $VAR(p)$  modeli sa odhaduje  $n + pn^2$  parametrov modelu a  $(n^2 + n)/2$  prvkov kovariančnej matice náhodných zložiek, čo pri preparametrizovaní znamená veľký počet nevýznamných parametrov. Vzhľadom na vysoký stupeň multikolinearity sa tu nedajú využiť  $t$ -štatistiky, ktoré sú podhodnotené (pozri Lukáčik, 2012a resp. 2012b).

<sup>#</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 044EU-4/2015 "Vypracovanie monografie Bayesovská ekonometria pre prax a študentov postgraduálneho štúdia".

Pri odhade VAR modelu býva mnoho parametrov štatisticky nevýznamných. Ako najčastejšie riešenie sa odporúča ohraničenie parametrov. To môže vychádzať z apriórnych informácií, ale tie väčšinou nemáme, preto potrebujeme nájsť nejakú stratégiu, pomocou ktorej budeme postupovať pri pridávaní nulových ohraňení. Pre veľký počet existujúcich rozdielnych podmnožín ( $2^{n \times n \times p} - 1$ ) plne špecifikovaného  $n$ -rozmerného VAR( $p$ ) modelu sa nepreverujú všetky odhady, ale postupne sa pridávajú nulové ohraňenia a porovnávajú modely na základe informačných kritérií. V rámci programu EViews (Lag Exclusion Tests) môžeme zaviesť nulové ohraňenia na celé matice  $\Pi_i$  v (2), čím sa počet preverovaných modelov zmenší na  $2^p$ . Problémom je, že sa ohraňia aj parametre, ktoré by sa nemali.

Lütkepohl (2005) odporúča stratégiu zhora nadol, kde v každej rovnici začína  $p$ -tým oneskorením poslednej premennej, potom predposlednej až prvej, ďalej sa prejde k  $(p - 1)$ -ému oneskoreniu poslednej premennej atď. Vždy sa porovná posledný akceptovaný model s ohraňeným, a ten, ktorý je lepší z hľadiska kritéria, sa akceptuje. Preverovanie prejde postupne cez všetky rovnice. Pre výpočtovú náročnosť ponúka aj druhú stratégiu zdola nahor, kde sa v individuálnej rovnici určí maximálne oneskorenie pre prvú premennú  $p_1$ , to sa zafixuje a už nemení, určí sa maximálne oneskorenie pre druhú premennú  $p_2$ , až pre  $n$ -tú premennú  $p_n$  a takto sa prejdú všetky rovnice.

Inou možnosťou je bayesovský odhad. Ten považuje skutočnú štruktúru základného súboru za neznámu, a preto žiadnej konkrétnej hodnote parametra nepripisuje príliš veľkú váhu, napríklad tým, že pre ňu zavedie nulové ohraňenie ako pri klasickom postupe. Táto neistota je zahrnutá do tvaru apriórneho rozdelenia pravdepodobnosti parametrov modelu, tzv. priora.

## 2 BAYESOVSKÉ ODHADY

Pri definícii pravdepodobnosti sa v klasickej tzv. frekventistickej teórii využíva pojem početnosti. Za predpokladu, že náhodný jav  $A$  možno ľubovoľný počet krát opakovať, potom podiel počtu pokusov, pri ktorých nastal jav ku počtu všetkých pokusov  $n$  sa nazýva relatívna početnosť javu  $f_n(A)$ . Pravdepodobnosťou náhodného javu nazývame limitný vzťah:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) \quad (3)$$

Pre pravdepodobnosť platia základné axiómy:

1. pravdepodobnosť nemožného javu sa rovná 0, teda  $P(\emptyset) = 0$  (kde  $\emptyset$  je nemožný jav)
2. pravdepodobnosť istého javu sa rovná 1, teda  $P(\Omega) = 1$  (istý jav = výberový priestor)
3. pravdepodobnosť zjednotenia dvoch ľubovoľných náhodných javov  $A$  a  $B$  sa rovná súčtu pravdepodobností nastania týchto javov samostatne, zmenšenému o pravdepodobnosť ich súčasného nastania, teda  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ; ak ide o nezávislé javy, platí pre pravdepodobnosť vzťah  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , lebo  $P(A \cap B) = 0$
4. pravdepodobnosť  $P(A|B)$ , že nastane udalosť  $A$  za podmienky, že nastala udalosť  $B$ , sa nazýva podmienená pravdepodobnosť nastania javu  $A$  za podmienky  $B$ , pričom platí:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kde } P(B) \neq 0.$$

Pomocou podmienenej pravdepodobnosti sa dá spätne vyjadriť pravdepodobnosť súčasného nastania javov  $A$  a  $B$  vzťahom  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$ .

Z tohto vzťahu vieme jednoducho vyjadriť Bayesovu vetu:  $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ .

Greenberg (2013) vysvetľuje bayesovský princíp na známom príklade hádzania mince. Nech  $y = 1$ , ak padne na minci hlava, ináč  $y = 0$ . Potom pravdepodobnosť  $P(y = 1) = \theta$  považuje za konštantnú pre každý pokus. V tomto modeli je  $\theta$  parameter a  $y$  sú dáta, pričom  $y$  má Bernoulliho rozdelenie. Ak chceme porozumieť hodnote  $\theta$  na základe experimentu, hodíme mincu  $n$ -krát a dostaneme k dispozícii  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Vtedy sa na hodnotu  $\theta$  nepozeralo ako na daný parameter z intervalu od 0 po 1, ale ako na neznámu náhodnú premennú, ktorej môžeme priradiť pravdepodobnostné rozdelenie. Toto apriórne rozdelenie pravdepodobnosti  $\pi(\theta)$  je priradené bez poznania údajov, teda je to *prior*. Apriórne rozdelenie odráža naše názory na rozdelenie  $\theta$  resp. sa v ňom zohľadňujú teoretické predpoklady, či predchádzajúce empirické práce. Toto rozdelenie závisí od parametrov, ktoré nazývame hyperparametre.

Bayesovský prístup sa koncentruje na tzv. *posterior*, teda aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti  $\pi(\theta|y)$  náhodnej premennej  $\theta$ , ktoré je podmienené pozorovanými dátami  $y$ . Aj keď jednotlivé údaje  $y_i$  sú diskrétné (0 alebo 1) a parameter  $\theta$  je spojitý, môžeme nastavením  $A = \theta$  a  $B = y$  zapísať Bayesovu vetu pre všeobecné  $y$  v tvare:

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{f(y)} \quad \text{resp.} \quad \pi(\theta|y) \propto f(y|\theta)\pi(\theta) \quad (4)$$

kde označenie  $\propto$  znamená proporcionálne. Potom na ľavej strane máme aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti  $\theta$  a na pravej strane je súčin  $f(y|\theta)$ , čo je funkcia hustoty pravdepodobnosti pre dáta  $y$ , ak hodnota parametra je  $\theta$  – teda funkcia vierohodnosti a apriórneho rozdelenia pravdepodobnosti  $\pi(\theta)$ . Zjednodušené vynásobením priora vierohodnosťou získame výraz proporcionálny posterioru. Ako najčastejšie rozdelenie sa pre prior zvyknú uvažovať rozdelenia gama, inverzná gama alebo beta, lebo nastavením len dvoch hyperparametrov  $\alpha$  a  $\beta$  sa dajú zobraziť rôzne priebehy rozdelení s ohraničeniami.

Ciccarelli a Rebutti (2003) prezentujú bayesovský princíp odhadu priamo pre VAR model, ktorý sa pomocou Kroneckerovho súčinu matíc a vektorizácie dá zapísať v tvare:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_t \quad (5)$$

kde  $\mathbf{X}_t = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{W}_{t-1})$ ,  $\mathbf{W}_{t-1} = (\mathbf{y}_{t-1}^T, \mathbf{y}_{t-2}^T, \dots, \mathbf{y}_{t-p}^T)^T$  a  $\boldsymbol{\beta} = \text{vec}(\boldsymbol{\Pi}_1, \boldsymbol{\Pi}_2, \dots, \boldsymbol{\Pi}_p)$ . Neznámymi parametrami modelu sú  $\boldsymbol{\beta}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Vierohodnostná funkcia (funkcia hustoty pravdepodobnosti pre dáta  $\mathbf{y}$ , ak sú dané hodnoty parametrov  $\boldsymbol{\beta}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$ ) má tvar:

$$L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-T/2} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \sum_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}) \right\}}$$

a združené apriórne rozdelenie pravdepodobnosti  $\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Združené aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti parametrov pre hodnoty parametrov  $\boldsymbol{\beta}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$  sa získa Bayesovým pravidlom:

$$p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}) = \frac{p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})}{p(\mathbf{y})} \quad \text{resp.} \quad p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}) \propto L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (6)$$

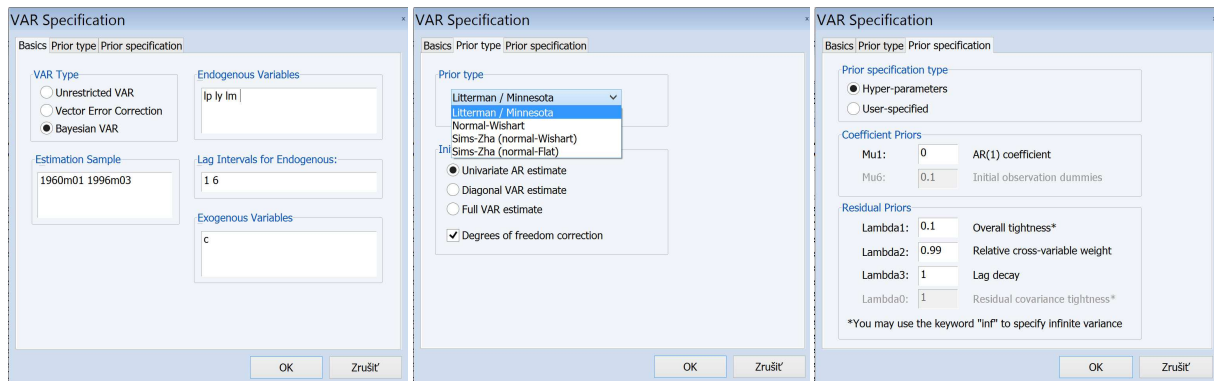
Ukážkou špecifikácie prioru môže byť Littermanova (1986) špecifikácia pravidiel pre makroekonomické časové rady, v ktorých očakáva: prítomnosť trendu; posledné hodnoty v sebe nesú viac informácie o súčasnosti ako dávnejšie hodnoty radu a minulé hodnoty radu v sebe nesú viac informácie o súčasnosti ako minulé hodnoty ostatných radov. Do bayesovskej analýzy sa to premietne takto: priemer parametrov priradených všetkým oneskoreniam okrem prvého sa rovná 0; rozptyl koeficientov inverzne závisí od oneskorenia a parametrom  $i$ -tej premennej v  $j$ -tej rovnici sa priradí menší rozptyl ako  $j$ -tej premennej. Každá z týchto informácií sa dá špecifikovať konkrétnymi hodnotami hyperparametrov.



### 3 BAYESOVSKÝ ODHAD VAR MODELU V PROGRAME EViews

V programe EViews až do verzie 7 vyžadovali pokusy o bayesovský odhad VAR modelov programovacie schopnosti, lebo celý postup si musel používateľ naprogramovať samostatne. Verziou 7 sa začala v programe éra doplnkov (Add-ins) a hneď jedným z prvých bol doplnok BVAR na bayesovský odhad parametrov VAR modelu. Spočiatku vyžadoval inštaláciu štatistického programu R s nainštalovaným balíkom príkazov MSBVAR. Neskôr to už nebolo potrebné. Odskúšaním funkcionality doplnku sa tvorcovia programu rozhodli do verzie 8 doplniť tento spôsob odhadu medzi doteraz ponúkané (VAR a VEC) priamo do objektu VAR.

Obrázok 1: Možnosti bayesovského odhadu VAR modelu v programe EViews

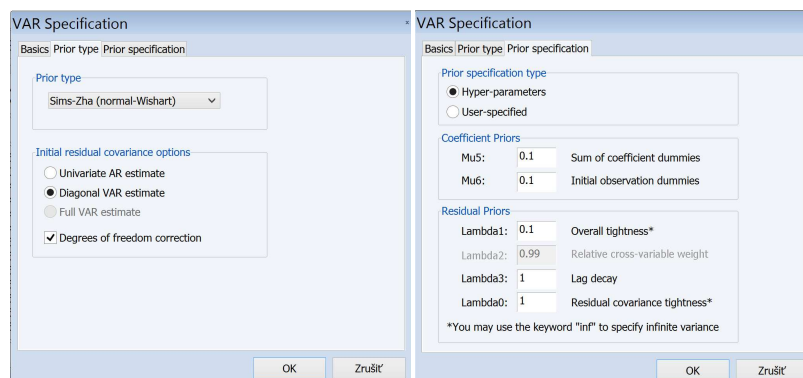


Ako vidíme z obr. 1 pri bayesovskom odhade VAR modelu v programe EViews máme k dispozícii štyri rôzne typy priorov, ktoré sa líšia v tom, čo ovplyvňujú ich hyperparametre:

1. Littermanov (Minnesotský) prior, v ktorom má  $\beta$  normálne rozdelenie a  $\Sigma$  je fixné;
2. Normal-Wishartov prior, v ktorom má  $\beta$  normálne rozdelenie a  $\Sigma$  má Wishartov prior;
3. Simsov-Zhaov prior, v ktorom má  $\beta$  normálne rozdelenie a  $\Sigma$  má Wishartov prior;
4. Simsov-Zhaov prior, v ktorom má  $\beta$  normálne rozdelenie a  $\Sigma$  má neinformatívny prior.

Z množstva príkladov, ktoré sa ponúkajú z tejto oblasti, sme si vybrali analýzu, ktorú prezentovali Leeper, Sims a Zha (1996). Aby získali dostatočné množstvo údajov na bayesovskú analýzu, rozhodli sa skúmať mesačné údaje od januára 1960 do marca 1996, čo je vyše 400 údajov v každom rade. Z ich rozsiahlej analýzy skúmajúcej mnohé varianty vyberáme VAR model, kde v trojrozmernom systéme je využitý rad logaritmov sezónne očisteného *CPI* označený *LP*, rad logaritmov sezónne očisteného *HNP* označený *LY* a rad logaritmov sezónne očistenej peňažnej zásoby *LM*. Autori štúdie sa rozhodli pre 6 oneskorení. Ich prior vychádza z diagonálnej kovariančnej matice náhodných zložiek  $\mathbf{v}_t$  a trojuholníkovej matice  $\Pi_1$ . Preto sme zvolili na odhad Simsov-Zhaov prior a kovariančná matica sa odhadne s plnou špecifikáciou, v ktorej sa vynulujú mimodiagonálne prvky (špecifikácia je na obr. 2).

Obrázok 2: Bayesovský odhad s priorom Simsa a Zhaa a diagonálnou kovariančnou maticou



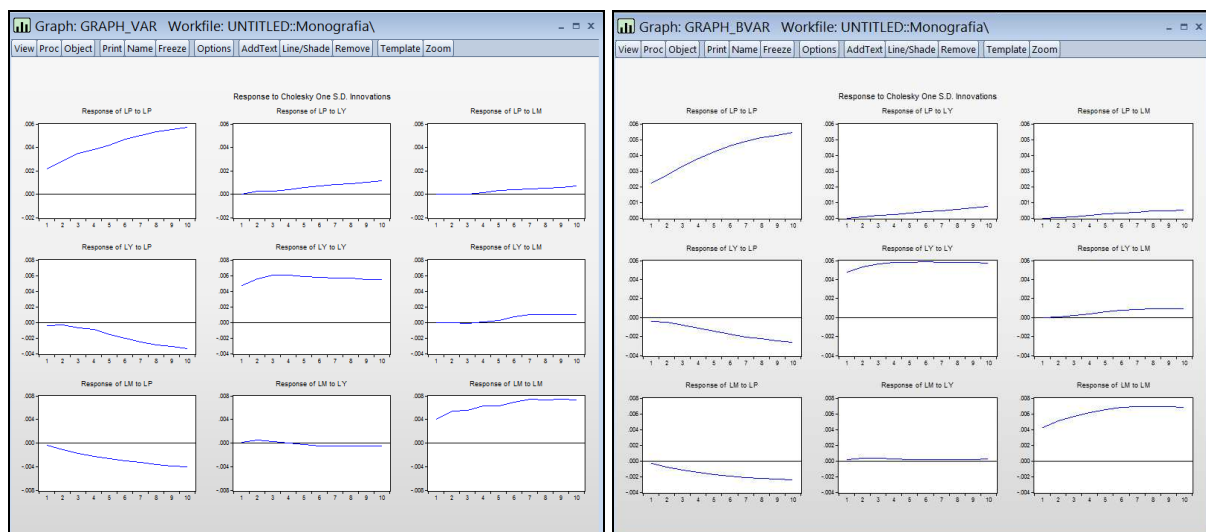
Leeper, Sims a Zha konštatujú, že bayesovský odhad v porovnaní s klasickým neovplyvňuje charakter výsledkov. Po odhade trojrozmerného VAR(6) modelu s uvedenými premennými klasickým aj bayesovským odhadom sme získané výsledky usporiadali do tabuľky na obr. 3. Štatisticky významné parametre (ich podiel odhadu na štandardnej odchýlke je v absolútnej hodnote väčší ako 2) sú pri oboch typoch odhadov označené hviezdíčkou. V časti bayesovských odhadov sme označili orámovaním parametre, ktoré boli štatisticky významné aj klasickým odhadom – vidíme, že tu sú to všetky významné parametre. Podfarbené parametre v časti rozdiely, ktoré upozorňujú na rozdiel medzi znamienkami v oboch typoch odhadov, sa potom týkajú vždy len nevýznamných parametrov bayesovského odhadu.

Obrázok 3: Porovnanie klasicky a bayesovsky odhadnutých parametrov VAR modelu

	Klasický odhad			Bayesovský odhad			Rozdiely		
	LP	LY	LM	LP	LY	LM	LP	LY	LM
LP(-1)	1,3490*	0,0524	-0,2685*	1,2627*	-0,0331	-0,1607*	0,0863	0,0855	-0,1078
LP(-2)	-0,1766*	-0,2420	0,1570	-0,0797	-0,0600	0,0939	-0,0968	-0,1820	0,0631
LP(-3)	-0,1659*	0,1732	0,0908	-0,0682	0,0138	0,0474	-0,0978	0,1595	0,0434
LP(-4)	0,0669	-0,1997	0,0308	-0,0372	0,0095	0,0234	0,1041	-0,2092	0,0074
LP(-5)	0,0873	0,1851	0,0300	-0,0344	0,0353	0,0067	0,1218	0,1498	0,0234
LP(-6)	-0,1616*	0,0309	-0,0325	-0,0435*	0,0338	-0,0033	-0,1181	-0,0029	-0,0292
LY(-1)	0,0534*	1,1737*	0,0737	0,0194	1,1104*	0,0303	0,0340	0,0633	0,0434
LY(-2)	-0,0768*	-0,0990	-0,1359*	-0,0166	-0,0537	-0,0459	-0,0602	-0,0453	-0,0900
LY(-3)	0,0326	-0,1041	0,0235	0,0031	-0,0415	-0,0037	0,0295	-0,0626	0,0272
LY(-4)	0,0208	-0,0033	0,0072	0,0017	-0,0111	0,0094	0,0190	0,0078	-0,0022
LY(-5)	-0,0334	0,0289	0,0405	-0,0016	-0,0026	0,0108	-0,0318	0,0315	0,0297
LY(-6)	0,0096	0,0073	0,0051	0,0001	-0,0004	0,0083	0,0095	0,0076	-0,0032
LM(-1)	0,0062	-0,0033	1,3286*	0,0057	0,0171	1,1940*	0,0005	-0,0203	0,1346
LM(-2)	-0,0192	-0,0237	-0,3971*	0,0028	0,0075	-0,0959	-0,0220	-0,0312	-0,3011
LM(-3)	0,0573	0,0904	0,2725*	0,0047	0,0113	-0,0218	0,0527	0,0792	0,2943
LM(-4)	-0,0346	-0,0386	-0,3300*	-0,0065	-0,0047	-0,0386	-0,0281	-0,0339	-0,2913
LM(-5)	-0,0159	0,0730	0,3242*	-0,0060	-0,0116	-0,0171	-0,0099	0,0845	0,3412
LM(-6)	0,0040	-0,1002	-0,2110*	-0,0034	-0,0202	-0,0307*	0,0074	-0,0800	-0,1803
C	-0,0346*	-0,0127	-0,0706*	-0,0337*	-0,0004	-0,0444*	-0,0010	-0,0123	-0,0262

Aplikácia rozdelenia predchodcu podľa Leeper, Sims a Zha ovplyvní len hladší priebeh funkcií reakcie na impulz. Zobrazením reakcií na impulz o veľkosti jednej štandardnej odchýlky na obr. 4 získaných klasickým odhadom (grafy vľavo) a bayesovským odhadom (grafy vpravo) môžeme tento záver iba potvrdiť, lebo ako vidíme, nedošlo k žiadnej výraznej zmene, iba priebeh funkcií reakcie na impulz získaných bayesovským odhadom je hladší.

Obrázok 4: Porovnanie funkcií reakcie na impulz modelu odhadnutého klasicky a bayesovsky



## 4 ZÁVER

Napriek doplneniu možnosti bayesovského odhadu parametrov VAR modelu do programu EViews, ktoré treba len uvítať, si treba uvedomiť, že v rámci ponúkaných apriórnych rozdelení pravdepodobnosti sa zameriava len na analyticky vypočítateľné združené priory, ktorých posteriory majú rovnaký typ rozdelenia ako priory. Neumožňuje všeobecné na simuláciách založené odhady ako napríklad metóda MCMC, ktorú používajú vo svojich prácach pri RBC a DSGE napr. Szomolányi (2013) alebo Benkovič a Kupkovič (2013). Preto sa na zložitejšie bayesovské odhady musí využívať ako doposiaľ program MatLAB alebo R.

Napriek týmto obmedzeným možnostiam sa na praktickom probléme potvrdili známe závery Leepera, Simsa a Zhaa o nie výraznej zmene odhadu pri bayesovskom odhade v porovnaní s klasickým, pričom priebeh funkcií reakcie na impulz získaných bayesovským odhadom je hladší. Ak to doplníme o konštatovanie Canovu (2007), podľa ktorého bayesovské VAR modely ponúkajú lepšie prognózy ako VAR modely odhadnuté klasicky a v niektorých prípadoch dokonca lepšie ako autoregresné jednorovnicové modely s kľzavými priemermi, tak pre prognostikov bol v programe EViews pridaný ďalší cenný nástroj.

### Použitá literatúra

1. BENKOVIČ, M. – KUPKOVIČ, P. 2013. Dynamický stochastický model všeobecnej rovnováhy malej otvorenej ekonomiky. In: Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, zborník príspevkov. Bratislava: EKONÓM, 2013.
2. CANOVA, F. 2007. Methods for Applied Macroeconomic Research. Princeton University Press, 2007.
3. CICCARELLI, M. – REBUCCI, A. 2003. Bayesian VARs: A Survey of the Recent Literature with an Application to the European Monetary System. IMF Working Paper 03/102.
4. GREENBERG, E. 2013. Introduction to Bayesian Econometrics, Cambridge University Press, 2013.
5. LEEPER, E.M. – SIMS, C.A. – ZHA, T. 1996. What Does Monetary Policy Do? In: Brookings Papers on Economic Activity, roč. 2, 1996, s. 1-63.
6. LITTERMAN, R. 1986. Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions – Five Years of Experience. In: Journal of Business and Economic Statistics, roč. 4, 1986, s. 25-38.
7. LUKÁČIK, M. 2012a. Vektorovo autoregresné modely v ekonometrii. In: Ekonomika a informatika, roč. X, 2012, č. 1, s. 130-144.
8. LUKÁČIK, M. 2012b. Štruktúrne vektorovo autoregresné modely v ekonometrii. In: Ekonomika a informatika, roč. X, 2012, č. 2, s. 67-83.
9. LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Vektorovo autoregresné modely a ich aplikácie v makroekonomickej analýze. 1. vyd. Bratislava: EKONÓM, 2013.
10. LÜTKEPOHL, H. 2005. New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Berlín: Springer, 2005.
11. SZOMOLÁNYI, K. 2013. Model slovenského hospodárskeho cyklu. In: Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, zborník príspevkov. Bratislava: EKONÓM, 2013.

### Kontaktné údaje

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 829, (421 2) 67 295 822  
email: adriana.lukacikova@euba.sk, lukacik@euba.sk

# PANELOVÉ DÁTA KRAJÍN V4

## PANEL DATA OF V4 COUNTRIES

*Lucia Mieresová*

### **Abstrakt**

Tento príspevok sa venuje analýze panelových dát pre krajiny V4 (tzn. Česká republika, Maďarsko, Poľsko, Slovenská republika). V úvode sa venuje vstupu do problematiky, následné vzťahu spotreby a hrubého domáceho produktu a popisu jednotlivých modelov. V závere sú zhrnuté konkrétne výsledky odhadov na základe výstupov z programu EViews a takisto zhodnotenie, ktorý z odhadov REM alebo FEM je vhodnejší.

**Keľúčové slova:** Panelové dáta, Spotreba, HDP, FEM, REM

### **Abstract**

This article is dedicated to the analysis of panel data for the V4 countries (ie. Czech Republic, Hungary, Poland, Slovak Republic). The introduction is devoted to this topic in generally, and following part - relation of consumption and gross domestic product and a description of each model. In the end, concrete results of estimates are summarized, based on the results of the program EViews and also we can assess which of the estimates REM or FEM is more appropriate.

**Keywords:** Panel data, Consumption, GDP, FEM, REM

This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15, „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

## **1 PANELOVÉ DÁTA KRAJÍN V4**

V posledných desaťročiach výrazne rastie záujem o problematiku analýzy panelových dát. Jednak vo výskume sociálnych väzieb obyvateľstva, ale najmä pri riešení otázok vo sfére podnikovej, národnej alebo medzinárodnej. Aplikácie teda nájdeme na mikro aj makroúrovni. V ekonómii je analýza panelových dát používaná napríklad pri štúdiu správania firiem a miezd pracovníkov počas určitého časovo ohraničeného obdobia. Analýzu panelových dát by sme mohli definovať ako štúdium jednotlivých subjektov a ich vzájomných vzťahov, u ktorých periodicky vykonávame zisťovanie charakteristických znakov a ich následné hlbšie preskúmanie. Panelové údaje poskytujú oproti jednoduchým vecne priestorovým údajom niekoľko nesporných výhod. Predovšetkým získame veľké množstvo pozorovaní, ktoré nie sú v konvenčných časových radoch dostupné. Zloženie panelových dát umožňuje navrhovať oveľa zložitejšie a realistické modely v porovnaní s použitím typických údajov v časových radoch. Dôvodom je, že obvykle nie sú príliš agregované ponúkajú zohľadnenie údajov subjektu, ktoré sa menia v priebehu času.

Analýzovaným súborom môže byť jednak celá populácia, ale aj súbor náhodným spôsobom vygenerovaný a pôvodnú generáciu dobre reprezentujúci. Nutnou podmienkou pre možnosť definovania panelu a následnej analýzy panelových dát je najmä tá skutočnosť, že súbor jednotiek sa v čase nemení, "vypadnuté" jednotky sa nenahrádzajú novými.

Skúmanie panelových dát využíva modelový spôsob riešenia, v ktorom sa objavujú jednak prvky analýzy časových radov, ale aj prvky regresnej analýzy. Panelová analýza teda v podstate predstavuje ďalší stupeň modelácie, ktorá mnohonásobne zhodnocuje zvyčajne

náročne získané informácie o určitej skutočnosti. Panelová analýza nie je doteraz detailne teoreticky popísaná, jednak z dôvodu krátkej histórie a jednak z dôvodu náročnosti skúmania<sup>1</sup>.

Existujú rôzne modely a prístupy, ako možno analyzovať panelové dáta. Za hlavné môžeme považovať, spojený regresný model (pool), model fixných vplyvov FEM a model náhodných vplyvov REM.

## 1.2 Analýza panelových dát pre krajiny V4

Pre demonštrovanie analýzy panelových dát boli zvolené krajiny V4 (Česká republika, Maďarsko, Poľsko, Slovenská republika) a vzťah spotreby a hrubého domáceho produktu.

Pre analýzu sme si teda zvolili nasledovnú rovnicu:

$$SPOT_t = \beta_0 + \beta_1 HDP_t + u_t$$

Vychádzame z predpokladu, že spotreba domácnosti je ovplyvňovaná disponibilným príjmom (vyjadreným HDP).

Údaje pre spomínané krajiny boli dostupné pre roky 1995 až 2013 a v úlohe budeme pracovať s kvartálnymi dátami. Všetky dáta sú kvartálne z obdobia 1995Q1 až 2013Q4, sezónne neočistené. Hodnoty všetkých premenných pochádzajú zo stránky eurostat. Všetky premenné sú v bežných cenách a miliónoch EUR. Hladina významnosti je 0,05.

### 1.1.1 Zber dát a ich úprava pre prácu s panelovými dátami

Ako prvý krok bolo nutné získané údaje usporiadať v programe Microsoft Excel do požadovaného tvaru, čo znamená usporiadať dáta HDP a SPOT všetkých krajín len do dvoch stĺpcov podľa časového sledu a pre každú krajinu definujeme stĺpec pre umelé premenné, ktorý obsahuje hodnotu 1, práve pre riadky danej krajiny a pre zvyšné hodnotu 0.

## 1.2 Analýza panelových dát v programe EViews

Za najjednoduchší prípad, ktorým je spojený regresný model (pool), je považovaný naivný prístup, v ktorom sa predpokladá, že absolútny člen aj všetky parametre pri vysvetľujúcich premenných sú pre všetky prierezové jednotky rovnaké. Spojený model má všeobecný tvar:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \alpha + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \alpha + X\beta + u$$

### Model s fixnými efektmi (FEM)

Model fixných vplyvov FEM na rozdiel od spojeného regresného modelu predpokladá rôznorodosť prierezových jednotiek v absolútnych členoch. Model FEM má tvar:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = D\alpha + X\beta + u$$

<sup>1</sup> NOVÁK, P., 2006: Analýza panelových dat. Fakulta informatiky a štatistiky, Vysoká škola ekonomická, Praha

Môžeme vidieť, že v modeli predstavujú stĺpce matice D umelé premenné  $D_1$  až  $D_n$ , ktoré nadobúdajú hodnotu  $d_{it} = 1$  pre  $i$ -tú prierezovú jednotku, a hodnotu  $d_{it} = 0$  pre všetky ostatné prierezové jednotky.

### Model s náhodnými efektmi (REM)

Odlíšnosť medzi prierezovými jednotkami sa v modeli FEM uvažovala ako posun regresnej funkcie. V prípade ak jednotlivé vplyvy pôsobiace na prierezové jednotky nie sú korelované s vysvetľujúcimi premennými celého panelu, tak je vhodnejšie uvažovať jednotlivé absolútne členy pre prierezové údaje ako náhodne rozdelené. Model REM má tvar:

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \dots + \beta_k x_{itk} + \varepsilon_i + u_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \dots + \beta_k x_{itk} + v_{it},$$

Spojením náhodnej zložky pozorovania prierezovej jednotky  $u_{it}$  a náhodnej zložky špecifickej pre prierezovú jednotku  $\varepsilon_i$  dostávame náhodnú zložku  $v_{it}$ . Absolútny člen  $\alpha$  predstavuje v modeli priemer prierezových absolútnych členov a náhodná zložka špecifická pre prierezovú jednotku je náhodnou odchýlkou od tohto priemeru<sup>2</sup>.

### 1.3 Výsledky odhadov pre jednotlivé krajiny V4

Nasledujúce časť príspevku prezentuje dosiahnuté výsledky odhadov panelových dát pre V4.

Na základe výstupu z programu Eviews množme pre jednotlivé krajiny povedať:

#### Česká republika - Model s fixnými efektmi (FEM)

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala -1793.567 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Českej republiky) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 1.737244 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP v ČR zvýši o 1 milión eur, tak spotreba v ČR sa zvýši o 2.304864 (1.737244 + 0.567682) milióna eur.

#### Česká republika - Model s náhodnými efektmi (REM)

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala - 747.3657 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Českej republiky) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 1.692480 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP v ČR zvýši o 1 milión eur, tak spotreba v ČR sa zvýši o 2.164929 (1.692480 + 0.472449) milióna eur.

#### Maďarsko - Model s fixnými efektmi (FEM)

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala 2330.068 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Maďarska) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 0.495313 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP v Maďarsku zvýši o 1 milión eur, tak spotreba v Maďarsku sa zvýši o 0.498753 (0.495313 + 0.003440) milióna eur.

---

<sup>2</sup> LUKÁČIK M., LUKAČIKOVÁ A., SZOMOLANYI K., 2010: Panelové dáta v programe EViews, Ekonomická univerzita v Bratislave, Bratislava

### **Maďarsko - Model s náhodnými efektmi (REM)**

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala – 315.9203 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Maďarska) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 1.746140 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP v Maďarsku zvýši o 1 milión eur, tak spotreba v Maďarsku sa zvýši o 1.799791 (1.746140 + 0.053651) milióna eur.

### **Poľsko - Model s fixnými efektmi (FEM)**

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala - 2330.068 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Poľska) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 2.070453 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP v Poľsku zvýši o 1 milión eur, tak spotreba v Poľsku sa zvýši o 1.730615 (2.070453 + 0.003440) milióna eur.

### **Poľsko - Model s náhodnými efektmi (REM)**

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala – 2486.686 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Poľska) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 2.163421 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP v Poľsku zvýši o 1 milión eur, tak spotreba v Poľsku sa zvýši o 1.678039 (2.163421 – 0.485382) milióna eur.

### **Slovensko - Model s fixnými efektmi (FEM)**

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala – 789.5952 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Slovenska) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 1.762264 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP na Slovensku zvýši o 1 milión eur, tak spotreba na Slovensku sa zvýši o 2.02297 (1.762264 + 0.260706) milióna eur.

### **Slovensko - Model s náhodnými efektmi (REM)**

- V prípade, ak by bolo HDP nulového charakteru, spotreba by predstavovala 196.8854 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP krajín V4 (bez Slovenska) zvýši o 1 milión eur, tak spotreba krajín V4 sa zvýši o 1.707854 milióna eur.
- V prípade, že sa HDP na Slovensku zvýši o 1 milión eur, tak spotreba na Slovensku sa zvýši o 1.911797 (1.707854 + 0.203943) milióna eur.

### **Hausmanov test pre voľbu medzi modelmi FEM a REM**

Na základe výstupu a hodnôt tabuliek v programe EViews môžeme povedať, že hodnota štatistiky  $H > \chi^2_c$ , preto môžeme zamietnuť nulovú hypotézu o konzistentnosti oboch estimátorov a vhodnejším modelom pre odhad zvoleného modelu panelových dát krajín V4 je model FEM.

**Záver:**

Na základe vyššie uvedených výstupov môžeme výsledné hodnoty interpretovať nasledovne:

Hodnoty spotreby v prípade ak by HDP nadobúdalo hodnotu nula, sú kladné, čo znamená že aj pri nulovej produkcii HDP by ľudia naďalej spotrebovali tovary a služby.

Ak by sme sa pozerali na dané krajiny jednotlivo, môžeme povedať, že v prípade zvýšenia HDP o jednotku, nastane približne dvojnásobne zvýšenie spotreby (okrem modelu FEM pre Maďarsko), čo by pravdepodobne viedlo k zadlžovaniu domácnosti ak by mali iba zdroje z domácej ekonomiky. keďže príjem plynúci z domácej produkcie v danej krajine by nestačil na pokrytie nákladov spotreby domácnosti danej krajiny.

Analogicky to platí aj pri zohľadnení krajín V4 spoločne, kedy opäť zvýšenie spotreby prevyšuje zvýšenie HDP. Aj keď prevýšenie nie je také výrazne ako v spomenutom predchádzajúcom prípade, opäť by situácia smerovala pravdepodobne k zadlžovaniu domácnosti.

**Použitá literatúra:**

BREITUNG, J., PESARAN, M. H., 2005: Unit Roots and Cointegration in Panels. *IEPR working paper*.

LUKÁČIK M., LUKAČIKOVÁ A., SZOMOLANYI K., 2010: Panelové dáta v programe EViews, Ekonomická univerzita v Bratislave, Bratislava

NOVÁK, P., 2006: Analýza panelových dat. Fakulta informatiky a štatistiky, Vysoká škola ekonomická, Praha

WIMMER G. jr, 2012: Odhad regresných parametrov lineárneho zmiešaného modelu pre longitudinálne dáta, Seminár PAST Matematicko-fyzikálna fakulta, Univerzita Karlova v Prahe, Praha

**Kontaktné údaje:**

Ing. Lucia Mieresová  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
email: [mieresova.euba@gmail.com](mailto:mieresova.euba@gmail.com)



# EKONOMETRICKÝ ODHAD PARAMETROV PRODUKČNEJ FUNCIE MODELU VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY<sup>1</sup>

## THE ECONOMETRIC ESTIMATION OF THE PRODUCTION FUNCTION PARAMETERS IN THE COMPUTABLE GENERAL EUILIBRIUM MODEL

*Veronika Miřková*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá ekonometrickým odhadom parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy. Zameriavame sa na odhad parametrov produkčnej funkcie v modeli uzavretej ekonomiky Slovenskej republiky. Využité sú štvrťročné dáta od 1995q1 do 2014q4 so zameraním na verejný sektor: verejná správa a obrana, povinné sociálne poistenie, vzdelávanie, verejné zdravotníctvo a sociálna práca.

*Kľúčové slová: ekonometrický odhad, CGE model, Slovensko, verejný sektor*

### Abstract

The paper deals with an econometric approach to the computable general equilibrium model parameters. We concern to the parameters of the production function in the model of closed economy for the Slovak republic. The dataset consists of quarterly data for Slovakia from 1995q1 to 2014q4, the sector focused is the public sector - public administration and defense, compulsory social security, education, human health and social work activities.

*Keywords: CGE model, econometric estimation, Slovakia, public sector*

## 1 JEDNODUCHÝ MODEL VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY

Model všeobecnej ekonomickej rovnováhy (CGE – Computable general equilibrium), ktorým sa zaoberáme v tomto príspevku má jednoduchú štruktúru, nakoľko ide o model uzavretej ekonomiky bez sektorov zahraničia a vlády a bez uvažovania vzťahov medzispotreby. Voľba takejto štruktúry je z dôvodu jednoduchosti ekonometrického odhadu parametrov daného modelu. Model je podrobne diskutovaný v [2].

### 1.1 Štruktúra modelu

Model bol inšpirovaný prácou Hansa Löfgrena [1], na úvod našej práce s CGE ekonometriou sme zvolili model s jednoduchou štruktúrou. Model pozostáva zo siedmich beehaviorálnych vzťahov a z troch rovnovážnych podmienok. V tomto príspevku sa venujeme len odhadu parametrov produkčnej funkcie, ktorá má nasledovný tvar

$$QA_{\alpha} = ad_{\alpha} \cdot \prod_{f \in F} QF_{f\alpha}^{\alpha_{f\alpha}} \quad \alpha \in A \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol vďaka podpore Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky grantom VEGA 1/0197/13: Ekonometrický odhad parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy s dezagregáciou verejného sektora.

kde:  $ad_\alpha$  parameter efektívnosti v produkčnej funkcii pre aktivitu  $a$ ,  
 $\alpha_{fa}$  podiel pridanej hodnoty výrobného faktora  $f$  na aktivite  $a$ ,  
 $QA_\alpha$  úroveň aktivity  $a$ ,  
 $QF_{fa}$  dopyt aktivity  $a$  po výrobnom faktore  $f$ .

Označenia rešpektujú značenie IFPRI<sup>2</sup>: pre aktivity  $\alpha \in A = \{PS - A, R - A\}$ , pre výrobné faktory  $f \in F = \{lab, cap\}$ .  $PS-A$  znamená aktivity vo verejnom sektore, ktoré podľa NACE Rev. 2 (Štatistická klasifikácia ekonomických aktivít v európskom priestore) O, P a Q: verejná správa a obrana, povinné sociálne poistenie, vzdelávanie, verejné zdravotníctvo a sociálna práca.  $R-A$  označuje všetky ostatné aktivity v ekonomike,  $lab$  je výrobný faktor práca a  $cap$  výrobný faktor kapitál. V modeli sú domácnosti dezagregované na mestské a vidiecke.

## 1.2 Databáza údajov

Údaje tvoria štvrtročné časové rady Slovenska od 1995q1 do 2014q4, pochádzajú zo Štatistického úradu SR a z databáz Eurostatu. Pre účely tohto modelu využívame nasledovné agregáty: P.1 Produkcia, P.2 Medziprodukcia, P.3 Finálne spotrebné výdavky, P.51 Tvorba hrubého fixného kapitálu, P.52 Zmena stavu zásob, D.1 Odmeny zamestnancov, D.2-D.3 Čisté dane z dovozu a vývozu, B.1g Hrubý domáci produkt, B.2g Hrubý prevádzkový prebytok, B.3g Hrubé zmiešané príjmy a B.8g Hrubé národné úspory. Všetky údaje sú v bežných cenách, miliónoch Eur, nie sú sezónne upravené.

## 2 EKONOMETRICKÝ ODHAD PARAMETROV

Produkčná funkcia v štruktúre modelu nadobúda pre verejný sektor a ostatné sektory nasledovný tvar:

$$QA_{PS,t} = ad_{PS} \cdot QF_{lab,PS,t}^{\alpha_{lab,PS}} \cdot QF_{cap,PS,t}^{\alpha_{cap,PS}} \cdot e^{u_t} \quad (2)$$

$$QA_{R,t} = ad_R \cdot QF_{lab,R,t}^{\alpha_{lab,R}} \cdot QF_{cap,R,t}^{\alpha_{cap,R}} \cdot e^{u_t} \quad (3)$$

Logaritmickej tvar modelu použitý na odhad metódou najmenších štvorcov je nasledovný:

$$\ln QA_{PS,t} = \ln ad_{PS} + \alpha_{lab,PS} \cdot \ln QF_{lab,PS,t} + \alpha_{cap,PS} \cdot \ln QF_{cap,PS,t} + u_t \quad (4)$$

$$\ln QA_{R,t} = \ln ad_R + \alpha_{lab,R} \cdot \ln QF_{lab,R,t} + \alpha_{cap,R} \cdot \ln QF_{cap,R,t} + u_t \quad (5)$$

Úroveň aktivity  $QA_\alpha$  pre každý sektor vypočítame ako rozdiel produkcie P.1 a medziprodukcie P.2, ku ktorej sa pripočítajú čisté dane z dovozu a vývozu D.2-D.3. Dopyt aktivity po výrobnom faktore  $QF_{fa}$  je časovým radom hrubého domáceho produktu.

Odhad parametrov produkčnej funkcie metódou najmenších štvorcov dáva výsledky sumarizované v Tabuľkách 1 a 2. Pre produkčnú funkciu vo verejnom sektore:

	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value	
const	0,557319	0,0172293	32,3472	<0,00001	***
l_QFlab_ps	0,679013	0,00560381	121,1699	<0,00001	***
l_QFcap_ps	0,323877	0,00454837	71,2071	<0,00001	***

<sup>2</sup> International Food Policy Research Institute

Mean dependent var	7,305466	S.D. dependent var	0,452608
Sum squared resid	0,005480	S.E. of regression	0,008437
R-squared	0,999661	Adjusted R-squared	0,999653
F(2, 77)	113649,4	P-value(F)	2,5e-134
Log-likelihood	270,0286	Akaike criterion	-534,0571
Schwarz criterion	-526,9111	Hannan-Quinn	-531,1921
rho	-0,092062	Durbin-Watson	2,178626

**Tabuľka 1:** Prvý odhad pre rovnicu (2)

Pre produkčnú funkciu ostatných sektorov:

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>	
const	0,457148	0,0422347	10,8240	<0,00001	***
l_QFlab_r	0,331313	0,0178152	18,5972	<0,00001	***
l_QFcap_r	0,668441	0,0153966	43,4149	<0,00001	***

Mean dependent var	9,169055	S.D. dependent var	0,446486
Sum squared resid	0,024100	S.E. of regression	0,017691
R-squared	0,998470	Adjusted R-squared	0,998430
F(2, 77)	25120,44	P-value(F)	4,1e-109
Log-likelihood	210,7883	Akaike criterion	-415,5767
Schwarz criterion	-408,4306	Hannan-Quinn	-412,7116
rho	0,122586	Durbin-Watson	1,752874

**Tabuľka 2:** Prvý odhad pre rovnicu (3)

$$\ln ad_{PS} = 0,5573 \Rightarrow ad_{PS} = 1,746$$

$$\alpha_{lab,PS} = 0,679$$

$$\alpha_{cap,PS} = 0,3239$$

$$\ln ad_R = 0,4571 \Rightarrow ad_R = 1,5795$$

$$\alpha_{lab,R} = 0,3313$$

$$\alpha_{cap,R} = 0,6684$$

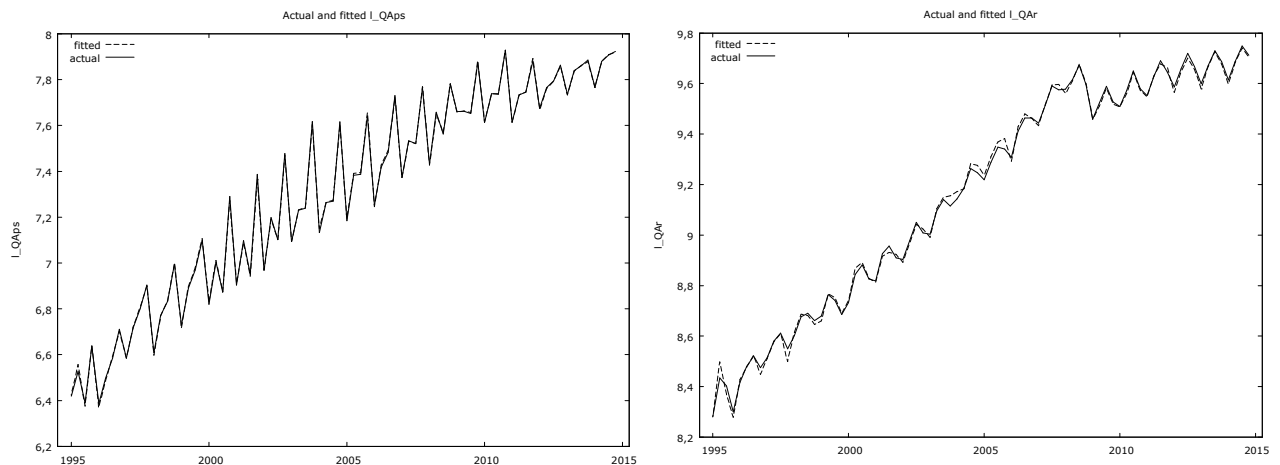
Finálna podoba modelu (2 a 3) teda je:

$$\overline{QA_{PS,t}} = 1.746 \cdot QF_{lab,PS,t}^{0.679} \cdot QF_{cap,PS,t}^{0.3239} \quad (6)^3$$

$$\overline{QA_{R,t}} = 1.5759 \cdot QF_{lab,R,t}^{0.3313} \cdot QF_{cap,R,t}^{0.6684} \quad (7)$$

Variabilita závisle premennej je ekonometrickým modelom vysvetlená na 99,97% pre verejný sektor a na 99,85% pre ostatné sektory. Všetky vysvetľujúce premenné sú vysoko štatisticky významné. Technologický parameter pre produkčnú funkciu vo verejnom sektore je 1,75 a pre ostatné sektory 1,58. Ak sa množstvo výrobného faktora práca zvýši o 1%, úroveň aktivity sa vo verejnom sektore zvýši o 0,68%, v ostatných sektoroch o 0,33%. Pre výrobný faktor kapitál platí, že ak sa jeho množstvo zvýši o 1%, vo verejnom sektore zaznamenáme zvýšenie o 0,32% a v ostatných sektoroch o 0,67%. Znamená to teda, že verejný sektor je citlivejší na zmeny vo výrobnom faktore práca, na rozdiel od ostatných sektorov, ktoré sú citlivejšie na kapitál.

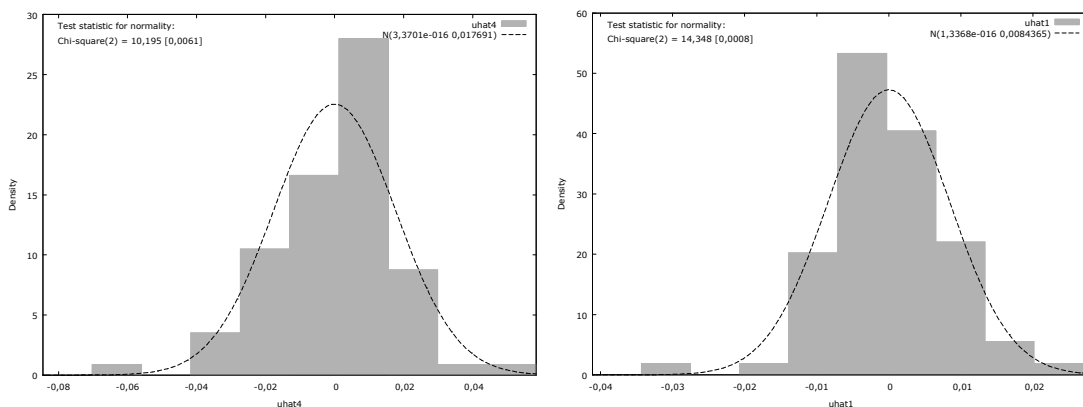
<sup>3</sup> the lines above  $\overline{QA_{PS,t}}$  and  $\overline{QA_{R,t}}$  are instead of hat



**Obrázok 1:** Skutočné a vyrovnané hodnoty pre produkciu vo verejnom sektore a ostatných sektoroch

Pri testovaní autokorelácie dáva Durbin-Watsonov test hodnoty  $DW_1=2,1786$  pre prvý model a  $DW_2=1,7529$  pre druhý model. Tabelovaná hodnota pre 80 pozorovaní a dve vysvetľujúce premenné je  $d_L=1.5859$  a  $d_U=1.6882$ . Keďže  $d_L < DW_1 < d_U$  a  $d_L < DW_2 < d_U$ , akceptujeme nulovú hypotézu o neexistencii autokorelácie v oboch modeloch (2) a (3). Sezónne umelé premenné nepreukázali vplyv sezónnosti aj napriek tomu, že sa jedná o štvrt'ročné data.

Reziduály sú normálne rozdelené. Jacques-Bera test dáva  $\chi^2_{2;0,05} = 14,348$  s pravdepodobnostnou p-hodnotou 0,0008 pre model (2) a  $\chi^2_{2;0,05} = 10,195$  s pravdepodobnostnou hodnotou 0,0061 pre model (3).



**Obrázok 2:** Normalita rozdelenia rezíduí pre model (2) a (3).

Hodnota faktora inflácie rozptylu (VIF - Variance Inflation Factor VIF) je pre model (2) 6,385, čo je hodnota pod 10, a teda neindikuje štatisticky významnú multikolaritu medzi vysvetľujúcimi premennými. VIF pre model (3) nadobúda hodnotu 13,279, čo naznačuje problém multikolarity. Nakoľko sú však v modeli zahrnuté len dve vysvetľujúce premenné, akceptujeme prítomnosť multikolarity aj pre model pre ostatné sektory.

### 3 ZÁVER

V článku sme sa venovali získaniu hodnôt parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy ekonometrickým odhadom. Tento prístup je menej rozšírený ako obvyklá kalibrácia, vyžaduje dlhé časové rady a ich odhad je omnoho náročnejší. Boli skonštruované

dva separátne modely, jeden pre odhad parametrov produkčnej funkcie pre verejný sektor, druhý pre všetky ostatné sektory spoločne. Pre oba modely boli splnené všetky predpoklady o náhodných poruchách (s výnimkou výskytu multikolinearity pri jednom z nich) a oba boli vysoko štatisticky významné. Na základe dosiahnutých výsledkov môžeme konštatovať, že verejný sektor je citlivejší na výrobný faktor práca a ostatné sektory súhrnne na kapitál. Technologický parameter produkčnej funkcie je vyšší pre verejný sektor, nakoľko do ostatných sektorov sú zahrnuté aj menej progresívne odvetvia, čo znižuje priemernú hodnotu.

Ďalší výskum bude zameraný na odhad parametrov ostatných behaviorálnych rovníc spomínaného modelu a následné porovnanie hodnôt s kalibrovanými parametrami. Po dosiahnutí tejto úrovne prirochíme k rozvinutejším modelom otvorených ekonomík.

### **Použitá literatúra**

1. LÖFGREN, H. 2003. Exercises in General Equilibrium Modeling Using GAMS. In: *Microcomputers in Policy Research 4a*. International Food Policy Research Institute.
2. MIŤKOVÁ, V. 2006. General equilibrium model of closed economy: case of Slovakia. In: Proceedings of the international workshop *Micro and Macro Models in Economics*. Bratislava, s 102-110.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Veronika Miťková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied, Ústav ekonómie

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

Tel: (421 2) 20 669 863

email: [veronika.mitkova@fses.uniba.sk](mailto:veronika.mitkova@fses.uniba.sk)

# NIEKTORÉ PRÍSTUPY K MANAŽMENTU PORTFÓLIA DLHOPISOV

## SOME APPROACHES TO BONDS PORTFOLIO MANAGEMENT

*Vladimir Mlynarovič, Eduard Hozlár*

### **Abstrakt**

Článok prezentuje dve excelovské aplikácie zamerané na manažment portfólia dlhopisov. V jednom prípade sa formuluje a rieši optimalizačná úloha pre také obchodovania s dlhopismi, ktorého platby presne v čase pokrývajú predpokladané záväzky. V druhom prípade sa historicky analyzuje opakovaný nákup dlhopisov v momente ich splatnosti a dosahovaný celkový výnos portfólia dlhopisov.

*Kľúčové slová: portfólio dlhopisov, optimalizácia, rolovanie dlhopisov*

### **Abstract**

The paper presents two excel applications for bonds portfolio management. In the one case an optimization problem for bonds trading is formulated and solved in which cash flows from trading exactly match assumed payments. In the second case on the base of daily historical data returns of bonds rolling with different maturities are evaluated

*Keywords: bonds portfolio, optimization, bonds rolling*

## **1 ÚVOD**

Hospodárska prax a ekonomická teória rôzne kombinácie verejných, bankových a podnikových zdrojov pre financovanie projektov. Napríklad prostredníctvom manažmentu portfólia dlhopisov (Elton – Gruber, 1995), využívaním factoringu, ale aj iné prístupy. Na druhej strane metodológia viackriteriálneho rozhodovania (napr. Mlynarovič, 1998) vytvára priestor pre ich syntézu s cieľom nájsť efektívne portfólio spôsobov financovania s minimalizáciou rizika možnosti nedofinancovania. Cieľom príspevku je prezentovať dve excelovské aplikácie zamerané na manažment portfólia dlhopisov. V jednom prípade sa formuluje a rieši optimalizačná úloha pre také obchodovania s dlhopismi, ktorého platby presne v čase pokrývajú predpokladané záväzky. V druhom prípade sa historicky analyzuje opakovaný nákup dlhopisov v momente ich splatnosti a dosahovaný celkový výnos portfólia dlhopisov.

## **2 PROGRAM PRESNÉHO STRETÁVANIA POHĽADÁVOK A ZÁVÄZKOV**

Obsahom presného stretávania je hľadanie takého najlacnejšieho portfólia dlhopisov, ktoré produkuje toky hotovosti, ktoré v čase presne stretávajú záväzky financované touto investíciou. Úlohu nájdania najlacnejšieho portfólia obligácií, ktorého toky hotovosti v každom období postačujú na pokrytie všetkých záväzkov možno sformulovať v tvare nasledujúceho optimalizačného problému, ktorý je modifikáciou a rozšírením prístupu, ktorý navrhli *Elton a Gruber (1995)*. Označme

$L(t)$  - záväzky v čase  $t$ ,  
 $P_B(t, i)$  - cena obligácie  $i$  v čase  $t$ ,  
 $P_S(t, i)$  - hotovosť obdržaná z predaja obligácie  $i$  v čase  $t$ ,  
 $C(t, i)$  - tok hotovosti z obligácie  $i$  v období  $t$ ,  
 $N_B(t, i)$  - počet kúpených obligácií typu  $i$  v čase  $t$ ,  
 $N_S(t, i)$  - počet predaných obligácií typu  $i$  v čase  $t$ .

Pri takýchto definíciách je zisk je rozdielom medzi výsledkom z predaja a nákladmi na kúpu, a úloha nadobúda tvar

$$\max \sum_t \sum_i N_S(t, i) P_S(t, i) - \sum_t \sum_i N_B(t, i) P_B(t, i)$$

za podmienok

$$\sum_i (N_B(t, i) - N_S(t, i)) C(t, i) + \sum_i P_S(t, i) \geq L(t), \quad \text{pre všetky } t$$

$$N_B(t, i) - N_S(t, i) \geq 0, \quad \text{pre všetky } i, t$$

$$N_B(t, i), N_S(t, i) \geq 0, \quad \text{pre všetky } i, t$$

```

Function buy_price(year, ytm, nv, coupon, rtm)
  Dim i, j As Integer
  buy_price = 0
  If year <= ytm Then
    j = 0
    For i = year To ytm
      j = j + 1
      buy_price = buy_price + (coupon * nv) / ((1 + rtm) ^ j)
    Next i
  buy_price = buy_price + nv / ((1 + rtm) ^ (ytm - year + 1))
  End If
End Function
  
```

Obr. 1: Vnútoraná hodnota obligácie

```

Function buy_sell(buys, sells)
  Dim m, n, i, j, k, l As Integer
  Dim s() As Variant
  m = buys.Rows.Count
  n = buys.Columns.Count
  ReDim s(m, n)
  For k = 1 To m
    For j = 1 To n
      s(k, j) = 0
      If j <= n - k + 1 Then
        For i = 1 To k
          s(k, j) = s(k, j) + buys(i, j) - sells(i, j)
        Next i
      End If
    Next j
  Next k
  buy_sell = s
End Function
  
```

Obr. 2: VBA procedúra pre vylúčenie krátkych predajov

Pri excelovskej aplikácii predpokladáme, že obligácie sa kupujú za cenu rovnú ich vnútornej hodnote, vypočítanú excelovskou VBA funkciou v tvare uvedenom na obr. 1. Ďalej sa predpokladá, že obligáciu možno predať za cenu, ktorá sa od kúpnej ceny odlišuje o transakčné náklady stanovované nejakým percentom. Na vylúčenie krátkych predajov sa využíva VBA funkcia uvedená na obr. 2

### 3 PROGRAM PRESNÉHO STRETÁVANIA POHLADÁVOK A ZÁVÄZKOV

Excelovská aplikácia na základe dlhodobých časových radov o výnosoch generických dlhopisov s rôznymi splatnosťami (od 1 do 10 rokov) generuje pre vybrané časové obdobie vývoj dlhopisového portfólia pre zadané štartovacie dátumy nákupu jednotlivých vybraných dlhopisov. Predpokladá sa pritom, že v momente splatnosti každého kúpeného dlhopisu sa opätovne kupuje dlhopis s tou istou splatnosťou. Dlhopisy možno kombinovať investíciou do nástroja peňažného trhu a taktiež sa predpokladá, že v každom časovom momente majú všetky aktíva v portfóliu rovnakú váhu. Jadrom aplikácie sú dve excelovské makrá. Prvé z nich (*datumes*) identifikuje údaje o výnosoch pre vybrané investičné obdobie a druhé (*invest*) investuje do dlhopisov a automatizuje ich „rolovanie“

	Year days: 365		Spread: 0	
	Years	Maturities	Bond Buy Date	Bond Maturity Date
1M		30		
1Y	1	365	27.1.2007	26.1.2008
2Y	2	730		
3Y	3	1095		
4Y	4	1460		
5Y	5	1825	8.1.2007	6.1.2012
6Y	6	2190		
7Y	7	2555		
8Y	8	2920		
9Y	9	3285		
10Y	10	3650	5.1.2000	1.1.2010
Cash	0,01%	0	NO	

Obr. 3: Ilustrácia naštartovania investičného procesu

Jedným z kľúčových prvkov aplikácie je funkcia pre dennú aproximáciu ročného výnosu do splatnosti dlhopisu a základe výnosov generických dlhopisov, ktorá je uvedená na obr. 4.

```
Function ytm(ds, datum, spread, yield_curve, ref_splatnosti)
Dim pd, i, k, m, ii As Integer
Dim dh, hh, pc, r, aaa As Variant
Dim a, b, c, d, e, f, g, j, l, n, o, p, q, s, t, u, v As Integer
m = ref_splatnosti.Rows.Count
ReDim h(m, 1) As Variant
For j = 1 To m
    h(j, 1) = ref_splatnosti(j, 1)
Next j
pd = ds - datum
```



```

If (pd = 0) Then
    ytm = 0
Else
    If pd <= 30 Then
        ytm = yield_curve(1, 1)
    Else
        For i = 1 To m
            If pd >= h(i, 1) Then
                ii = i
                hh = yield_curve(1, i + 1)
                dh = yield_curve(1, i)
                pc = pd - h(i, 1)
                r = h(i + 1, 1) - h(i, 1)
            End If
        Next i
        aaa = dh + (pc / r) * (hh - dh)
        ytm = aaa
    End If
End If
End Function

```

Obr. 4. Aproximáciu výnosu do splatnosti na výnosovej krivke

#### Použitá literatúra

1. ELTON, E.J. – M.J. GRUBER, 1995: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Wiley 1995, 715.p.
2. MLYNAROVÍČ, V., 1998: Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania, Ekonóm, 1998, Bratislava).
3. HORNIAČEK, M., 2008: Negotiation, preferences over agreements, and the core. International Journal of Game theory, roč. 37, 2008, s. 235 – 249.

#### Kontaktné údaje

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.  
 Univerzita Komenského v Bratislave, FSEV, Ústav ekonómie  
 Mlynské luhy 4, 82105 Bratislava  
 Tel: (421 2) 2066860  
 email: [mlynarovic@fses.uniba.sk](mailto:mlynarovic@fses.uniba.sk)

doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.  
 Univerzita Komenského v Bratislave, FSEV, Ústav ekonómie  
 Mlynské luhy 4, 82105 Bratislava  
 Tel: (421 2) 2066862  
 email: [hozlar@fses.uniba.sk](mailto:hozlar@fses.uniba.sk)

# VZŤAH MEDZI VÝSKUMOM A VÝVOJOM A PRODUKTIVITOU REGIÓNOV SLOVENSKA

## THE INCIDENCE BETWEEN RESEARCH AND DEVELOPMENT AND THE PRODUCTIVITY OF SLOVAK REGIONS

*Filip Ostrihoň*

### **Abstrakt**

Daný príspevok sa zaoberá vzťahom medzi rozdielnymi zložkami výskumu a vývoja a produktivitou Slovenských regiónov na úrovni NUTS 3. Pre analýzu bol použitý rozšírený model Cobbovej-Douglesovej produkčnej funkcie, ktorý umožňuje rozlíšenie vplyvu kapitálových výdavkov na vedu a výskum od všeobecného vedecko-technického pokroku, ako aj skúmanie vplyvu uvedených dvoch zložiek na elasticitu celkovej produkcie voči vstupom práce a kapitálu. Na základe výsledkov analýzy je možné konštatovať, že pokiaľ majú kapitálové výdavky vplyv, tak len na celkovú produktivitu faktorov, kým všeobecný vedecko-technický pokrok ovplyvňuje pomer akým sa jednotlivé vstupy podieľajú na celkovom výstupe regiónov.

***Kľúčové slová:** výskum a vývoj, regióny Slovenska, produktivita, Cobb-Douglas*

### **Abstract**

This paper addresses the issue of the incidence between different research and development (R&D) components and the productivity of Slovak regions on NUTS 3 level. The analysis utilizes augmented model of Cobb-Douglas production function, which allows for distinguishing the effects of R&D capital expenditures from those of general technological progress, as well as the impact of mentioned components on the elasticity of output towards the change of labor and capital inputs. Based on the results of the analysis it is possible to assert that if R&D inventory expenditures have any effect at all, it is only on the total factor productivity, while general technological progress affects the ratio of the share of inputs on the total output of region.

***Keywords:** research and development, regions of Slovakia, productivity, Cobb-Douglas*

## **1 ÚVOD**

Vedecko-technický pokrok je často považovaný za jeden z kľúčových faktorov pre vysvetlenie rastú celkového produktu ekonomiky ako aj jeho prechodných výkyvov, ktoré bývajú interpretované ako hospodársky cyklus (Horvát et al. 2013). Výdavky na výskum a vývoj, ktoré by mali pokrok stimulovať, však v praxi nemusia byť rovnomerne distribuované medzi jednotlivými krajinami svetovej ekonomiky ako aj v rámci týchto krajín.

Vyvstáva preto otázka, že či uvedené rozdiely v podpore vedecko-výskumných aktivít vplyvajú na produktivitu príslušných ekonomík, a ak áno tak potom akým spôsobom. Nakoľko existujú veľké rozdiely v produktivite v rámci tých istých krajín zdá sa byť uvedená otázka ešte dôležitejšia z hľadiska regiónov ako samotných národných štátov.

Uvedený príspevok je preto venovaný analýze vzťahov medzi regionálnymi výdavkami na vedu a výskum a produkčnou technológiou v jednotlivých regiónoch Slovenska na úrovni

NUTS 3. Pre dosiahnutie uvedeného cieľa je aplikovaná Cobbová-Douglasová produkčná funkcia, rozšírená o elementy vedecko-technického pokroku a výdavkov na vedu a výskum podľa vzoru Zhanga et al. (2012) pre vyhodnotenie súvislosti medzi regionálnou výrobou a úrovňou výskumu a vývoja.

Príspevok je členený do štyroch častí. Prvá časť je venovaná východiskám a motivácii vykonanej analýzy. V druhej časti je predstavený všeobecný model Zhanga et al. (2012), ktorý bol aplikovaný na panelové dáta regiónov Slovenska. Výsledky analýzy sú prezentované v štvrtej časti, ktorá zároveň ponúka interpretáciu prezentovaných odhadov. Závery vykonanej analýzy sú následne zhrnuté v rámci piatej a zároveň poslednej časti príspevku.

## 2 TEORETICKÝ MODEL A POUŽITÉ DÁTA

Ako teoretický model pre vykonanú analýzu bol zvolený model prezentovaný Zhangom et al. (2012), ktorý rozširuje ľubovoľnú produkčnú funkciu o výskum a vývoj, a špecifikuje funkčný vzťah medzi rôznymi elementmi výskumu a vývoja a celkovou produkciou regiónu. Podľa Zhanga et al. (2012) je ich prístup možné použiť pre ľubovoľnú produkčnú funkciu. Vzhľadom k popularite Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie z hľadiska aplikácie pre opísanie produkčnej technológie v rámci Slovenska, či už na národnej alebo regionálnej úrovni bola aj pre uvedenú analýzu zvolená Cobbová-Douglasová produkčná funkcia.

Na základe výsledkov analýzy Szomolányiho, Lukáčika a Lukáčikovej (2012) je totiž možné považovať uvedenú funkciu za adekvátny tvar produkčnej funkcie pre vysvetlenie celkovej produkcie Slovenska. Na regionálnej úrovni bola uvedená produkčná funkcia aplikovaná Ivaničovou a Surmanovou (2013) pre zhodnotenie produkčnej technológie v regiónoch Slovenska na úrovni NUTS 3, prostredníctvom ekonometrického odhadu na základe modelu so zdanlivo nesúvisiacimi regresiami (SUR). Konkrétnymi hodnotami parametrov Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie pre podmienky Slovenska sa tiež zaoberali aj Ochotnícky (2008) a Radvansky (2014).

Rozšírený model Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie podľa Zhanga et al. (2012), ktorý bol ďalej aplikovaný v rámci príspevku má nasledujúcu podobu:

$$\ln Y_{it} = \beta_0(Z_{it}; \theta_0) + \sum_{k=1}^K \beta_k \ln X_{kit} + u_{it} \quad (1)$$

V uvedenom vzťahu (1) je prostredníctvom  $Y_{it}$  označená regionálna produkcia,  $X_{kit}$  predstavuje  $k$ -ty vstup produkčnej funkcie,<sup>1</sup> a  $u_{it}$  je náhodná zložka pre  $i$ -tu prierezovú jednotku a  $t$ -te časové obdobie. Parametre  $\beta_k$  predstavujú odhadované koeficienty elasticity výstupu voči vstupom a pre parameter  $\beta_0$  sa predpokladalo, že je ovplyvnený vedecko-technickým pokrokom a výskumom a vývojom na základe nasledujúcej funkcie:

$$\beta_0(Z_{it}; \theta_0) = \alpha_0^0 + \sum_{l=1}^L \alpha_l^0 Z_{lit} + \mu_i \quad (2)$$

<sup>1</sup> V rámci prezentovanej aplikácie boli použité len dva vstupy ( $K=2$ ) a to kapitál (ďalej označovaný ako  $K_{it}$ ) a práca (ďalej označovaná ako  $L_{it}$ ).

Parameter  $\beta_0$  je tak funkciou  $L$  premenných opisujúcich výskum a vývoj  $Z_{it}$  pre  $i$ -tu prierezovú jednotku a  $t$ -te časové obdobie. Ako uvedené premenné boli podľa vzoru Zhanga et al. (2012) použité premenné celkového objemu inventáru určeného na vedu a výskum (ďalej označovaného len prostredníctvom  $Z_{it}$ ) a časového elementu vedecko-technického pokroku (ďalej označovaného len prostredníctvom  $t$ ). Parametre  $\alpha$  predstavujú odhadované parametre pre opísanie vplyvu výskumu a vývoja a premenné  $\mu_i$  predstavujú fixné efekty, ktorými sa môže vplyv výskumu a vývoja v jednotlivých regiónoch líšiť.

Zhang et al. (2012) následne rozšírili model (1), o predpoklad že rovnako parametre elasticity výstupu voči vstupom  $\beta_k$  sú funkciami výskumu a vývoja v jednotlivých krajoch.

$$\ln Y_{it} = \beta_0(Z_{it}; \theta_0) + \sum_{k=1}^K \beta_k(Z_{it}; \theta_k) \ln X_{kit} + u_{it} \quad (3)$$

V rozšírenom modeli (3) sa predpokladá rovnaký funkčný vzťah pre parametre elasticity výstupu voči vstupom  $\beta_k$  ako sa predpokladal v modeli (1) pre  $\beta_0$ , teda vzťah (2), s tým rozdielom, že sa abstrahuje od vplyvu fixných efektov.

Pre analýzu regiónov Slovenska boli použité údaje pre regióny na úrovni NUTS 3 (kraje), dostupné v online databáze DATAcube Štatistického úradu Slovenskej republiky. Boli teda použité údaje o regionálnom hrubom domácom produkte (HDP) v bežných cenách, údaje o regionálnej tvorbe hrubého fixného kapitálu v bežných cenách, údaje o kapitálových výdavkoch na vedu výskum v bežných cenách a údaje o počte zamestnaných v jednotlivých krajoch. Uvedené údaje boli dostupné v panelovej štruktúre pre osem krajov Slovenska s časovým rozpätím 1996-2011.

Ďalej boli použité agregované časové rady na úrovni Slovenska, ktoré boli dostupné z online databázy Štatistického úradu Slovenskej republiky SLOVSTAT. Konkrétne boli použité časové rady HDP v bežných cenách, HDP v stálych cenách roku 2010, tvorby hrubého fixného kapitálu v bežných cenách a tvorby hrubého fixného kapitálu v stálych cenách roku 2010, ktoré boli dostupné pre časové obdobie 1997-2011.

Hodnota objemu kapitálu ( $K$ ) pre každý z krajov Slovenska bola pre prvý dostupný rok 1996 odhadnutá prostredníctvom metódy nepretržitej inventarizácie podľa vzoru Zhanga et al. (2012).

$$K_{t_0} = \frac{I_{t_0}}{g_K + \delta_K}; t_0 = 1996 \quad (4)$$

V uvedenom vzťahu (4) predstavuje  $I$  tvorbu hrubého fixného kapitálu v bežných cenách,  $g_K$  predstavuje priemernú mieru zmeny tvorby hrubého fixného kapitálu (investícií) a  $\delta_K$  je priemerná miera opotrebenia kapitálu. Hodnoty pre objem kapitálu v ostatných obdobiach boli vypočítané na základe nasledujúceho vzťahu:

$$K_t = K_{t-1}(1 - \delta_K) + I_t; t = 1997, \dots, 2011 \quad (5)$$

V rámci analýzy bola vypočítaná priemerná miera rastu investícií  $g_K$  pre Slovensko s približnou hodnotou 6,94% a miera opotrebenia kapitálu  $\delta_K$  bola stanovená na hodnotu 13%. Výpočtami podľa vzťahov (4) a (5) bol odhadnutý časový rad objemu kapitálu v bežných cenách pre každý kraj počas obdobia 1996-2013.

Obdobne bola odhadnutá počiatočná hodnota objemu inventáru určeného pre vedu a výskum ( $R$ ) pre jednotlivé kraje Slovenska prostredníctvom metódy nepretržitej inventarizácie.

$$R_{t_0} = \frac{E_{t_0}}{g_R + \delta_R}; t_0 = 1996 \quad (6)$$

Vo vzťahu (6) predstavuje  $E$  objem kapitálových výdavkov na vedu a výskum v bežných cenách,  $g_R$  predstavuje mieru rastu uvedených výdavkov a  $\delta_R$  predstavuje mieru opotrebenia kapitálových statkov určených pre vedu a výskum. Hodnoty objemu inventáru určeného pre vedu a výskum v ostatných rokoch analýzy boli vypočítané prostredníctvom nasledujúceho vzťahu.

$$R_t = R_{t-1}(1 - \delta_E) + E_t; t = 1997, \dots, 2011 \quad (7)$$

Priemerná miera rastu kapitálových výdavkov na vedu a výskum pre kraje Slovenska  $g_R$  bola na základe výpočtu stanovená na 8,89%. Miera opotrebenia kapitálových statkov určených pre vedu a výskum  $\delta_R$  bola v súlade so Zhangom et al. (2012) stanovená na 15%. Prostredníctvom uvedených vzťahov (6) a (7) boli pre stanovené hodnoty  $g_R$  a  $\delta_R$  odhadnuté časové rady objemu kapitálových statkov určených pre vedu a výskum v bežných cenách pre každý z krajov Slovenska počas rokov 1996.

Podielom časových radov HDP v bežných cenách a HDP v stálych cenách bol vypočítaný časový rad deflátoru HDP pre Slovensko, prostredníctvom ktorého boli prevedené hodnoty regionálneho HDP z bežných cien na stále ceny roku 2010. Obdobne bol podielom časových radov tvorby hrubého fixného kapitálu v bežných cenách a tvorby hrubého fixného kapitálu v stálych cenách vypočítaný časový rad deflátoru investícií Slovenska, prostredníctvom ktorého boli prevedené regionálne časové rady objemu kapitálu a objemu kapitálu určeného pre vedu a výskum na stále ceny roku 2010.

Pre vykonanú analýzu tak boli dostupné panelové dáta pre 8 prierezových jednotiek (krajov Slovenska) a 15 časových období s ročnou periodicitou (1997-2011), teda celkovo 120 vybilancovaných pozorovaní v panelovej štruktúre. Z hľadiska jednotiek dát boli všetky údaje v peňažných jednotkách prevedené na spoločnú jednotku Euro a panelové dáta počtu zamestnaných boli prevedené na jednotku počet osôb.

### 3 ODHAD A INTERPRETÁCIA VÝSLEDKOV

Pre odhad modelu (1) a (2) bola použitá metóda najmenších štvorcov s umelými premennými (LSDV), vzhľadom k predpokladu fixných efektov pre funkciu  $\beta_0$ , opísanú vzťahom (2). Výsledky odhadu boli podrobené štatistickým testom pre overenie splnenia štandardných predpokladov lineárneho regresného modelu. Pre testovanie časovej autokorelácie prvého rádu bol použitý Bhagavaraov, Franiziniho a Narendranathanov (1982) test, ktorý využíva štatistiku Durbinovho-Watsonovho typu.<sup>2</sup>

Ďalej boli pre testovanie časovej autokorelácie použité Wooldridgeové (2012) testy, ktoré navrhuje pre testovanie panelových modelu odhadovaných prostredníctvom estimátora prvých diferencií a dvojestupňovej metódy najmenších štvorcov. Časová heteroskedasticita bola testovaná prostredníctvom Wooldridgeovej (2002) modifikácie Whiteovho a Breuschovho-Paganovho testu, ktorá je robustná voči heteroskedasticite.

<sup>2</sup> Štatistika bola vypočítaná v podobe ako ju uvádza Baltagi (2005).

Priestorová autokorelácia bola testovaná prostredníctvom Breuschovho-Paganovho tetu, pôvodne navrhovaného pre modely SUR. Pre otestovanie priestorovej heteroskedasticity bola použitá Greenova testovacia štatistika (Baum 2001). Normálne rozdelenie rezíduálov odhadu bolo overené prostredníctvom Jarqueovho-Beraovho testu.

Ak bola v odhadnutom modeli identifikovaná časová autokorelácia prvého rádu, boli do odhadu skúmaného modelu doplnené autoregresné členy. V prípade priestorovej autokorelácie a heteroskedasticity bol použitý robustný odhad štandardných odchýlok Whiteovho typu. Výsledné odhady pre model (1) a (3) sú uvedené v tabuľke 1.

**Tabuľka 1: Odhady rozšírenej Cobbovej-Douglasovej produkčnej funkcie**

	Model (1)		Model (2)	
Konštanta	6,199548	**	-42,558640	**
	(2,915640)		(18,206250)	
$\ln Z_{i,t}$	-0,016110		2,550989	**
	(0,013174)		(1,135668)	
$t$	0,027884	***	0,174700	
	(0,004629)		(0,152319)	
$\ln K_{i,t}$	0,446568	**	1,853836	***
	(0,154467)		(0,676894)	
$\ln K_{i,t} \cdot \ln Z_{i,t}$			-0,030299	
			(0,039919)	
$\ln K_{i,t} \cdot t$			-0,063074	***
			(0,016154)	
$\ln L_{i,t}$	0,498751	**	1,778912	
	(0,240449)		(1,369425)	
$\ln L_{i,t} \cdot \ln Z_{i,t}$			-0,147296	
			(0,089271)	
$\ln L_{i,t} \cdot t$			0,104302	***
			(0,022593)	
Počet pozorovaní	112		112	
$R^2$	0,989691		0,992761	
$\overline{R^2}$	0,988442		0,991542	

**Zdroj:** Výpočty autora na základe dostupných štatistických údajov. Robustné štandardné odchýlky parametrov Whiteovho typu sú uvedené v zátvorkách. Štatistická významnosť parametrov na hladine významnosti 1%, 5% a 10% je označená prostredníctvom symbolov \*\*\*, \*\* a \* za hodnotou parametra. Do odhadov boli doplnené autoregresné členy pre autokoreláciu prvého rádu.

Na základe výsledkov testov pre časovú autokoreláciu prvého rádu boli odhady doplnené o autoregresný člen. V dôsledku prítomnosti priestorovej autokorelácie a heteroskedasticity boli vypočítané robustné štandardné odchýlky parametrov. Test normality nezamietol hypotézu normálneho rozdelenia rezíduálov pre oba uvedené modely.

V prípade odhadu pre model (1) je možné upozorniť na parametre elasticity výstupu voči vstupom práce a kapitálu, ktorá je v oboch prípadoch blízka hodnote 0,5, pričom je mierne nižšia pre kapitál ako prácu, tak ako by bolo možné očakávať na základe výsledkov pre iné krajiny. Na základe uvedených hodnôt je možné konštatovať, že produkčná technológia v regiónoch Slovenska vykazuje klesajúce výnosy z rozsahu, ktoré sú však veľmi blízke konštantným výnosom z rozsahu.

Z hľadiska skúmaného vplyvu výskumu a vývoja, je možné podotknúť, že časový element vedecko-technického pokroku je štatisticky významný, kým kapitálové statky určené pre vedu

a výskum nie sú štatisticky významné. Uvedený výsledok naznačuje, že bez ohľadu na výdavky na vedu a výskum v jednotlivých krajoch sa bude produktivita v krajoch Slovenska zvyšovať v dôsledku nových objavov a implementácie nových technológií. Je teda možné predpokladať, že vedecko-technický pokrok v jednotlivých krajoch bol prevažne importovaný zo zahraničia, vzhľadom k tomu, že domáce výdavky na vedu a výskum neovplyvnili produkciu v jednotlivých krajoch.

Odhad rozšíreného modelu (2) upresňuje tieto predpoklady, keďže interakčný člen pre vstup kapitálu a časový element vedecko-technického pokroku je štatisticky významný rovnako ako interakčný člen pre vstup práce a časový element vedecko-technického pokroku, kým interakčné členy pre výdavky na vedu a výskum sú štatisticky nevýznamné. Globálny vedecko-technický pokrok tak mení produkčnú technológiu v jednotlivých krajoch kým objem statkov určených pre vedu a výskum ju na základe výsledkov odhadu neovplyvňuje.

Zmena produkčnej technológie je vzhľadom k znamienkam štatisticky významných parametrov pre interakčných členoch v neprospech objemu kapitálu a v prospech pracovnej sily. Na základe uvedeného výsledku je možné predpokladať, že importom nových technológií sa stáva jeden zamestnanec produktívnejší, kým objem všetkých aktív menej produktívny. Takáto interpretácia naznačuje, že v rámci regiónov Slovenska došlo v sledovanom období k prechodu na vyššie technológie, ktoré sú náročnejšie na kvalifikovanú pracovnú silu než na kapitál, z čoho je možné odôvodniť relatívny pokles produktivity kapitálu.

Štatisticky významný parameter pri premennej objemu statkov určených pre vedu a výskum je možné interpretovať v zmysle, že aktíva určené pre vedu a výskum určujú počiatočnú pozíciu, z ktorej sa odvíja celková produktivita faktorov, ktorá sa dá zlepšiť dodatočnými výdavkami v oblasti vedy a výskumu, ale nepredstavuje spôsob akým by bolo možné ovplyvniť produktivitu a pomer jednotlivých vstupov, teda práce a kapitálu.

## **4 ZÁVER**

Predložený príspevok predstavil analýzu vzťahov medzi rozdielnymi zložkami výskumu a vývoja a produktivitou jednotlivých regiónov (krajo) Slovenska. Vzhľadom k výsledkom práce je nutné konštatovať, že kumulované kapitálové výdavky na vedu a výskum nemajú vplyv na produktivitu vstupov v jednotlivých krajoch ani na pomer v akom sa na celkovom výstupe podieľa práca a kapitál. Na základe výsledkov však kapitálové výdavky dokážu ovplyvniť pozíciu jednotlivých krajo z hľadiska celkovej produktivity faktorov.

Naopak vykonaná analýza potvrdila, že postupom času sa bude ešte väčšmi prelievať produktivita kapitálu na prácu, v dôsledku čoho sa bude meniť aj ich samotný pomer na jednotku celkového výstupe regiónu. Uvedený jav je však exogénny vo vzťahu k úsiliu jednotlivých regiónov, a najskôr je spôsobený inými faktormi, ktoré môžu pochádzať zo zahraničia (importovaný vedecko-technický pokrok) alebo faktormi, ktoré sú zdieľané medzi regiónmi keďže regióny nie sú navzájom izolované a v dôsledku spoločnej národnej ekonomiky podliehajú rovnakým spôsobom mnohým inštitucionálnym a právnym faktorom.

### **Pod'akovanie**

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA č. 1/0285/14 "Regionálne modelovanie ekonomického rastu krajín EÚ s dôrazom na metódy priestorovej ekonometrie".

### **Použitá literatúra**

1. BALTAGI, B. H. 2005. *Econometric Analysis of Panel Data*. 3rd ed. Chichester: Wiley. ISBN 0-470-01456-3

2. BAUM, C. F., 2001. Residual diagnostics for cross-section time series regression models. *The Stata Journal*, roč. 1, č. 1, s. 101–104.
3. BHARGAVA, A., FRANZINI, L., NARENDRANATHAN, W. 1982. Serial Correlation and the Fixed Effects Model. In: *The Review of Economic Studies*, roč. 49, č. 4 (Okt., 1982), s. 533-549
4. HORVÁT, P., KÖNIG, B., OSTRIHOŇ, F. 2013. The Impact of the Technological Progress on the Development of the Slovak Economy – Neoclassical approach. In: *Mathematical Methods in Economics 2013: 31st International Conference*. [online] Jihlava: College of Polytechnics,
5. IVANIČOVÁ, Z., SURMANOVÁ, K. 2013. Analýza efektívnosti regiónov pomocou metodológie SUR modelov. In: *Ekonomické rozhľady (Economic Review)*, roč. 42, č. 3, s. 355-370.
6. OCHOTNÍCKÝ, P. 2008. Výber produkčnej funkcie pri odhade potenciálneho produktu. In: *Ekonomický časopis*, roč. 56, s. 800-816.
7. RADVANSKÝ, M. 2014. Možnosti analyzovania vplyvu kohéznej politiky na regióny a trh práce SR: ekonometrický prístup. Bratislava: Ekonomický ústav SAV, 147 s. ISBN 978-80-7144-218-9.
8. SZOMOLANYI, K., LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2012. Estimate of Parameters of Production Function of Slovak Economy: Econometric Analysis of Nominal Wages. In: *Quantitative Methods in Economics (Multiple Criteria Decision Making XVI)* roč. 16 (2012), s. 210-215.
9. WOOLDRIDGE, J. M., 2002. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. Cambridge: The MIT Press.
10. WOOLDRIDGE, J. M., 2012. *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. 5th ed. Mason: South-Western. ISBN 1-111-53104-8
11. ZHANG, R., SUN, K., DELGADO, M. S., SUBAL, C. K. 2012. Productivity in China's high technology industry: Regional heterogeneity and R&D. In: *Technological Forecasting & Social Change*, roč. 79, s. 127–141.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Filip Ostrihoň

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: filip.ostrihon@euba.sk



# NIEKOĽKO PRÍSTUPOV K ZRÝCHLENIU VÝPOČTU MATICE VZDIALENOSTÍ

## SEVERAL APPROACHES HOW TO CALCULATE A DISTANCE MATRIX FASTER

*Stanislav Palúch*

### Abstrakt

Existuje niekoľko známych metód na výpočet matice vzdialenosti v hranovo ohodnotenom grafe alebo v hranovo ohodnotenom digrafe. Celú maticu môžeme počítať naraz Floydovým algoritmom, alebo postupne po riadkoch po riadkoch niektorým z algoritmov typu point to all. Pri výpočte jedného riadku matice druhým spomenutým spôsobom sa okrem hodnôt tohto riadku ľahko zistia aj niektoré hodnoty iných riadkov, ktoré však postupný spôsob po riadkoch nevyužíva. Príspevok navrhuje spôsob využitia takýchto hodnôt.

*Príučové slová: hranovo ohodnotený, graf, digraf, matica vzdialeností*

### Abstract

There are several methods for computing a distance matrix in a edge weighted graph or digraph. Complete matrix can be calculated all at once using Floyd algorithm or row by row by a point to point algorithm. The row by row computation offers not only the entries of computed row but also values useful for other rows. However, the row by row approach does not make use of these values. This paper proposes a way how to make use of these values.

*Keywords: edge weighted, graph, digraph, distance matrix*

## 1 TRADIČNÉ METÓDU VÝPOČTU MATICE VZDIALENOSTÍ

Téma výpočtu matice vzdialeností v hranovo ohodnotenom grafe alebo orientovanom grafe – digrafe by sa mohla zdať dávno uzavretá. Základným algoritmom výpočtu je Floydov algoritmus, ktorý počíta maticu vzdialeností naraz, alebo postupy výpočtu riadkov po riadku niektorým algoritmom point to all – napr. Dijkstrov algoritmus, Fordov algoritmus resp. ich modifikácie nazývané label-set algoritmus či label-correct algoritmus. Stále sa však objavujú články, ktoré navrhujú modifikácie známych metód či nové metódy napr. použitím max-min algebry, ktoré síce nemusia byť vo všeobecnom prípade lepšie ako spomínané dva prístupy, ale osvedčujú sa v špeciálnych prípadoch.

### 1.1 Floydov algoritmus

Majme graf alebo digraf  $G = (V, H, c)$  s množinou vrcholov  $V$ , množinou hrán  $H$  a cenou hrany  $c(h)$ . Ak  $h = \{i, j\} \in H$  je neorientovaná hrana grafu  $G$ , resp.  $h = (i, j) \in H$  je orientovaná hrana digrafu  $G$ , cenu hrany  $h$  budem značiť  $c(i, j) = c(h)$ . Vzdialenosťou  $d(u, v)$  dvoch vrcholov  $u \in V, v \in V$  grafu  $G$  budeme rozumieť dĺžku najkratšej  $u-v$  cesty resp. dĺžku najkratšej  $u-v$  orientovanej cesty v grafe (resp. digrafe)  $G$ . Budeme predpokladať, že počet vrcholov grafu  $G$  je  $n = |V|$ , počet hrán grafu  $G$  je  $m = |H|$  že  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  a že prvok 0 nie je vrcholom.

Floydov algoritmus je nasledovný: Položme

$$d(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pre } i = j \\ c(i, j) & \text{pre } \{i, j\} \in H \text{ resp. pre } (i, j) \in H \\ \infty & \text{pre } i \neq j, \{i, j\} \notin H \text{ resp. } (i, j) \notin H \end{cases}$$

$$x(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pre } i = j \\ i & \text{pre } \{i, j\} \in H \text{ resp. pre } (i, j) \in H \\ \infty & \text{pre } i \neq j, \{i, j\} \notin H \text{ resp. } (i, j) \notin H \end{cases}$$

```

for(k=1, k<=n, k++){
    for(i=1, i<=n, i++){
        if(d(i, k) < NEKONECNO) then {
            for(j=1, j<=n, j++){
                if(d(i, j) < c(i, k)+ c(k, j) then{
                    d(i, j) = c(i, k)+ c(k, j);
                    x(i, j) = x(k, j);}
            }
        }
    }
}

```

■

Zložitosť Floydovho je  $O(n^3)$ .

Prvky matice  $\{x(i, j)\}$  sú smerníky na predposledné vrcholy najkratších  $i$ - $j$  ciest. Ak potrebujeme len vzdialenosti a nebudeme konštruovať príslušné najkratšie cesty, maticu prvkov  $x(i, j)$  môžeme vypustiť.

## 1.2 Label-set implementácia Dijkstrovho algoritmu a Label-correct implementácia Fordovho algoritmu

Label-set a Label-correct implementácie spomenutých algoritmov sú určené na hľadanie všetkých najkratších  $u$ - $v$  ciest z pevného vrchola  $u \in V$  do všetkých ostatných vrcholov  $v \in V$  v hranovo ohodnotenom grafe alebo digrafe  $G = (V, H, c)$  s nezápornou cenou hrany  $c(h)$ .

**Krok 1:** Inicializácia.

Pre každý vrchol  $i \in V$  priradiť dve značky  $t(i)$  a  $x(i)$ .

Značka  $t(i)$  predstavuje horný odhad dĺžky doteraz nájdenej najlepšej  $(u, i)$  cesty a  $x(i)$  jej predposledný vrchol.

Polož  $t(u) := 0$ ,  $t(i) := \infty$  pre všetky  $i \in V, i \neq u$  a  $x(i) := 0$  pre každé  $i \in V$ .

Vlož štartovací vrchol  $u$  do množiny  $E$  – t.j. polož  $E := \{u\}$ .

**Krok 2:** Vyber tzv. riadiaci prvok  $r \in E$ , polož  $E := E - \{r\}$ .

Pre všetky hrany tvaru  $\{r, j\}$  resp. orientované hrany tvaru  $(r, j) \in H$  urob:

Ak  $t(j) > t(r) + c(r, j)$ , potom

$t(j) := t(r) + c(r, j)$ ,  $x(j) := r$ ,  $E := E \cup \{j\}$ .

**Krok 3:** Ak  $E \neq \emptyset$ , choď na Krok 2.

Ak  $E = \emptyset$ , STOP.

Potom  $t(i)$  predstavuje dĺžku najkratšej orientovanej  $u-i$  cesty pre každý vrchol  $i$ . Najkratšiu orientovanú  $u-i$  cestu zostroj potom spätne pomocou značiek  $x(i)$  takto

$$i, x(i), x(x(i)), x(x(x(i))), \dots, x(\dots x(x(x(i)))) = u \quad \blacksquare$$

Množina  $E$  je množinou tých vrcholov grafu (digrafu)  $G$ , v okolí ktorých ešte môže existovať  $j \in V$ , ktorých značku  $t(j)$  možno znížiť v kroku 2. Ak je táto množina prázdna, výpočet najkratších ciest končí.

Výber riadiaceho prvku  $r$  z množiny  $E$  v kroku 2 práve popísaného algoritmu nie je v ňom presne špecifikovaný. Ak tento prvok vyberáme ľubovoľne bez akýchkoľvek ďalších požiadaviek, máme tzv. **label-correct** algoritmus, ktorý môžeme považovať za implementáciu tu nespomínaného Fordovho algoritmu.

Ak za riadiaci prvok  $r$  vyberáme ten prvok množiny  $E$ , ktorý má najmenšiu značku  $t(r)$  máme **label-set** algoritmus, ktorý môžeme považovať za implementáciu slávneho Dijkstrovho algoritmu. Label-set algoritmus má tú výhodu, že v okamihu, keď sa niektorý prvok  $r$  stane riadiacim prvkom, už vieme, že hodnota  $t(r)$  predstavuje dĺžku najkratšej  $u-r$  cesty, a preto sa dá label-set algoritmus efektívne použiť aj v prípade hľadania jednej konkrétnej najkratšej  $u-v$  cesty – ak totiž  $v = r$ , možno algoritmus zastaviť.

Pretože sa každý vrchol môže stať riadiacim prvkom iba raz, label-set algoritmus kontroluje každú hranu v kroku 2 iba raz na rozdiel od label-correct algoritmu, ktorý môže v kroku 2 spracovávať každú hranu viac krát. Táto výhoda label-correct algoritmu je však vyvážená ďalšou réžiou pri hľadaní riadiaceho prvku s minimálnou hodnotou  $t(r)$ .

V literatúre sa uvádza, že zložitosť label-set algoritmu (t.j. Dijkstrovho algoritmu) pri implementácii množiny  $E$  binárnou alebo Fibonacciho haldou je

$$O(m + n \cdot \log n), \text{ kde } n = |V|, \quad m = |H|.$$

Ak už máme najkratšiu  $u-v$  cestu tvaru v tvare alternujúcej postupnosti vrcholov a hrán

$$u \equiv v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, v_{k-1}, (v_{k-1}, v_k), v_k \equiv v,$$

potom každá jej podpostupnosť začínajúca a končiaca vrcholom pre  $1 \leq i < j \leq k$

$$v_i, (v_i, v_{i+1}), v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, (v_{j-1}, v_j), v_j$$

určuje najkratšiu  $v_i-v_j$  cestu v grafe  $G$ .

Vektor  $x(i)$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$  je vektor smerníkov na predposledné vrcholy najkratších  $u-i$  ciest. Digraf s množinou vrcholov  $V$  a množinou orientovaných hrán

$$\{(i, x(i)) ; i \neq u\}$$

je orientovaný koreňový strom s koreňom  $u$ , v ktorom každá orientovaná  $i-u$  cesta predstavuje najkratšiu  $u-i$  cestu v grafe  $G$  vymenovanú od zadu.

### 1.3 Výpočet matice vzdialeností po riadkoch

Maticu vzdialeností možno počítat postupne po riadkoch, keďže  $u$ -tý riadok tejto matice obsahuje dĺžky všetkých najkratších  $u$ - $j$  ciest, kde  $u$  je pevné,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Postupné  $n$ -násobné použitie Dijkstrovho resp. label-set algoritmu by viedlo k zložitosti

$$O(nm + n^2 \cdot \log n), \text{ kde } n = |V|, m = |E|.$$

Pre husté grafy, kde  $m \approx n^2$ , je zložitosť výpočtu po riadkoch  $O(n^3)$  - rovnaká ako zložitosť Floydovho algoritmu. Pre rovinné grafy je však  $m \approx 3n$ , a preto je zložitosť výpočtu po riadkoch  $O(n^2 \cdot \log n)$ .

## 2 POKUS O ZRÝCHLENIE VÝPOČTU MATICE VZDIALENOSTÍ

Ak už máme najkratšiu  $u$ - $v$  cestu tvaru v tvare alternujúcej postupnosti vrcholov a hrán

$$u \equiv v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, v_{k-1}, (v_{k-1}, v_k), v_k \equiv v,$$

potom každá jej podpostupnosť začínajúca a končiaca vrcholom pre  $1 \leq i < j \leq k$  tvaru

$$v_i, (v_i, v_{i+1}), v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, (v_{j-1}, v_j), v_j$$

určuje najkratšiu  $v_i$ - $v_j$  cestu v grafe  $G$ . Ak počítame jeden riadok matice vzdialeností, tieto údaje nevyužívame a pri prechode na ďalší riadok ich vlastne strácame.

Základnou myšlienkou pre zrýchlenie výpočtu po riadkoch je pokúsiť sa využiť tieto vypočítané údaje pri výpočtoch ďalších riadkov matice.

Myšlienka, ako to urobiť je táto:

Na začiatku výpočtu poznáme pre každý riadok  $u$  len najkratšiu  $u$ - $u$  cestu, čomu zodpovedá matica  $T$ , ktorá má na hlavnej diagonále nuly, inak samé  $\infty$ . Strom najkratších vzdialeností pre každý riadok  $u$  je triviálny strom obsahujúci len koreň  $u$ , čomu zodpovedá matica  $X$ , ktorá má na hlavnej diagonále nuly, inak samé  $\infty$ .

**Krok 0:** Majme matice  $T = \{t(i, j)\}$  a  $X = \{x(i, j)\}$  inicializovanú takto

$$t(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pre } i = j \\ \infty & \text{pre } i \neq j \end{cases} \quad x(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pre } i = j \\ \infty & \text{pre } i \neq j \end{cases}$$

Pri výpočte ďalšieho riadku predpokladáme, že v každom riadku  $i$  matice  $T$  už máme doteraz vypočítané konečné hodnoty  $t(i, j)$  predstavujúce vzdialenosti z  $i$  do  $j$  a v matici  $X$  príslušná hodnota  $x(i, j)$  predstavuje predposledný vrchol najkratšej  $i$ - $j$  cesty. Zdôraznime, že konečná hodnota  $t(i, j)$  je dĺžka najkratšej  $i$ - $j$  cesty, nekonečná hodnota znamená, že najkratšia  $i$ - $j$  cesta ešte nebola nájdená.

**Krok 1:** Výpočet ďalšieho riadku  $u$  matíc  $T, X$  bude nasledovný

Položme  $E = \emptyset$ . Množina  $E$  bude obsahovať vrcholy, ktorých okolie ešte treba preskúmať. Ďalej položme  $R = \{r \mid t(r, j) < \infty\}$ .

Pre všetky hrany typu  $(r, j)$ , kde  $r \in R$  urob:

Ak  $t(u, j) > t(u, r) + c(r, j)$ , potom

$$t(u, j) := t(u, r) + c(r, j), \quad x(u, j) := r, \quad E := E \cup \{j\}.$$

**Krok 2:** Vyber riadiaci prvok  $r \in E$  s minimálnou značkou  $t(u, r)$ ,

Polož  $E := E - \{r\}$ .

Teraz vieme, že vzdialenosť z  $u$  do  $r$  je  $t(u, r)$  a predposledným vrcholom najkratšej cesty z  $u$  do  $r$  je  $x(u, r)$ .

Súčasne však vieme ľahko dopočítať vzdialenosti všetkých vrcholov  $i$  najkratšej ( $u, r$ ) cesty do vrcholu  $r$ . Sú to vrcholy  $i$  tvaru

$$x(u, r), x(x(u, r)), x(x(x(u, r))), \dots$$

Polož  $i := r$

Pokiaľ  $x(u, i) > 0$ , urob

{

Polož  $i := x(u, r)$

$$x(i, r) := x(u, r), \quad t(i, r) := t(i, x(i, r)) + c(x(i, r), r)$$

$$i := x(u, i)$$

}

Pre všetky hrany tvaru  $\{r, j\}$  resp. orientované hrany tvaru  $(r, j) \in H$  urob:

Ak  $t(u, j) > t(u, r) + c(r, j)$ , potom

$$t(u, j) := t(u, r) + c(r, j), \quad x(u, j) := r, \quad E := E \cup \{j\}.$$

**Krok 3:** Ak  $E \neq \emptyset$ , choď na Krok 2.

Ak  $E = \emptyset$  a ak ešte existuje nedopočítaný riadok matice  $T$ , počítaj ďalší riadok, t.j. choď na krok 1.

Inak STOP. ■

Správnosť činnosti práve formulovaného algoritmu nezávisí na poradí výberu riadka matice, ktorý sa bude počítat'. Najjednoduchší postup je počítat' maticu riadok za riadkom. Iný postup je snažiť sa pokračovať v takom riadku, ktorý by dával nádej na maximum dodatočných vzdialeností určených v kroku 2., čo je ale potrebné ešte experimentálne vyskúšať.

Istú nádej na zrýchlenie Floydovho algoritmu tu dáva skutočnosť, že pri výpočte  $n$  vzdialeností v riadku  $u$  sa vypočíta niekoľkonásobne viac dodatočných vzdialeností. Autor dúfa, že dodatočná režia s uplatnením týchto údajov neprevýši spomínaný benefit navrhovaného postupu.

Nezanedbateľnou nevýhodou tohto algoritmu je nutnosť udržiavať paralelnú maticu  $X$ , čím sa zdvojnásobujú pamäťové nároky navrhovaného algoritmu. V súčasnosti však veľkosť ROM pamätí enormne stúpla, takže zvýšené pamäťové nároky by nemali byť podstatnou prekážkou aplikácie môjho algoritmu.

Pri výpočtoch veľkých rozmeroch sa môže uplatniť vplyv cash pamätí rôznych úrovní a je otázkou pre informatikov, či možno výpočet zorganizovať tak, aby sa počet prepisovaní týchto pamätí minimalizoval.

Tento článok je iba prvým oznámením princípu výpočtu. Výskum bude ďalej pokračovať porovnaním efektivity navrhovaného postupu na rôznych typoch veľkých grafov. Autor s istou nádejou očakáva ich výsledky, ale je pripravený aj na sklamanie.

## **Literatúra.**

1. DACHUAN WEI: An Optimized Floyd Algorithm for the Shortest Path Problem, Journal of Networks, Vol.5, No.12, Dezember 2010
2. PLESNÍK, J.:1985. Grafové algoritmy, Bratislava 1985
3. PALÚCH, S.: A multi label algorithm for k shortest paths problem , In: Communications : Scientific Letters of the University of Žilina. Vol. 11, No. 3, 2009, 11-14.

**Acknowledgement:** The research was supported by the Slovak research grants VEGA 1/0296/12 „Public Service Systems with Fair Access to Service“, APVV-0760-11 „Designing of Fair Service Systems on Transportation Networks.“

## **Kontaktné údaje**

Doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc.

Žilinská univerzita v Žilina, Fakulta riadenia a informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

email: [novak@euba.sk](mailto:novak@euba.sk)

# TRIEDY MIER RIZIKA FINANČNÝCH AKTÍV<sup>1</sup>

## CLASSES OF RISK RATIO FOR FINANCIAL ASSETS

*Juraj Pekár, Ivan Brezina, Zuzana Čičková*

### Abstrakt

Základ modernej teórie portfólia je založený na použití kritérií očakávaného výnosu a rizika pri výbere investičnej stratégie. Markowitz v roku 1952 prezentoval formuláciu a riešenie úlohy výberu portfólia na základe mier rizika a očakávaného výnosu. Od publikovania jeho modelu bolo vyvinutých mnoho rozvinutejších modelov výberu portfólia, pričom boli definované rôzne miery rizika. Nasledujúci príspevok opisuje rôzne triedy mier rizika, ktoré definovali rôzni autori, pričom ich vlastnosti pomáhajú pri riešení úloh výberu portfólia.

*Kľúčové slová: riziko, aktívum, miery rizika*

### Abstract

The basis of selection of the investment strategy in the field of portfolio theory is using the criteria: expected return and risk. Markowitz in 1952 has published a work aimed at formulation and solving portfolio selection problem based on the level of risk and expected return. Nowadays, much more advanced models of portfolio selection problem using different levels of risk are known. The article describes the different classes of the level of risk based on different authors, which may help in solving the problems of portfolio selection.

*Keywords: risk, asset, risk ratio*

## 1 ÚVOD

Investor v snahe dosiahnuť čo najvyšší výnos musí akceptovať určitú úroveň rizika. Riziko predstavuje možnosť, že sa skutočný výnos odlišuje od očakávaného výnosu. Riziko teda predstavuje neistotu budúcich príjmov. Určité riziká, no nie všetky, možno znížiť ich diverzifikáciou. Investori sa tak môžu rozhodnúť umiestniť svoje finančné prostriedky namiesto do jedného cenného papiera do veľkého množstva cenných papierov a vytvoriť tak diverzifikované portfólio. Základom diverzifikácie je alokácia investícií do rôznych variácií aktív s cieľom minimalizovať riziko spojené s očakávanými výnosmi jednotlivých cenných papierov.

Pre investora je dôležitá informácia o očakávanom výnose, avšak táto nie je postačujúca. Platí pravidlo, ktoré hovorí, že čím je očakávaný výnos nejakého aktíva vyšší, tým je toto aktívum rizikovejšie. Finančná teória vychádza z predpokladu, že investor má averziu voči riziku. Tento predpoklad vyjadruje, že ak si má investor vybrať medzi dvomi aktívami, ktoré mu prinášajú rovnaký očakávaný výnos, vyberie si to aktívum, ktoré prináša menšie riziko. Otázkou je, ako toto riziko kvantifikovať?

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

## 2 MERANIE RIZIKA

Ako základný kameň manažmentu portfólia možno uviesť teóriu portfólia vytvorenú Markowitzom v roku 1952 (Markowitz 1952), ktorá je považovaná za začiatok modernej teórie portfólia. Táto teória ukázala, ako možno za podmienok neistoty riešiť viacrozmerný problém investovania do veľkého počtu aktív, z ktorých každé má odlišnú charakteristiku, redukovať ho na problém vzťahu iba medzi dvoma prvkami: medzi očakávaným výnosom a rozptylom výnosov portfólia. Markowitz bol za svoju teóriu kritizovaný za použitie konceptu rizika pomocou rozptylu investícií a kovariancie medzi investíciami vzhľadom na to, že rozptyl meria disperziu výnosov aktíva okolo očakávaného výnosu a považuje výnosy pod a nad očakávaným výnosom za rovnaké (Markowitz, 1952).

V roku 1959 Markowitz (Markowitz 1959) uznal tieto obmedzenia a navrhol novú mieru dolného parciálneho rizika, ktorá meria riziko pod očakávaným výnosom. Nazval ju semi-rozptyl (semi-variancia). V nasledujúcich obdobiach sa záujem investorov pohyboval okolo mier dolného parciálneho rizika, medzi ktoré zaraďujeme už spomínanú dolnú semi-varianciu (dolná semi-štandardná odchýlka), dolnú semi-absolútnu odchýlku, Value at Risk (VaR) a Conditional Value at Risk (CVaR). Výhoda mier dolného parciálneho rizika spočíva v skutočnosti, že uvedené miery sú vhodné, ak rozdelenie výnosov je asymetrické (Konno a Yamazaki 1991). V súčasnosti existuje mnoho autorov, ktorí sa zaoberajú hľadaním vhodných mier rizika.

## 3 TRIEDY MIER RIZIKA

Ďalej budeme definovať rôzne typy mier rizika s ich príslušnými vlastnosťami. Všeobecne funkciu rizika možno definovať takto:

Nech  $X$  je náhodná premenná patriaca do množiny všetkých náhodných premenných reprezentujúcich výnosy  $X \in A$ , potom funkciu  $\rho: X \rightarrow \mathcal{R}$  označme ako funkciu rizika. Existuje rôzne rozdelenie mier rizika do skupín podľa ich vlastností.

### Trieda parametrických mier rizika

V roku 1973 Stone (Stone 1973) definoval triedu trojparametrických mier rizika, ktorá má tvar pre spojitú náhodnú premennú  $X$  a jej funkciu hustoty pravdepodobnosti  $f(x)$ ,  $x \in X$  :

$$\rho(X) = \left( \int_{-\infty}^{\lambda} |c-x|^{\alpha} f(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

Parameter  $c$  predstavuje mieru výnosu, od ktorej sa odchýlka meria. Parameter  $\lambda$  definuje takú úroveň výnosu pre náhodnú premennú, po ktorú treba uvedené výnosy zahrnúť do merania rizika. Posledný parameter  $\alpha$  vyjadruje relatívnu významnosť veľkých a malých odchýlok.

Pre diskrétnu náhodnú premennú  $X$  reprezentovanú vektorom výnosov  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_T)$  a vektorom pravdepodobností nastatia jednotlivých stavov  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_T)$  má táto miera rizika tvar:

$$\rho(\mathbf{r}) = \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ r_k \leq \lambda}}^T |c-r_k|^{\alpha} p_k \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (2)$$



Do Stonovej triedy mier rizík patrí niekoľko štandardne používaných mier, ako je napr. štandardná odchýlka, semi-štandardná odchýlka a priemerná absolútna odchýlka.

Ďalšie zovšeobecnenie Stonovej triedy mier rizík uviedli (Pedersen a Satchell 1998).

### **Pedersonove a Satchellove miery rizika**

V (Pederson a Satchell 1998) je riziko definované ako odchýlka od určenej hodnoty. Prvý predpoklad miery rizika predstavuje nezápornosť hodnôt. Pritom okrem tejto vlastnosti musia platiť aj ďalšie vlastnosti miery rizika, konkrétne pozitívna homogenita, subaditívnosť a translačná invariancia. Jednotlivé vlastnosti miery rizika možno definovať takto:

1. subaditívnosť:  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2), \forall X_1, X_2 \in A$  (3)

2. pozitívna homogenosť:  $\rho(cX) = c\rho(X), c \geq 0, \forall X \in A$  (4)

3. nezápornosť:  $\rho(X) \geq 0, \forall X \in A$  (5)

4. translačná invariancia:  $\rho(X + c) \leq \rho(X), \forall c, \forall X \in A$  (6)

### **Koherentné miery rizika**

Idea koherentných mier rizika bola prezentovaná v (Artzner a kol. 1999). Koherentné miery rizika sú také miery, ktoré spĺňajú vlastnosti: invariantnosť, monotónnosť, subaditívnosť, a pozitívnu homogenosť.

Štyri kritériá navrhnuté v (Artzner a kol. 1999) stanovili pravidlá pre výber a hodnotenie rizikových mier. Treba si však uvedomiť, že nie všetky miery rizika, ktoré spĺňajú prezentované štyri navrhované axiómy, je rozumné použiť v praktických situáciách. Kritiku uvedených mier rizika možno nájsť napr. v (Dhaene a kol. 2003).

Jedným z dôvodov na tvorbu axiomatizovaných tried mier rizík je dôraz na riešiteľnosť úloh výberu portfólia, pričom ak dokážeme tvrdenie pre mieru rizika s danými vlastnosťami, výsledky možno zovšeobecniť. Na základe toho boli definované axiómy, po splnení ktorých hovoríme o koherentnosti miery rizika. Budeme vychádzať z Artznerových axióm (Artzner a kol. 1999), pričom musí platiť, že miera rizika je:

1. subaditívna:  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2), \forall X_1, X_2 \in A$  (7)

2. pozitívne homogénna:  $\rho(cX) = c\rho(X), c \geq 0, \forall X \in A$  (8)

3. monotónna: ak  $X_1 \leq X_2$ , tak  $\rho(X_1) \geq \rho(X_2), \forall X_1, X_2 \in A$  (9)

4. translačne invariantná:  $\rho(X + c) = \rho(X) - c, \forall c, \forall X \in A$  (10)

### **Konvexné miery rizika**

Konvexné miery rizika (niekedy nazývané aj slabo koherentné miery rizika) boli analyzované vo (Follmer a Schied 2002a, 2002b). Konvexné miery rizika sú zovšeobením koherentných mier rizika, pričom možno abstrahovať od vlastnosti pozitívnej homogenosti a subaditívnosti. Na druhej strane vyžadujú splnenie slabšej vlastnosti, ktorú predstavuje konvexnosť.

1. konvexnosť:  $\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) \leq \lambda \rho(X_1) + (1 - \lambda) \rho(X_2), \forall X_1, X_2 \in A, 0 \leq \lambda \leq 1$  (11)

$$2. \text{ monotónnosť: ak } X_1 \leq X_2, \text{ tak } \rho(X_1) \geq \rho(X_2), \forall X_1, X_2 \in A \quad (12)$$

$$3. \text{ tlnslačná invariancia: } \rho(X + c) = \rho(X) - c, \forall c, \forall X \in A \quad (13)$$

### Odchýlkové miery rizika

Autori (Rockafeller a kol. 2003) definovali odchýlkové miery rizika, pričom uvedené miery musia spĺňať vlastnosti subaditívnosti, pozitívnej homogénnosti a taktiež musia nadobúdať pre konštantnú náhodnú premennú hodnotu 0 a pre nekonštantnú náhodnú premennú kladnú hodnotu. Odchýlkové miery rizika sú bežne používané investormi, ktorí majú úplnú averziu k riziku. Uvedené vlastnosti možno zapísať:

1.  $\rho(X) = 0$ , kde  $X$  je konštantná náhodná premenná
2.  $\rho(X) > 0$ , kde  $X$  nie je konštantná náhodná premenná
3. subaditívnosť:  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2), \forall X_1, X_2 \in A \quad (14)$

4. pozitívna homogénnosť:  $\rho(cX) = c\rho(X), c \geq 0, \forall X \in A \quad (15)$

### Kvantilové miery rizika

Medzi kvantilové miery rizika patrí známe miery rizika Value at Risk (VaR) a Conditional Value at Risk (CVaR). Value at Risk (VaR) určuje minimálnu úroveň straty s danou pravdepodobnosťou (úroveň spoľahlivosti). Na druhej strane miera CVaR (Rockafellar a Uryasev 2000) vyjadruje priemernú hodnotu straty pod stanovenou úrovňou spoľahlivosti.

### Drawdown miery rizika

Tendencia investorov je porovnávať súčasnú hodnotu rizika s najlepšou hodnotou z minulosti. (Cheklov a kol. 2003) definovali funkciu drawdown ako rozdiel medzi maximálnym výnosom portfólia do času  $T$  a hodnoty portfólia v čase  $T$ . Príkladmi Drawdown mier sú absolútny Drawdown (AD), maximálny Drawdown (MDD), priemerný Drawdown (AVDD), Drawdown v riziku (DAR) a podmienený Drawdown v riziku (CDaR). Aj napriek ich výpočtovej jednoduchosti, Drawdown miery nepopisujú skutočnú situáciu na trhu, a preto by bolo vhodné používať ich v kombinácii s ďalšími mierami.

## 4 ZÁVER

V súčasnosti sa vo finančnej praxi využívajú rôzne typy mier rizika. Prelom v kategorizácii mier rizika predstavuje práca (Artzner a kol. 1999), ktorá ako prvá zavádzala podmienky na zaradenie do triedy mier rizika. Uvedená práca viedla k tvorbe rôznych tried mier rizika, ktoré vedú k zjednodušeniu riešenia rôznych typov úloh. V príspevku uvádzame rôzne triedy metrík, ktoré sú v súčasnosti známe.

### Použitá literatúra

1. ACERBI, C. – TASCHE, D.: On the coherence of Expected Shortfall. Journal of Banking & Finance 26(7), 2002.
2. ARTZNER, P. – DELBAEN, F. – EBER, J. M. – HEATH, D.: Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance 9(3), 1999.

3. BIGLOVA, A. – ORTOBELLI, S. – RACHEV, S. – STOYANOV, S.: Different approaches to risk estimation in portfolio theory. *Journal of Portfolio Management*. 31, 2004.
4. DHAENE, J. – GOOVAERTS, M. J. – KAAS, R.: Economic Capital Allocation Derived from Risk Measures. *North American Actuarial Journal* 7(2), 2003.
5. CHEKLOV, A. – URYASEV, S. – ZABARANKIN, M.: Portfolio Optimization with Drawdown Constraint. In: Scherer B (Ed.): *Asset and Liability Management Tools, Risk Books*. London, 2003.
6. FOLLMER, H., SCHIED, A.: Convex measures of risk and trading constraints. *Finance Stoch.*6, 2002a.
7. FOLLMER, H., SCHIED, A.: Robust preferences and convex measures of risk. *Advances in Finance and Stochastics*, Springer, Berlin. 2002b.
8. KONNO, H. – YAMAZAKI, H.: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. In *Management science*. 37, 1991.
9. MARKOWITZ, H. M.: Portfolio selection. In *Journal of Finance*. 7, 1952.
10. MARKOWITZ, H. M.: Portfolio selection: Efficient Diversification of Investment. New York: John Wiley & Sons, 1959.
11. PEDERSEN C. – SATCHELL S.: An extended family of financial-risk measures. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 23, 1998.
12. RACHEV, S. – ORTOBELLI, S. – STOYANOV, S. – FABOZZI, F. – BIGLOVA, A.: Desirable Properties of an Ideal Risk Measure in Portfolio Theory, *Int. J. Theor. Appl. Finan.* 11, 2008.
13. ROCKAFELLAR, R. – URYASEV, S. – ZABARANKIN, M.: Deviation measures in risk analysis and optimization, Risk Management and Financial Engineering Lab. 2003.
14. ROCKAFELLAR, T. R. – URYASEV, S.: Optimization of Conditional Value-at-Risk, *The Journal of Risk*, 2(3), 2000.
15. STONE, B. K.: A general class of three-parameter risk measures, *Journal of Finance* 28, 1973.

### **Kontaktné údaje**

doc. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: [pekar@euba.sk](mailto:pekar@euba.sk)

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 821

email: [brezina@euba.sk](mailto:brezina@euba.sk)

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826

email: [cickova@euba.sk](mailto:cickova@euba.sk)

# VÝPOČET MATICE DRUHÝCH NAJKRATŠÍCH VZDIALENOSTÍ

## DISTANCE MATRIX FOR SECOND SHORTEST DISTANCES

*Štefan Peško*

### **Abstrakt**

Floydov algoritmus pre výpočet matice vzdialenosti patrí medzi folklór teórie grafov. Pri riešení robustných trasovacích optimalizačných úloh v dopravnej sieti vzniká potreba výpočtu druhých najkratších vzdialeností medzi všetkými dvojicami uzlov. Cieľom tohoto príspevku je ukázať ako možno získať maticu druhých najkratších vzdialeností modifikáciou Floydovho algoritmu. Uvádzame implementáciu oboch algoritmov v jazyku Python.

*Kľúčové slová: matica druhých najkratších vzdialenosti, Floydov algoritmus, Python*

### **Abstract**

The Floyd's algorithm for computing the distance matrix belongs to the folklore of graph theory. For solving robust tracing optimization problems in transport network there is a need of calculating the second shortest distances between all pairs of nodes. The aim of this paper is to show how to get the matrix of shortest distances via modification of Floyd's algorithm. The implementation of algorithms in Python are given.

*Keywords: matrix of second shortest distances, Floyd's algorithm, Python*

## **1 ÚVOD**

Výpočet matice vzdialeností v sieti patrí medzi základné úlohy algoritmickej teórie grafov. Pre prípad výpočtu vzdialeností z daného uzlu do ostatných uzlov siete, ktorá môže byť modelovaná grafom (neorientované hrany) aj digrafom (orientované hrany), existujú viaceré efektívne algoritmy [5,6] - snáď najznámejší z nich je Dijkstrov algoritmus. Pri výpočte matice vzdialeností ho možno využiť opakovane, pre každý riadok matice zvlášť, ak sú hrany siete kladne ohodnotené. To je výhodné najmä ak je sieť riedka, inak je nielen rýchlejší ale aj elegantnejší Floydov algoritmus.

Pri riešení reálnych optimalizačných úloh na dopravných sieťach napr. nemotorizovaných ciest v dopravných sieťach Černá a Černý [1] alebo ciest s obmedzeným pohybom vozidiel Majer [2] vzniká prirodzená potreba hľadania alternatívnych ciest, pričom jednou z nich sú druhé najkratšie cesty v sieti. V prípade riedkych grafov alebo potreby nájsť druhú najkratšiu vzdialenosť len medzi niektorými vybranými dvojicami uzlov prichádza do úvahy famózný algoritmus k-najkratších ciest (pre  $k=2$ ) navrhnutý v prácach Palúch [3,4]. V tomto príspevku však ukážeme ako získať maticu druhých najkratších vzdialeností vhodnou modifikáciou Floydovho algoritmu.

## 2 FLOYDOV ALGORITMUS

Uvažujme hranovo (kladne) ohodnotený digraf  $G=(V,H,d)$ . Pre prípad, že by sme potrebovali modelovať sieť grafom, stačí uvažovať symetrické ohodnotenie orientovaných hrán digrafu. Hľadáme maticu vzdialeností  $D=(d_{ij})$  kde  $d_{ij}$  udáva dĺžku najkratšej  $ij$ -cesty v digrafe  $G$ .

Floydov algoritmus (**FA**) vychádza z dĺžok  $d_{ij}$  hrán  $(i,j) \in H$  a postupne počítá postupnosť matíc  $U_0, U_1, \dots, U_n$  kde  $n$  je počet vrcholov. Každá matica z tejto postupnosti má túto vlastnosť:

$u_k(i,j)$  je dĺžka najkratšej cesty z vrchola  $i$  do vrchola  $j$  taká, že okrem vrcholov  $i,j$  obsahuje cesta len vrcholy z množiny  $V=\{1,2,\dots,k\}$ .

V matici  $U_0$  máme len dĺžky najkratších ciest (orientovaných hrán), ktoré nesmú prechádzať cez žiadne vrcholy množiny  $V=\{1,2,\dots,n\}$  s výnimkou počiatočného a koncového vrchola. Pre dvojice vrcholov, kde takáto cesta neexistuje, kladieme dĺžku rovnú  $\infty$ . V matici  $U_n$  sú potom dĺžky najkratších ciest bez obmedzenia a tak hľadaná matica vzdialenosti  $D = U_n$ .

Vidíme, že ak poznáme maticu  $U_{k-1}$ , potom môžeme vypočítať maticu  $U_k$  pre  $k \in V$  takto:

$$u_k(i,j) = \min\{u_{k-1}(i,j), u_{k-1}(i,k) + u_{k-1}(k,j)\}. \quad (1)$$

Výpočet založený na vzťahu (1) je podstatou **FA**.

## 3 MODIFIKOVANÝ FLOYDOV ALGORITMUS

Skôr než sformulujeme našu modifikáciu **FA** upresníme pojem druhej najkratšej vzdialenosti medzi vrcholmi  $i$  a  $j$  hranovo ohodnoteného digrafu  $G=(V,H,d)$ . Druhou najkratšou vzdialenosťou  $d_{ij}$  z vrchola  $i$  do vrchola  $j$  v digrafe  $G$  tu rozumieme dĺžku takého najkratšieho orientovaného sledu  $s_{ij} = i \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow j$ , ktorá je väčšia než vzdialenosť z  $i$  do  $j$  t.j. dĺžka najkratšej  $ij$ -cesty  $d_{ij}$ . Maticu druhých najkratších vzdialeností budeme ďalej značiť  $C$ . Poznamenajme, že voľba sledu miesto cesty je nutná, nakoľko v prípade veľmi riedkych sietí, napr. stromu, druhá cesta medzi dvojicami vrcholov neexistuje ale sled, ktorý nie je cestou, existuje.

Pri odvodení modifikovaného Floydovho algoritmu (**MFA**) odvodíme vzťah analogický (1). Opäť konštruujeme postupnosť matíc  $U_0, U_1, \dots, U_n$  kde  $n$  je počet vrcholov. Každá matica z tejto postupnosti má túto vlastnosť:

$u_k(i,j)$  je dĺžka najkratšieho sledu  $s_{ij} = i \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow t \rightarrow \dots \rightarrow j$  z vrchola  $i$  do vrchola  $j$  cez vrchol  $t$  taká, že okrem vrcholov  $i,j$  obsahuje cesta len vrcholy z množiny  $\{1,2,\dots,k\}$  pričom súčet dĺžok sledov  $s_{it} = i \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow t$  a  $s_{tj} = t \rightarrow \dots \rightarrow j$  je väčší než  $d_{ij}$ .

Na rozdiel od **FA** nestačí tu na definovanie matice  $U_0$  len znalosť dĺžok hrán digrafu  $G$ . Môžeme ale využiť znalosť dĺžok najkratších ciest z matice vzdialeností  $D$  takto:

$$u_0(i,j) = \min\{d_{ik} + d_{kj} : d_{ik} + d_{kj} > d_{ij}, \exists k \in V, \infty\}. \quad (2)$$

Prvky matice  $U_0$  nám potom udávajú horný odhad hľadanej matice  $C$ .

Teraz už môžeme vypočítať maticu  $U_k$  pomocou matice  $U_{k-1}$  pre  $k \in V$  takto:

$$u_k(i,j) = \min\{u_{k-1}(i,j), d_{ik} + u_{k-1}(k,j), d_{ik} + d_{kj} \text{ if } d_{ik} + d_{kj} > d_{ij}\}. \quad (3)$$

V matici  $U_n$  sú potom dĺžky druhých najkratších vzdialeností t.j.  $C = U_n$ .

## 4 POČÍTAČOVÁ IMPLEMENTÁCIA

Oba algoritmy **FA** aj **MFA** boli naprogramované v jazyku Python. **FA** bol implementovaný ako funkcia **floyd**(Dmat) so vstupom  $Dmat = U_0$  a vracia riešenie v matici  $D = Dmat$ .

```
def floyd(Dmat):
```

```
    n,n = Dmat.shape
```

```
    for k in range(n):
```

```
        for i in range(n):
```

```
            for j in range(n):
```

```
                if i!=k and j!=k:
```

```
                    if Dmat[i,j]>Dmat[i,k]+Dmat[k,j]:
```

```
                        Dmat[i,j]=Dmat[i,k]+Dmat[k,j]
```

```
    return Dmat
```

**MFA** bol implementovaný ako funkcia **floyd2**(Dmat) so vstupom  $Dmat = D$  a vracia riešenie  $C = Cmat$ .

```
def floyd2(Dmat):
```

```
    n,n = Dmat.shape
```

```
    Cmat = copy(Dmat)
```

```
    for i in range(n):
```

```
        for j in range(n):
```

```
            for k in range(n):
```

```
                if Dmat[i,j]<Dmat[i,k]+Dmat[k,j]:
```

```
                    Cmat[i,j]=Dmat[i,k]+Dmat[k,j]
```

```
                    break
```

```
            if Cmat[i,j]==Dmat[i,j]:
```

```
                Cmat[i,j]=INF
```

```
    for k in range(n):
```

```
        for i in range(n):
```

```
            for j in range(n):
```

```
                if i!=k and j!=k:
```

```
                    if Dmat[i,j]<Dmat[i,k]+Dmat[k,j]\
```

```
                        and Cmat[i,j]>Dmat[i,k]+Dmat[k,j] :
```

```
                            Cmat[i,j]=Dmat[i,k]+Dmat[k,j]
```

```
                    if Cmat[i,j]>Cmat[i,k]+Dmat[k,j]:
```

```
                        Cmat[i,j]=Cmat[i,k]+Dmat[k,j]
```

```
    return Cmat
```

## 5 ZÁVER

V práci je navrhnutá modifikácia známeho Floydovho algoritmu pre výpočet vzdialenosti v hranovo ohodnotenom digrafe, ktorá umožňuje výpočet druhých najkratších vzdialenosti. Počítačové experimenty v Pythone s našou modifikáciou Floydovho algoritmu, ktorá má opäť algoritmickú zložitosť  $O(|V|^3)$  ukázali, že je prakticky použiteľná pre úlohy väčších rozmerov  $|V| < 300$ .

### PodĎakovanie

Tento článok vznikol vďaka podpore v rámci OP Výskum a vývoj pre projekt: CaKS - Centrum excelentnosti infromatických vied a znalostných systémov (ITMS: 26220120007), spolufinancovaný zo zdrojov Európskeho fondu regionálneho rozvoja a projektu APVV-0760-11 "Návrh férových servisných systémov na dopravných sieťach".

### Použitá literatúra

1. ČERNÁ, A., ČERNÝ, J. (2012) Note on optimal paths for non-motorized transport on the network, In *Mathematical Methods in Economics 2012*. Opava: Universita Opava, . ISBN 978-80-7248-779-0, s. 91--94.
2. MAJER, T. (2010) Shortest trail problem with respect to prohibited maneuvers. In: *Mathematical methods in economics 2010 : proceedings of the 28th international conference. Part 2*. České Budějovice : University of South Bohemia, ISBN 978-80-7394-218-2, s. 418-422.
3. PALÚCH, S. (2009) A multi label algorithm for k shortest paths problem In: *Communications : Scientific Letters of the University of Žilina*. - ISSN 1335-4205, Vol. 11, No. 3 , s. 11-14.
4. PALÚCH, S. (2012) A new(?) k-shortest path algorithm, In: *Mathematical methods in economics : proceedings of the 30th international conference : Karviná, Czech Republic 11-13 September 2012*. - Karviná: Silesian University in Opava, School of Business Administration, ISBN 978-80-7248-779-0. - S. 664-669.
5. PALÚCH, S. (2001) *Teória grafov*, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, EDIS, 207 s. ISBN 80-7100-874-5
6. HOCHBAUM, D. (2014) Section 8.9: Floyd-Warshall algorithm for all pairs shortest paths, *Lecture Notes for IEOR 266: Graph Algorithms and Network Flows*. Department of Industrial Engineering and Operations Research, University of California, Berkeley, dostupné 20.4.2015 <http://www.ieor.berkeley.edu/~hochbaum/files/ieor266-2014.pdf>

### Kontaktné údaje

Doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.  
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky  
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina  
Tel: +421-41-513 4275  
email: [stefan.pesko@fri.uniza.sk](mailto:stefan.pesko@fri.uniza.sk)

# DETERMINANTY ÚSPOR DOMÁCNOSTI V ČR: ARDL PRÍSTUP

## DETERMINANTS OF CZECH HOUSEHOLD SAVING: ARDL FRAMEWORK

*Renáta Pitoňáková*

### Abstrakt

Cieľom príspevku je ARDL metódou identifikovať faktory, ktoré ovplyvňujú úspory českých domácností. Databázu tvoria štvrťročné údaje 1999 Q4 – 2014 Q3. Výsledky potvrdzujú teoreticky predpoklad správania sa jednotlivcov pri sporení v závislosti od veku a disponibilného príjmu. Množina štandardných premenných bola rozšírená o údaje za vládny sektor a údaje z trhu práce. Z dlhodobého hľadiska úspory klesajú pri rastúcej vládnej spotrebe a rastúcom indexe zaťaženia. Reálny dôchodok a zvyšujúca sa nezamestnanosť podmieňujú k tvorbe úspor českých domácností. Krátkodobo rastú úspory pri zvyšujúcom sa príjme a dosiahnutej miere úspor z predchádzajúcich období. Rýchlosť návratu do rovnováhy je viac ako 30 %.

*Kľúčové slová: miera úspor, domácnosti, ARDL model, rovnováha, rýchlosť návratu*

### Abstract

The aim this article is to identify determinants of Czech household saving. Quarterly data 1999 Q4 – 2014 Q3 are applied in the investigation. The results support the view that household saving is related to age and income. The set of standard variables is extended covering government sector and labour market. In the long-run saving of households are declining with increasing government consumption and rising dependency ratio. Real income and rising unemployment support Czech households to save more. In the short-run saving rises due to higher real income and saving rate from the previous quarters. The speed of adjustment is about 30 %.

*Keywords: saving rate, household, ARDL framework, equilibrium, speed of adjustment*

## 1 INTRODUCTION

Saving and investment are the main factors of economic growth. Saving is a prerequisite of investment, which improves capital equipment, drives economic growth hence increases living standard of inhabitants. Inspection into household saving is connected with theoretical approaches to consumption decision of an individual. Life-Cycle Hypothesis [11], states that consumption decision depends upon stage of individuals' life and his sources. According to this, the rate of saving depends upon their decision to ensure a required level of their consumption for elderly times. An important factor determining both the level of consumption and saving is under this approach the age structure of inhabitants. Permanent Income Hypothesis [5], postulates, that consumption depends not only upon current income but on the future income as well, Buffer Stock Hypothesis [3], relates average consumption growth with average labour income growth. Saving process according to [10], comprises two stages. The first one represents volume of money that is put aside, saved with bank, or spent on purchasing commercial papers. This money is further on released and serves as a source of development. Second stage involves decision process of economic subjects to invest such finances. Saving is important for ensuring social and economic stability of households in a



short and long run. Keynes [9], points out eight motives why people save: to build up a reserve against unforeseen contingencies; to provide for an anticipated future relation between the income and the needs of the individual or his family different from that which exists in the present (for example, in relation to old age, family education, or the maintenance of dependents); to enjoy interest and appreciation, i.e. because a larger real consumption at a later date is preferred to a smaller immediate consumption; to enjoy a gradually increasing expenditure, since it gratifies a common instinct to look forward to a gradually improving standard of life; to enjoy a sense of independence and the power to do things; to secure a *masse de manoeuvre* to carry out speculative or business projects; to bequeath a fortune; to satisfy pure miserliness. According to [10], there are the following objectives for saving: Saving for lifelong goals (costs on children education, purchase of house, flat, and provision for retirement); Preventive saving (financing unexpected negative events, unemployment, and costly medical treatment) and saving for heirs. At least one of these above mentioned reasons inspire households to save.

The aim of this article to identify determinants of household savings in the Czech Republic as majority of empirical research papers present outcomes for the Czech Republic within a group of countries under review<sup>1</sup>. The structure of the article is the following. After the introductory part there is an overview of saving theory, corresponding empirical papers and trend in saving rate of Czech households. Part three describes the model and variables, part four presents achieved results, the last one concludes.

## 2 DETERMINANTS OF HOUSEHOLD SAVING

The entire volume of saving<sup>2</sup> is from the theory determined by particular economic factors such as interest rate, inflation rate, unemployment, economic growth. Rising interest rate stimulates economic subjects to save more, while increasing inflation requires putting more money on present consumption and reduces consumption in the future. Keynes [9], stresses the importance of fiscal policy of the government, as government spending can stimulate consumption of households. Positive changes in the economy, expectations on economic growth increase saving. According to [8], Keynes rejected the assumption of classical economists about the equilibrium between saving (S) and investment (I). Under balanced budget of government and trade, the  $S=I$ . The surplus in saving (private saving) is important for its economic development however, in some cases the surplus is used for financing government budget rather than private sector [8]. Beside economic factors there are psychological determinants such as e. g. consumption behaviour of individuals or advertisement of financial institutions. People tend to adopt consumption patterns of their neighbours, relatives and are in a certain extend under the influence of a promotion. Empirical studies extend the set of variables defined in the theory in order to catch for possible differences among households, countries. Variables are according to this, grouped into categories such as Demographics (structure of age: dependency ratios), Education, Labour Force (female, male), Macroeconomics (Economic growth, Inflation, Interest rate) and Institutional infrastructure (number and size of banks, Investment funds, National regulator).

Research devoted to household saving determinants in the Czech Republic is in the majority done within a group of selected countries. Paper worked out by [2], was searching for determinants of Households' Savings in Central, Eastern and South Eastern Europe. Findings suggest that age, education, and income drive the propensity to save and reveal that the hump-shaped relationship between age and savings as predicted by the life-cycle hypothesis holds

---

<sup>1</sup> Research topic is a part of the scientific project No 1/0446/15.

<sup>2</sup> Household Saving: difference between Total income of Household and Total spending of the Household.

for CESEE. [7], tested the hypothesis of permanent income in the Czech Republic. Their results suggest that only a small number of transferred assets were consumed. These results are consistent with the permanent income hypothesis. [14], focused on private savings in Eastern European EU-Accession Countries. They argue among others that income growth increases savings, whereas public saving reduces private saving. [4], identified determinants of household saving and their influence on economy development. Countries under observation were grouped into three sections according to the value of correlation coefficient. The results indicate that many factors impacting saving of household also influence the economic growth.

## 2.1 Overview of Household Saving in the Czech Republic

The figure indicates two substantial declines of saving rate. The first within 2001 – 2004 when saving rate declined up to 9,92 %, the second in 2010 – 2013 ending at 9,7 %. The first decline might have been associated with different expectations of households due to entrance of the Czech Republic to the EU in 2004. The consumption of household according to the data from national accounts grew on the average within 1993 – 2011 by 6,7 % annually, however, in 2009 the dynamics of costs on consumption was in descending stand and in 2012 it fell down both in real and nominal terms.

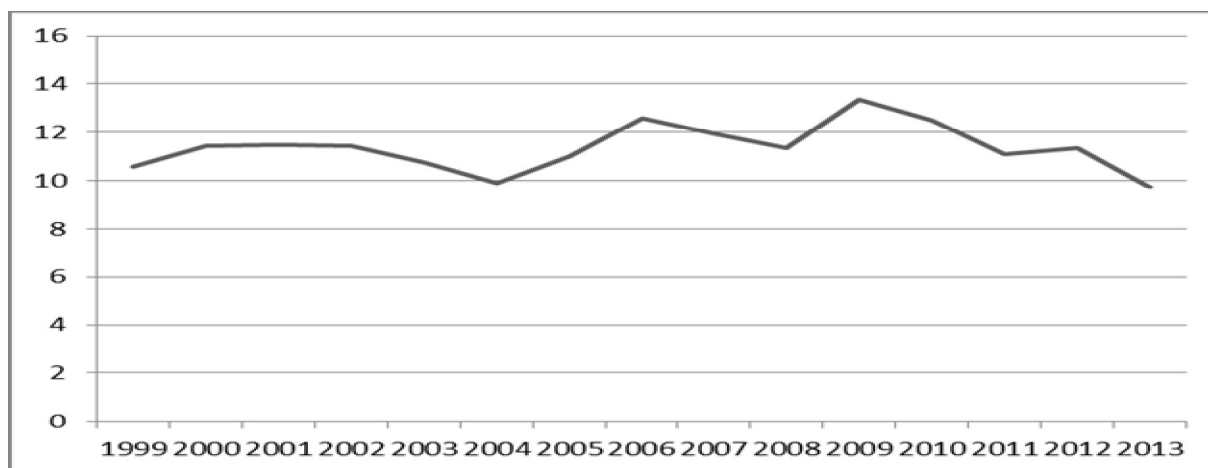


Figure 1. Gross Household Saving Rate in the Czech Republic (1999 – 2013).

The figure points out two important years: 2009 – time of financial crisis; 2012 – recession. In 2009 because household consumption was year on year decreasing, savings were rising. Adverse development in disposable income along with unfavourable situation on the labour market instigated households to save in 2012. Due to the recovery of economic indicators saving rate was descending in the following year.

## 3 DESCRIPTION OF MODEL AND VARIABLES

For our investigation we apply ARDL technique<sup>3</sup>. It is Autoregressive Distributed Lag method presented by [12], [13]. ARDL approach enables to identify cointegration relation in small samples and can be applied to regressors of I(1) and I(0). In ARDL procedure variables can have different number of lags. The ARDL approach requires the existence of long-term relationship among variables (based upon F-test), the estimation of coefficients of the long-term relation and the estimation of short-term elasticity of variables with ECT (Error Correction Term) of the ARDL model. According to [12], if the computed Wald or F-statistic falls outside the critical value bounds, a conclusive inference can be drawn without needing to

<sup>3</sup> Estimations in EViews.

know the integration/cointegration status of the underlying regressors. However, if the Wald or F- statistic falls inside these bounds, inference is inconclusive and knowledge of the order of the integration of the underlying variables is required before conclusive inferences can be made.

A basic form of the ARDL model is as follows:

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^r \chi_k L^k Y_t + \sum_{m=0}^s \delta_m L^m X_t + u_t \quad (1)$$

where

$\beta_0$  - intercept;

$\chi_k, \delta_m$  - coefficients;

$L$  - lag operator (e. g.  $LX_t = X_{t-1}$ );

$u_t$  - error term.

As it is well known the ARDL model helps us to study

- a) the short-run reaction and
- b) the long-run reaction that are important in many economic problems.

ARDL can be reproduced to ECM<sup>4</sup> ARDL version by transforming variables (1) into differences and lags. Equation (2) displays unrestricted ARDL ECM structure that we apply for identifying short and long-term relations among variables<sup>5</sup>.

$$\begin{aligned} \Delta SR_t = & \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j \Delta SR_{t-j} + \sum_{j=0}^m \gamma_j \Delta GC_{t-j} + \sum_{j=0}^m \delta_j \Delta Y_{t-j} \\ & + \sum_{j=0}^m \theta_j \Delta DO_{t-j} + \sum_{j=0}^m \mu_j \Delta U_{t-j} + \lambda_1 SR_{t-1} + \lambda_2 GC_{t-1} + \lambda_3 Y_{t-1} + \lambda_4 DO_{t-1} \\ & + \lambda_5 U_{t-1} + u_t \end{aligned} \quad (2)$$

where

$\Delta$  - first difference operator;

$\alpha_0$  - intercept;

$\beta, \gamma, \delta, \theta, \mu$  - coefficients of short-run relation;

$\lambda_1 - \lambda_5$  - coefficients of long-run relation;

$u_t$  - error term;

where

SR: Gross Saving Rate of Household<sup>6</sup> calculated as:  $SR_t = \frac{I_t - C_t}{I_t} * 100\%$

$I_t$  – the total household income at time t;  $C_t$  – the total expenditure of households at time t;

<sup>4</sup> ECM includes variables in first differences and with an error-correction term [15].

<sup>5</sup> Estimations in EViews.

<sup>6</sup> The *household sector* covers individuals or group of individuals whose principal function is consumption. It also includes own-account workers or entrepreneurs and unincorporated partnerships producing goods and services, when their activities cannot be separated from those of their owners. The household sector has been complemented by non-profit institutions serving households (NPISH). This generally small sector includes charities, trade-unions, churches, political parties, sports clubs etc. The *gross household saving rate* is calculated by dividing gross saving by gross disposable income (def. according to Eurostat).

GC: General Government Final Consumption Expenditure<sup>7</sup> (seasonally adjusted, transformed into log, deflated by CPI);  
 Y: Gross Disposable Income of Households<sup>8</sup> (transformed into log, deflated by CPI);  
 DO: Old Dependency Rate (ratio of the population aged 65 or older to the population aged 15-64);  
 U: Unemployment Rate<sup>9</sup>.

Data were derived from the databases of Eurostat, the Czech National Bank, and Czech Statistical Office and the Economic Research Federal Reserve Bank of ST. LOUIS.

The restricted ARDL ECM model involving error correction term is the following:

$$\Delta SR_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \beta_j \Delta SR_{t-j} + \sum_{j=0}^m \gamma_j \Delta GC_{t-j} + \sum_{j=0}^m \delta_j \Delta Y_{t-j} + \sum_{j=0}^m \theta_j \Delta DO_{t-j} + \sum_{j=0}^m \mu_j \Delta U_{t-j} + \omega ECT_{t-1} + u_t \quad (3)$$

where

$\Delta$  - first difference operator;

$\omega$  - speed of adjustment;

ECT - Error correction term: lag residuals from the long run relationship.

The coefficient of the ECT (Error correction term) indicates how much of the disequilibrium in the short-run will be eliminated in the long-run [1]. To prove the cointegration relation among variables the ECT coefficient has to be negative and significant.

#### 4 INTERPRETATION OF RESULTS

ARDL procedure needs to set appropriate lags of variables, AIC and SC criteria indicated four lags. According to the ADF and PP unit roots test, (SR) Saving Rate is I(1), (GC) Government consumption expenditures I(1), (Y) Disposable income is I(1), (DO) Old dependency rate I(1) and (U) Unemployment is I(0). To test for cointegration, the F test (to test the null hypotheses of no cointegration against the alternative of cointegration) was applied.

$$H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

$$H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_5 \neq 0$$

The computed F-statistic (4.46) is higher than the upper bound value (4.01) tabulated by [13], for unrestricted intercept and no trend for four variables (without lagged dependent variable). This confirms long-run equilibrium among variables and justifies the application of an ARDL procedure.

<sup>7</sup> *General government final consumption expenditure* consists of expenditure incurred by government in its production of non-market final goods and services and market goods and services provided as social transfers in kind (<http://www.oecd-ilibrary.org>).

<sup>8</sup> *Gross disposable income* is adjusted for the change in the net equity of households in pension funds reserves. This adjustment consists in adding to the household disposable income the increase in pension funds reserves which are considered as owned by households but recorded in the disposable income of the financial corporations sector. It is calculated as the moving sum (S) of the value of the quarter concerned (Q) and of the three preceding quarter:  $S = Q + (Q-1) + (Q-2) + (Q-3)$  (def. according to Eurostat).

<sup>9</sup> Unemployment rates are calculated as the ratio of the unemployed (numerator) to total labour force (denominator).

Table 1 presents the estimations of the ECM ARDL (equation 2 and 3) after applying General to Specific Method. The coefficient of the lagged dependent variable (Saving Rate) has negative sign and is significant (variables are cointegrated). Saving rate is in the long-run negatively impacted by government consumption. The higher the expenditures of government, the better the expectations of households, the higher their motive to put more money on their current consumption. The coefficient of the demographic variable has the expected sign. The higher the proportion of old people (65 and older) on the population (15 – 64), the higher the reduction in saving. This is in compliance with the life-cycle model that elderly population should be dissaving. However, there are some empirical papers which present results contradictory to the life-cycle hypothesis as their empirical evidence suggested that the elderly did save [6]. Higher unemployment rate expresses unsafe conditions in the macro economy and on the labour market. People feel uncertain and frightened about the present situation as well as their future and that leads them to decline current consumption. In the short-run, lagged saving rates have significant impact on current saving rate along with disposable income (positive sign) and old dependency ratio (negative sign). Both of them with expected signs.

The coefficient of adjustment (ECT) is negative and significant. The speed of adjustment is high, as more than 30 % of disequilibrium in the previous quarter will be corrected in the current quarter. In the short-run, the saving rate is impacted by the lagged saving rate (SR(-3)) and disposable income.

Table 1 Results of ECM ARDL

	ECM ARDL Unrestricted	ECM ARDL Restricted
Variable	$\Delta$ SR	$\Delta$ SR
c	-184.659*** [-5.38]	
SR(-1)	-0.271*** [-2.99]	
GC(-1)	-8.464*** [-4.25]	
Y(-1)	15.566*** [4.98]	
DO (-1)	-0.088* [-1.75]	
U (-1)	0.238*** [4.58]	
$\Delta$ SR (-3)	0.197* [1.82]	0.281** [2.47]
$\Delta$ SR (-4)	-0.238** [-2.09]	
$\Delta$ Y	27.654*** [5.65]	14.033*** [3.54]
$\Delta$ DO	-2.386*** [-3.03]	
ECT (-1)		-0.379*** [-4.21]
R <sup>2</sup>	0.59	0.39
Adj R <sup>2</sup>	0.51	0.37
Note: ***, **, * imply significance at 1%, 5%, 10% levels respectively t-statistic in brackets		

Table 2 Results from Residual Tests

LM-test (Breusch-Godfrey)	0.737	(0.691)
Heteroscedasticity Test: Breush-Pagan-Godfrey	3.596	(0.935)

Note: P-values in brackets.

The p-values of the autocorrelation (BG-test) and heteroscedasticity (BP-test) show that the null hypothesis of non-autocorrelation and homoscedasticity is not rejected.

## 5 CONCLUSION

The outcomes from the model suggest that demographic factors and economic indicators significantly influence saving of household in the Czech Republic. From the demographic factors the total and the child dependency ratio did not prove any influence on household saving on the contrary to the old dependency ratio. This result is in compliance with the life-cycle hypothesis, however, there are some research papers (not dealing primarily with the Czech households) which present the elderly population as being active on saving. Elderly population can contribute to saving if the level of their pension enables them to do so. Government consumption expenditures lead people to consume more as they do not have to care about expenditures e. g. on education or health if these were covered by the state. Higher social transfers may reduce saving due to higher consumption. From the economic indicators it is the unemployment rate that plays important role in determining saving. Favourable conditions on the labour market along with wage policy stimulate households to increase consumption and spending accordingly.

## References

1. ADENIJI, S. 2013. Investigating the Relationship between Currency substitution, Exchange Rate and Inflation in Nigeria: An Autoregressive Distributed Lag (ARDL) Approach. MPRA.
2. BECKMANN, E., HAKE, M., URVOVÁ, J. 2013. Determinants of Households' Savings in Central, Eastern and Southern Europe. Oesterreichische Nationalbank.
3. CARROLL, CH. D. 1997. Buffer-Stock Saving and the Life Cycle/Permanent Income Hypothesis. *The Quarterly Journal of Economics*, MIT Press, vol. 112(1), 1-55.
4. FRACZEK, B. 2011. The factors affecting the level of household savings and their influence on economy development. 8 th International scientific conference Financial management of firms and financial institutions. Ostrava.
5. FRIEDMAN, M. 1957. *A Theory of the Consumption Function*, Princeton: Princeton University Press.
6. GRACE, L., BERSALES, S., MAPA, D. 2006. Patterns and Determinants of Household Saving in the Philippines. USAID. Available on: <http://pdf.usaid.gov/pdf>.
7. HANOUSEK, J., TÚMA, Z. 2002. A test of the permanent income hypothesis on Czech voucher privatization. *Economics of Transition*, 10: 235–254.
8. HUSÁR, J. 2007. *Makroekonomická analýza*. Bratislava, EKONÓM.
9. KEYNES, J. M. 1936. *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Available on: <http://cas.umkc.edu>.
10. LISÝ, J. 2007. *Ekonomía v novej ekonomike*. Bratislava, Iura Edition.
11. MODIGLIANI, F., BRUMBERG, R. 1954. Utility Analysis and the Consumption Function. In *Post-Keynesian Economics*. Rutgers University Press, 338–436.

12. PESARAN, M. H., SHIN, Y. 1999. An autoregressive distributed lag modeling approach to cointegration analysis. Centennial Volume of Ragnar Frisch, eds. S. Strom, A. Holly and P. Diamond, Cambridge University Press, Cambridge.
13. PESARAN, H. M., SHIN, Y., SMITH, J. R. 2001. Bounds Testing Approaches to the Analysis of Level Relationships. *Journal of Applied Econometrics*, 289 – 326.
14. SCHROOTEN, M., STEPHAN, S. 2003. Private Savings in Eastern European EU-Accession Countries: Evidence from a Dynamic Panel Data Model. DIW Berlin.
15. VOGELVANG, B. 2005. *Econometrics*. FT Prentice Hall.

[www.eurostat](http://www.eurostat); [www.cnb.cz](http://www.cnb.cz), <http://www.oecd-ilibrary.org/>

### **Kontaktné údaje**

prof. Ing. Mgr. Renáta Pitoňáková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy č. 4, 821 05 Bratislava

Tel.: (421 02) 20 669 800

email: [renata.pitonakova@fses.uniba.sk](mailto:renata.pitonakova@fses.uniba.sk)

# MARKOVOVE ROZHODOVACIE PROCESY- OPTIMALIZÁCIA VOĽBY ALTERNATÍV POMOCOU LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA<sup>1</sup>

## MARKOVIAN DECISION PROCESS – POLICY OPTIMIZATION USING LINEAR PROGRAMING

*Marian Reiff*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá stochastickým rozhodovacím procesom s konečným počtom stavov, konkrétne optimalizáciou voľby alternatív pomocou lineárneho programovania. Pravdepodobnosti prechodov medzi jednotlivými stavmi sú popísané pomocou Markovovho reťazca. Ohodnotenie nákladov respektíve výnosov spojených s prechodom z jedného stavu do druhého je popísané maticou výnosov. Matice prechodov respektíve výnosov sú charakteristické pre jednotlivé alternatívy. Cieľom je určiť optimálnu stratégiu ktorá maximalizuje očakávané výnosy.

**KLúčové slová:** *Markovove rozhodovacie procesy, lineárne programovanie*

### Abstract

Given paper deals with stochastic decision making process with a finite number of states, namely optimizing the choice of alternatives using linear programming. The transition probabilities between the states are described by Markov chains. Corresponding costs respectively gains associated with the transition from one state to another is described by revenue matrices. Transition matrices respectively revenue matrices depend on the decision alternative available. The aim is to determine the optimal strategy that maximizes the expected returns.

**Keywords:** *Markov decision process, Linear programming*

## 1 ÚVOD

Markovový reťazec popisuje stochastický proces pre ktorý je charakteristická nasledujúca vlastnosť týkajúca sa podmienených pravdepodobností prechodov. Podmienené pravdepodobnosti popisujúce ako sa proces bude vyvíjať v budúcnosti a v Markovovom reťazci závisia iba od súčasného stavu procesu a sú nezávislé od udalostí v minulosti. Proces sa správa bez ohľadu na minulosť (je bez pamäte). Táto vlastnosť je označovaná ako Markovovská vlastnosť a možno ju popísať vzťahom č. 1.

$$P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\} \quad (1)$$

V Markovových procesoch s  $m$  nezávislými a vzájomne sa vylučujúcimi stavmi, vzťah pre podmienené pravdepodobnosti v danom čase  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  môžeme zapísať nasledovne:

---

<sup>1</sup>Článok bol vydaný s podporou Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva SR a Slovenskej akadémie vied v rámci projektu „Optimalizačné modely a metódy ako nástroje efektívnej regulácie v modernej teórii organizácie sieťových odvetví“, 2015 – 2017. grant č. 1/0697/15



$$p_{ij} = P\{X_t = j | X_{t-1} = i\}, \quad (i, j) = 1, 2, \dots, m, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

Markovový reťazec sa môže nachádzať v jednom z možných stavov  $i = 1, 2, \dots, m$ . Markovový reťazec možno sledovať spojitou v čase respektíve v diskretných časových bodoch. Nech sa systém nachádza v diskretnom časovom bode  $t$  v stave  $i$ , potom jedнокroková matica podmienených prechodov obsahuje pravdepodobnosti  $p_{ij}$  (rovnicu č. 2) charakterizujúce v ktorom stave sa bude systém nachádzať v nasledujúcom období. Analýzou matice prechodov možno vypočítať rôzne charakteristiky systému popisujúce správanie Markovovho reťazca. Pomocou týchto charakteristík možno vyhodnotiť výkon systému. Pomocou teórie Markovových rozhodovacích procesov je však možné navrhnúť operácie v systéme tak aby sme výkon systému optimalizovali. V príspevku sa zameriame ako navrhnúť operácia v diskretnom Markovovskom reťazci pomocou lineárneho programovania tak aby sme optimalizovali výkon systému. Namiesto pasívneho akceptovania návrhu Markovoho reťazca s korešpondujúcou fixnou maticou prechodov, uvažujeme s rôznymi alternatívami (scenármi). Pre všetky možno stavy Markovovho reťazca určíme ktorý scenár je najlepšie implementovať v prípade ak sa systém bude nachádzať stave  $i = 1, 2, \dots, m$ . Výberom scenáru rozhodovateľ ovplyvňuje podmienené pravdepodobnosti prechodov ako aj bezprostredné výnosy spolu s následnými výnosmi prevádzkovaného systému. Cieľom Markovových rozhodovacích procesov je určiť optimálne alternatívy pre príslušné stavy s ohľadom na bezprostredné a následné výnosy systému.

## 2 MARKOVOVE ROZHODOVACIE PROCESY

Model Markovovho rozhodovacieho procesu možno popísať nasledovne. Nech:

- systém popísaný Markovovým reťazcom sa nachádza v jednom z možných stavov  $i = 1, 2, \dots, m$ .
- rozhodovateľ má na výber z  $k = 1, 2, \dots, K$  alternatív, pričom nie všetky alternatívy  $k$  musia byť aplikovateľné ak sa systém nachádza v stave  $i$ .
- ak sa systém nachádza v stave  $i$  a je vykonané rozhodnutie  $d_i = k$ , prejaví sa to bezprostredne na výnose systému s očakávanou hodnotou  $C_{ik}$ .
- rozhodnutie  $d_i = k$  ovplyvňuje pravdepodobnosti prechodu  $p_{ij}(k)$  pre nasledujúci prechod systému zo stavu  $i$  do stavu  $j$ , pričom  $j = 1, 2, \dots, m$ .
- cieľom je určiť optimálne voľby alternatív pre jednotlivé stavy, teda optimálnu stratégiu  $R^* = (d_1, d_2, \dots, d_m)$  vzhľadom na strednú hodnotu očakávaného výnosu systému za určité obdobie  $E(C) = \sum_{i=1}^m C_{ik} \pi_i$  kde  $\pi_i$  predstavuje rovnovážne pravdepodobnosti Markovovho reťazca pre danú stratégiu.

Stratégia  $R$  definuje pravidlá podľa ktorých je potrebné postupovať ak sa systém nachádza v stave  $i = 1, 2, \dots, m$ . Stratégiu  $R$  je možné popísať pomocou matice:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1k} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \dots & D_{mk} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

kde  $D_{ik}$  je binárna premenná  $D_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ak v stave } i \text{ je implementovaná alternatíva } k \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$ .

Za účelom formulácie lineárneho modelu voľby alternatív Markovovho rozhodovacieho procesu je zavedená premenná  $y_{ik}$ . Premenná  $y_{ik}$  je združená pravdepodobnosť vyjadrujúca pravdepodobnosť, že systém je v stave  $i$  pri vybranej alternatíva  $k$ . Vzťah medzi premennými  $D_{ik}$  a  $y_{ik}$  možno vyjadriť nasledujúcou rovnicou

$$y_{ik} = \pi_i D_{ik} \quad (3)$$

Pre rovnovážnu pravdepodobnosť Markovov reťazec sa nachádza v stave  $i$  a združenú pravdepodobnosť  $y_{ik}$  platí nasledujúci vzťah

$$\pi_i = \sum_{k=1}^K y_{ik} \quad (4)$$

Pomocou rovníc 3 a 4 môžeme vyjadriť vzťah pre premennú  $D_{ik}$

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^K y_{ik}} \quad (5)$$

Po zavedení premenných lineárneho modelu pristúpime k samotnej formulácii ohraničení a účelovej funkcie lineárneho modelu.

Prvý typ ohraničenia vychádza zo vzťahu pre rovnovážne pravdepodobnosti  $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1$  a s využitím vzťahu medzi rovnovážnou a združenými pravdepodobnosťami (4) platí:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad (6)$$

Druhý typ ohraničenia vychádza zo vzťahu medzi rovnovážnymi pravdepodobnosťami a podmienenou pravdepodobnosťou prechodu  $\pi_j = \pi_i p_{ij}(k)$ . Po úprave získame

$$\sum_{k=1}^K y_{ik} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Posledný typ ohraničenia je podmienka nezápornosti

$$y_{ik} \geq 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m \text{ a } k = 1, 2, \dots, K \quad (8)$$

Účelová funkcia vyjadříme ako funkciu očakávaných výnosov

$$E(C) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \pi_i C_{ik} D_{ik} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K C_{ik} y_{ik}$$

Takto sme získali výsledný model lineárneho programovania:

$$\text{Max } z(y_{ik}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K C_{ik} y_{ik}$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1$$

$$\sum_{k=1}^K y_{ik} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_{ik} p_{ij}(k) = 0 \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{ik} \geq 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m \text{ a } k = 1, 2, \dots, K$$

Po získaní hodnou  $y_{ik}$  pomocou vzťahu (5) určíme premenné  $D_{ik}$  teda optimálnu stratégiu  $R^*$ .

### Použitá literatúra

1. HILLIER, F S., LIEBERMAN, G. J., 2001. Introduction to Operations Research, 7/E. McGraw-Hill, ISBN 0072321695
2. TAHA, H. A., 2011. Operations Research: An Introduction, 9/E. Prentice Hall, ISBN 9780132555937
3. KOŘENÁŘ, V., 2010. Stochastické procesy. Nakladatelství VŠE, ISBN 978-80-245-1646-2

### Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: reiff@euba.sk

# MODELOVANIE ZÁSOB ZAMERANÉ NA REDUKCIU EMISIÍ SKLENÍKOVÝCH PLYNOV <sup>1</sup>

## INVENTORY MODELING FOCUSED ON GREENHOUSE GASES EMISSION REDUCTION

*Marian Reiff, Kvetoslava Surmanová*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá klasickými modelmi zásob, ktoré sú rozšírené o problematiku redukcie skleníkových plynov. Cieľom je poukázať na možný nástroj riešenia problému emisie skleníkových plynov, hlavne emisií CO<sub>2</sub> začlenením tejto problematiky do rozhodovacieho procesov obstarávania, plánovania výroby a riadenia zásob.

*Kľúčové slová: riadenie zásob, emisie skleníkových plynov*

### Abstract

The paper deals with the classical inventory models extended to include the problem of reduction of greenhouse gases. The aim is to highlight the potential tool dealing with greenhouse gas emissions, particularly CO<sub>2</sub> emissions by incorporating these issues into decision making process, particularly procurement, production planning and inventory management.

*Keywords: Inventory management, greenhouse gases emission*

## 1 ÚVOD

V posledných rokoch silnie názor, že emisie uhlíka (emisie oxidu uhličitého a ďalších skleníkových plynov) sú hlavnou príčinou globálneho otepľovania. Je veľmi pravdepodobné, že ľudská činnosť pri ktorej sa spotrebávajú fosílna palivá produkuje emisie zvyšujúce koncentrácie uhlíka v atmosfére, čo prispieva k globálnemu otepľovaniu.

Kjótsky protokol (1997), doplnok Rámcového dohovoru OSN o zmene klímy je medzinárodná dohoda v súvislosti s globálnym otepľovaním. Text dohovoru je v slovenčine dostupný v Oznámení MZV SR č. 548/2006 Z.z.. Štáty ktoré podpísali tento protokol sa zaviazali znížiť emisie oxidu uhličitého a 5 ďalších skleníkových plynov, alebo sa zaviazali k obchodovaniu s emisiami ak udržiavajú alebo zvyšujú emisie skleníkových plynov. Ku kľúčovým mechanizmom a nástrojom Kjótskeho protokolu, ktoré sú zamerané na splnenie redukčných cieľov s ohľadom na špecifické podmienky krajiny, patria (a) spoločné plnenie záväzkov (čl. 6), (b) mechanizmus čistého rozvoja (čl. 12) a (c) obchodovanie s ušetrenými emisiami (čl. 17).

Vzhľadom na potenciálny vplyv činností ako výroba, skladovanie a preprava zásob, na produkciu emisií skleníkových plynov, je potrebné zamerať výskum na riadenie týchto činností vedúcich emisiám skleníkových plynov.

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

Cieľom príspevku je rozšíriť kvantitatívne modely, ktoré sa zvyčajne zameriavajú buď na minimalizáciu nákladov alebo maximalizáciu zisku, tak aby zachytávali aj produkciu emisií skleníkových plynov. Problém emisie skleníkových plynov možno začleniť do modelu vo forme pridania ohraničenia do modelu alebo rozšírením účelovej funkcie modelu.

## 2 DETERMINISTICKÝ MODEL EKONOMICKEJ VEĽKOSTI OBJEDNÁVKY

V tejto časti popíšeme model ekonomickej veľkosti objednávky v prostredí kde sa obchoduje s emisiami. Jednotlivým spoločnostiam je pridelený určitý limit – množstvo vyprodukovaných emisií CO<sub>2</sub>. Ak spoločnosť vyprodukuje viac emisií ako jej bolo pridelené môže si množstvo prevyšujúce pridelený limit zakúpiť na špeciálnom trhu s emisiami. Ak naopak vyprodukuje menej emisií ako jej bolo pridelené, môže prebytok predat' na tomto trhu. Tento mechanizmus spája environmentálny s ekonomickým problémom.

Predpokladajme, že obstaranie a skladovanie produktu spotrebováva významné množstvo fosílnych energií a má za následok tvorbu emisií skleníkových plynov. Nech

- $c_a$  predstavuje fixné náklady na objednávku,
- $\lambda$  predstavuje ročnú spotrebu /dopyt po produkte,
- $c_s$  predstavuje ročné náklady na skladovanie,
- $Q$  predstavuje rozhodujúcu premennú, objednané množstvo,
- $\alpha$  predstavuje limit alebo pridelené množstvo emisií,
- $c_e$  predstavuje cenu jednej tony CO<sub>2</sub> na trhu s emisiami,
- $X$  predstavuje rozhodujúcu premennú, obchodované množstvo emisií CO<sub>2</sub> na trhu s emisiami,
- $f$  predstavuje vyprodukované množstvo emisií spojených s obstaraním jednotky produktu,
- $g$  predstavuje vyprodukované množstvo emisií spojených so skladovaním jednotky produktu,
- $C(Q, X)$  predstavuje celkové ročné náklady na zásoby.

V klasickom modeli ekonomickej veľkosti objednávky je cieľom minimalizovať náklady na zásoby vyjadrené rovnicou  $C(Q) = c_a \frac{\lambda}{Q} + c_s \frac{Q}{2}$ . Optimálna veľkosť objednávky je vyjadrená

vzťahom  $Q = \sqrt{\frac{2\lambda c_a}{c_s}}$ . V prípade ak spoločnosť obchoduje s emisiami rovnicu nákladov

modifikujeme nasledovne  $C(Q, X) = c_a \frac{\lambda}{Q} + c_s \frac{Q}{2} - c_e X$ . Do modelu zavedieme ohraničenie

dávajúcich do vzťahu pridelené emisné limity verzus vyprodukované a obchodované emisie  $f \frac{\lambda}{Q} + g \frac{Q}{2} + X = \alpha$ . Výsledný model možno zapísať nasledovne:

$$\min C(Q, X) = c_a \frac{\lambda}{Q} + c_s \frac{Q}{2} - c_e X \quad (1)$$

$$f \frac{\lambda}{Q} + g \frac{Q}{2} + X = \alpha \quad (2)$$

$$Q \geq 0$$

$$X \text{ ľubovoľné} \quad (3)$$

Z rovnice (2) vyjadríme vzťah pre rozhodujúcu premennú  $X = \alpha - \left( f \frac{\lambda}{Q} + g \frac{Q}{2} \right)$  a po dosadení do účelovej funkcie (1) dostaneme modifikovanú účelovú funkciu  $\min C(Q, X) = (c_a + f) \frac{\lambda}{Q} + (c_s + g) \frac{Q}{2} - c_e \alpha$ . Odvođením získame vzťah pre optimálnu veľkosť objednávky  $Q = \sqrt{\frac{2\lambda(c_a + cf)}{(c_s + cg)}}$ .

### 3 STOCHASTICKÝ MODEL JEDNORAZOVEJ OBJEDNÁVKY BEZ MOŽNOSTI ZNOVU OBJEDNANIA

V tejto časti popíšeme model jednorazovej objednávky bez možnosti znovu objednania (newsvendor problem) v prostredí so zdaňovaním emisií skleníkových plynov. Nech

- $Q$  predstavuje rozhodujúcu premennú, objednávané množstvo
- $D$  predstavuje náhodný diskretný dopyt
- $c_o$  predstavuje náklady spojené s nahodnotením dopytu,  $c_o = c + \tau - v$  kde  $c$  predstavuje jednotkové náklady na obstaranie,  $\tau$  jednotkovú daň na vyprodukované emisie a  $v$  predstavuje jednotkovú výpredajovú cenu
- $c_u$  predstavuje náklady spojené s nahodnotením dopytu,  $c_u = p - c - \tau + s$  kde  $c$  predstavuje jednotkové náklady na obstaranie,  $\tau$  jednotkovú daň na vyprodukované emisie,  $p$  predstavuje jednotkovú predajnú cenu a  $s$  sú náklady na stratu dobrého mena - stratu goodwill.

V závislosti od veľkosti objednávky a špecifickej veľkosti dopytu funkciu celkových nákladov je možné vyjadriť nasledujúcim vzťahom

$$C(Q, D) = \begin{cases} c_o(Q - D) & \text{ak } Q < D \\ c_u(D - Q) & \text{ak } Q \geq D \end{cases}$$

V prípade, že dopyt ma stochastický charakter, strednú hodnotu nákladovej funkcie vyjadríme pomocou  $EC(Q, D) = \sum_{D=0}^{\infty} p(D)C(Q, D) = c_o \sum_{D=0}^{Q-1} p(D)(Q - D) + c_u \sum_{D=Q}^{\infty} p(D)(D - Q)$ .

Pre optimálnu veľkosť objednávky platí  $P(Q^*) = \sum_{D=0}^{Q^*} p(D) \geq \frac{c_u}{c_u + c_o} = \frac{p + s - c - \tau}{p + s - v}$ .

Optimálnu veľkosť objednávky  $Q^*$  vypočítame jednoduchou procedúrou. Dosadzujeme do posledného vzťahu celočíselne hodnoty  $Q$  (začínajúc  $Q = 1$ ) až pokiaľ neplatí uvedená nerovnosť.

### Použitá literatúra

1. GEŽÍK, P., 2007. Modely zásob a problémy s určením funkcie celkových nákladov, AIESA - Mladá veda 2007, Bratislava, Vydavateľstvo EKONÓM
2. GUOWEI HUA, CHENG, T.C.E. , SHOUYANG WANG, 2011. Managing carbon footprints in inventory management, International Journal of Production Economics, Volume 132, Issue 2, p 178-185
3. SONG, J., LENG, M., 2012. Analysis of the single Period Problem under Carbon Emission Policies, Handbook on Newsvendor problems: Models, extensions and Applications. Springer, p 297-313
4. [http://europa.eu/legislation\\_summaries/environment/tackling\\_climate\\_change/128060\\_sk.htm](http://europa.eu/legislation_summaries/environment/tackling_climate_change/128060_sk.htm) Dostupné [12. 5. 2014].

### Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: reiff@euba.sk

# SILNÁ DOKONALÁ ROVNOVÁHA V BILATERÁLNO COURNOTOVOM DUOPOLE S VÝROBKOVÝMI INOVÁCIAMI VSTUPOV

## STRONG PERFECT EQUILIBRIUM IN A BILATERAL COURNOT DUOPOLY WITH PRODUCT INNOVATION OF INPUTS

*Eubica Šimková*

### **Abstrakt**

V článku analyzujeme model bilaterálneho Cournotovho duopolu s nekonečným časovým horizontom a diskontovaním budúcich platieb. Každý z duopolistov na nižšom stupni výrobnjej vertikály vyrába jeden z dvoch komplementárnych vstupov. Každý z duopolistov na vyššom stupni výrobnjej vertikály používa tieto vstupy na výrobu jedného druhu finálneho výrobku. Výrobcovia vstupov môžu v každom období inovovať svoje výrobky. Inovácia sa prejaví v nasledujúcom období zvýšením parametrov produkčných funkcií finálnych výrobcov. Konceptom rovnováhy v našom modeli je silná dokonalá rovnováha v čistých stratégiách. Ide o profil čistých stratégií s vlastnosťou, že žiadna koalícia hráčov v žiadnej podriadenej hre nemôže zvýšiť priemernú diskontovanú platbu každého svojho člena. V článku dokazujeme, že pre diskontné faktory dostatočne blízke jednej existuje.

*Kľúčové slová:* Cournotov duopol, inovácie, silná dokonalá rovnováha

### **Abstract**

In the paper we analyze a model of a bilateral Cournot duopoly with infinite time horizon and discounting of future payoffs. Each of the duopolists in the upstream market produces one of two complementary inputs. Each of the duopolists in the downstream market uses these inputs in the production of one type of final good. Producers of inputs can innovate their products in each period. An innovation manifests itself in an increase of parameters of production functions of producers of final goods in the following period. A pure strategy strong perfect equilibrium is the solution concept in our model. It is a profile of pure strategies with the property that no coalition in no subgame can increase average discounted payoff of each of its members. We prove in the paper that it exists for discount factors close enough to one.

*Keywords:* Cournot duopoly, innovation, strong perfect equilibrium

## **1 ÚVOD**

V súčasnosti má väčšina priemyselných odvetví oligopolný charakter. Ekonomické aj technologické podmienky ich činnosti sú ovplyvnené oligopolnými odvetviami na predchádzajúcom alebo nasledujúcom stupni výrobnjej vertikály. Strategická interakcia v oligopoloch na naväzujúcich stupňoch výrobnjej vertikály je kľúčovým faktorom pri výrobkovej inovácii vstupov, ktorá vedie k technologickej inovácii pri výrobe používajúcej tieto vstupy. Jej modelovej analýze sa venujeme v tomto príspevku. Zameriavame sa pri tom na spoluprácu výrobcov komplementárnych vstupov a výrobcov finálnych výrobkov s použitím týchto vstupov. Ide teda o spoluprácu podnikov na obidvoch stranách trhu vstupov.



Takúto spoluprácu analyzoval Horniaček v [1]. V našom príspevku ju obohacujeme o analýzu inovácie vstupov. Výsledky sú aj zovšeobecnením skúmania v [3], kde sa výrobcovia vstupov rozhodovali o ich inovácií len na začiatku časového horizontu modelu. V tomto príspevku sa o nej môžu rozhodovať v každom období.

## 2 MODEL

Podniky 1 a 2 vyrábajú vstupy, ktoré podniky 3 a 4 používajú na výrobu finálnych výrobkov. (Poradové čísla podnikov používame aj na číslovanie ich výrobkov.) Maximálny možný objem produkcie podniku  $j \in \{1,2\}$  je  $y_j^{\max} > 0$ . (Horné hranice pre objemy produkcie podnikov 3 a 4 vyplývajú z ich produkčných funkcií charakterizovaných nižšie, z horných hraníc pre objemy produkcie vstupov a horných hraníc parametrov účinnosti vstupov.) Inverzné dopytové funkcie pre výrobky podnikov 3 a 4,  $P_i : [0, y_3^{\max}] \times [0, y_4^{\max}] \rightarrow [0, \infty)$ ,  $i \in \{3,4\}$ , priradujú každému vektoru objemov produkcie  $(y_3, y_4)$  jednotkové ceny výrobkov podnikov 3 a 4, pri ktorých sa vektor dopytov po nich rovná  $(y_3, y_4)$ . Predpokladáme, že pre každé  $i \in \{3,4\}$   $P_i$  je spojitá v oboch argumentoch a nerastúca v  $y_i$  na celom definičnom obore a rýdzo klesajúca, dvakrát spojitاً diferencovateľná a konkávna v  $y_i$  v každom bode  $(y_3, y_4)$  z jej definičného oboru, pre ktorý  $P_i(y_3, y_4) > 0$ . Produkčná funkcia pre výrobok podniku  $i \in \{3,4\}$ ,  $f_i : [0, y_1^{\max}] \times [0, y_2^{\max}] \times [a_{i1}, a_{i1}^{\sup}] \times [a_{i2}, a_{i2}^{\sup}] \rightarrow [0, \infty)$ , priraduje každému prípustnému vektoru vstupov  $(x_{i1}, x_{i2})$  a každému prípustnému vektoru  $(a_{i1}, a_{i2})$  parametrov účinnosti vstupov vyrobených podnikmi 1 a 2 maximálny objem produkcie podniku  $i$ ,  $f_i(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2})$ . Táto funkcia má tvar

$$f_i(x_{i1}, x_{i2}, a_{i1}, a_{i2}) = (\min\{a_{i1}x_{i1}, a_{i2}x_{i2}\})^{\gamma_i}, \gamma_i > 0. \quad (1)$$

Podnik  $j \in \{1,2\}$  môže deterministickou výrobkovou inováciou svojho výrobku v období  $t \in N$  (kde  $N$  označuje množinu prirodzených čísel) zvýšiť jeho účinnosť pri výrobe finálnych výrobkov (t.j. zvýšiť parametre  $a_{3j}$  a  $a_{4j}$ ) v období  $t+1$ . Nech v období  $t \in N$  parametre účinnosti vstupu vyrábaného podnikom  $j \in \{1,2\}$  sú  $a_{3j}(t)$  a  $a_{4j}(t)$  a investície podniku  $j$  do výrobkovej inovácie sú  $m_j(t)$ . Potom parameter účinnosti vstupu vyrobeného v podniku  $j$  vo výrobe výrobku  $i \in \{3,4\}$  v období  $t+1$  je  $\eta_{ij}(a_{ij}(t), m_j(t))$ . Predpokladáme, že pre každé  $i \in \{3,4\}$  a každé  $j \in \{1,2\}$  funkcia  $\eta_{ij} : [a_{ij}, a_{ij}^{\sup}] \times [0, \infty) \rightarrow [a_{ij}, a_{ij}^{\sup}]$  je spojitá, rýdzo rastúca v každom argumente, rýdzo konkávna v  $m_j$ ,  $\eta_{ij}(a_{ij}, 0) = a_{ij}$  pre každé  $a_{ij} \in [a_{ij}, a_{ij}^{\sup}]$ ,  $\lim_{a_{ij} \rightarrow a_{ij}^{\sup}} \eta_{ij}(a_{ij}, m_j) = a_{ij}^{\sup}$  a  $\lim_{m_j \rightarrow \infty} \eta_{ij}(a_{ij}, m_j) = a_{ij}^{\sup}$  pre každé  $(a_{ij}, m_j)$  z jej definičného oboru. Príkladom funkcie spĺňajúcej tieto predpoklady je  $\eta_{ij}(a_{ij}, m_j) = a_{ij} + (a_{ij}^{\sup} - a_{ij}) \frac{m_j}{m_j + 1}$ .

Podnik  $j \in \{1,2\}$  má nákladovú funkciu  $c_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , ktorá je dvakrát spojitاً diferencovateľná, rýdzo rastúca a konvexná.

Časový horizont modelu je  $N$ . Každý podnik diskontuje výnosy a náklady v budúcich obdobiach rovnakým diskontným faktorom  $\delta \in (0,1)$ . Parametre účinnosti vstupov v období  $t \in N$  označíme  $a_{ij}(t)$ ,  $i \in \{3,4\}$ ,  $j \in \{1,2\}$ . Ich hodnoty v období 1 sú dané. Spotrebu vstupu

vyrobeného podnikom  $j \in \{1,2\}$  v podniku  $i \in \{3,4\}$  v období  $t \in N$  označíme  $x_{ij}(t)$  a jeho jednotkovú cenu  $w_{ij}(t)$ . Tieto množstvá a ceny sú v každom období výsledkom dohody medzi výrobcom a kupujúcim. Každý podnik  $j \in \{1,2\}$  navrhuje každému podniku  $i \in \{3,4\}$  a opačne kontrakt, ktorý špecifikuje dodané množstvo a jednotkovú cenu. (Ak  $j$  nechce obchodovať s  $i$  alebo opačne, navrhne  $(0,0)$ .) Obchod medzi podnikmi  $j \in \{1,2\}$  a  $i \in \{3,4\}$  v období  $t \in N$  sa uskutoční vtedy a len vtedy, keď sa ich návrhy kontraktov rovnajú a nerovnajú sa nulovému kontraktu. (Zdôvodnenie tohto spôsobu modelovania uzatvárania kontraktov pozri v [1], s. 1-2.)

Pre každý prípustný vektor parametrov účinnosti vstupov

$$a = (a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}) \in A = [a_{31}, a_{31}^{\text{sup}}] \times [a_{32}, a_{32}^{\text{sup}}] \times [a_{41}, a_{41}^{\text{sup}}] \times [a_{42}, a_{42}^{\text{sup}}]$$

položme

$$\begin{aligned} V^*(a) = & \max P_3(f_3(x_{31}, x_{32}, a_{31}, a_{32}), f_4(x_{41}, x_{42}, a_{41}, a_{42})) f_3(x_{31}, x_{32}, a_{31}, a_{32}) \\ & + P_4(f_3(x_{31}, x_{32}, a_{31}, a_{32}), f_4(x_{41}, x_{42}, a_{41}, a_{42})) f_4(x_{41}, x_{42}, a_{41}, a_{42}) \\ & - c_1(x_{31} + x_{41}) - c_2(x_{32} + x_{42}) \end{aligned} \quad (2)$$

za podmienok

$$x_{ij} \geq 0, x_{3j} + x_{4j} \leq y_j^{\text{max}}, \forall i \in \{3,4\}, \forall j \in \{1,2\} \quad (3)$$

a symbolom  $x^*(a) = (x_{31}^*(a), x_{32}^*(a), x_{41}^*(a), x_{42}^*(a))$  označme ľubovoľný, ale pevne zvolený vektor, ktorý je riešením úlohy (2)-(3). Maximalizačná úloha (2)-(3) má riešenie, pretože ide o maximalizáciu spojitkej funkcie na neprázdnej kompaktnej množine. Ak má viacero riešení, za  $x^*(a)$  zvolíme ľubovoľné z nich. Keďže ohraničenia v (3) nezávisia od  $a$ , z vety o maxime vyplýva, že funkcia  $a \mapsto V^*(a)$  je spojitá.

Predpokladáme, že parametre modelu sú také, že pre každé  $a \in A$   $V^*(a) > 0$  a v každom riešení úlohy (2)-(3) každý výrobca vstupu dodáva svoj výrobok každému z podnikov 3 a 4.

Označme symbolom  $\Gamma(\delta)$  nekooperatívnu hru v rozšírenom tvare (extensive form non-cooperative game) s diskontným faktorom  $\delta$ , ktorá je modelom interakcie medzi uvažovanými podnikmi. Hráčmi v nej sú podniky 1, 2, 3 a 4. Každá nedefinitívna história vedúca k obdobiu  $t \in N \setminus \{1\}$  obsahuje všetky návrhy kontraktov všetkými podnikmi a rozhodnutia podnikov 1 a 2 o investíciách do inovácie svojich výrobkov v obdobiach  $1, \dots, t-1$ . K obdobiu 1 vedie prázdna nedefinitívna história. Množinu všetkých nedefinitívnych histórií vedúcich k obdobiu  $t \in N$  označíme  $H_t$  a položíme  $H = \bigcup_{t=1}^{\infty} H_t$ . Na začiatku každého obdobia každý podnik pozná históriu, ktorá k nemu viedla. Každá definitívna história je postupnosť všetkých návrhov kontraktov všetkými podnikmi a rozhodnutí podnikov 1 a 2 o investíciách do inovácie svojich výrobkov počas celého časového horizontu hry.

V tomto príspevku obmedzíme pozornosť na čisté stratégie podnikov. Čistá stratégia  $s_j$  podniku  $j \in \{1,2\}$  je funkcia, ktorá priradzuje každej  $h \in H$  návrh kontraktu pre podnik 3, návrh kontraktu pre podnik 4 a rozhodnutie o investíciách do výrobkovej inovácie. Čistá stratégia  $s_i$  podniku  $i \in \{3,4\}$  je funkcia, ktorá priradzuje každej  $h \in H$  návrh kontraktu pre podnik 1 a návrh kontraktu pre podnik 2. Množinu všetkých čistých stratégií podniku

$k \in \{1,2,3,4\}$  označíme  $S_k$  a položíme  $S = \prod_{k=1}^4 S_k$ . Pre  $s \in S$  a  $k \in \{1,2,3,4\}$  symbol  $s_{-k}$  označuje profil čistých stratégií, ktorý dostaneme z  $s$  vynechaním  $s_k$ . Koalíciou je ľubovoľná podmnožina množiny hráčov. Pre  $s \in S$  a koalíciu  $C \neq \{1,2,3,4\}$  symbol  $s_{-C}$  označuje profil čistých stratégií, ktorý dostaneme z  $s$  vynechaním stratégií podnikov v koalícii  $C$ .

Pre  $s \in S$ ,  $j \in \{1,2\}$ ,  $i \in \{3,4\}$  a  $t \in N$  symbol  $x_{ij}(t,s)$  označuje dodávku vstupu  $j$  podniku  $i$  v období  $t$ ,  $w_{ij}(t,s)$  je jednotková cena pri tejto dodávke,  $a_{ij}(t,s)$  je parameter účinnosti vstupu  $j$  v produkčnej funkcii podniku  $i$  v období  $t$  a  $m_j(t,s)$  sú investície podniku  $j$  do výrobkovej inovácie v období  $t$ , keď všetky podniky dodržiavajú svoje stratégie určené  $s$ . Platobná funkcia podniku  $j \in \{1,2\}$ ,  $\pi_j : S \rightarrow \mathfrak{R}$  (kde  $\mathfrak{R}$  je množina reálnych čísel), je definovaná vzt'ahom

$$\pi_j(s) = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} [\delta^{t-1} (w_{3j}(t,s)x_{3j}(t,s) + w_{4j}(t,s)x_{4j}(t,s) - c_j(x_{3j}(t,s) + x_{4j}(t,s)) - m_j(t,s))] \quad (4)$$

a platobná funkcia podniku  $i \in \{3,4\}$ ,  $\pi_i : S \rightarrow \mathfrak{R}$ , vzt'ahom

$$\begin{aligned} \pi_i(s) &= (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} [\delta^{t-1} (P_i(f_3(x_{31}(t,s), x_{32}(t,s), a_{31}(t,s), a_{32}(t,s))), f_4(x_{41}(t,s), x_{42}(t,s), a_{41}(t,s), a_{42}(t,s))) \\ &\times f_i(x_{31}(t,s), x_{32}(t,s), a_{31}(t,s), a_{32}(t,s)) - w_{i1}(t,s)x_{i1}(t,s) - w_{i2}(t,s)x_{i2}(t,s))] \end{aligned} \quad (5)$$

Pre  $h \in H$  symbol  $\Gamma_{(h)}(\delta)$  označuje podriadenú hru  $\Gamma(\delta)$  nasledujúcu po histórii  $h$ . Pre každú množinu alebo funkciu definovanú pre  $\Gamma(\delta)$  v označení jej obmedzenia na  $\Gamma_{(h)}(\delta)$  používame dolný index „ $(h)$ “.

Túto časť ukončíme definíciou silnej dokonalej rovnováhy (ďalej len SDR), ktorú do literatúry zaviedol A. Rubinstein v [2], pre  $\Gamma(\delta)$ .

**Definícia:** Profil čistých stratégií  $s^* \in S$  je SDR v  $\Gamma(\delta)$ , ak a) neexistuje  $h \in H$ , koalícia  $C \neq \{1,2,3,4\}$  a taký profil stratégií jej členov  $s_C \in \prod_{k \in C} S_{k(h)}$ , že  $\pi_{k(h)}(s_{-C(h)}^*, s_C) > \pi_{k(h)}(s_{(h)}^*)$  pre každý podnik  $k \in C$  a b) neexistuje  $h \in H$  a taký profil stratégií  $s \in S_{(h)}$ , že  $\pi_{k(h)}(s) > \pi_{k(h)}(s_{(h)}^*)$  pre každý podnik  $k \in \{1,2,3,4\}$ .

### 3 EXISTENCIA SDR

Je jasné, že v SDR investície žiadneho výrobcu vstupu do inovácie výrobku v jednom období neprevýšia  $\bar{m} = \delta(1 - \delta)^{-1} \max\{V^*(a) \mid a \in A\}$ . Pre každé  $a \in A$  položíme

$$Z(a) = \max\left\{ (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} [\delta^{t-1} (V^*(a(t)) - m_1(t) - m_2(t))] m_j(t) \in [0, \bar{m}] \mid \forall j \in \{1,2\}, \forall t \in N \right\}, \quad (6)$$

kde  $a(1) = a$  a  $a_{ij}(t+1) = \eta_{ij}(a_{ij}(t), m_j(t))$  pre každé  $t \in N$ ,  $i \in \{3,4\}$  a  $j \in \{1,2\}$ . Pre každé  $t \in N$  a  $j \in \{1,2\}$  položíme  $m_j^*(a)$  rovné hodnote investícií podniku  $j$  do výrobkovej inovácie v prvom období v riešení úlohy (6). (Ak má viac riešení, zvolíme jedno z nich.)

**Veta 1:** Existuje také  $\underline{\delta} \in (0,1)$ , že pre každé  $\delta \in [\underline{\delta}, 1)$  má  $\Gamma(\delta)$  SDR.

**Dôkaz:** Rovnovážny profil stratégií definujeme nasledovne. V prvom období  $\Gamma_{(h)}(\delta)$ , kde  $h$  generuje  $a \in A$ , sú investície podniku  $j \in \{1,2\}$  do výrobkovej inovácie rovné  $m_j^*(a)$  a jeho dodávky vstupov sú  $x_{3j}^*(a)$  a  $x_{4j}^*(a)$ . Ceny dodávok sú dané jedným z troch možných režimov.  $\Omega_0$  je režim bez trestania. Všetky podniky majú kladný podiel na rozdiel  $V^*(a)$  a investícií do výrobkovej inovácie a podiely podnikov 1 a 2 nezávisia od  $a$  a tieto sú navýšením ich tržieb nad výrobné náklady a investície do výrobkovej inovácie predpísané ich stratégiami. Používa sa, ak nedošlo k odchýlke od neho samého ani jedného výrobcu vstupu alebo došlo k odchýlke všetkých štyroch podnikov. (Koalícia, ktorá nezahŕňa ani jedného výrobcu vstupu, v prípade odchýlky nevyrobí nič. Vzhľadom na (6) koalícia všetkých podnikov nemôže zvýšiť priemernú diskontovanú platbu každého z nich.)  $\Omega_j$ ,  $j \in \{1,2\}$ , je režim trestania podniku  $j$ . Podnik  $k \in \{1,2\} \setminus \{j\}$  pri ňom získava súčet celého prebytku  $V^*(a)$ , svojich výrobných nákladov a svojich investícií do výrobkovej inovácie a podniku  $j$  tržby pokrývajú výrobné náklady a investície do výrobkovej inovácie. Používa sa, ak podnik  $j$ , avšak nie podnik  $k$ , je medzi podnikmi, ktoré sa odchyľili od  $s^*$  (v ktoromkoľvek režime).  $\Omega_1$  sa používa aj v prípade, že sa odchyľili podniky 1 aj 2, ale nie všetky štyri podniky. Pre  $j \in \{1,2\}$  sú dĺžka trvania  $T_j \in N$  režimu  $\Omega_j$  a  $\underline{\delta}$  určené tak, aby podnik  $j$  nezískal odchýlkou (ako člen akejkoľvek koalície okrem koalície všetkých podnikov) v žiadnom režime. (Pri odchýlke  $j$  počas jeho trestu sa  $\Omega_j$  opakuje od začiatku.)

*Q.E.D.*

## 4 ZÁVER

V tomto príspevku sme dokázali existenciu rovnováhy v bilaterálnom duopole s výrobkovou inováciou vstupov, v ktorej spolupráca všetkých podnikov je odolná proti odchýlke akejkoľvek koalície. V ďalšom výskume túto rovnováhu porovnávame s rovnováhou, v ktorom podniky nespolupracujú. Na základe porovnania určíme množinu hodnôt parametrov modelu, pre ktoré je spolupráca podnikov výhodná pre kupujúcich finálnych výrobkov.

### Použitá literatúra

1. HORNIÁČEK, M. 2011. Cooperation and Efficiency in Markets. Springer, Heidelberg.
2. RUBINSTEIN, A. 1980. Strong perfect equilibrium in supergames. In: International Journal of Game Theory, roč. 9, č. 1, s. 1-12.
3. ŠIMKOVÁ, Ľ. 2014. An example of renegotiation-proof equilibrium with product innovation, In: Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XVII, Ekonóm, Bratislava, s. 276-279.

### Kontaktné údaje

Mgr. Ľubica Šimková

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

Tel: (421 2) 20 669 861

email: [lubica.simkova@fses.uniba.sk](mailto:lubica.simkova@fses.uniba.sk)

# EKOLOGICKÝ ASPEKT V OKRUŽNÝCH ÚLOHÁCH<sup>1</sup>

## ECOLOGICAL ASPECT IN VEHICLE ROUTING PROBLEMS

*Miroslav Šofranko, Ivan Brezina*

### **Abstrakt**

Príspevok prezentuje možnosti moderných modifikácií tradičných prístupov s cieľom minimalizácie spotreby paliva a znižovaním produkcie emisií CO<sub>2</sub> do ovzdušia. Neorientuje sa len na ekonomické aspekty optimalizácie prepravy tovaru, ale aj na ekologický aspekt, ktorý je v súčasnosti čoraz viac akcentovaným v činnosti akéhokoľvek podniku. Cieľom úlohy EVRP-VC (*Emissions Vehicle Routing Problem – Vehicle Category*) je minimalizovať spotrebu paliva, respektíve emisie CO<sub>2</sub> namiesto jazdnej vzdialenosti.

*Kľúčové slová: okružné úlohy, okružné úlohy s ekologickým aspektom*

### **Abstract**

The paper present the possibilities of modern modifications of traditional approaches to minimizing fuel consumption and reducing CO<sub>2</sub> gas emissions into the atmosphere. The paper is thus not geared to only the economic aspects of optimizing the transport of goods but also the environmental aspect, which is currently becoming more accentuated in the activities of any company. The aim of the assignment EVRP-VC (*Emissions Vehicle Routing Problem - Category Vehicle*) is to minimize fuel consumption, CO<sub>2</sub> emissions respectively instead of driving distance.

*Keywords: Vehicle Routing Problems, Emissions Vehicle Routing Problem*

## **1 ÚVOD**

Základným cieľom kapacitnej okružnej úlohy (Capacited Vehicle Routing Problem –CVRP, napr. Müller, 1970, Brezina a kol., 2009) je nájsť optimálnu (najkratšiu, najrýchlejšiu alebo najmenej nákladnú) okružnú cestu. CVRP je založená na tom, že existuje začiatkové aj konečné miesto (sídlo dodávateľa) a miesta spotreby (odberatelia), ktoré sú v hľadanej okružnej ceste zahrnuté iba raz. V klasickej formulácii sa uvažuje s jedným vozidlom, ktoré má dostatočne veľkú kapacitu na to, aby boli splnené požiadavky všetkých odberateľov. Cieľom je obslúžiť všetkých odberateľov tak, že je dodržaná kapacita vozidla pri najjazdení najkratšej (najrýchlejšej, najmenej nákladnej) cesty. V súčasnosti predstavuje zaujímavú modifikáciu minimalizácia emisií CO<sub>2</sub>.

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant no. 1/0245/15 „Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction“.

## 2 ÚLOHA OKRUŽNÝCH JÁZD S MINIMALIZÁCIOU EMISÍ

Ďalej sa zameriame na podstatu prístupu zostavenia modelu okružných trás pre nákladnú dopravu s cieľom minimalizácie emisií CO<sub>2</sub>, ktorý je založený na pôvodnom modeli CVRP. V tomto prípade je celkový súčet prejdenej vzdialenosti vozidlom nahradený novým cieľovým kritériom minimalizácie emisií, resp. toto kritérium je odvodené od minimalizácie celkovej spotreby paliva. Vychádza sa pritom z predpokladu, že spotreba paliva je závislá od hmotnosti vozidla v priebehu jeho cesty (*Emissions Vehicle Routing Problem – Vehicle Category, EVRP – VC*). Pri optimalizácii treba rešpektovať rôznorodosť vozového parku s rôznou celkovou nosnosťou, maximálnou nosnosťou a palivovou účinnosťou. Podľa príručky spotreby paliva amerického ministerstva energetiky (2008) (Kopfer a kol., 2013), hmotnosť užitočného zaťaženia ovplyvňuje spotrebu vozidla takým spôsobom, že o každých ďalších 100 libier = 45,36 kg záťaže nesené vozidlom sa zvýši spotreba paliva až o 2%. Aj keď je tento predpoklad vo všeobecnosti formulovaný pre osobné vozidlá, platí v zásade aj pre nákladné automobily prepravujúce náklad.

U ťažkých nákladných vozidiel pozorovaním britským ministerstvom dopravy (2007), vplyv užitočného zaťaženia vozidla na MPG (Miles Per Gallon of gas - Míľa na galón plynu) možno charakterizovať pomocou lineárnej funkcie spotreby paliva (Kopfer a kol., 2013):

$$mpg' = \alpha + \beta L \quad (1)$$

kde

$mpg'$  - spotreba paliva na kilometer,

$\alpha$  - spotreba paliva prázdneho vozidla na kilometer,

$\beta$  - súčiniteľ úmernosti pre zvýšenie spotreby paliva na kilometer spôsobené užitočným zaťažením,

$L$  - užitočné zaťaženie.

Funkcia  $mpg'$  predstavuje spotrebu paliva na kilometer v závislosti užitočného zaťaženia  $L$ , pričom  $\alpha$  je spotreba paliva na kilometer prázdneho vozidla, zatiaľ čo  $\beta$  predstavuje súčiniteľ úmernosti pre zvýšenie spotreby paliva na kilometer spôsobený užitočným zaťažením.

Praktické skúsenosti týkajúce sa množstva spotreby paliva posilňujú predpoklad, že prostredníctvom stálej spotreby prázdneho vozidla a lineárneho nárastu paliva pre hmotnosť užitočného zaťaženia možno získať dobrú aproximáciu spotreby paliva na jednotku vzdialenosti. Údaje o spotrebe paliva sú uverejnené v príručkách pre špeditérov (napr. EUROTRANSPORT 2013), resp. v Spritmonitor (2013).

V nadväznosti na uvedené argumenty možno formulovať funkciu  $F_k$  pre kvantifikáciu očakávanej spotreby paliva nákladného automobilu  $k$  s hmotnosťou užitočného zaťaženia  $q_{ij}$  z miesta  $i$  na miesto  $j$  s hodnotami  $d_{ij}$ , ktoré predstavujú vzdialenosť medzi uzlami  $i$  a  $j$ .

$$F_k = a_k d_{ij} + b_k q_{ij} d_{ij} \quad (2)$$

kde

$F_k$  - očakávaná spotreba paliva nákladného vozidla (funkcia pre odhad množstva spotreby paliva),

$a_k$  - spotreba paliva  $k$ -teho vozidla na 100 km,

$d_{ij}$  - cestovná vzdialenosť medzi uzlami  $i$  a  $j$ ,

- $b_k$  - špecifická spotreba paliva  $k$ -teho vozidla na tonu užitočného zaťaženia na 100 km,
- $q_{ij}$  - hmotnosť užitočného zaťaženia z uzla  $i$  do uzla  $j$ ,
- $i, j$  - uzly (miesta, vrcholy, body).

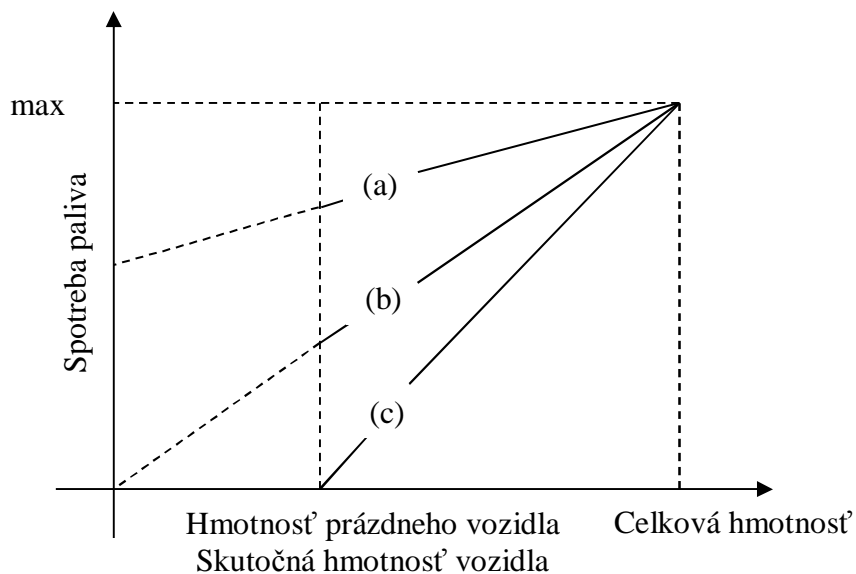
Možno predpokladať, že množstvo vypustených emisií CO<sub>2</sub> z vozidla je priamo úmerné spotrebe paliva tak, že minimalizácia spotreby paliva je ekvivalentná minimalizácii emisií CO<sub>2</sub>. Je dôležité zdôrazniť význam skúmania vplyvu faktorov zaťaženia a vzdialenosti na spotrebu paliva daného nákladného vozidla  $k$ . Všetky ostatné faktory, ktoré potenciálne ovplyvňujúce spotrebu paliva, nebývajú zvyčajne uvažované, pretože sa predpokladá, že zostanú nezmenené. Medzi neuvažované faktory môžeme zaradiť napr. plynulosť prepravy, rýchlosť mapovania prevádzkovej oblasti a pod. Množstvo spotrebovaných pohonných hmôt pre každú jazdu sa vypočíta vynásobením prejdenej vzdialenosti jazdy emisným faktorom, ktorého hodnota závisí od stavu naloženia vozidla príslušnej jazde.

Pritom hodnoty emisného faktora pre kapacitné možnosti využitia vozidla sa pohybujú vo výške 25 %, 50 %, 75 % a 100 % naplnenia vozidla s tovarom. Je teda zrejmé, že so zvyšujúcim užitočným zaťažením sa lineárne zvyšuje emisný faktor. Ubeda a kol. (2010) vo svojej práci v zásade vykonali diskretizáciu funkcie používanú Kuom (2010), založenej na piatich hodnotách užitočného zaťaženia  $q_i$  zatiaľ čo Suzuki (2011), Kuo (2010), Kuo a Wang (2011) a Ubeda a kol. (2010) použili funkcie založené na báze spotreby paliva podobne ako v rovnici (2) pre odhad emisií CO<sub>2</sub>. Funkcie založené na užitočnom zaťažení predpokladajú, že množstvo vyprodukovaného CO<sub>2</sub> je lineárne závislé na skutočnej hmotnosti vozidla, ktoré je prázdne alebo naplnené (Bektas a Laporte 2010, Scott a kol., 2010) a funkcie založené na báze zaťaženia vozidla predpokladajú iba lineárnu závislosť na zaťažení vozidla (Kara a kol. 2007). Obrázok 1 znázorňuje porovnanie:

- (a) funkcie založené na báze paliva,
- (b) funkcie založené na báze hmotnosti,
- (c) funkcie založené na báze nákladu (funkcie zaťaženia).





Na základe predpokladu plne naloženého vozidla majú pritom všetky funkcie rovnakú hodnotu.

Obrázok 1 Funkcia špecifickej spotreby paliva



V súlade so zákonnými predpismi EÚ, možno definovať štyri rôzne kategórie vozidiel, ktoré sú využívané rôznymi spôsobmi. Pre rastúcu veľkosť a hmotnosť nákladných automobilov v jednotlivých kategóriách sú pritom predpisy stále prísnejšie. Najdôležitejšie pre analýzy je skutočnosť, že navrhované kategórie vozidiel sa líšia v špecifickej spotrebe paliva a teda aj vo vyprodukovanom množstve emisií CO<sub>2</sub>. Vo všetkých navrhovaných kategóriách vozidiel (tabuľka 1) sú uvedené údaje pre celkovú hmotnosť vozidla (*GVW – Gross Vehicle Weight*), nosnosť  $Q_k$  a parametre  $a_k$  a  $b_k$  pre spotrebu paliva. Kvocient medzi nosnosťou a celkovou hmotnosťou vozidla (uvažované hodnoty sú 3,5 ton, 7,5 ton, 12 ton a 40 ton je podobný vozidlám z kategórie VC<sub>12</sub>, VC<sub>7,5</sub>, VC<sub>3,5</sub> (v tomto poradí 0,46, 0,43 a 0,43), zatiaľ čo tento podiel je oveľa priaznivejší pre vozidlá z kategórie VC<sub>40</sub> (0,63). Hodnoty parametrov  $a_k$  a  $b_k$  sú priemerné hodnoty, ktoré boli stanovené empiricky na základe informácií dopravcov, ktoré sú dostupné na internete napr. v Spritmonitor (2013), resp. Eurotransport (2013). Hodnoty  $a_k$  a  $b_k$  (tabuľka 1) sú považované za hodnoty predstavujúce ekologický štýl jazdy. Hodnota  $q$  v poslednom stĺpci tabuľky 1 označuje hmotnosť prepravovaného nákladu vozidlom. Uvedené hodnoty v tabuľke 1 určujú účinnosť vozidiel odlišných kategórií z hľadiska ich mernej spotreby paliva v závislosti na ich stupni využiteľnosti kapacity.

Tabuľka 1 Klasifikácia kategórií vozidiel





Kategória vozidla	Celková hmotnosť vozidla $W_k$ (t)	Nosnosť $Q_k$ (t)	$a_k$	$b_k$	Spotreba paliva (l na 100 km)
$k = 1$ VC <sub>40</sub> 	40	25	26	0,36	$\frac{26 + 0,36}{q} q$
$k = 2$ VC <sub>12</sub> 	12	5,5	20	0,76	$\frac{20 + 0,76}{q} q$
$k = 3$ VC <sub>7,5</sub> 	7,5	3,25	15	1,54	$\frac{15 + 1,54}{q} q$
$k = 4$ VC <sub>3,5</sub> 	3,5	1,5	8	3,31	$\frac{8 + 3,31}{q} q$

Zdroj: spracované podľa Kopfer, Schönberger, Kopfer (2013)

Zaujímavé je, že 10 % využitie nosnosti vozidla kategórie VC<sub>40</sub> predstavuje hmotnosť nákladu 2,5 tony, čo zodpovedá 77 % využitiu vozidla z kategórie VC<sub>7,5</sub>. Množstvo spotrebovaného paliva pre prepravu jednej tony na vzdialenosť 100 km sa označuje ako čistá spotreba paliva. Na prepravu 0,5 tony nákladu pomocou vozidla kategórie VC<sub>40</sub> je potrebné 52,36 litra na 100 km. Túto hodnotu označíme ako čistú spotrebu paliva, ktorú vypočítame nasledovne  $((26 + 0,5 \cdot 0,36) / 0,5) = 52,36$  litra na 100 km a každá tona prepravovaného tovaru predstavuje špecifickú hodnotu 19,31 litra spotrebovaného paliva pre kategóriu VC<sub>3,5</sub>. V prípade, ak automobil preváža 25 ton nákladu, špecifická čistá spotreba paliva pre kategóriu VC<sub>40</sub> je len na úrovni 1,4 litra na 100 km za tonu.

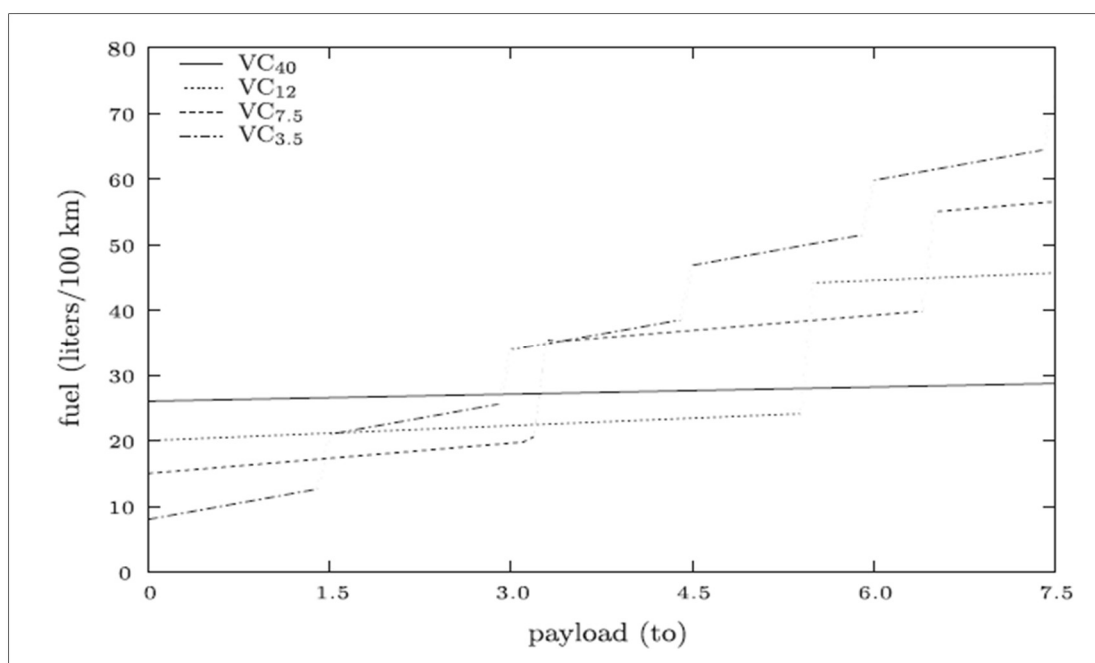


Tabuľka 2 Spotreba paliva na základe hmotnosti tovaru

Celková hmotnosť vozidla ( $t$ )	Nosnosť $Q_k(t)$	$a_k$	$b_k$	Spotreba paliva (l na 100 km)				
				$q = 0,5$	$q = 1$	$q = 3$	$q = 7$	
VC <sub>40</sub>	40 	25	26	0,36	52,36	26,36	9,03	4,07
VC <sub>12</sub>	12 	5,5	20	0,76	40,76	20,76	7,43	3,62
VC <sub>7,5</sub>	7,5 	3,25	15	1,54	31,54	16,54	6,54	3,68
VC <sub>3,5</sub>	3,5 	1,5	8	3,31	19,31	11,31	5,98	4,45

Zdroj: vlastné výpočty

Obrázok 2 Funkcia mernej spotreby paliva v závislosti užitočného zaťaženia



Zdroj: spracované podľa Kopfer, Schönberger, Kopfer (2013)

Obrázok 2 znázorňuje špecifické zvýšenie spotreby paliva vozidla, keď sa prepravovaný náklad medzi dvoma miestami stále zvyšoval až na 7 ton. Je z neho zrejmé, že malé vozidlá z nižšej kategórie sú výhodné pri nízkom zaťažení. Pri vysokom zaťažení sú výhodné veľké vozidlá z vyššej kategórie, pretože v tomto prípade je na prepravu potrebné niekoľko vozidiel z nižšej kategórie. EVRP-VC predstavuje rozhodovaciu úlohu zostavenia trás pre rôzne veľkosti vozidiel, takže spotreba paliva podľa nasadených vozidiel je minimálna. Každé zákaznícke miesto musí byť navštívené práve raz, pričom nie je dovolené preťaženie vozidla.

### 3 ZÁVER

V súčasnosti sa pri realizácii prepravy materiálu do popredia dostávajú ekologické aspekty, ktoré bývajú zapracované do už rozpracovaných rozvozných úloh. Zníženie emisií rieši aj úlohy EVRP – VC (Emissions Vehicle Routing Problem – Vehicle Category). Modifikácia účelovej funkcie, ktorá predstavuje kvantifikáciu očakávanej spotreby paliva nákladného automobilu  $k$  s hmotnosťou užitočného zaťaženia  $q_{ij}$  z miesta  $i$  na miesto  $j$  s hodnotami  $d_{ij}$  (2) predstavuje zaujímavé rozšírenie možnosti formulácie tejto triedy problémov.

### Literatúra

- [1] BARTH, M. - BORIBOONSOMSIN, K. 2008. *Real-world CO2 impacts of traffic congestion*. In Transportation Research Record 2058, p. 63–71. [online]. 2008 [cit. 2015.03.25]. Dostupné na internete: <<http://uctc.net/research/papers/846.pdf>>.
- [2] BEKTAS, T. - LAPORTE, G. 2011. *The pollution routing problem*. In Transportation Research Part B, vol. 45, p.1232–1250 [online]. 2011. [cit. 2015.01.28]. Dostupné na internete: <[https://www.researchgate.net/publication/227427091\\_The\\_PollutionRouting\\_Problem](https://www.researchgate.net/publication/227427091_The_PollutionRouting_Problem)>.
- [3] BREZINA, I. a kol. 2009. *Modelovanie reverznej logistiky – optimalizácia procesov recyklácie a likvidácie odpadu*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2009. 222 s. ISBN 978-80-225-2825-2.
- [4] BREZINA, I. – ČIČKOVÁ, Z. – REIFF, M. 2009. *Kvantitatívne metódy na podporu logistických procesov*. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2009. 192 s. ISBN 978-80-225-2648-7.
- [5] ČIČKOVÁ, Z. 2008. *Optimalizácia rozvozu materiálu*. In Medzinárodný seminár mladých vedeckých pracovníkov. [online]. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2008. ISBN 978-80-225-2498-8, 80 (4 – 9). [cit. 2015.02.15]. Dostupné na internete: <<http://www.fhi.sk/files/netrinecop/Praha2007.pdf>>.
- [6] ČIČKOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2009 *Nájdenie najkratšej okružnej cesty pre všetky mestá v SR*. In Ekonomika Informatika vedecký časopis FHI EU v Bratislave a SSHI, 2009.
- [7] FREY, C. - ZHANG, K. - ROUPHAIL, N. 2010. *Vehicle-specific emissions modeling based upon road measurements*. In researchgate.net [online]. 2010 . [cit. 2015.03.18]. Dostupné na internete: <[https://www.researchgate.net/publication/43078616\\_Vehicle-Specific\\_Emissions\\_Modeling\\_Based\\_upon\\_on-Road\\_Measurements](https://www.researchgate.net/publication/43078616_Vehicle-Specific_Emissions_Modeling_Based_upon_on-Road_Measurements)>.
- [8] ICF (2006) *Assessment of the greenhouse gas analysis techniques for transportation projects*. 6 NCHRP Project 25–25 Task 17, ICF Consulting Fairfax, VA.

- [9] KARA, I. - KARA, B. - YETIS, M. 2007. *Energy minimizing vehicle routing problem*. In Combinatorial optimization and application (pp. 62–71). [online]. 2007, vol. 4616 [cit. 2015.02.20]. Dostupné na internete: <[http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-73556-4\\_9](http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-73556-4_9)>.
- [10] KOPFER, W. - SCHÖNBERGER, J. - KOPFER, H. 2013. *Reducing greenhouse gas emissions of a heterogeneous vehicle fleet*. In Flexible Services and Manufacturing Journal [online]. 2013 [cit. 2015.03.13]. Dostupné na internete: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10696-013-9180-9>>.ISSN1936-6582.
- [11] KUO, Y. 2010. *Using simulated annealing to minimize fuel consumption for the time-dependent vehicle routing problem*. In Comput Ind Eng. 6(59), 157 - 165
- [12] KUO, Y. – WANG,CC. 2011. *Optimizing the vrp by minimizing fuel consumption*. In Manag Environ Qual Int J22(4) p.440–450.
- [13] SCOTT, C. - URQUHART, N. - HART, E. 2010. *Influence of topology and payload on CO<sub>2</sub> optimized vehicle routing*. In Proceedings of the 2010 international conference on applications of evolutionary computation [online]. Vol. 2, p. 141–150. 2010. [cit. 2015.04.10]. Dostupné na internete: <[http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-12242-2\\_15](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-12242-2_15)>. ISSN 0302-9743.
- [14] SUZUKI Y. 2011. *A new truck-routing approach for reducing fuel consumption and pollutants emission*. In researchgate.net 2011[online]. [cit. 2015.04.10]. Dostupné na internete: <[https://www.researchgate.net/publication/251670266\\_A\\_new\\_truck-routing\\_approach\\_for\\_reducing\\_fuel\\_consumption\\_and\\_pollutants\\_emission](https://www.researchgate.net/publication/251670266_A_new_truck-routing_approach_for_reducing_fuel_consumption_and_pollutants_emission)>.
- [15] UBEDA, S. - ARCELUS, F. - FAULIN, J. 2010. *Green logistics at Eroski*. In International Journal of Production Economics [online]. vol. 131 no.1, p.1–8. 2010. [cit. 2015.04.21] Dostupné na internete: <<https://www.researchgate.net/publicliterature.PublicLiterature.search.html?type=keyword&search-keyword=Green+logistics+at+Eroski>>.
- [16] US Department of Energy (2008) Fuel economy guide. <http://www.fueleconomy.gov>.

### **Kontaktné údaje**

Bc. Miroslav Šofranko

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [sofranko.miroslav@gmail.com](mailto:sofranko.miroslav@gmail.com)

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 821

email: [brezina@euba.sk](mailto:brezina@euba.sk)

# MODELOVANIE ÚROKOVÝCH MIER VYUŽITÍM VAŠÍČKOVHO MODELU

## MODELING INTEREST RATES USING THE VAŠÍČEK MODEL

*Anna Strešňáková*

### **Abstrakt**

Článok sa zameriava na možnosti stochastického modelovania úrokových mier s využitím Vašíčkovho modelu, čo zahŕňa v prvom rade odhad parametrov modelu a následnú simuláciu budúceho vývoja. Výsledkom riešenia danej problematiky je, že v blízkej budúcnosti sa neočakáva rast úrokovej miery

***Kľúčové slová:** úroková miera, Vašíčekov model, stochastické modelovanie*

### **Abstract**

This article focuses on the possibility of stochastic modeling interest rates using the Vasicek model, which includes the first estimate model parameters and subsequent simulation of future development. The result of the issue is that in the near future is not expected to increase in interest rates

***Keywords:** interest rate, Vašíček model, stochastic modeling*

## **1 STOCHASTICKÉ MODELY**

Podľa medzinárodnej aktuárskej asociácie, obecná definícia stochastického modelovania môže byť daná funkciou stochastického modelovania – určovania rozdielných hodnôt neznámych veličín. (International Actuarial Association, 2010) Najdôležitejšou úlohou takéhoto modelu je modelovať rozdelenia možných výsledkov, ktoré zohľadňujú náhodné zmeny vstupov. Stochastickým modelom teda môžeme nazývať model, ktorý pre rovnaký input (resp. pre rovnaké začiatkové podmienky) môže dosahovať rôzne výsledky.

Podľa Zmeškala je možné finančné modely rozdeliť, okrem iných delení, podľa rozhodovacích podmienok, na deterministické modely, stochastické modely, modely za neistoty a modely kombinujúce predchádzajúce prístupy. Rozdielom medzi stochastickými modelmi a modelmi za neistoty sú vstupné údaje. Pre stochastické modely je možné vstupné údaje stanoviť ako rozdelenie pravdepodobnosti, zatiaľ čo pre modely za neistoty je možné vstupné údaje stanoviť iba pomocou hraničných hodnôt alebo intervalov (pre modelovanie v takomto prípade je doporučené využiť aparát fuzzy množín). Takéto vymedzenie stochastických modelov je užšie ako prvé vymedzenie. Zmeškal ďalej uvádza rozdelenie stochastických modelov (v poňatí užšej definície) podľa účelu na ekonometrické modely a stochastické optimalizačné modely. Pre toto poňatie stochastických modelov je dôležité rozdelenie ekonometrických modelov podľa rôznych hladísk. Vyzdvihnúť možno dve varianty rozdelenia týchto modelov. Podľa typu dynamických stochastických procesov možno ekonometrické modely rozdeliť na časovo invariantné (napríklad markovho typu, kde rozdelenie pravdepodobnosti je na čase nezávislé) a časovo variantné (rozdelenie pravdepodobnosti sa s časom mení). Druhým delením je delenie modelov podľa typu modelovaných vzťahov pri predikcii. Tu môžeme rozdeliť na kauzálne modely, keď hľadáme priamy vzťah medzi finančnými veličinami, ktorý bude platiť aj v budúcnosti (napr. model

CAPM) a časové rady, kde predikovaná veličina je odvodzovaná z vývoja tej istej veličiny v minulosti (modely autoregresívne, kľzavé priemery, ARIMA, GARCH a pod.)

Z uvedeného je zrejmé, že stochastických modelov je dostatočné množstvo. Nanešťastie, nie všetky sú vhodné pre modelovanie úrokových sadzieb. Dôvodom je predovšetkým špecifické chovanie úrokových sadzieb. Pohyb úrokovej miery má náhodný charakter. Hodnotu úrokovej miery ovplyvňuje viacero rôznych faktorov, pričom niektoré je možno kvantifikovať lepšie a niektoré horšie. V ďalších časových intervaloch je možné pri úrokových sadzbách sledovať empiricky preukázanú tendenciu návratu k dlhodobým rovnovážnym sadzbám. Je nutné teda využiť tzv. reverzné stochastické modely a nie stochastické modely, ktoré sú aplikovateľné napr. na akcie (modely založené na Brownovom geometrickom procese). Stochastické modely úrokových sadzieb by mali zahŕňať parameter dlhobohej rovnováhy úrokových sadzieb a parameter rýchlosti približovania sa k hodnote dlhobohej rovnováhy úrokových sadzieb.

### 1.1 Vašíčkov model

Málek rozlišuje medzi modelmi okamžitej spotovej miery a modelmi celej časovej štruktúry (Heath-Jarrow-Mortonov model). V rámci modelov okamžitej spotovej miery ďalej rozlišuje medzi jednofaktorovými (Vašíčkov model, Cox-Ingersoll-Rossov model) a viacfaktorovými modelmi (Brennan-Schwartzov model, Langetiegov model). Všeobecnou nevýhodou je nižšia flexibilita, pretože takéto modely berú do úvahy iba jeden zdroj neistoty. Výhodou viacfaktorových modelov je vyššia flexibilita, nevýhodou je obtiažne matematické spracovanie. Vašíčkov model úrokových sadzieb je založený na Ornstein-Uhlenbeckovom procese a je jednofaktorovým modelom okamžitej spotovej úrokovej miery.

Podľa Zeytuna a Guptu, Vašíčkov model využíva reverzný stochastický proces na modelovanie vývoja krátkodobej úrokovej miery. Reverzia je jednou z kľúčových inovácií tohto modelu a túto vlastnosť je možné pozorovať aj v reálnej ekonomike. Vysoké úrokové miery spôsobujú spomaľovanie ekonomiky, nakoľko s rastúcou úrokovou mierou klesá objem požičanej hotovosti. Toto spôsobuje návrat k dlhodobej rovnovážnej hodnote. V opačnom prípade, keď úroková miera je nízka, hotovosť je žiadaná a úroková miera má tendenciu opäť sa zvýšiť k dlhodobej rovnovážnej miere.

Podľa Vašíčka predpokladom modelu je, že súčasná úroková miera je známa a jej ďalšie hodnoty sa riadia nasledujúcou stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dz_t$$

ktorú môžeme zapísať aj ako

$$\int dr_t = \int a(b - r_t)dt + \int \sigma dz_t$$

kde  $r$  je spojitou funkciou času, ktorá sa riadi Markovovými procesmi, čo znamená že budúci vývoj krátkodobej úrokovej miery je nezávislý od vývoja v minulosti. Takýto spojitý Markovov proces sa nazýva aj difúzny proces. Predpokladom modelu je aj efektívny trh.

Parameter  $b$  predstavuje dlhodobú rovnovážnu mieru krátkodobej úrokovej miery  $r$  (najkratšej možnej, ktorá sa zvyčajne nazýva okamžitou úrokovou mierou). V niektorých rozšírených modeloch dlhodobá rovnovážna miera nie je konštantná, ale je definovaná ako funkcia času. Vašíčkov model rešpektuje empiricky zistenú vlastnosť úrokových mier – návrat k dlhodobej rovnováhe. Ak je úroková miera nižšia ako  $b$ , je drift kladný a úroková miera je tlačaná hore. Ak je úroková miera vyššia ako  $b$ , drift je záporný a úroková miera je tlačaná dolu. Táto vlastnosť je typická pre úrokové miery a odlišuje chovanie úrokových mier od chovania cien akcií. Pretože model pracuje len s jedným faktorom, všetky úrokové miery sú úplne závislé na

krátkodobej úrokovej miere  $r$ . Všetky modely úrokových mier sú additívne a teda v čase  $t+\Delta t$  úroková miera je  $r_{t+\Delta t}$ . Parameter  $\alpha$  označuje rýchlosť približovania krátkodobej úrokovej miery  $r$  k dlhodobej rovnovážnej hodnote  $b$ .

## 1.2 Simulácia krátkodobého vývoja úrokovej miery

Na odhadnutie parametrov modelu  $\alpha$ ,  $b$  a  $\sigma$  bude použitá metóda maximálnej vierohodnosti, ako je doporučené Jamesovou a Webberom. Prostredníctvom tejto metódy získame také hodnoty parametrov, ktoré budú maximalizovať pravdepodobnostnú funkciu.

Parametre Vašíčkovho modelu sú odhadnuté pre medzibankovú referenčnú sadzbu Euribor. Pre odhad sú využité reálne hodnoty mesačných úrokových sadzieb Euribor s týždenným fixingom. Súbor údajov zahŕňa údaje od 1.1.1999 do 1.2.2013, celkovo teda 170 hodnôt. Najprv je odhad urobený do roku 2007 a potom sa predlžuje po dvoch rokoch až do roku 2013, čiže zahŕňa všetky dostupné údaje. Výsledky sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 1 Odhad parametrov Vašíčkovho modelu

Vašíčkov model v tvare		Rozsah údajov			
		1.1.1999 2.2.2007	1.1.1999 2.2.2009	1.1.1999 2.2.2011	1.1.1999 1.2.2013
Odhadovaný parameter	$\alpha$	0,161786	0,158851	0,082657	0,033450
	$b$	0,032797	0,020613	0,004679	-0,042489
	$\sigma$	0,005367	0,007606	0,007268	0,007008

Parametre v tabuľke sa vzťahujú k Vašíčkovmu modelu v tvare  $dr_t = \alpha(b - r_t)dt + \sigma dz_t$ . Aby bolo možné odhadnúť vývoj krátkodobej (okamžitej) úrokovej miery, je potrebné použiť Eulerovo diskkrétne vyjadrenie stochastickej diferenciálnej rovnice a additívne vlastnosti modelu. Eulerovo diskkrétne vyjadrenie úrokovej miery je podľa Benningu a Wienera v tvare

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \alpha(b - r_t)\Delta t + \sigma \varepsilon_{t+\Delta t} \sqrt{\Delta t}$$

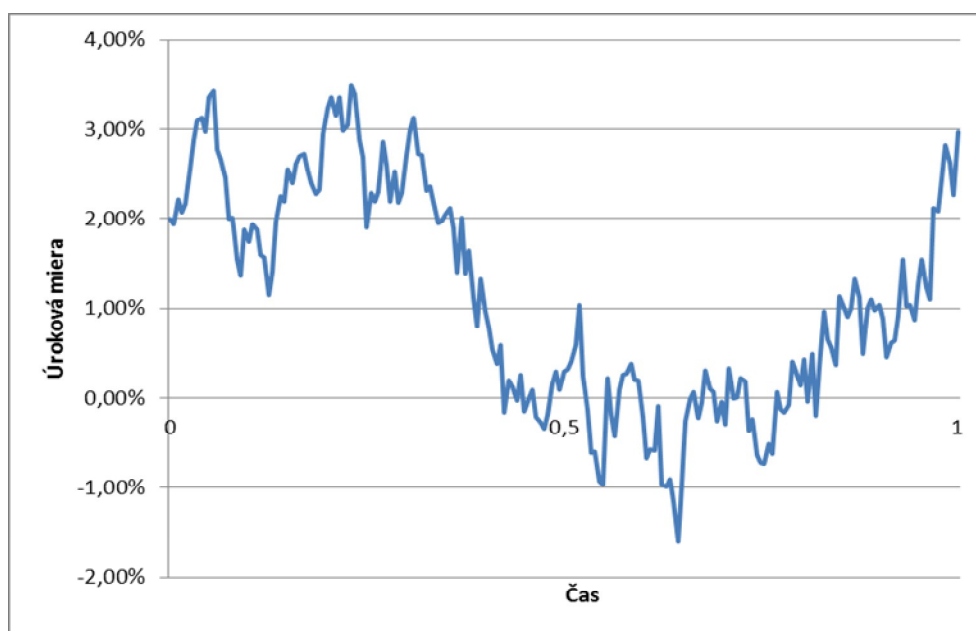
kde

$$\varepsilon_{t+\Delta t} \sim N(0,1), t = 0,1, \dots, T - \Delta t.$$

Budúci vývoj úrokovej miery je určený jednoducho pridávaním  $\Delta r$ , ktorú označujeme aj  $dr$  k úrokovej miere  $r$  z predchádzajúceho obdobia na základe čoho je vykreslený graf krátkodobej úrokovej miery počas požadovaného obdobia.

Graf začína na počiatkovej hodnote  $r$  pre čas  $t = 0$ , ktorá predstavuje poslednú známu hodnotu sadzby zo dňa 1.2.2013, teda hodnotu 0,084% po dobu dvoch rokov. Ďalej sú pre modelovanie potrebné hodnoty  $\alpha$ ,  $b$  a  $\sigma$ , ktoré sme odhadli metódou maximálnej vierohodnosti použitím Riešiteľa a určenie počtu časových intervalov. Aby sa dosiahla presnosť Eulerového diskkrétneho vyjadrenia, časové intervaly by mali byť veľmi malé. V použitých výpočtoch je to 200 intervalov. Náhodná zložka nadobúda hodnoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a štandardnou odchýlkou 1 a bola získaná pomocou Generátora pseudonáhodných čísel, ktorý je dostupný v MS Excel.

**Graf 1 Simulácia krátkodobého vývoja úrokovej miery využitím Vašíčkovho modelu**



Na základe odhadnutých parametrov bola vykonaná simulácia krátkodobého vývoja úrokovej miery Eulerovým diskretným vyjadrením úrokovej miery, teda zjednodušene pridávaním  $\Delta r$  k úrokovej miere  $r$  z predchádzajúceho obdobia. Zápornosť dlhodobej rovnovážnej miery  $b$  zapríčinila, že úroková miera sa dostala do záporných hodnôt, čím sa potvrdilo tvrdenie o tejto nevýhode Vašíčkovho modelu. Zápornosť nominálnej úrokovej miery nie je možná, no v súčasnosti sú hodnoty tejto miery take nízke, že ich môžeme považovať prakticky za nulové a na základe modelu nie je možné predpokladať výraznejší rast ani v blízkej budúcnosti.

### **Použitá literatúra**

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. HULL, J. 2003. Options, Futures & Other Derivatives. 5. Edition. Prentice Hall. 2002. 744 p. ISBN-10: 0130090565
2. JAMES, J. – WEBBER, N. 2004, Interest rate modelling: Financial Engineering. Chichester. John Wiley & Sons. 2000. 654 p. ISBN-10: 0471975230
3. MÁLEK, J. 2005. Dynamika úrokových mēr a úrokové deriváty. Vydání I. Praha: Ekopress, 2005. 135. s. ISBN 80-86119-97-1.
4. ZEYTUN, S. – GUPTA, A. 2007. A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate. [online]. Fraunhofer: Institut für Techno und Wirtschaftsmathematik, 2007. 26 p. Dostupné na internete <[http://pdf.aminer.org/000/371/879/credit\\_risks\\_of\\_interest\\_rate\\_swaps\\_a\\_comparative\\_study\\_of.pdf](http://pdf.aminer.org/000/371/879/credit_risks_of_interest_rate_swaps_a_comparative_study_of.pdf)>
5. ZMEŠKAL, Z. a kol. 2004. Finanční modely. Vydání II., v Ekopressu I. Praha: Ekopress, 2004, 236 s. ISBN 80-861 19-87-4.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Anna Strešňáková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemská 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 816 email: [anna.stareckova@euba.sk](mailto:anna.stareckova@euba.sk),

# SPOTREBNÁ FUNKCIA V PROCESE VÝUČBY EKONOMETRIE<sup>1</sup>

## CONSUMPTION FUNCTION IN THE PROCESS OF TEACHING ECONOMETRICS

*Kvetoslava Surmanová*

### Abstrakt

Keď sa spomenie spotrebná funkcia, každému sa hneď vybaví funkcia, kde je výška spotreby determinovaná disponibilným príjmom. Túto reláciu predstavil Keynes v roku 1936. Keynesova teória prešla tak ako aj ďalšie oblasti ekonómie od jej vzniku značným rozvojom. V článku sa zameriame na teoretické prístupy k analýze spotrebnej funkcie, ktoré môžu byť využívané ako modelové príklady pri rôznych oblastiach ekonometrického modelovania, nielen v oblasti klasického lineárneho ekonometrického modelu.

**Kľúčové slová:** ekonometria, spotrebná funkcia, príjem, Keynes, dynamický model, ECM

### Abstract

When mention is made of consumption function, each is immediately recall function which is determined by the amount of consumption of disposable income. This session introduced Keynes (1936). The theory of consumption functions exactly like other areas of economics since its inception considerable development. The article will focus on theoretic approach to the analyses of consumption function that can be used as a model in different areas of econometric modeling, not only in the classical linear econometric model.

**Keywords:** econometrics, consumption function, income, Keynes, dynamic model, ECM

## 1 SPOTREBNÁ FUNKCIA

Spotreba je hlavnou zložkou agregovaného dopytu a preto má nezastupiteľný význam v ekonomickej analýze a najmä v makroekonómii. Medzi najčastejšie a najznámejšie prístupy k analýze spotrebnej funkcie môžeme zaradiť Keynesovu teória, Friedmanova hypotéza permanentného príjmu a Modiglianiho hypotéza životného cyklu. Najčastejšie sa formuluje na makroúrovni, ale môžeme sa s ňou stretnúť aj v oblasti mikroekonómii. V nasledujúcich podkapitolách uvedieme tri teoretické prístupy, pri kvantifikácii ktorých nepostačuje na odhad len metóda najmenších štvorcov.

### 1.1 Lineárny model

Základná Keynesova teória spotrebnej funkcie zobrazuje vzťah medzi úrovňou spotrebiteľských výdavkov a úrovňou disponibilného príjmu. Túto závislosť môžeme vyjadriť analyticky nasledovne:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_t^d + u_t, \quad (1)$$

kde

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku"



$C_t$  vyjadruje spotrebné výdavky v čase  $t$  a  $Y_t^d$  je disponibilný príjem v čase  $t$ . Odhad takéhoto modelu realizujeme klasickou metódou najmenších štvorcov, pričom estimátor je neskreslený a efektívny. Parameter  $\beta_0$  vyjadruje autonómnú spotrebu a  $\beta_1$  hraničný sklon k spotrebe. Táto teória však nedostatočne zachytáva vzťah agregovaných ukazovateľov a preto vznikli ďalšie možné pohľady na analyzovanie spotreby domácností.

## 1.2 Model s adaptívnymi očakávaniami

Ako reakcia na Keynesovu teóriu vznikli ďalšie moderné teórie spotreby a úspor. Jednou z nich je Friedmanova teória permanentného príjmu. Friedman v roku 1957 rozšíril Keynesove poznatky, pričom rozdelil spotrebu a príjem na permanentnú<sup>2</sup> a dočasnú časť. Vyplynulo z nej, že domácnosti sú verné svojim spotrebným zvyklostiam, bez ohľadu na krátkodobý príjem a teda že spotreba je oveľa stabilnejšia ako sa predpokladalo. Dôraz kládol na formovanie očakávaní budúcich príjmov.

Túto teóriu môžeme zapísať nasledovne:

$$C_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y_t^p + u_t, \quad (2)$$

kde  $\alpha$  vyjadruje hraničný sklon k spotrebe z permanentného príjmu  $Y_t^p$ . Na základe tvorenia očakávaní ohľadom budúceho príjmu

$$Y_t^p = Y_{t-1}^p + \lambda(Y_t - Y_{t-1}^p), \quad (3)$$

pričom pre koeficient adaptívnych očakávaní  $\lambda$  platí  $0 < \lambda \leq 1$  môžeme vzťah (2) upraviť na autoregresný model adaptívnych očakávaní:

$$C_t = \beta_0\lambda + \beta_1\lambda \cdot Y_t + (1 - \lambda)C_{t-1} + v_t. \quad (4)$$

Náhodná zložka  $v_t = u_t - (1 - \lambda)u_{t-1}$  je zložená náhodná zložka a na odhad parametrov (4) už nemôžeme aplikovať MNŠ. Vhodnou metódou na odhad parametrov je metóda inštrumentálnych premenných<sup>3</sup>.

## 1.3 Model parciálneho prispôsobenia

Jednoduchšia (z pohľadu odhadu parametrov ekonometrického modelu) je Friedmanova hypotéza definovaná ako model parciálneho prispôsobenia.

Vychádzajme z modelu:

$$C_t^p = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t. \quad (5)$$

Pre nemerateľnú, permanentnú spotrebu  $C_t^p$  je potrebné prijať predpoklad o parciálnom prispôsobení:

$$C_t - C_{t-1} = \varphi(C_t^p - C_{t-1}), \quad (6)$$

kde  $\varphi$  je koeficient parciálneho prispôsobenia, pre ktorý platí  $0 < \varphi \leq 1$ .

Substitúciou vzťahu (5) do vzťahu (6) získavame po úpravách opäť autoregresný model:

$$C_t = \beta_0\lambda + \beta_1\varphi \cdot Y_t + (1 - \varphi)C_{t-1} + v_t. \quad (7)$$

Na rozdiel od vzťahu (4) je náhodná zložka vo vzťahu (7) vyjadrená jednoduchšie  $v_t = \varphi u_t$ .

Preto na odhad parametrov vzťahu (7) je možné opäť použiť MNŠ.

<sup>2</sup> Pojem permanentný v zmysle orientovaný na dlhodobé zvyšovanie príjmu.

<sup>3</sup> Viac o metóde inštrumentálnych premenných v Ivaničová a kol. (2012).

#### 1.4 Model korekcie chyby (z angl. ECM – Error corection model)

Koncepciu ECM modelu rozpracovali Davidson, Hendry, Srba a Yeo (1978). Vychádzali z dlhodobého vzťahu (1) za podmienky, že autonómna spotreba,  $\beta_0 = 0$ . Zlogaritmovaním vzťahu (1) a využitím nasledovných substitúcií  $c_t = \ln(C_t)$ ,  $b = \ln(\beta_1)$  a  $y_t^d = \ln(Y_t^d)$  získavame model

$$c_t = b + y_t^d + u_t. \quad (8)$$

Uved'me ešte zápis všeobecného ADL(p,q) modelu (z angl. Autoregressive distributed lag):

$$A(L)y_t = m + B(L)x_t + u_t, \quad (9)$$

kde

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p \quad (10)$$

a

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_q L^q, \quad (11)$$

Kde  $L$  vyjadruje polynóm oneskorenia.

Ďalej budeme vychádzať zo zjednodušeného modelu typu ADL(1, 1), ktorého tvar je nasledovný:

$$c_t = m + \alpha_1 c_{t-1} + \beta_0 y_t^d + \beta_1 y_{t-1}^d + u_t, \quad (12)$$

Kde  $c_t$  a  $y_t^d$  sú stacionárne premenné.

Za predpokladu, že  $\alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = 1$ , resp.  $\beta_0 = -\beta_1 + \omega$  a  $\gamma_1 = 1 - \omega$ , dostaneme model korekcie chyby v tvare:

$$\Delta c_t = m + \beta_0 \Delta y_t^d - \omega(c_t - y_t^d) + u_t. \quad (13)$$

ECM<sup>4</sup> sú v súčasnosti často používané modely, pričom ich výhodou je schopnosť oddeliť krátkodobý vplyv od dlhodobého vplyvu determinantov na vysvetľovanú premennú.

## 2 ZÁVER

Prezentovaním troch rôznych teoretických prístupov konštrukcie spotrebnej funkcie sme preukázali, že pri kvantifikácii uvedených relácií nepostačuje aplikovať základnú MNŠ. Model s adaptívnymi očakávaniami pri odhade parametrov vyžaduje voľbu a následné testovanie inštrumentov. Konštrukcia a odhad modelu korekcie chyby si zasa vyžaduje aplikovať poznatky z oblasti stacionarity a kointegrácie časových radov.

#### Použitá literatúra

1. ARLT, J. – ČUTKOVÁ, J. – RADKOVSKÝ, Š. 2001. Analýza spotřební funkce v podmínkách ČR. VP č.34, Praha 2001
2. DAVIDSON, J. E. H. – HENDRY, D. F. – SRBA, F. – YEO, S. 1978. Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship Between consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom. *The Economic Journal*, 88, 661 - 692

---

<sup>4</sup> Skonštruovanie ECM modelov si vyžaduje najskôr preskúmať stacionaritu použitých časových radov.

3. IVANIČOVÁ, Z. - CHOCHOLATÁ, M. - SURMANOVÁ, K. 2012. *Ekonometrické modelovanie*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2012. 350 s. [16,362 AH]. ISBN 978-80-225-3381-2.
4. KÖNIG, B. - HORVÁT, P. - OSTRIHOŇ, F. 2013. Analýza spotreby domácností SR: ECM prístup. In *Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi*. [elektronický zdroj]. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2013. ISBN 978-80-225-3646-2.
5. LUKÁČIK, M. - PEKÁR, J. 2006. *Kointegračná analýza v ekonometrii* [elektronický zdroj]. Bratislava : Katedra operačného výskumu a ekonometrie FHI EU, 2006. Dostupné na internete: <<http://www.fhi.sk/files/katedry/kove/veda-vyskum/prace/2006/Lukacik-Pekar2006.pdf>>.
6. SENAJ, M. 2007. Odhad spotrebnej funkcie pre Slovensko a prognóza spotreby. Výskumná štúdia 1/2007, voľne dostupné na [www.nbs.sk/PUBLIK](http://www.nbs.sk/PUBLIK)
7. SURMANOVÁ, K. – FURKOVÁ, A. – SZOMOLÁNYI, K. 2012. Slovak industry shortterm forecast: ECM model with crisis consideration. In *Zbornik radova / Conference proceedings : the 17th international scientific meeting, : strategic management and decision support systems in strategic management*. - Subotica : University of Novi Sad, Faculty of Economics Subotica, 2012. - ISBN 978-86-7233-305-3. - [S. 1-7].

### **Kontaktné údaje**

Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: [kvetoslava.surmanova@euba.sk](mailto:kvetoslava.surmanova@euba.sk)