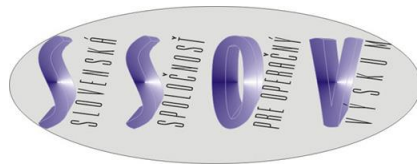


SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ PRE OPERAČNÝ VÝSKUM  
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY  
EKONOMICKEJ UNIVERZITY V BRATISLAVE



**ZBORNÍK ZO SEMINÁRA  
VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD VO VEDECKO-  
VÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XII**

14. – 16. jún 2017  
Račkova dolina

**Programový výbor:**

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava (predseda)  
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava  
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, Vysoká škola ekonomická Praha  
doc. Ing. Jana Hančlová, CSc., Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava  
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická Praha  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc., Žilinská univerzita Žilina

**Recenzenti:**

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Marián Goga, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
prof. Ing. Zlatica Ivaničová, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava

**Prípravný výbor:**

Eva Čerteková, Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
doc. Ing. Jan Fábry, PhD., Vysoká škola ekonomická Praha  
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
Ing. Marian Reiff, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava  
Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava

Zborník neprešiel jazykovou úpravou.

AH 11,13

**Náklad:** 50 ks

**Kontakt:** [ssov@euba.sk](mailto:ssov@euba.sk)

**Zostavovateľ:** Brian König

**Web Editor:** Martin Lukáčik

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre operačný výskum, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

© Ekonomická univerzita v Bratislave, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2017

**ISBN 978-80-225-4392-7**

## Obsah

Zuzana Čičková, Allan Jose Sequeira Lopez:	ROZHODOVANIE DUOPOLISTICKÝCH FIRIEM NA TRHU A VÄZŇOVA DILEMA	5
Zuzana Čičková, Anna Strešňáková:	MODELOVANIE SPRÁVANIA SA OLIGOPOLISTOV NA TRHU POISTENIA	10
Zuzana Čičková, Matej Zagiba:	SIEŤOVÁ BEZPEČNOSŤ A TEÓRIA HIER	15
Juraj Dubovec, Lucia Pančíková, Lukáš Falát:	PROGNÓZOVANIE V DOPRAVE	19
Juraj Dubovec, Lucia Pančíková, Lukáš Falát:	VPLYV CENY NA DOPYT V OSOBNEJ DOPRAVE	25
Tomáš Fašiang, Pavel Gežík:	UPLATNENIE PRINCÍPOV REVERZNEJ LOGISTIKY V PROCESE SPOTREBITEĽSKÉHO SPRÁVANIA	32
Michal Fendek:	INTERPRETAČNÉ MOŽNOSTI PODMIENOK OPTIMÁLNOTI V ÚLOHE CENOVEJ REGULÁCIE NA BÁZE AVERCHOVHO – JONESOVHO MODELU	38
Petr Fiala:	DYNAMICKÝ MODEL SÍŤOVÉ EKONOMIKY	44
Andrea Furková:	HAC ESTIMÁTOR V KONTEXTE PRIESTOROVEJ AUTOKORELÁCIE	50
Lýdia Gábrišová, Jaroslav Janáček:	NÁVRH A POROVNANIE KRITÉRIÍ KOLEKTÍVNEJ FÉROVOSTI	55
Pavel Gežík, Tomáš Fašiang:	EKO-EKO SPRÁVANIE SPOTREBITEĽA	61
Marián Goga:	ANALÝZA MAJETKOVÝCH EFEKTOV PODĽA KEYNESA	67
Vladimír Holý, Petra Tomanová:	ŘEŠENÍ ČASOVĚ ZÁVISLÉ ÚLOHY OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍCH POMOCÍ OPTIMALIZACE MRAVENČÍ KOLONIÍ A LOKÁLNÍHO VYHLEDÁVÁNÍ	75
Eduard Hozlár:	STOCHASTICKÝ MODEL ŠTRUKTÚRY FINANCOVANIA PODNIKU	82
Michaela Chocholatá:	DISPARITY V REGIÓNOCH KRAJÍN V4: BETA A SIGMA KONVERGENCIA	89
Jaroslav Janáček:	RYCHLÝ ALGORITMUS PRO URČENÍ NEJHORŠÍHO SCÉNÁŘE	96
Marta Janáčková, Alžbeta Szendreyová:	VPLYV PREJAZDOV V OBCIACH NA EFEKTÍVNY POČET OBSLUŽNÝCH STREDÍSK	101
Miroslava Jánošová, Zlatica Ivaničová:	ANALÝZA UKAZOVATEĽA MEDZINÁRODNEJ INVESTIČNEJ POZÍCIE A JEHO VPLYVU NA HRUBÝ DOMÁCI PRODUKT	105
Michal Koháni, Peter Czimmermann:	CHARAKTERISTIKA KRITICKÝCH DVOJÍC HRÁN V DOPRAVNEJ SIETI OBSLUŽNÉHO SYSTÉMU	112

Martina Kuncová, Veronika Hedija:	FINANČNÍ ANALÝZA ČESKÝCH CESTOVNÍCH KANCELÁŘÍ S VYUŽITÍM METOD VÍCEKRITERIÁLNÍHO HODNOCENÍ	118
Martin Lukáčik:	JEDNODUCHÝ PROGRAM NA PODPORU SEKVENČNÉHO TESTOVANIA ADF TESTU V PROGRAME EVIEWS	127
Adriana Lukáčiková:	APLIKÁCIA DIDAKTICKÝCH ZÁSAD VO VÝUČBE EKONOMETRIE	134
Veronika Miťková:	BEHAVIORÁLNE PARAMETRE V MODELI VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY SLOVENSKA S DÔRAZOM NA SEKTOR AUTOMOBILOV	141
Vladimir Mlynarovič:	HISTORICKÁ KONFRONTÁCIA IDENTIKÁCIE INVESTIČNÝCH PRÍLEŽITOSTÍ	145
Juraj Pekár, Ivan Brezina:	OPTIMALIZÁCIA SEKVENČNÝCH MODELOV POUŽITÍM MS EXCELU	149
Jan Pelikán:	OPTIMALIZACE KAMIONOVÉ DOPRAVY	155
Štefan Peško:	TAGUCHIHO SCENÁRE V SLUŽBÁCH ZÁCHRANÁROV	160
Allan Jose Sequeira Lopez:	EKONOMICKÉ APLIKÁCIE TEÓRIE HIER	165
Kvetoslava Surmanová, Marian Reiff:	MOŽNOSTI VYUŽITIA AKTIVIZUJÚCICH VYUČUJÚCICH METÓD V EKONOMETRII	171
Karol Szomolányi:	ELASTICITA SUBSTITÚCIE VSTUPOV Z KRÁTKODOBÉHO HĽADISKA	177

# ROZHODOVANIE DUOPOLISTICKÝCH FIRIEM NA TRHU A VÄZŇOVA DILEMA<sup>1</sup>

## DECISION MAKING OF DUOPOLY IN THE MARKET AND THE PRISONER'S DILEMMA

*Zuzana Čičková, Allan Jose Sequeira Lopez*

### Abstrakt

Duopol je špecifickou formou oligopolu, keď ponuku na trhu tvoria len dvaja predávajúci. Aj v takomto prípade súčasné antimonopolné zákony zakazujú vytváranie dohôd medzi účastníkmi. Hlavným cieľom duopolu je maximalizácia spoločného zisku. Pri analýze danej situácie možno využiť prístupy známe z teórie hier. V príspevku sa zaoberáme Cournotovým modelom duopolu a ukážeme, že tento model umožňuje formuláciu daného problému vo forme väzňovej dilemy.

*Kľúčové slová: duopol, Cournotov model, väzňova dilema*

### Abstract

Duopoly is a specific form of oligopoly in which the supply in the market is formed by two suppliers only. Also in this case the contracts between the suppliers are forbidden by the current anti-monopoly legislation. The main aim of duopoly is to maximize the overall profit. In order to analyze such situation, the approaches known from the game theory be used. In our paper we focus on the Cournot model of duopoly to show that the model can be used to formulate such problem in the form of the prisoner's dilemma.

*Keywords: duopoly, Cournot model, prisoner's dilemma*

## 1 ÚVOD

Duopol nazývame jednu z foriem oligopolu, keď na trhu pôsobia len dvaja predávajúci, ktorí ponúkajú homogénny produkt. V takomto prípade sú firmy často postavené pred otázku spolupráce, respektíve nespôlupráce s druhou firmou. Vytváranie dohôd nazývame tiež kolúziou firiem a účastníkov dohody nazývame tiež kartel. Je zrejmé, že v prípade duopolu je pre výrobcov najvýhodnejšie spolupracovať a jednať ako monopol. Toto platí vtedy a len vtedy, ak spoločný zisk je väčší ako individuálny zisk firiem mimo duopolu. Prekážkou sú však antimonopolné zákony a tiež by mohlo byť prekážkou aj to, že účastníci kartelu sa musia dohodnúť na rozdelení dodatočného zisku. Uvedené trhové podmienky predurčujú pri analýzach duopolu použitie prístupov známych z teórie hier, pretože predmetom skúmania tejto vednej disciplíny je práve analýza konfliktných rozhodovacích situácií viacerých účastníkov. V prvej časti príspevku sa zaoberáme zjednodušeným Cournotovým modelom duopolu. Následne ukážeme, že tento model spĺňa predpoklady známej väzňovej dilemy, a tak bude zapísaný v tejto forme.

---

<sup>1</sup> Príspevok bol vypracovaný v rámci projektu VEGA 1/0351/17 Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska

## 2 MODELOVANIE DUOPOLU NA ZÁKLADE COURNOTOVHO MODELU

Cournotova analýza duopolu (Cournot, 1938) vychádza z týchto predpokladov:

- Na trhu pôsobia dvaja predávajúci (tieto firmy považujeme za hráčov  $P_1$  a  $P_2$ ) ponúkajúci homogénny produkt,
- cena na trhu je funkciou množstva ponúkaného tovaru,
- predávajúci stanovujú súčasne množstvo ponúkaného tovaru.

Ďalej budeme používať takéto označenie<sup>2</sup>:

Premenné:  $q_1$  – množstvo tovaru ponúkané predávajúcim  $P_1$   
 $q_2$  – množstvo tovaru ponúkané predávajúcim  $P_2$   
 $q = q_1 + q_2$  – celkové ponúkané množstvo  
 $p$  – cena výrobku na trhu

Funkcie:

1, Funkcia určujúca cenu na trhu v závislosti od ponúkaného množstva, predpokladáme lineárnu tvar funkcie  $p(q) = a - bq$ , kde  $b > 0$  a  $a \geq bq$ .

2, Funkcia tržieb  $P_1$ :  $t_1(q) = pq_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1$

2, Funkcia tržieb  $P_2$ :  $t_2(q) = pq_2 = (a - b(q_1 + q_2))q_2$

Predpokladajme, že sa firmy rozhodujú nezávisle, potom stanovujú objem produkcie takto:

$$\frac{\partial t_1(q)}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_2(q)}{\partial q_2} = a - 2bq_2 - bq_1 = 0 \quad (2)$$

Riešením systému (1) a (2) získame rovnovážne množstvá predávajúcich:  $q_1 = q_2 = \frac{a}{3b}$ ,

rovnovážnu cenu:  $p(q) = \frac{1}{3}a$  a takéto tržby firiem  $t_1(q) = t_2(q) = \frac{a^2}{9b}$ .

Z (1) tiež vyplýva:

$$q_1 = \frac{a - bq_2}{2b} \quad (3)$$

A z (2) vyplýva:

$$q_2 = \frac{a - bq_1}{2b} \quad (4)$$

Vzťahy (3) a (4) možno považovať za najlepšiu odpoveď, t.j. na základe týchto vzťahov by mali firmy stanovovať objemy produkcie v reakcii na objem produkcie druhej firmy (protihráča).

---

<sup>2</sup> Zjednodušenie predpokladáme nulové náklady oboch firiem, t.j. nebudeme uvažovať s nákladovými funkciami predávajúcich

Teraz predpokladajme, že sa hráči dohodli na vzájomnej spolupráci a vytvoria kartel, teda maximalizujú spoločnú funkciu tržieb:

$$t(q) = p(q_1 + q_2) = (a - b(q_1 + q_2))(q_1 + q_2)$$

Stanovme parciálne derivácie:

$$\frac{\partial t(q)}{\partial q_1} = \frac{\partial t(q)}{\partial q_2} = a - 2bq_1 - 2bq_2 = 0$$

Pretože za týchto predpokladov zrejme platí:  $q_1 = q_2$ , možno v tomto prípade stanoviť zodpovedajúce ponúkané objemy:  $q_1 = q_2 = \frac{a}{4b}$ , rovnovážnu cenu:  $p(q) = \frac{1}{2}a$  a takéto tržby

firiem  $t_1(q) = t_2(q) = \frac{a^2}{8b}$ . V prípade spolupráce firiem možno konštatovať, že znížené ponúkané množstvo tovaru zvýšilo jeho cenu a tak aj zisk oboch firiem.

Skúmame však stabilitu tohto výstupu. Tento výstup nie je stabilný, pretože pre každého z hráčov je výhodné odchyliť sa od tohto ponúkaného množstva a získať viac (na základe (3) a (4)). Uvažujme, že zradí  $P_1$ , ktorý predpokladá, že konkurent nezmení svoj objem produkcie a uvažuje, či možno profitovať z porušenia kartelovej dohody. Takto možno predpokladať, že

$P_2$  stanoví ponúkaný objem na úrovni  $q_2 = \frac{a}{4b}$  a  $P_1$  stanoví svoj objem produkcie na základe

najlepšej reakcie, ktorý je v tomto prípade určený na základe (3), teda  $q_1 = \frac{3a}{8b}$ . V prípade

zrady jednej z firiem bude cena na trhu vo výške  $p(q) = \frac{3}{8}a$  a tržby firiem sú stanovené takto:

$$t_1(q) = \frac{9a^2}{64b} \text{ (zradca) a } t_2(q) = \frac{3a^2}{32b} \text{ (podvedený).}$$

### 3 MODELOVANIE DUOPOLU AKO VÄZŇOVEJ DILEMY

Väznova dilema je jednou z najznámejších hier v rámci teórie hier. Táto hra bola formulovaná v (Flood a Dresher, 1950). Hru možno jednoducho charakterizovať takto: jedná sa o bimaticovú hru dvoch hráčov ( $P_1$  a  $P_2$ ), každý má k dispozícii dve stratégie (nazvime ich

*spolupráca* a *zrada*), pričom matica platieb  $P_1$  aj  $P_2$  je takáto:  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ , pričom pre

prvky tejto matice platí:  $d_{12} < d_{22} < d_{11} < d_{21}$ . Takúto hru možno charakterizovať aj formou bimaticy (tabuľka 1).

Tabuľka 1: bimatica platieb

		$P_2$	
		<i>spolupráca</i>	<i>zrada</i>
$P_1$	<i>spolupráca</i>	$d_{11}, d_{11}$	$d_{12}, (d_{21})$
	<i>zrada</i>	$(d_{21}), d_{12}$	$(d_{22}), (d_{22})$

Využitím princípu dominancie možno nájsť rovnovážny bod takejto hry. Rovnovážny bod zodpovedá stratégii *zradit'* pre oboch hráčov. Hra je charakteristická tým, že aj keď najväčšie

výplaty hráčov sú v prípade ich vzájomnej spolupráce, táto stratégia nie je rovnovážnym bodom hry.

Sumarizujme teraz stratégie duopolistov z časti 2. Hodnoty tržieb sú uvedené v tabuľke 2.

Tabuľka 2: výplaty hráčov

variant	$t_1(q)$	$t_2(q)$
konkurencia	$\frac{a^2}{9b}$	$\frac{a^2}{9b}$
kartel	$\frac{a^2}{8b}$	$\frac{a^2}{8b}$
zrada P <sub>1</sub>	$\frac{9a^2}{64b}$	$\frac{3a^2}{32b}$
zrada P <sub>2</sub>	$\frac{3a^2}{32b}$	$\frac{9a^2}{64b}$

Tiež možno zapísať bimaticu takejto hry (tabuľka 3):

Tabuľka 3: výplaty duopolistov

		P <sub>2</sub>	
		<i>spolupráca</i>	<i>zrada</i>
P <sub>1</sub>	<i>spolupráca</i>	$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}, \left(\frac{9}{64}\right)$
	<i>zrada</i>	$\left(\frac{9}{64}\right), \frac{3}{32}$	$\left(\frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{9}\right)$

Stratégia (zrada, zrada) obsahuje výplaty hráčov v prípade nespolupráce (ak hráči predpokladajú vzájomné porušenie dohody, potom je najlepšie stanoviť výplaty na základe (1) a (2)). Prvky bimaticy v tabuľke 3 dokazujú, že takáto hra je hrou typu väznova dilemma. Analýzou hry možno získať jediný rovnovážny bod, ktorý zodpovedá stratégii *zradit'* pre oboch hráčov, a teda rovnováhou je stanovenie produkcie na základe Cournotovho prístupu.

## 4 ZÁVER

Predmetom skúmania teórie hier je skúmanie konfliktov viacerých účastníkov. Rozhodovanie sa duopolistov možno charakterizovať ako typický konflikt dvoch hráčov, a tak možno na analýzu využiť prístupy známe z teórie hier. V príspevku je poukázané na to, že rozhodovanie duopolistov možno za určitých podmienok modelovať ako hru typu väznova dilemma. Analýza rovnovážneho bodu takejto hry poukazuje na fakt, že rovnovážnou stratégiou duopolistov nie je spolupráca. Tento fakt vyplýva aj z predpokladu nemožnosti vytvárania záväzných dohôd medzi duopolistami (antimonopolné zákony).

## Použitá literatúra



1. **GOGA, M.** *Teória hier*. Bratislava : Iura Edition, 2013. s. 140. ISBN 978-80-8078-613-7.
2. **COURNOT, A. A.** *Researches into the Mathematical Principle of the Theory of Wealth*. New York : A. M. Kelley Publishers, 1971.
3. **KIMLIČKA, Š.** Teoreticko-množinový prístup k formovaniu teórie informačných systémov. *Knižnice a vedecké informácie*. 17, 1985, 6, s. 255-260.
4. **DLOUHÝ, M. - FIALA, P.** *Úvod do teórie hier*. Praha : Oeconomica, 2007.

### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826

email: [zuzana.cickova@euba.sk](mailto:zuzana.cickova@euba.sk)

Ing. Allan Jose Sequeira Lopez

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 834

email: [sequeira\\_36@hotmail.com](mailto:sequeira_36@hotmail.com)

# MODELOVANIE SPRÁVANIA SA OLIGOPOLISTOV NA TRHU POISTENIA <sup>1</sup>

## MODELING OF OLIGOPOLY BEHAVIOR IN THE INSURANCE MARKET

*Zuzana Čičková, Anna Strešňáková*

### Abstrakt

Teória hier poskytuje nástroje na analýzu rôznych konfliktných situácií, ktorých sa zúčastňujú viaceré subjekty (hráči). Zameranie teórie hier predurčuje použitie jej nástrojov v rôznych oblastiach. Tento príspevok je zameraný na analýzu oligopolistického trhu v špecifickej oblasti poistenia, kde na strane ponuky trhu pôsobia viacerí poisťovatelia ponúkajúci homogénny produkt. Strategické rozhodovanie každého z poisťovateľov reflektuje fakt, že na dôsledky tohto rozhodnutia má vplyv aj stratégia ostatných poisťovateľov. V príspevku uvádzame matematický model, použitím ktorého možno podporiť rozhodovanie sa na trhu poistenia, pričom sa zameriavame na možnosti cenotvorby každého poisťovateľa, na možnosti vyčíslenia ziskov a na možnosti stanovenia rovnovážnej stratégie.

*KLúčové slová: poistenie, teória hier, matematické modelovanie, oligopol*

### Abstract

Game theory provides tools for analyzing various conflicting situations involving multiple subjects (players). The focus of game theory predetermines the use of its tools in various areas. This paper focuses on the analysis of the oligopolistic market in a specific insurance field, where the supply side of the market consists of several insurers offering a homogeneous product. The strategic decision-making of each insurer reflects the fact that the impact of this decision also affects the strategy of other insurers. In the paper we present a mathematical model, which can be used to support decision-making in the insurance market, focusing on the pricing options of each insurer, on the possibilities of profit quantification and also on the possibilities of establishing an equilibrium strategy.

*Keywords: insurance, game theory, oligopoly*

## 1 ÚVOD

Teória hier vo svojej podstate skúma konfliktné rozhodovacie situácie viacerých účastníkov (hráčov). Univerzálny zámer teórie hier predurčuje jej interdisciplinárny charakter. S pojmom teória hier sa možno stretnúť v mnohých vedách ako ekonómia, biológia, psychológia, sociológia, medicína či politológia, kde napomáha pri riešení a pochopení širokého spektra problémov. V príspevku sa budeme venovať možnosti aplikácie teórie hier v poisťovníctve. Budeme prezentovať matematický model pomocou ktorého možno formalizovať rozhodovanie niekoľkých predávajúcich (poisťovní) ponúkajúcich homogénny produkt na trhu poistenia. Takýto typ trhovej štruktúry sa nazýva oligopol. Cieľom každého predávajúceho je zabezpečiť si maximálny zisk, pričom však sa dostáva do konfliktu s ostatnými predávajúcimi. Jednou z prvých analýz týkajúcich sa oligopolistického trhu je

---

<sup>1</sup> Príspevok bol vypracovaný v rámci projektu VEGA 1/0351/17 Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska

Cournotova analýza (Cournot, 1838), kde je cieľom oligopolistov stanoviť množstvo ponúkaného produktu, tak aby každý maximalizoval svoj zisk. V protiklade s Cournotovým modelom možno uviesť Bertrandov model (Bertrand, 1883), ktorý sa objavuje ako kritika Cournotovho modelu. Tento model sa zameriava na stanovenie cien jednotlivých predávajúcich.

V príspevku sa zaoberáme špecifickým modelom na trhu poistenia (Warren et al., 2012), kde na strane ponuky pôsobia viaceré subjekty (poisťovatelia) ponúkajúci homogénny produkt. Zameriavame sa jednak na možné prístupy k tvorbe ceny tohto produktu jednotlivými poisťovateľmi a s tým spojené možnosti vyčíslenia ziskov. Tiež sa zaoberáme možnosťami nájdenia rovnováhy na tomto trhu.

## 2 MODELOVANIE POISTNÉHO TRHU

Trhový priestor mnohých výrobkov sa vyznačuje určitým typom nedokonalosti. Nedokonalá konkurencia má mnoho foriem (Goga, 2013). Oligopol na strane ponuky považujeme za trhovú štruktúru, keď niekoľko výrobcov má kontrolu nad väčšou časťou ponuky určitého tovaru.

Ďalej budeme vychádzať z týchto predpokladov: Predpokladajme poistný trh, na ktorom pôsobí poisťovateľov  $n$  (hráčov) ponúkajúcich homogénny produkt. Nech poisťovatelia ponúkajú homogénny produkt. Teda ich postavenie je rovnocenné a zákazníci nezáleží na tom, od ktorého z nich si tento produkt zaobstará. Zákazníci sa tak riadia len na základe známej výšky ceny každého z poisťovateľov.

Každý  $i$ -ty,  $i=1,2,\dots,n$  poisťovateľ rozhoduje o cene  $p_i$ , za ktorú ponúkne poistný produkt, pričom poisťovatelia svoje rozhodnutia realizujú súčasne. Zákazníci tiež nemusia vynaložiť žiadne náklady na prechod od jedného poisťovateľa k druhému.

Ďalej predpokladajme, že poisťovatelia vzájomne nespupracujú a tiež uvažujme, že každý z nich môže ponúkať produkt v neobmedzenom množstve. Nech konštanty  $c_i$  predstavujú variabilné náklady  $i$ -teho poisťovateľa, pričom fixné náklady  $FC_i$  sú zanedbateľné.

Poisťovatelia ponúkajú homogénny produkt. Je zrejmé, že dopyt  $Q_i$  každého poisťovateľa je funkciou závislou nielen od jeho ceny ale aj od cien ostatných poisťovateľov. Dopyt po produkte je riadený konverzným kurzom (funkciou), na ktorom sa podieľajú spotrebitelia, ktorí s zakúpili produkt v prípade, že im bola urobená kalkulácia

$$Q_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = D \cdot z_i(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (1)$$

kde  $D$  je ponuka trhu,  $z_i$  je konverzný kurz poisťovateľa  $i$ , ktorý je funkciou účtovaného poistného všetkých poisťovateľov na trhu pričom  $p_i$  je cena poistenia vypočítaná a účtovaná  $i$ -tym poisťovateľom.

Ďalej sa budeme zaoberať vzťahom medzi dopytom a cenou. Dôležitou funkciou, ktorá vyjadruje vzťah medzi dopytom a cenou, je cenová elasticita  $e$ . Elasticita pre  $i$ -teho poisťovateľa je definovaná ako:

$$e_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{\partial Q_i(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{Q_i(p_1, p_2, \dots, p_n)} \quad (2)$$

V praxi sa používa niekoľko prístupov na vyčíslenie cenovej elasticity, cez analýzu historických dát (súkromných aj verejných), využívanie prieskumov preferencií zákazníkov,

využívanie simulačných metód a podobne. Alternatívne možno použiť štatistickú analýzu preferencií jednotlivých subjektov.

Niektoré súčasné optimalizačné cenové techniky používané na poistnom trhu s cieľom stanoviť cenu, majú tendenciu zjednodušovať model konverzie. Na trhu môže napríklad pôsobiť príliš veľa poisťovateľov, čo v značnej miere sťažuje určenie jednotlivých dopytových funkcií. V takom prípade sa veľa poisťovateľov zameria na agregovanú trhovú cenu. Nech  $p_{m,-i}$  je agregovanou cenou  $i$ -teho poisťovateľa, ktorá reprezentuje závislosť od cien všetkých poisťovateľov, okrem  $i$ -teho subjektu. Na jej stanovenie je potrebné zväziť charakter trhu a aj to, ako obvykle prebieha selekcia zo strany spotrebiteľa. Jednou z možností, ako stanoviť agregovanú cenu, by mohlo byť prijatie minimálnej ceny všetkých ostatných konkurentov

$$p_{m,-i} = \min_{j \neq i} \{p_j\} \quad (3)$$

Táto možnosť by bola prijateľná v prípade, že sa spotrebiteľia na trhu zameriavajú na najlacnejšie produkty. Ďalšou možnosťou by bolo akceptovanie priemeru cien ostatných konkurenčných poisťovateľov

$$p_{m,-i} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n p_j \quad (4)$$

alebo napríklad akceptovať priemer niekoľkých najnižších cien.

Ďalšou možnosťou je zostrojenie funkcie konverzného kurzu  $z_i$  tak, aby bol tento závislý len od kombinácie ceny  $p_i$  a  $p_{m,-i}$ . V prípade tohto zjednodušenia najčastejšie uvažujeme s podielom  $p_i / p_{m,-i}$  alebo rozdielom  $p_i - p_{m,-i}$ . Takto je konverzná funkcia funkciou len jedného parametra. Konverznú funkciu možno potom vyjadriť takto:

$$z_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = f(p_i - p_{m,-i}) \text{ alebo } z_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = f(p_i / p_{m,-i}) \quad (5)$$

Uvažujme teraz s vyčíslením platieb jednotlivých poisťovateľov. Tieto platby budeme označovať  $g_i$ . Vo všeobecnosti za platbu poisťovateľa možno považovať peňažný zisk, podiel na trhu, či ich kombináciu, či čokoľvek, čo je pre firmu dôležité. Nech platbou je priamo zisk príslušného  $i$ -teho poisťovateľa.

$$g_i = D \cdot z_i(p_i, p_{m,-i}) \cdot (p_i - c_i) - FC_i \quad (6)$$

kde  $c_i$  sú variabilné náklady, ktoré momentálne považujeme za známe a konštantné,  $FC_i$  sú fixné náklady.

Ďalšou možnosťou je použiť počet aktívnych klientov (zákazníkov), pretože je zrejmé, že tento faktor ovplyvňuje výšku predpokladaného čistého zisku z poistenia. Nech  $LV_i$  je konštanta, ktorá odráža diskontovaný priemerný budúci zisk s ohľadom na aktívnych zákazníkov. Teraz uvedieme modifikovaný spôsob vyčíslenia platieb:

$$g_i = D \cdot z_i(p_i, p_{m,-i}) \cdot (p_i - c_i + LV_i) - FC_i \quad (7)$$

Špeciálny prípad rovnice (7) je, keď  $LV_i = 0$  čím získame zisková funkciu v tvare (6), preto budeme ďalej uvažovať so všeobecnejším tvarom ziskovej funkcie (7).

Uvažujme teraz s určením najlepšej stratégie pre  $i$ -teho poisťovateľa. Najlepšou možnosťou pre každého poisťovateľa je polozenie parciálnej derivácie rovnice (7) podľa ceny  $p_i$  rovné nule. Takto možno zistiť cenu, ktorá maximalizuje zisk  $i$ -teho hráča vzhľadom na ceny stanovené ostatnými poisťovateľmi. Takto vypočítané ceny možno považovať za rovnovážne ceny daného produktu a súčasne sú tiež najlepšími odpoveďami na stratégie protihráčov.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = D \cdot \frac{\partial z_i}{\partial p_i} \cdot (p_i - c_i + LV_i) + Dz_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Použitím vzťahu pre elasticitu (2) získame:

$$D \cdot \frac{\partial z_i}{\partial p_i} = e \cdot \frac{Dz_i}{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Následne spätným dosadením do vzťahu (8) vzniknú rovnice

$$\frac{z_i}{p_i} \cdot e_i \cdot D \cdot (p_i - c_i + LV_i) + Dz_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

z čoho možno vyjadriť elasticitu

$$-e_i \cdot (p_i, p_{m,-i}) = \frac{p_i}{(p_i - c_i + LV_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

pričom pravá strana v každej  $i$ -tej rovnici je závislá len od ceny  $p_i$  ale ľavá strana je závislá od ceny  $p_i$  aj  $p_{m,-i}$ . Tým, že vzťah je závislý len od dvoch premenných, uľahčuje sa celý priebeh vyčíslenia rovnice. Z daného vzťahu môžeme určiť rovnovážnu cenu produktu na trhu či optimálnu cenu poisťovateľa  $p_i$ , ak je známa agregovaná cena  $p_{m,-i}$ . Pri samotnom riešení možno využiť štandardné spôsoby riešenia s využitím štandardných softvérových nástrojov. Výhodou celého modelu je, že reflektuje najlepšie odpovede na stanovené ceny všetkých poisťovateľov napriek tomu, že sa v modeli ceny jednotlivých poisťovateľov samostatne nevyskytujú (ich výška je však zohľadnená v agregovanej cene).

### 3 ZÁVER

Interdisciplinárny charakter známych aplikácií teórie hier predurčuje jej použitie v rôznych oblastiach, kde napomáha pri riešení mnohých problémov konfliktnéj povahy. Vo všeobecnosti je teória hier zameraná na hľadanie rovnovážnych stratégií a odporúčaní pre pravidlá rozhodovania. Preto možno často nájsť vzájomne súvisiace riešenia problémov. Účastníci rozhodovacieho procesu predpokladajú a reagujú na kroky ostatných účastníkov, čím vzniká viacero možných scenárov, každý s iným úžitkom pre jednotlivých účastníkov. V príspevku sme sa venovali oblasti poisťovníctva. Uvažovali sme s trhom oligopolu, pričom primárnym záujmom bolo stanovenie cien homogénneho poisťného produktu jednotlivými oligopolistami. Prezentovaný bol nekooperatívny prístup, keď cieľom každého oligopolistu je maximalizovať vlastnú platbu, pričom však musí rešpektovať rozhodnutia svojich protihráčov. Použitie prezentovaného prístupu vedie k určeniu rovnovážnych cien jednotlivých poisťovateľov tak, že tieto ceny sú súčasne aj najlepšími odpoveďami na stratégie protihráčov príslušného poisťovateľa, teda vedú k určeniu rovnovážneho stavu. Prezentovaná hra je hra jednokolová, teda hráči sa nezaoberajú úvahami o budúcich vzťahoch medzi nimi. Jedným z možných rozšírení daného prístupu formulácia danej hry ako hry v rozvinutom tvare, keď možno hodnotiť rozhodovanie sa hráčom v niekoľkých obdobiach.

Tiež možno uvažovať s možnosťami spolupráce medzi jednotlivými poisťovateľmi, čo môže v značnej miere ovplyvniť rovnováhu na danom trhu.

### **Použitá literatúra**

1. BERTRAND, J. 1883. Review of Walras's *Théorie mathématique de la richesse social* and Cournot's *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Trans. J. W. Friedman, in A. F. Daughety (1988).
2. COURNOT, A. A. 1838. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Trans. N.T. Bacon, New York: Macmillan, (1929).
3. DAUGHETYS, A.F. 1988. *Cournot Oligopoly – Characterization and Applications*. New York: Cambridge University Press (reprinted 2005).
4. GOGA, M. 2013. *Teória hier*. Iura Edition, Bratislava.
5. WARREN, R., YAO, J., ROURKE, T., IWANIK, J. 2012. Game theory in general insurance. *The Actuarial Profession*, (August), s. 1-75. Dostupné na <https://www.scor.com/en/sgrc/insurance-market/item/2657-game-theory-in-general-insurance.html>

### **Kontaktné údaje**

doc. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

email: [zuzana.cickova@euba.sk](mailto:zuzana.cickova@euba.sk)

RNDr. Anna Strešňáková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 836

email: [anna.stresnakova@euba.sk](mailto:anna.stresnakova@euba.sk)

# SIEŤOVÁ BEZPEČNOSŤ A TEÓRIA HIER<sup>1</sup>

## NETWORK SECURITY AND GAME THEORY

*Zuzana Čičková, Matej Zagiba*

### **Abstrakt**

Teória hier je vedná disciplína zaoberajúca sa matematickými modelmi konfliktov a spolupráce medzi subjektmi (živými ale aj neživými), ktorých správanie sa možno považovať za racionálne. Vzhľadom na racionálne správanie sa subjektov a prediktívnosť algoritmov, ktoré sa používajú na riešenie, teória hier poskytuje aj možnosť predvídať výsledky hry. Sieťová bezpečnosť sa zaoberá pravidlami a postupmi učnými na prevenciu a monitorovanie neoprávneného prístupu, zneužitia, zmeny alebo zneprístupnenia počítačovej siete a zdrojov dostupných v sieti. Rozhodovacie procesy v sieťovej bezpečnosti možno modelovo podporiť v rámci teórie hier. V príspevku sa zameriavame na bezpečnostné hry, pričom analyzujeme súčasný stav danej problematiky na základe publikovaných prác.

*Kľúčové slová: sieťová bezpečnosť, teória hier*

### **Abstract**

Game Theory is a science discipline dealing with mathematical models of conflict and cooperation between subjects (alive or inanimate) whose behavior can be considered rational. Because of the rational behavior of subjects and the predictability of the algorithms used to solve it, it also provides the ability to predict the results of the game. Network security deals with the policies and practices aimed to prevent and monitor unauthorized access, misuse, modification, or denial of a computer network and network-accessible resources. Decision making processes in network security can be modeled in game theory. In the paper, we focus on security games, analyzing the current state of the issue on the basis of published works.

*Keywords: network security, game theory*

## **1 ÚVOD**

Sieťová bezpečnosť je jedným z mnohých odborov informatiky, ktorá sa vo svojej podstate zaoberá zabezpečením sietí a sieťových zariadení. Zaoberá sa tiež prevenciou a kontrolou neoprávneného prístupu alebo prevenciou odcudzenia dát. Rozhodovacie procesy v sieťovej bezpečnosti možno modelovo podporiť aj v rámci teórie hier, optimalizácie a teórie riadenia. Použitie kvantitatívnych prístupov môže viesť k lepšiemu rozdeleniu limitovaných zdrojov a k informovanejším reakciám na bezpečnostné problémy komplexných systémov.

Internet vecí (Internet of Things – IoT) je v súčasnosti pomerne používaný pojem v oblasti informačných a komunikačných technológií (ICT). V podstate ide o sieť prepojených objektov (vecí - napr. senzory teploty, vniknutia, vlhkosti, elektrickej spotreby a podobne), ktoré sú jednoznačne adresovateľné s tým, že táto sieť je založená na štandardizovaných komunikačných protokoloch umožňujúcich výmenu a zdieľanie dát a informácií<sup>2</sup>. Prepojené

---

<sup>1</sup> Príspevok bol vypracovaný v rámci projektu VEGA 1/0351/17 Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska

<sup>2</sup> <http://i2ot.eu/internet-of-things/> (platné k 1.5.2017)

objekty majú často mimoriadne obmedzené zdroje (pamäť, výkon CPU) a očakáva sa funkčnosť niekoľko rokov na jednu baterku. Fenomén IoT stavia výskum v oblasti sieťovej bezpečnosti pred nové a nepreskúmané problémy.

Teória hier je vedná disciplína zaoberajúca sa vo všeobecnosti matematickými modelmi konfliktov a spolupráce a poskytuje tak explanačný a predikčný rámec správania sa subjektov, ktorých správanie je racionálne. Na základe teórie hier možno vysvetľovať správanie sa živých, ako aj neživých systémov, ktorých reakcie vedú k dosiahnutiu určitých vedomých alebo nevedomých cieľov. Vzhľadom na racionálne správanie sa jedincov a prediktívnosť algoritmov, ktoré sa používajú na riešenie, poskytuje aj možnosť predvídať výsledky hry na základe úplnosti alebo neúplnosti informácií vstupujúcich do rozhodovacieho procesu.

Existuje zásadný vzťah medzi sieťovou bezpečnosťou a rozhodovaním, pretože v podstate možno hovoriť o pridelovaní obmedzených zdrojov s ohľadom na rozloženie rizika. V špeciálnom prípade bezpečnostných hier možno jednotlivé subjekty (hráčov) rozdeliť na dve skupiny a hovoriť tak o interakcii medzi útočníkmi (attackers) a obrancami (defenders, perpetrators), pričom cieľom je predikcia správania sa útočníkov.

## 2 BEZPEČNOSTNÉ HRY

Sieťová bezpečnosť predstavuje otvorený problém. Hlavným dôvodom je fakt, že súčasné systémy sú zvyčajne príliš komplexná to, aby ich bolo možné dokonale zabezpečiť. Tiež je niekedy pomerne zložitá určiť, či je systém zraniteľný a či je jeho prípadná zraniteľnosť zneužitá, alebo aj či nie je konkrétny systém zneužitý k napádaniu iných systémov. Situácia sa naďalej zhoršuje. Tiež s predajom neodladených a neopraviteľných výrobkov sa potenciálne zväčšuje hrozba na strane útočníkov a sťažuje sa pozícia obrancov.

Bezpečnostné hry poskytujú analytický rámec pre modelovanie vzájomného pôsobenia medzi útočníkom, ktorých cieľom je kompromitácia sietí a medzi vlastníkami alebo administrátormi týchto sietí. Termínom hra tu označujeme strategický boj o kontrolu siete. Pre rozhodovateľa je teória hier matematickým nástrojom, ktorý metodicky stanovuje strategické voľby pre štruktúrované a analyzované problémy, kde situáciu modelujeme ako hru, kde vyžaduje od rozhodovateľa vyčíslenie výplat hráčov a ich strategické možnosti s cieľom stanoviť svoju efektívnu reakciu.

Ďalej uvedieme niekoľko termínov používaných v bezpečnostných hrách [1]:

*Hráči.* Vo všeobecnosti predstavujú útočníkov a obrancov daného systému. Často používaným spôsobom je využitie hry dvoch hráčov, kde v hre vystupuje jeden útočník (zastupujúci všetkých útočníkov) a jeden obranca (generalizovaný pojem pre všetky subjekty ako sú správcovia systému a bezpečnostní pracovníci, s rovnakým cieľom obrany siete). Aj keď jednotliví útočníci môžu mať rôzne ciele, definícia jedného útočníka v značnej miere zjednodušuje formalizáciu danej hry.

*Množiny stratégií hráčov.* Množiny stratégií sú varianty správania jednotlivých hráčov. Napríklad v najjednoduchšom prípade by útočník disponoval len dvoma stratégiami „útočiť“ alebo „neútočiť“ a obranca stratégiami „zvýš monitoring“ alebo „základný monitoring“.

*Platby hráčov.* Platby hráčov sú výsledkami (ziskom) hráča pre každú kombináciu stratégií hráčov. Hráč tak vie vyhodnotiť dôsledky svojho rozhodnutia sa. Platby vo všeobecnosti závisia od viacerých faktorov (náklady detekcie útoku, náklady na falošný poplach a podobne).

Predpokladajme jednokolovú hru, kde každý z hráčov volí nezávisle (bez informácie o voľbe protihráča) jednu z konečného počtu stratégií. Riešenie danej hry potom spočíva v nájdení



Nashovej rovnováhy, kde žiadny hráč nie je motivovaný k odkloneniu sa od rovnovážneho stavu (ak by sa odklonil, nemôže si polepšiť). Nashova rovnováha sa považuje za základný koncept riešenia bezpečnostných hier. Ak totiž obranca prijme rovnovážnu stratégiu a útočník vyberie inú stratégiu, dôsledkom sú len zvýšené náklady (zhoršenie platby) útočníka.

Je zrejmé, že uvedený spôsob formulácie danej hry ako hry dvoch hráčov predstavuje značné zjednodušenie rozhodovacej situácie. V reálnom svete sa napríklad stretávame s konfliktami, ktoré sa opakujú. V teórii hier hovoríme o opakovaných hrách, pri opakovaných hrách, hráč môže vykonávať rozhodovanie v danej fáze v závislosti od celej histórie hry v už skorších etapách. Takisto obmedzenie predpokladu úplnej informovanosti hráča vedie k formuláciám hier s nedokonalou informáciou, hry s asymetrickými informáciami zase obmedzujú predpoklad rovnakej informovanosti hráčov. Z uvedeného vyplýva široký záber tejto vednej disciplíny, ktorej poznatky možno využiť na riešenie množstva konfliktných problémov reálneho sveta.

V dôsledku priekopníckej povahy IoT oblasti je počet prác využívajúcich teóriu hier na problematiku bezpečnosti a dôvery obmedzený. Niekoľko vybratých uvádzame. V [3] sa Duan et al. venujú problematike vytvorenia algoritmu efektívneho z pohľadu energetickej náročnosti a využitia prenosového pásma, ktorý by bol schopný vyhodnotiť proces odvodenia dôvery k uzlu. Teóriu hier využívajú na podporu rozhodovania uzla či odpovedať na žiadosť o dôveru s ohľadom na vynaloženú energiu.

Hamdi et al. navrhli v [6] bezpečnostný model pre medicínske aplikácie založený na teórii hier. Autori predkladajú rozhodovací mechanizmus, ktorý vyhodnotí zostávajúcu kapacitu batérie, šírku pásma, spotrebu pamäte a blízkosť kompromitovaných uzlov a určí, či odosielateľ správy má byť autentifikovaný.

Chen et al. predkladajú zjednotený model obrany voči úmyselnému útoku na IoT [7]. V ich modeli je útočník úplne informovaný o topológii siete a je schopný vyradiť súčasne všetky uzly. V hre s nulovým súčtom medzi narušiteľom a obrancom zavádzajú uzlový rozhodovací mechanizmus s minimálnou réziou, ktorý je schopný zaručiť robustnosť vo veľkých IoT sieťach.

Všetky zmienené práce využívajú teóriu hier aby poskytli sieťovým uzlom (t.j. veciam) nástroje na odvrátenie niektorých útokov. Iný prístup je prezentovaný v práci [8], ktorá je zameraná na minimalizáciu bezpečnostných rizík. Autori poukazujú na možnosti určenia hranice, pri ktorej útočník už nemôže spôsobiť ďalšiu škodu. Základy tejto práce sú postavené na poznatkoch a modeli teórie hier publikovanom v [4].

### **3 ZÁVER**

Príspevok bol venovaný možnostiam využitia teórie hier v oblasti sieťovej bezpečnosti. Zameranie teórie hier na analýzu konfliktných rozhodovacích situácií medzi živými aj neživými subjektmi umožňuje jej použitie aj v oblasti sieťovej bezpečnosti pri zabezpečení sietí a sieťových zariadení. Možnosti predvídať výsledky hry umožňujú obrancovi (správcovi systému a bezpečnosť pracovníci, s rovnakým cieľom obrany siete) predikovať správanie sa útočníkov a tak nastaviť adekvátny spôsob ochrany siete. Spojenie týchto dvoch oblastí možno považovať za otvorený problém. Z uvedených prác vyplýva možné použitie poznatkov teórie hier. Ďalšie aplikácie teórie hier v oblasti sieťovej bezpečnosti budú predmetom ďalšieho výskumu.

#### **Použitá literatúra**

1. ALPHAN, T., BAAR, T. 2010. *Network Security: A Decision and Game-Theoretic Approach*. New York: Cambridge University Press.
2. DLOUHÝ, M., FIALA, P. 2015. *Teorie ekonomických a politických her*. Praha: Oeconomica.
3. DUAN, J., GAO, D., YANG, D., FOH, C., CHEN, H. 2014: *An Energy-Aware Trust Derivation Scheme With game-theoretic Approach in Wireless Sensor Networks for IoT Applications*. IEEE IoT Journal, Vol. 1, No. 1.
4. FIELDER A., PANAOUSIS E., MALACARIA P., HANKIN C., SMERALDI F. 2014. *Game Theory Meets Information Security Management*. In Proc. of the 29th IFIP International Information Security and Privacy Conference.
5. GOGA, M. 2013. *Teória hier*. Bratislava: Iura Edition.
6. HAMDI, M., ABIE, H. 2014. *Game-Based Adaptive Security in the Internet of Things for eHealth*. In Proc. of the IEEE International Conference on Communications (ICC).
7. CHEN P., CHENG S., CHEN K. 2014. *Information Fusion to Defend Intentional Attack in Internet of Things*. IEEE IoT Journal, Vol. 1, No.4.
8. RONTIDIS, G., PANAOUSIS, E., LASZKA, A., DAGIUKLAS, T., MALACARIA, P., ALPCAN, T. 2015. *A game-theoretic approach for minimizing security risks in the Internet-of-Things*. IEEE International Conference on Communication Workshop (ICCW), London.

#### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 826

email: [zuzana.cickova@euba.sk](mailto:zuzana.cickova@euba.sk)

Mgr. Matej Zagiba

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mlynska dolina F1

842 48 Bratislava

Tel: (421 2) 60 295 127

email: [Matej.Zagiba@uniba.sk](mailto:Matej.Zagiba@uniba.sk)

# PROGNÓZOVANIE V DOPRAVE

## TRANSPORTATION FORECASTING

*Juraj Dubovec, Lucia Pančíková, Lukáš Falát*

### **Abstrakt**

Príspevok je venovaný aplikácii štatistických metód v predikcii vybraných ukazovateľov v doprave. Poukazuje na dôležitosť analýzy, modelovania a krátkodobých predikcií dát v prostredí rýchlo sa meniacich podmienok, s prihliadnutím na nevyhnutnosť prispôsobovania sa globálnym trendom. Rovnako venuje pozornosť spracovaniu a štandardizácii dát, možnosti rozšírenia modelovacích prostriedkov v ostatných oblastiach dopravy, ako sú napríklad dopravné toky v automobilovej doprave.

*KLúčové slová: index tržieb, sezónne ARIMA modely, predikcie, Gretl*

### **Abstract**

This paper is devoted to the application of statistical methods in the prediction of selected indicators in transport. It points to the importance of analyzing, modeling and short-term predictions of data in a rapidly changing environment, taking into account the need to adapt to the global trend. It also focuses on the processing and standardization of data, the possibility of expanding model assets in other transport areas, such as traffic flows in road transport.

*Keywords: sales indices, seasonal ARIMA models, predictions, Gretl*

## **1 ÚVOD**

Softvérové spracovanie všeobecne rozšírených štatistických metód prispelo k ich širokospektrálnemu využitiu v rôznych spoločenských a vedných oblastiach. Výber vhodnej predikčnej metódy podlieha dôkladnej analýze zvolených veličín, čo zahŕňa analýzu faktorov, vplyvujúcich na priebeh dát, vnútornú štruktúru časových radov, periodicitu a z toho vychádzajúci predpoklad sezónnosti, ale i mnoho ďalších skutočností. Rovnako treba zohľadniť cieľ uskutočnenej analýzy a predikcie, pozitívny dopad a tiež finančný efekt výsledkov predikcie.

Prognostické metódy možno členiť z niekoľkých hľadísk, jedným z nich je otázka vstupu exogénneho faktora do modelu. Analýza faktorov, miera vzájomných závislostí, konštrukcia regresných modelov, predstavujú celú oblasť ekonometrického modelovania. Druhým prístupom je modelovanie na základe historických dát časového radu, jeho štruktúry, resp. závislostí. Do skupiny štatistických metód s vhodnosťou aplikácie na krátkodobé prognózy zaradíme napríklad metódy exponenciálneho vyrovnávania so schopnosťou rýchlej reakcie na fluktuácie v dátach, Box-Jenkinsove ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) modely, GARCH (Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic) modely, Kalmanove modely. Jednotlivé metódy i prípadná kombinácia ich prostriedkov majú svoje miesto v modelovaní, simulácii a predikovaní dopravných dát.

## **2 KRÁTKODOBÉ PROGNÓZOVANIE DÁT, METODOLÓGIA**

Z hľadiska voľby metódy upriamime svoju pozornosť na skupinu autoregresných modelov, kde odhad veličín je založený na posúdení závislostí v dátach. Vychádzajú

z predchádzajúcich skúseností, zo znalosti spracovávaných dát a využitií prostriedkov ARIMA modelov v dopravných predikciách [2, 3, 4, 5], sme sa rozhodli modelovať skupinu časových radov dopravných ukazovateľov na základe sezónnych ARIMA modelov. Teoretické východiská k zápisom, modelovaniu, predikcii všeobecného multiplikatívneho sezónneho ARIMA procesu SARIMA (p, d, q)(P, D, Q) sme čerpali z [6].

Tak ako každý štatistický, resp. ekonometrický model prechádza jednotlivými nevyhnutnými fázami, tak i náš postup bol nimi determinovaný: identifikácia [2, 7], kvantifikácia, verifikácia a predikcia.

V rámci identifikácie sme zvolili dva prostriedky, a to grafické vyjadrenie priebehu autokorelačných funkcií časových radov a Akaikovo informačné kritérium, ktoré patrí do skupiny informačných kritérií na posúdenie vhodnosti modelu z hľadiska množstva parametrov. Ide o minimalizáciu penalizačnej funkcie v tvare:

$$AIC(p, q) = \ln s_{\varepsilon}^2 + \frac{2(p + q)}{N},$$

kde  $p, q$  predstavujú počet parametrov modelu,  $\ln s_{\varepsilon}^2$  je logaritmom rozptylu náhodnej veličiny modelu a  $N$  je počet dát, resp. dĺžka časového radu.

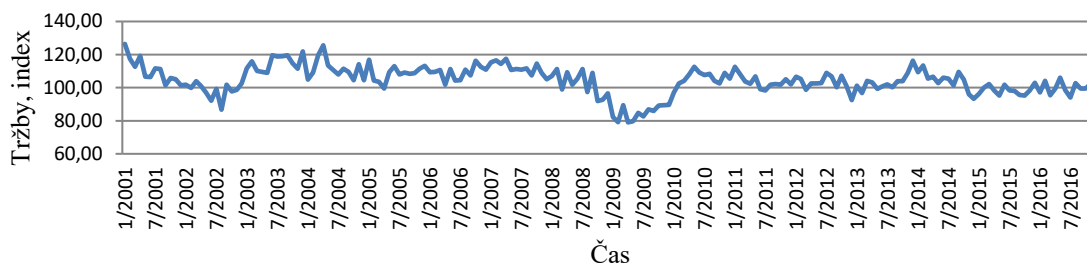
Fáza kvantifikácie je ovplyvnená softvérovými prostriedkami, my sme vychádzali z možnosti regresného a ekonometrického balíka Gretl, vhodného na spracovanie štatistických a ekonometrických prognóz, čo podporuje jeho dostupnosť vďaka nekomerčnému charakteru.

Podmienkou aplikácie odhadnutého modelu je dozaista jeho verifikácia, volili sme prístup kombinácie niekoľkých prostriedkov, medzi ktoré patria charakteristiky ako MAPE (Mean Absolute Percentage Error), RMSE (Root Mean Square Error) v kombinácii so zložitou modelu a účelom predikcie.

V procese predikcie je potrebné uvedomiť si reálne možnosti, teda brať ohľad na pravdepodobnostný charakter, mieru naplnenia, a s tým správnu voľbu relevantného horizontu prognózy.

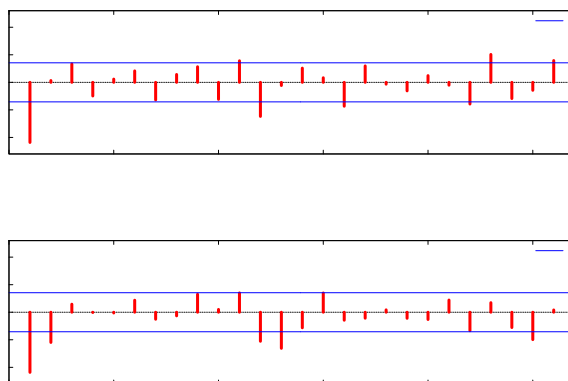
### 3 DÁTA A PREDIKČNÉ EXPERIMENTY

Uskutočnili sme niekoľko experimentov, ktorých cieľom bolo vytvoriť predikčné modely vhodné na krátkodobé prognózovanie vybraných dopravných ukazovateľov. Zvolenú dátovú základňu tvorilo niekoľko súborov dát, a to časové rady tržieb v doprave pre Českú a Slovenskú republiku, vyjadrené prostredníctvom ukazovateľa Index tržieb bez DPH v doprave a skladovaní (ďalej označované ako Tržby). Špecifikovaný index je vytvorený na základe vzťahu veličiny s prechádzajúcim rokom, kde tento rok je rovný 100, dáta sú neočistené. „Do odvetvia dopravy a spojov sa podľa Odvetvia klasifikácie ekonomických činností zaraďujú jednotky s prevažujúcou činnosťou v doprave, skladovaní, poštových službách a telekomunikáciách. Na hodnotenie, analýzy krátkodobého vývoja a možnú predikciu budúceho vývoja v tomto odvetví slúži ukazovateľ index tržieb“ [1]. Vzhľadom k dĺžke analyzovaného obdobia sú ako ukážka zvolené české dáta, a to najmä z hľadiska voľby predikčnej metódy. Analyzovaným obdobia je interval rokov 2001 – 2017, s mesačnou periodicitou. Pre účely prognózovania bol časový rad skrátený o tri obdobia aktuálneho roka, kde sme uskutočnili prognózu ex post. Vývoj sledovanej veličiny zobrazuje Obrázok 1.



**Obrázok 1:** Vývoj Indexu tržieb (vlastné spracovanie podľa Českého statistického úradu, metodika [1] )

Na základe stanoveného postupu modelovania podľa jednotlivých fáz sa v prvom kroku uskutočnila predbežná identifikácia autoregresného modelu, a to prostredníctvom grafických priebehov autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie (Obrázok 1). Vzhľadom k nestacionarite časového radu bola pred týmto krokom vykonaná diferenciácia, pre lepšiu názornosť a vyhodnotenie priebehov.



**Obrázok 2:** Priebeh autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie diferencovaných Tržieb (vlastné spracovanie)

Na základe grafického vývoja autokorelačných funkcií bolo vytvorených niekoľko predpokladaných modelov ARIMA, s upriamením pozornosti na prítomnosť významnej sezónnej zložky. Túto indikujú významné korelačné koeficienty v posune 12, rovnako logický predpoklad pri mesačnom sledovaní dát (použitie neočistených časových radov), hodnoty v periodograme. Stanovili sme si niekoľko kritérií pri výbere optimálneho modelu, a to už spomínanú sezónnosť, štatistickú významnosť parametrov kvantifikovaného modelu, minimalizáciu penalizačnej funkcie (AIC, Akaikovo informačné kritérium) a v neposlednom rade RMSE (Root Mean Square Error, odmocninu z priemernej štvorcovej chyby prognóz) prognóz. Na základe spomínaného bol zvolený nasledujúci predikčný model, uvádzame softvérový výstup z prostredia otvoreného softvéru Gretl:

Model 6: ARIMA, using observations 2001:02-2016:12 (T = 191)

Dependent variable: (1-L) trzby

Standard errors based on Hessian

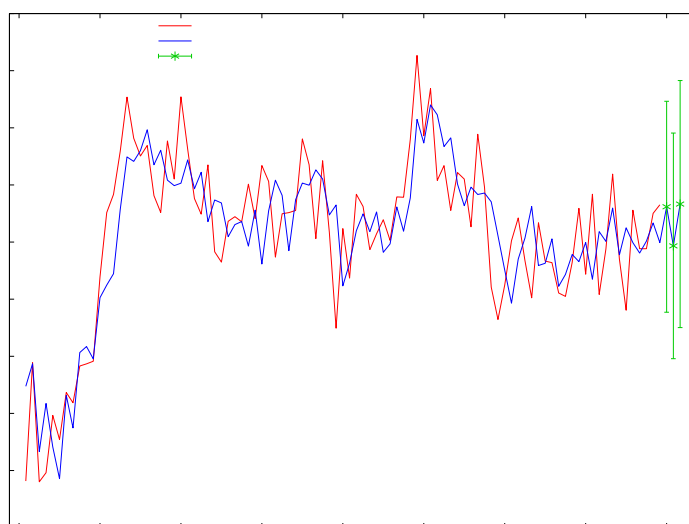
	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>z</i>	<i>p-value</i>	
phi_1	-0,620382	0,0721529	-8,5981	<0,0001	***
phi_2	-0,28752	0,0711512	-4,0410	<0,0001	***
Phi_1	-0,448919	0,0755005	-5,9459	<0,0001	***

Phi_2	-0,236793	0,0753933	-3,1408	0,0017	***
Mean dependent var	-0,121220	S.D. dependent var		5,936577	
Mean of innovations	-0,373675	S.D. of innovations		4,710914	
Log-likelihood	-568,8030	Akaike criterion		1147,606	
Schwarz criterion	1163,867	Hannan-Quinn		1154,193	

**Obrázok 3:** Kvantifikovaný model SARIMA (2, 1, 0)(2, 0, 0) s príslušnými štatistikami (vlastné spracovanie)

Uvedený model, rovnako ako ostatné, s ktorými sa pracovalo, bol podrobený štatistickej verifikácii, spočívajúcej v testovaní grafického priebehu autokorelačných koeficientov rezíduí, rovnako pomocou relevantných testov, obsiahnutým v zvolenom softvérovom balíku (napríklad LM test pre testovanie rôznosti rozptylu rezíduí).

Na Obrázku 4 je znázornený priebeh skutočných hodnôt Tržieb v sledovanom období, rovnako ich odhad v tomto období a v horizonte na nasledujúce tri mesiace.



**Obrázok 4:** Graf skutočného a odhadnutého vývoja Tržieb (vlastné spracovanie)

Prognózované hodnoty sme porovnali so skutočnosťou, vypočítali sme RMSE, ktoré bolo porovnávané s alternatívnymi modelmi. Vo výstupe (Obrázok 5) sú zobrazené bodové a intervalové predikcie pre horizont troch nasledujúcich mesiacov, pričom intervalová predikcia je vytvorená pre 95-percentný konfidenčný interval.

For 95% confidence intervals,  $z(0,025) = 1,96$

Obs	tržby	prediction	std. error	95% interval
2017:01	undefined	103,090	4,71091	(93,8567, 112,323)
2017:02	undefined	99,6647	5,03894	(89,7886, 109,541)
2017:03	undefined	103,325	5,51723	(92,5117, 114,139)

**Obrázok 5:** Bodové a intervalové prognózy Tržieb

Skutočné hodnoty v mesiacoch január, február, marec roku 2017 sú (po zaokrúhlení) 110,11; 100,58; 112,28. Všetky hodnoty sú obsiahnuté v konfidenčnom intervale prognóz, RMSE = 2,37.

## 4 ZÁVER

Zber, spracovanie dát, ich modelovanie a predikcia nadobúdajú stále väčší význam. Vysoká predikčná schopnosť na základe aplikovateľnosti štatistických metód, prípadne prostriedkov neuronových sietí, umožňuje rýchle reagovanie na meniace sa podmienky, zohľadňujúc nevyhnutnosť prispôsobovania sa globálnym trendom (zvyšujúcej sa mobility osôb a tovaru, komunikačných technológií) [8]. V oblasti dopravy je pozornosť v rámci prognózovania dát smerovaná do rôznych špecifických oblastí (prognózovanie výhľadových intenzít, prognózovanie dopytu po mestskej, prímestskej doprave, prognózovanie výkonov, intenzity v mýtnych úsekoch, v dopravných tokoch v osobnej i nákladnej cestnej doprave, ... [9]). Na naše experimenty sme zvolili Index tržieb bez DPH v doprave a skladovaní s mesačnou periodicitou. Snahou bolo poukázať na vhodnosť aplikovania vybraných sezónnych autoregresných modelov, ako jedného z prístupov pre krátkodobé predikcie. S ohľadom na cieľ spracovania dát možno voliť prístupy v modelovaní, zamerať sa na analýzu a modelovanie globálnych trendov alebo dekompozíciu časových radov, identifikáciu sezónnych výkyvov, prípadne skúmanie kauzálnych závislostí, ich identifikáciu, smerujúcu k návrhom v procese plánovania a rozhodovania.

### Použitá literatúra

1. Metodika – mesačné indexy tržieb v odvetví dopravy a spojov, dostupné online: [https://www.czso.cz/csu/czso/metodika\\_mesicni\\_indexy\\_trzeb\\_v\\_odvetvi\\_dopravy\\_a\\_spoju](https://www.czso.cz/csu/czso/metodika_mesicni_indexy_trzeb_v_odvetvi_dopravy_a_spoju)
2. KUMAR, S.V., VANAJAKSHI, L.: Short-term traffic flow prediction using seasonal ARIMA model with limited input data, dostupné online: <http://link.springer.com/article/10.1007/s12544-015-0170-8>
3. WILLIAMS, B.M., HOEL, L.A.: Modeling and Forecasting Vehicular Traffic Flow as a Seasonal ARIMA Process: Theoretical Basis and Empirical, dostupné online: [Resultshhttps://www3.nd.edu/~busiforc/handouts/ARIMA%20Engineering%20Article.pdf](https://www3.nd.edu/~busiforc/handouts/ARIMA%20Engineering%20Article.pdf)
4. GHOSH, B., BASU, B., O'MAHONY, M.: Time-Series Modeling For Forecasting Vehicular Traffic Flow in Dublin, dostupné online: <http://www.tara.tcd.ie/bitstream/handle/2262/20219/Ghosh,+Basu+and+O%27Mahony+,+time+series+modelling++for+forecasting+vehicular+traffic+flow+in+Dublin.pdf?sequence=1>
5. ZHOU, B., HE, D., SUN, Z., NG, W.: Network Traffic Modeling and Prediction with ARIMA/GARCH, dostupné online: <https://pdfs.semanticscholar.org/8b69/2869bc2e55f4d14f34f83e8e8e08427e8b5c.pdf>
6. MARČEK, D., MARČEK, M. 2001. EDIS Žilina. ISBN 80-7100-870-2
7. BARCELÓ, J., KUWAHARA, M., MISKA, M.: Traffic Data Collection and its Standardization, dostupné online: <https://books.google.sk/books?id=Cd4DIGO2U0YC&pg=PA148&lpg=PA148&dq=traffic+data+online&source=bl&ots=48XCCbh6nI&sig=V43zQr2ZeaL7PhoqPApwjALgrtc&hl=sk&sa=X&ved=0ahUKEwj9oJ7stpzUAhWEPBoKHQaYBwo4ChDoAQhOMAQ#v=onepage&q=traffic%20data%20online&f=false>

8. Tools for Transport Forecasting and Scenario Testing, dostupné online: <http://www.transport-research.info/project/tools-transport-forecasting-and-scenario-testing>
9. BEN-AKIVA, M.: Transportation Revenue Forecasting: Theory and Models, dostupné online: [https://ocw.mit.edu/courses/civil-and-environmental-engineering/1-201j-transportation-systems-analysis-demand-and-economics-fall-2008/lecture-notes/MIT1\\_201JF08\\_lec16.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/civil-and-environmental-engineering/1-201j-transportation-systems-analysis-demand-and-economics-fall-2008/lecture-notes/MIT1_201JF08_lec16.pdf)

## **POĎAKOVANIE**

Tento príspevok vznikol vďaka podpore grantu VEGA 1/0582/16 "Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach".

This work was supported by the research grant APVV-14-0658 "Optimisation of urban and regional public personal transport".

## **Kontaktné údaje**

Ing. Juraj Dubovec, PhD.,  
Žilinská Univerzita,  
Fakulta riadenia a informatiky, Katedra manažérskych teórií, Univerzitná 8215/1,  
01026 Žilina,  
e-mail: juraj.dubovec@fria.uniza.sk

Ing. Lucia Pančíková, PhD.,  
Žilinská Univerzita,  
Fakulta riadenia a informatiky, Katedra makro a mikroekonomiky, Univerzitná 8215/1,  
01026 Žilina,  
e-mail: lucia.pancikova@fri.uniza.sk

Ing. Lukáš Falát, PhD.,  
Žilinská Univerzita,  
Fakulta riadenia a informatiky, Katedra makro a mikroekonomiky, Univerzitná 8215/1,  
01026 Žilina,  
e-mail: lukas.falat@fri.uniza.sk



# VPLYV CENY NA DOPYT V OSOBNEJ DOPRAVE

## THE INFLUENCE OF PRICE ON DEMAND IN PERSONAL TRANSPORT

*Juraj Dubovec, Lucia Pančíková, Lukáš Falát*

### **Abstrakt**

V príspevku sú popísané cenové vplyvy, ktoré ovplyvňujú zmeny v dopyte v osobnej doprave v podmienkach Slovenskej republiky. Súbeh zmeny cien za dopravu, nárast príjmov a zmeny životného štýlu spôsobujú výrazný pokles záujmu o verejnú dopravu. Súčasne rastie dopyt po individuálnej doprave, čo spôsobuje problémy na nevyhovujúcej dopravnej infraštruktúre.

*Kľúčové slová: doprava, dopyt, cena, verejná doprava*

### **Abstract**

In this paper price factors, which influence the demand in personal transport in the Slovak Republic, are discussed. The concurrence of the change in transport prices, the growth of incomes and changes of lifestyle, cause significant decrease of the public transport. Moreover, the demand after individual transport is increasing. This fact causes problems due to inconvenient transport infrastructure.

*Keywords: transport, demand, price, public transport*

## **1 ÚVOD**

Trhové hospodárstvo priznáva prioritné postavenie v rozvoji ekonomiky spotreby. Základným prejavom požiadaviek spotreby je dopyt. Dopyt definujeme ako množstvo statkov alebo služieb, ktoré je kupujúci (jednotlivec alebo skupina) schopný a ochotný zakúpiť pri danej cene. Pre stanovenie dopytu musia byť splnené obidve podmienky, tzn. nielen ochota kúpiť, ale tiež jej zodpovedajúca kúpyschopnosť.

Dopyt po určitej komodite možno skúmať ako:

- individuálny dopyt domácnosti definovaný ako množstvo statku  $x$ , ktoré pri danej cene  $a$  v danom čase je spotrebiteľ ochotný a schopný kúpiť,
- trhový dopyt predstavujúci súhrn individuálnych dopytov po statku  $x$  vystupujúci na trhu v ekonomike v danom čase.

Rozsah a štruktúra ponuky, ceny a záujem spotrebiteľov majú dynamické vlastnosti. Ekonomickí aktéri (EA) sú aktívni v zmysle konania v rôznych zložkách hospodárskeho systému (domácnosti, podniky a inštitúcie). Každý EA disponuje zdrojmi, ktoré získal vlastným úsilím, prípadne zdedil. Zdroje tvorí kapitál v rôznych formách, ktorý EA využívajú pri dosahovaní svojich cieľov. Zdroje a ich štruktúra určuje postavenie ekonomických aktérov v sociálnom priestore. Aktéri rozhodujú o tvorbe a využití obmedzených zdrojov, ktoré ovplyvňujú ich konanie. Rozdiely medzi EA sú spôsobené vzdelaním, príležitosťami a spoločenskými inštitúciami.

Každé konanie môže využívať *ordinalitu*, kedy aktivita s najvyšším úžitkom sa nachádza pred aktivitou, ktorej priradíme menší úžitok. Vo všeobecnosti môžeme ordinálny úžitok charakterizovať vzťahmi typu: - lepšie ako, horšie ako, väčšie ako, menšie ako atď. Naopak,

pre použitie *kardinality* sú potrebné zvláštne podmienky, nakoľko v niektorých prípadoch neexistuje jednoznačný spôsob pre výpočet kardinálneho úžitku.

## 2 DETERMINANTY DOPYTU

### 2.1 Cena

Cenová elasticita dopytu (*CED*) je miera citlivosti nákupných rozhodnutí voči malým /pomerným/ zmenám ceny.

$$CED = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P}, \text{ geometrická interpretácia } CED = \frac{\Delta Q \cdot P}{\Delta P \cdot Q} \quad (1)$$

Formálne je cenová elasticita dopytu (1) definovaná ako percentuálna zmena objemu dopytu, vyvolaná jednopercetnou zmenou ceny.

Cenová elasticita dopytu je závislá na týchto základných faktoroch:

- substitúcia, čím ľahšie môžu spotrebiteľia „presedlať“ na iný tovar alebo službu, tým je dopyt elastickejší.
- podiel na celkových výdavkoch spotrebiteľa, kedy tovary alebo služby, s vyšším podielom v celkových výdavkoch spotrebiteľa majú vyššiu cenovú elasticitu.
- čas, nakoľko zvyky a existujúca spotreba obmedzujú rozsah, v ktorom môže spotrebiteľ v krátkom čase na zmenu ceny reagovať.

Zmena ceny statku (tovaru alebo služby) ovplyvňuje rozhodovanie spotrebiteľa. Spotrebiteľ reaguje na zníženie (zvýšenie) cien v závislosti od:

- charakteru kupovaného statku (inferiórny, normálny, luxusný),
- súčasného a budúceho očakávaného príjmu,
- od veku spotrebiteľa (v ktorej fáze životného cyklu sa nachádza),
- preferencií a ovplyvňovania sociálnou skupinou.

Celkový efekt zmeny cien je možné rozložiť na dva efekty:

- substitučný, ktorý znamená zmenu v množstve dopytu spôsobenú tým, že zmenou ceny sa stanú pre domácnosť substitúty atraktívnejšie,
- príjmový, ktorý znamená zmenu v dopyte spôsobenú zmenou kúpnej sily (ktorú vyvolala zmena ceny)

Substitučný efekt pôsobí na množstvo dopytu vždy opačným smerom, než ktorým sa pohybuje cena: zvýšenie (zníženie) ceny vždy zníži (zvýši) objem dopytu.

Tovary, u ktorých je rozhodovanie o kúpe najcitlivejšie voči cenám majú veľký príjmový a substitučný efekt. Príjmový a substitučný efekt sa často používa na stanovenie výšky kompenzácie pri zmenách cien statkov.

### 2.1 Iné faktory

Okrem zmien ceny ovplyvňuje dopyt celý rad ďalších faktorov. Pri skúmaní individuálneho dopytu po statku  $x$  vychádza ekonomická teória z predpokladu, že ho ovplyvňuje:

- cena komodity  $x$ ,
- ceny relevantných statkov,
- bohatstvo domácnosti,
- dôchodok čiže príjmy domácnosti,
- úžitok tovaru pre spotrebiteľa,

- ďalšie faktory (nálada a očakávania).

Relevantné statky označujeme statky, ktoré sa nachádzajú v takom vzťahu ku komodite, dopyt ktorej je predmetom skúmania, že pohyb v ich cenách ovplyvňuje úroveň tohto dopytu. Ide o:

- substitúty sú statky, ktoré sú schopné vzájomnej náhrady, tzn. uspokojujú tú istú potrebu ale s horšími vlastnosťami ako pôvodný statok. Podobne existuje substitučná možnosť uplatnenia výrobných vstupov (napr. rôznych druhov energií). Rast cien jedného zo substitútov vyvolá presun dopytu na cenovo výhodnejšie substitúty;
- komplementy, ktorých spotreba sa navzájom podmieňuje či dopĺňa. Ak sa v tomto prípade cena jedného z komplementov zvýši, vyvolá to pokles dopytu po oboch komoditách.

Individuálne rozdiely dopytu závisia od:

- preferenčnej stupnice potrieb jednotlivých domácností, podľa ktorej uskutočňujú svoje nákupy,
- bohatstva, resp. majetku, ktorým domácnosť disponuje. Majetná rodina ma prirodzene odlišnú štruktúru potrieb ako rodina bez majetkového zázemia. Rozsah majetku ovplyvňuje očakávanú úroveň priemerného dôchodku a tým aj reakcie spotrebiteľov.

Analýza individuálneho dopytu má zmysel len pre dopyt po statkoch každodennej spotreby, tzn. u statkov, ktoré vykazujú kontinuálnu (nepretržitú) spotrebu a pripúšťajú rozdiely v individuálnom množstve spotreby.

## 2.1 Trhový dopyt

Trhový (súhrnný) dopyt získame sčítaním množstiev, požadovaných jednotlivými subjektmi. Trhový dopyt je súčasne jedinou možnosťou skúmania dopytu po statkoch dlhodobej spotreby, u ktorých jednotlivé domácnosti vytvárajú dopyt buď pri založení novej domácnosti, alebo pri potrebe obnovy zariadení pre ich opotrebovanie. Interval obnovy bude jasne odlišný podľa finančných možností domácností a dosiahnutej životnej úrovne.

Trhový dopyt ovplyvňujú:

- národný dôchodok ako súhrn dôchodkov v ekonomike,
- úžitkovosť statku v spoločenskom priemere,
- súhrnné bohatstvo spoločnosti,
- rozloženie príjmov a bohatstva medzi domácnosti,
- počet kúpyschopných obyvateľov,
- ostatné faktory.

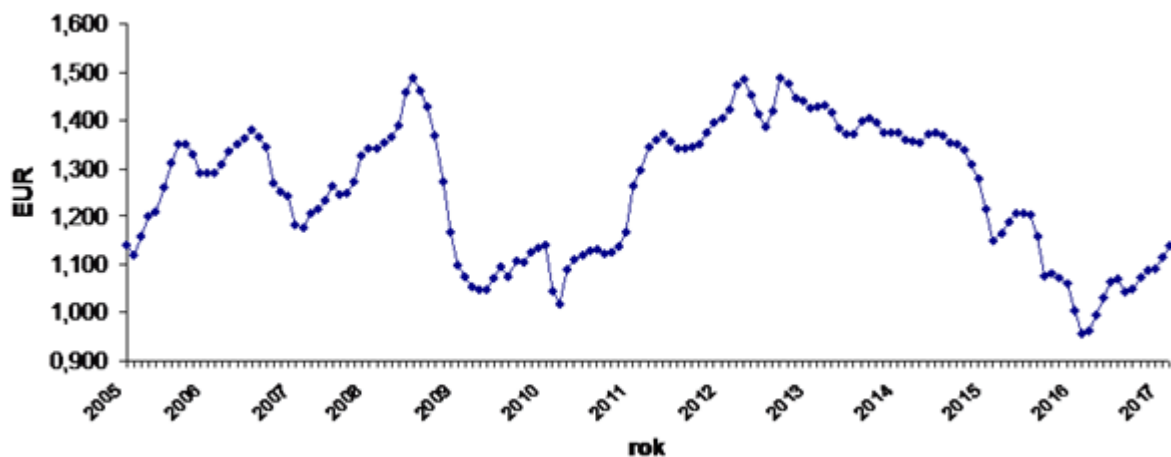
Dopyt je podstatným činiteľom ovplyvňujúcim alokáciu zdrojov cestou cenového mechanizmu. Ovplyvňuje výrobné plány a cenotvorbu podnikov. Je tiež dôležitým východiskom rozhodovania vlády pri formulácii daňovej politiky a odhadoch účinnosti zmeny úrokových mier pri riešení deficitu obchodnej bilancie. Je zrejmé, že stanovovanie dopytu v reálnych podmienkach sa stretáva s množstvom štatistických problémov.

## 3 ZMENA CENY ZA DOPRAVU

Ceny na trhu určujú subjektívne hodnotové úsudky ekonomických aktérov a sú ovplyvňované dopytom a ponukou, nie objektívnou úžitkovou hodnotou. Ceny na trhu sa nevzťahujú k nemenným fyzikálnym vlastnostiam vecí, ale k meniacim sa hodnotám, ktoré im priradujú jednotliví ľudia. Každý aktér, tým že si niečo kúpi alebo nekúpi, predá alebo nepredá,

prispieva svojim dielom k tvorbe trhových cien. Čim je trh väčší, tým je „váha“ príspevku každého aktéra menšia. Z tohto uhla pohľadu aktér posudzuje štruktúru trhových cien ako danú a musí jej prispôbiť svoje konanie. Ceny na voľnom trhu podliehajú neustálym zmenám v dôsledku zmeny podmienok, za ktorých vznikali.

Zmena ceny za dopravu, ktorú vnímajú ekonomickí aktéri, sa najviac prejavuje v cene pohonných látok (Obrázok 1), za predpokladu že počiatočná investícia do auta sa vníma ako „potopené náklady“. Ďalší vplyv je cena áut na sekundárnom trhu (predaj ojazdených áut), kde existuje široký výber.



**Obrázok 1:** Vývoj ceny motorovej nafty v SR medzi rokmi 2005 a 2017 [1]

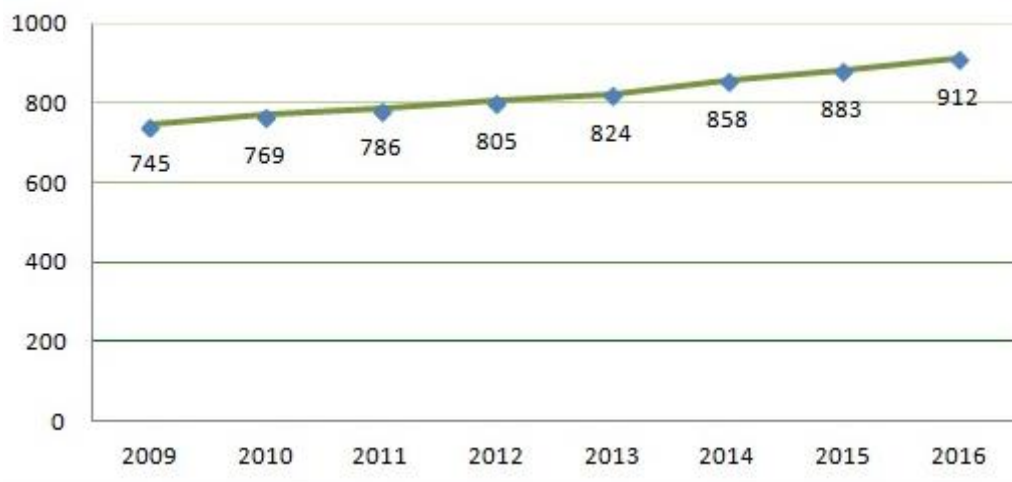
Monopolné ceny sú dôležitým trhovým javom, zatiaľ čo monopol ako taký je dôležitý iba vtedy, pokiaľ môže viesť ku vzniku monopolných cien. Okolnosti, ktoré vedú ku vzniku monopolných cien:

- existencia monopolnej ponuky (jeden predajca, alebo skupina, ktorá koordinuje rozhodovanie o ponúkanom množstve),
- rozdiely medzi kupujúcimi (cenová diskriminácia),
- reakcie kupujúcich na rast cien,
- vládne privilégia

Monopolnými cenami sa stávajú iba tie ceny, pri ktorých je pre monopolistu výhodnejšie obmedziť predávané množstvo, ako zvyšovať predaj ako na konkurenčnom trhu. Verejná doprava je zdarným príkladom tohto postupu. Redukcia spojov (kapacít) a zmeny v životnom štýle vedie domácnosti k nákupu áut a využívaniu individuálneho systému dopravy.

## 4 ZMENA PRÍJMU DOMÁCNOSTÍ

Príjem často determinuje priestor možností nákupného rozhodovania. Príjem domácnosti ovplyvňuje najmä životný cyklus rodiny. Jednotlivé obdobia sú charakterizované rôznou úrovňou príjmu. Spôsob rozdeľovania zodpovednosti za zaistenie ekonomickej prosperity rodiny sa za posledných 30 rokov významne zmenil najmä v úlohe ženy. Zmeny v udalostiach životného cyklu tak majú rovnaký vplyv na spotrebu ako zmeny cien.



**Obrázok 2:** Priemerný hrubý mesačný plat v eurách v SR medzi rokmi 2009 až 2016 [2]

Zmeny príjmu domácností majú výrazný vplyv na dopyt po individuálnej doprave, nakoľko čas s rastúcim príjmom je „vzácný“ statok. Naopak, verejná doprava zaznamenáva pokles v jej využívaní (tab.1). Neustály pokles využívania verejnej dopravy predstavuje v priemere ročný pokles o – 4,208%. (-4,21;-3,46;-6,61;-2,91;-3,85). Počet osôb cestujúcich verejnou cestnou dopravou klesol na Slovensku za posledných päť rokov o 17,3 % na 247,7 mil. Preprava osôb klesla vo všetkých regiónoch, najvýraznejšie v Žilinskom kraji (o 21,6 %). Najviac cestujúcich bolo v Nitrianskom (41,4 mil.) a v Žilinskom kraji (40 mil. osôb), najmenej v Bratislavskom kraji (14,2 mil.).

**Tabuľka 1.** Preprava osôb verejnou dopravou v SR – roky 2010 až 2015 [3]

		2010	2011	2012	2013	2014	2015
spolu	tis. osôb	312 717	299 579	289 228	270 123	262 262	252 175
vnútroštátna	tis. osôb	310 403	297 482	286 983	268 340	..	-
medzinárodná	tis. osôb	2 314	2 097	2 245	1 783	..	-

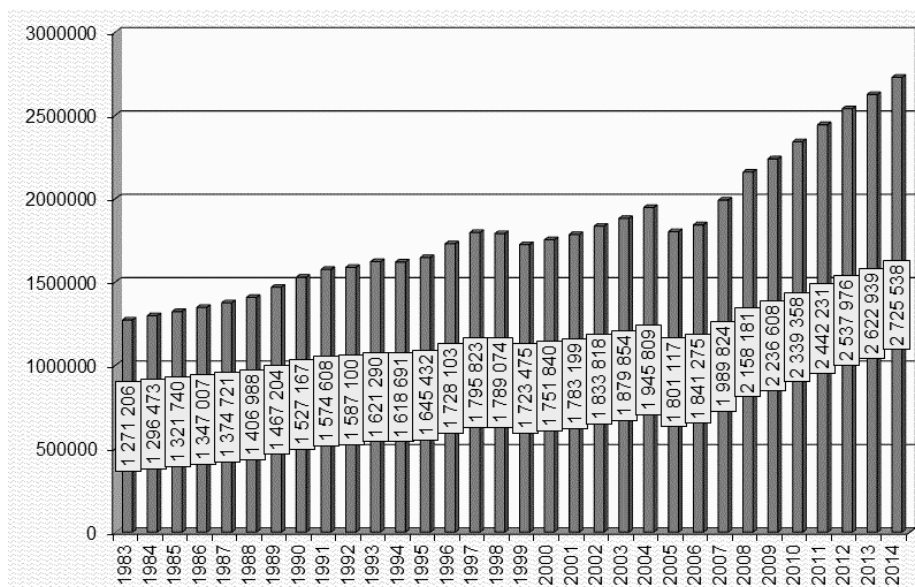
Z uvedeného je jednoznačný trend pre Slovensko - čoraz menšie využívanie verejnej dopravy (t. j. odvoz viacerých ľudí jedným dopravným prostriedkom, pričom sa šetria nielen náklady na prepravu ale aj cestné zariadenia, životné prostredie, ekológia) a nástup osobnej dopravy s vlastným vozidlom – čo predstavuje nielen narastajúcu záťaž na infraštruktúru dopravnej siete na tomto území.

Z uvedených dôvodov Železničná spoločnosť Slovensko spustila od 17. novembra 2014 na základe rozhodnutia Vlády SR bezplatnú prepravu žiakov, študentov a dôchodcov [4]. Cestovanie zadarmo sa teda týka všetkých ostatných kategórií vlakov, teda osobných vlakov (Os), zrýchlených vlakov (Zr), regionálnych expresov (Rex), rýchlikov (R), expresov (Ex). V prípade medzinárodného vlaku (vlaku smerujúceho z/do inej krajiny, napr. do Českej republiky alebo do Maďarska) platí možnosť cestovať zadarmo len na slovenskom úseku trasy (teda len v rámci slovenského územia). Cestovanie vlakmi zadarmo platí aj pre vlaky spoločnosti Regiojet jazdiace na trase medzi Bratislavou a Komáromom. Bezplatné cestovné lístky neplatia pre vlaky InterCity (IC) jazdiace na trase medzi Bratislavou a Košicami. Netýka sa tiež vlakov na trase medzi Košicami a Prahou, keďže sa jedná o komerčné vlakové spojenia neprevádzkované vo verejnom záujme (teda bez dotácii štátu).

Táto extrémna forma regulácie ceny (bezplatné cestovanie) ovplyvňuje konanie účastníkov trhu. Deformuje kalkuláciu, čo je zásadná myšlienka, nakoľko peniaze nám poskytujú neutrálny spoločný menovateľ všetkých ináč neporovnateľných potrieb rôznych cestujúcich.

## 5 ZÁVER

Súbeh zmeny cien za dopravu, nárastu príjmov a zmeny životného štýlu spôsobujú výrazný pokles záujmu o verejnú dopravu. Súčasne rastie dopyt po individuálnej doprave, čo spôsobuje problémy na nevyhovujúcej dopravnej infraštruktúre.



**Obrázok 3:** Celkový počet motorových vozidiel registrovaných v SR medzi 1983 až 2014 [5]

Ak je strata času v dopravnej kongescii rovnaká pre účastníkov v rozdielnom systéme dopravy (individuálny motorizmus, verejná doprava) cenové nástroje na zmenu – prechod z auta do verejnej dopravy budú neúčinné. Jediná možnosť je vytvoriť pre verejnú dopravu samostatný koridor (električka, metro, alebo samostatné jazdné pruhy) a tak zmeniť vnímanie referenčného bodu. Ďalším faktorom ovplyvňujúcim ľudské správanie a rozhodovanie je tzv. majetnícky efekt [10]. Vzniká vtedy, ak k hodnote nejakej veci posudzujeme nielen z finančného hľadiska, ale aj z hľadiska emocionálneho. Ak je málo pravdepodobný úspech prechodu z auta do verejnej dopravy, možno je vhodné podporovať vyššiu obsadenosť vozidiel pri spoplatnení cestných úsekov progresívnou sadzbou, kedy by to majitelia vozidiel pociťovali ako určitý bonus k majetníckemu efektu.

### Použitá literatúra

1. KATEDRA PREVÁDZKY A EKONOMIKY DOPRAVY A STROJOV, Dlhodobý vývoj ceny motorovej nafty v Slovenskej republike, dostupné online: <http://fpedas.utc.sk/~phm/vyvoj%20ceny%20nafty.htm>
2. Vývoj priemernej mesačnej mzdy, dostupné online: <https://www.finance.sk/mzda/priemerna-mzda/>
3. ŠTATISTICKÝ ÚRAD SR, Odvetvové štatistiky, Doprava
4. Železničná spoločnosť Slovensko, 2014. Bezplatné cestovanie vo vlakoch ZSSK, dostupné online <http://www.slovakrail.sk/sk/preprava-osob/slovensko/produkty-a-zlavy/bezplatna-preprava-vo-vlakoch-zssk/bezplatna-preprava-v-kočke.html>
5. MINISTERSTVO VNÚTRA SR, Celkový počet evidovaných vozidiel v SR. Dostupné online: <http://www.minv.sk/?celkovy-pocet-evidovanych-vozidiel-v-sr>

6. ONDREJKA, R., JÁNOŠÍKOVÁ, G.: Postup stanovenia pravdepodobnosti vzniku dopravnej kongescie ako zdroja spoločenských rizík. In: Crisis Management KM-1-2011, pp. 77-82, ISSN 1336-0019 (2011)
7. SLOVENSKÁ SPRÁVA CIEST, Celoštátne sčítanie dopravy. Dostupné online: <http://www.ssc.sk/sk/Rozvoj-cestnej-siete/Dopravne-inzinierstvo/Celostatne-scitanie-dopravy-2010.ssc>
8. KAHNEMAN, D. 2011. Thinking, Fast and Slow. New York: Farrar, Straus and Giroux, 2011. ISBN 978-0-374-27563-1
9. KAHNEMAN, D., KNETSCH, J. L., THALER, R. H. 1991. Anomalies: The Endowment Effect, Loss Aversion, and Status Quo Bias. The Journal of Economic Perspectives, Volume 5, Issue 1, 1991, s. 193-206
10. KAHNEMAN, D., TVERSKY, A. 1979. Prospect theory: An analysis of Decision under Risk. Econometrica, Vol. 47, 1979, No. 2
11. TVERSKY, A., SHAFIR, E. 1992. Choice under conflict: The dynamics of deferred decision. Psychological Science, 3, 1992, s. 358\_361

## POĎAKOVANIE

Tento príspevok vznikol vďaka podpore grantu VEGA 1/0582/16 "Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach".

This work was supported by the research grant APVV-14-0658 "Optimisation of urban and regional public personal transport".

## Kontaktné údaje

Ing. Juraj Dubovec, PhD.,

Žilinská Univerzita,

Fakulta riadenia a informatiky, Katedra manažérskych teórií, Univerzitná 8215/1,  
01026 Žilina,

e-mail: juraj.dubovec@fria.uniza.sk.

Ing. Lucia Pančíková, PhD.,

Žilinská Univerzita,

Fakulta riadenia a informatiky, Katedra makro a mikroekonomiky, Univerzitná 8215/1,  
01026 Žilina,

e-mail: lucia.pancikova@fri.uniza.sk.

Ing. Lukáš Falát, PhD.,

Žilinská Univerzita,

Fakulta riadenia a informatiky, Katedra makro a mikroekonomiky, Univerzitná 8215/1,  
01026 Žilina,

e-mail: lukas.falat@fri.uniza.sk

# UPLATNENIE PRINCÍPOV REVERZNEJ LOGISTIKY V PROCESE SPOTREBITEĽSKÉHO SPRÁVANIA<sup>1</sup>

## APPLYING PRINCIPLES OF REVERSE LOGISTICS IN PROCESS OF CONSUMER BEHAVIOR

*Tomáš Fašiang, Pavel Gežík*

### Abstrakt

Cieľom príspevku je poukázať na možné využitie princípov reverznej logistiky v procese interakcie komunikačnej stratégie a spotrebiteľského správania, ktorá vplýva na obchodnú aktivitu a vývoj finančno-ekonomických ukazovateľov maloobchodnej prevádzky. Identifikovanie a pochopenie vzájomných väzieb predstavuje základný predpoklad pre riešenie problému komunikačnej efektívnosti z pohľadu maximalizácie zisku a opakovaného nákupu.

Podstatou reverznej logistiky je manažment spätne orientovaných tokov, fyzických aj informačných od zákazníka k distribútorovi, respektíve až k pôvodnému výrobcovi. Príspevok popisuje vzájomné vzťahy, miery návratu a koeficienty týchto tokov. Uvedený princíp možno aplikovať aj na spotrebiteľské správanie v oblasti realizácie nákupu z pohľadu zabezpečenia tržieb maloobchodnej prevádzky.

**KLúčové slová:** *reverzná logistika, spotrebiteľské správanie, komunikačná stratégia*

### Abstract

The aim of the paper is to point out the possible use of the principles of reverse logistics in the process of interaction of communication strategy and consumer behavior. This interaction influences the business activity and the development of financial and economic indicators of retail operations. Identification and understanding of interrelations is a basic prerequisite for addressing the problem of communication efficiency from the point of view of maximizing profits and re-purchasing.

The base of reverse logistics is the management of reverse-oriented flows, both physical and informational from the customer to the distributor or to the original manufacturer. The paper describes relationships, return rates, and coefficients of these flows. This principle can also be applied to consumer purchasing behavior from the point of view of retail sales.

**Keywords:** *Reverse logistic, Consumer behavior, Communication strategy*

## 1 ÚVOD

Logistika, ktorej prvoradým cieľom je optimalizácia ekonomických činností (minimalizácia logistických nákladov pri poskytovaní maximálnych logistických služieb) musí brať do úvahy aj ciele sociálne a environmentálne.

---

<sup>1</sup> Príspevok je spracovaný ako jeden z výstupov projektu VEGA 1/0245/15 "Plánovanie prepravy s cieľom znížovania emisií" a VEGA 1/0283/15 „Aspekty marketingovej komunikácie v oblasti procesu tvorby hodnoty zákazníka na trhu B2C v kontexte s maximalizáciou trhového podielu v nákupnom spáde maloobchodu.“.



Toto naplnenie environmentálnych cieľov sa stalo predmetom skúmania reverznej logistiky, ktorá predstavuje kombináciu prístupov zameraných na ekonomickú oblasť, ako aj ekologickú oblasť (environmentálne zaťaženie).<sup>2</sup>

Podstatou reverznej logistiky je manažment spätne orientovaných tokov tovaru (fyzických aj informačných), odpadu, obalov a znovu použiteľných materiálov od zákazníka k distribútorovi, respektíve až k pôvodnému výrobcovi. Hlavným cieľom reverznej logistiky je manažment reklamácií, opráv, opätovného použitia, recyklácie alebo likvidácie v zmysle platných predpisov a smerníc ekologicky žiaducim spôsobom.<sup>3</sup>

Reverzná logistika môže byť chápaná ako súbor rôznych činností spojených, či už s prebalením a opätovným predajom vráteného tovaru, či redistribúciou nepredajného tovaru do špecializovaných obchodov a na menej náročné trhy alebo ako súbor aktivít podporujúcich materiálovú recykláciu, ktoré smerujú k minimalizácii odpadov z výroby a obalov.<sup>4</sup>

Uvedené východiska sa stali inšpiráciou pre možné aplikovanie reverznej logistiky v procese interakcie komunikačnej stratégie a spotrebiteľského správania s orientáciou na maximalizáciu zisku maloobchodnej prevádzky.

## 2 PRINCÍP REVERZNEJ LOGISTIKY

Základné modely vychádzajú predovšetkým z cieľa minimalizácie nákladov spojených s transportom tovaru v otvorených (open-loop) alebo uzavretých (closed-loop) logistických reťazcoch zahŕňajú komplexnú optimalizáciu nákladov dodávkového reťazca, všeobecné fixné a variabilné náklady za jednotlivé subjekty a variabilné náklady na prepravu.

Cieľom týchto modelov je poskytnúť komplexnejší pohľad na pohyb výrobku, teda na jeho dopravu tak od výrobcu k spotrebiteľovi, ako aj opačným smerom od spotrebiteľa späť k výrobcovi. Optimalizácia takto prebieha nielen v rámci klasickej distribúcie, ale aj v rámci reverznej distribúcie, ktorej predmetom je zber a transport použitých produktov a obalov.

Reverzná distribúcia pritom môže prebiehať prostredníctvom kanálov, ktoré sú využívané pri klasickej distribúcii, prostredníctvom osobitných kanálov určených priamo na zber a transport, alebo prostredníctvom ich kombinácie.

Tento proces je znázornený v uvedenej schéme. Schéma znázorňuje toky reverznej distribúcie (spotrebiteľ – výrobca) v kombinácii s klasickým tokom v rámci kanálov dopravujúcich výrobky od výrobcu k spotrebiteľovi

---

<sup>2</sup> <http://www.greenlogistics.org/PageView.aspx?id=97>

<sup>3</sup> BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z., REIFF, M.: *Kvantitatívne metódy na podporu logistických procesov*, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2009

<sup>4</sup> BREZINA, I.: *Modelové aspekty reverznej logistiky*. INPROFORUM 2007: inovace - podniky - regiony - organizace: sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference: 27.-28. listopadu 2007 České Budějovice. - S. 48-53. - České Budějovice: Ekonomická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, 2007

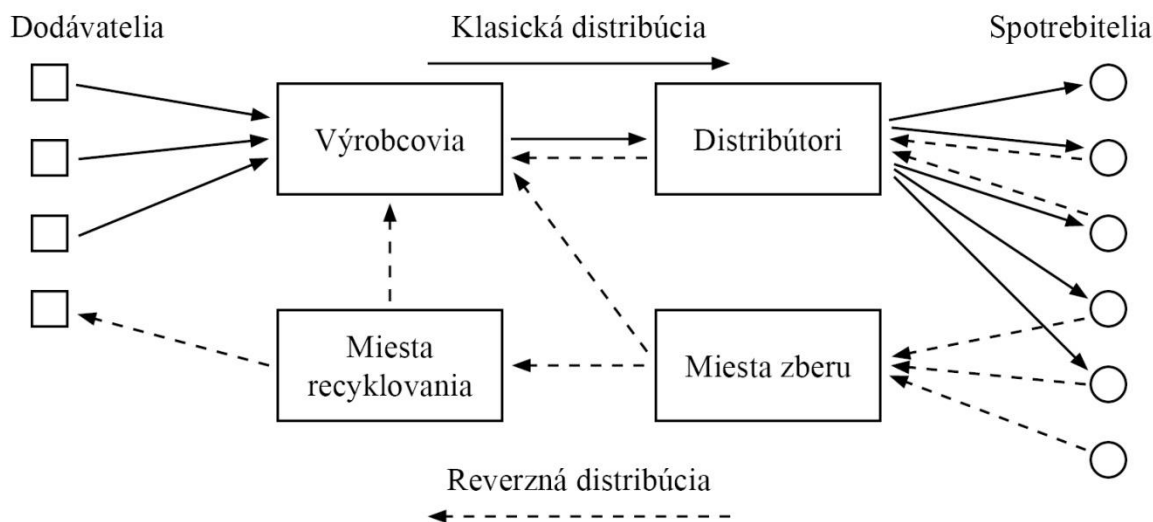


Schéma č.1: Klasická a reverzná distribúcia<sup>5</sup>

### 3 UPLATNENIE PRINCÍPOV REVERZNEJ LOGISTIKY V PROCESE NÁKUPNEHO SPRÁVANIA

Návrat produktu je determinovaný stochastickými vzťahmi, ktoré možno popísať výškou spotreby produktu, mierou jeho návratu a koeficientom odpadovosti. Vzťah medzi jednotlivými materiálovými tokmi a ich vzájomné závislosti sú popísané v nasledujúcej schéme, kde:

$d$  - je celková spotreba produktu,

$\alpha$  - miera návratnosti produktu,

$\beta$  - miera opätovného použitia produktu,

$\omega$  - predstavuje odpad  $\omega = (1 - \alpha)d + (1 - \beta)\alpha d$

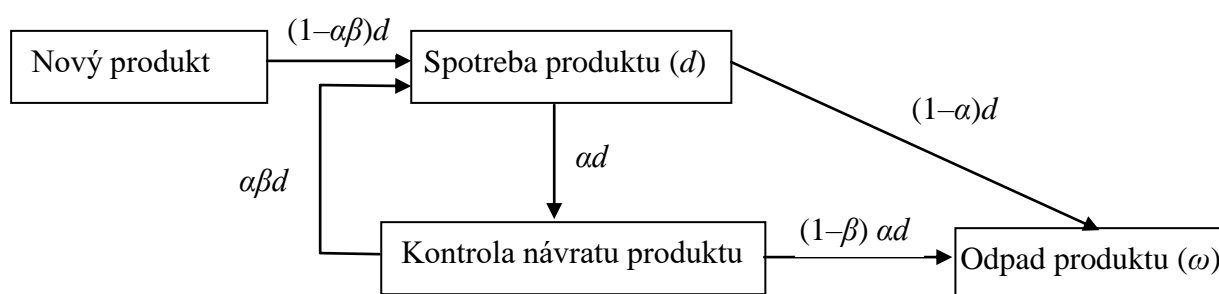


Schéma č.2: Vzťahy medzi jednotlivými materiálovými tokmi a ich vzájomné závislosti.<sup>6</sup>

<sup>5</sup> FLEISCHMANN, M. a kol: Quantitative models for reverse logistics: A review, European Journal of Operational Research 103 (1997), str. 1-17

<sup>6</sup> BREZINA, I., GEŽÍK, P.: Modeling of return in reverse logistics. In Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XVI : proceedings of the international scientific conference : 30th May - 1st June 2012, Bratislava, Slovakia, s. 22-27.

Uvedený princíp možno aplikovať aj na spotrebiteľské správanie v oblasti realizácie nákupu z pohľadu zabezpečenia tržieb maloobchodnej prevádzky. Z tohto pohľadu sú finančno-ekonomické ukazovatele determinované vzájomným prienikom spotrebiteľského správania a komunikačných aktivít maloobchodnej prevádzky. To znamená, že cieľná komunikačná stratégia vyvolá pozitívnu zmenu v spotrebiteľskom správaní, ktorá vedie spotrebiteľa k nákupu v predmetnej maloobchodnej prevádzke. Hierarchiu finančno-ekonomických ukazovateľov treba vnímať v prvom rade z pohľadu frekvencie návštev zákazníkov realizujúcich nákup. To znamená, že čím vyššia je frekvencia nákupov, tým vyšší je aj výkon maloobchodnej prevádzky, ktorý sa odvíja od doby obrátkovosti zásob.

Frekvencia návštev zákazníkov a hodnota ich nákupov následne vplýva na objem realizovaných tržieb. Tržby sú základným finančno-ekonomickým ukazovateľom výnosov maloobchodnej prevádzky, ktoré sú určené objemom predaného tovaru sortimentnej skladby a jednotkovou cenou. Samotný hospodársky výsledok však okrem tržieb ovplyvňujú najmä celkové náklady maloobchodnej prevádzky, ktorých skladbu tvoria fixné a variabilné náklady. Z pohľadu výkonnosti maloobchodnej prevádzky je určujúca hlavne úroveň výšky fixných nákladov (náklady, ktoré nie sú závislé na zmene výšky realizovaných výkonov (obratu)), pretože variabilné náklady (náklady, ktoré sú závislé od objemu predaného sortimentu) sú relatívne jednoduchšie ovplyvniteľné a z konkurenčného pohľadu je úroveň jednotkových variabilných nákladov na predmetnom trhu takmer totožná. Vzájomné porovnanie výnosov a nákladov odkazuje na interpretáciu ziskového resp. stratového výkonu maloobchodnej prevádzky.

Dôležitým východiskom pre identifikáciu ziskového výkonu maloobchodnej prevádzky je determinácia bodu zvratu resp. bodu rentability, ktorý určuje stav, kedy sa tržby maloobchodnej prevádzky rovnajú celkovým nákladom. Bod zvratu určuje maloobchodnej prevádzke normu, ktorú musí naplniť predajom určitého množstva tovaru za určitú sumu, aby jej výkonnosť nebola stratová.

Teória marketingu naznačuje, že implementáciou cieľenej komunikačnej stratégie možno zvýšiť frekvenciu návštev zákazníkov, čo vyvolá zrýchlenie obrátkovosti zásob a rast tržieb. Z pohľadu bodu zvratu by to znamenalo, že vhodne zvolená komunikačná stratégia posunie objem tržieb nad úroveň celkovej výšky nákladov maloobchodnej prevádzky. Nelineárny priebeh tržieb a nákladov predstavuje východisko pre ilustráciu približujúcu sa podmienkam trhu.

Uvedené súvisí najmä s prijatím predpokladu zákona klesajúceho dopytu (rast ceny tovaru vyvolá pokles jeho dopytu), ktorý možno transformovať do procesu predaja. Čo znamená, že sa bude rast objemu predaja tovaru vplyvom klesajúcej ceny postupne od určitého bodu spomaľovať. V tomto prípade možno funkciu tržieb a celkových nákladov ilustrovať ako parabolu, vyjadrenú prostredníctvom parametra tržieb a celkových nákladov. Na základe uvedeného možno identifikovať dva body zvratu (uvedené platí len v prípade, ak sa hodnota parametra šikmosti funkcie celkových nákladov nerovná hodnote parametra šikmosti funkcie tržieb). Z uvedeného vyplýva, že ziskovosť je určená rozpätím objemu predaja.

Prvý bod zvratu naznačuje začiatok ziskovosti, naopak druhý bod naznačuje stratu (so zvyšovaním objemu predaja dochádza k prehĺbovaniu straty). Za predpokladu, že maloobchodná prevádzka komunikuje s cieľovým trhom a komunikačné náklady sú obsiahnuté vo fixných nákladoch, možno identifikovať priestor ziskového rozpätia, ktoré prislúcha efektívnemu využívaniu komunikačnej stratégie. V prípade ak maloobchodná prevádzka nekomunikuje s cieľovým trhom môže rovnako dosiahnuť ziskové rozpätie, avšak len za určitých špecifických podmienok trhu, ktorých trvanie je relatívne krátkodobé. Od

určitého okamihu predaného množstva tovaru začínajú tržby maloobchodnej prevádzky klesať a naopak celkové náklady stúpať.

Riešením môže byť zvýšenie ceny predávaného tovaru alebo orientácia na zvýšenie dopytu po ponúkanom tovare. Vo vysoko konkurenčnom prostredí trhu s prvkami vysokej elasticity dopytu môže zvýšenie cien vyvolať opačnú reakciu, ktorá vyvolá prehĺbenie straty. Práve z tohto dôvodu je cieľom komunikačnej stratégie orientácia na zvyšovanie dopytu a udržanie si zákazníka v podobe zvyšovania realizovaných nákupov. V tejto súvislosti je vhodná aplikácia reverznej logistiky na proces udržateľnosti tržieb v spojitosti s realizáciou opakovaného nákupu a maximalizácie zisku pri optimalizácii komunikačných nákladov. Východiskom sú práve náklady na získanie nového zákazníka, pričom jeho získanie je približne päťnásobne drahšie ako jeho udržanie.

Nasledujúca schéma poukazuje na možnosti dodatočného zvýšenia tržieb maloobchodnej prevádzky.

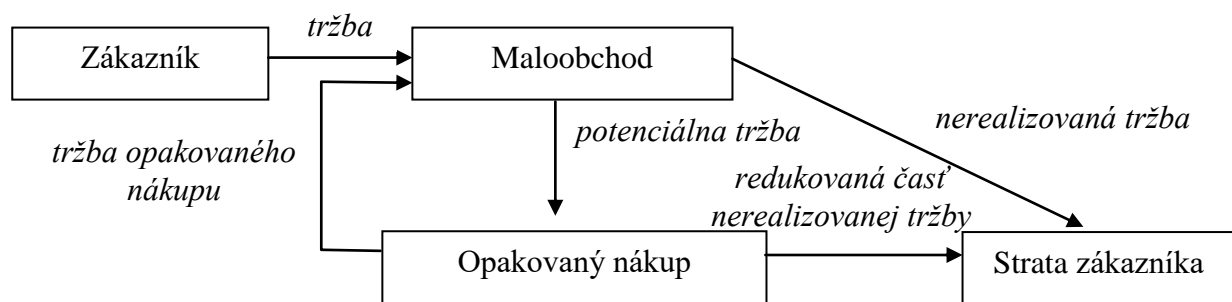


Schéma č.3: Model finančných vzťahov opakovaného nákupu.<sup>7</sup>

Zo schémy vyplýva, že zákazník predstavuje pre maloobchodnú prevádzku zdroj tržieb, ktorých výška je závislá od preferencií spotrebiteľa ako aj výšky jeho príjmu. Nerealizovaná tržba predstavuje nespotrebovanú časť príjmu, ktorú mohol zákazník premeniť na nákup v maloobchodnej prevádzke. Model naznačuje, že nerealizované tržby vedú k strate zákazníka. Cieľom komunikačnej stratégie maloobchodu je nerealizovanú tržbu transformovať na potenciálnu, z ktorej sa následne stáva tržba opakovaného nákupu. Východiskom je motivácia zákazníka realizovať opakovaný nákup, čo má priamy vplyv na zvyšovanie tržieb maloobchodnej prevádzky. V tomto ponímaní je cieľom maloobchodnej prevádzky prostredníctvom komunikačných aktivít vplývať na redukciu výšky nerealizovanej tržby tak, aby spotrebovaná časť príjmu zákazníka bola v čo najväčšej miere transformovaná na tržby maloobchodnej prevádzky.

## 4 ZÁVER

V súvislosti s možnosťami reverznej logistiky a teda návratu produktov alebo materiálov späť k výrobcovi z rôznych dôvodov sa rozvíja snaha minimalizovať náklady spojené s týmito procesmi, čo zároveň vedie k maximalizácii zisku. Z tohto dôvodu vzniká myšlienka ako určité východiská reverznej logistiky integrovať do procesov komunikačnej stratégie a spotrebiteľského správania za účelom maximalizácie zisku maloobchodných prevádzok. Práve kvôli tomu je nutné zaoberať sa vývojom modelov, ktoré umožňujú maximalizovať zisk a spôsob ako motivovať spotrebiteľa k tomu, aby realizoval opakovaný nákup.

<sup>7</sup> Vlastné spracovanie, 2017

## Použitá literatúra

1. BREZINA, I.: Modelové aspekty reverznej logistiky. INPROFORUM 2007: inovace - podniky - regiony - organizace: sborník příspěvků z mezinárodní vědecké konference: 27.-28. listopadu 2007 České Budějovice. - S. 48-53. - České Budějovice: Ekonomická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, 2007
2. BREZINA, I., ČIČKOVÁ, Z., REIFF, M.: Kvantitatívne metódy na podporu logistických procesov, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2009
3. BREZINA, I., GEŽÍK, P.: *Modeling of return in reverse logistics*. In Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XVI : proceedings of the international scientific conference : 30th May - 1st June 2012, Bratislava, Slovakia, s. 22-27.
4. FLEISCHMANN, M. a kol: Quantitative models for reverse logistics: A review, European Journal of Operational Research 103 (1997), str. 1-17
5. <http://www.greenlogistics.org/PageView.aspx?id=97>

## Kontaktné údaje

Ing. Tomáš Fašiang, PhD.

Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave, Fakulta masmediálnej komunikácie

Námestie Jozefa Herdu 2, 917 01 Trnava

email: [tomas.fasiang@ucm.sk](mailto:tomas.fasiang@ucm.sk)

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [pavel.gezik@euba.sk](mailto:pavel.gezik@euba.sk)

# INTERPRETAČNÉ MOŽNOSTI PODMIENOK OPTIMÁLNOTI V ÚLOHE CENOVEJ REGULÁCIE NA BÁZE AVERCHOVHO – JONESOVHO MODELU

## INTERPRETATION POSSIBILITIES OF THE OPTIMALITY CONDITIONS IN THE PRICE REGULATION PROBLEM ON THE BASE OF THE AVERCH – JONES MODEL

*Michal Fendek*

### **Abstrakt**

Problematika cenovej regulácie na trhu sieťových odvetví je v súčasnosti v podmienkach Slovenska obzvlášť aktuálna téma, nakoľko otázky optimalizácie cenových stratégií, dnes rezonujú pomerne intenzívne v odbornej verejnosti. V súvislosti s objektivizáciou a zvyšovaním celospoločenskej efektívnosti pôsobenia prirodzených monopolov sieťových odvetví na trhu sa zvyšuje úloha regulačných mechanizmov, ktorých cieľom je čo najviac priblížiť proporcie medzi cenou a úrovňou ponuky produktu sieťového odvetvia situácii, ku ktorej by na trhu došlo za predpokladu existencie konkurenčných trhových vzťahov. V príspevku uvedieme exaktnú prezentáciu Averchovho – Johnsonovho efektu, budeme prezentovať úlohou matematického programovanie relevantnú modelu a napokon vysvetlíme interpretačné možnosti podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera tejto úlohy.

**Kľúčové slová:** Sieťové odvetvia, primeraný zisk v regulovanom odvetví, regulovaná miedra návratnosti, *Averch-Johnsonov model, podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera*

### **Abstract**

The existence of pure monopoly in network industries increases the role of regulation mechanisms in connection with objectification and increase in their social effectiveness. The objective of regulation mechanisms is to find an appropriate proportion between price and product supply of network industry under assumption of the existence competitive market. With regard to analysis of equilibrium in network industries models it is important to point out that except for competition policy protection the state fulfils another specific task – regulation of network industries. The conditions for equilibrium of network industries and methods of their regulations will be examined in the paper. The stress will be laid on the regulation on the base of returns – Rate of Return Regulation. For the optimization problems we will formulate the Kuhn-Tucker optimality conditions and we will study their interpretation options.

**Keywords:** *Network industries, reasonable profit in regulated industries, rate of return regulation, Averch-Johnson model, Kuhn-Tucker optimality conditions*

# 1 ÚVOD

Je známe, že dokonale konkurenčná firma ponúka svoju produkciu za trhovú cenu na úrovni marginálnych nákladov (tzv. prvé najlepšie riešenie), čo je situácia pre spotrebiteľov najvýhodnejšia. Na druhej strane monopol za predpokladu, že na trhu nepôsobí regulátor, predáva tovar za vyššiu cenu a v menšom objeme svojej ponuky, čo je situácia výhodná pre monopol, nie však pre spotrebiteľa a ani pre spoločnosť. Preto vyspelé ekonomiky zriaďujú inštitút tzv. regulátora pre výkon funkcie regulovania cien produkcie prirodzených monopolov.

Pravdepodobne najznámejšou a zároveň teoreticky najrozpracovanejšou schémou cenovej regulácie je metodologický princíp fungovania regulácie na báze návratnosti investícií, kde regulátor definuje riadiaci parameter  $RoR$ , ako mieru návratnosti kapitálových investícií nasledovne

$$RoR \geq \frac{P \times Q - w \times L}{K} \quad (1)$$

kde

$Q$  – objemy ponuky produkcie

$L, K$  – objemy spotreby výrobných faktorov

$w, r$  – ceny výrobných faktorov

pričom pre objem ponuky firmy na základe produkčnej funkcie  $f(K, L)$  platí

$$Q = f(K, L)$$

a pre cenu produkcie  $P$  na základe cenovooodbytovej, resp inverznej dopytovej funkcie platí

$$P = P(Q)$$

Neregulovaná monopolistická firma stanoví optimálny zisk na základe riešenia nasledovnej úlohy na voľný extrém

$$\pi(Q) = TR(Q) - w \times L - r \times K \rightarrow \max \quad (2)$$

$$Q, K, L \in R_{\geq 0}$$

kde

$TR(Q) = TR(f(K, L))$  - je funkcia tržieb monopolu

Riešením optimalizačnej úlohy (3.72) je optimálna ponuka monopolu  $Q^*$  a optimálne spotreby výrobných faktorov  $L^*, K^*$ . V prípade uplatnenia regulácie na báze výnosov na úrovni miery návratnosti investícií  $RoR$  musí monopol rešpektovať podmienku v tvare

$$RoR \geq \frac{TR(Q) - w \times L}{K} \Leftrightarrow TR(Q) - w \times L \leq RoR \times K \quad (3)$$

resp. po úprave

$$TR(Q) - w \times L - r \times K \leq RoR \times K - r \times K$$

$$\underbrace{TR(Q) - w \times L - r \times K}_{\pi(Q)} \leq RoR \times K - r \times K$$

$$\pi(Q) \leq (RoR - r) \times K$$

Je evidentné, že ak regulátor určí pre regulovaný subjekt mieru návratnosti  $RoR$  väčšiu ako je cena kapitálu  $r$ , a teda platí

$$RoR > r \Rightarrow RoR - r > 0$$

tak firma má pre každý kladný objem investovaného kapitálu  $K$  garantovaný aj kladný zisk  $\pi(Q) > 0$ .

## 2 Podmienky optimálnosti v úlohe cenovej regulácie na báze návratnosti investícií

Schému rozhodovania regulovanej firmy na báze regulácie miery návratnosti investícií popísali a teoreticky zdôvodnili v dnes už historickej práci H. Averch a L. Johnson a v odbornej literatúre sa obvykle uvádza ako Averchov – Johnsonov efekt. Pojem Averchov – Johnsonov efekt je používaný na identifikáciu sklonu firmy regulovanej na báze  $RoR$  regulácie k využívaniu neprimerane vysokého podielu kapitálu v porovnaní s prácou pri výrobe určitého množstva produkcie.

Prezentované závery skutočne naznačuje možnosť, aby firma neprimeraným a zbytočným kumulovaním kapitálových investícií zvyšovala svoj povolený „primeraný“ zisk. Preskúmajme tento predpoklad podrobnejšie. Regulovaná firma realizuje výpočet svojich optimálnych parametrov správania prostredníctvom riešenia nasledovnej optimalizačnej úlohy matematického programovania

$$\pi(Q) = TR(Q) - w \times L - r \times K \rightarrow \max_{Q,L,K}$$

pri ohraničeniach (4)

$$w \times L + RoR \times K - TR(Q) \geq 0$$

$$f(K, L) - Q = 0$$

$$Q, K, L \geq 0$$

a za predpokladu, že platí

$$RoR > r$$

Upravme optimalizačnú úlohu (4) na štandardný tvar, t. j. na minimalizačnú úlohu takto:

$$-\pi(Q) = w \times L + r \times K - TR(Q) \rightarrow \min_{Q,L,K}$$

pri ohraničeniach (5)

$$TR(Q) - w \times L - RoR \times K \leq 0$$

$$f(K, L) - Q = 0$$

$$Q, K, L \geq 0$$

Pre úlohu matematického programovania na viazaný extrém (5) skonštruujeme zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu v nasledovnom tvare



$$\mathcal{L}(Q, K, L, \lambda, \mu) = w \times L + r \times K - TR(Q) + \lambda(TR(Q) - w \times L - RoR \times K) + \mu(f(K, L) - Q) \quad (6)$$

Preskúmame teraz platnosť podmienok optimálnosti Kuhna-Tuckera pre Lagrangeovu funkciu (6). Podmienky optimálnosti formulujeme v tvare

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \geq 0 \quad (a) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} \geq 0 \quad (d) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} \geq 0 \quad (g) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \quad (j) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \quad (m)$$

$$Q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0 \quad (b) \quad K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \quad (e) \quad L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \quad (h) \quad \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (k)$$

$$Q \geq 0 \quad (c) \quad K \geq 0 \quad (f) \quad L \geq 0 \quad (i) \quad \lambda \geq 0 \quad (l)$$

Po ďalšej úprave vzťahov podmienok pre optimálne hodnoty rozhodovacích premenných objem produkcie  $Q^*$ , spotreba výrobných faktorov  $L^*$ ,  $K^*$  a optimálne hodnoty Lagrangeových multiplikátorov  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$  z vybraných formulácií podmienok Kuhna – Tuckera dostávame

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \geq 0 \quad (a) \quad \frac{-\partial TR(Q)}{\partial Q} + \lambda \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} + \mu \geq 0 \quad (a) \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda) \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} \leq \mu \quad (a1)$$

$$Q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad (b) \quad Q \left( (1 - \lambda) \frac{\partial TR(Q)}{\partial Q} - \mu \right) = 0 \quad (b1)$$

$$Q \geq 0 \quad (c) \quad \Rightarrow \quad Q \geq 0 \quad (c1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} \geq 0 \quad (d) \quad \Rightarrow \quad r - \lambda \times RoR + \mu \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \geq 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \geq \lambda \times RoR - r \quad (d1)$$

$$K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \quad (e) \quad \Rightarrow \quad K \left( r - \lambda \times RoR + \mu \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \right) = 0 \quad (e1)$$

$$K \geq 0 \quad (f) \quad \Rightarrow \quad K \geq 0 \quad (f1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} \geq 0 \quad (g) \quad \Rightarrow \quad w - \lambda \times w + \mu \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \geq 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \geq (\lambda - 1)w \quad (g1)$$

$$L \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \quad (h) \quad \Rightarrow \quad L \left( (1 - \lambda) \times w + \mu \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} \right) = 0 \Rightarrow \quad (h1)$$

$$L \geq 0 \quad (i) \quad \Rightarrow \quad L \geq 0 \quad (i1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \quad (j) \quad \Rightarrow \quad TR(Q) - w \times L - RoR \times K \leq 0 \quad (j1)$$

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (k) \quad \Rightarrow \quad \lambda (TR(Q) - w \times L - RoR \times K) = 0 \quad (k1)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (l) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \geq 0 \qquad (l1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \quad (m) \qquad f(K, L) - Q = 0 \qquad (m1)$$

Analyzujeme teraz vlastnosti optimálneho riešenia úlohy (4), resp. vlastnosti vektora  $(Q^*, K^*, L^*, \lambda^*, \mu^*)$ , ktorý vyhovuje podmienkam optimálnosti (a1), ..., (m1), ktoré poskytujú pomerne široké interpretačné možnosti pre model cenovej regulácie na báze *RoR* princípu. Na tomto mieste nebudeme prezentovať celú škálu efektov, zameriame sa iba na bezprostredný dôsledok pre regulačný parameter definovaný regulátorom *RoR*.

Nebudeme sa zaoberať triviálnym prípadom, keby regulovaná firma nemala záujem dosiahnuť ani primeraný zisk definovaný regulátorom. V prípade, ak firma chce dosiahnuť úroveň zisku na hranici definovanej regulátorom, musí svoje optimálne riešenie nastaviť tak, aby podmienka o hornej hranici prípustnej miery návratnosti investícií  $w \times L + RoR \times K - TR(Q) \geq 0$  bola splnená ako rovnosť, to však znamená, že podmienka optimality (j1) sa v takomto prípade potom realizuje tiež ako rovnosť.

To je však garantovane splnené len vtedy ak optimálna hodnota Lagrangeovho multiplikátora  $\lambda^*$  je kladná, čo je napokon dôsledkom platnosti vzťahu (k1). Potom totiž na základe vzťahov (j1) a (k1) jednoznačne platí

$$\lambda^* > 0 \Rightarrow w \times L^* + RoR \times K^* - TR(Q^*) = 0 \qquad (7)$$

Podmienka (7) de facto vysvetľuje Averchov-Johnsonov efekt. Základnou otázkou totiž je, ako reaguje regulovaná firma na to, že regulátor sprísni režim regulácie, to znamená zníži prípustnú mieru návratnosti investícií.

Zo vzťahu (7), vidíme, že logickým následkom takéhoto opatrenia je snaha regulovanej firmy o zvýšenie kapitálových investícií, čo jej umožní priblížiť sa k požadovanému objemu deklarovaného primeraného zisku

## ZÁVER

Na základe výsledkov analýzy Averchovho-Johnsonovho modelu môžeme formulovať nasledovné dôležité závery o správaní sa firmy regulovanej podľa princípu regulácie miery návratnosti použitého kapitálu:

- a) Firma regulovaná podľa princípu regulácie miery návratnosti použitého kapitálu je v snahe zvyšovať svoj povolený „primeraný“ zisk motivovaná k neprimeranému a zbytočnému navyšovaniu kapitálových investícií.
- b) Pri znížení miery návratnosti kapitálových výdavkov, za predpokladu, že naďalej platí bazálny vzťah  $RoR > r$ , reaguje firma v snahe zachovať objem zisku zvýšením kapitálových výdavkov.
- c) Možno povedať, že zníženie miery návratnosti kapitálových výdavkov znamená pre regulovanú firmu sprísnenie podmienok regulácie.

Na základe analýzy správania firmy v podmienkach regulácie na báze návratnosti použitého kapitálu sme teda ukázali, že v tejto regulačnej schéme má firma tendenciu reagovať na sprísnenie podmienok regulácie zvýšením objemu využívaného kapitálu.

### **Poznámka**

Tento príspevok je čiastkovým výstupom riešenia projektu Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva SR a Slovenskej akadémie VEGA MŠ SR č. 1/0697/15 „Optimalizačné modely a metódy ako nástroje efektívnej regulácie v modernej teórii organizácie sieťových odvetví“, 2015 – 2017.

### **Použitá literatúra**

1. Batson, R. – Dang, Y. (2010). *Applied Integer Programming: Modeling and Solution*, Wiley and Sons; New York.
2. Carlton, D.W.; Perloff, J. M. (2005). *Modern Industrial Organization*. Boston: Addison Wesley, 2005. ISBN 0-321-22341-1.
3. Fendek, M.; Fendeková, E. (2010). Modely cenovej regulácie sieťových odvetví. *Ekonomický časopis: časopis pre ekonomickú teóriu a hospodársku politiku, spoločensko-ekonomické prognózovanie*. Bratislava : Ekonomický ústav SAV: Prognostický ústav SAV, ISSN 0013-3035, 2010, roč. 58, č. 10, pp. 1039 – 1055.
4. Fendek, M.; Fendeková, E. (2012). Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera v modeloch rovnováhy trhu sieťových odvetví / Kuhn –Tucker optimality conditions in equilibrium models of network industry markets. In *Politická ekonomie : teorie, modelování, aplikace*. - Praha : Vysoká škola ekonomická, ISSN 0032-3233. - Roč. 60, č. 6 (2012), s. 801-821.
5. Fendek, M.; Fendeková, E. (2009). Models of regulation of network industries in Slovakia. In *International journal of economics and business research*. - UK : Inderscience Enterprises Ltd, ISSN 1756-9850, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 479-495.
6. Jarre, F.; Stoer, J. *Optimierung*. Berlin: Springer Verlag. (2004). ISBN3-540-43575-1. Martin, S. 2012. *Industrial Organization: A European Perspective*. Oxford: Oxford University Press, USA.
7. Pepall, L.; Richards, D. J.; Norman, D. (2004). *Industrial Organization: Contemporary Theory and Practice (with Economic Applications)*. New York: South-Western College Publishing, 2004.
8. Pfähler , P. – Wiese, H. (2005). *Unternehmensstrategien im Wettbewerb. Eine spieltheoretische Analyse*. Berlin: Springer Verlag.
9. Shy, Oz. (2001). *The Economics of Network Industries*. Cambridge: Cambridge University Press.

### **Kontaktné údaje**

Prof. Ing. Michal Fendek, PhD.,  
Department of Operations Research and Econometrics,  
University of Economics Bratislava,  
Dolnozemska 1, Bratislava, Dolnozemska 1, 852 35 Bratislava,  
Slovakia, e-mail:fendek@euba.sk

# DYNAMICKÝ MODEL SÍŤOVÉ EKONOMIKY

## DYNAMIC MODEL OF NETWORK ECONOMY

*Petr Fiala*

### **Abstrakt**

Článek je věnován vytváření sítí v síťové ekonomice. Na současnou ekonomiku je potřeba se dívat nejen jako na síť s pouze dynamickými toky a s pevnou strukturou, ale jako na dynamický systém, jehož struktura se vyvíjí a mění. Dynamiku síťových systémů z hlediska struktury a chování je možno modelovat jako komplexní adaptivní systémy a použít agentově orientovanou simulaci pro demonstraci vzniku, perturbačních efektů a citlivosti vzhledem k počátečním podmínkám. Přežití firem je spojeno s hodnotou tzv. kondiční funkce. Firmy, jejichž hodnota kondice klesne pod určitou prahovou hodnotu, zanikají. Tak je možno částečně modelovat růst sítí, ale vznik nových firem není možno takto explicitně v modelu zachytit.

***Klíčová slova:** síťová ekonomika, dynamika, simulace*

### **Abstract**

The paper is dedicated to networking in the network economy. The current economy needs to look not only at networks with only dynamic flows and with a fixed structure, but as a dynamic system its structure evolves and changes. Structure and behavior dynamics of network systems can be modeled as complex adaptive systems and use agent-oriented simulation to demonstrate origin, perturbation effects, and sensitivity with regard to initial conditions. Survival of companies is associated with the value of so-called fitness function. Companies whose fitness value falls below a certain threshold will be extinguished. In this way, it is possible to partially model network growth, but the emergence of new firms cannot be explicitly captured in the model.

***Keywords:** network economy, dynamics, simulation*

## **1 ÚVOD**

Růstovou dynamiku a vývoj v sítích je možno modelovat pomocí rozšíření Utterbackova modelu průmyslového růstu (Utterback a Suarez 1993, Utterback 1994) a použít koncept vzniku sítí na základě predikce vzoru chování. Je možno předpokládat, že vzor vzniku dodavatelských sítí bude podobný zvonovité křivce, kterou navrhl Utterback. Simulační model rozděluje komplexní adaptivní síť do dvou základních částí:

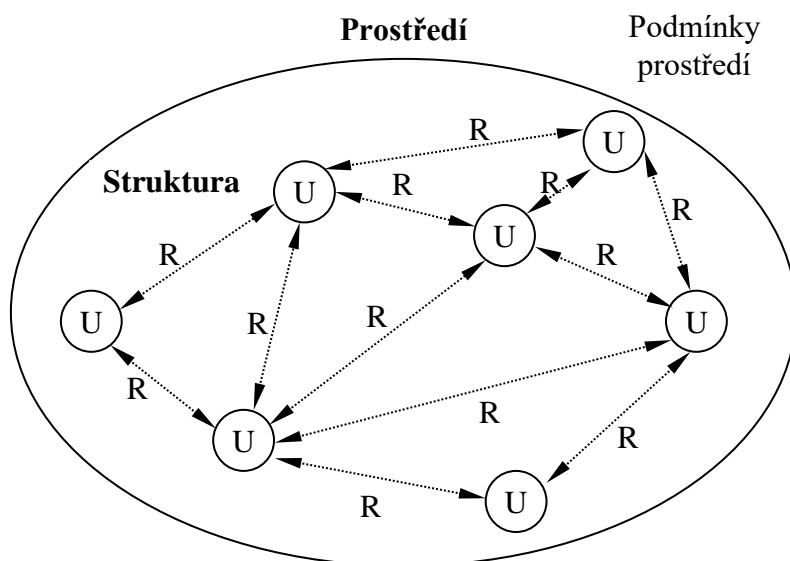
- prostředí dodavatelské sítě,
- firmy zapojené v síti.

Firmy jsou reprezentovány uzly v síti. Uzly fungují na základě jednoduchých rozhodovacích pravidel, se snahou uspokojovat poptávku prostředí. Jakmile vzniknou nová odvětví, začnou se vyvíjet dodavatelské sítě, na trh mohou vstupovat nové firmy. Některé firmy jsou úspěšné a vytvářejí vztahy s dalšími, dochází k růstu. Některé firmy jsou neúspěšné a zanikají, buď vzhledem k místním podmínkám, nebo protože se nemohou stát součástí životaschopné dodavatelské sítě. V čase tak mohou dodavatelské sítě vyrůst v relativně stabilní struktury, založené na interaktivních efektech lokálních rozhodovacích pravidel a faktorech prostředí. Pro sledování vývoje dodavatelských sítí, zahrnujícího vzory vzniků a zániků, byl navržen

system CAESAR (Pathak, Dilts a Biswas 2003; Pathak a Dilts, 2004) a jeho zdokonalená verze CAS-SIM (Complex Adaptive Supply network simulator).

## 2 KONCEPČNÍ MODEL

Model vychází z dodavatelské sítě jako systému, skládajícího se z prostředí (trhu), ve kterém jsou firmy (uzly) a vytvářejí interakce na základě jednoduchých pravidel chování s účelem plnit globální poptávku. Stochastické parametry prostředí, popisující tržní podmínky a poptávku, rozhodovací schéma uplatňované v uzlech, kondiční funkce modelující sílu firem, to vše dohromady ovlivňuje dynamiku struktury a chování vyvíjející se dodavatelské sítě.



*Obr. 1. Konceptní model*

Komplexní adaptivní systém (CAS – complex adaptive system) se velmi dobře hodí pro modelování systémů s dynamikou struktury a chování. CAS je charakterizován třemi hlavními komponentami:

- prostředí,
- vnitřní mechanismy,
- koevoluce.

V prostředí vznikají, existují a zanikají firmy (uzly). Prostředí je charakterizováno dvěma hlavními skupinami podmínek:

- operační podmínky,
- nastavení tržní struktury.

Operační podmínky specifikují poptávku a časové a nákladové informace. Nastavení tržní struktury specifikují regulaci, politiky a pravidla obchodování, aplikovaná v systému. Prostředí také nastavuje prahovou hodnotu kondice, což je minimální úroveň kondice, nutná pro přežití uzlu v prostředí.

Vnitřní mechanismy se týkají uzlů, pravidel, relací a rozhodnutí v síti. Uzly reprezentují firmy (agenty) v dodavatelské síti. Uzly se zaměřují na dosažení lokálních cílů, přičemž každý uzel má množinu možných strategií pro jejich dosažení. Pravidla umožňují realizaci těchto strategií pro dosažení cílů při respektování omezení, daných prostředím i samotným uzlem.

Uzly dělají dva základní typy rozhodnutí:

- s kým budou kooperovat,

- strategická rozhodnutí.

Výběr uzlu, s kterým bude kooperovat a vytvářet relace, je také částečně ovlivněn tržními pravidly. Mezi strategická rozhodnutí patří určení kapacit, ceny produktu, úroveň outsourcingu atd.

Koevoluce popisuje změny stavů a vytváření kvazi rovnováhy v systému. Výsledky implementace strategií uzlů ve specifickém prostředí generují koevoluční síťové struktury. Koevoluce je výsledek interakce prostředí, ve kterém existuje dodavatelská síť, a vnitřních mechanismů, používaných uzly v síti. Koevoluční proces vyústí v rozdílný růst jednotlivých firem vzhledem k hodnotám zabudovaných kondičních funkcí.

### 3 UTTERBACKŮV MODEL

Jakmile vznikají nová odvětví, rostou dodavatelské sítě a tím se i vytvářejí nové relace mezi firmami, které kooperují při uspokojování poptávky. Utterbackův model průmyslového růstu bere v úvahu, že na začátku jsou nízké bariéry pro vstup firem do odvětví a není jasně definovaná tržní struktura. V tomto stadiu chce hodně firem vstoupit do odvětví s tím, že se chtějí stát lídry. V dalším stadiu je snaha po vytvoření jasně definované tržní struktury se zaměřením firem na ekonomii rozsahu a síťové externality. Ne všechny firmy jsou úspěšné, ty neúspěšné jsou vytlačeny z trhu a v průběhu času počet firem klesá. Průběh jednotlivých fází cyklu průmyslového růstu vytváří zvonovitou křivku.

Utterback také předpokládá, že se firmy učí hrát specializované role v průběhu času. Na začátku při vzniku odvětví se všechny firmy snaží hrát všestrannou roli, později jich zůstává méně a ty další buď zaniknou, nebo se specializují. Utterbackův model bere v úvahu růst odvětví jen s ohledem na počet vstupujících a vystupujících firem. Další rozměr, který by měl být brán v úvahu, je velikost firem. V jednom možném scénáři, s růstem trhu v průběhu času, existuje různý růst ve firmách. Některé firmy značně rozšiřují kapacity, zatímco jiné zeslabují. Alternativní scénář může být skutečnost, že žádné firmy se nestanou dominantními a trh je relativně rovnoměrně rozdělen mezi zúčastněné firmy. V modelu komplexní adaptivní dodavatelské sítě jsou uvažována dvě hlediska:

- počet firem,
- velikost firem.

### 4 ARCHITEKTURA SIMULAČNÍHO MODELU

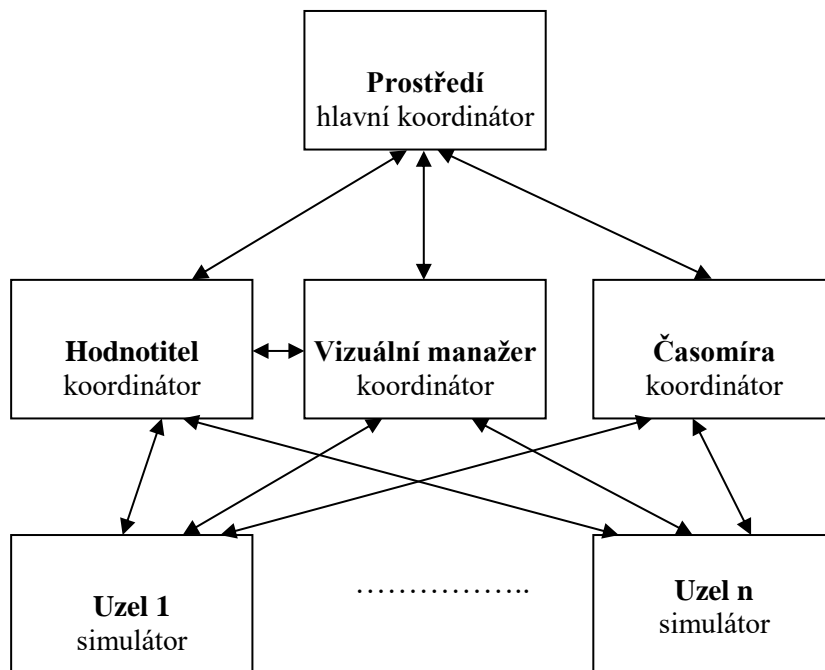
Pro pochopení růstu a vývoje dynamiky je potřeba sledovat časově závislé chování modelu. Simulace je často používaná metodologie pro analýzu časově se měnících vlastností systému. Pro vytvoření simulátoru je možno použít tzv. multi-paradigmatickou architekturu (Obr. 2). V multi-paradigmatické architektuře některé komponenty modelu vyhovují paradigmatu modelování diskrétního času, např. prostředí, zatímco jiné vyhovují paradigmatu modelování diskrétních událostí, např. individuální chování uzlů. Prostedí a Hodnotitel, který funguje jako regulátor prostředí, jsou sdružené modely, které mají interakce s uzly v systému.

Agent Prostedí funguje jako hlavní koordinátor, který spouští a řídí Hodnotitele, Vizualního manažera a Časomíru. Prostedí běží podle simulovaných hodin. Prostedí je použito v modelu pro definování tržního nastavení a generování vzorů poptávky.

Hodnotitel funguje jako koordinátor všech uzlů a komunikuje s nimi prostřednictvím protokolu, spouští uzly a zasílá jim informace o poptávce a další zprávy. Po průběhu určitého počtu poptávkových cyklů ohodnotí uzly a neúspěšné uzly zanikají. Uzly jsou elementární

modely diskretních událostí, které vlastní a koordinuje evaluátor. Uzly reagují na sedm základních událostí:

- přestávka,
- zpráva,
- prapor,
- poptávka,
- žádost o nabídku,
- čas,
- aktualizace kondice.



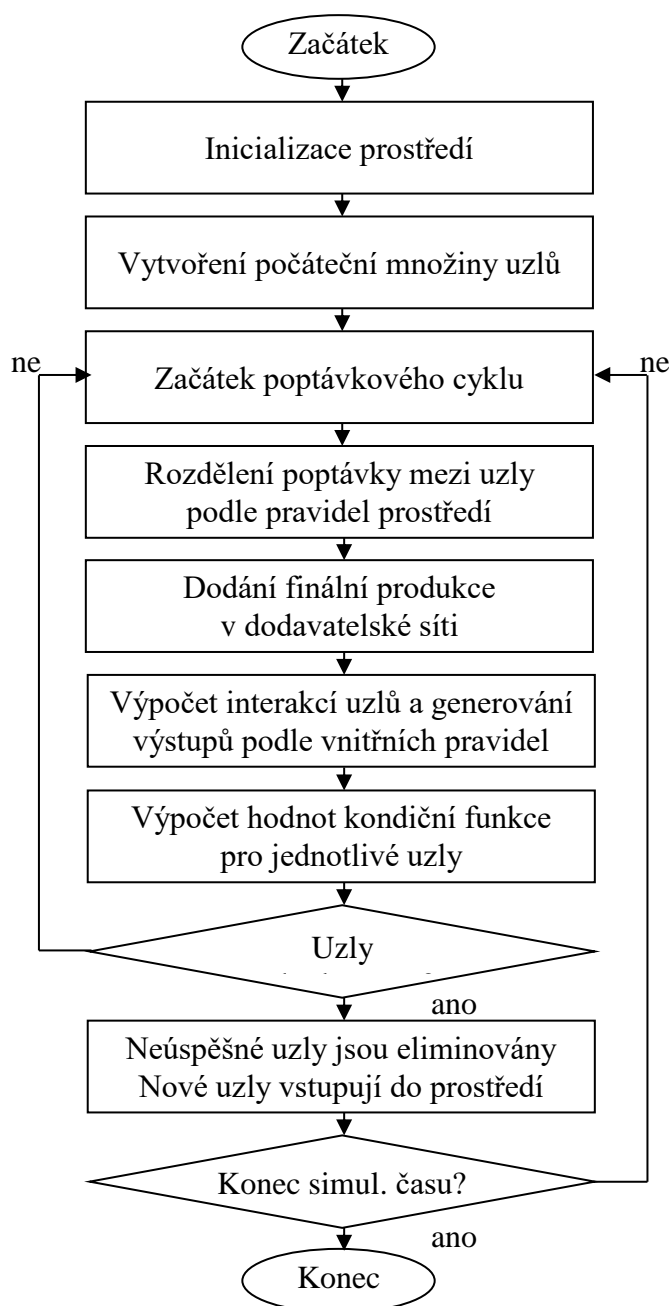
*Obr. 2. Architektura simulačního modelu*

## 5 SIMULAČNÍ ALGORITMUS

Obr. 3 zachycuje posloupnost událostí v cyklu simulačního algoritmu, který vede k vývoji dodavatelské sítě. Simulace začíná inicializací prostředí a nastavením externích parametrů systému jako je start simulačních hodin, vytvoření poptávkové funkce, aktivování částí Hodnotitel a přiřazení hodnot dalších podmínek. Po inicializaci prostředí je generován počáteční počet uzlů sítě.

Prostředí spouští nový poptávkový cyklus a Hodnotitel rozděljuje poptávku mezi všechny uzly na základě nastavené tržní struktury. Uzly jsou v interakci na základě vnitřních mechanismů s cílem uspokojovat poptávku v dané periodě. Finální produkce je dodávána přes kooperující uzly koncovým zákazníkům. Po výpočtu zisků a ztrát jednotlivých uzlů jsou přepočteny hodnoty jejich kondičních funkcí. Hodnotitel periodicky kontroluje kondici uzlů v populaci a odebírá ty uzly, jejichž hodnoty klesly pod prahové hodnoty. Nové uzly jsou zavedeny do prostředí v závislosti na poptávce a nabídce. Počet simulovaných poptávkových cyklů je stanoven během procesu inicializace prostředí. Průběh času je dán v dodavatelské síti

explicitně tím, že poptávkové cykly probíhají v pravidelných časových intervalech. Individuální chování uzlů a jejich vzájemná interakce jsou dány diskretními událostmi.



*Obr. 3. Schéma simulačního algoritmu vývoje sítě*

## 6 ZÁVĚR

Síťová ekonomika je označení pro dnešní globální vztahy mezi ekonomickými subjekty, charakteristické výrazným propojením (Fiala, 2008). Síťová ekonomika urychluje a je sama urychlována dramatickou akcelerací v technologických inovacích, zejména v informačních a komunikačních technologiích. Nové technologie poskytují trvalou zpětnou vazbu, která umožňuje modifikovat aktivity a rychle reagovat na změny a tím podstatně mění modely podnikání. Vznikají a zanikají dynamické dodavatelské sítě (Nagurney, 2006, Fiala, 2016).



Dynamika je dlouhodobě brána jako důležitý faktor (Forrester, 1961), který však nabývá stále většího významu. Při modelování a analýze dynamických modelů síťové ekonomiky hrají důležitou roli simulační techniky (Dlouhý aj., 2007). Předložený dynamický model síťové ekonomiky je jednoduchý. Vytváření detailnějšího modelu, který by zachycoval i další podstatné vlastnosti síťové ekonomiky, je příležitostí pro další výzkum.

### **Poděkování**

Výzkumný projekt je podporován grantem č. P402/12/G097 Grantové agentury České republiky a grantem č. IGA F4/57/2017, Fakulty informatiky a statistiky, VŠE, Praha.

### **Použitá literatura**

1. DLOUHÝ, M., FÁBRY, J., KUNCOVÁ, M., HLADÍK, T. (2007): Simulace podnikových procesů. Computer Press, Praha.
2. FIALA, P. (2016). Dynamické vytváření cen a alokace zdrojů v sítích. Professional Publishing, Praha.
3. FIALA P. (2008): Síťová ekonomika. Professional Publishing, Praha.
4. FORRESTER, J. (1961): Industrial Dynamics. John Wiley, New York.
5. NAGURNEY, A. (2006): Supply chain network economics: dynamics of prices, flows and profits. Edward Elgar Publishers, Cheltenham.
6. PATHAK, S., DILTS, D. M. (2004): CAS-SIM: Complex Adaptive Supply Network Simulator, A Scenario Analysis Tool For Analyzing Supply Networks. In: Production and Operations Management Society Conference, Cancun.
7. PATHAK, S., DILTS, D. M., BISWAS, G. (2003): A Hybrid Simulator for Simulating Complex Adaptive Supply Chain Networks. In: Winter Simulation Conference, New Orleans.
8. UTTERBACK, J. (1994): Mastering the dynamics of Innovation. HBS Press, Boston.
9. UTTERBACK, J., SUAREZ, F. (1993): Innovation: Competition and Industry Structure. Research Policy 15, 285-305.

### **Kontaktní údaje**

Prof. RNDR. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky

nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420 2) 24 095 447

email: [pfiala@vse.cz](mailto:pfiala@vse.cz)

# HAC ESTIMÁTOR V KONTEXTE PRIESTOROVEJ AUTOKORELÁCIE\*

## HAC ESTIMATOR IN SPATIAL AUTOCORRELATION CONTEXT

*Andrea Furková*

### Abstrakt

V literatúre zaoberajúcou sa priestorovou ekonometriou sa v poslednom období stretávame s problematikou zameranou na heteroskedasticky a autokorelačne konzistentný (HAC) odhad kovariančnej matice. Kelejian a Prucha (KP) navrhli neparametrickú procedúru kde sa uvažuje s nenulovými kovarianciami a nekonštantným rozptylom náhodných porúch medzi priestorovými jednotkami. Ktoré priestorové jednotky sú korelované v prípade priestorového HAC estimátora je determinované kernel funkciou hustoty a jej prahovou hodnotou. V článku sa zaoberáme HAC estimátorom zohľadňujúceho priestorové aspekty navrhnutého Kelejianom a Pruchom.

*Kľúčové slová: HAC estimátor, kernel priestorové váhy, priestorová autokorelácia*

### Abstract

Recent attention in the spatial econometric literature focused on the development of spatial heteroskedasticity and autocorrelation consistent (HAC) covariance estimators. Kelejian and Prucha (KP) suggested a nonparametric procedure where non-zero covariance between cross-sectional units and unequal variances are allowed. Which cross-sectional units are allowed to be correlated in the spatial HAC estimator is determined by a kernel density function and its threshold value. In this paper we deal with HAC estimator taking into account spatial aspects following KP approach.

*Keywords: HAC estimator, kernel spatial weights, spatial autocorrelation*

## 1 ÚVOD

Ekonomické údaje zvyčajne vychádzajú z časových radov alebo z údajov prierezoých kde istý typ autokorelácie a/alebo heteroskedasticity môže byť prítomný. V prípade ak je známa kovariančná štruktúra, táto skutočnosť môže byť zohľadnená v ekonometrickom modeli, avšak typickejšia je situácia kedy typ autokorelácie a/alebo heteroskedasticity je neznámy. Aj v takýchto prípadoch parametre modelu môžeme naďalej konzistentne odhadovať na základe štandardných odhadových procedúr avšak predpokladom je konzistentný odhad kovariančnej matice parametrov modelu. V rámci posledných desaťročí v ekonometrickej literatúre boli navrhnuté viaceré procedúry na heteroskedasticky konzistentný odhad (HC) a heteroskedasticky a autokorelačne konzistentný odhad kovariančnej matice parametrov modelu (White, 1980; MacKinnon a White, 1985; Newey a West, 1987; Newey a West, 1994;

---

\* This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA grant No. 1/0248/17 "Analysis of Regional Disparities in the EU based on Spatial Econometric Approaches".

Andrews, 1991; Long a Ervin, 2000; Cribari-Neto, 2004). Viacerí autori (Conley, 1999; Kelejian a Prucha, 2007 alebo Kim a Sun, 2011) navrhli HAC estimátory robustné súčasne proti heteroskedasticite a priestorovej autokorelácii neznámej formy nakoľko priestorová závislosť je tiež bežným javom spôsobeným interakciami medzi ekonomickými subjektami, štátmi/krajmi atď. V tomto príspevku sa venujeme špecifikám HAC estimátora v kontexte priestorovej autokorelácie navrhnutého Kelejianom a Pruchom (KP).

## 2 HAC ESTIMÁTOR V KONTEXTE PRIESTOROVEJ AUTOKORELÁCIE

KP HAC estimátor vychádza zo situácie keď diagonála variančno–kovariančnej matice náhodných porúch neobsahuje konštantný rozptyl (bližšie pozri klasické predpoklady lineárneho modelu napr. v Greene, 2003) ale má tvar:

$$E[\mathbf{uu}^T] = \Sigma \quad \text{pričom } \Sigma \neq \sigma^2 \mathbf{I} \quad (1)$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor náhodných porúch rozmeru  $(N \times N)$   $\sigma^2$  je rozptyl náhodných porúch a  $\mathbf{I}$  je jednotková matica rozmeru  $(N \times N)$ . V takomto prípade variančná matica MNŠ (metóda najmenších štvorcov) parametrov nemá tvar  $\text{var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2 [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1}$  ale namiesto toho nadobúda nasledujúci tvar:

$$\text{var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{V} [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \quad (2)$$

kde  $\mathbf{V} = \mathbf{X}^T \Sigma \mathbf{X}$  je matica rozmeru  $(k \times k)$ . KP navrhli estimátor pre maticu  $\mathbf{V}$  v nasledujúcom tvare (bližšie pozri Kelejian a Prucha, 2007 alebo Anselin a Rey, 2014):

$$\hat{\mathbf{V}} = \left( \frac{1}{N} \right) \sum_i \sum_j \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T e_i e_j K \left( \frac{d_{ij}}{d} \right) \quad (3)$$

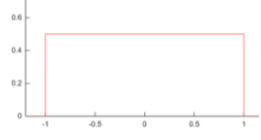
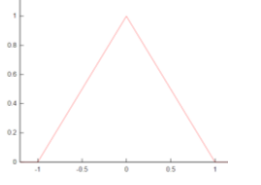
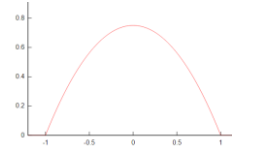
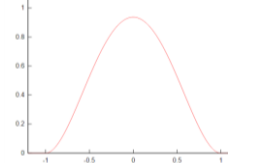
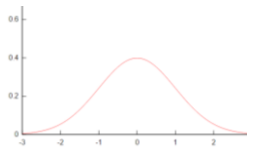
kde  $\mathbf{x}_i$  je stĺpcový vektor pozorovaní nezávislých premenných  $i$ -tej jednotky,  $\mathbf{x}_j^T$  je riadkový vektor pozorovaní nezávislých premenných  $j$ -tej jednotky,  $e_i$  je  $i$ -tý prvok vektora  $\mathbf{e}$  (vektor MNŠ reziduálov),  $e_j$  je  $j$ -ty prvok vektora  $\mathbf{e}$ ,  $K(\cdot)$  je vybraná kernel funkcia s prahovou hodnotou  $d$ . Variančná matica koeficientov je potom odhadnutá nasledujúco:

$$\text{var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = N [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \hat{\mathbf{V}} [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \quad (4)$$

## 3 KERNEL VÁHY

Ako je vidno zo vzťahu (3) na odhad matice  $\mathbf{V}$  je nutné zvoliť tzv. kernel funkciu, ktorá v prípade neparametrických prístupov k modelovaniu priestorových kovariancií plní funkciu kernel priestorových váh. Tieto váhy použité v HAC procedúre sú funkciou  $K(z)$  podielu vzdialenosti  $d_{ij}$  medzi  $i$ -tou a  $j$ -tou jednotkou a prahovou hodnotou  $h_i$ , t. j.  $z = d_{ij}/h_i$ . Pre vzdialenosti väčšie nanajvyš rovné prahovej hodnote  $K(z) = 0$ . Najčastejšie aplikované kernel funkcie sú uvedené v tabuľke 1.

Tab. 1 Kernel funkcie

Kernel funkcia $K(z)$		
Rovnomerná	$K(z) = 1/2 \quad \text{pre }  z  \leq 1$	
Bartletova - trojuholníková	$K(z) = (1 -  z ) \quad \text{pre }  z  \leq 1$	
Epanechnikova - kvadratická	$K(z) = 3/4(1 - z^2) \quad \text{pre }  z  \leq 1$	
Kvadratická štvrtého stupňa	$K(z) = 15/16(1 - z^2)^2 \quad \text{pre }  z  \leq 1$	
Gaussova	$K(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$	

Zdroj: vlastné spracovanie

V štandardnej matici priestorových váh  $\mathbf{W}$  (bližšie pozri napr. v Chocholatá, 2013) sú diagonálne prvky tejto matice rovné 0. V prípade aplikácie HAC estimátora je nutné si uvedomiť, že prvky matice priestorových váh sa musia rovnať jednej. Taktiež je potrebné venovať dostatočnú pozornosť výberu kernel funkcie váh a za kľúčový aspekt je považovaná voľba prahovej hodnoty. Zvoliť fixnú prahovú hodnotu môže mať za následok, že sa počet nenulových váh môže značne líšiť medzi priestorovými jednotkami, čo je najmä typické v prípade rovnomernej kernel funkcie. Na riešenie tohto problému sa využíva premenlivá prahová hodnota pre každú uvažovanú priestorovú jednotku s cieľom zabezpečiť rovnaké, resp. takmer rovnaké pokrytie. Bežným postupom je stanovenie prahovej hodnoty pre každú priestorovú jednotku individuálne na základe prístupu  $k$  – najbližších susedov a teda  $k$  – najbližší susedia sú zahrnutí v kernel funkcii. Prahová hodnota pre každú priestorovú

jednotku je stanovená ako hodnota väčšia ako vzdialenosť  $k$  najbližšieho suseda a súčasne menšia ako vzdialenosť  $k+1$  najbližšieho suseda. Počet  $k$  najbližších susedov by mal byť dostatočne veľký z dôvodu asymptotických vlastností HAC estimátora. Kelejian a Prucha navrhli, že minimálna hodnota počtu susedov by mala byť približne tretia odmocnina z počtu pozorovaní.

## 4 ZÁVER

HAC estimátori sú populárnym ekonometrickým nástrojom a objektom záujmu sú už pomerne dlhšie obdobie predovšetkým v súvislosti s problematikou časových radov. Rozšíreniu tejto problematiky v kontexte priestorovej autokorelácie sa v posledných rokoch venovalo viacero autorov nakoľko vzájomná prepojenosť sledovaných jednotiek (regiónov, krajov, štátov, atď.) je bežným javom. V článku sme sa zamerali na špecifiká HAC estimátora navrhnutého Kelejianom a Pruchom, kde je zohľadňovaná priestorová autokorelácia. V druhej časti sme načrtli konštrukciu HAC estimátora v kontexte priestorovej autokorelácie, problematiku kernel funkcie a nastavenia jej prahovej hodnoty sme priblížili v tretej časti.

### Použitá literatúra

1. ANDREWS, D. W. K. 1991. Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. *Econometrica*, 59, s. 817–858.
2. ANSELIN, L. – REY, S. J. 2014. Modern Spatial Econometrics in Practice. GeoDa Press LLC, Chicago.
3. CHOCHOLATÁ, M. 2013. Regional convergence: a spatial econometric approach. *Ekonomika a informatika*, 11 (2), s. 85–95.
4. CONLEY, T. G. 1999. GMM Estimation with Cross Sectional Dependence. *Journal of Econometrics*, 92, 1–45.
5. CRIBARI-NETO, F. 2004. Asymptotic Inference Under Heteroskedasticity of Unknown Form. *Computational Statistics & Data Analysis*, 45, s. 215–233.
6. GREENE, W. H. (2003). *Econometric Analysis*, 5th edition. Prentice Hall.
7. KELEJIAN, H. H. – PRUCHA, I. R. 2007. HAC estimation in a spatial framework. *Journal of Econometrics*, 140, s. 131–154.
8. KIM, M. – SUN, Y. 2011. Spatial heteroskedasticity and autocorrelation consistent estimation of covariance matrix, *Journal of Econometrics*, 160, s. 349–371.
9. LONG, J. S – ERVIN, L. H. 2000. Using Heteroscedasticity Consistent Standard Errors in the Linear Regression Model. *The American Statistician*, 54, s. 217–224.
10. MACKINNON, J. G. – WHITE, H. 1985. Some Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimators with Improved Finite Sample Properties. *Journal of Econometrics*, 29, s. 305–325.
11. NEWEY, W. K – WEST, K. D 1987. A Simple, Positive-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55, s. 703–708.
12. NEWEY, W. K – WEST, K. D. 1994. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. *Review of Economic Studies*, 61, s. 631–653.
13. WHITE, H. 1980. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48(4), s. 817–838.

### Kontaktné údaje

Ing. Andrea Furková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 832  
email: [andrea.furkova@euba.sk](mailto:andrea.furkova@euba.sk)

# NÁVRH A POROVNANIE KRITÉRIÍ KOLEKTÍVNEJ FÉROVOSTI

## DESIGN AND COMPARISON OF CRITERIONS OF COLLECTIVE FAIRNESS

*Lýdia Gábrišová, Jaroslav Janáček*

### Abstrakt

Verejný obslužný alebo dopravný systém zabezpečuje všetky požiadavky zákazníkov prostredníctvom stredísk obsluhy alebo dopravy. Každé stredisko pritom disponuje určitým počtom staníc, ktoré službu vykonávajú. Nech sú zákazníci priradení k „najbližšiemu stredisku“ (vzdialenostne). Tak vytvoria skupinu užívateľov obslužného strediska. To je potom zaťažené dopravnou prácou, potrebnou na obsluhu skupiny, ktorá sa rozdeľuje medzi stanice umiestnené v stredisku.

V našej práci chceme nájsť riešenie, ktoré čo „najspravodlivejšie“ (kolektívna alebo skupinová férovosť) prerozdelení stanice obsluhy v aktuálne existujúcich strediskách. Navrhli sme dve kritériá, ktorých hodnotu minimalizujeme. Prvé kritérium je najväčší objem záťaže presahujúci priemernú hodnotu dopravnej práce, pripadajúcej na stredisko. Druhým kritériom je rozptyl odchýlok dopravnej práce od priemernej záťaže strediska. V tomto príspevku budeme skúmať vzťah medzi uvedenými dvomi kritériami.

**Kľúčové slová:** kolektívna férovosť, verejný obslužný systém, nelineárna účelová funkcia

### Abstract

The public service or transport system ensures all customer requirements through service or transport centers. Each center has a number of stations that perform the service. Let customers be assigned to the "closest center" (remote). This creates a group of service center users. This is then loaded with the traffic required to serve the group, which is distributed between the stations located in the center.

In our work, we want to find a solution that "the most righteous" (collective or group fairness) is to distribute service stations in the existing centers. We have proposed two criteria that we minimize. The first criterion is the largest volume of load exceeding the average value of the transport work attributable to the center. The second criterion is the variance of the deviation of the traffic from the average load of the center. In this paper we will examine the relationship between the two criteria.

**Keywords:** collective fairness, public service system, nonlinear objective function

## 1 NÁVRH KRITÉRIÍ

Predpokladajme, že máme v obslužnej alebo dopravnej sieti k dispozícii množinu  $I_1$  obslužných stredísk. Podľa pravidla: zákazník  $j$  je priradený k „najbližšiemu stredisku“ (vzdialenostne), je každé stredisko  $i \in I_1$  zaťažené dopravnou prácou  $W_i$  počítanou podľa nasledujúceho vzťahu:

$$W_i = \sum_{j \in J_i} b_j d_{ij}, \text{ kde } J_i = \{j \in J : d_{ij} = \min \{d_{kj} : k \in I_1\}\} \quad (1.1)$$

Konštanty  $b_j$  udávajú objem požiadaviek každého zákazníka  $j$  danej množiny zákazníkov  $J$ . Hodnoty  $d_{ij}$  sú vzdialenosťami medzi zákazníkom  $j \in J$  a obslužným strediskom  $i \in I_1$ . Množiny  $J_i$ , definované podľa (1.1) predstavujú skupinu alebo kolektív zákazníkov, ktorí sú priradení k najbližšiemu stredisku  $i \in I_1$ .

Nech každému stredisku je priradený istý počet staníc, ktoré zabezpečujú obsluhu danej skupiny zákazníkov (alebo dopravu medzi strediskom a zákazníkmi skupiny). Celkový počet staníc systému, označených  $noF$  je daný. Zároveň v každom stredisku musí byť umiestnená aspoň jedna stanica a preto počet  $noF > |I_1|$ . Ak sú k dispozícii stanice navyše, je treba rozhodnúť o ich priradení k strediskám tak, aby bolo zaťaženie každého strediska  $i$ , kvantifikované dopravnou prácou  $W_i$  podľa (1.1) rovnomerné.

Riešením úlohy je určenie počtu staníc v jednotlivých obslužných strediskách  $i \in I_1$ . Počet staníc priradených stredisku  $i$  označíme symbolom  $y_i$ .

Prvým kritériom kolektívnej férovosti (zrovnomenenia dopravnej práce  $W_i$ ) je prebytok objemu záťaže nad priemernú hodnotu dopravnej práce  $W_i$  najviac zaťaženého strediska, čo udáva vzťah:

$$F_M(\mathbf{y}) = \max \{W_i - (\sum_{t \in I_1} W_t / noF) y_i : i \in I_1\} \quad (1.2)$$

Druhým kritériom je rozptyl odchýlok dopravnej práce  $W_i$  od priemernej záťaže strediska, čo udáva vzťah:

$$F_D(\mathbf{y}) = \sum_{i \in I_1} \left( W_i - (\sum_{t \in I_1} W_t / noF) y_i \right)^2 \quad (1.3)$$

kde  $\mathbf{y} = \{y_i : i \in I_1\}$  je množina udávajúca počet staníc strediska  $i$  za podmienok:

$$\begin{aligned} y_i &\geq 1 \quad \text{pre } i \in I_1 \\ \sum_{i \in I_1} y_i &= noF \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$y_i \in Z^+ \quad \text{pre } i \in I_1$$

Tieto určujú, že stredisko bude mať jedno alebo viac staníc obsluhy a ich celkový počet nepresiahne daný počet  $noF$ . Navrhnuté kritériá sme použili k návrhu nového preusporiadania staníc obslužného alebo dopravného systému v daných strediskách obsluhy. Náš výskum bol doteraz smerovaný k určeniu množiny obslužných stredísk z danej množiny ich možných umiestnení. Hlavným kritériom bola minimalizácia celkového objemu práce  $W_i$  (podľa 1.1) všetkých vybratých stredísk pri konštantnom počte staníc obsluhy. Práce boli publikované v [1, 2, 4, 5].

## 2 TRANSFORMÁCIA ÚLOH NA ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Úloha, ktorá má zrovnomeniť dopravnú prácu všetkých obslužných stredísk predstavuje minimalizáciu navrhnutých funkcií  $F_M$  podľa (1.2) a  $F_D$  podľa (1.3) v matematickom modeli s podmienkami (1.4). Na implementovanie úlohy s použitím vývojového prostredia XPRESS-Mosel [8] je nutné, nelineárne funkcie  $F_M$  a  $F_D$  linearizovať.

Postup: majme množinu  $I_1$  všetkých obslužných stredísk a premenné  $y_i$  pre každé  $i \in I_1$ , ktoré určia počet staníc strediska. Ich maximálny možný počet v jednom stredisku je  $noF - |I_1| + 1$



a to je prípad, kedy by každému stredisku bola pridelená 1 stanica a jednému všetky ostatné stanice. Riešenie úlohy:

1. pre minimalizáciu nelineárnej funkcie  $F_M$  podľa (1.2) sme formulovali úlohu s označením model FM nasledovne:

min  $h$

$$\text{zp. } W_i - \left( \sum_{t \in I_1} W_t / noF \right) y_i \leq h \quad \text{pre } i \in I_1$$

$$\sum_{i \in I_1} y_i = noF \tag{2.1}$$

$$y_i \in K \quad \text{pre } i \in I_1$$

$$h \geq 0$$

kde množina celých čísel  $K = \{1, \dots, noF - |I_1| + 1\}$  určuje dolný a horný počet staníc  $y_i$  strediska  $i$ . Výstupom úlohy je vektor  $y = \{y_i: i \in I_1\}$  určujúci počet staníc  $y_i$  strediska  $i$ .

2. pre minimalizáciu nelineárnej funkcie  $F_D$  podľa (1.3) sme formulovali úlohu s označením model FD nasledovne:

$$\text{min } \sum_{i \in I_1} \sum_{k \in K} Q_{ik} x_{ik}$$

$$\text{zp. } \sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \text{pre } i \in I_1$$

$$\sum_{i \in I_1} \sum_{k \in K} k x_{ik} = noF \tag{2.2}$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \text{pre } i \in I_1, k \in K$$

kde konštanty  $Q_{ik}$  sú definované nasledovne:

$$Q_{ik} = \left( W_i - k \left( \sum_{t \in I_1} W_t / noF \right) \right)^2 \quad \text{pre } i \in I_1, k \in K$$

a množina celých čísel  $K = \{1, \dots, noF - |I_1| + 1\}$ , tak ako v úlohe (2.1) určuje dolný a horný počet staníc  $y_i$  strediska  $i$ . Výstupné hodnoty  $x_{ik}$  pre každé  $i \in I_1, k \in K$  určia počty staníc, ktorými budú disponovať strediská, a to podľa vzťahu  $y_i = \sum_{k \in K} k x_{ik}$  pre každé stredisko  $i \in I_1$ .

### 3 EXPERIMENTY NA REÁLNYCH DÁTACH

Pre vytvorenie testovacích úloh sme použili údaje o Záchranom zdravotnom systéme jednotlivých krajov Slovenskej republiky ( dostupné online v [6] ). Množina zákazníkov  $J$  korešponduje s obcami kraja, objem požiadaviek  $b_j$  každého zákazníka  $j$  je určený počtom obyvateľov obce v stovkách. Ďalej  $d_{ij}$  sú vzdialenosti medzi jednotlivými obcami kraja v kilometroch a množina  $I_1$ , ktorá udáva aktuálny zoznam stredísk záchranej služby s počtom staníc rýchlej zdravotnej služby.

Úlohu (2.1), označenú FM a úlohu (2.2), označenú FD sme riešili a porovnali výsledky vzhľadom na ďalej uvedené hodnoty v osobokilometroch:

- celkový objem práce všetkých existujúcich stredísk danej množiny  $I_1$ , počítaný ako  $UF = \sum_{i \in I_1} W_i$ , kde  $W_i$  je práca každého strediska a definovaná v (1.1),
- hodnotu funkcie  $F_D$  podľa (1.3), čo je rozptyl odchýlok dopravnej práce  $W_i$  od priemernej záťaže strediska,
- hodnotu rozptylu objemov dopravnej práce pripadajúcich na stredisko ako  $F_D / |I_1|$ ,
- smerodajnú odchýlku objemov dopravnej práce pripadajúcich na stredisko ako  $\sqrt{F_D / |I_1|}$ ,
- hodnotu funkcie  $F_M$  podľa (1.2), čo je najväčší objem dopravnej práce strediska  $W_i$  presahujúci priemernú hodnotu,
- čas výpočtu danej úlohy v sekundách.

Popísané hodnoty uvádzame v Tabuľkách 1 - 4, ktoré sú vyhodnotením aktuálneho systému Záchrannej zdravotnej služby v stĺpci, označenom „súčasnosť“ a nových, ktoré boli získané riešením úlohy FM (2.1) a FD (2.2).

<b>ZA</b>	súčasnosť	FD	FM	<b>KE</b>	súčasnosť	FD	FM
počet obcí $ J $	315			počet obcí $ J $	460		
počet staníc $noF$	36	36	36	počet staníc $noF$	38	38	38
počet stredísk $ I_1 $	29	29	29	počet stredísk $ I_1 $	32	32	32
celková práca $UF$	31955	31955	31955	celková práca $UF$	36363	36363	36363
kritérium $F_D$	12417270	8731004	8731004	kritérium $F_D$	18646610	9591920	9591920
rozptyl	428182	301069	301069	rozptyl	582707	299748	299748
smerodajná odchýlka	654	549	549	smerodajná odchýlka	763	547	547
kritérium $F_M$	1748	1259	1259	kritérium $F_M$	1846	1071	1071
čas výpočtu (sek.)		0.016	0.015	čas výpočtu (sek.)		0.016	0.015

**Tabuľka 1** Porovnanie systémov podľa zvolených hodnôt v Žilinskom a Košickom kraji

<b>PO</b>	súčasnosť	FD	FM	<b>NR</b>	súčasnosť	FD	FM
počet obcí $ J $	664			počet obcí $ J $	350		
počet staníc $noF$	44	44	44	počet staníc $noF$	36	36	36
počet stredísk $ I_1 $	32	32	32	počet stredísk $ I_1 $	27	27	27
celková práca $UF$	42740	42740	42740	celková práca $UF$	38831	38831	38831
kritérium $F_D$	26660079	5849938	5849938	kritérium $F_D$	14890284	7330044	7330044
rozptyl	833127	182811	182811	rozptyl	551492	271483	271483
smerodajná odchýlka	913	428	428	smerodajná odchýlka	743	521	521
kritérium $F_M$	3099	774	774	kritérium $F_M$	2420	839	839
čas výpočtu (sek.)		0.031	0.016	čas výpočtu (sek.)		0.016	0.016

**Tabuľka 2** Porovnanie systémov podľa zvolených hodnôt Prešovskom a Nitrianskom kraji

<b>BA</b>	súčasnosť	FD	FM	<b>TN</b>	súčasnosť	FD	FM
počet obcí $ J $	87			počet obcí $ J $	276		
počet stredísk $ I_1 $	14	14	14	počet stredísk $ I_1 $	21	21	21
celková práca $UF$	21842	21842	21842	celková práca $UF$	26683	26683	26683
kritérium $F_D$	18056404	2175767	2175767	kritérium $F_D$	13712025	7489675	7489675
rozptyl práce	1289743	155412	155412	rozptyl práce	652954	356651	356651
smerodajná odchýlka	1136	394	394	smerodajná odchýlka	808	597	597
kritérium $F_M$	1723	716	716	kritérium $F_M$	2544	1160	1160
čas výpočtu (sek.)		0.016	0.016	čas výpočtu (sek.)		0.016	0.015

**Tabuľka 3** Porovnanie systémov podľa zvolených hodnôt v Bratislavskom a Trenčianskom kraji

<b>BB</b>	súčasnosť	FD	FM	<b>TT</b>	súčasnosť	FD	FM
počet obcí $ J $	515			počet obcí $ J $	249		
počet staníc $noF$	46	46	46	počet staníc $noF$	22	22	22
počet stredísk $ I_1 $	36	36	36	počet stredísk $ I_1 $	18	18	18
celková práca $UF$	32476	32476	32476	celková práca $UF$	31582	31582	31582
kritérium $F_D$	10800972	5073900	5073900	kritérium $F_D$	11701398	8353706	8353706
rozptyl	300027	140942	140942	rozptyl	650078	464095	464095
smerodajná odchýlka	548	375	375	smerodajná odchýlka	806	681	681
kritérium $F_M$	1612	787	787	kritérium $F_M$	2360	1194	1194
čas výpočtu (sek.)		0.016	0.015	čas výpočtu (sek.)		0.016	0.016

**Tabuľka 4** Porovnanie systémov podľa zvolených hodnôt v Banskobystrickom a Trnavskom kraji

## 4 ZÁVER

Skúmali sme vzťah medzi navrhnutými kritériami v závislosti na počte stredísk a objeme dopravnej práce, ktoré sme popísali v 1. kapitole a ich použitie na návrh nového systému obsluhy, popísané v kapitole 2.

Numerické experimenty ukázali, že obidve kritériá sú rovnocenné z pohľadu zrovnomenia dopravnej práce obslužných stredísk. Údaje uvedené v jednotlivých Tabuľkách 1 - 4 ukazujú, že nové systémy riešené modelmi FM a FD dosiahli lepšie hodnoty v porovnaní so súčasným stavom. Porovnávané boli hodnoty rozptylu odchýlok dopravnej práce  $W_i$  od priemernej záťaže strediska, určené kritériom  $F_D$  a hodnoty rozptylu objemov dopravnej práce pripadajúcich na stredisko. Smerodajné odchýlky objemov dopravnej práce pripadajúcich na stredisko ukázali výrazne lepšie hodnoty, podobne ako maximálny objem dopravnej práce strediska  $W_i$  nad jeho priemernú hodnotu, ktoré sme určili kritériom  $F_M$ .

Experimenty na reálnych úlohách tiež ukázali, že obe navrhnuté kritériá ( funkcie  $F_M$  a  $F_D$  ) dosiahli rovnaké riešenia. Čas výpočtu bol približne rovnaký a nezávisel od rozmeru úlohy danej počtom zákazníkov ( počet obcí  $|J|$  ) a stredísk  $|I_1|$ .

Pre ďalší výskum zvolíme jedno z nich a budeme skúmať možnosť optimálneho počtu obslužných stredísk pri danom počte staníc obsluhy alebo dopravy a to stále s cieľom zabezpečenia kolektívnej férovosti systému, vhodným nastavením kapacít stredísk obsluhy.

**Oznámenie:**

*Táto práca je podporovaná grantom VEGA 1/0518/15 “Spolahlivé záchranné systémy s neistou dosiahnuteľnosťou služby” a APVV-15-0179 „Spolahlivosť záchranných systémov na infraštruktúre s neistou funkcionalitou kritických prvkov“.*

**Referencie**

- [1] Gábrišová, L.: Podpora rozhodovania v strategickom manažmente verejného obslužného systému. In: Trendy v podnikaní 2016: recenzovaný zborník príspevků mezinárodní vědecké konference, Západočeská univerzita v Plzni, 2016, CD-ROM, [7] s.
- [2] Gábrišová, L., Janáček, J.: Design of capacitated emergency service system. In: Communications - scientific letters of the University of Žilina, Vol. 17, no. 2 (2015), pp. 42-48.
- [3] Janáček, J. a kol.: Navrhovanie územne rozľahlých obslužných systémov. 1. vyd. EDIS Žilina, Žilinská univerzita, (2010), 404 s.
- [4] Jánošíková, L.: Emergency medical service planning. In: Communications - scientific letters of the University of Žilina, Vol. 9, no 2 (2007), pp. 64-68.
- [5] Kvet, M., Janáček, J.: Two phase approach for large public service system design. In: Mathematical Methods in Economics. University of West Bohemia, Plzeň (2015), pp. 455-460.
- [6] Szendreyova, B. (2015). Benchmarks [online] [Accessed May 2016]. Available from: <http://frdsa.fri.uniza.sk/~betka/BenchmarksSR.html>.
- [7] FICOTM Xpress Optimization Suite [online]. Available from: <http://www.fico.com>.
- [8] XPRESS-Mosel “User guide”, 2005. Dash Associates, Blisworth, UK.

**Autori:**

Mgr. Lýdia Gábrišová, PhD.

Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy

Univerzitná 2, 010 26 Žilina

Slovenská republika

email: [lydia.gabrisova@fri.uniza.sk](mailto:lydia.gabrisova@fri.uniza.sk)

Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.

Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy

Univerzitná 2, 010 26 Žilina

Slovenská republika

email: [jaroslav.janacek@fri.uniza.sk](mailto:jaroslav.janacek@fri.uniza.sk)

# EKO-EKO SPRÁVANIE SPOTREBITEĽA<sup>1</sup>

## ECO-ECO CONSUMER BEHAVIOR<sup>1</sup>

*Pavel Gežík, Tomáš Fašiang*

### **Abstrakt**

Spotrebiteľské správanie spotrebiteľov predstavuje oblasť skúmania, ktorá je dynamická a neustále sa vyvíja. Trh je omnoho viac heterogénnejší a spotrebiteľia sa menia pod vplyvom externých, či interných faktorov tak rýchlo, ako tomu nebolo nikdy predtým. Preto je nevyhnutné orientovať sa na zelené inovácie, ktoré okrem pridanej hodnoty pre spotrebiteľa majú pozitívny dopad na životné prostredie. Cieľom príspevku je poukázať na uplatnenie ekologicko-ekonomických prístupov v procese spotrebiteľského správania.

Eko-Eko správanie spotrebiteľa predstavuje správanie, kedy spotrebiteľ si nevyberá len na základe ceny ale zaoberá sa aj dopadom svojho rozhodnutia na životné prostredie. Preto pri výbere produktu spotrebiteľ skúma aj vzdialenosť a emisie, ktoré vzniknú počas nákupu produktov.

**KLúčové slová:** *spotrebiteľské správanie, zelené inovácie, ekologicko-ekonomický prístup*

### **Abstract**

Consumer behavior is an area of research that is dynamic and constantly evolving. The market is much more heterogeneous. Consumers change under the influence of external or internal factors as fast as it has never been before. Therefore, it is essential to focus on green innovations which, in addition to added value for the consumer, have a positive impact on the environment. The aim of the paper is showing the use of ecological and economic approaches in the process of consumer behavior.

Eco-Eco consumer behavior is a behavior where the consumer make decisions not only based on a price but also deals with the impact of his decision on the environment. That is the reason, why the consumers also examine the distance and emissions that occur during the purchase of the products, when they choose a product.

**Keywords:** *Consumer behavior, Green innovation, Eco-eco approach*

## **1 ÚVOD**

Súčasnú dobu je charakteristické vysokou penetráciou informačných technológií, vysokou mierou digitalizácie a zavádzaním inovácií, ktoré ovplyvňujú konkurenčné prostredie a ako aj samotné postavenie podnikateľských subjektov na trhu. Tieto zmeny okrem podnikateľskej sféry ovplyvňujú aj spotrebiteľov. Vplyvom zavádzania inovácií sa zvyšuje životná úroveň, predlžuje sa dĺžka života ľudí, vznikajú generačné rozdiely a zmeny v spotrebe.

---

<sup>1</sup> Príspevok je spracovaný ako jeden z výstupov projektu VEGA 1/0245/15 "Plánovanie prepravy s cieľom znížovania emisií" a VEGA 1/0283/15 „Aspekty marketingovej komunikácie v oblasti procesu tvorby hodnoty zákazníka na trhu B2C v kontexte s maximalizáciou trhového podielu v nákupnom spáde maloobchodu.“.

Úlohou podnikateľských subjektov je inovovať využívané marketingové koncepcie a zamerať sa aj napriek vyššej ekonomickej náročnosti na diverzifikáciu, ktorá predstavuje cestu k budovaniu lojality spotrebiteľov.

Jednou z možností diverzifikácie je orientácia na EKO inovácie, ktoré súvisia so spoločensky zodpovedným podnikaním a ochranou životného prostredia. V tejto súvislosti sa príspevok zaoberá problematikou ekologického a ekonomického prístupu spotrebiteľa pri realizácii nákupného správania.

Pojem EKO-EKO vychádza z modelového prístupu „Eco-Eco Models“, teda z anglického označenia eco(nomy)-eco(logy), teda ekonomicko-ekologicky model (Lifset and Lombardi, 1997). Jedná sa o modely ekonomických situácií, ktoré riešia nie len ekonomické, ale aj ekologické ciele. Práve ekologický aspekt týchto modelov je často podmienený legislatívou, ktorú musia subjekty trhu spĺňať alebo spoločenské nároky, ktoré sú vyžadované v dnešnej dobe.

## 2 SPRÁVANIE SPOTREBITEĽA

Zavádzanie inovácií sa stáva nevyhnutným systémom, prostredníctvom ktorého sa vytvárajú stratégie na uspokojenie potrieb zákazníkov a zároveň sa ním zabezpečuje dosahovanie ekonomických cieľov. Čoraz častejšie sa hľadajú segmenty, či dokonca subsegmenty, v ktorých by podnikateľské subjekty vedeli cielene uplatňovať svoje inovačné stratégie k spotrebiteľom.

Správanie spotrebiteľa pri nákupe sa v súčasnej spoločnosti stáva predmetom mnohých výskumov, ktoré odhaľujú čoraz širšie spektrum možností, akými možno vybraný segment spotrebiteľov identifikovať. Nedostatočné poznanie spotrebiteľa, resp. zákazníka, nedôsledne reflektuje potreby segmentu a obmedzuje podnikateľské subjekty v tvorbe adekvátnych stratégií, ktoré môžu zabezpečovať účinnosť v tvorbe prístupu k spotrebiteľovi na trhu.

Skúmanie spotrebiteľského správania spotrebiteľa je však pomerne zložité, nakoľko do procesu nakupovania vstupuje množstvo premenných interného alebo externého charakteru, ktoré sa nedajú jednoznačne oddeliť a ich vplyv býva vzájomne prepojený. Základným predpokladom pre identifikáciu spotrebiteľského správania vybraných cieľových skupín, je pochopenie celého procesu nákupného správania spotrebiteľa od uvedenia si potreby až po hodnotenie realizovaného nákupu. Na základe procesného popisu spotrebiteľského správania zákazníka pri nákupe, možno identifikovať kľúčové prvky rozhodovacieho procesu nákupného správania.

Uvedená schéma determinuje proces spotrebiteľského správania zákazníka pri realizácii a hodnotení nákupu. Východiskovým bodom je charakteristika spotrebiteľa resp. zákazníka, od ktorého sa odvíja nákupné rozhodovanie, ako aj aktivity spojené s celým procesom spotrebiteľského správania. Medzi atribúty popisujúce charakteristiku spotrebiteľa možno zaradiť geografické, demografické, ekonomické, sociálne a osobnostné ukazovatele<sup>2</sup>. Samotné nákupné správanie iniciuje identifikácia a poznanie nákupného problému, ktorý je odpoveďou na vplývajúci podnet. Poznanie problému je výsledkom vnímanej disproporcie medzi súčasným a želaným stavom.

---

<sup>2</sup> RICHTEROVÁ, K. a kol.: Spotrebiteľské správanie. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2007. ISBN 978-80-225-2335-4

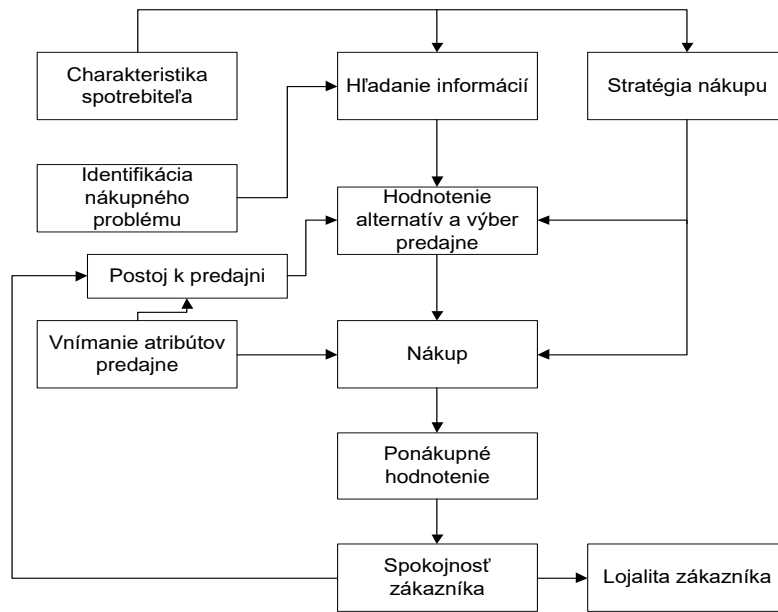


Schéma 1: Model spotrebitel'ského správania<sup>3</sup>

Avšak samotná iniciácia nákupu je podriadená sile a veľkosti tohto nesúladu. To znamená, že iniciácia nákupu bude podliehať vzniku motívu uspokojenia potreby ako výsledku rozporu medzi súčasným a želaným stavom. Pokiaľ je nákupný problém identifikovaný, pristupuje spotrebiteľ k hľadaniu relevantných informácií, ktoré podriaďuje stratégii nákupu. Pod stratégiou nákupu možno zjednodušene vnímať orientáciu spotrebiteľa na hlavný nákup (strategický nákup všetkých tovarov dennej potreby potrebných pre zabezpečenie fungovania celej domácnosti v týždennom cykle) a orientáciu na ostatné nákupy (čiastkové nákupy, ktoré uspokojujú aktuálne potreby v menšom rozsahu resp. dopĺňajú strategický nákup domácnosti).

Spôsob hľadania informácií je ďalej podriadený charakteristikám spotrebiteľa, ktoré určujú okruh základných rozhodovacích kritérií o možných riešeniach vplyvajúcich na získanie relevantných informácií. Hľadanie informácií pre uspokojenie vzniknutej potreby je realizované na úrovni interných a externých zdrojov informácií. Po získaní dostatočného množstva informácií, pristupuje spotrebiteľ k hodnoteniu alternatív a výbere maloobchodnej predajne pre realizáciu nákupu.

Hodnotenie alternatív a výber maloobchodnej predajne je podriadený stratégii nákupu, prostredníctvom ktorej sú stanovené hodnotiace kritéria, ich dôležitosť, ako aj okruh hodnotených alternatív. Po zhodnotení jednotlivých alternatív nákupu v súlade so stanovenými kritériami, dochádza k výberu predajne, v ktorej bude realizovaný nasledujúci nákup. Pod hodnotiacimi kritériami možno rozumieť atribúty, ako sú lokalita maloobchodnej predajne, sortiment tovarovej skladby, cenová úroveň, kvalita sortimentnej skladby, obchodný personál a ďalšie. Váha dôležitosti je v mysli spotrebiteľa prisudzovaná na základe osobných charakteristík a stratégie nákupu. Podstatnú váhu pri výbere predajne však zohráva postoj spotrebiteľa, ktorý môže byť dôležitejší, ako jednotlivé hodnotiace kritéria.

Postoj spotrebiteľa k predajni je dlhodobo budovaná osobná preferencia, ktorú možno ovplyvniť komunikačnou stratégiou, ale podstatný význam v nej zohráva opakovaná osobná

<sup>3</sup> FAŠIANG, T.: Komunikačné stratégie maloobchodu. Trnava: Fakulta masmediálnej komunikácie UCM v Trnave, 2012. s. 64. ISBN 978-80-8105-466-2

skúsenosť. To znamená, že spotrebiteľ v mieste nákupu vníma samotný proces nákupu a vstupujúce atribúty predajne. Atribúty predajne majú podobné charakteristiky, ako hodnotiace kritéria s vplyvom na ich hodnotový reťazec v mysli spotrebiteľa. Výberom predajne spotrebiteľ opúšťa fázu rozhodovania o výbere miesta nákupu a realizuje nákup v súlade s nákupnou stratégiou. Samotný proces nákupu teda ovplyvňujú atribúty predajne, ktoré majú vplyv na budovanie postojov, ako aj prehodnocovanie nákupnej stratégie na úrovni hierarchie tovarových skupín.

Atribúty predajne predstavujú dôležitý nástroj pôsobiaci na impulzívny nákup a na ovplyvňovanie rozhodovania spotrebiteľa pri nákupe tovarov v mieste nákupu. Ponákupné hodnotenie predstavuje záverečnú fázu nákupného rozhodovacieho procesu, ktoré je iniciované po zhodnotení procesu nákupu a spotrebou nakúpeného tovaru. Počas ponákupného rozhodovania, sa môžu objaviť pochybnosti o nákupnom výbere, ktoré súvisia so situáciou, keď bola vybraná jedna alternatíva, hoci odmietnuté alternatívy dosahujú rovnaké hodnotenie podľa hodnotiacich kritérií spotrebiteľa. Na základe ponákupného zhodnotenia je z pohľadu maloobchodnej predajne, ako aj spotrebiteľa, dôležitá prevažujúca spokojnosť s nákupom, ktorá vytvára vhodný predpoklad pre budovanie lojálneho vzťahu medzi zákazníkom a predajňou.

Je potrebné uviesť, že práve spokojnosť zákazníka je rozhodujúci faktor pri budovaní jeho postojov k maloobchodnej predajni, a teda kľúčom k realizácii opakovaných nákupov. Z uvedeného vyplýva, že spokojnosť zákazníka vplyva na redukcii evokovaného súboru nákupných alternatív a dochádza k automatickému uprednostneniu tej predajne, v ktorej spotrebiteľ rád nakupuje. Treba však spomenúť, že budovanie spokojnosti a lojality zákazníka, je dlhodobý a citlivý proces, ktorý môže narušiť aj vznik akejkoľvek negatívnej udalosti v nákupnom procese daného spotrebiteľa.

Z pohľadu budovania spokojnosti a lojality zákazníkov je vhodná orientácia na eko-eko inovácie, ktoré v sebe spájajú spoločenskú uvedomelosť orientovanú na oblasť ekológie a minimalizáciu nákladov, čo vytvára predpoklad pre úsporu zo strany spotrebiteľa.

### **3 EKO-EKO PRÍSTUP**

Tento prístup je pomerne častý pri modeloch transportu, resp. pri modeloch, ktoré riešia najkratšie cesty sa jedná najmä o legislatívu spojenú s ochranou ovzdušia a emisiami. Alebo pri modeloch, ktoré riešia materiálovú náročnosť, kedy je preferované riešenie využívajúce recykláciu materiálov a produktov.

Ekonomická časť zväčša spočíva v minimalizácii nákladov spojených s prejazdenou vzdialenosťou. Tato skutočnosť umožňuje zahrnúť i ekologickú časť, keďže produkcia emisii sa viaže na spotrebované palivo, ktoré možno približne určiť na základe uvedenej vzdialenosti.

Ekologický prístup je často považovaný za prístup, ktorý naopak zvyšuje náklady a teda nemá pozitívny vplyv na ekonomickú časť modelu. Z toho dôvodu na zavedenie práve ekologického prístupu do modelovania ekonomických procesov slúži istý spoločenský tlak na ekologické uvažovanie pri optimalizácii procesov. Uvedený spoločenský tlak je obsiahnutý v legislatíve, ktorá upravuje množstvo skutočností spojených s optimalizáciou a teda s využívaním EKO-EKO prístupu. Práve legislatíva Európskej únie (EÚ) je často spomínaná základný rámec pri tvorbe EKO-EKO modelov a preto predstavuje základ pre zavádzanie ekologických cieľov do ekonomicky orientovaných procesov.



### 3.1 Ekonomický prístup

Ekonomický prístup v EKO-EKO nie je možné vždy jednoznačne vymedziť len ako ekonomický, keďže napríklad minimalizácia vzdialenosti je tak ekonomický ako i ekologický cieľ. Väčšinou sa ako náklady uvádzajú práve jednotky vzdialenosti (najčastejšie kilometre) ocenené hodnotou pohonných hmôt, na základe ktorých je možné určiť náklady vychádzajú zo spotreby paliva.

Minimálna vzdialenosť je teda ekonomicky cieľ, lebo sa spája s nákladmi spojenými so spotrebovaným palivom, ale v princípe sa jedná aj o ekologický cieľ, keďže práve so spotrebovaným palivom sa spája tvorba emisii, nakoľko väčšia spotreba znamená viac emisii.

K ekonomickému prístupu prislúchajú i ohraničenia, ktoré môžu byť považované i za ekologické ako napr. snaha sa vyhnúť trasám v obci, kde je spotreba paliva vyššia. Ale môže sa jednáť i o čisto ekonomické ohraničenia ako napr. ohraničenie, ktoré zamedzuje prejazd spoplatneným úsekom trasy.

### 3.2 Ekologický prístup

Ako už bolo spomínané, základom ekologického prístupu je to iste ako v ekonomickom prístupe a to minimalizácia spotreby paliva. Podľa doterajších analýz obsahujú výfukové plyny piestových spaľovacích motorov takmer 160 jednotlivých zložiek, ale len približne 0,3 % predstavujú škodlivé emisie vo výfukových plynoch [3]. Tvorba výfukových plynov je priamo úmerná spotrebe a teda čím menšia spotreba, tým menej emisii v ovzduší.

Ekologický prístup nespočíva len v minimalizácii emisii. Napr. pre dokonalé spálenie 1 kg nafty sa spotrebuje 14,78 kg vzduchu (z toho 3,4 kg kyslíka) a vyprodukuje sa 3,15 CO<sub>2</sub> [3]. Minimalizácia produkcie CO<sub>2</sub> patrí k hlavným ekologickým cieľom pri modeloch transportu.

Ak sa jedná o modely transportu osôb, tak cieľom je znižovať podiel produkcie CO<sub>2</sub> na prepravovanú osobu. Na základe údajov z Európy (množstvo vykonaných jazd, počet najazdených kilometrov, rôzne typy paliva, priemerná využiteľnosť, počet osôb vo vozidle, rôzne typy motorov, vrátane hodnoty produkcie CO<sub>2</sub> z výrobného procesu sa vypočítalo množstvo produkovaných emisii na 271 g CO<sub>2</sub> na kilometer a jedného pasažiera. Toto číslo je oveľa vyššie ako hovorí údaj v technickom preukaze väčšiny automobilov (okolo 170 g) a oveľa vyššie ako udávajú plány v smerniciach Európskej komisie (130 g do roku 2015) [4].

Ekologický prístup v ohraničeniach úlohy môže byť spojený s výberom a druhom dopravných prostriedkov a ich tvorbou emisii ale aj s teritoriálnym obmedzením, kedy z ekologických dôvodov nie je vhodné plánovať transport daným územím.

## 4 ZÁVER

Jednou z možností ako byť v súčasnom konkurenčnom prostredí úspešný je zavádzanie ekologicko-ekonomických inovácií orientovaných na spotrebiteľa. Dané inovácie predstavujú jeden z najlepších nástrojov ako udržať a zrýchliť vývoj ekonomiky a zabezpečiť prosperitu podnikateľských subjektov na lokálnom, ale aj globálnom trhu. Ich znakom je poskytovanie novej pridanej hodnoty, ktorá výrazne ovplyvňuje požiadavky zákazníkov v procese spotreby. EKO-EKO inovácie v sebe spája znižovanie emisii a nákladov, čo je v súčasnosti veľmi dôležitá téma z pohľadu spoločensky zodpovedného podnikania aj samotného vnímania spotrebiteľom. Ide o prvky, ktoré majú vplyv na budovanie spokojnosti a lojality spotrebiteľa.

### **Použitá literatúra**

1. FAŠIANG, T.: Komunikačné stratégie maloobchodu. Trnava: Fakulta masmediálnej komunikácie UCM v Trnave, 2012. 117 s. ISBN 978-80-8105-466-2
2. RICHTEROVÁ, K a kol.: Spotrebiteľské správanie. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2007. 258 s. ISBN 978-80-225-2335-4

### **Kontaktné údaje**

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [pavel.gezik@euba.sk](mailto:pavel.gezik@euba.sk)

Ing. Tomáš Fašiang, PhD.

Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave, Fakulta masmediálnej komunikácie

Námestie Jozefa Herdu 2, 917 01 Trnava

email: [tomas.fasiang@ucm.sk](mailto:tomas.fasiang@ucm.sk)

# ANALÝZA MAJETKOVÝCH EFEKTOV PODĽA KEYNESA<sup>1</sup>

## THE ANALYSIS OF WEALTH EFFECTS BY KEYNES

*Marián Goga*

### **Abstrakt:**

Autor v príspevku analyzuje niektoré aspekty Keynesovho prístupu k monetárnej a fiskálnej politike v súvislosti s matematickým vyjadrením majetkových efektov indukovaných cenami, úrokom a množstvom peňazí v obeh.

**KLúčové slová:** *monetárna a fiskálna politika, majetkové efekty, cena, úrok, množstvo peňazí, dopyt a ponuka*

### **Abstract:**

The autor analyses some aspects of the approach of Keynes to monetary and fiscal policy in comparison with of wealth effects induced by prices, interest and by the amount of money in circulation.

**Keywords:** *monetary and fiscal policy, wealth effects, price, interest, amount of money, demand and supply*

**JEL Classification:** E12, E52, E63

### **Úvod**

Dôležitým konštitučným prvkom Keynesovej teórie je domnienka o nestabilnosti súkromného hospodárskeho sektora. Za určujúce veličiny pri cyklických výkyvoch dôchodkov obyvateľstva považuje Keynes zmeny, ktoré z času na čas vznikajú v očakávaných výnosoch z reálneho kapitálu. ([5], s. 313-332) Pri stabilizácii konjunktúrnych cyklov v "*General Theory*" nehrá peňažná politika podstatnú úlohu. Keynes poukazuje na to, že vo fázach recesie, v ktorých peňažná politika zohľadňuje nízku elasticitu úroku vzhľadom na dopyt po investíciách a vyššiu elasticitu úroku vzhľadom na dopyt po peniazoch, môžu byť dané impulzy pre ďalší rozmach ekonomiky. Recesiu možno podľa tejto analýzy prekonať len pomocou fiskálnych opatrení. Podľa Keynesovej teórie je samotná fiskálna politika schopná stabilizovať imanentné cyklické kolísania v trhovom hospodárskom systéme.

Samotný fakt, že v Keynesovej teórii môže byť dosiahnutá rovnováha pri nízkej zamestnanosti, je popri jednotlivých čiastkových hypotézach tiež rozhodujúcim aspektom pre špecifikovanie Keynesovej spotrebnej funkcie. V tejto spotrebnej funkcii vystupuje dôchodok ako exogénna premenná.

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0248/17 „Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie“.

# 1 MAJETKOVÝ EFEKT INDUKOVANÝ CENAMI

Keynesove závery, že trhový hospodársky systém, ktorý smeruje k rovnováhe pri nízkej zamestnanosti, môže byť prekonaný iba pomocou štátnej hospodárskej politiky, najmä formou fiskálnej politiky, narazili krátko po zverejnení "*General Theory*" na kritiku. Kritika smerovala najmä proti tomu, že Keynes vo funkcii úspor a vo funkcii spotreby predpokladal závislosť spotreby a úspor len od dôchodku. Iní ekonómovia poukazovali na to, že každé úsporové a spotrebné rozhodnutie hospodárskej jednotky závisí nielen od úrovne jej dôchodkov, ale aj od stavu (zásoby) jeho majetku. ([14], s. 131) Predpokladali pritom, že hospodárske jednotky zvyšujú svoj dopyt po tovaroch nielen pri vzraste svojich dôchodkov, ale aj pri vzraste reálnej hodnoty ich čistého majetku.

Ak transformujeme tieto myšlienky do matematického jazyka, potom v celom hospodárstve funkcia spotreby má tvar:

$$C = C(Y, M/P_C, F/P_C, P_K \cdot K/P_C), \text{ pričom } 0 < \partial C / \partial Y < 1 \quad (1)$$

$$\text{a } \frac{\partial C}{\partial (M/P_C)}, \frac{\partial C}{\partial (F/P_C)}, \frac{\partial C}{\partial (P_K \cdot K/P_C)} > 0.$$

Symbole v rovnici (1) znamenajú:

$C$  - reálny dopyt po spotrebných tovaroch,

$Y$  - reálny dôchodok (produkt),

$M$  - množstvo peňazí,

$F$  - čistý stav štátnych dlhov v súkromnom sektore,

$K$  - objem kapitálu,

$P_C$  - index spotrebiteľských cien,

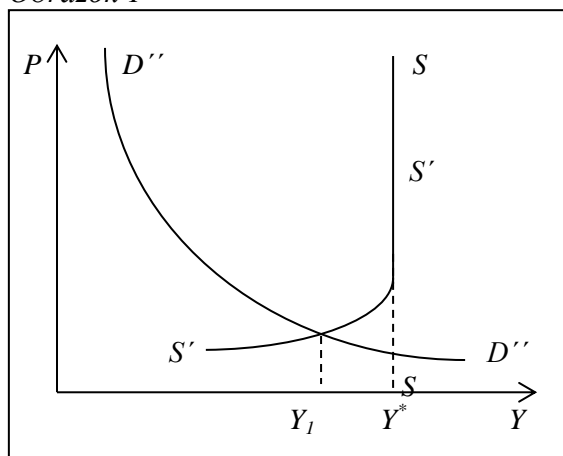
$P_K$  - index cien kapitálu.

Vzhľadom na dôchodok a majetkové premenné sa v rovnici (1) predpokladá, že každé zvýšenie ich reálnej hodnoty vedie k rozšíreniu dopytu po spotrebných tovaroch. Parciálne hodnoty funkcie spotreby vyjadrujú kladný sklon k úsporám. Premenné v spotrebnej funkcii predstavujú čisté makroekonomické veličiny. Ide pritom o veličiny vyjadrujúce stav (zásobu) finančného a reálneho majetku. Veličina  $M$  predstavuje evidované množstvo peňazí, ktoré tvorí záväzok centrálnej banky voči súkromnému sektoru. ([12], s. 79-102) V zúročiteľnom peňažnom majetku súkromného sektora sa odčleňuje časť, ktorá tvorí záväzky súkromného sektora voči banke. Táto časť peňažného majetku neprináša v spotrebnej funkcii čistý efekt. Premenná  $K$  vyjadruje disponibilný stav kapitálu a pôdy. Objem kapitálu sa chápe ako čistý majetok národného hospodárstva.

Vzťahy a súvislosti medzi premennými v spotrebnej funkcii, resp. úsporovej funkcii majú dôsledky na Keynesovu rovnováhu pri nízkej zamestnanosti. Ak klesá napríklad vo fáze recesie úroveň cien spotrebných tovarov, zvyšuje sa hodnota stavu majetku národného

hospodárstva. Zvyšovanie hodnoty stavu majetku, podmienené klesaním cien spotrebných tovarov, podnecuje hospodárske jednotky podľa tejto hypotézy na jednej strane zvyšovať spotrebné výdavky a na druhej strane znižovať tvorbu úspor. Hospodárske jednotky prispôbujú svoj tovarový dopyt stúpajúcej reálnej hodnote majetku. Takto sa chápe majetkový efekt indukovaný cenami. Tento efekt umožňuje posúvať rovnovážny bod pri nízkej zamestnanosti aj v prípade flexibilných nominálnych miezd, t. j. pri dokonale cenovo neelastickej agregátnej ponukovej krivke. Základným predpokladom však je, že agregátna dopytová funkcia  $D''D''$  je vo vzťahu k majetkovému efektu úplne cenovo elastická. Na obrázku 1 je to priesečník  $D''D''$ -krivky s cenovo neelastickou  $SS$ -krivkou na úrovni plnej zamestnanosti  $Y^*$ .

Obrázok 1



So zavedením pojmu "majetkový efekt indukovaný cenami" súvisia dva teoretické závery:

1. trhový hospodársky systém má pri nízkej zamestnanosti určitú voľnosť prechodu k rovnováhe pri plnej zamestnanosti;
2. peňažná politika hrá v oboch prípadoch rovnováhy dôležitú úlohu.

V tejto súvislosti vzniká vážna otázka, či majetkový efekt indukovaný cenami má v ekonomickej realite praktický význam. Ináč povedané, je otázne, či hospodárska politika môže majetkový efekt indukovaný cenami považovať za ekonomický stabilizátor. Sám A. Pigou je v tejto otázke značne skeptický. Na základe politického diania považuje za iluzórne, že demokraticky zvolená vláda dokáže dosiahnuť a udržať plnú zamestnanosť deflačnou politikou. ([13], s. 251) Podľa neho patrí majetkový efekt indukovaný cenami skôr do oblasti komparatívno-statickej analýzy a má iba teoretický význam.

Problémom pôsobenia majetkového efektu indukovaného cenami v dynamických procesoch sa zaoberá najmä D. Patinkin. ([10], s. 251) Poukazuje na rozhodujúcu úlohu cenových očakávaní v budúcom ekonomickom rozvoji v reálnej dynamickej analýze. Základným predpokladom je, že hospodárske jednotky predvídajú pokles cien tovarov. V prípade, že má nastať ďalší pokles cien, svoj dopyt presúvajú do budúcnosti. Tým sa agregátny dopyt namiesto zvyšovania znižuje, čo ešte zhoršuje situáciu v zamestnanosti. V čase, keď úroveň cien tovarov klesá, je pre hospodárske subjekty racionálne zvyšovať svoje úspory a ukladať

ich do majetkovej formy (napr. pevne zúročiteľné cenné papiere). Očakávaním budúceho poklesu cien tovarov sa podiel úspor bude takto zvyšovať a podiel spotreby klesať. Avšak zvýšenému podielu úspor nezodpovedá dopyt po investičných prostriedkoch zo strany investorov. Pri klesajúcich cenách tovarov nebudú investori ochotní dodatočne sa zadlžovať. Klesajúce ceny tovarov majú za následok zvýšenie reálneho úverového zadlženia, ktoré vedie zadlžených do zložitej situácie platobnej neschopnosti. Výsledkom sú konkurzy, bankroty a zvyšovanie všeobecnej neistoty. Deflačná špirála posúva ekonomický proces na nižšiu úroveň, bez dosiahnutia rovnováhy.

To, ako reaguje trhovú hospodársky systém na vzniknutý dopytový schodok, je rozpracované v mnohých teoretických prácach. Napríklad R. Clower poukázal na to, že fundamentálny rozdiel medzi klasickou teóriou a Keynesovou teóriou spočíva v odlišnej domnienke o rýchlosti prispôsobenia sa cien a množstva tovarov. ([2], s. 103-125) V modeli klasikov je prispôsobovanie založené na zmenách cien a miezd pri makroekonomických poruchách rovnováhy. Ak klesá napríklad agregátny dopyt, tento pokles je dôsledkom poklesu cien tovarov a nominálnych miezd. Vyrobené množstvá tovaru zostávajú naproti tomu nezmenené. Prispôsobovanie cien teda neovplyvňuje štruktúru a objem vyrobeného množstva tovarov. Zatiaľ čo u klasikov ceny rýchlo reagujú a množstvá tovarov sa nemenia, hospodárske subjekty u Keynesa reagujú na pokles dopytu najskôr redukciou svojej ponuky. ([6], kap. 2)

Uvedené závery ukazujú, že vplyv majetkového efektu indukovaného cenami v rozhodujúcej miere závisí od cenových očakávaní hospodárskych subjektov a vývoja relatívnych cien novo vyrobených spotrebných tovarov.

## 2 MAJETKOVÝ EFEKT INDUKOVANÝ ÚROKOM

Prvú systematickú analýzu majetkového efektu indukovaného úrokom podal v makroekonomickom modeli L. A. Metzler. ([7], s. 93-116) Metzler používa stav (zásobu) majetku súkromného sektoru explicitne ako argument vo funkcii úspor, resp. spotreby. Rozlišuje pritom medzi majetkom, ktorý tvorí stav reálneho kapitálu (akcie) a majetkom tvoreným peniazmi. Hodnota majetku akcií sa meria ako podiel dôchodku (produktu) k úrokovej miere. Tento vzťah ukazuje, že dôchodok nie je nič iné ako výnos z majetku. Zároveň však poukazuje na to, že zvýšenie úrokovej miery pôsobí opačne na hodnotu majetku. Ak sa uvažuje so stavom majetku v úsporovej, resp. spotrebnej funkcii, potom pokles úroku vedie k zmenšeniu sklonu k úsporám a k zvýšeniu sklonu k spotrebe. Takýmto spôsobom sa chápe majetkový efekt indukovaný úrokom.

Vychádzajúc z uvedeného má potom spotrebná funkcia takýto tvar:

$$C = C\left(\frac{M}{P_C}, \frac{y_k}{r_k}, \frac{y_a}{r_a}\right) \text{ a } \frac{\partial C}{\partial \left(\frac{M}{P_C}\right)} > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \left(\frac{y_k}{r_k}\right)} > 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \left(\frac{y_a}{r_a}\right)} > 0.$$

pričom:

$y_k$  - reálny kapitálový dôchodok,

$y_a$  - reálny pracovný dôchodok,

$r_k$  - úroková miera z kapitálového dôchodku,

$r_a$  - úroková miera z pracovného dôchodku.

Zmeny úrokovej miery v porovnaní so zmenami úrovne cien tovarov komplexnejšie pôsobia na správanie sa hospodárskych subjektov vzhľadom na spotrebu, resp. úspory. Úrok totiž predstavuje cenu, za ktorú sú hospodárske jednotky ochotné substituovať budúce tovary za súčasné tovary.

Existencia úroku takto vedie k záveru, že hospodárske subjekty berú do úvahy popri súčasnom dôchodku aj budúci dôchodok. Ak hodnota úroku predstavuje cenu budúceho toku dôchodkov vyjadreného v súčasnom dôchodku, potom každý pokles úrokovej miery zvyšuje hodnotu budúceho dôchodku. Inými slovami, súčasný dôchodok bude v porovnaní s budúcim dôchodkom relatívne "lacnejší". Pokles úrokovej miery preto podnecuje hospodárske subjekty, aby mali vyšší dopyt po súčasných tovaroch, ako po budúcich tovaroch. Úrokový pokles takto vedie pri ovplyvňovaní časových preferencií k vyššiemu dopytu po spotrebných tovaroch a zníženiu veľkosti úspor. Toto je popri majetkovom efekte indukovanom úrokom ďalší efekt, ktorým sa ovplyvňuje dopyt po spotrebných tovaroch, a tým aj výška úspor. Poznamenávame, že tento aspekt sa vo funkcii (2) nezohľadňuje.

Možnosti ovplyvňovať spotrebné alebo úsporové rozhodnutia hospodárskych subjektov pomocou zmeny úrokovej miery sú uvedené práve u Keynesa. ([5], s. 91-94) Avšak Keynes neprikladal vplyvu zmeny úroku na súčasné a budúce tovary, a tým aj na sklon k úsporám, resp. spotrebe veľký kvantitatívny význam. Naproti tomu, považoval za viac relevantný vplyv úrokovej zmeny na spotrebu pri zmene hodnoty majetku. Predpokladal však pritom, že zmena úroku nebude príliš veľká.

Z Keynesovej analýzy vyplýva, že zmeny úroku, pôsobiace na spotrebné výdavky, hrajú úlohu "automatických stabilizátorov" ekonomiky. Napríklad v súvislosti s klesaním cien tovarov pri nízkej zamestnanosti a pri zvyšovaní reálneho množstva peňazí nastáva pokles úrokovej miery, čo zvyšuje dopyt po investičných tovaroch. Keynes však považuje tento "úrokový efekt" za málo výrazný a navyše je v ekonomickej realite v rovnováhe pri nízkej zamestnanosti prekonaný.

### **3 MAJETKOVÝ EFEKT INDUKOVANÝ MNOŽSTVOM PEŇAZÍ**

V doterajšej analýze jednotlivých majetkových efektov sme brali do úvahy príslušnú reakciu trhového hospodárskeho systému pri konštantnom množstve peňazí. Otázka však znie, ako reaguje ekonomický systém na zväčšovanie množstva peňazí v obehu. Táto otázka je jedným zo základných problémov v mechanizme peňažnej politiky.

V mnohých teoretických prácach zaoberajúcich sa peňažnými problémami dominuje názor, že zvyšovanie množstva peňazí priamo pôsobí na reálne ekonomické veličiny ako sú investície, spotreba a zamestnanosť pri zmene relatívnych cien. ([1], s. 1-30) Východiskový bod teoretických argumentácií tvorí skutková podstata, že expanzia množstva peňazí centrálnou bankou predstavuje v súkromnom sektore rozšírenie najmä peňažných prostriedkov, v porovnaní s inými druhmi prostriedkov ako sú úvery, cenné papiere a reálny kapitál. Prvým impulzom k zväčšeniu množstva peňazí centrálnou bankou je rast dopytu po finančnom majetku prinášajúcom úroky vo forme pevne zúročiteľných cenných papierov. Cena týchto cenných papierov rastie. Vzhľadom na zvýšenie ceny pevne zúročiteľných cenných papierov budú kapitálové tovary a akcie, ktoré ich reprezentujú, relatívne lacnejšie. Teda, dopyt bude rásť vplyvom pružnosti ich ceny. Rast cien pri existujúcom množstve cenných papierov a reálneho kapitálu vedie pri konštantných cenách novo vyrobených tovarov k prírastkom hodnoty u majiteľov uvedeného majetku. Ak sa hospodárskym jednotkám zvýši reálna hodnota majetku expanziou množstva peňazí, potom sa zvýši ich dopyt po investičných a spotrebných tovaroch a službách. Takto sa chápe majetkový efekt indukovaný množstvom peňazí.

Rast ceny existujúceho množstva cenných papierov a reálneho kapitálu vyvoláva popri vyššie uvedenom majetkovom efekte aj ďalší efekt vzhľadom na dopyt po tovaroch, ktorý sa zvyčajne označuje ako substitučný efekt. ([1], s. 10) Substitučný efekt je vyvolaný preto, lebo novo vyrobené investičné a spotrebné tovary sa pri rastúcej cene existujúcich cenných papierov a kapitálových tovarov stávajú relatívne lacnejšími. Majetkový a substitučný efekt, ktorý je indukovaný zväčšovaním množstva peňazí centrálnou bankou stimuluje aktivity v reálnom ekonomickom živote svojim pôsobením na dopyt po tovaroch. Tieto efekty pôsobia priamo na zamestnanosť a cenovú úroveň. Nový rovnovážny stav nastáva vtedy, keď ceny tovarov opäť dosiahnu svoje zvyčajné relácie voči cenám cenných papierov a reálneho kapitálu. V tejto novej rovnováhe sa opäť dosiahne približne pôvodná dôchodková relácia medzi množstvom peňazí, úverovým rozsahom, cennými papiermi a reálnym kapitálom.

V novom rovnovážnom stave sa relatívne ceny a relácie medzi vyššie uvedenými dôchodkovými veličinami natoľko prispôbia, že z ďalšej jednorazovej expanzie množstva peňazí už nevyplýva nový impulz, a to do reálneho pôsobenia ekonomiky. Ak sa však plná zamestnanosť v novej rovnováhe na trhoch ešte nedosiahla, bude potrebný ďalší impulz expanziou množstva peňazí. Miera rastu množstva peňazí však musí byť pre reálny ekonomický proces zdôvodnená. Teda, hospodársko-politické odporúčanie potom v prípade nízkej zamestnanosti znie: zvýšiť mieru rastu peňažného množstva. Ak by sa vyššia miera rastu množstva peňazí na druhej strane udržovala dlhší čas, nevyplývali by z nej už žiadne podstatné kladné impulzy na pôsobenie v reálnej ekonomike. Dôsledkom takéhoto pôsobenia by bolo iba zvýšenie úrovne inflácie. Ak v niektorej fáze inflácie (stagflácia), spôsobenej chybami v monetárnych impulzoch dôjde k poklesu úrovne zamestnanosti, dá sa táto nízka zamestnanosť odstrániť pomocou peňažnej politiky iba väčšou expanziou množstva peňazí, t. j. vyššou úrovňou inflácie. Inými slovami, vplyvom monetárnych impulzov na reálne ekonomické veličiny sa majetkový efekt prejaví len vtedy, keď sa zvýšením miery rastu peňažného množstva vytvoria nové podnety na zmeny relatívnych cien.



## Záver

Na záver môžeme konštatovať, že vyššie analyzované ekonomické tézy majú svoju praktickú aplikovateľnosť v hospodárskej politike tej-ktorej krajiny. Ak sa napríklad v niektorej etape vývoja národnej ekonomiky za prioritu považuje rast investícií, čím sa rozšíri zásoba kapitálu a zvýši sa tempo rastu potenciálneho produktu, je potrebné prijať príslušné hospodársko-politické opatrenia. To znamená, že treba uskutočniť expanzívnu monetárnu politiku, ktorá zníži úrokové sadzby a zvýši investície. Vládne výdavky na tovary a služby by mali ostať na rovnakej úrovni, mali by sa zvýšiť dane a obmedziť transferové platby, aby sa znížil disponibilný dôchodok, a tým aj spotreba. Cieľom kombinácie monetárnej a fiskálnej hospodárskej politiky je stimulovať investície zvýšením verejných úspor. V reálnej ekonomike pri určovaní optimálneho vzťahu monetárnej a fiskálnej politiky teda treba riešiť dve zásadné otázky: aká má byť zodpovedajúca úroveň agregátneho dopytu a aká je najlepšia kombinácia monetárnej a fiskálnej politiky.

## Použitá literatúra

- [1] BRUNNER, K.: Eine Neuformulierung der Quantitätstheorie des Geldes. In: *Kredit und Kapital*, Vol. 3, No. 1, 1970, s. 1-30.
- [2] CLOWER, R.: The Keynesian Counter-Revolution: A Theoretical Appraisal. In: *The Theory of Interest Rates*, London: Mac Millan, 1965.
- [3] FELDERER, B. – HOMBURG, S.: *Makroekonomika a nová makroekonomika*. Bratislava: Elita, 1995.
- [4] HUSÁR, J.: *Makroekonomická analýza*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2007.
- [5] KEYNES, J. M.: *The General Theory of Employment, Interest and Money*. London: Cambridge, 1936.
- [6] LEIJONHUFVUD, A.: *On Keynesian Economics and the Economics of Keynes*. London: Oxford University Press, 1968.
- [7] METZLER, L. A.: Wealth, Saving and the Rate of Interest. In: *Journal of Political Economy*, Vol. 59, No. 2, 1951, s. 93-116.
- [8] MILL, J. S.: *Principles of Political Economy*. 5 th Edition, New York, 1961.
- [9] MONISSEN, H. G.: *Konsum und Vermögen. Analyse der Konsum-Vermögen-Relation im makroökonomischen Gesamtzusammenhang*, Göttingen, 1968.
- [10] PATINKIN, D.: Price Flexibility and Full Employment. In: *Readings in Monetary Theory*, Boston: Allen & Unwin, 1951, s. 260-271.
- [11] PATINKIN, D.: *Money, Interest and Prices*. New York: Harper and Row, 1965.
- [12] PESEK, B. P. – SAVING, T. R.: *Money, Wealth and Economic Theory*. New York, London: Mac Millan, 1967.

[13] PIGOU, A. C.: Economic Progress in a Stable Environment. In: *Economica*, Vol. 14, No. 55, 1947, s. 180-188.

[14] PIGOU, A. C.: *Employment and Equilibrium*. London: Mac Millan, 1949.

[15] SALIN, P.: *Makroekonómia*. Bratislava: Elita, 1993.

[16] SAMUELSON, P. A. – NORDHAUS, W. D.: *Ekonomía*. Bratislava: Elita, 2000.

**Kontaktné údaje:**

doc. Ing. Marián Goga, CSc.

Ekonomická univerzita, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska cesta 1

852 35 Bratislava 5

č. t.: (421 2) 67 295 824

e-mail: goga@euba.sk

# ŘEŠENÍ ČASOVĚ ZÁVISLÉ ÚLOHY OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍCH POMOCÍ OPTIMALIZACE MRAVENČÍ KOLONIÍ A LOKÁLNÍHO VYHLEDÁVÁNÍ

## SOLVING TIME-DEPENDENT TRAVELLING SALESMAN PROBLEM BY ANT COLONY OPTIMIZATION AND LOCAL SEARCH

*Vladimír Holý, Petra Tomanová*

### Abstrakt

Časově závislý problém obchodního cestujícího je rozšíření klasické úlohy obchodního cestujícího, ve které ocenění hran závisí na pořadí jejich navštívení. Toto rozšíření je ještě více výpočetně složitější než původní úloha, a proto je třeba využít heuristiku pro řešení blízké optimálnímu u rozsáhlejších úloh. Na tento problém aplikujeme algoritmus optimalizace mravenčí kolonií s modifikací založenou na lokálním vyhledávání. S využitím simulovaných dat ukážeme, že pro úlohy s větším počtem vrcholů najde představená heuristika relativně dobré řešení v rozumném čase v porovnání s horní hranicí vypočtenou celočíselným programováním ve stejném čase.

*Klíčová slova:* časově závislá úloha obchodního cestujícího, heuristiky, optimalizace mravenčí kolonií, lokální vyhledávání

### Abstract

Time-dependent travelling salesman problem is an extension of the classical travelling salesman problem in which the edge costs depend on the order in which the edges are visited. This extension is even more computationally complex than the original problem and therefore a heuristic must be used in order to get a solution close to the optimal one for larger scale problems. We apply the ant colony optimization algorithm with a modification based on local search for this problem. Using simulated data, we show that for problems with large number of vertices the proposed heuristic finds a relatively good solution compared to the upper bound computed by integer programming in the same time.

*Keywords:* time-dependent travelling salesman problem, heuristics, ant colony optimization, local search

## 1 ÚVOD

Úloha časově závislého obchodního cestujícího (anglicky Time-Dependent Traveling Salesman Problem – TDTSP) je zobecnění úlohy obchodního cestujícího (anglicky Travelling Salesman Problem – TSP), ve kterém je ocenění hrany závislé na pozici hrany v cestě (tedy na čase). Matematicky lze úlohu formulovat několika způsoby. Mezi první formulace patří články Miller et al. (1960) a Picard a Queyranne (1978). Obě formulace využívají  $n^2$  proměnných a  $n^2$  podmínek. Fox et al. (1980) formuluje úlohu pomocí  $n^3$  proměnných a  $n$  podmínek. Godinho et al. (2014) představuje další formulaci. Přehled a klasifikaci formulací lze nalézt v článku Gouveia a Voß (1995).

Úloha je NP-úplná a výpočetně daleko náročnější než klasický problém obchodního cestujícího. Pro malý počet uzlů je možné vypočítat exaktní řešení. Vander Wiel a Sahinidis

(1996) představil metodu řešení pomocí Benderova rozkladu, Bigras et al. (2008) řešil úlohu pomocí metody větvení a mezí a Abeledo et al. (2013) použil pro řešení metodu větvení, řezů a cen. Pro větší počet uzlů jsou ovšem exaktní metody příliš výpočetně náročné a je tedy nutné pro přibližné řešení použít heuristické metody. Malandraki a Dial (1996) využili heuristiku dynamického programování zobecňující metodu nejbližšího souseda, Bentner et al. (2001) a Schneider (2002) se zabývali technikou simulovaného žíhání a Verbeeck et al. (2014) použil optimalizaci mravenčí kolonií a lokální vyhledávání pro příbuzný orienteering problém.

Motivace pro časově závislé rozšíření problému obchodního cestujícího může být například v kolísání dopravy ve městě během dne. V různých hodinách se tak pro konkrétní ulici liší rychlost průjezdu a tedy i ocenění hrany. Podobně se např. ceny letenek liší pro různé dny. Úlohu časově závislého obchodního cestujícího lze aplikovat na mnoho dalších plánovacích problémů.

Struktura článku je následující. V sekci 2 formulujeme problém časově závislého obchodního cestujícího. Dále představíme heuristiku optimalizace mravenčí kolonií v sekci 3 a heuristiku lokálního vyhledávání v sekci 4. V sekci 5 následuje použití těchto heuristik na simulované data. Článek je zakončen stručnou diskuzí v sekci 6.

## 2 FORMULACE PROBLÉMU

Cílem TDTSP je nalézt v ohodnoceném úplném grafu s vrcholy  $1, \dots, n$  kružnici (cestu), která prochází všemi vrcholy a její cena je minimální. Ohodnocení  $C_{i,j,t}$  hrany mezi vrcholy  $i$  a  $j$  ovšem závisí nejen na hraně samotné, ale i na pořadí (čase)  $t$  průchodu touto hranou. V naší formulaci musí cesta vždy začínat a končit ve vrcholu 1. Problém TDTSP formulujeme jako minimalizaci funkce

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{i,j,t} C_{i,j,t}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{i,j,1} &= 1, \\ \sum_{i=1}^n x_{i,j,n} &= 1, \\ \sum_{i=1}^n x_{i,k,t} &= \sum_{j=1}^n x_{k,j,t+1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{i,j,t} &= 1, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

kde  $x_{i,j,t}$  je binární proměnná, která nabývá hodnoty 1, pokud je v čase  $t$  navštívena hrana mezi vrcholy  $i$  a  $j$ , a 0, pokud ne. První podmínka zaručuje, že v čase 1 vyjdeme z vrcholu 1, zatímco druhá podmínka zaručuje, že se v čase  $n$  do vrcholu 1 vrátíme. Třetí podmínka představuje časovou návaznost cesty, tedy že pokud v čase  $t$  vstoupíme do vrcholu  $k$ , v čase  $t+1$  z vrcholu  $k$  odejdeme. Čtvrtá podmínka říká, že každý vrchol můžeme opustit nejvýše jednou (ekvivalentně by šla zapsat podmínka, že do každého vrcholu můžeme vstoupit

nejvýše jednou). Třetí a čtvrtá podmínka dohromady zaručí nedělitelnost celého cyklu (tedy, že neexistuje více menších cyklů).

Úlohu lze formulovat i pro případ, kdy počáteční vrchol není určen. V případě klasického problému obchodního cestujícího je řešení stejné pro libovolný počáteční vrchol, v případě časově závislého problému obchodního cestujícího již ovšem na volbě počátečního vrcholu záleží.

### 3 HEURISTIKA OPTIMALIZACE MRAVENČÍ KOLONIÍ

Optimalizace mravenčí kolonií (anglicky Ant Colony Optimization – ACO) je heuristický algoritmus pro řešení kombinatorických problémů řadící se do kategorie inteligence hejna (anglicky Swarm Intelligence – SI). Dorigo a Gambardella (1997) představili tento algoritmus pro řešení klasického problému obchodního cestujícího. Metoda napodobuje chování mravenců hledajících potravu. Jedná se o iterativní algoritmus, kde se v každé z  $q$  iterací simuluje chování  $m$  agentů – mravenců. Na konci každé iterace odpovídá každému mravenci nějaká cesta v grafu.

Jedna iterace  $l$ ,  $l = 1, \dots, q$  pro konkrétního mravence  $a$ ,  $a = 1, \dots, m$  probíhá následovně. Do proměnných  $r_{l,a,t}$ ,  $t = 1, \dots, n + 1$  budeme postupně ukládat vrcholy cesty našeho mravence  $a$ . Ze zadání musí každá cesta začít v čase 1 ve vrcholu 1, platí tedy  $r_{l,a,1} = 1$ . Další kroky  $t = 2, \dots, n$  už budou probíhat pomocí simulací. V čase  $t$  se mravenec nachází ve vrcholu  $r_{l,a,t}$  a může zvolit cestu do vrcholů  $j$ ,  $j \neq r_{l,a,s}$ ,  $s < t$ . Pro každý možný vrchol  $j$  spočítáme tzv. atraktivitu cesty jako

$$A_{l,r_{l,a,t},j,t} = F_{l,r_{l,a,t},j,t}^{\alpha} C_{r_{l,a,t},j,t}^{-\beta}$$

kde  $F_{l,r_{l,a,t},j,t}$  je množství uložených feromonů na dané cestě z předchozích iterací, parametr  $\alpha \in (0, \infty)$  představuje preferenci uložených feromonů na hraně (čích mravence) a parametr  $\beta \in (0, \infty)$  představuje preferenci ocenění hrany (zrak mravence). Pravděpodobnost zvolení cesty  $j$  lze pak spočítat jako

$$P_{l,r_{l,a,t},j,t} = \frac{A_{l,r_{l,a,t},j,t}}{\sum_{k:k \neq r_{l,a,s}, s < t} A_{l,r_{l,a,t},k,t}}$$

Podle těchto pravděpodobností se mravenec náhodně přesune do vrcholu  $r_{l,a,t+1} = j$ . Na konci iterace se mravenec musí vrátit do počátečního vrcholu, platí tedy  $r_{l,a,n+1} = r_{l,a,1} = 1$  a můžeme spočítat celkovou délku jeho cesty jako

$$R_{l,a} = \sum_{t=1}^n C_{r_{l,a,t},r_{l,a,t+1},t}$$

Dále proběhne tzv. uložení feromonů. Pro každou cestu z vrcholu  $i$  do vrcholu  $j$  v čase  $t$  aktualizujeme hodnotu feromonů podle vztahu

$$F_{l+1,i,j,t} = \rho F_{l,i,j,t} + (1 - \rho) \sum_{a:r_{l,a,t}=i \wedge r_{l,a,t+1}=j} \frac{1}{m} \frac{1}{R_{l,a}}$$

kde parametr  $\rho \in (0,1)$  určuje setrvání feromonu z předchozí iterace.

Představený algoritmus využívá princip, ve kterém mravenci, kteří našli krátkou cestu, zanechávají silnější feromonovou stopu, podle které se řídí ostatní mravenci v dalších iteracích. Algoritmus se tedy snaží dobrá řešení stále vylepšovat. Náhoda v rozhodování

mravence má zabránit stagnaci řešení v lokálním extrému. V první iteraci algoritmu nejsou přítomny žádné feromony, mravenci se rozhodují jenom podle vzdálenosti dalšího vrcholu a jedná se tedy o modifikaci metody nejbližšího souseda s přidáním náhody.

Algoritmus lze vylepšit několika způsoby. V další sekci popíšeme modifikaci, ve které se na konci každé iterace nalezené cesty všech mravenců vylepší pomocí lokálního vyhledávání.

## 4 HEURISTIKA LOKÁLNÍHO VYHLEDÁVÁNÍ

Lokální vyhledávání (anglicky Local Search – LS) je obecná heuristika pro řešení optimalizačních úloh. Vychází vždy z nějakého daného řešení a z jeho okolí vybere to nejoptimálnější. Pro klasickou úlohu obchodního cestujícího se často používají algoritmy 2-opt a 3-opt, které spadají do třídy lokálního vyhledávání.

Pro časově závislou úlohu obchodního cestujícího použijeme jednoduchou variantu 2-opt algoritmu. Nechť máme zadanou cestu

$$1 = r_{l,a,1}, r_{l,a,2}, \dots, r_{l,a,n}, r_{l,a,n+1} = 1.$$

K této cestě definujeme její okolí, ve kterém se nachází celkem  $n - 2$  jiných cest. Pro  $s = 2, \dots, n - 1$  vždy prohodíme pořadí dvou sousedních vrcholů v původní cestě a tím dostaneme novou cestu

$$1 = r_{l,a,1}, \dots, r_{l,a,s-1}, r_{l,a,s+1}, r_{l,a,s}, r_{l,a,s+2}, \dots, r_{l,a,n+1} = 1.$$

Z těchto nových cest a z původní cesty pak vybereme tu s minimální délkou. Z důvodu velkého počtu cest generovaných optimalizací mravenčí kolonií jsme úmyslně zvolili lokální vyhledávání s poměrně malým okolím, které již tak náročný výpočet nijak dramaticky neprodlužuje.

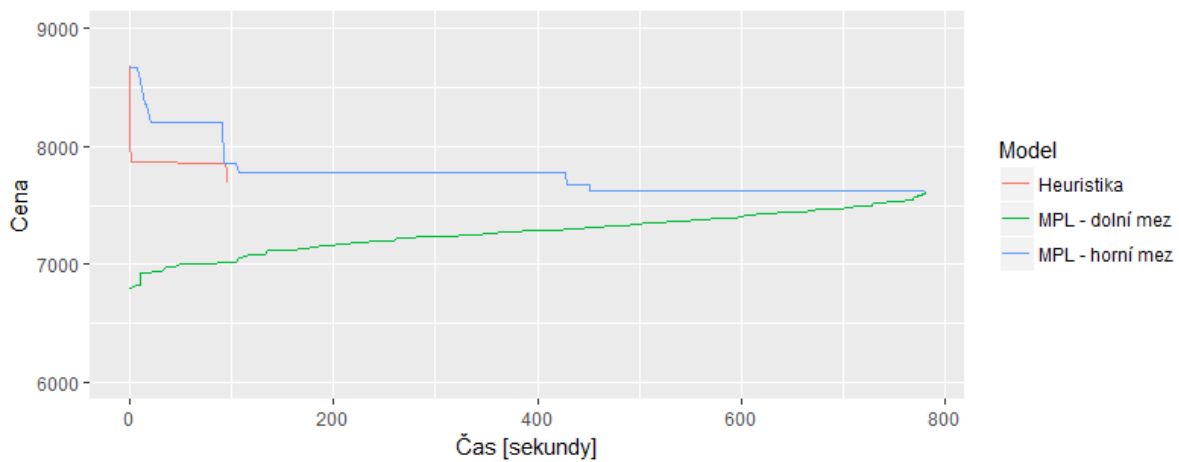
## 5 SIMULAČNÍ STUDIE

Pro ukázkou praktického využití navržené heuristiky je vybrán problém nalezení nejlepší cesty letadlem mezi  $n$  městy, přičemž je třeba každý den navštívit právě jedno město. Na cestu je k dispozici právě  $n$  dní a je třeba vylétnout první den z prvního města a poslední den se také do něj vrátit. Nejlepší cestu zde chápeme jako nejlevnější, přičemž cena je udána pouze cenou letenek mezi městy, které jsou předem známé, ale různé pro každý den. To znamená, že pro ceny letenek  $C_{i,j,t}$  mezi  $i$ -tým a  $j$ -tým městem obecně platí, že  $C_{i,j,1} \neq C_{i,j,2} \neq \dots \neq C_{i,j,n}$ . Dále uvažujeme, že přelet mezi městy netrvá žádnou dobu a mezi některými městy v některé dny nemusí existovat let. Cílem tedy je nalézt Hamiltonův cyklus v časově závislém grafu.

K tomuto účelu jsou vygenerovány ceny letenek mezi  $n = \{5, 10, 30, 60, 300\}$  městy a pro příslušný počet dní, přičemž mezi některými městy v daný den cesta nemusí existovat. Poté byl v prostředí MPL implementován model ze sekce 2 a řešen algoritmem z balíčku Cplex pro matematické optimalizace. V dalším kroku byl problém na stejných datech řešen pomocí heuristiky optimalizace mravenčí kolonií v kombinaci s heuristikou lokálního vyhledávání uvedených v sekci 3 a 4.

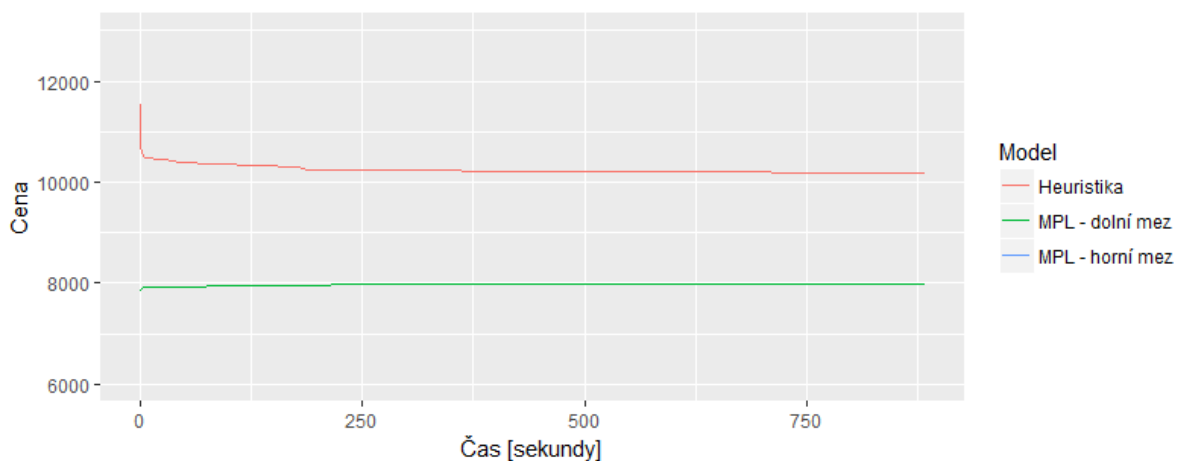
Heuristika dosáhla optimálního řešení rychleji již při malých instancích problému. Při 5 městech našla heuristika optimum za 0,008 sekund, zatímco Cplex našel optimum za 0,08 sekund. Pro 10 měst heuristika našla optimum za 0,009 sekund a Cplex za 0,36 sekund. Větší přínos použité heuristiky se ukazuje při vyšších počtech měst. Obrázek 1 ukazuje konvergenci hodnot účelové funkce v čase k optimální hodnotě pro 30 měst. Modrá a zelená řada představuje horní a dolní mez nalezenou algoritmem Cplex a červená čára značí

nalezenou hodnotu účelové funkce heuristikou, která je v čase 1,58 minuty optimální. Cplex našel optimální hodnotu až po 13 minutách.

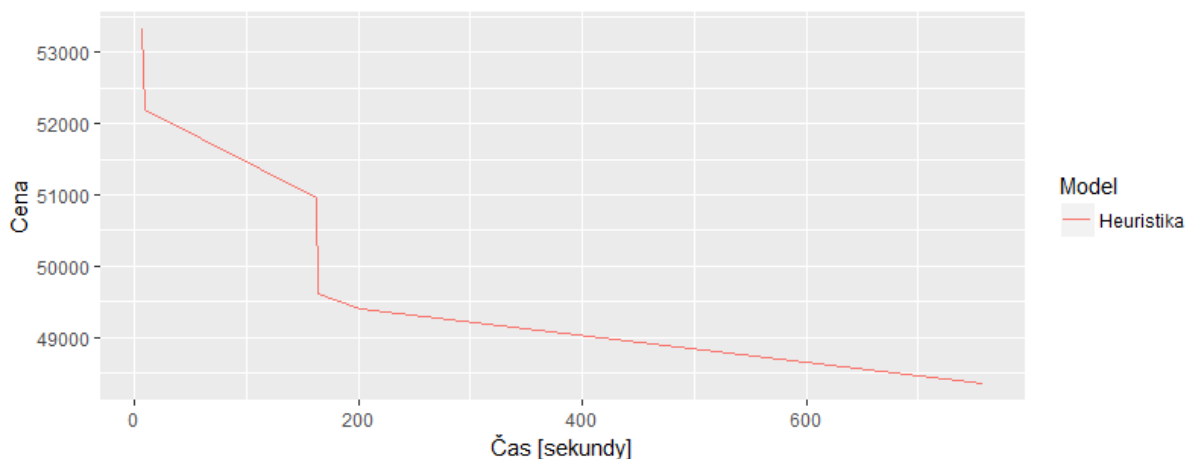


**Obrázek 1:** Vývoj hodnoty účelové funkce v čase pro 30 měst.

Výhoda použité heuristiky se projevuje se zvyšujícím se rozsahem problému. Pokud počet měst zdvojnásobíme, tedy  $n = 60$ , pak pozorujeme, že Cplex nenalezl žádné přípustné řešení do 15 minut. Obrázek 2 ukazuje, že hodnota účelové funkce nalezená heuristikou po 15 minutách je 10 166. Nejlepší známé řešení je přibližně o 1000 menší. Poslední zkoumanou instancí problému je 300 měst. Při této velikosti problému matice dat obsahuje 27 miliónů prvků. Při takto rozsáhlém problému nemá smysl zkoušet hledat jakékoliv řešení pomocí Cplexu. Avšak ukazuje se, že heuristika našla přípustné řešení už za 7.208 sekund. Obrázek 3 znázorňuje vývoj účelové funkce v rámci 15 minut.



**Obrázek 2:** Vývoj hodnoty účelové funkce v čase pro 60 měst.



**Obrázek 3:** Vývoj hodnoty účelové funkce v čase pro 300 měst.

## 6 ZÁVĚR

V této práci byl popsán algoritmus hledající optimální řešení pro časově závislý problém obchodního cestujícího a heuristika postavená na kombinaci optimalizace mravenčí kolonií a lokálního vyhledávání. Heuristika byla aplikována na simulovaných datech pro problém, kde je třeba nalézt nejlevnější cestu mezi  $n$  městy v  $n$  dnech, přičemž v každý den je třeba navštívit právě jedno město. Ukazuje se, že heuristika dokáže nalézt dobré řešení ve velmi krátkém čase i pro úlohu s velkým počtem měst. Pro úlohy s menším počtem vrcholů nalezne optimální řešení rychleji než model celočíselného programování.

### Použitá literatura

1. ABELEDO, H. et al. The Time Dependent Traveling Salesman Problem: Polyhedra and Algorithm. *Mathematical Programming Computation*. 2013, 5, 1, s. 27–55. ISSN 1867-2949.
2. BENTNER, J. et al. Optimization of the Time-Dependent Traveling Salesman Problem with Monte Carlo Methods. *Physical Review E*. 2001, 64, 3, s. 036701:1–036701:8. ISSN 1539-3755.
3. BIGRAS, L.-P., GAMACHE, M., SAVARD, G. The Time-Dependent Traveling Salesman Problem and Single Machine Scheduling Problems with Sequence Dependent Setup Times. *Discrete Optimization*. 2008, 5, 4, s. 685–699. ISSN 1572-5286.
4. DORIGO, M., GAMBARDILLA, L. M. Ant Colonies for the Travelling Salesman Problem. *Biosystems*. 1997, 43, 2, s. 73–81. ISSN 0303-2647.
5. FOX, K. R., GAVISH, B., GRAVES, S. C. An  $n$ -Constraint Formulation of the (Time-Dependent) Traveling Salesman Problem. *Operations Research*. 1980, 28, 4, s. 1018–1021. ISSN 0030-364X.
6. GODINHO, M. T., GOUVEIA, L., PESNEAU, P. Natural and Extended Formulations for the Time-Dependent Traveling Salesman Problem. *Discrete Applied Mathematics*. 2014, 164, 1, s. 138–153. ISSN 0166-218X.
7. GOUVEIA, L., VOß, S. A Classification of Formulations for the (Time-Dependent) Traveling Salesman Problem. *European Journal of Operational Research*. 1995, 83, 1, s. 69–82. ISSN 0377-2217.



8. MALANDRAKI, C., DIAL, R. B. A Restricted Dynamic Programming Heuristic Algorithm for the Time Dependent Traveling Salesman Problem. *European Journal of Operational Research*. 1996, 90, 1, s. 45–55. ISSN 0377-2217.
9. MILLER, C. E., TUCKER, A. W., ZEMLIN, R. A. Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *Journal of the ACM*. 1960, 7, 4, s. 326–329. ISSN 0004-5411.
10. PICARD, J.-C., QUEYRANNE, M. The Time-Dependent Traveling Salesman Problem and Its Application to the Tardiness Problem in One-Machine Scheduling. *Operations Research*. 1978, 26, 1, s. 86–110. ISSN 0030-364X.
11. SCHNEIDER, J. The Time-Dependent Traveling Salesman Problem. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2002, 314, 1-4, s. 151–155. ISSN 0378-4371.
12. VANDER WIEL, R. J., SAHINIDIS, N. V. An Exact Solution Approach for the Time-Dependent Traveling-Salesman Problem. *Naval Research Logistics*. 1996, 43, 6, s. 797–820. ISSN 0894-069X.
13. VERBEECK, C. et al. A Fast Solution Method for the Time-Dependent Orienteering Problem. *European Journal of Operational Research*. 2014, 236, 2, s. 419–432. ISSN 0377-2217.

### **Poděkování**

Rádi bychom poděkovali Jakubovi Vítovi za implementaci algoritmu optimalizace mravenčí kolonie a lokálního vyhledávání v jazyce Python.

### **Kontaktní údaje**

Ing. Tomáš Novák, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

email: [novak@euba.sk](mailto:novak@euba.sk)

# STOCHASTICKÝ MODEL ŠTRUKTÚRY FINANCOVANIA PODNIKU

## STOCHASTIC MODEL OF CORPORATE FINANCE

*Eduard Hozlár*

### **Abstrakt**

Príspevok je venovaný konštrukcii a analýze financovania výroby pri náhodnom dopyte po výrobkoch. Vychádza sa z popisu a vlastností financovania podnikových výrobných aktivít ako aj z popisu zdrojov financovania. Formuluje sa základný deterministický model a jeho rozšírenie o stochastický dopyt. Analyzuje sa dopyt s rovnomerným rozdelením pravdepodobností. Nakoniec je formulovaný dvojetapový stochastický model financovania výroby, ktorý zohľadňuje optimálnu kompenzáciu odchýlok vypočítaného výrobného programu od realizovaného dopytu.

*KLúčové slová: stochastický model, financovanie, optimalizácia*

### **Abstract**

The article describes the creation and analysis of production financing at random demand for products. It is based on the description and characteristics of the financing of the company's production activities as well as on the description financing of the sources. The basic deterministic model and its extension with stochastic demand are formulated. The demand with a uniform probability distribution is analyzed. Finally, a two-stage stochastic model of production financing is formulated. The model takes into account the optimal compensation of the deviations of the calculated production program from the realized demand.

*Keywords: stochastic model, financing, optimization*

## **1 MODELOVANIE FINANCOVANIA PODNIKU**

### **1.1 Základné predpoklady financovania podniku**

Optimalizácii finančnej a kapitálovej štruktúry podniku je venovaných viacero teoretických prístupov, nie sú však jednotné aj keď určitým zjednocovacím prvkom je vzťah k maximalizácii trhovej hodnoty podniku. Je však aj dôležitým faktorom pre ekonomiku podnikateľských subjektov. *Finančná štruktúra* vyjadruje štruktúru celkového kapitálu, ktorým sa financuje podnik. *Kapitálovú štruktúru* charakterizujeme ako štruktúru dlhodobého kapitálu, ktorý financuje majetok, dlhodobo viazaný v podniku. Finančnej štruktúre podniku sa venuje napr. Vlachynský 2009 (4).

Medzi najdôležitejšie faktory, ktoré ovplyvňujú finančnú a kapitálovú štruktúru patria predovšetkým náklady podnikateľského subjektu na získavanie a viazanie jednotlivých zložiek kapitálu a riziká spojené so získavaním cudzieho kapitálu. Ďalšími faktormi sú

zloženie majetku podnikateľského subjektu a parametre podnikateľského prostredia (napr. dane a riziko vzniku platobnej neschopnosti).

Triedenie finančných zdrojov sa z pohľadu teórie a praxe zaužívalo nasledovne: podľa účelu (kapitál, peniaze), podľa času (dlhodobé a krátkodobé), podľa typu zdroja (externé a interné) a podľa vlastníctva (vlastné a cudzie).

Kapitálové náklady formou nákladových úrokov vplývajú na výšku výsledku hospodárenia a zároveň nepriamo vplývajú na investičnú činnosť a celkovú trhovú hodnotu daného podniku. Ako kritérium hodnotenia podniku sa využívajú priemerné náklady kapitálu, ktoré sa vypočítajú ako vážený priemer nákladov na vlastný kapitál a nákladov na cudzí kapitál, pričom váhy tvorí podiel príslušných zdrojov na celkovom financovaní. Vhodnou kombináciou kapitálovej štruktúry sa javí tá, pri ktorej sa dosahuje minimum priemerných nákladov na získanie krátkodobého a viazanie dlhodobého kapitálu v podniku.

Náklady vlastného kapitálu tvorí podiel na zisku, ktorý vlastník očakáva a získava za vklad svojho kapitálu do podniku. Náklady cudzieho kapitálu tvorí hlavne úrok, ktorý treba platiť veriteľom. Konkrétna výška úrokovej miery jednotlivých úverových zdrojov sa líši podľa dĺžky obdobia, na ktoré je úver poskytnutý a podľa bonity dlžníckeho podniku. Vo všeobecnosti platí, že náklady vlastného kapitálu sú pre podnik vyššie ako náklady cudzieho kapitálu, pretože riziko vlastníka je vyššie ako riziko veriteľa.

Vlastný kapitál z externých zdrojov prichádza do podniku pri jeho založení ako pôvodný vklad vlastníka (vlastníkov). Získavanie cudzieho kapitálu (dlhodobého aj krátkodobého) podniku je spojené s dlhom, ktorý podnik musí v určitej lehote a výške splatiť.

Z hľadiska zachovania platobnej schopnosti podniku by mali byť v súvislosti so vzťahmi medzi majetkom a kapitálom podniku dodržiavané určité pravidlá. Štruktúra finančných zdrojov z hľadiska dĺžky ich doby splatnosti by mala zodpovedať štruktúre aktív z hľadiska dĺžky doby obratu jednotlivých položiek, ktoré sú týmito finančnými prostriedkami kryté. Neobežný majetok by mal byť krytý vlastným kapitálom a dlhodobým cudzím kapitálom, ale obežný majetok by mal byť financovaný krátkodobým cudzím kapitálom.

## **1.2 Špecifikácia matematického modelu financovania podniku**

V ďalšom budeme uvažovať výrobný podnik, ktorý sa správa podľa hore uvedených pravidiel a ktorý na svoju výrobnú činnosť využíva vlastné aj cudzie zdroje.

Uvažujme základný model plánovania výroby v tvare

Minimalizovať

$$N = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^n z_j x_j \geq Z \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$x_j = t_j(\omega), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

kde

$c_j$  – finančné náklady na výrobu  $j$ -teho výrobku

$z_j$  - ziskovosť  $j$ -teho výrobku

$a_{ij}$  – finančné náklady na  $i$ -ty zdroj, ktorý sa spotrebuje na výrobu jednej jednotky  $j$ -teho výrobku

$b_i$  –plánované množstvo financií potrebných na nákup  $i$ -teho zdroja (materiál, pracovná sila,...)

$x_j$  – množstvo výroby  $j$ -teho výrobku

$t_j(\omega)$  – náhodný dopyt  $j$ -teho výrobku pri realizácii náhody  $\omega$

$N$  - celkové náklady na výrobu

$Z$  – požadovaný zisk

Z uvedeného vyplýva, že

$$N = \sum_{i=1}^m b_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (6)$$

udáva celkovú potrebu finančných zdrojov. Je zrejmé, že k naplneniu objednávok podľa realizovaného dopytu by bolo treba finančné zdroje vo výške

$$f(t_1(\omega), t_2(\omega), \dots, t_n(\omega)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j(\omega) = \sum_{i=1}^m b_i(\omega)$$

Vzhľadom k tomu, že finančné zdroje treba mať k dispozícii pred realizáciou výrobného programu a nie až po realizácii dopytu, budeme sa orientovať na potrebu finančných zdrojov vyplývajúcu zo stanoveného výrobného programu, ktorý zohľadňuje aj indukované implicitné ohraničenia.

Nech náhodný dopyt po rôznych výrobkoch je nezávislý. Potom v prípade znalosti pravdepodobnostného rozdelenia môžeme dopytové ohraničenia formulovať buď štatisticky alebo pravdepodobnostne.

V ďalšom budeme predpokladať, že dopyt  $t_j(\omega)$  má rovnomerné rozdelenie v intervale  $\langle d_j, h_j \rangle$ . Potom odbytové ohraničenie, v prípade požadovania jeho splnenia v priemere, by bolo deterministické

$$x_j = 1/2 (d_j + h_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

V prípade pravdepodobnostného ohraničenia distribučná funkcia pre  $t_j(\omega)$  má tvar

$$\begin{aligned} F_j(y) &= 0 \text{ pre } y \leq d_j \\ F_j(y) &= \frac{y - d_j}{h_j - d_j} \text{ pre } d_j \leq y \leq h_j \\ F_j(y) &= 1 \text{ pre } y \geq h_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Ohraničenie

$$P(x_j \geq t_j(\omega)) \geq \alpha_j$$

možno transformovať na deterministický ekvivalent

$$x_j \geq d_j + \alpha_j(h_j - d_j) \quad (9)$$

Riešenie deterministických úloh (1), (2) až (4), v ktorých sa ohraničenie (4) zamení ohraničením (7) alebo (9) vyvoláva rôzne nároky na financovanie výroby (6).

Budeme predpokladať, že podnik má dostatok interných finančných zdrojov na pokrytie výroby pri dopyte na dolnej hranici (nenulovej) pre každý výrobok. To znamená, že pri zadanej úrovni zisku  $Z$  je optimálna hodnota nákladov vo výške

$$N = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j$$

## 2 STOCHASTICKÝ MODEL FINANCOVANIA PODNIKU

### 2.1 Modelovanie financovania výroby

Na financovanie výroby podnik môže použiť voľné interné zdroje, krátkodobé bankové úvery, prípadne úvery faktoringových spoločností ako aj nezaplatené záväzky. Každý z uvedených spôsobov financovania má svoje náklady a vyžaduje aj určité zábezpeky.

Budeme predpokladať, že podnik má vo všeobecnosti k dispozícii  $k$  možností pre financovanie a nech  $L_i$  je limit financovania možnosťou  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ . Označme  $n_i$  celkovú sadzbu (úrokovú sadzbu) pre financovanie možnosťou  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$  a nech

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k.$$

Nech  $f_i$  označuje skutočne čerpané množstvo  $i$ -teho zdroja financovania. Potom finančné náklady znižujúce zisk pod požadovanú úroveň  $Z$  sú

$$\sum_{i=1}^k n_i f_i \quad (10)$$

*Poznámka:* V praxi je obvyčajne k dispozícii najmenej finančných zdrojov s najnižšou úrokovou sadzbou.

Okrem toho, ziskovosť výrobného programu znižujú aj náklady (penále, resp. iné náklady, napr. skladovania) pri nedodržaní požadovaných objemov dodávok, ktoré vzniknú pri realizácii dopytu  $t_j(\omega)$ . Penalizačná funkcia  $Q$  súvisiaca s odchýlkami skutočnej dodávky od požadovaného objemu má tiež náhodný charakter a má tvar

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{t}(\omega)) = \sum_{d_j(\omega) - x_j \geq 0} q_j^+(t_j(\omega) - x_j) - \sum_{d_j(\omega) - x_j \leq 0} q_j^-(t_j(\omega) - x_j) \quad (11)$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{t}(\omega) = (t_1(\omega), t_2(\omega), \dots, t_n(\omega))$$

$q_j^+$  - je penále za stratu, ktorá vznikne pri väčšom dopyte ako je ponuka  $x_j$

$q_j^-$  - je penále za stratu, ktorá vznikne pri menšom dopyte ako je ponuka  $x_j$ .

Úlohou nájsť vektor  $\mathbf{x}$ , pri ktorom sa dosahuje minimum priemerných penalizačných nákladov. To sú vlastne indukované ohraničenia pre výber riešenia  $\mathbf{x}$ .

## 2.2 Dvojetapový stochastický model financovania výroby

V uvedenom postupe modelovania sme ukázali, že riešením deterministickej úlohy (1) až (4), keď ignorujeme náhodný dopyt, dostaneme taký výrobný program, ktorý zabezpečuje požadované hodnoty zisku pri minimálnych nákladoch bez ohľadu ich finančného krytia.

Následne riešime otázku finančného krytia takéhoto predbežného plánu výroby. Prípadné náklady financovania znižujú vytvorený zisk.

Ďalej skúmame, či plánované množstvá výroby pokryjú realizovaný dopyt, ktorého konkrétne hodnoty sa dozvedáme až po realizovaní náhodných vplyvov. Odchýlky skutočného dopytu po výrobkoch majú za následok dodatočné náklady na ich kompenzáciu. Tieto dodatočné náklady opäť znižujú vytvorený zisk. Je zrejmé, že táto časť dodatočných nákladov môže byť čiastočne eliminovaná zapracovaním informácií o náhodnom dopyte do deterministickeho modelu.

Keď poznáme pravdepodobnostné rozdelenie dopytu, môžeme vytvárať špeciálne pravdepodobnostné ohraničenia (napr. môžeme požadovať, aby boli splnené v priemere alebo s vysokou pravdepodobnosťou), ktoré možno niekedy transformovať na deterministicke ekvivalent.

Dvojetapová formulácia spočíva v tom, že v druhej etape nachádzame taký spôsob kompenzácie vzniknutých odchýlok v dopyte, ktoré vedú najmenším kompenzačným nákladom. Je evidentné, že ak by bol predbežný výrobný program v prvej etape určený iný, boli by aj odchýlky v dopyte iné, a teda aj náklady na ich kompenzáciu by boli iné. To

znamená, že úloha druhej etapy vlastne implicitne formuluje požiadavky na hľadanie optimálneho výrobného programu už v prvej etape.

Úlohou je nájsť taký predbežný výrobný program (pred realizáciou dopytu), ktorý zabezpečí za daných podmienok a znalostiach o dopyte minimum celkových nákladov za obe etapy, pričom náklady druhej etapy budeme uvažovať priemerné.

V literatúre je preskúmaných množstvo variantov dvoj etapových úloh stochastického programovania. Pre prípad, ktorý skúmame aj v tomto príspevku, ide o rovnomerné rozdelenie nezávislých zložiek vektora pravých strán. D. B. Judin [1] pre tento prípad ukázal spôsob konštrukcie deterministického modelu a dokázal, že deterministický ekvivalent takejto dvoj etapovej úlohy stochastického programovania je úloha kvadratického programovania.

V našom prípade je úlohou vypočítať vektor množstiev výroby  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a vektor financovania z  $k$  zdrojov  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$  tak, aby .....nadobúda tvar

*minimalizovať*

$$N = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^k n_i f_i + \min E[Q(\mathbf{x}, \mathbf{t}(\omega))]$$

a podmienok

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n z_j x_j - \sum_{i=1}^k n_i f_i &\geq Z \\ 0 \leq f_i &\leq L_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

kde symbol  $E$  je operátor strednej hodnoty a  $Q(\mathbf{x}, \mathbf{t}(\omega))$  je určené vzťahom (11).

Nech  $\mathbf{x}^*$  je optimálny výrobný program a nech  $\mathbf{f}^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*)$  udáva optimálne hodnoty využitia finančných zdrojov. Hodnota

$$F = \sum_{i=1}^k f_i^*$$

udáva potrebu finančných zdrojov na realizáciu optimálneho výrobného programu. Tieto zdroje sa distribuuujú na jednotlivé výrobné zdroje tak, aby

$$\sum_{i=1}^m b_i = F$$

a aby

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Tento príspevok vznikol v rámci riešenia grantu VEGA1/0340/16 Modelovanie efektívnosti financovania a kooperácie sektorov a regiónov slovenskej ekonomiky. a projektu APVV-14-

0020 Modelovanie Pareto optimálnych interakcií finančného a podnikového sektora v adaptačných procesoch.

#### **Použitá literatúra**

1. JUDIN, D.B. 1981: Matematické meódy riadenia pri neúplnej informácii, Alfa, Bratislava
2. Dupačová, J., Hurt, J. and Štěpán, J. 2002: Stochastic Modeling in Economics and Finance, Part II. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.
3. HORNIAČEK, M., 2008: Negotiation, preferences over agreements, and the core. International Journal of Game Theory, roč. 37, č. 2, s. 235-249. ISSN 0020-7276..
4. VLACHYNSKÝ, K. a kol. 2009: Podnikové financie. 1.vyd. Bratislava, EKONOMIA.
5. HOZLÁR, E., 2016 : Faktoring ako alternatívny zdroj financovania prevádzky podniku
6. MLYNAROVIČ, V., 1998: Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania, Ekonóm, 1998, Bratislava

#### **Kontaktné údaje**

doc. RNDr. Eduard Hozlár, CSc.

Univerzita Komenského v Bratislave, FSEV, Ústav ekonómie

Mlynské luhy 4, 82105 Bratislava

Tel: (421 2) 2066862

email: [hozlar@fses.uniba.sk](mailto:hozlar@fses.uniba.sk)



# DISPARITY V REGIÓNOCH KRAJÍN V4: BETA A SIGMA KONVERGENCIA<sup>1</sup>

## DISPARITIES IN REGIONS OF V4 COUNTRIES: BETA AND SIGMA CONVERGENCE

*Michaela Chocholatá*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá problematikou existencie regionálnych disparít v krajinách V4 (Česká republika, Maďarsko, Poľsko, Slovenská republika) na báze ekonomického indikátora HDP na obyvateľa. Empirická analýza je realizovaná pre 114 NUTS 3 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics) regiónov krajín V4 pre obdobie 2000-2013 s využitím softvérov GeoDa a MS Excel. Výsledky nevedli k potvrdeniu platnosti beta ani sigma konvergenzie.

*Kľúčové slová: disparity, región, konvergencia*

### Abstract

This paper deals with the existence of regional disparities in V4 countries (Czech Republic, Hungary, Poland, Slovak Republic) based on economic indicator GDP per capita. Empirical analysis is done for 114 NUTS 3 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics) regions of V4 countries for the period 2000-2013 with the use of GeoDa software and MS Excel. The results do not confirm the validity of the beta and sigma convergence concepts.

*Keywords: disparity, region, convergence*

## 1 ÚVOD A PREHLAD LITERATÚRY

Analýza regionálnych disparít, ako aj navrhnutie opatrení na ich zmenšenie, prípadne úplné odstránenie, sú v súčasnosti veľkou výzvou tak na medzinárodnej, ako aj na národnej úrovni. Regionálna politika Európskej únie (EÚ) vychádzajúca zo stratégie Európa 2020 (Európska komisia, 2010) zdôrazňuje postupnú elimináciu regionálnych disparít najmä v oblastiach ekonomického rastu, vzdelávania, výskumu a inovácií, zamestnanosti, sociálneho začlenenia a znižovania chudoby. Podobne, regionálne politiky jednotlivých členských krajín EÚ venujú významnú pozornosť podpore ekonomicky menej rozvinutých regiónov vlastnej krajiny s výhľadom dosiahnuť ekonomickú, sociálnu a kultúrnu úroveň porovnateľnú s vyspelými regiónmi EÚ.

V literatúre často používanými prístupmi na analýzu disparít sú koncepcie konvergenzie – beta konvergencia a sigma konvergencia (Barro a Sala-i-Martin, 2004; Hančlová a kol., 2010). Kým koncepcia beta konvergenzie vychádza z negatívneho vzťahu medzi úrovňou počiatočného HDP a mierou rastu HDP počas analyzovaného obdobia, t.j. z predpokladu, že chudobnejšie regióny budú rásť rýchlejšie ako bohaté regióny a v dlhodobom horizonte „dobechnú“ úroveň bohatých regiónov; koncepcia sigma konvergenzie vychádza z klesajúcej variability HDP medzi regiónmi, t.j. z predpokladu, že štandardné odchýlky logaritmov HDP

---

<sup>1</sup> Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0248/17 „Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie“.

medzi regiónmi majú v čase klesajúci charakter, čo indikuje znižovanie rozdielov v úrovni HDP (Barro a Sala-i-Martin, 2004).

Vzhľadom na podobnosť historického vývoja krajín V4 (Česká republika, Maďarsko, Poľsko a Slovenská republika) je zaujímavé analyzovať prípadné regionálne disparity týkajúce sa ekonomického rastu v regiónoch týchto krajín. Problematike konvergenencie v 27 krajinách Európy v období 1995-1999 (indikátor: HNP na obyvateľa) s osobitným dôrazom na postkomunistické krajiny sa venuje Sojková (2001). Výsledky jej analýz potvrdzujú platnosť beta i sigma konvergenencie súhrnne za všetky krajiny, autorka však poukazuje na skutočnosť, že v prípade postkomunistických krajín výsledky nie sú jednoznačné. Analýze regionálnych disparít aj s ohľadom na krajiny V4 sa venujú vo svojej publikácii Kutscherauer a kol. (2010), ktorí uvádzajú, že kým v EU 27 ako celku prišlo v období 2001-2006 k poklesu hodnoty indikátora rozptylu regionálneho HDP na obyvateľa, a teda k potvrdeniu sigma konvergenencie, v krajinách V4 prišlo naopak k nárastu regionálnych disparít. Platnosť beta konvergenencie v období 2000-2011 v NUTS 2 (Nomenclature of Units for Territorial Statistics) regiónoch EÚ s osobitným dôrazom na regióny postkomunistických krajín skúmali Chocholatá a Furková (2016b) s využitím prístupov priestorovej analýzy dát a priestorovej ekonometrie. Problematike priestorovej analýzy dát s ohľadom na regióny EÚ sa venuje Furková (2016). Spomedzi ďalších štúdií venovaných problematike regionálnej konvergenencie možno spomenúť napr. Paas a kol. (2007), Baumont a kol. (2002), Szomolányi a kol. (2011), Chocholatá a Furková (2016a).

Predmetom príspevku je preskúmanie platnosti koncepcie beta a sigma konvergenencie pre 114 NUTS 3 regiónov krajín V4 v období 2000-2013 na báze vývoja ekonomického indikátora HDP na obyvateľa (vyjadreného v bežných cenách v štandarde parity kúpnej sily – PPS). Analýza vychádza z toho, že regióny v analyzovanej skupine krajín možno v rámci EÚ istým spôsobom považovať za „klub“ vzhľadom na podobnosť štrukturálnych charakteristík i vývoja analyzovaného ekonomického indikátora na začiatku analyzovaného obdobia, t.j. v roku 2000 (viac o klubovej konvergencii pozri napr. Furková a Chocholatá, 2016). Po úvode a prehľade literatúry nasleduje stručná metodická charakteristika koncepcie beta a sigma konvergenencie, ďalšia časť príspevku je venovaná použitým dátam a výsledkom analýz, príspevok uzatvára záver.

## 2 KONCEPCIA BETA A SIGMA KONVERGENCIE

Analýzu beta konvergenencie pre  $n$  regiónov možno realizovať pomocou lineárneho regresného modelu v tvare (Barro a Sala-i-Martin, 2004):

$$\bar{g}_i = \alpha + \beta \ln(HDP_{i,0}) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim i.i.d(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (1)$$

kde  $\bar{g}_i = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{HDP_{i,T}}{HDP_{i,0}}\right)$  označuje priemerný ročný rast HDP na osobu v  $i$ -tom regióne

v období  $(0, T)$ , symboly  $\alpha$  a  $\beta$  označujú neznáme parametre a  $\varepsilon_i$  náhodnú zložku. Pre potvrdenie hypotézy beta konvergenencie musí byť odhadnutý parameter  $\beta$  štatisticky významný so záporným znamienkom.

Sigma konvergenca býva najčastejšie analyzovaná graficky na základe zobrazenia priebehu vývoja napr. štandardných odchýlok logaritmov HDP medzi regiónmi počas analyzovaného obdobia. Na prijatie hypotézy o sigma konvergencii je potrebné potvrdenie klesajúceho

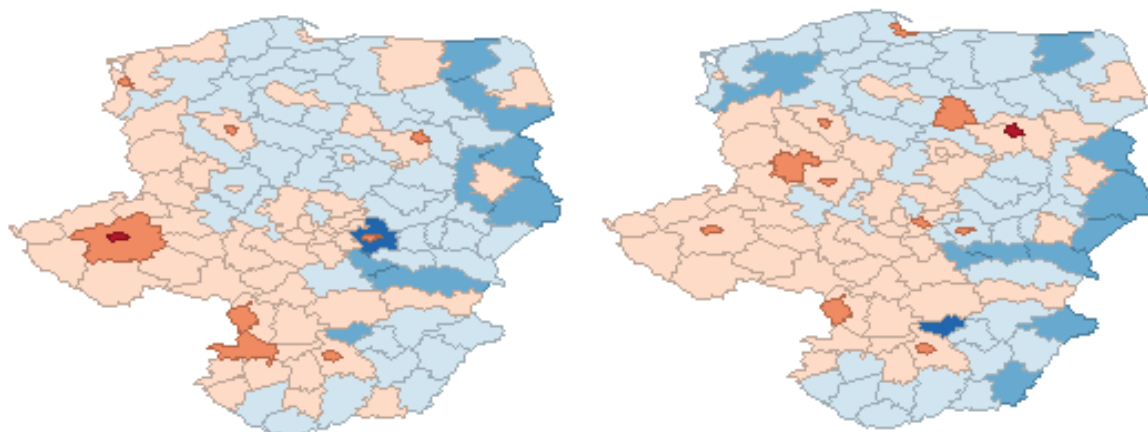
charakteru týchto štandardných odchýlok. Matematicky možno vzťah pre výpočet výberových štandardných odchýlok logaritmov HDP zapísať v nasledujúcom tvare (Sojková, 2001):

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\ln(HDP_{i,t}) - \ln(HDP_t))^2}{n-1}} \quad (2)$$

kde  $\ln(HDP_{i,t})$  označuje úroveň HDP na osobu (v prirodzených logaritmoch) v  $i$ -tom regióne v čase  $t$ ,  $\ln(HDP_t)$  priemernú úroveň HDP na osobu (v prirodzených logaritmoch) v čase  $t$  za všetky analyzované regióny a  $n$  vyjadruje počet analyzovaných regiónov.

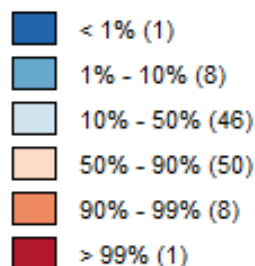
### 3 DÁTA A VÝSLEDKY ANALÝZY

Empirická časť príspevku využíva dáta za 114 NUTS 3 regiónov krajín V4 (a to 14 českých regiónov, 20 maďarských, 72 poľských a 8 slovenských regiónov), ktoré boli získané z regionálnej databázy REGIO z Eurostatu (<http://ec.europa.eu/eurostat/>). Predmetom analýzy je vývoj ekonomického indikátora – HDP na obyvateľa (vyjadreného v bežných cenách v štandarde parity kúpnej sily – PPS) za obdobie 2000-2013. Na základe hodnôt tohto ukazovateľa bol vypočítaný priemerný ročný rast HDP vychádzajúci z logaritmickej definície rastu uvedenej v časti 2. Štandardné odchýlky na analýzu sigma konvergenencie boli vypočítané pomocou vzťahu (2). Analýzy boli zrealizované s pomocou voľne prístupného softvéru GeoDa a MS Excelu. Zo súboru .shp obsahujúceho regióny Európy (<http://ec.europa.eu/eurostat/web/gisco/geodata/reference-data/administrative-units-statistical-units>) bol vytvorený v softvéri GeoDa súbor obsahujúci 114 NUTS 3 regiónov krajín V4. Grafické znázornenie hodnôt analyzovaného indikátora HDP na obyvateľa za roky 2000 a 2013 s využitím percentilových máp sú na obrázku 1(a) a (b), z ktorého sú zjavné značné disproporcie medzi jednotlivými regiónmi, a to tak v rámci jednotlivých krajín ako aj medzi

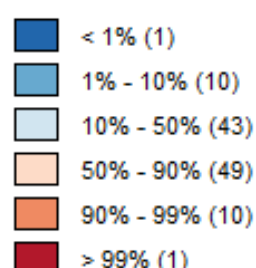


krajinami.

(a) 2000

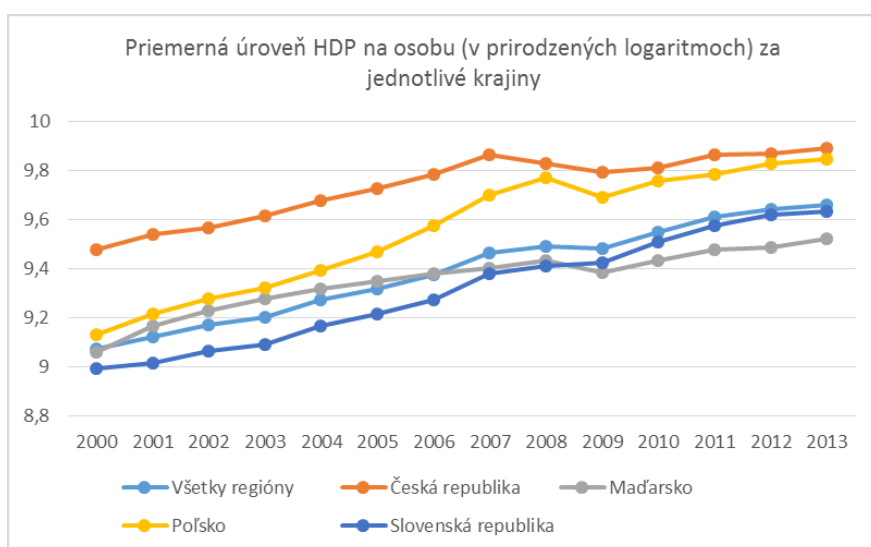


(b) 2013



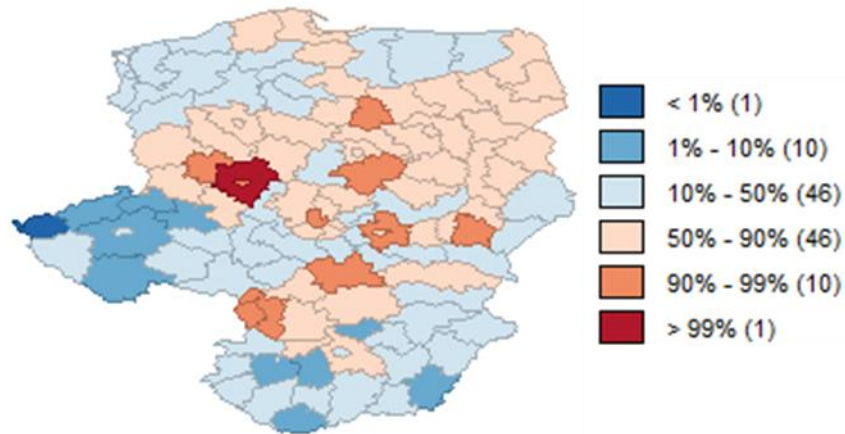
Obrázok 1 Percentilové mapy HDP na obyvateľa za roky 2000 a 2013

Obrázok 2 obsahuje vývoj priemerných hodnôt HDP na obyvateľa (v prirodzených logaritmoch) za všetkých 114 analyzovaných NUTS 3 regiónov, ako aj priemerné hodnoty za jednotlivé krajiny. Na základe obrázkov 1 a 2 je zrejmé, že najvyššie hodnoty HDP na obyvateľa boli dosahované pre regióny v Českej republike, vychádzajúc z priemerných hodnôt za nimi nasledovali regióny Poľska. Nižšie priemerné hodnoty boli dosiahnuté v maďarských a slovenských regiónoch. Vychádzajúc z obrázka 2, možno pozorovať zmenu vo vývoji priemerných hodnôt HDP na obyvateľa v maďarských a slovenských regiónoch. Kým v predkrízovom období mali slovenské regióny v priemere najnižšie hodnoty HDP na obyvateľa, v pokrízovom období sa situácia mení a priemerná hodnota HDP na obyvateľa v slovenských regiónoch dosahovala vyššie úrovne v porovnaní s maďarskými regiónmi.



Obrázok 2 Priemerná úroveň HDP na obyvateľa (v prirodzených logaritmoch)

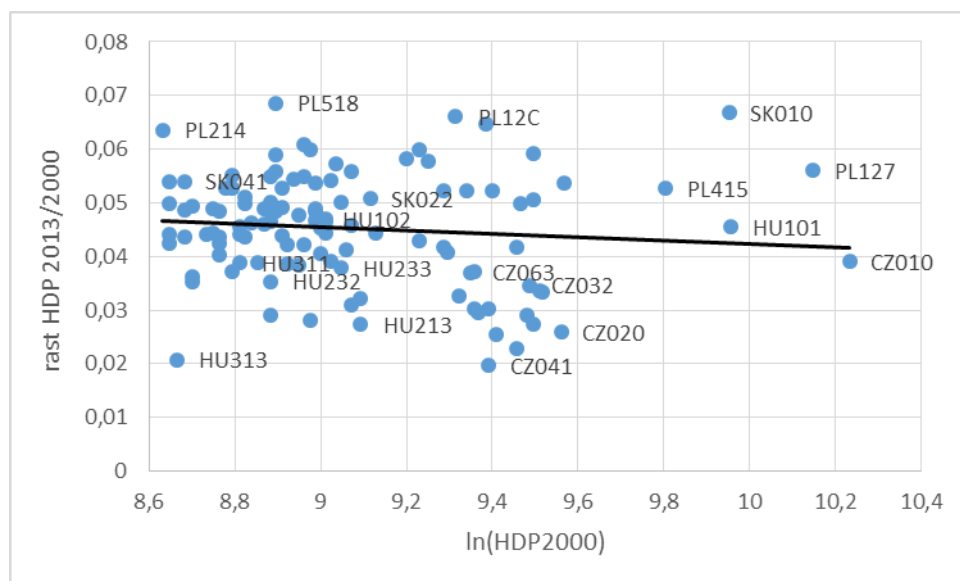
Priemerný ročný rast HDP na obyvateľa za obdobie 2000-2013 je znázornený na obrázku 3 pomocou percentilovej mapy. Najvyšší priemerný ročný rast vo výške 6,86 % bol zaznamenaný pre poľský región PL518-Wroclawski a naopak najnižší priemerný ročný rast 1,97 % vykázal český región CZ041-Karlovarský kraj. Najnižšie hodnoty priemerného ročného rastu boli dosahované v českých regiónoch, vysoké hodnoty boli zaznamenané vo väčšine slovenských regiónov a vo vybraných poľských regiónoch.



Obrázok 3 Percentilová mapa priemerného ročného rastu HDP na obyvateľa (2000-2013)

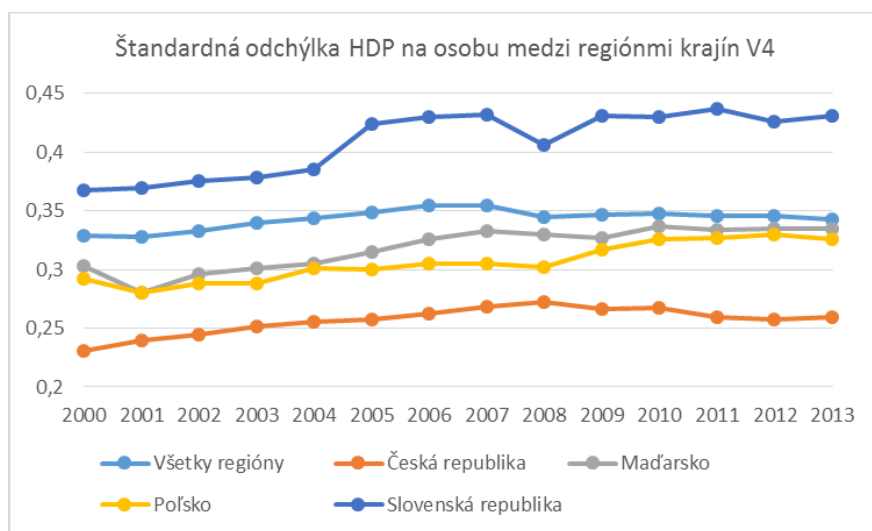
Na základe obrázka 1(a) a obrázka 3 nemožno jednoznačne potvrdiť, resp. zamietnuť platnosť koncepcie beta konvergenencie pre analyzované NUTS 3 regióny krajín V4. Viac informácií nám poskytne rozptylový diagram s odhadnutou regresnou funkciou (1) na obrázku 4, ktorý vyjadruje vzťah medzi počiatočnou úrovňou HDP na obyvateľa (rok 2000, v prirodzených logaritmoch) a priemernou ročnou mierou rastu HDP na obyvateľa v období 2000-2013.

Znázornená regresná priamka má síce záporný sklon, odhadnutý parameter  $\hat{\beta} = -0.003$  však nie je štatisticky významný. Platnosť beta konvergenencie teda v analyzovanom prípade nemožno potvrdiť. V prospech platnosti beta konvergenencie hovoria hodnoty pre regióny znázornené na obrázku 4 vľavo hore, t.j. poľské regióny PL214-Krakowski a PL518-Wroclawski s nízkou úrovňou počiatočného HDP a vysokým priemerným ročným rastom; jej platnosť naopak výrazne znižuje napr. maďarský región HU313-Nógrád s nízkou úrovňou HDP na obyvateľa v roku 2000 a taktiež nízkou úrovňou priemerného ročného rastu v období 2000-2013. Na obrázku 4 ďalej možno v jeho pravej časti identifikovať štvoricu regiónov s najvyššou počiatočnou úrovňou HDP na obyvateľa, ktoré zodpovedajú regiónom obsahujúcim hlavné mesto príslušnej krajiny, t.j. HU101-Budapest, SK010-Bratislavský kraj, PL127-Miasto Warszawa a CZ010-Hlavní mesto Praha. S výnimkou českého regiónu dosiahli ostatné tri spomínané regióny v analyzovanom období pomerne vysoké úrovne priemerného ročného rastu HDP.



Obrázok 4 Rozptylový diagram s regresnou priamkou

Pomocou koncepcie sigma konvergence možno preskúmať jednak vyrovnávanie úrovne medzi regiónmi v rámci jednotlivých krajín V4 ako aj vyrovnávanie úrovne medzi všetkými analyzovanými regiónmi bez ohľadu na ich príslušnosť ku konkrétnej krajine. Na obrázku 5 je znázornený priebeh vývoja štandardných odchýlok logaritmov HDP na obyvateľa medzi regiónmi počas analyzovaného obdobia (pozri vzťah (2)). Platnosť koncepcie sigma konvergence vyžaduje klesajúci charakter štandardných odchýlok v analyzovanom období. Súhrnne za všetky regióny možno pozorovať mierny pokles v pokrízovom období, rovnaký záver možno prijať aj pre české regióny. Pre maďarské, slovenské a poľské regióny nemožno v analyzovanom období potvrdiť platnosť koncepcie sigma konvergence.



Obrázok 5 Štandardné odchýlky logaritmov HDP na obyvateľa

#### 4 ZÁVER

Predmetom príspevku bola analýza regionálnych disparít v 114-tich NUTS 3 regiónoch krajín V4 na báze ekonomického indikátora HDP na obyvateľa (vyjadreného v bežných cenách v štandarde parity kúpnej sily – PPS) v období 2000-2013. Na báze percentilových máp boli identifikované regionálne disparity v úrovni i v raste HDP na obyvateľa, a to tak v rámci jednotlivých krajín, ako aj v rámci celej V4. Značné sú tiež rozdiely v priemernej úrovni regionálneho HDP na obyvateľa v analyzovanej vzorke krajín. Výsledky ďalších analýz na báze koncepcií beta a sigma konvergence nevedli k potvrdeniu ani jednej z týchto koncepcií.

#### Použitá literatúra

1. BARRO, R.J. – SALA-I-MARTIN, X.I. 2004. Economic Growth. 2nd Edition. The MIT Press.
2. BAUMONT, C. a kol. 2002. The European Regional Convergence Process, 1980 – 1995: Do Spatial Regimes and Spatial Dependence Matter? Dostupné na: <http://econwpa.repec.org/eps/em/papers/0207/0207002.pdf> [cit. 2015-04-15]
3. EURÓPSKA KOMISIA. 2010. Europe 2020: a European strategy for smart, sustainable and inclusive growth. Dostupné na: <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2010:2020:FIN:EN:PDF> [cit. 2015-04-15]

4. FURKOVÁ, A. – CHOCHOLATÁ, M. 2016. Spatial econometric modelling of regional club convergence in the European Union. *Ekonomický časopis*. roč. 64, 2016, č. 4, s. 367–386.
5. FURKOVÁ, A. 2016. Spatial pattern of innovative activity in the EU regions: exploratory spatial data analysis and spatial econometric approach. In *Advances in applied business research: the L.A.B.S. initiative*. New York: Nova Science Publishers, s. 159-186.
6. HANČLOVÁ, J. a kol. 2010. Makroekonometrické modelování České ekonomiky a vybraných ekonomik EU. Ostrava: VŠB-TU.
7. CHOCHOLATÁ, M. – FURKOVÁ, A. 2016a. Income disparities and convergence across regions of Central Europe. *Croatian Operational Research Review*, roč. 7, 2016, č. 2, s. 303–318. Dostupné na: <http://hrcak.srce.hr/ojs/index.php/crorr/article/view/4539> [cit. 2017-01-30]
8. CHOCHOLATÁ, M. – FURKOVÁ, A. 2016b. Does the location and institutional background matter in convergence modelling of the EU regions? *Central European Journal of Operations Research*. doi: 10.1007/s10100-016-0447-6.
9. KUTSCHERAUER, A. a kol. 2010. Regionální dispraity. Disparity v regionálním rozvoji země - pojetí, teorie, identifikace a hodnocení. Ostrava: VŠB-TU. Dostupné na: [http://alkut.cz/edice\\_cd/cd10\\_regdis\\_monografie/pdf/region\\_disparity\\_monografie.pdf](http://alkut.cz/edice_cd/cd10_regdis_monografie/pdf/region_disparity_monografie.pdf) [cit. 2016-05-03]
10. PAAS, T. a kol. 2007. Econometric Analysis of income convergence in selected EU countries and their NUTS 3 level regions. Dostupné na: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1078863](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1078863) [cit. 2013-04-15]
11. SOJKOVÁ, Z. 2001. Globalizácia a konvergencia. In: *Agrární perspektivy X: Zdroje trvale udržitelného ekonomického růstu ve třetím miléniu: Globalizace a regionalizace*, Praha. Dostupné na: [http://www.slpk.sk/dizertacie/agrarni\\_perspektivy/sojkova.pdf](http://www.slpk.sk/dizertacie/agrarni_perspektivy/sojkova.pdf) [cit. 2017-04-27].
12. SZOMOLÁNYI, K. a kol. 2011. The  $\beta$  convergence of the EU27 countries. In: *Proceedings of 29th international conference Mathematical Methods in Economics 2011*, s. 287–291.
13. <http://ec.europa.eu/eurostat/> [cit. 2017-01-05]
14. <http://ec.europa.eu/eurostat/web/gisco/geodata/reference-data/administrative-units-statistical-units> [cited 2017-01-05]

### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.  
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
 Tel: (421 2) 67 295 832  
 email: [michaela.chocholata@euba.sk](mailto:michaela.chocholata@euba.sk)

# RYCHLÝ ALGORITMUS PRO URČENÍ NEJHORŠÍHO SCÉNÁŘE

## QUICK ALGORITHM FOR THE WORST DETRIMENTAL SCENARIO

*Jaroslav Janáček*

### **Abstrakt**

Při testování robustnosti návrhu veřejného obslužného systému jsou používány scénáře, které kvantifikují vliv možných náhodných poruch dopravní sítě na časovou dostupnost služby poskytované uživatelům systému. Konstrukce vhodného scénáře se musí opírat o výběr takových úseků dopravní sítě, které ovlivňují svým výpadkem nebo poruchou podstatným způsobem funkci obslužného systému. V následujícím příspěvku se věnujeme optimalizačnímu algoritmu, který pro zadanou množinu úseků a zadané celkové prodloužení doby jízdy na těchto úsecích vypočítá nejhorší možný scénář. Algoritmus vychází ze speciálního tvaru charakteristik jednotlivých úseků vyjadřujících vliv prodloužení doby průjezdu daným úsekem na celkové zvýšení dopravní práce v uvažovaném obslužném systému.

***Klíčové slová:*** škodlivý scénář, robustnost systému, , dopravní práce, veřejný obslužný systém

### **Abstract**

When robustness of a design of a public service system is tested, such scenarios are used, which quantify the impact of possible random failures on time accessibility of service, which is provided system users with. Construction of a suitable scenario is based on choice of such links of the transportation network, which influence system performance in substantial way. In the following contribution we deal with optimization algorithm, which computes the worst possible scenario for given set of relevant links and a given total elongation of traversing times along these links. Algorithm is based on a special property of the function, which expresses dependence of transportation performance on elongation of traversing time of a given network link.

***Keywords:*** detrimental scenario, robust system, transportation performance, public service system

## **1 ÚVOD**

Veřejné obslužné systémy jsou zřizované na dopravních sítích obsluhovaného regionu umístěním daného počtu obslužných středisek. Při obsluze požadavků uživatelů obslužného systému je služba dopravovaná ze středisek obslužného systému do umístění uživatelů po časově nejkratších cestách složených z úseků dopravní sítě. Pokud je obslužný systém navrhován za předpokladu, že doby průjezdu jednotlivými úseky jsou pevně zadané, je optimální návrh rozmístění středisek obvykle získáno řešením úlohy váženého  $p$ -mediánu, kde váhy uživatelů odpovídají počtu obyvatel příslušné komunity. Zde komunita je považovaná vždy za jednoho agregovaného uživatele [3], [4]. Počet středisek, která jsou umístěována, a množina jejich možných umístění jsou dány ekonomickými možnostmi a vybavením jednotlivých uzlů dopravní sítě. Kritériem optimality je  $p$ -mediánová účelová funkce, tedy součet časových vzdáleností uživatelů od nejbližšího střediska násobených počty



obyvatel, nebo požadavků na obsluhu v místě uživatele. Pro efektivní navrhování takových systémů byla vyvinuta celá série řešících metod [1], [5], [naše kniha]. Otázkou však zůstává, jak je takto navržený systém odolný vůči náhodným poruchám dopravní sítě. Aby bylo možné při návrhu systému zohlednit jeho robustnost, tedy odolnost vůči kombinacím různých náhodných vlivů způsobujících úplný výpadek anebo značné omezení průchodnosti úseku dopravní sítě, byly vyvinuté různé přístupy jako je klasický „Network robustness index“ [7], anebo „Network trip robustness“ [8]. V tomto příspěvku vycházíme z jiného vyhodnocení důležitosti úseku dopravní sítě pro daný obslužný systém. V [2] je zavedena tzv. charakteristika úseku dopravní sítě jako funkce, která pro dané prodloužení doby průjezdu udává celkové zvýšení dopravní práce systému. Příspěvkem [6] byla evokována formulace úlohy nalezení nejhoršího scénáře jako úlohy rozdělení daného celkového prodloužení mezi úseky dopravní sítě. V tomto příspěvku předkládáme rychlý exaktní algoritmus, který pro zadané celkové prodloužení času průjezdu vybranými úseky nalezne jeho nejškodlivější rozdělení mezi vybrané úseky dopravní sítě.

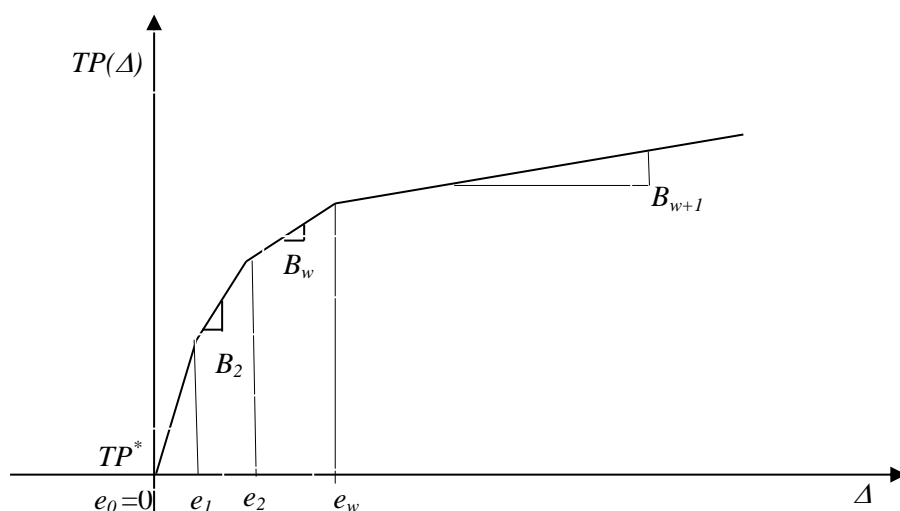
Zbytek příspěvku je organizován takto. V následující sekci je popsána charakteristika úseku dopravní sítě pro daný obslužný systém a v třetí sekci je uveden algoritmus nalezení nejhoršího scénáře založený na vlastnostech zmíněných charakteristik. V čtvrté sekci jsou uvedené výsledky předběžných experimentů a v páté sekci jsou sumarizovaná zjištění spolu s návrhy dalšího výzkumu.

## 2 CHARAKTERISTIKA ÚSEKU DOPRAVNÍ SÍTĚ VZHLEDEM K ZADANÉMU OBSLUŽNÉMU SYSTÉMU

Uvažujeme obslužný systém obsluhující uživatele v uzlech dopravní sítě tvořících množinu  $J$ . Požadavek na objem služby v místě  $j \in J$  je odhadnut číslem  $b_j$ . Služba je poskytována z obslužných středisek umístěných v  $p$  uzlech dopravní sítě vytvářejících množinu  $I_l$ . Služba uživateli  $j$  je dopravována po časově nejkratší cestě z časově nejbližšího střediska označeného jako  $ass(j)$  s dobou trvání  $t_{ass(j),j}$ . Dopravní práce  $TP^*$  obslužného systému za standardních podmínek může být vypočítána podle (1).

$$TP^* = \sum_{j \in J} b_j t_{ass(j),j} \quad (1)$$

Pokud budeme sledovat změnu dopravní práce v závislosti na časovém prodloužení  $\Delta$  jednoho konkrétního úseku  $u$  dopravní sítě ležícího alespoň na jedné z nejkratších cest z některého  $j \in J$  do  $ass(j)$ , pro malé  $\Delta$  poroste  $TP(\Delta)$  lineárně se směrnici  $B_1$ , protože všechny nejkratší cesty vedoucí úsekem  $u$  zůstanou i přes prodloužení nejkratšími. Teprve po dosažení jisté hranice  $e_1$  některé spojení  $j$  s  $ass(j)$  přes úsek  $u$  přestane být v důsledku prodloužení nejkratším spojením uživatele  $j$  se střediskem a tedy uspokojování požadavku tohoto uživatele bude realizováno po jiné cestě neobsahující úsek  $u$ . Tím poroste funkce  $TP(\Delta)$  s dalším zvyšováním  $\Delta$  pomaleji se směrnici  $B_2 < B_1$  až do bodu  $e_2$ . Toto se bude  $w$  krát opakovat až do dosažení bodu  $e_w$  kde buď bude pro každé  $j$  existovat cesta k některému středisku mimo úsek  $u$  a směrnice  $B_{w+1}$  bude nulová anebo pro některé  $j$  nebude existovat jiná cesta než přes úsek  $u$  a v takovém případě bude  $B_{w+1}$  rovné součtu požadavků takových uživatelů. Charakteristika dané hrany  $u$  tedy bude po částech lineární konkávní funkce, viz Obr. 1.



Obr. 1. Tvar charakteristiky úseku dopravní sítě pro daný obslužný systém

### 3 ALGORITMUS NALEZENÍ NEJHORŠÍHO SCÉNÁŘE

Předpokládáme, že je dána množina  $U$  úseků dopravní sítě, kde každý úsek  $u \in U$  má charakteristiku  $f^u(\Delta) = TP^u(\Delta) - TP^*$ , kde funkce  $f^u(\Delta)$  je dána posloupností  $w(u)+1$  bodů  $e^u_0 = 0, e^u_1, e^u_2, \dots, e^u_w$  a směrnic  $B^u_1, B^u_2, \dots, B^u_w, B^u_{w+1}$  podle (2).

$$f^u(\Delta) = \sum_{t=1}^k B^u_t (e^u_t - e^u_{t-1}) + B^u_{k+1} (\Delta - e^u_k) \quad \text{pro } e^u_k < \Delta < e^u_{k+1} \quad \text{pro } k = 0, \dots, w(u) - 1$$

$$f^u(\Delta) = \sum_{t=1}^{w(u)} B^u_t (e^u_t - e^u_{t-1}) + B^u_{w(u)+1} (\Delta - e^u_{w(u)}) \quad \text{pro } e^u_{w(u)} < \Delta$$

Označíme-li  $Q$  celkové prodloužení úseků z  $U$  a  $x_u$  prodloužení přidělené úseku  $u \in U$ , můžeme model úlohy formulovat následujícím způsobem.

$$\text{Maximalizujte } \sum_{u \in U} f^u(x_u) \quad (3)$$

$$\text{za podmíněk } \sum_{u \in U} x_u \leq Q \quad (4)$$

$$x_u \geq 0 \quad \text{pro } u \in U \quad (5)$$

S využitím konkávnosti všech charakteristik uvažovaných úseků můžeme exaktní algoritmus řešení úlohy (3)-(5) formulovat takto:

0. Vytvoř soubor čtveřic  $\langle B^u_k, \underline{e}^u_k, k, u \rangle$ , kde každá čtveřice odpovídá některé části  $k = 0, \dots, w(u)+1$  charakteristiky některého úseku  $u$ . Zde  $\underline{e}^u_k = e^u_k - e^u_{k-1}$  pro  $k = 1, \dots, w(u)$  a  $\underline{e}^u_{w(u)+1} = Q - e^u_{w(u)}$ .

1. Uspořádej soubor čtveřic sestupně podle složek  $B^u_k$  a inicializuj  $x_u = 0$  pro každé  $u \in U$ .
2. Pokud je soubor neprázdný a  $Q > 0$ , vyber ze souboru čtveřici s nejvyšší hodnotou  $B^u_k$  a jdi na krok 3, jinak práci algoritmu končí.
3. Proveď  $x_u = x_u + \min\{Q, \underline{e}^u_k\}$  a  $Q = Q - \min\{Q, \underline{e}^u_k\}$  a jdi na krok 2.

## 4 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Jednotlivé testovací úlohy byly vytvořené z údajů o silniční síti Slovenské republiky pro Žilinský a Prešovský samosprávný kraj s počtem obcí 315, resp. 664. Za kandidáty na umístění střediska byly považované všechny obce daného regionu. Analogicky, každou obec jsme považovali aj za umístění uživatelů systému. Koeficienty  $b_j$  představují počet obyvatel zaokrouhlený na stovky nahoru. Hodnoty  $p$  udávající maximální počet vybudovaných středisek byly popořadě 29 a 44. Pro obě definované sítě (Žilina a Prešov) jsme vypočítali množinu  $I_l$  optimálního rozmístění  $p$  středisek. Celkový počet relevantních úseků v příslušné síti byl postupně 370 a 753. Na takto definovaných obslužných systémech jsme testovali algoritmus nalezení nejhoršího scénáře postupně pro hodnoty  $Q= 100, 500, 1000, 1500$ . Pro testování jsme místo podrobných charakteristik použili pouze jejich horní odhad [2]. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 1.

	Q:	100	500	1000	1500
ZA	Obj_F:	7727	36527	72527	108527
	Poc.Prod:	11	11	11	11
	Výp. Čas [s]	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010
PO	Obj_F:	7452	34252	67752	101252
	Poc.Prod:	11	11	11	11
	Výp. Čas [s]	0.0022	0.0025	0.0024	0.0024

Tab. 1 Obj\_F – hodnota účelové funkce optimálního řešení podle (3); Poc.Prod – počet úseků jejichž doba průjezdu byla prodloužena; Výp. Čas – čas výpočtu algoritmu v sekundách.

Experimenty byly provedeny na PC s procesorem Intel® Core(TM) i7-4790 CPU@ 3.60 GHz, RAM 8 GB, Algoritmus byl naprogramován v jazyku JAVA a spouštěn v systému NetBeans IDE 8.02.

## 5 ZÁVĚR

V příspěvku jsme uvedli rychlý algoritmus hledání neškodlivějšího scénáře pro zadané celkové možné prodloužení doby průjezdu relevantními úseky dopravní sítě. Algoritmus je založen na exaktním řešení úlohy separovaného matematického programování s konkávní účelovou funkcí danou součtem charakteristik jednotlivých úseků. Tak algoritmus poskytuje pouze neškodlivější řešení z hlediska individuálních charakteristik. Vztah mezi modelovaným zvýšením dopravní práce a skutečným zvýšením, které by zahrnovalo i spolupůsobení kombinace úseků, bude předmětem dalšího výzkumu. V dalším výzkumu se rovněž zaměříme na otázku generování množiny scénářů pomocí uvedeného algoritmu.

### Použitá literatura

1. GARCÍA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. 2011. Solving large p-median problems with a radius formulation. In: *INFORMS Journal on Computing* 23 (4) s. 546-556
2. JANÁČEK, J., KVET, M. 2017. Characteristic of a Critical Network Arc in a Service System . In: *Sborník „IX International Conference of Transport Problems“*, Katowice, 28. -30. 6. 2017, v tisku
3. JANÁČEK, J., KVET, M. 2012. Relevant Network Distances for Approximate Approach to Large p-Median Problems. In: *Operations research proceedings 2012*, September 4-7, 2012, Hannover, Germany, s. 123-128

4. JÁNOŠÍKOVÁ, L. 2007. Emergency Medical Service Planning. Communications – Scientific Letters of the University of Žilina, Vol. 9, No 2, s. 64-68
5. KVET, M. 2014. Computational Study of Radial Approach to Public Service System Design with Generalized Utility. In: Digital Technologies 2014: Proceedings of the 10th International IEEE Conference, Žilina, ISBN 978-1-4799-3301-3, s. 198 – 208
6. MAJER, T., PALÚCH, S. 2016. Rescue System Resistance to Failures in Transport Network. In: Sborník 34. Mezinárodní konference Mathematical Methods in Economics, Liberec 6.-8. 9. 2016, s. 518-522
7. SCOTT, D.M., NOVAK, D.C., AULTMAN-HALL, L., GUO, F. 2006. Network robustness index“ a new method for identifying critical links and evaluating the performance of transportation networks. Journal of Transport Geography 14 (3), s. 215-227
8. SULLIVAN, J.L., NOVAK, D.C., AULTMAN-HALL, L., SCOTT, D.M. 2010. Identifying critical road segments and measuring system-wide robustness in transportation networks with isolating links: A link-based capacity-reduction problem. In: Transportation Research Part A 44 (2010) s. 323-336

### **Oznámení**

Tato práce vznikla v rámci projektů VEGA 1/0518/15 “Spořáhlivé záchranné systémy s neistou dosiahnuteľnosťou služby“, VEGA 1/0463/16 “Ekonomicky efektívna prevádzka elektrických vozidiel v inteligentných mestách a komunitách“ a APVV-15-0179 “Spořáhlivosť záchranných systémov na infraštruktúre s neistou funkcionalitou kritických prvkov”.

### **Kontaktné údaje**

Prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.

Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy

Univerzitná 2, 010 26 Žilina

Slovenská republika

email: jaroslav.janacek@fri.uniza.sk

# VPLYV PREJAZDOV V OBCIACH NA EFEKTÍVNY POČET OBSLUŽNÝCH STREDÍSK

## IMPACT OF THE TRANSITS IN VILLAGES ON THE EFFECTIVE NUMBER OF THE SERVICE CENTERS

*Marta Janáčková, Alžbeta Szendreyová*

### **Abstrakt**

Cieľom nášho príspevku je optimalizovať vhodný počet staníc záchranej zdravotnej služby (ZZS) v jednotlivých krajoch Slovenskej republiky. Na riešenie úlohy sme používali maticu vzdialeností, ktorá bola spočítaná z údajov na mape SR. Medzi objektmi, ktoré sa nachádzajú v jednej obci, sa bežne uvádza nulová vzdialenosť. Niektoré obce sú značne rozľahlé, obsahujú veľa zákazníkov a vzdialenosti medzi nimi a strediskom v obci nie sú zanedbateľné. Preto sme upravili maticu vzdialeností tak, aby sa aspoň do istej miery prejazdy v obci zohľadňovali. Na základe hypotézy navrhujeme efektívny počet staníc ZZS a porovnáme výsledky dosiahnuté pre oba typy matic vzdialeností.

**Kľúčové slová:** verejný obslužný systém,  $p$ -medián, efektívny počet stredísk

### **Abstract**

The aim of our contribution is to optimize the suitable number of the stations of the Emergency Medical Services (EMS) in different regions of Slovak Republic. At a problem solution, we used a distance matrix that was calculated from the data on the Slovakia map. The distances among the objects in one village are normally entered as the value of zero. Some villages are considerably large, contain a lot of customers and the distances between customer and the EMS station in the same village are not negligible. Therefore, we have adjusted the distance matrix so that the distances (at least to a certain extent) take into account the transits across the village. Based on the hypothesis, we designed an effective number of the EMS stations and we compared the results obtained for both types of distance matrices.

**Keywords:** public service system,  $p$ -median, effective number of centers

## **1 ÚVOD**

V Slovenskej republike je poskytovanie záchranej zdravotnej služby (ZZS) v kompetencii jednotlivých krajov (regiónov). Samospráva má zmluvy s niekoľkými poskytovateľmi ZZS. Rozhoduje tak o tom, na ktorom mieste stanicu schváli, či v regióne niektorú stanicu zrušia alebo naopak pridajú. Cieľom vhodného umiestnenia staníc ZZS je zabezpečiť dostupnosť služby pre obyvateľov regiónu. Základným parametrom dostupnosti je vzdialenosť medzi stanicou ZZS (poskytovateľom) a zákazníkom, má vplyv na minimálnu sieť. Poskytovanie služby je náhodné, ale dá sa predpokladať, že požiadavky sú úmerné počtu obyvateľov. Daným počtom staníc je možné poskytnúť službu na istej úrovni. Pridaním stanice sa skrátia vzdialenosti medzi niektorými zákazníkmi a priradeným strediskom. Ak budeme hodnotiť dostupnosť služby priemernou vzdialenosťou medzi strediskom a priradeným zákazníkom, potom sa pridaním strediska celková dostupnosť služby zlepši. Metódami operačnej analýzy vieme rozhodnúť o optimálnom umiestnení daného počtu  $p$  staníc a vypočítať jej celkovú dostupnosť (v km alebo minútach) služby, t. j. hodnotu účelovej funkcie (UF). Experimenty

ukázali, že v závislosti na rastúcom  $p$  hodnoty UF klesajú, ale rozdiely medzi hodnotami UF pre dve po sebe idúce hodnoty  $p$  sa znižujú.

## 2 EFEKTÍVNY POČET STREDÍSK

Zisťujeme, kedy aktuálny rozdiel medzi hodnotami UF, ktoré odpovedajú dvom po sebe idúcim hodnotám  $p$ , klesne pod priemerný pokles UF, odpovedajúci optimálnym riešeniam na intervale pre relevantné  $p$ . Priemerný pokles hodnoty UF pre dve po sebe idúce  $p$  je na intervale  $\langle p_{min}, p_{max} \rangle$  určený vzťahom  $(UF(p_{min}) - UF(p_{max})) / (p_{max} - p_{min})$ .

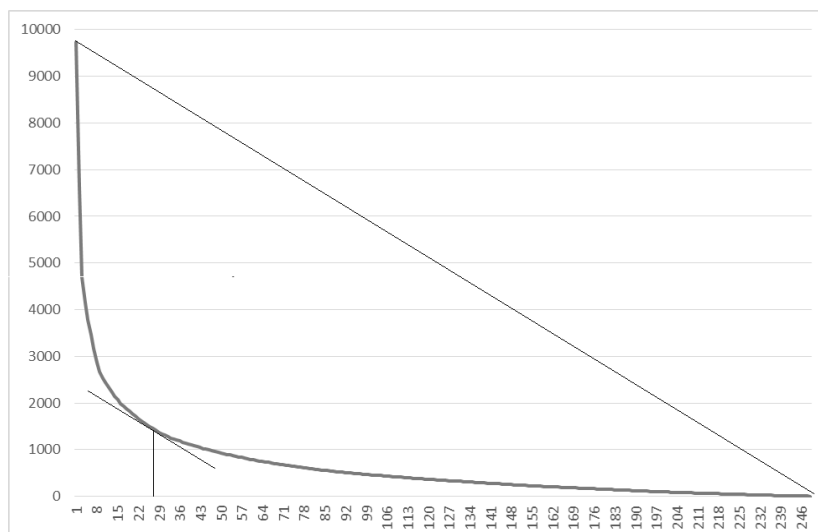
Dá sa predpokladať, že pridanie ďalšieho strediska už bude málo efektívne, lebo jeho prínos pre zlepšenie UF je menší ako priemerná hodnota zlepšenia na danom intervale  $\langle p_{min}, p_{max} \rangle$ . Efektívnym počtom stredísk nazveme také  $p_{ef}$ , v ktorom pokles hodnoty UF pri zvýšení  $p$  o jednotku bude rovný alebo blízky hodnote priemerného poklesu UF na danom intervale.

V našej štúdii riešime opakovane na intervale  $\langle p_{min}, p_{max} \rangle$  úlohu optimálneho umiestnenia  $p$  stredísk ako vážený  $p$ -medián. Jeho úlohou je umiestniť daný počet  $p$  stredísk do niektorých uzlov  $i \in I$  a z nich obslúžiť každý uzol  $j \in J$  tak, aby súčet vzdialeností medzi priradenými uzlami  $i, j$  bol minimálny.

Úlohu riešime na cestnej sieti Slovenskej republiky, pričom v jednej sade použijeme maticu vzdialeností s nulovým ohodnotením medzi objektmi  $i-j$  z jednej obce a v druhej sade je takáto vzdialenosť  $i-j$  zaťažená koeficientom určeným podľa veľkosti obce. Zaujímá nás, či zohľadnenie prejazdov medzi zákazníkom a priradeným strediskom z tej istej obce bude mať vplyv na odhad efektívneho počtu stredísk v danom regióne.

## 3 EXPERIMENTY

Hraničné hodnoty  $p_{min}$  a  $p_{max}$  majú značný vplyv na výpočet priemerného poklesu hodnôt účelovej funkcie pre zvolený interval. V našej štúdii použijeme krajné možnosti, t. j.  $p_{min} = 1$  a  $p_{max} = |I|$ . Výpočty robíme na cestnej sieti SR a tiež na upravenej sieti, ktorá zohľadní aj prejazd medzi objektmi jednej obce. Pre každý kraj SR riešime sadu úloh o  $p$ -mediáne pre rastúce  $p$  z intervalu  $\langle p_{min}, p_{max} \rangle$ . Z hodnôt UF z optimálnych riešení a príslušných intervalov pre daný kraj vypočítame v každej sade priemerný pokles hodnoty UF a tiež aktuálny pokles pre každé dve po sebe idúce hodnoty  $p$ .



Obrázok 1: Závislosť UF na hodnote  $p$

Priemerný pokles hodnoty UF pre daný interval predstavuje smernicu priamky, ktorá umožní nájsť  $p_{ef}$ . (pozri obrázok 1). V každej sade nájdeme také (jedno alebo viac)  $p_{ef}$ , v ktorom aktuálny pokles hodnoty UF najlepšie aproximuje hodnotu priemerného poklesu UF pre danú sadu.

Výsledky, získané pre maticu s nulovou diagonálou (nulová vzdialenosť medzi objektmi jednej obce) sú uvedené v tabuľke 1. Výsledky pre maticu zohľadňujúcu vzdialenosti prejazdov vo veľkých mestách sú uvedené v tabuľke 2. V predposlednom stĺpci tabuliek je uvedený intervalový odhad pre  $p_{ef}$ , v poslednom stĺpci tabuliek je uvedený počet stredísk, ktoré sú aktívne v súčasnosti.

Tabuľka 1: Porovnanie odhadu  $p_{ef}$  a reálneho  $p$  pre maticu s nulovou diagonálou

Kraj	$p_{max}$	HUF ( $p=1$ )	Priemerný pokles	Interval $p_{ef}$	Reálny počet staníc
BA	87	77465	900,76	17-18	15
BB	515	321002	624,52	30-34	36
KE	460	308257	671,58	33-35	32
NR	350	245843	704,42	28-30	27
PO	664	423786	639,20	32-34	32
TN	276	209135	760,49	19-22	22
TT	249	189580	764,44	21-22	17
ZA	315	297830	948,50	21-22	29

Tabuľka 2: Porovnanie odhadu  $p_{ef}$  a reálneho  $p$  pre maticu zohľadňujúcu prejazdy medzi  $i$ - $j$  vo veľkej obci

Kraj	$p_{max}$	HUF ( $p=1$ )	HUF ( $p=M$ )	Priemerný pokles	Interval $p_{ef}$	Reálny počet staníc
BA	87	77853	8308	808,66	16-17	15
BB	515	321153	9163	606,98	30-34	36
KE	460	308460	8953	652,52	31-34	32
NR	350	245886	9943	676,05	27-30	27
PO	664	425618	9161	628,14	32-35	32
TN	276	209176	8027	731,45	18-20	22
TT	249	190904	6960	741,71	21-22	17
ZA	315	297906	9426	918,73	21-22	29

V tabuľke 1 neuvádzame hodnotu účelovej funkcie pre  $p=M$ , pretože pre maticu s nulovou diagonálou a umiestnení strediska do každej obce je hodnota nulová.

## 4 ZÁVER

Úprava vzdialeností medzi objektmi jednej obce sa týkala 88-ich obcí z celkovo 2916-ich uzlov. Vzdialenosti medzi zákazníkom a strediskom jednej obce tu boli zmenené z 0 km na 1 až 3 km. Aj keď sú tieto zmeny malé a nezohľadňujú celkom reálne pomery, majú praktický význam. Započítaním týchto vzdialeností sa pri váženom  $p$ -mediáne zviditeľnia počty požiadaviek (prejazdov) v obciach s veľkým počtom obyvateľov, ktoré pri nulovej vzdialenosti medzi  $i$ - $j$  nemali žiadnu váhu. Zohľadnenie prejazdov vozidiel ZZS medzi objektmi jednej obce sa prejavilo na náraste HUF( $p=1$ ) v rozsahu cca 0 až 0,7 percenta. Súčasne ale rástli aj hodnoty pre rastúce  $p$ , čo spôsobilo, že priemerný pokles HUF na intervale  $\langle p_{min}, p_{max} \rangle$  dosahuje nižšie hodnoty oproti predchádzajúcim výsledkom. Interval pre odhad  $p_{ef}$  sa v 4 krajoch nezmenil a v ďalších 4 sa krajné hodnoty mierne znížili. V troch z nich sa odhad priblížil k reálnemu počtu a v jednom (TN) sa odhad o málo zhoršil.

Použitie upravenej matice so zohľadnením prejazdov veľkou obcou sa ukázalo ako vhodné aj pre ďalšie štúdie v tejto oblasti.

### Acknowledgements

This work was supported by the research grants VEGA 1/0518/15 “Resilient rescue systems with uncertain accessibility of service” and APVV-15-0179 “Reliability of emergency systems on infrastructure with uncertain functionality of critical elements”.

### Použitá literatúra

1. JANÁČEK, J. a kol, Navrhovanie územne rozľahlých obslužných systémov. 1. vyd., Žilina : Žilinská univerzita, 2010, 404 s.
2. JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A. An importance of the population density for the location of the Emergency Medical Service stations. In: Mathematical methods in economics: 34th international conference, Liberec, Czech Republic, September 6th-9th, 2016, s. 354-358.
3. JANAČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A. Time-distance versus utility in the public service system design. In: SOR '15 Proceedings of the 13th International Symposium on Operational Research. Bled, Slovenia, September 23-25, 2015. Ljubljana, Section for Operational Research, s. 446-451.
4. Xpress-MP Manual ‘Getting Started’ (2005). Dash Associates, Blisworth.

### Kontaktné údaje

RNDr. Marta Janáčková, CSc.  
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta strojnícka  
Univerzitná 1, 010 26 Žilina  
Tel: (421 41) 513 4953  
email: marta.janackova@fstroj.uniza.sk.

RNDr. Alžbeta Szendreyová, PhD.  
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky  
Univerzitná 1, 010 26 Žilina  
Tel: (421 41) 513 4205  
email: alzbeta.szendreyova@fri.uniza.sk



# ANALÝZA UKAZOVATEĽA MEDZINÁRODNEJ INVESTIČNEJ POZÍCIE A JEHO VPLYVU NA HRUBÝ DOMÁCI PRODUKT

## ANALYSIS OF THE INTERNATIONAL INVESTMENT POSITION INDICATOR AND ITS IMPACT ON GROSS DOMESTIC PRODUCT

*Miroslava Jánošová, Zlatica Ivaničová*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá analýzou relatívne nového ukazovateľa medzinárodnej investičnej pozície (MIP) a jeho vplyvu na hospodársky rast Slovenska prostredníctvom ekonometrického modelu založenom na princípe ECM (Error correction model). Článok je rozdelený na niekoľko samostatných častí, pričom v prvej časti sa venujeme popisu vývoja ukazovateľa medzinárodnej investičnej pozície a hrubého domáceho produktu (HDP) v priebehu rokov 2004 – 2015. V druhej časti sa zameriame na popis modelu ECM. Tretia posledná časť bude prezentovať výsledky odhadnutého modelu.

**Kľúčové slová:** *model korigujúci chybu, medzinárodná investičná pozícia, hrubý domáci produkt*

### Abstract

This article deals about the analysis of relatively new international investment position indicator and its impact on the economic growth of Slovakia through an econometric model that is based on ECM principle (Error correction model). The article is divided into several separate parts. In the first part we focus on describing the development of the indicator during period of 2004 – 2015. In the second part we will focus on description of the constructed ECM model. The last third part will present results of an estimated model.

**Keywords:** *Error correction model, International investment position, Gross domestic product*

## 1 ÚVOD

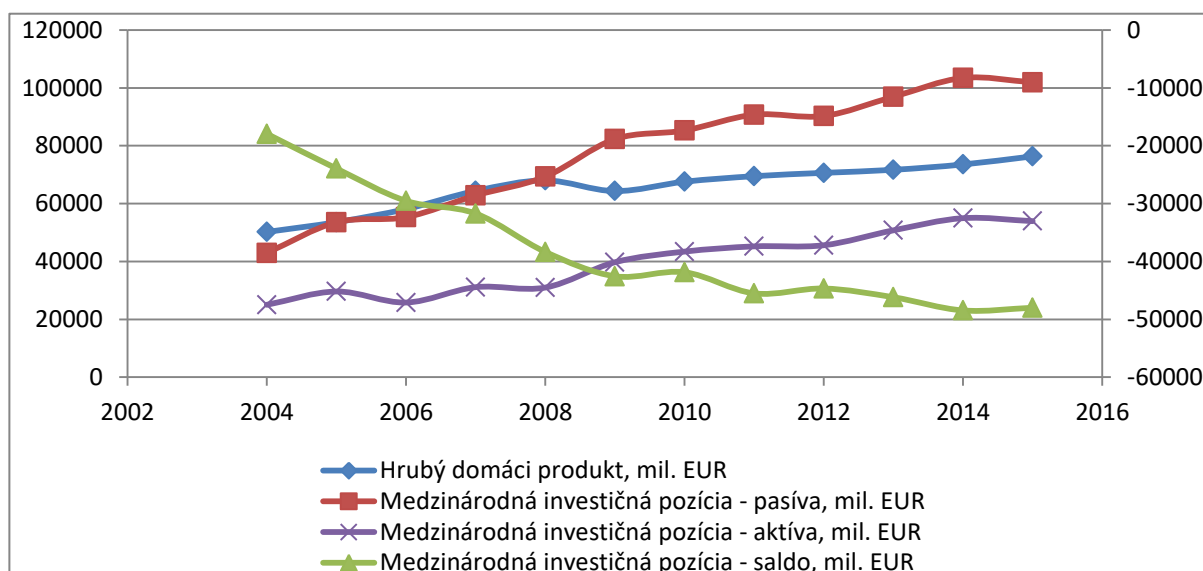
V súčasnosti je nastavenie ekonomického systému založené v značnej miere na výmene tovarov a služieb ako aj na expanzii finančného kapitálu, v čoho dôsledku dochádza k vzájomným previazaniam ekonomík a tým aj k otváraniu nových trhov a využívaniu tých existujúcich. Rovnako však v súčasnosti vnímanie medzinárodného obchodu začína podliehať novým trendom a jedným z nich tzv. „second unbundling“, ktorého autorom je Richard Baldwin (Baldwin 2009). Autor vysvetľuje vhodnosť presunutia tovární do nákladovo efektívnejších destinácií s cieľom znížiť výrobné náklady. Sprievodným znakom daného javu je výrazná expanzia finančného kapitálu do rozvíjajúcich sa krajín. V predkladanom príspevku sa zameriame na agregovaný ukazovateľ medzinárodnej investičnej pozície, ktorý v sebe zahŕňa práve jednotlivé zložky zahraničných investícií pritekajúcich do krajiny. Tento ukazovateľ budeme analyzovať z pohľadu jeho vplyvu na hrubý domáci produkt v podmienkach Slovenska.

## 2 VÝVOJ MEDZINÁRODNEJ INVESTIČNEJ POZÍCIE A HRUBÉHO DOMÁCEHO PRUDKTU V PODMIENKACH SR

Ukazovateľ MIP je pomerne novým ukazovateľom vzhľadom na skutočnosť, že komplexná medzinárodná metodika pre jeho zostavovanie bola vydaná a schválená až v roku 1993<sup>1</sup>. Tento ukazovateľ je možné z funkčného hľadiska rozdeliť na priame investície, portfóliové investície, úvery a vklady. Ide o pomerne málo využívaný ukazovateľ, práve vzhľadom na krátkosť sledovania a aj na rozdielnosť metodík pri vykazovaní v jednotlivých krajinách. MIP s platobnou bilanciou zobrazuje vzťah medzi rezidentmi a nerezidentmi krajiny, je formou bilancie, ktorá porovnáva stav investícií rezidentov domácej ekonomiky v zahraničí so stavom investícií zahraničných subjektov v domácej ekonomike. Ukazovateľ MIP sa stáva v súčasnosti čoraz využívaným ukazovateľom. V príspevku s názvom „Analyzing macroeconomic imbalances in the EU“ (Domonkos, Ostrihoň, Šikulová, Širaňová, 2016) sa autori venujú skúmaniu ukazovateľa MIP resp. ukazovateľov zahrnutých v hodnotiacej tabuľke MIP a ich potenciálnu užitočnosť pri predikcii vzniku potenciálnej krízy. Tento ukazovateľ je zároveň možné použiť aj na zhodnotenie stupňa otvorenosti krajiny, ako ukazovateľ udržateľnosti zahraničného dlhu, alebo na meranie finančnej stability krajiny.

Hrubý domáci produkt v ekonomickej vede zastáva miesto ukazovateľa používaného na meranie výkonnosti ekonomiky štátu. Je vyjadrením celkovej peňažnej hodnoty tovarov a služieb, ktoré sú vyprodukované za jedno časové obdobie na území určitého štátu.

**Graf 1** Vývoj Medzinárodnej investičnej pozície a Hrubého domáceho produktu v rokoch 2004 – 2015



**Zdroj:** Vlastné spracovanie na základe dát z Národnej banky Slovenska a databázy SLOVSTAT

<sup>1</sup>Ukazovateľ vykazovaný na základe Manuálu platobnej bilancie Medzinárodného menového fondu (5. vydanie, 1999) z príručky OECD o Východiskových pojmoch priamych zahraničných investícií (3. vydanie, 1996), usmernenia Európskej centrálnej banky (ECB) o požiadavkách Európskej centrálnej banky na štatistické vykazovanie v oblasti štatistiky platobnej bilancie a medzinárodnej investičnej pozície o výkazu medzinárodných rezerv.

Na grafe 3 na hlavnej osi (ľavej) môžeme vidieť priebeh vývoja MIP – pasíva, MIP – aktíva a HDP, kde všetky tri ukazovatele dosahovali pozitívny rastúci priebeh. Ekonomika Slovenska reprezentovaná ukazovateľom HDP do roku 2008 vykazovala tzv. tempo zdravého ekonomického rastu, ktoré bolo spôsobené prijatím rôznych dôležitých reforiem. Vplyv hospodárskej krízy v roku 2009 sa premietol aj do vývoja slovenského HDP, kedy oproti roku 2008 nastal pokles v ukazovateli o 3 688 mil. EUR. K opätovnému oživeniu ekonomiky dochádza v roku 2010, k čomu prispelo aj oživenie rastu ostatných európskych krajín, nastolený pozitívny vývoj pokračoval až do roku 2015, kedy HDP dosiahlo úroveň 76 346 mil. EUR. Na vedľajšej osi (pravej) je zobrazený vývoj čistej investičnej pozície SR, pričom ide o rozdiel medzi stavom aktív (odlev zahraničných investícií) a pasív (prílev zahraničných investícií) medzinárodnej investičnej pozície. Čistá investičná pozícia v priebehu rokov 2004 – 2015 v značnej miere menila svoj objem, pritom však v celom sledovanom období dosahovala záporné hodnoty a teda investície zahraničných subjektov, ktoré pritekali na územie Slovenska výrazne prevyšujú tie investície, ktoré slovenské subjekty investujú v zahraničí.

### 3 METODOLÓGIA

Pri analýze vplyvu medzinárodnej investičnej pozície na hrubý domáci produkt budeme využívať ekonometrické modelovanie, založené na prístupe modelu s korekčným členom (ECM – error correction model)<sup>2</sup>. Tento model je využívaný na určenie miery vybočenia systému od tzv. ekvilibría a je založený na princípe kointegrácie časových radov<sup>3</sup>, pričom v jednej rovnici zachytáva tak dlhodobé, ako aj krátkodobé vzťahy medzi premennými.

Vzťah medzi premennými  $Y$  a  $X$  je možné vyjadriť prostredníctvom EC modelu v nasledovnom tvare:

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + b_1 \Delta X_t - \pi u_{t-1} + u_t \quad (1)$$

kde

$$u_{t-1} = Y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1} \quad (2)$$

Model ECM je reprezentovaný vzťahom (1) pričom parameter  $b_1$  reprezentuje okamžitý dopad zmeny  $Y$  a  $X$ , parameter  $\pi$  predstavuje korekčný člen, ktorý hovorí o rýchlosti prispôsobenia sa krátkodobých vplyvov k dlhodobej rovnováhe. Vzťah reprezentovaný rovnicou (2) je dlhodobým rovnovážnym stavom medzi premennými, ktoré sú nestacionárne.

Výhody použitia metodiky ECM spočívajú v možnosti zobrazenia tak krátkodobých, ako aj dlhodobých vzťahov. Premenné, s ktorými sa pracuje sú diferencované, čo spravidla rieši problém s nestacionaritou časových radov, a teda nedochádza k tzv. falošnej regresii.

### 4 DÁTA MODELU

Analýzu vplyvu medzinárodnej investičnej pozície na hrubý domáci produkt sme realizovali na štvrtročných dátach, pričom sme mali k dispozícii 51 pozorovaní a to od 1Q2004-3Q2016. Do modelu sme ako vysvetľujúcu premennú zahrnuli aj export (vývoz tovarov a služieb v bežných cenách). Údaje pre export a hrubý domáci produkt boli čerpané z databázy

<sup>2</sup>Pre podrobnejšiu špecifikáciu modelu pozri [1]

SLOVSTAT, údaje pre MIP sme čerpali z databázy Národnej banky Slovenska. Všetky údaje sú v miliónoch EUR. Časové rady HDP a EXPO sú sezónne očistené v analýze označované skratkou „sa“. Časové rady boli zlogaritmované z dôvodu predpokladu zmenšenia rozptylu týchto časových radov, a teda riešenia problému ich nestacionarity. Zároveň premenné v logaritmickom tvare je možné interpretovať ako elasticity. Časové rady v logaritmickom tvare sú označované v analýze veľkým písmenom „L“. Všetky výpočty analýzy boli realizované prostredníctvom ekonometrického programu EViews.

## 5 VÝSLEDKY

Funkčný tvar modelu, ktorý sme analyzovali má nasledujúci tvar:

$$HDP = f(MIP, EXPO) \quad (3)$$

pričom:

HDP – hrubý domáci produkt,

MIP – medzinárodná investičná pozícia,

EXPO – export krajiny.

Pri tvorbe modelu sme postupovali v niekoľkých krokoch. Prvým krokom bola analýza stacionarity pre všetky použité premenné. Stacionaritu sme testovali na 1 % hladine významnosti prostredníctvom Augmented Dickey-Fullerovho testu<sup>4</sup>. Z výsledkov, ktorých zhrnutie uvádzame v tabuľke 1 môžeme konštatovať, že všetky premenné sú integrované radu 1, a teda sú stacionárne na prvej diferencii.

**Tabuľka 1** Výsledky ADF testu pre premenné LHDP\_SA, LEXPO\_SA a LMIP

Premenná LHDP_SA	Level			1th difference		
	ADF test statistic	Test critical values	P - value	ADF test statistic	Test critical values	P - value
Intercept	-3,2094	-3,5713	0,0254	-4,4365	-3,5713	0,0008
Trend and Intercept	-2,6611	-4,1611	0,2567	-5,0930	-4,1567	0,0007
None	2,5683	2,6130	0,9971	-3,3935	-2,6130	0,0011
Premenná LEXPO_SA	Level			1th difference		
	ADF test statistic	Test critical values	P - value	ADF test statistic	Test critical values	P - value
Intercept	-1,4555	-3,5713	0,5475	-4,8087	-3,5713	0,0003
Trend and Intercept	-2,2542	-4,1567	0,4500	-4,8130	-4,1567	0,0016
None	1,4537	-2,6130	0,9620	-4,5324	-2,6130	0,0000
Premenná LMIP	Level			1th difference		
	ADF test statistic	Test critical values	P - value	ADF test statistic	Test critical values	P - value
Intercept	-3,4132	-3,5683	0,0151	-5,9519	-3,5713	0,0000
Trend and Intercept	-2,1991	-4,1525	0,4796	-6,6817	-4,1567	0,0000
None	4,3807	-2,6120	0,9620	-4,6730	-2,6130	0,0000

**Zdroj:** Vlastné spracovanie

Druhým krokom, ku ktorému sme následne pristúpili, bolo testovanie dlhodobých vzťahov, a teda hľadanie kointegračného vektoru prostredníctvom Johansenovej kointegračnej

<sup>4</sup>Pre bližšiu špecifikáciu pozri [1]

analýzy<sup>5</sup>. Nami využívaný program EViews poskytuje dva kointegračné testy a to Trace test a Max-eigenvalue test. Výsledky z týchto testov, ktoré boli realizované na 5 % hladine významnosti uvádzame v tabuľke 2.

**Tabuľka 2** Výsledky Johansenovej kointegračnej analýzy

HDP = f(EXPO, MIP)	Nulové hypotézy	Trace Statistic	Critical Value 0,05	Max-Eigen Statistic	Critical Value 0,05
	r=0	46,9505	29,7970	28,2127	21,1316
r<=1	18,7377	15,4947	16,1403	14,2646	
r<=2	2,5974	3,8414	2,5974	3,8414	

**Zdroj:** Vlastné spracovanie

Na základe tohto testovania sa potvrdila existencia dvoch kointegrujúcich vektorov, a teda môžeme zapísať rovnicu pre odhad dlhodobého vzťahu modelu prostredníctvom jedného z nich v nasledujúcej podobe:

$$LHDP_{sa} = 14,139 + 0,667 * LEXPO_{sa} - 0,726 * LMIP_{sa} \quad (4)$$

Zvolený kointegračný vektor v poslednom kroku použijeme na špecifikáciu samotného modelu s korekčným členom v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned} D(LHDP\_SA) = & -0.029*[LHDP\_SA(-1) - 0.667*LEXPO\_SA(-1) + \\ & 0.726*LMIP\_SA(-1) - 14.139] - 0.074*D(LHDP\_SA(-1)) - \\ & 0.0633*D(LHDP\_SA(-2)) + 0.181*D(LEXPO\_SA(-1)) + \\ & 0.049*D(LEXPO\_SA(-2)) + 0.051*D(LMIP\_SA(-1)) - 0.006*D(LMIP\_SA(-2)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D(LEXPO\_SA) = & 0.049*[LHDP\_SA(-1) - 0.667*LEXPO\_SA(-1) + \\ & 0.726*LMIP\_SA(-1) - 14.139] + 0.493*D(LHDP\_SA(-1)) - \\ & 0.307*D(LHDP\_SA(-2)) + 0.439*D(LEXPO\_SA(-1)) + 0.260*D(LEXPO\_SA(- \\ & 2)) + 0.516*D(LMIP\_SA(-1)) + 0.309*D(LMIP\_SA(-2)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D(LMIP\_SA) = & -0.129*LHDP\_SA(-1) - 0.667*LEXPO\_SA(-1) + \\ & 0.726*LMIP\_SA(-1) - 14.139] - 0.031*D(LHDP\_SA(-1)) - \\ & 0.014*D(LHDP\_SA(-2)) - 0.275*D(LEXPO\_SA(-1)) - 0.322*D(LEXPO\_SA(- \\ & 2)) - 0.316*D(LMIP\_SA(-1)) - 0.052*D(LMIP\_SA(-2)) \end{aligned} \quad (7)$$

Uvádzaný tvar modelu je zvolený na základe testovania tak aby model v čo najväčšej miere spĺňal základné ekonometrické predpoklady, a teda aby v modeli nevystupovala heteroskedasticita ani autokorelácia, ktoré sme testovali prostredníctvom testov reziduálnych zložiek.

Z rovnice (4) opisujúcej odhadnutý dlhodobý vzťah je možné konštatovať, že agregovaný ukazovateľ medzinárodnej investičnej pozície má na ekonomický rast negatívny vplyv. Nárast daného ukazovateľa pri zachovaní ostatných premenných vyvoláva pokles HDP o 0,726 %. Tento negatívny dopad môže mať pôvod práve v skutočnosti, že Slovensko je malou otvorenou ekonomikou a investície pritekajúce na Slovensko sa v značnej miere využívajú na podporu exportu, čo dokazuje výsledok pri premennej EXPO v rovnici (4) a teda

<sup>5</sup>Pre bližšiu špecifikáciu pozri [1]

export má pozitívny vplyv na HDP a jeho zvýšenie o 1 % pri zachovaní ostatných premenných vyvolá nárast HDP o 0,667%.

V rovniach VECM vidíme dlhodobú informáciu zachytenú v kointegračnom vektore (uvedené v rovniach (5), (6), (7) v hranatých zátvorkách), krátkodobá dynamika je vyjadrená použitím diferencovaných premenných označených veľkým písmenom „D“. Kointegračný koeficient v rovniach modelu VEC vyšiel štatisticky významný pre všetky rovnice, avšak zápornú hodnotu dosahoval len v rovniach (5) a (7). V týchto rovniach dochádza ku korigovaniu krátkodobých výkyvov a ich smerovaniu k dlhodobej rovnováhe. V rovnici (5) na úrovni 0,029 % a v rovnici (7) na úrovni 0,129 %, čo nám hovorí podiele korigovania krátkodobých odchýlok od rovnovážneho stavu.

## 6 ZÁVER

V príspevku je skúmaný vplyv ukazovateľa medzinárodnej investičnej pozície a exportu na hrubý domáci produkt, ako ukazovateľ reprezentujúci ekonomický rast krajiny. Na analýzu sme aplikovali model korekcie chyby. Analýza potvrdila existenciu tak krátkodobých, ako aj dlhodobých vzťahov medzi premennými. Vplyv exportu vyšiel kladný, oproti vplyvu medzinárodnej investičnej pozície, ktorej vplyv vyšiel negatívny. Práve z tohto dôvodu by bolo vhodné preskúmanie jednotlivých zložiek ukazovateľa MIP a teda jeho dezagregácia na jednotlivé funkčné zložky ako priame investície, portfóliové investície, úvery a vklady a prostredníctvom nich zistiť, či každá z týchto zložiek vplyva na HDP v negatívnom zmysle a v akej miere<sup>6</sup>.

### Použitá literatúra

- [1] ASTERIOU, D. – HALL, S. G. 2011. Applied econometrics. New York : Palgrave Macmillan, 2011. ISBN 987-0-230.27182-1
- [2] BALDWIN, R. 2009. Integration of the North American Economy and the New Paradigm Globalisation. In: Discussion Paper Series, No. 7523. Washington, DC: Center for Economic and Policy Research
- [3] DOMONKOS, T., OSTRIHOŇ, F., ŠIKULOVÁ, I., ŠIRAŇOVÁ, M., 2016. Analyzing macroeconomic imbalances in the EU. In EcoMod2016 [online] : International Conference on Economic Modeling. Lisbon, Portugal, 6-8 July 2016. - 1. ed. - Lisbon : Lisbon School of Economics & Management - Universidade de Lisboa, 2016. - 19 p.
- [4] DRITSAKI, M., DRITSAKI, C., ADAMOPOULOS, A. A. 2004. Causal Relationship between Trade, Foreign Direct Investment and Economic Growth for Greece. American Journal of Applied Sciences, vol. 1, No. 3, s. 230–235. ISSN 1546-9239.
- [5] JÁNOŠÍK, P. 2010. Medzinárodná investičná pozícia. Biatec: Národná banka Slovenska, ročník 18, 5/2010. dostupné na internete : [www.nbs.sk/\\_img/Documents/PUBLIK/.../07\\_biatec0510\\_janosik.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/PUBLIK/.../07_biatec0510_janosik.pdf)

---

<sup>6</sup>Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 2/0181/15

[6] KÖNIG, B. 2013. Analýza nezamestnanosti a jej makroekonomických dopadov. In: Medzinárodný vedecký seminár „Nové trendy v ekonometrii a operačnom výskume“. EKONÓM. Bratislava 2013. ISBN: 978-80-225-3786-5

[7] LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. – SZOMOLÁNYI, K. 2007. Ekonometrické prognózovanie importu Slovenskej Republiky na základe modelov s korekčným členom. In: Ekonomické rozhľady. Ekonomická univerzita v Bratislave. Bratislava. 2/2007. Ročník XXXVI

### **Kontaktné údaje**

Ing. Miroslava Jánošová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [mdolinajcova@gmail.com](mailto:mdolinajcova@gmail.com)

prof. Ing. Zlatica Ivaničová, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: [zlatica.ivanicova@euba.sk](mailto:zlatica.ivanicova@euba.sk)

# CHARAKTERISTIKA KRITICKÝCH DVOJÍC HRÁN V DOPRAVNEJ SIETI OBSLUŽNÉHO SYSTÉMU

## CHARACTERISTICS OF CRITICAL PAIRS OF ARCS IN THE TRANSPORTATION NETWORK OF SERVICE SYSTEM

*Michal Koháni, Peter Czimmermann*

### **Abstrakt**

Pri testovaní robustnosti návrhu verejného obslužného systému sa častokrát využívajú scenáre, v ktorých dochádza k možným náhodným poruchám dopravnej siete, ktoré vplyvajú na časovú dostupnosť služby poskytovanej užívateľom, resp. zákazníkom systému. Pri konštrukcii takýchto scenárov je potrebné, aby sa pre testovanie vybrali také úseky dopravnej siete, ktoré môžu zásadným spôsobom ovplyvniť fungovanie systému. Pri konštrukcii scenárov sa môžu brať do úvahy situácie, v ktorých dôjde k zmenám len na jednej hrane, ale častokrát môže dôjsť k zmenám aj na viacerých úsekoch súčasne. V tomto príspevku popisujeme charakteristiky kritických dvojíc hrán, ktoré môžu byť využité pri návrhu algoritmu na nájdenie kritických scenárov pri zmenách na dvoch hranách v sieti.

***Kľúčové slová:** kritický scenár, robustnosť systému, dopravná práca, verejný obslužný systém*

### **Abstract**

When the robustness of a public service system design is tested, we can often use scenarios where a possible random failures can occur and they can influence the time accessibility of service, which is provided system users with. Construction of a suitable scenario is based on choice of such links of the transportation network, which influence system performance in substantial way. In such scenarios one or multiple arcs can be affected by this failure. In our contribution we present characteristics of pairs of critical arcs that can be used to develop algorithm for creating of critical scenarios.

***Keywords:** critical scenario, system robustness, transportation performance, public service system*

## **1 ÚVOD**

Verejné obslužné systémy v dopravných sieťach sú častokrát charakterizované umiestnením obslužných stredísk. Môže sa jednať napríklad o zásobovacie systémy, ale aj o napr. záchranné systémy. Obsluha zákazníkov, resp. užívateľov systému, je realizovaná po najkratších cestách medzi zákazníkmi a obslužnými strediskami. Častokrát sa návrh takéhoto systému rieši ako úloha p-mediánu, resp. váženého p-mediánu, kde ako váha slúži počet obyvateľov, resp. veľkosť obsluhovaného miesta. Kritériom optimality je p-mediánová účelová funkcia, ktoré je daná súčtom vzdialeností zákazníkov od ich priradených obslužných stredísk. Algoritmy a riešiacie metódy na riešenie úloh takéhoto typu sú známe a je možno ich nájsť v [1], [3], [4]. Väčšina obslužných systémov je však navrhovaná v „ideálnych“ podmienkach, teda sú známe cestovné časy na jednotlivých hranách dopravnej siete. Pri návrhu takýchto systémov je častokrát kľúčovým faktorom aj robustnosť takéhoto systému, teda jeho odolnosť voči náhodným vplyvom, ktoré spôsobia obmedzenie prejazdnosti, alebo neprejazdnosť jednej, alebo viacerých hrán v dopravnej sieti. Existuje viacero rôznych



prístupov k riešeniu takýchto situácií, ako je napríklad „Network robustness index“ [5], alebo „Network trip robustness“ [6]. Charakteristika pre prípad obmedzení na jednej hrane bola popísaná aj v [2]. V tomto príspevku sa budeme zaoberať analýzou charakteristík pre situáciu, ak dôjde k obmedzeniam alebo výpadkom na dvoch hranách súčasne. Zadefinujeme pojem dopravná práca, pomocou ktorej budeme popisovať vplyv obmedzení na systém. Následne uvedieme algoritmus na výber kritických hrán, ako aj analýzu charakteristík pre prípad dvoch kritických hrán v dopravnej sieti. Na záver príspevku priblížime ďalšie smerovanie v tejto oblasti.

## 2 DOPRAVNÁ PRÁCA A JEJ DEFINÍCIA

Daná je sieť  $G=(V,E,w,t)$ , kde  $V$  je množina vrcholov,  $E$  množina hrán,  $w(u)$  váha vrcholu  $u$ ,  $t(e)$  predpokladaný čas potrebný na prejde hory e. Predpokladaný čas potrebný na prejde hory z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  označíme  $d(u,v)$ . Množinu zákazníkov označíme  $U$  a množinu stredísk  $S$ . Predpokladáme, že  $U \subset V$  aj  $S \subset V$ . Množina  $A \subset U \times S$  obsahuje všetky usporiadané dvojice  $(u,v)$  také, že zákazník  $u$  je obslužený strediskom  $v$ . Potom dopravnú prácu môžeme definovať nasledovne (1):

$$DP = \sum_{(u,v) \in A} w(u) \cdot d(u,v) \quad (1)$$

Tento pojem predstavuje analógiu k úhrnnej váženej vzdialenosti, len miesto dĺžky hrán a vzdialeností medzi vrcholmi pracujeme s časovými údajmi.

## 3 URČENIE MNOŽINY KRITICKÝCH HRÁN

Dopravnú prácu môžeme využiť na definovanie množiny kritických hrán  $K$ . Uvažujme, že na hranách  $e_1, e_2, \dots, e_k$  došlo k predĺženiu doby prejazdu o hodnoty  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ . Množinu

$$K = \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \quad (2)$$

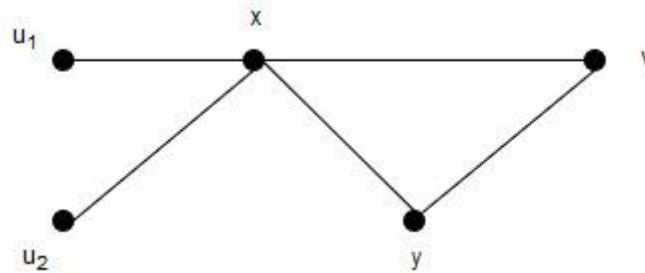
nazveme kritickou pre predĺženia  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ , ak nárast dopravnej práce je pre množinu  $K$  a dané predĺženia maximálny.

Zaujímavá je výpočtová zložitost' problému hľadania kritickej množiny hrán. Ak sú predĺženia  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  dostatočne veľké – to znamená, že je výhodnejšie použiť alternatívne trasy neobsahujúce hrany  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , tak problém hľadania kritickej množiny hrán je NP-ťažký, pretože je ekvivalentný s problémom MVAP [7]. Ak predpokladáme, že uvedené predĺženia nie sú príliš veľké - to znamená, že pri žiadnej hrane nevolíme alternatívnu trasu, tak hľadanie takejto kritickej množiny možno zrealizovať v polynomiálnom čase. Algoritmu s hľadania kritickej množiny hrán môžeme popísať nasledujúcimi krokmi:

1. Nájdeme najkratšie cesty medzi dvojicami vrcholov z množiny  $A$ . Označme ich  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ .
2. Pre každú hranu  $h$  určíme súčet  $s(h) = \sum w(u)$ , kde suma prebieha cez všetky začiatky ciest z množiny  $C$  takých, že  $h \in c_i$ .
3. Zoradíme hrany zostupne podľa  $s(h)$ . Prvých  $k$  hrán tvorí hľadanú množinu  $K$ .

Uvedený postup si demonštrujeme na príklade dopravnej siete, ktorá je popísaná na obrázku 1. Predpokladajme, že  $k = 1$ , ohodnotenie každej hrany je rovné jednej, zákazníci sú vo vrcholoch  $u_1$  a  $u_2$ , ich váha je 10 a sú obsluhovaní strediskom  $v$ . Ak uvažujeme o prípade, že hrana sa stáva neprejazdnou (respektíve jej predĺženie sa blíži k nekonečnu), tak kritická je

hrana  $\{u_1, x\}$  (dopravná práca sa blíži k nekonečnu). Ak uvažujeme, že predĺženie  $\delta$  je z intervalu  $(0,1)$ , tak kritickou je hrana  $\{x, v\}$ . V tomto prípade vzrastie dopravná práca o hodnotu  $20\delta$ .



Obr. 1. Dopravná sieť pre ilustráciu práce postupu vyhľadania kritických hrán

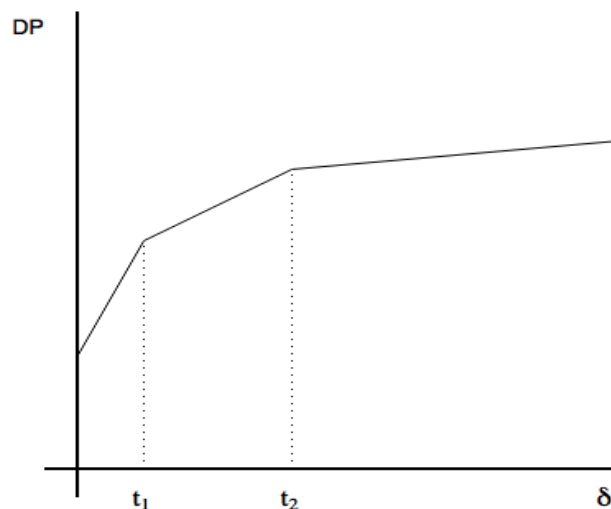
## 4 CHARAKTERISTIKA KRITICKÝCH HRÁN

Zatiaľ sme uvažovali o prípadoch, keď je každý zákazník obsluhovaný strediskom, ktoré mu bolo dopredu určené. Ďalšie sú prípady s neobmedzenou kapacitou stredísk. Vtedy nahrádzame výpočet vzdialenosti dvoch vrcholov výpočtom vzdialenosti vrcholu a množiny, čo je problém s podobnou výpočtovou zložitou. Najkomplikovanejšia situácia nastáva, ak je kapacita stredísk obmedzená, ale v niektorých prípadoch je možné zmeniť stredisko, ktoré obsluží daného zákazníka. V tomto príspevku sa obmedzíme len na prvý spomínaný príklad, teda predpokladáme, že zákazníci svoje priradenie stredisku nemôžu meniť. Ďalším prípadom sa plánujeme venovať v budúcnosti.

Aby sme mohli lepšie pochopiť vlastnosti sietí a množín kritických hrán, popíšeme charakteristiky množiny kritických hrán v prípadoch, keď  $k = 1$  a  $k = 2$ .

### 4.1 Charakteristika pre prípad hľadania jednej kritickej hrany ( $k=1$ )

Jedná sa o najjednoduchší prípad, ktorý môžeme modelovať funkciou jednej premennej, ako je to na obrázku č.2.



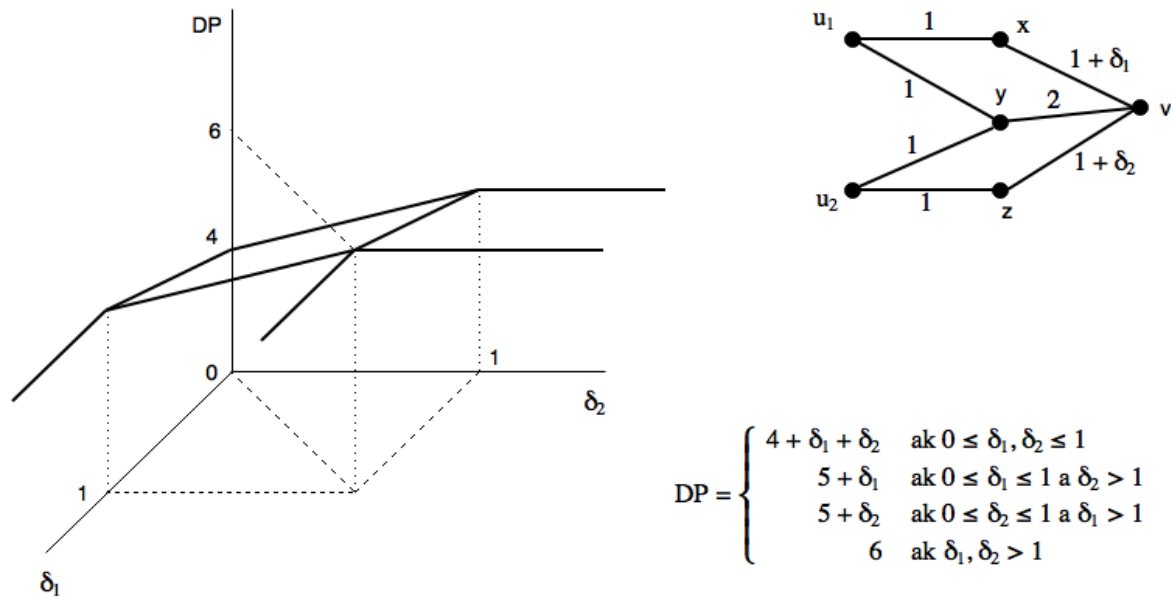
Obr. 2. Tvar charakteristiky úseku dopravnej siete pre prípad  $k=1$

K zlomom v charakteristike popísanej dopravnou prácou dochádza v bodoch, keď pre niektorú dvojicu z  $A$ , je výhodnejšie použiť alternatívnu cestu, ktorá obchádza danú hranu. Tomuto postupu sa v príspevku bližšie nebudeme venovať, popis týchto charakteristík je možné nájsť v príspevkoch od autorov Janáček a Kvet [2][3].

## 4.2 Charakteristika pre prípad hľadania dvoch kritických hrán ( $k=2$ )

Modelovanie tohto prípadu je komplikovanejšie, keďže správanie sa charakteristík jednotlivých hrán sa môže vzájomne ovplyvňovať. Takúto situáciu môžeme reprezentovať funkciou dvoch premenných.

Možné situácie si ilustrujeme na príklade dopravnej siete, ktorá je znázornená na obrázku 3. Vpravo hore je uvedený príklad siete, kde zákazníci  $u_1$  a  $u_2$  s váhou 1 sú obsluhovaný strediskom  $v$ . Predpokladáme, že k predĺženiu doby prejazdu dochádza na hranách  $\{x, v\}$  a  $\{z, v\}$ . Dopravná práca, ako funkcia premenných  $\delta_1$  a  $\delta_2$  je vyjadrená predpisom vpravo dolu a vľavo máme graf tejto funkcie.



Obr. 3. Tvar charakteristiky úseku dopravnej siete pre prípad  $k=2$  a ilustračný príklad

Ukazuje sa, že dôležité je rozdelenie roviny  $\delta_1\delta_2$  na „plôšky“, na ktorých má funkcia  $DP$  rovnaký predpis. Aby sme našli súvis medzi týmto delením roviny a štruktúrou siete, zavedieme si nasledujúci značenie. Nech je daná hrana  $e_1$ . Predĺženie doby prejazdu touto hranou je  $\delta_1$ . Množinu najkratších ciest medzi dvojicami vrcholov z  $A$ , ktoré prechádzajú hranou  $e_1$  pri predĺžení doby prejazdu touto hranou o  $\delta_1$  označíme  $C_1(\delta_1)$ .

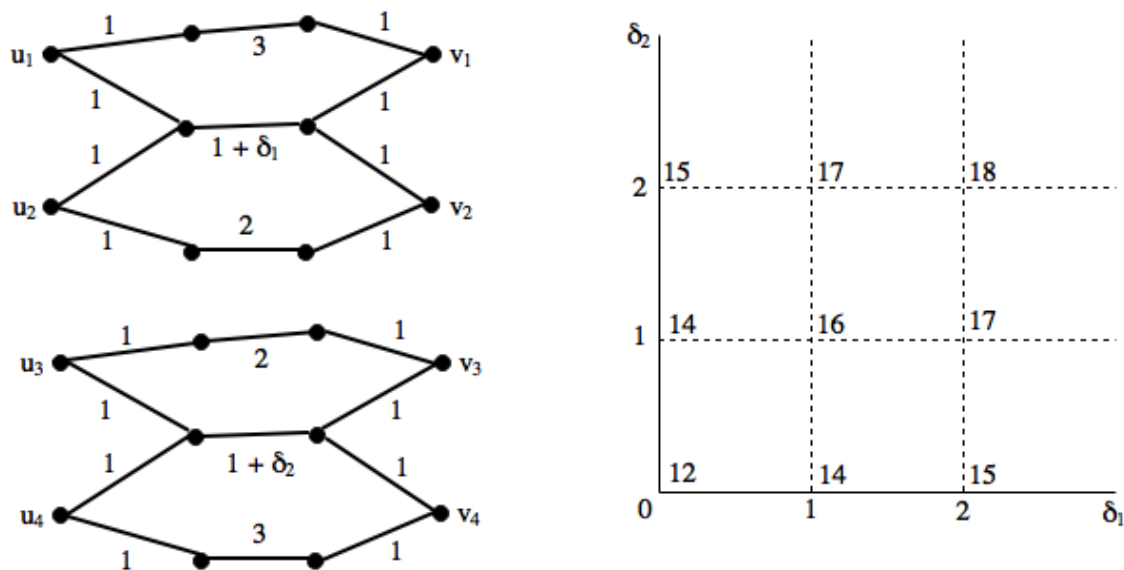
Predpokladajme, že kritické hrany sú  $e_1, e_2$ . Rozlíšime nasledujúce prípady:

1.  $C_1(\delta_1) \cap C_2(\delta_2) = \emptyset$
2.  $C_1(\delta_1) \cap C_2(\delta_2) \neq \emptyset \wedge C_1(\delta_1) - C_2(\delta_2) \neq \emptyset \wedge C_2(\delta_2) - C_1(\delta_1) \neq \emptyset$
3.  $C_1(\delta_1) \subset C_2(\delta_2) \vee C_2(\delta_2) \subset C_1(\delta_1)$
4.  $C_1(\delta_1) = C_2(\delta_2)$

V prvom prípade sa jedná o situáciu, kedy sú kritické hrany od seba vzdialené dostatočne na to, aby sa množiny ovplyvnených dvojíc z  $A$  prekrývali. V takomto prípade môžu nastať dve situácie:

- 1a)  $C_1(0) \cap C_2(0) = \emptyset$  pre ľubovoľné  $\delta_1 \geq 0$  a  $\delta_2 \geq 0$
- 1b) existujú  $\delta_1, \delta_2$  také, že  $C_1(\delta_1) \cap C_2(\delta_2) \neq \emptyset$

Najjednoduchší sa zdá byť podprípád 1a). Rozdelenie roviny má štruktúru, ako je uvedené na obrázku 4. Zákazníci sú vo vrcholoch  $u_1, u_2, u_3, u_4$  a váha každého z nich je 1. Zákazníci sú obsluhovaní strediskami podľa poradia  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Čísla pri jednotlivých bodoch mriežky sú hodnoty dopravnej práce v príslušných bodoch.



Obr. 4. Výpočet

V druhom prípade nastáva situácia, v ktorej síce prienik množín  $C_1$  a  $C_2$  ovplyvnených ciest predĺžením na hranách nie je prázdna množina, avšak časť ciest sa prekrýva.

V treťom prípade sa jedná o situáciu, v ktorej množina  $C_1(\delta_1)$  je podmnožinou množiny  $C_1(\delta_1)$ , prípadne môže nastať opačná situácia.

V štvrtom prípade sa jedná o situáciu, v ktorej sú množiny ovplyvnených ciest totožné. V takomto prípade je možné charakteristiku popísať podobným spôsobom, ako v prípade, ak sa jedná o zmenu v čase prejazdu len jednej hrany.

Vo všetkých prípadoch ale bude zaručené, že tvar charakteristickej funkcie dvoch premenných bude konkávny. Túto vlastnosť bude možné využiť pri návrhu algoritmu, ktorý bude slúžiť na nájdenie najkritickejšieho scenára, podobne ako to bolo v prípade algoritmu pre prípad  $k=1$ , ktorý bol popísaný v [2].

## 5 ZÁVER

V príspevku sme analyzovali spôsob, akým je možné charakterizovať kritické dvojice hrán v dopravnej sieti. Vplyv predĺženia času prejazdu hrán je modelovaný pomocou zmeny dopravnej práce. Pri zmene doby prejazdu na dvoch hranách súčasne vznikajú 4 možné situácie, ktoré boli popísané v príspevku. Na základe týchto charakteristík bude možné navrhnúť algoritmus, ktorý bude hľadať najkritickejšiu dvojicu hrán. Algoritmus môže využiť vlastnosť konkávnosti, ktorá bola použitá aj v prípade hľadania najkritickejšieho scenára pre prípad predĺženia doby prejazdu len na jednej hrane. V ďalšom štúdiu tejto problematiky by sme sa chceli zamerať na hľadanie súvislostí medzi štruktúrou danej siete, umiestnením jej kritických hrán a spomínaným rozdelením roviny  $\delta_1\delta_2$ . Vlastnosť konkávnosti funkcie dvoch premenných, ktorá popisuje vplyv zmien na dvoch kritických hranách, môžeme využiť aj pri návrhu algoritmu na nájdenie kritických scenárov pre potreby testovania robustnosti návrhu verejných obslužných systémov.

## Použitá literatúra

1. GARCÍA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. 2011. Solving large p-median problems with a radius formulation. In: *INFORMS Journal on Computing* 23 (4) s. 546-556
2. JANÁČEK, J., KVET, M. 2017. Characteristic of a Critical Network Arc in a Service System . In: *Sborník „IX International Conference of Transport Problems“*, Katowice, 28. -30. 6. 2017, v tisku
3. JANÁČEK, J., KVET, M. 2012. Relevant Network Distances for Approximate Approach to Large p-Median Problems. In: *Operations research proceedings 2012, September 4-7, 2012, Hannover, Germany*, s. 123-128
4. KVET, M. 2014. Computational Study of Radial Approach to Public Service System Design with Generalized Utility. In: *Digital Technologies 2014: Proceedings of the 10th International IEEE Conference, Žilina, ISBN 978-1-4799-3301-3*, s. 198 – 208
5. SCOTT, D.M., NOVAK, D.C., AULTMAN-HALL, L., GUO, F. 2006. Network robustness index“ a new method for identifying critical links and evaluating the performance of transportation networks. *Journal of Transport Geography* 14 (3), s. 215-227
6. SULLIVAN, J.L., NOVAK, D.C., AULTMAN-HALL, L., SCOTT, D.M. 2010. Identifying critical road segments and measuring system-wide robustness in transportation networks with isolating links: A link-based capacity-reduction problem. In: *Transportation Research Part A* 44 (2010) s. 323-336
7. BALL, M.O., GOLDEN, B.L., 1989. Finding the most vital arcs in a network. *Operations Research Letters* 8 (1989), s. 73–76

## Oznámenie

Táto práca vznikla v rámci projektov VEGA 1/0518/15 “Spoľahlivé záchranné systémy s neistou dosiahnuteľnosťou služby“ a APVV-15-0179 “Spoľahlivosť záchranných systémov na infraštruktúre s neistou funkcionalitou kritických prvkov”.

## Kontaktné údaje

doc. Ing. Michal Koháni, PhD.

Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Slovenská republika

email: [michal.kohani@fri.uniza.sk](mailto:michal.kohani@fri.uniza.sk)

Mgr. Peter Czimmermann, PhD.

Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky, Katedra matematických metód a operačnej analýzy

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Slovenská republika

email: [peter.czimmermann@fri.uniza.sk](mailto:peter.czimmermann@fri.uniza.sk)

# FINANČNÍ ANALÝZA ČESKÝCH CESTOVNÍCH KANCELÁŘÍ S VYUŽITÍM METOD VÍCEKRITERIÁLNÍHO HODNOCENÍ

## FINANCIAL ANALYSIS OF THE CZECH TRAVEL AGENCIES WITH THE MULTI-CRITERIA EVALUATION METHODS USAGE

*Martina Kuncová, Veronika Hedija*

### **Abstrakt**

Článek je zaměřen na srovnání českých cestovních kanceláří z pohledu finanční analýzy. Porovnali jsme 236 cestovních kanceláří na základě 11 vybraných poměrových ukazatelů pro rok 2014 (ukazatele likvidity, rentability, aktivity a zadluženosti). Následně jsme použili vybrané metody vícekriteriální analýzy směřující k mezipodnikovému srovnání. Vzhledem k počtu zařazených podniků jsme pro vyhodnocení pořadí použili metodu TOPSIS a WSA. Metoda WSA se ukázala jako vhodnější metodou hodnocení finančního zdraví podniku a to z důvodu její menší citlivosti na vysokou variabilitu hodnot vstupních kritérií. Finanční zdraví sub-sektoru cestovních kanceláří bylo vyhodnoceno jako málo uspokojivé. S užitím metody WSA bylo zjištěno, že jen přibližně 20 % firem dosáhlo více než 50 % možného skóre finančního zdraví. Tyto závěry potvrdil i rozbor samotných finančních ukazatelů.

***Klíčová slova:** finanční analýza, cestovní kanceláře, vícekriteriální hodnocení, metoda TOPSIS, metoda WSA*

### **Abstract**

The study is focused on comparing Czech travel agencies from a financial analysis point of view. We compared 236 travel agencies based on 11 selected financial ratios for 2014 (liquidity, profitability, activity and financial leverage ratios). Subsequently, we used the selected multi-criteria analysis methods for intercompany comparison. Based on the number of listed businesses, we applied the TOPSIS and WSA method to evaluate the order. The WSA method has been proven to be a more appropriate method of assessing the company's financial health because of its lower sensitivity to the high variability of input criteria. The financial health of the travel agency sub-sector has been assessed as poorly satisfactory. Using the WSA method, it was found that only about 20 % of companies achieved more than 50 % of a possible financial health score. These conclusions were confirmed also using the financial ratios analysis.

***Keywords:** financial analysis, travel agencies, multiple criteria decision making methods, TOPSIS, WSA*

## **1 ÚVOD**

Hodnocení výkonnosti, finančního zdraví podniku patří k ústředním tématům podnikovým věd. Zkoumání různých aspektů finanční výkonnosti a finančního zdraví podniků je také předmětem velkého množství odborných článků a studií (pro přehled například Steigenberger 2014 nebo Richard a kol. 2009). Přístup jednotlivých autorů k výkonnosti a finančnímu zdraví podniků se liší a rozdílné jsou také metody užití k jejich kvantifikaci. Velké množství autorů pracuje pouze s jedním ukazatelem postihujícím zkoumaný fenomén

(Hult a kol. 2008). Nicméně tento přístup může být problematický, protože vybraný ukazatel nemusí postihovat všechny důležité aspekty a zkoumaný vztah tak může být zkreslený.

Prezentovaný článek je zaměřen na hodnocení finančního zdraví podniku. Tradičním přístupem k hodnocení finančního zdraví je užití nástrojů finanční analýzy, nejčastěji pomocí vybraného souboru poměrových finančních ukazatelů (ukazatele rentability, likvidity a aktivity a zadluženosti) (Kislingerová 2010, Sedláček 2001). Mezipodnikové srovnání hodnot vybraných poměrových ukazatelů případně srovnání s odvětvovým průměrem dokáže poskytnout obraz o postavení podniku v té které oblasti. Problematické je ovšem již hodnocení celkového finančního zdraví. Alternativu nabízí bonitní a bankrotní modely, které umožňují firmě přidělit jedinou hodnotu na základě souboru poměrových ukazatelů (Kislingerová 2010, Sedláček 2001). Další alternativou je využití metody vícekriteriálního hodnocení a právě tyto metody a možnosti jejich využití jsou předmětem následujícího článku.

Cílem článku je zhodnocení finančního zdraví cestovních kanceláří v České republice v roce 2014 s užitím vybraného souboru poměrových finančních ukazatelů a vybraných metod vícekriteriálního hodnocení variant.

## 2 DATA A METODY

### 2.1 Data

K hodnocení finančního zdraví vybraných podniků jsou užitá data z databáze Albertina CZ Gold Edition. Databáze Albertina obsahuje vybrané údaje o všech podnicích, kterým bylo přiděleno identifikační číslo. V současnosti obsahuje tato databáze informace o více než 2,7 milionech firem. Vybraly jsme data firem, které jako hlavní činnost dle klasifikace ekonomických činností (CZ-NACE) vykazují činnost cestovních kanceláří (CZ-NACE skupina 79.11).

Vzorek byl dále zúžen na firmy, které vykazovaly potřebné údaje pro zhodnocení finančního zdraví. Finální vzorek zahrnuje data 236 cestovních kanceláří. Dle údajů Českého statistického úřadu tyto reprezentují přibližně 13 procent všech registrovaných cestovních kanceláří v České republice.

### 2.2 Metody vícekriteriálního hodnocení

K posouzení finančního zdraví podniků budou užity vybrané metody vícekriteriálního hodnocení variant. Tyto metody lze použít pro srovnání většího množství variant (firem, výrobků, apod.) na základě několika vybraných kritérií tak, aby výsledkem bylo nalezení nejlepší varianty nebo uspořádání variant, případně rozdělení variant na dobré a špatné. Podrobnější informace lze nalézt v mnoha zdrojích, např. v publikacích Fiala (2008) či Figueira, Greco, Ehrgott (2005). Vzhledem k počtu porovnávaných firem je naším cílem nalézt jejich uspořádání a zároveň získání měřitelného hodnocení pro všechny. K tomuto účelu se nabízí více metod z oblasti maximalizace funkce užitku či minimalizace vzdálenosti od ideální varianty. Vzhledem k charakteru dat včetně velké variability jsme se rozhodli využít metodu TOPSIS patřící do druhé ze zmiňovaných skupin metod a metodu WSA patřící mezi metody maximalizace užitku.

**TOPSIS** (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) patří mezi metody, které se snaží měřit vzdálenost od tzv. ideální a bazální varianty. Předpokladem je, že nejlepší varianta má nejmenší vzdálenost od ideální (obvykle hypotetické) varianty a největší od bazální (taktéž obvykle hypotetické) varianty. Ideální varianta je varianta, která dosahuje

nejlepších hodnot podle všech kritérií, bazální varianta je pak jejím opakem, dosahuje tedy nejhorších hodnot dle všech kritérií. Na základě indexu relativních vzdáleností lze varianty uspořádat do pořadí – čím vyšší relativní index, tím lépe se varianta umístila. Tato metoda vyžaduje váhy kritérií, tj. procento důležitosti daného kritéria. Jelikož jsme zvolili váhy všech kritérií shodné, nebudeme zde žádné metody určení vah popisovat – více o nich viz např. Fiala (2008).

Prvním krokem metody je převod minimalizačních kritérií na kritéria maximalizační, následuje normalizace dat, tj. převedení všech kritérií na stejnou škálu (0;1). Normovanou kritériální matici lze tedy konstruovat podle vztahu

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p (y_{ij})^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

kde

$r_{ij}$  – označuje normovanou hodnotu pro  $i$ -tou variantu a  $j$ -té kritérium a

$y_{ij}$  – původní kritériální hodnotu pro  $i$ -tou variantu a  $j$ -té kritérium po převodu kritérií na maximalizaci.

V dalším kroku je třeba sestavit váženou kritériální matici  $\mathbf{W} = (w_{ij})$  podle vztahu

$$w_{ij} = v_j \cdot r_{ij}$$

kde  $v_j$  označuje váhu kritéria  $j$ . Z matice  $\mathbf{W}$  následně určíme teoretickou ideální ( $H$ ) a bazální ( $D$ ) variantu, kde  $H_j = \max_i w_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  ( $k$  udává počet kritérií, v našem případě 12) a  $D_j = \min_i w_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

Pro každou variantu následuje výpočet vzdálenosti od ideální varianty  $d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (w_{ij} - H_j)^2}$  a od bazální varianty  $d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (w_{ij} - D_j)^2}$ . Z těchto vzdáleností je pak v posledním kroku vypočten tzv. relativní ukazatel vzdálenosti od bazální varianty  $c_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}$

Varianty jsou poté uspořádány podle klesající hodnoty  $c_i$ .

**WSA** (Weighted Sum Approach, metoda váženého součtu) je jednou z metod založených na principu maximalizace užítku. Tato metoda vychází z předpokladů linearity a maximalizace všech dílčích funkcí užítku, které získáme normalizací původních vstupních dat  $Y$  (převodem na interval 0-1):

$$r_{ij} = \frac{(y_{ij} - D_j)}{(H_j - D_j)}, \quad r_{ij} \in (0; 1), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

Normalizovanou matici označíme  $R$  a její prvky  $r_{ij}$ , kde  $r_{ij}$  – označuje normovanou hodnotu pro  $i$ -tou variantu a  $j$ -té kritérium,  $D_j$  – bazální hodnotu, nejhorší možnou hodnotu varianty dle  $j$ -tého kritéria,  $H_j$  – ideální hodnotu, nejlepší možnou hodnotu varianty dle  $j$ -tého kritéria. Je zřejmé, že  $r_{ij} = 0$  pro bazální variantu a  $r_{ij} = 1$  pro ideální variantu. Následným zohledněním vah jednotlivých kritérií a sečtením hodnot za všechna kritéria získáme výsledné užítky srovnávaných variant a na jejich základě pak konečné pořadí variant (čím vyšší užitek, tím lépe). Více např. Fiala (2008).

### 2.3 Poměrové ukazatele jako nástroj hodnocení finančního zdraví podniku

Finanční zdraví cestovních kanceláří bude hodnoceno s užitím souboru poměrových finančních ukazatelů, které jsou používány k hodnocení finančního zdraví podniku v rámci finanční analýzy (Knápková, Pavelková, Šteker 2013, Kislingerová 2010, Sedláček 2001). Obdobně jako v práci týkající se srovnání výrobců deskových her (Štouračová, Kuncová



2014) jsme pro účely našeho srovnání vybrali poměrové ukazatele, konkrétně vybrané ukazatele hodnotící likviditu, rentabilitu, aktivity a zadluženost. Tyto ukazatele jsou definovány jako podíl dvou položek ze základních účetních výkazů – rozvahy a výkazu zisku a ztrát. V našem srovnání patří mezi kritéria pro vícekritériální hodnocení s označením  $K_j$ . Užití metody vícekritériálního hodnocení variant umožní každému podniku přiřadit jedno číslo, na základě které bude možno zhodnotit jeho finanční zdraví.

#### **a) Ukazatele likvidity**

Likvidita vyjadřuje schopnost podniku hradit včas své závazky, tj. přeměnit aktiva na peněžní prostředky. Je vyjádřena poměrem mezi aktivy směnitelnými za peníze a krátkodobými závazky. Obvykle jsou sledovány 3 typy likvidity: běžná, pohotová a hotovostní.

Běžná likvidita (current ratio,  $K_1$ ) ukazuje, kolikrát pokrývají oběžná aktiva krátkodobé závazky podniku, neboli kolika korunami oběžných aktiv je kryta 1 koruna krátkodobých závazků. Běžnou likviditu získáme jako podíl oběžných aktiv a krátkodobých závazků.

Pohotová likvidita (acid test,  $K_2$ ) poměřuje krátkodobé pohledávky a krátkodobý finanční majetek ke krátkodobým závazkům. Z této likvidity se vylučují zásoby, které nejsou možné pohotově přeměnit na peněžní prostředky.

Hotovostní likvidita (cash ratio,  $K_3$ ) vyjadřuje okamžitou schopnost společnosti uhradit své krátkodobé závazky, dává tedy do poměru krátkodobý finanční majetek a krátkodobé závazky.

#### **b) Ukazatele rentability**

Ukazatele rentability poměřují dosažený zisk ke zkoumané hodnotě. Čím vyšší rentability podnik dosahuje, tím lépe hospodaří se svým majetkem a kapitálem. Obvykle jsou sledovány 3 základní ukazatele, a to rentabilita aktiv, rentabilita vlastního kapitálu a rentabilita tržeb.

Rentabilita aktiv (Return on Assets, ROA,  $K_4$ ) poměřuje zisk před zdaněním a nákladovými úroky (také zvaný provozní hospodářský výsledek či EBIT) s celkovými aktivy podniku bez ohledu na to, zda byla financována z vlastního jmění nebo z cizího kapitálu.

Rentabilita vlastního kapitálu (Return on Equity, ROE,  $K_5$ ) vykazuje míru ziskovosti vlastního kapitálu. Vlastníkům podniku ukazuje, jaký zisk jim přináší jejich investice. Sleduje, kolik čistého zisku (zisk po zdanění, EAT) připadá na jednu korunu vlastního kapitálu.

Rentabilita tržeb (Return on Sales, ROS,  $K_6$ ) pak ukazuje, kolik korun čistého zisku podnik utvoří z jedné koruny tržeb.

#### **c) Ukazatele aktivity**

Ukazatele aktivity měří, jak efektivně firma hospodaří se svými aktivy. Je zde ukázán vztah mezi jednotlivými položkami z rozvahy (majetek) a výkazu zisku a ztrát (tržby). Mezi základní ukazatele patří doba obratu aktiv, doba inkasa krátkodobých pohledávek a doba úhrady krátkodobých závazků.

Doba obratu aktiv ( $K_7$ ) udává průměrný počet dnů, za které dojde k obratu celkových aktiv v tržbách. Měří efektivní využívání celkových aktiv.

Doba inkasa krátkodobých pohledávek ( $K_8$ ) udává průměrný počet dnů, po kterých jsou splaceny krátkodobé pohledávky. Ukazuje, jak rychle odběratelé či zákazníci platí za zboží či služby.

Doba úhrady krátkodobých závazků ( $K_9$ ) vyjadřuje průměrný počet dnů, za které podnik platí své krátkodobé závazky u svých dodavatelů.

#### d) Ukazatele zadluženosti

Ukazatele zadluženosti poměřují vztah mezi cizími a vlastními zdroji financování firmy. Udávají, jak je firma schopna hradit své závazky. Pro analýzu byly vybrány ukazatel celkové zadluženosti a ukazatel úrokového krytí.

Ukazatel celkové zadluženosti ( $K_{10}$ ) poměřuje cizí zdroje k celkovým aktivům.

Ukazatel úrokového krytí ( $K_{11}$ ) informuje o tom, kolikrát je podnik schopen krýt úroky ze zisku před zdaněním a úroky (EBIT).

### 3 VÝSLEDKY

Jak již bylo zmíněno výše, ke srovnání jsme použili data za 236 cestovních kanceláří za rok 2014 získaná z databáze Albertina. Dále jsme zvolili 11 poměrových ukazatelů užívaných v rámci finanční analýzy podniku. Problematictější než výběr samotných ukazatelů je volba mezi či doporučených hodnot, kterých by měl konkrétní ukazatel dosahovat, abychom mohli sledované kritérium označit za uspokojivě naplněné. Výklad jednotlivých autorů se ohledně doporučených hodnot ukazatelů finanční analýzy liší a to zejména u ukazatelů likvidity a zadluženosti. Při stanovení „optimálních hodnot“ jsme vycházeli doporučení Kislingerové (2010) a Sedláčka (2001). Užití ukazatele finanční analýzy včetně doporučených hodnot jsou pro přehlednost prezentovány v tabulce 1.

**Tabulka 1:** Užití ukazatele finanční analýzy

Hodnocené kritérium	Označ. kritéria	Poměrový ukazatel	Použité doporučené hodnoty
Rentabilita	$K_1$	Rentabilita vlastního kapitálu (ROE) = EAT/vlastní kapitál	Max
	$K_2$	Rentabilita aktiv = EBIT/celková aktiva	Max
	$K_3$	Rentabilita tržeb (ROS) = EBIT/tržby	Max
Likvidity	$K_4$	Běžná likvidita = oběžná aktiva/krátkodobé cizí zdroje	Vyšší než 1
	$K_5$	Pohotová likvidita = (krátkodobý finanční majetek + krátkodobé pohledávky)/krátkodobé cizí zdroje	0,4 – 1,5
	$K_6$	Okamžitá likvidita = krátkodobý finanční majetek/krátkodobé cizí zdroje	0,2 – 0,5
Aktivita	$K_7$	Doba obratu aktiv = celková aktiva/(tržby/360)	Min
	$K_8$	Doba inkasa pohledávek = krátkodobé pohledávky/(tržby/360)	Min
	$K_9$	Doba úhrady krátkodobých závazků = krátkodobé závazky/(tržby/360)	Max
Zadluženost	$K_{10}$	Celková zadluženost = cizí zdroje/celková aktiva	Nižší než 0,7
	$K_{11}$	Úrokové krytí = EBIT/nákladové úroky	Vyšší než 3

Poznámky: Tržby = Tržby za prodané zboží + Tržby za vlastní výrobky a služby, EAT = výsledek hospodaření po zdanění, EBIT = výsledek hospodaření před zdaněním + nákladové úroky

Zdroj: Vlastní konstrukce na základě Kislingerové (2010), Sedláček (2001)

Z tabulky 1 je patrné, že u většiny kritérií je nutná úprava vstupních dat, aby byla použitelná pro metodu TOPSIS i WSA. Jednak je nutné maximalizovat všechna kritéria, zároveň by se v datech neměly vyskytovat záporné hodnoty. U kritéria  $K_1$  nebyl u jedné firmy dostupný ukazatel vlastní kapitál, nebylo tedy možné určit hodnotu ROE. Proto jsme firmu vyloučili ze srovnání. U kritéria  $K_{11}$  mnoho firem nemá žádné nákladové úroky, což je pozitivní fakt, nicméně nebylo by zde možné vypočítat úrokové krytí. Všem takovým firmám jsme tedy

přiřadili nejvyšší možnou hodnotu dostupnou z dat (1991). Jak je patrné z tabulky 2, rozpětí minimálních a maximálních hodnot je značné a jsou zde často záporné hodnoty.

**Tabulka 2:** Rozpětí nejvyšších a nejnižších hodnot

Krit.	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	K11
MIN	-12,375	-10,222	-57,071	0,0049	0,0049	-0,1386	1,1227	-1080	0,368	0,0008	-36641
MAX	7,632	0,883	0,540	1235	1235	163	166011,4	99405	181954,3	68,444	1991

Zdroj: Vlastní výpočty na základě dat z databáze Albertina

Vzhledem k výše uvedeným požadavkům (Tabulka 1) jsme přistoupili k těmto korekcím:

Kritéria  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  jsou maximalizační, pro vyhnutí se záporným hodnotám jsme všechny záporné (nežádoucí) hodnoty převedli na nulu (tj. minimum se dostává na nulu).

U kritéria  $K_4$  jsou preferovány hodnoty vyšší než 1. Hodnota 1 tedy byla přičtena ke všem ukazatelům v tomto kritériu a následně již lze kritérium maximalizovat.

Nejsložitější situace je u kritérií  $K_5$  a  $K_6$ , kde jsou doporučovány ideální hodnoty v určitém rozmezí (viz Tabulka 1). V dané situaci jsme se rozhodli pro tuto úpravu:

Kritérium  $K_5$ : pokud je hodnota  $x_{i5} < 0,4$  ( $i=1,2,\dots,235$ ), bude nahrazena podílem  $x_{i5}/0,4$ . Jestliže je hodnota  $x_{i5}$  v rozmezí  $<0,4-1,5>$ , pak je nahrazena hodnotou 1. V případě, kdy je ukazatel  $x_{i5} > 1,5$  bude nahrazen podílem  $1,5/x_{i5}$ . Tímto dostáváme všechny hodnoty na škálu  $(0;1>$  a ukazatel již lze maximalizovat.

Kritérium  $K_6$ : úprava je obdobná jako u  $K_5$ . Pokud je hodnota  $x_{i6} < 0,2$ , je nahrazena podílem  $x_{i6}/0,2$ . Ideální hodnoty  $x_{i6}$  z rozpětí  $<0,2;0,5>$  byly nahrazeny hodnotou 1. V případě, kdy bylo  $x_{i6} > 0,5$  byly hodnoty  $x_{i6}$  nahrazeny podílem  $0,5/x_{i6}$ . V této situaci se ještě vyskytla jedna záporná hodnota, všechny přepočtené ukazatele byly tedy navýšeny o tuto položku (v absolutní hodnotě). Následně již hodnoty splňují předpoklad maximalizace.

Kritéria  $K_7$  a  $K_8$  jsou původně minimalizační, všechny hodnoty menší než 365 (doba obratu by neměla přesahovat 1 rok) byly odečteny od 365. Hodnoty vyšší než 365 byly pro maximalizaci nastaveny na nulu, stejně jako nežádoucí záporné hodnoty.

Kritérium  $K_9$  nebylo potřeba měnit, ale i zde byla provedena korekce vysokých čísel – všechny hodnoty vyšší než 365 byly změněny na nulu (neboť ani u doby inkasa není žádoucí, aby byla delší než 1 rok).

U kritéria  $K_{10}$  se nabízelo více možností úprav. Nakonec pro zachování variability dat jsme přistoupili k vydělení všech hodnot  $x_{i7}$  číslem 0,7 čímž se stávají nežádoucí vysoké hodnoty nízkými a naopak žádoucí hodnoty převyšují číslo 1. Tím je již ukazatel možno maximalizovat.

Poslední ukazatel  $K_{11}$  bylo nutné jednak posunout ze záporných hodnot a dále posunout do žádoucí meze. Zde jsme přistoupili ke změně všech hodnot menších než 3 na nulu. Tím je splněno dosažení žádoucích hodnot a zároveň je splněna podmínka maximalizace.

Výše uvedené úpravy nejsou jedinými možnými, nicméně po několika testováních se ukázaly jako vhodné pro danou situaci, a to zejména pro eliminaci nežádoucích koeficientů resp. odlehklých hodnot. Všechny výpočty byly provedeny v programu MS Excel.

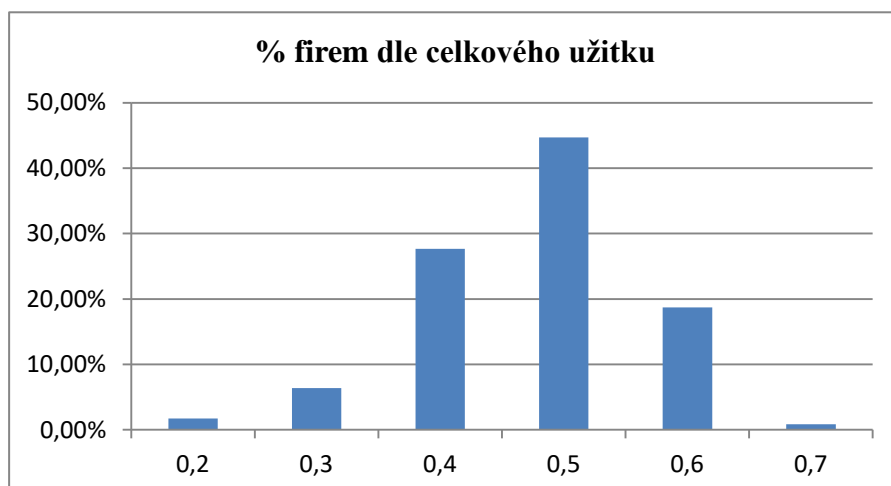
Výsledné skóre metody TOPSIS se teoreticky může pohybovat v rozmezí  $<0;1>$ , čím vyšší hodnota je dosažena, tím se firma více blíží ideální variantě a více se vzdaluje od bazální varianty. Skóre sledovaných firem se pohybuje v rozmezí  $<0,058;0,6>$ . Průměrná hodnota dosahuje pouze hodnoty 0,102 a medián je 0,094. Nejvyššího skóre 0,6 dosahuje pouze jedna

firma, další 4 se pohybují v rozmezí 0,2-0,5 a všechny ostatní jsou pod hodnotou 0,2. 68 % firem je pod hodnotou 0,1 (obrázek 1) a již zmíněných 50 % (medián) je níže než 0,094.



**Obrázek 1:** Podíl firem dle výsledného koeficientu  $c_i$  (Zdroj: Vlastní výpočty na základě dat z databáze Albertina)

Výsledné užítky u metody WSA se také mohou pohybovat v rozmezí  $\langle 0;1 \rangle$ , v dané situaci bylo dosaženo hodnot  $\langle 0,17;0,695 \rangle$  s průměrným užítkem 0,422 a mediánem 0,429. V této situaci není rozložení firem tak jednostranné (obrázek 2) jako v případě metody TOPSIS, kde se ve výpočtu projeví jak velká variabilita hodnot, tak obecně přítomnost extrémů (i po korekci), která měla dopad na normalizaci dat.



**Obrázek 2:** Podíl firem dle výsledného užítku dle WSA (Zdroj: Vlastní výpočty na základě dat z databáze Albertina)

Vybrané výsledky obou metod jsou uvedeny v tabulkách 3 a 4 (včetně původních, nezměněných vstupních dat). Jestliže se podíváme na jednotlivé ukazatele a požadované hodnoty, lepších výsledků srovnání dosáhla metoda WSA, u které mají 3 nejlepší firmy všechny ukazatele rentability ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ) poměrně vysoké, ukazatele likvidity částečně v doporučených mezích, dostatečně nízké ukazatele doby obratu ( $K_7$ ,  $K_8$ ), nepřilíš vysokou dobu úhrady pohledávek ( $K_9$ ), nízkou celkovou zadluženost a vysoké úrokové krytí. V této situaci při velkém počtu srovnávaných firem a velké variabilitě vstupních dat se zdá být metoda WSA vhodnější. I tak lze z výsledků konstatovat, že většina firem si z pohledu sledovaných ukazatelů nevede příliš dobře. To lze doložit i dalším výsledkem: pokud bychom vyřadili všechny firmy, které nesplňují meze pro ukazatele  $K_4$ ,  $K_5$ ,  $K_6$  a  $K_{10}$  a u ukazatelů rentabilit ( $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ) připustili jen kladné hodnoty, zůstane nám z celého počtu 235 firem pouhých 5 firem vyhovujících těmto podmínkám.

Tabulka 3: Vybrané výsledky metody TOPSIS

poř.	č.firmy	$c_i$	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	K11
1	24	0,599	-0,453	-0,430	-3,870	1235	1235	163	3240	2796,52	2,609	0,0008	1991
2	235	0,400	7,632	0,883	0,540	2,491	2,491	2,359	219,93	11,64	88,294	0,894	1991
3	234	0,302	7	0,744	0,088	1,055	1,055	0,505	42,58	21,11	38,358	0,901	1991
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
233	4	0,061	-3,123	-0,014	-0,013	0,881	0,879	0,152	331,76	238,94	328,556	0,990	-0,924
234	20	0,061	-0,634	-0,467	-0,409	4,486	4,486	3,736	315,42	45,42	60,561	0,192	-10,294
235	194	0,058	0,545	-1,458	-3,788	0,152	0,145	0,010	935,42	460,16	3392,419	3,627	1991

Zdroj: Vlastní výpočty na základě dat z databáze Albertina

Tabulka 4: Vybrané výsledky metody WSA

poř.	č.firmy	užitek	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	K11
1	234	0,695	7	0,744	0,088	1,055	1,055	0,505	42,58	21,11	38,358	0,901	1991
2	235	0,660	7,632	0,883	0,540	2,491	2,491	2,359	219,93	11,64	88,294	0,894	1991
3	191	0,578	0,486	0,368	0,038	0,646	0,646	0,517	36,85	3,33	25,859	0,187	1991
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
233	223	0,193	1,283	-0,175	-0,150	0,078	0,078	-0,139	309,85	25,31	116,642	1,150	-9,517
234	145	0,181	0,158	0,018	0,046	1,466	1,466	0,885	923,73	320,24	551,654	0,960	2,695
235	194	0,170	0,058	0,545	-1,458	-3,788	0,152	0,145	0,01	935,42	460,16	3392,419	3,627

Zdroj: Vlastní výpočty na základě dat z databáze Albertina

## 4 ZÁVĚR

Cílem příspěvku bylo zhodnotit finanční zdraví cestovních kanceláří, které působí v České republice s užitím vybraných metod vícekriteriálního rozhodování. Finanční zdraví bylo posuzováno s užitím vybraných 11 poměrových ukazatelů finanční analýzy, konkrétně vybraných ukazatelů likvidity, rentability, zadluženosti a aktivity. Tyto ukazatele potom tvořily vstupní data metod vícekriteriálního rozhodování. S užitím modelů vícekriteriálního rozhodování bylo možné každému posuzovanému podniku přiřadit jednu souhrnnou hodnotu, která umožnila rámcově posoudit jeho finanční zdraví a určit jeho pořadí v rámci ostatní konkurentů na trhu. Aplikovány byly metody TOPSIS a WSA.

Bylo zjištěno, že finanční zdraví českých cestovních kanceláří není uspokojivé. To potvrdily obě aplikované metody. Velmi podobné jsou také závěry obou metod ohledně výběru nejlepších a nejhorších firem v odvětví z hlediska finančního zdraví. Nicméně metoda WSA se jeví jako vhodnější metodou hodnocení finančního zdraví podniku a to z důvodu její menší citlivosti na vysokou variabilitu hodnot vstupních kritérií. S užitím této metody bylo zjištěno, že jen přibližně 20 % firem dosáhlo více než 50 procent možného skóre finančního zdraví a cca 40 % posuzovaných firem dosáhlo hodnoty pod úrovní 50 procent možného skóre. Obdobné závěry o nepříliš uspokojivém finančním zdraví implikuje také rozbor samotných poměrových ukazatelů. Drobnou komplikací byl převod reálně zjištěných dat tak, aby vyjadřovali požadovaný ukazatel jak z pohledu finanční analýzy, tak z pohledu použitých matematických metod. Je zřejmé, že použití jiných úprav by mělo vliv na celkové uspořádání firem, nicméně fakt, že většina sledovaných firem nevykazuje známky dobrého finančního zdraví, by to neovlivnilo. Naší snahou tedy bylo i ukázat, jak v dané situaci využít metody vícekriteriálního hodnocení pro získání uspořádání a určitého celkového ohodnocení firem.

Na tento článek naváže další výzkum zaměřený na identifikaci faktorů, které determinují finanční zdraví českých cestovních kanceláří. Zejména bude zkoumán vliv stáří firmy a její velikosti. Výsledky vícekritériálního hodnocení prezentovaného v tomto článku budou sloužit jako vstupní data pro tuto další analýzu.

### **Poděkování**

Tento výzkum byl financován z prostředků Interní grantové soutěže Vysoké školy polytechnické Jihlava jako projekt č. 1170/4/176, „Vliv vybraných faktorů na výkonnost firem v České republice“.

### **Použitá literatura**

1. FIALA, P. 2008. Modely a metody rozhodování. Praha: Oeconomica.
2. FIGUEIRA, J., GRECO, S., EHRGOTT M. 2005. Multiple Criteria Decision Analysis – State of the Art Surveys. New York : Springer Science + Business Media Inc.
3. HULT, G.T.M., KETCHEN, D. J., CHABOWSKI, B.R. ET AL. 2008. An assessment of the measurement of performance in international business research. In. Journal of International Business Studies, roč. 39, č. 6, s. 1064 –1080.
4. KISLINGEROVÁ, E. 2010. Manažerské finance. 3. vyd. Praha: C.H. Beck.
5. KNÁPKOVÁ, A., PAVELKOVÁ, D., ŠTEKER, K. 2013. Finanční analýza: komplexní průvodce s příklady. 2. rozš. vyd. Praha: Grada Publishing, a. s.
6. RICHARD, P.J., DEVINNEY, T.M., YIP, G.S., JOHNSON, G. 2009. Measuring organizational performance: Towards methodological best practice. In. Journal of Management, roč. 35, č. 3, s. 718–804.
7. SEDLÁČEK, J. 2001. Účetní data v rukou manažera – finanční analýza v řízení firmy. 2. dopl. vyd. Praha: ComputerPress.
8. SCHOLLEOVÁ, H. 2008. Ekonomické a finanční řízení pro neekonomy. Praha: Grada Publishing, a. s.
9. STEIGENBERGER, N. 2014. Only a matter of chance? How firm performance measurement impacts study results. In. European Management Journal, roč. 32, č. 1, s. 46–65.
10. ŠTOURAČOVÁ, I., KUNCOVÁ, M. 2014. Srovnání výrobců deskových her na českém trhu. In. Logos Polytechnikos, roč. 5, č.3, s.43-54.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Martina Kuncová, Ph.D.

Vysoká škola polytechnická Jihlava, katedra ekonomických studií

Tolstého 16, 586 01 Jihlava

Tel: (00420) 575 141 215

email: [martina.kuncova@vspj.cz](mailto:martina.kuncova@vspj.cz)

Ing. Veronika Hedija, Ph.D.

Vysoká škola polytechnická Jihlava, katedra ekonomických studií

Tolstého 16, 586 01 Jihlava

Tel: (00420) 575 141 204

email: [veronika.hedija@vspj.cz](mailto:veronika.hedija@vspj.cz)

# JEDNODUCHÝ PROGRAM NA PODPORU SEKVENČNÉHO TESTOVANIA ADF TESTU V PROGRAME EViews

## SIMPLE PROGRAM TO SUPPORT SEQUENTIAL TESTING OF AUGMENTED DICKEY-FULLER TEST IN EViews<sup>1</sup>

*Martin Lukáčik*

### **Abstrakt**

Testovanie stacionarity sa stalo bežnou súčasťou takmer všetkých analýz, lebo významne ovplyvňuje výber nástrojov a metód, ktoré sa pri nich použijú. Najčastejšie aplikovaným testom je rozšírený Dickeyho-Fullerov (ADF) test. Predmetom tohto príspevku je vytvorenie jednoduchého programu na podporu sekvenčného testovania ADF testu v programe EViews.

***Kľúčové slová:** rozšírený Dickeyho-Fullerov test jednotkového koreňa, sekvenčný postup, EViews*

### **Abstract**

Testing of stationarity has become a common part of almost all the analysis because significantly affects the choice of tools and methods that are used in them. The most commonly applied test is augmented Dickey-Fuller (ADF) test. The aim of this paper is to create the simple program to support sequential testing of ADF test in EViews.

***Keywords:** augmented Dickey-Fuller unit root test, sequential testing, EViews*

## **1 ÚVOD**

Lukáčik a Lukáčiková (2008) uvádzajú, že použitie časových radov v ekonometrických modeloch vyžaduje úpravu klasických predpokladov lineárneho modelu z dôvodu absencie realizácie náhodného výberu ako základnej podmienky ich aplikácie. Riešenie tohto problému si vyžaduje doplnenie predpokladov, aby sa zabezpečili platnosť zákona veľkých čísel a centrálnej limitnej vety. Tým sa do ekonometrie prináša nevyhnutnosť analýzy stacionarity, ktorá bola predtým doménou štatistickej analýzy časových radov.

Testovanie stacionarity sa používa takmer pri všetkých typoch ekonometrických analýz. Nájdeme ho napr. pri modelovaní cyklov alebo konštantnosti makroekonomických podielov, ktorými sa zaoberal Szomolányi (2013, 2016). Testovanie stacionarity je nevyhnutnou súčasťou kointegračnej analýzy, lebo bez neho by sme ju nevedeli potvrdiť. Aj modelovanie ARIMA procesov alebo volatility je postavené na predpoklade stacionarity skúmaných procesov, preto sa pri nich stacionarita vždy overuje. Jej využitie pri kointegračnej analýze Engla a Grangera ukázala napr. Lukáčiková (2013) alebo König (2013). Analýzu volatility zasa nájdeme napr. u Lukáčikovej (2012) alebo Chocholejškej (2012).

V tomto príspevku najskôr pripomenieme na akom princípe funguje rozšírený Dickeyho-Fullerov test a taktiež prezentujeme aj návrh sekvenčného postupu testovania stacionarity s jeho využitím. Následne sa pokúsime navrhnúť jednoduchý program na podporu sekvenčného testovania ADF testu v programe EViews.

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrická analýza produkčných možností ekonomiky a trhu práce na Slovensku".

## 2 ROZŠÍRENÝ DICKEYHO-FULLEROV TEST

Dickey a Fuller (1981) pomocou simulačných experimentov určili kritické hodnoty podielu odhadu parametra a jeho štandardnej odchýlky. Nazvali ju  $\tau$  štatistika. Dickeyho-Fullerov test porovnáva vypočítanú štatistiku  $\tau$  s kritickou hodnotou Dickeyho-Fullerovho rozdelenia. Nižšia hodnota štatistiky  $\tau$  znamená zamietnutie nulovej hypotézy o nestacionarite procesu, ktorý generoval skúmaný rad. Autori testu si zároveň všimli, že kritické hodnoty  $\tau$  štatistiky závisia od typu skúmaného modelu. Preto určili kritické hodnoty špeciálne pre model bez absolútneho člena a deterministického trendu, osobitne pre model obsahujúci absolútny člen a zvlášť pre model s absolútnym členom a deterministickým trendom.

V prípade, ak je náhodná zložka v testovaných modeloch autokorelovaný proces, klasický Dickeyho-Fullerov test zlyháva. Preto autori testu navrhli rozšíriť pôvodný autoregresný model prvého rádu na všeobecný autoregresný model rádu  $p$ , ktorý eliminuje problém autokorelácie práve pridanými autoregresnými členmi. Kritické hodnoty Dickeyho-Fullerovho testu jednotlivých testovacích rovníc pre rôzne hodnoty hladiny významnosti  $\alpha$  a rôzne hodnoty počtu pozorovaní vidíme v tabuľke 1 a združených hypotéz v tabuľke 2.

V takomto prípade sa skúmajú modely v tvare:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (1)$$

$$\Delta y_t = \mu + \delta y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (2)$$

$$\Delta y_t = \mu + \alpha_1 t + \delta y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta y_{t-j} + u_t \quad (3)$$

Testovanie s modelmi (1) až (3) sa nazýva *rozšírený Dickeyho-Fullerov test (ADF test)*. Rozhodnutie o počte autoregresných členov  $p$  v skúmaných rovniciach, ktorý najlepšie eliminuje problém autokorelácie náhodných zložiek, sa obvykle vykonáva pomocou informačných kritérií navrhnutých Akaikeom alebo Schwarzom. Vzhľadom na počet možných kombinácií pre testovanie, ktoré sú obsiahnuté v ponúknutých modeloch a hypotézach sa používa rozšírený Dickeyho-Fullerov test obvykle v *sekvenčnej procedúre*, ktorá je zobrazená na obrázku 1 a ktorej podrobnejší postup je vysvetlený napr. v Lukáčik a Lukáčiková (2013). Tam je zároveň na schéme zobrazený sekvenčný postup s podmienenými hypotézami.

Tabuľka 1: Kritické hodnoty Dickeyho-Fullerovho  $\tau$ -testu

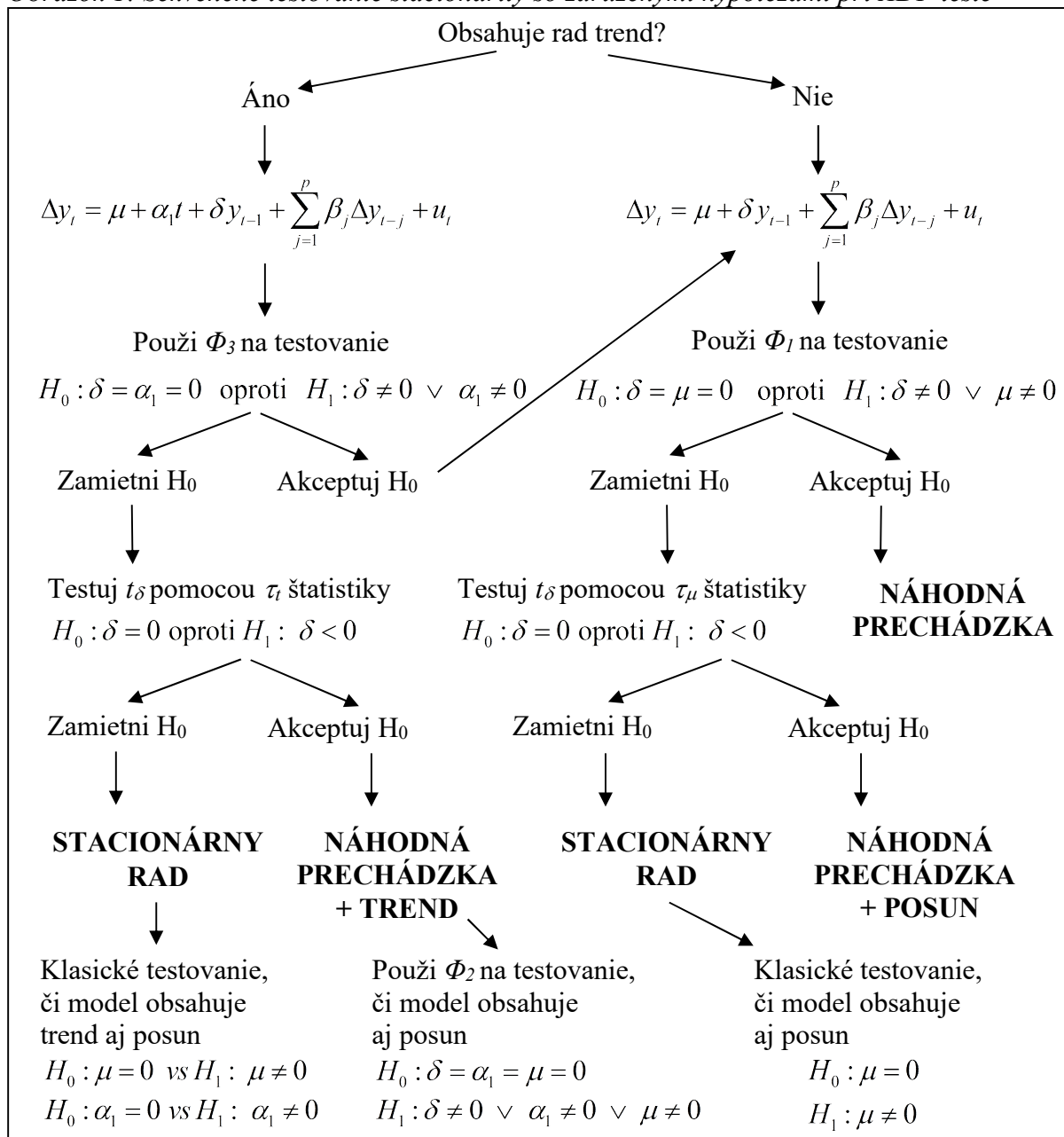
$\alpha$	0,01	0,025	0,05	0,10	0,01	0,025	0,05	0,10	0,01	0,025	0,05	0,10
$n$	$\tau$ -test (model bez konštanty)				$\tau_\mu$ -test (model s konštantou)				$\tau_t$ -test (model s konštantou a trendom)			
25	-2,66	-2,26	-1,95	-1,60	-3,75	-3,33	-3,00	-2,62	-4,38	-3,95	-3,60	-3,24
50	-2,62	-2,25	-1,95	-1,61	-3,58	-3,22	-2,93	-2,60	-4,15	-3,80	-3,50	-3,18
100	-2,60	-2,24	-1,95	-1,61	-3,51	-3,17	-2,89	-2,58	-4,04	-3,73	-3,45	-3,15
250	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	-3,46	-3,14	-2,88	-2,57	-3,99	-3,69	-3,43	-3,13
500	-2,58	-2,23	-1,95	-1,62	-3,44	-3,13	-2,87	-2,57	-3,98	-3,68	-3,42	-3,13

Tabuľka 2: Kritické hodnoty združenej hypotézy Dickeyho-Fullerovho  $\Phi$ -testu

$\alpha$	0,01	0,025	0,05	0,1	0,01	0,025	0,05	0,1	0,01	0,025	0,05	0,1
$n$	Model (3): $\Phi_2$ test, $H: \mu = a_1 = \delta = 0$				Model (3): $\Phi_3$ test, $H: a_1 = \delta = 0$				Model (2): $\Phi_1$ test, $H: \mu = \delta = 0$			
25	8,21	6,75	5,68	4,67	10,61	8,65	7,24	5,91	7,88	6,30	5,18	4,12
50	7,02	5,94	5,13	4,31	9,31	7,81	6,73	5,61	7,06	5,80	4,86	3,94
100	6,50	5,59	4,88	4,16	8,73	7,44	6,49	5,47	6,70	5,57	4,71	3,86
250	6,22	5,40	4,75	4,07	8,43	7,25	6,34	5,39	6,52	5,45	4,63	3,81
500	6,15	5,35	4,71	4,05	8,34	7,20	6,30	5,36	6,47	5,41	4,61	3,79



Obrázok 1: Sekvenčné testovanie stacionarity so združenými hypotézami pri ADF teste



### 3 PROGRAM NA PODPORU SEKVENČNÉHO TESTOVANIA

Na získanie výsledkov ADF testu premennej  $y$  v programe EViews 9 help odporúča príkaz:

`y.uroot(adf,trend,dif=0,lagmethod=sic,save=matrix_results_adf_t)`

ktorý má zobrazit' výsledky testovania hypotézy  $\delta = 0$  v modeli (3) a podobne aj v ďalších. Faktom, ktorý si uvedomujú aj tvorcovia (<http://forums.eviews.com/viewtopic.php?t=6755>), je, že uvedené príkazy (rovnako ako viaceré ďalšie) nefungujú z príkazového riadku, ale len v programoch. Zároveň funkcionality výberom z ponuky *View* objektu *Series* neumožňuje napr. spomínané uloženie výsledkov do objektu *Matrix/Vector* na ďalšiu prácu so získanými hodnotami. Preto je výhodné celú sekvenciu zapracovať do programu, ktorý ponúkne analytikovi všetky potrebné údaje pre rozhodovanie podľa sekvencie na obrázku 1. Program na jednotlivých rozhodovacích miestach nerozhodne za užívateľa, lebo všetky závery testovania hypotéz sú len pravdepodobnostné a rozhodnutia sú na analytikovi.

Tabuľka 3: Program, ktorý sa spúšťa pri otvorení pracovného súboru s údajmi na testovanie

```

%depv = "" ' premenna uchovavajuca meno testovanej premennej
!dial = 0 ' vysledok dialogu -1 indikuje vyber Cancel, 0 indikuje vyber OK
!dial = @uiedit(%depv,"Zadaj nazov testovanej premennej") ' dialog zadania testov. prem.
if !dial=-1 then 'ak ho pouzivatel zrusi, potom sa program stopne
    stop
endif

' vytvorenie mena premennej bez zatvoriek a ciarok
%dep=@replace(%depv, "(", "")
%dep=@replace(%dep, ")", "")
%dep=@replace(%dep, ",", "")
if %dep<>%depv then series {%dep}={%depv}
endif
series d{%dep}=d({%depv})

' testovanie v modeli s konstantou a trendom
freeze(%dep)_adf_trend {%dep}.uroot(adf,trend,lagmethod=sic,save=%dep)_adf_t)
ttom(%dep).uroot(trend), {%dep}_adf_tr)
!a=%dep)_adf_t(2)
if !a=0 then equation {%dep}_adf_f3a2.ls d{%dep}) c {%dep}(-1) @trend
    else equation {%dep}_adf_f3a2.ls d{%dep}) c {%dep}(-1) @trend d{%dep}(-1 to -!a)
endif
ttom(%dep)_adf_f3a2.wald c(1)=c(2)=c(3)=0,{%dep}_adf_phi2)
ttom(%dep)_adf_f3a2.wald c(2)=c(3)=0,{%dep}_adf_phi3)

' testovanie v modeli s konstantou
freeze(%dep)_adf_const) {%dep}.uroot(adf,const,lagmethod=sic,save=%dep)_adf_c)
ttom(%dep).uroot(const), {%dep}_adf_cn)
!b=%dep)_adf_c(2)
if !b=0 then equation {%dep}_adf_f1.ls d{%dep}) c {%dep}(-1)
    else equation {%dep}_adf_f1.ls d{%dep}) c {%dep}(-1) d{%dep}(-1 to -!b)
endif
ttom(%dep)_adf_f1.wald c(1)=c(2)=0,{%dep}_adf_phi1)

' testovanie v modeli bez konstanty a trendu
freeze(%dep)_adf_none) {%dep}.uroot(adf,none,lagmethod=sic,save=%dep)_adf_n)
ttom(%dep).uroot(none), {%dep}_adf_no)

' vytvorenie matic s kritickymi hodnotami Phi statistik
matrix(5,3) phi1_crit
phi1_crit.fill(b=r) 4.12, 5.18, 7.88, 3.94, 4.86, 7.06, 3.86, 4.71, 6.70, 3.81, 4.63, 6.52, 3.79,
4.61, 6.47
matrix(5,3) phi2_crit
phi2_crit.fill(b=r) 4.67, 5.68, 8.21, 4.31, 5.13, 7.02, 4.16, 4.88, 6.50, 4.07, 4.75, 6.22, 4.05,
4.71, 6.15
matrix(5,4) phi3_crit
phi3_crit.fill(b=r) 25, 5.91, 7.24, 10.61, 50, 5.61, 6.73, 9.31, 100, 5.47, 6.49, 8.73, 250, 5.39,
6.34, 8.43, 500, 5.36, 6.30, 8.34

```

```
' vyber vseobecnych kritickych hodnot podla poctu stupnov volnosti modelu s trendom
if {%dep}_adf_t(1) - {%dep}_adf_t(2) - 3 < 50 then !c=1
else if {%dep}_adf_t(1) - {%dep}_adf_t(2) - 3 < 100 then !c=2
    else if {%dep}_adf_t(1) - {%dep}_adf_t(2) - 3 < 250 then !c=3
        else if {%dep}_adf_t(1) - {%dep}_adf_t(2) - 3 < 500 then !c=4 else !c=5
            endif
        endif
    endif
endif
endif
```

```
' vytvorime tabulku na zapis výsledkov
```

```
table(15,5) adf_{%dep}
setcolwidth(adf_{%dep},1,12)
setcolwidth(adf_{%dep},5,11)
adf_{%dep}.setmerge(a14:e14)
adf_{%dep}.setmerge(a15:e15)
adf_{%dep}.setjust(a14:e15) left
adf_{%dep}.settextcolor(a15:e15) @rgb(255, 0, 0)
adf_{%dep}.setlines(a1:e13) +o
adf_{%dep}.setformat(b3:e13) f.4
adf_{%dep}.setformat(c7:e9) f.2
adf_{%dep}.setlines(a2:e2) +o
adf_{%dep}.setlines(a6:e6) +o
adf_{%dep}.setlines(a10:e10) +o
adf_{%dep}.setlines(b2:b13) +o
adf_{%dep}.setfillcolor(d2:d13) @rgb(240, 240, 240)
adf_{%dep}.setlines(d2:d13) +o
adf_{%dep}.settextcolor(c7:e9) @rgb(255, 0, 0)
adf_{%dep}(1,1) = "Variable"
adf_{%dep}(2,1) = "Tau in Model"
adf_{%dep}(2,2) = "Value"
adf_{%dep}(2,3) = "Tau crit 1 %"
adf_{%dep}(2,4) = "Tau crit 5 %"
adf_{%dep}(2,5) = "Tau crit 10 %"
adf_{%dep}(6,1) = "Phi in Model"
adf_{%dep}(6,2) = "Value"
adf_{%dep}(6,3) = "Phi crit 1 %"
adf_{%dep}(6,4) = "Phi crit 5 %"
adf_{%dep}(6,5) = "Phi crit 10 %"
adf_{%dep}(3,1) = "Trend"
adf_{%dep}(4,1) = "Const"
adf_{%dep}(5,1) = "None"
adf_{%dep}(7,1) = "Trend, Phi2"
adf_{%dep}(8,1) = "Trend, Phi3"
adf_{%dep}(9,1) = "Const, Phi1"
adf_{%dep}(10,1) = "t in Model"
adf_{%dep}(11,1) = "Trend, t_tr"
adf_{%dep}(12,1) = "Trend, t_cn"
adf_{%dep}(13,1) = "Const, t_cn"
adf_{%dep}(1,2) = %depv
```

```

adf_{%dep}(3,2) = {%dep}_adf_tr(1,3)
adf_{%dep}(3,3) = {%dep}_adf_tr(2,3)
adf_{%dep}(3,4) = {%dep}_adf_tr(3,3)
adf_{%dep}(3,5) = {%dep}_adf_tr(4,3)
adf_{%dep}(4,2) = {%dep}_adf_cn(1,3)
adf_{%dep}(4,3) = {%dep}_adf_cn(2,3)
adf_{%dep}(4,4) = {%dep}_adf_cn(3,3)
adf_{%dep}(4,5) = {%dep}_adf_cn(4,3)
adf_{%dep}(5,2) = {%dep}_adf_no(1,3)
adf_{%dep}(5,3) = {%dep}_adf_no(2,3)
adf_{%dep}(5,4) = {%dep}_adf_no(3,3)
adf_{%dep}(5,5) = {%dep}_adf_no(4,3)
adf_{%dep}(7,2) = {%dep}_adf_phi3(1,1)
adf_{%dep}(7,3) = phi3_crit(!c,4)
adf_{%dep}(7,4) = phi3_crit(!c,3)
adf_{%dep}(7,5) = phi3_crit(!c,2)
adf_{%dep}(8,2) = {%dep}_adf_phi2(1,1)
adf_{%dep}(8,3) = phi2_crit(!c,3)
adf_{%dep}(8,4) = phi2_crit(!c,2)
adf_{%dep}(8,5) = phi2_crit(!c,1)
adf_{%dep}(9,2) = {%dep}_adf_phi1(1,1)
adf_{%dep}(9,3) = phi1_crit(!c,3)
adf_{%dep}(9,4) = phi1_crit(!c,2)
adf_{%dep}(9,5) = phi1_crit(!c,1)
adf_{%dep}(11,2) = {%dep}_adf_f3a2.@tstats(3)
adf_{%dep}(11,3) = @qtdist(0.995,{%dep}_adf_t(1)-{%dep}_adf_t(2)-3)
adf_{%dep}(11,4) = @qtdist(0.975,{%dep}_adf_t(1)-{%dep}_adf_t(2)-3)
adf_{%dep}(11,5) = @qtdist(0.95,{%dep}_adf_t(1)-{%dep}_adf_t(2)-3)
adf_{%dep}(12,2) = {%dep}_adf_f3a2.@tstats(1)
adf_{%dep}(12,3) = @qtdist(0.995,{%dep}_adf_t(1)-{%dep}_adf_t(2)-3)
adf_{%dep}(12,4) = @qtdist(0.975,{%dep}_adf_t(1)-{%dep}_adf_t(2)-3)
adf_{%dep}(12,5) = @qtdist(0.95,{%dep}_adf_t(1)-{%dep}_adf_t(2)-3)
adf_{%dep}(13,2) = {%dep}_adf_f1.@tstats(1)
adf_{%dep}(13,3) = @qtdist(0.995,{%dep}_adf_c(1)-{%dep}_adf_c(2)-2)
adf_{%dep}(13,4) = @qtdist(0.975,{%dep}_adf_c(1)-{%dep}_adf_c(2)-2)
adf_{%dep}(13,5) = @qtdist(0.95,{%dep}_adf_c(1)-{%dep}_adf_c(2)-2)
adf_{%dep}(14,1) = "Tau crit - MacKinnon (1996) one-sided p-values."
adf_{%dep}(15,1) = "Phi crit - only informative for "+@str(phi3_crit(!c,1))+
observations."

```

' zobrazenie vysledkov v tabulke

```
show adf_{%dep}
```

' zmazeme vsetky vytvorene pomocne objekty

```
d {%dep}_*
```

```
d d{%dep}
```

```
if {%dep}<>{%depv} then d {%dep}
```

```
endif
```

```
d phi?_crit
```

Program sme spustili pre štvrtročný rad sezónne očistených miezd SR od roku 1995 do 2015.

Tabuľka 4: Výsledky získané z dvoch spustení programu pre premenné  $mzdy\_sa$  a  $\Delta mzdy\_sa$

Variable $mzdy\_sa$					Variable $d(mzdy\_sa)$				
Tau in Model	Value	Tau crit 1 %	Tau crit 5 %	Tau crit 10 %	Tau in Model	Value	Tau crit 1 %	Tau crit 5 %	Tau crit 10 %
Trend	-0.6561	-4.0724	-3.4649	-3.1590	Trend	-7.9148	-4.0739	-3.4655	-3.1594
Const	-0.7025	-3.5113	-2.8968	-2.5856	Const	-7.9270	-3.5123	-2.8972	-2.5859
None	2.0255	-2.5942	-1.9449	-1.6141	None	-1.0897	-2.5942	-1.9449	-1.6141
Phi in Model	Value	Phi crit 1 %	Phi crit 5 %	Phi crit 10 %	Phi in Model	Value	Phi crit 1 %	Phi crit 5 %	Phi crit 10 %
Trend, Phi3	0.4155	9.31	6.73	5.61	Trend, Phi3	31.3282	9.31	6.73	5.61
Trend, Phi2	71.2529	7.02	5.13	4.31	Trend, Phi2	20.8884	7.02	5.13	4.31
Const, Phi1	107.5831	7.06	4.86	3.94	Const, Phi1	31.4233	7.06	4.86	3.94
t in Model	Value	Tau crit 1 %	Tau crit 5 %	Tau crit 10 %	t in Model	Value	Tau crit 1 %	Tau crit 5 %	Tau crit 10 %
Trend, t_tr	0.5844	2.6387	1.9901	1.6641	Trend, t_tr	-0.5817	2.6395	1.9905	1.6644
Trend, t_cn	2.2933	2.6387	1.9901	1.6641	Trend, t_cn	5.1324	2.6395	1.9905	1.6644
Const, t_cn	5.6834	2.6379	1.9897	1.6639	Const, t_cn	6.7830	2.6387	1.9901	1.6641

Tau crit - MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Phi crit - only informative for 50 observations.

Tau crit - MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Phi crit - only informative for 50 observations.

Z výsledkov vidíme, že premenná  $mzdy\_sa$  je nestacionárna (ani v jednom testovacom modeli neplatí  $t_\delta < \tau$ ), ale prvá diferencia  $mzdy\_sa$  je stacionárna (ako vhodný testovací model sa javí model s konštantou, lebo v modeli s trendom je parameter pri trende štatisticky nevýznamný). To znamená, že premenná  $mzdy\_sa$  je integrovaná rádu 1.

## 4 ZÁVER

Na testovanie stacionarity v EViews možno využiť zabudovanú funkcionálnu program. Ale aj jednoduchý prezentovaný program môže byť lepším nástrojom ako štandardný výpis testu.

### Použitá literatúra

1. DICKEY, D.A., FULLER, W.A. 1981. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. In: *Econometrica*, roč. 49, s. 1057-72.
2. Eviews forum. Dostupné: <http://forums.eviews.com/viewtopic.php?t=6755> [31.03.2017]
3. CHOCHOLATÁ, M. 2012. Vybrané prístupy k modelovaniu volatility ekonomických časových radov. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
4. KÖNIG, B. 2013. Analýza fiškálnej politiky v SR: ECM prístup. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
5. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2008. Význam testovania stacionarity v ekonometrii. In: *Ekonomika a informatika*, roč. 6, č. 1, s. 146-157.
6. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. *Vektorovo autoregresné modely a ich aplikácie v makroekonomickej analýze*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
7. LUKÁČIKOVÁ, A. 2012. Modelovanie volatility indexu DAX pomocou modelov ARCH a GARCH. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
8. LUKÁČIKOVÁ, A. 2013. Englova-Grangerova procedúra a dynamická metóda najmenších štvorcov. In: *AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: 15. medzinárodná vedecká konferencia*, Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
9. SZOMOLÁNYI, K. 2013. Model slovenského hospodárskeho cyklu. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
10. SZOMOLÁNYI, K. 2016. Sú podiely na produkcii dlhodobu konštantné? In: *Nové trendy v ekonometrii a operačnom výzkumu*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

### Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822, email: martin.lukacik@euba.sk

# APLIKÁCIA DIDAKTICKÝCH ZÁSAD VO VÝUČBE EKONOMETRIE<sup>1</sup>

## APPLICATION OF DIDACTIC PRINCIPLES IN ECONOMETRICS TEACHING

*Adriana Lukáčiková*

### Abstrakt

Didaktické zásady sú dôležitou súčasťou výchovno-vzdelávacieho procesu. Ich uplatňovanie nielen na základných a stredných školách, ale aj na vysokých školách prispieva k skvalitňovaniu výučby. Vo výučbe kvantitatívne orientovaných predmetov ekonomického zamerania je vhodné aplikovať najmä zásadu názornosti, odbornosti, spájania teórie s praxou, ale aj ostatné didaktické zásady

**Keľúčov  slová:** *didaktické zásady, ekonometria, estimátor najmenšich štvorcov*

### Abstract

Didactic principles are an important part of the education process. Their application not only to primary and secondary schools but also to higher education institutions contributes to the improvement of teaching. In the teaching of quantitatively oriented subjects of economic focus, it is appropriate to apply especially the principle of clarity, expertise, the combination of theory and practice, but also other didactic principles.

**Keywords:** *didactic principles, econometrics least square estimator*

## 1  VOD

Predmety z oblasti ekonometrie vyučujú učitelia Katedry operačného v skumu a ekonometrie na Fakulte hospodárskej informatiky, N rodohospodárskej fakulte a Obchodnej fakulte Ekonomickej univerzity v Bratislave. Na Fakulte hospodárskej informatiky Ekonomickej univerzity sa vyučuje na 1. stupni študijného programu účtovníctvo predmet Ekonometria 1. Na študijnom programe 1. stupňa Manažerske rozhodovanie je z kladn  kurz ekonometrie rozdelen  do dvoch predmetov:  vod do ekonometrie 1 a  vod do ekonometrie 2, nakoľko sa predpokladá, že časť študentov bude pokračovať v št diu na študijnom programe 2. stupňa Operačn  výskum a ekonometria.

Náplňou prvej časti je oboznámiť študentov so základnými pojmami a metódami ekonometrie. Na konci semestra by mal študent vedieť odhadnúť a verifikovať jednorovnicov  lineárny ekonometrick  model a realizovať jeho prognostick  aplikáciu. Druh  časť je orientovan  aplik čne, študentom sú prezentovan  rôzne funkčné tvary modelov na modelovanie konkrétného ekonomického vzťahu. Od jednorovnicových modelov sa prechádza k viacrovnicov m, ktoré reprodukuju zložit jšie ekonomick  vzťahy a väzby. Pri výučbe základného kurzu ekonometrie je d ležit  prebudiť záujem študentov o dan 

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0444/15 "Ekonometrick  analýza produkčných moŹnosti ekonomiky a trhu práce na Slovensku".

vedeckú oblasť, pretože väčšina z nich sa dovedy s pojmom ekonometria na rozdiel od ekonomických pojmov používaných v ich doterajšom štúdiu respektíve v bežnom živote ako napríklad financie, účtovníctvo, štatistika, medzinárodný obchod ešte nestretla.

Aplikácia didaktických zásad je dôležitá vo všetkých stupňoch edukačného procesu. Aj keď sa zdá, že najväčší priestor na ich implementáciu je na základných a stredných školách, aj pedagóg na vysokej škole musí byť nielen dobrý odborník vo vedeckej oblasti, ale aj pedagóg. Väčšina učiteľov na vysokých školách didaktické zásady s narastajúcou praxou aplikuje prirodzene aj bez hlbšieho poznania ich obsahu. Avšak pri ich poznaní na začiatku svojej pedagogickej práce by sa znížila pravdepodobnosť, že sa dopustia chýb.

## 2 DIDAKTICKÉ ZÁSADY

Vysoká odborná a vedecká zručnosť v príslušnej disciplíne je základný predpoklad pre vykonávanie profesie vysokoškolského učiteľa. To však ešte neznamená, že učiteľ dokáže motivovať študentov a primeranou formou im reprodukovať nové poznatky. Často mu chýbajú hlbšie informácie o tvorbe vzťahov k študentom, o modernej pedagogike a pedagogickej psychológii, ktoré sú jedným z predpokladov kvalitného vyučovacieho procesu. Nejde teda iba o to, aké poznatky odovzdávame študentom, ale aj o to akou formou.

Pravidlá a zásady na zefektívnenie vyučovacieho procesu nazývame didaktickými zásadami. Didaktické zásady sú všeobecne platné pre všetky stupne škôl, aj keď existujú špecifiká pri ich aplikácii a ich dodržiavanie je predpokladom úspešného a efektívneho vyučovacieho procesu. Sú to najvšeobecnejšie a najdôležitejšie požiadavky, ktoré v súlade s cieľmi pedagogického procesu a s jeho základnými zákonitostami určujú jeho charakter. Jednotlivé zásady sa vo vyučovaní navzájom prelínajú, podporujú a dopĺňajú. (Bajtoš, 2013) Miera ich využitia závisí od konkrétnej vyučovacej situácie.

Turek (2014) definuje didaktické zásady ako požiadavky, ktorými sa má riadiť vyučovacia činnosť učiteľa, učebná činnosť žiaka a výber metód, foriem výučby a materiálnych prostriedkov výučby, aby sa čo najefektívnejšie dosiahli ciele výučby.

Petlák (1997) charakterizuje didaktické zásady ako najvšeobecnejšie alebo najzákladnejšie požiadavky, ktoré v súlade s cieľmi výchovnovzdelávacieho procesu a jeho základnými zákonitostami určujú jeho charakter.

V súčasnej didaktike existuje veľa definícií didaktických zásad a neexistuje jednotný názor hlavne na ich počet a rozsah. Všetci autori sa zhodujú v tom, že didaktické zásady majú veľký význam a pomáhajú skvalitneniu vzdelávacieho procesu. (Šlosár, Novák, 2012)

Ďalej uvedieme niekoľko rozdelení podľa rôznych autorov.

Podľa Tureka (2014) sú to zásada vytvorenia optimálnych podmienok pre vyučovací proces, zásada primeranosti a individuálneho prístupu, zásada vedeckosti, zásada spojenia školy so životom, teórie s praxou, zásada názornosti, zásada motivácie, uvedomelosti a aktivity, zásada sústavnosti a postupnosti, zásada trvácnosti a operatívosti výsledkov vyučovacieho procesu.

Bajtoš (2013) uvádza tieto zásady: zásada utvorenia optimálnych podmienok pre vyučovací proces; zásada motivácie, uvedomelosti a aktivity; zásada názornosti; zásada primeranosti a individuálneho prístupu; zásada trvácnosti a operatívosti výsledkov vyučovacieho procesu; zásada systematickosti; zásada vedeckosti; zásada spojenia školy so životom, teórie s praxou, zásada zamerania vyučovacieho procesu na všestranný rozvoj.

Pri vyučovaní ekonomických odborných predmetov na vysokých školách sa pozornosť sústreďuje na vysvetlenie a dodržiavanie týchto didaktických zásad (Šlosár, Novák, 2012): zásada cieľavedomosti a výchovnosti, zásada aktivity a uvedomelosti, zásada vedeckosti a adekvátnej primeranosti, zásada spájania teórie s praxou, zásada názornosti, zásada

sústavnosti a postupnosti, zásada trvácnosti vedomostí a všestranného rozvoja poznávacích schopností študentov. Ďalej sú opísané zásady, ktoré je vhodné aplikovať pri vyučovaní kvantitatívne orientovaných predmetov.

### 3 APLIKÁCIA DIDAKTICKÝCH ZÁSAD PRI KONŠTRUKCII A KVANTIFIKÁCII LINEÁRNEHO MODELU

Uvažujme problém, v ktorom máme pomocou jednorovnicového lineárneho ekonometrického modelu opísať vývoj objemu úverov.

Na základe poznatkov z ekonomickej teórie, mikroekonómie, makroekonómie, z vlastných skúseností a na základe empirie formulujeme determinanty, ktoré vplývajú na vývoj objemu úverov: úroková miera, priemerná nominálna mzda, inflácia, hrubý domáci produkt

Ak skúmame separátne vzťah objemu úverov (*úvery*) a jedného z faktorov úroková miera (*r*) respektíve priemerná mzda (*mzda*), potom funkčné tvary modelov majú tvar (v prípade lineárneho modelu):

$$úvery_t = \beta_0 + \beta_1 * r_t + u_t,$$

$$úvery_t = \beta_0 + \beta_1 * mzda_t + u_t,$$

V skutočnosti jednotlivé faktory pôsobia súčasne, potom model môže mať napríklad tvar:

$$úvery_t = \beta_0 + \beta_1 * r_t + \beta_2 * mzda_t + u_t,$$

resp uvažujeme aj s vplyvom výšky objemu úverov z predchádzajúceho obdobia:

$$úvery_t = \beta_0 + \beta_1 * úvery_{t-1} + \beta_2 * r_t + \beta_3 * mzda_t + u_t,$$

Vyššie uvedené modely nepokrývajú všetky funkčné tvary, sú len ukážkou spôsobu konštrukcie modelu. Pri modelovaní objemu úverov môžeme uvažovať aj so sezónnosťou v závislosti od periodicity používaných údajov.

Ďalej budeme aplikovať model závislosti objemu úverov od úrokovej miery, keďže tento faktor je na základe ekonomickej teórie najvýznamnejší. Model má tvar:

$$úvery_t = \beta_0 + \beta_1 * r_t + u_t,$$

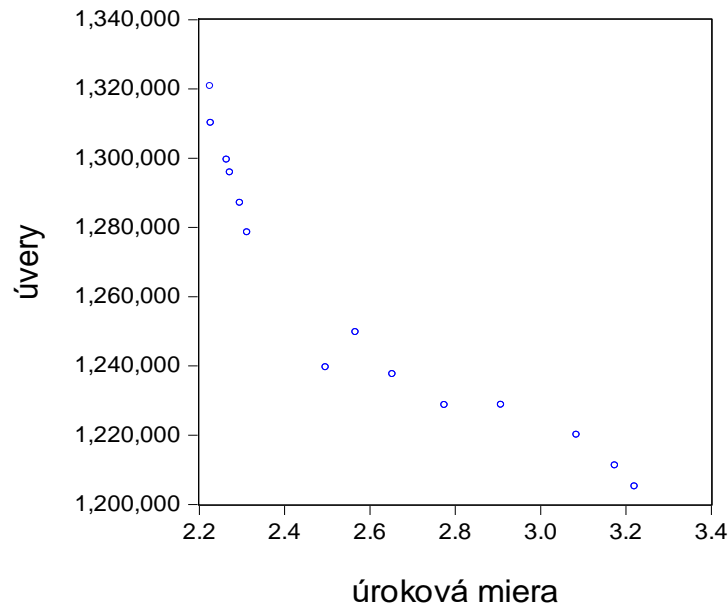
Na základe poznatkov už pred odhadom parametrov vieme vysloviť predpoklady o ich hodnotách. S rastom úrokovej miery objem úverov klesá, preto predpokladáme, že parameter  $\beta_1$  bude záporný.

Pri špecifikácii modelu bola aplikovaná zásada *motivácie, uvedomelosti a aktivity* a zásada *sústavnosti a plynulosti*. Taktiež sú tu využívané *medzipredmetové vzťahy*, nakoľko študenti aplikujú vedomosti, ktoré nadobudli vo výučbe predmetov ekonomická teória a makroekonómia.

Na odhad parametrov modelu použijeme údaje publikované Národnou bankou Slovenska na stránke [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk). Pri odhadoch parametrov ekonometrických modelov je dobré pracovať s dlhšími časovými radmi, avšak na ukážku bude postačovať 14 období. Na to, aby študenti pochopili obsah údajov, je dôležité, aby nedostali údaje vopred pripravené, ale aby ich získali z internetovej stránky oni. Tu sa uplatňuje zásada *názornosti* a zásada *uvedomelosti a aktivity*.

Pred samotným odhadom znázorníme graf závislosti objemu úverov od úrokovej miery, aby sme potvrdili vhodnosť lineárneho tvaru modelu.





Graf 1 Závislosť objemu úverov od úrokovej miery

Grafické znázornenie závislosti potvrdilo predpoklad o vhodnosti lineárneho modelu a tiež, že pri zvyšovaní úrokovej miery objem úverov klesá.

Po vytvorení údajovej základne a grafickej analýze môžeme prejsť k odhadu parametrov modelu. V súčasnosti je k dispozícii rôznych ekonometrický softvér, napríklad EViews, Gretl, alebo systém R, ktorý uľahčuje výpočtovú náročnosť, znižuje čas výpočtov a je užívateľsky pohodlný a dostupný (napríklad systém Gretl je voľne dostupný). Z tohto dôvodu je možné získať výsledky odhadu veľmi rýchlo. Ak by sme študentom nadiktovali postup pri odhade parametrov modelu v niektorom ekonometrickom softvéri, tak sa po výbere z *Menu* a niekoľkých kliknutiach dopracujú k odhadom. Avšak na druhej strane by si nevedeli predstaviť spôsob odhadu, čo by mohlo viesť k nesprávnym interpretáciám a nesprávnym záverom pri testovaní modelu. Preto je potrebné aspoň na jednom príklade ukázať odhad parametrov pomocou odvodeného vzťahu v Exceli, čím uplatňujeme zásadu **názornosti**, teda ukážeme, že odhady parametrov sa vypočítajú z reálnych údajov, ktoré študenti sami získali z webovej stránky.

Vzťah pre výpočet odhadov parametrov modelu metódou najmenších štvorcov, teda estimátor najmenších štvorcov má tvar

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Pre názornosť uvedieme, aký tvar má matica  $\mathbf{X}$  a vektor  $\mathbf{y}$  v uvádzanom príklade.

Matica  $\mathbf{X}$  je matica pozorovaných hodnôt nezávislých premenných (úroková miera), pričom prvý stĺpec tvoria jednotky. V Exceli vytvoríme oblasť, ktorá bude predstavovať maticu  $\mathbf{X}$ , teda A3:B16. Matica má rozmer 14x2 (počet riadkov x počet stĺpcov). Ďalej zadáme v Exceli vektor nameraných hodnôt závislej premennej  $\mathbf{y}$ , teda objemu úverov v sledovanom období do oblasti B20:B33. Vektor  $\mathbf{y}$  má rozmer 14x1 (počet riadkov x počet stĺpcov).

	A	B
2	X	
3	1	3,2203
4	1	3,1744
5	1	3,0842
6	1	2,9073
7	1	2,7750
8	1	2,6527
9	1	2,5665
10	1	2,4965
11	1	2,2723
12	1	2,2270
13	1	2,3125
14	1	2,2956
15	1	2,2646
16	1	2,2253

	A	B
19		y
20		1 205 229
21		1 211 262
22		1 220 129
23		1 228 784
24		1 228 734
25		1 237 621
26		1 249 796
27		1 239 619
28		1 295 861
29		1 310 212
30		1 278 569
31		1 287 120
32		1 299 589
33		1 320 849

Obrázok 2 Matica  $X$  a vektor  $y$

Ďalej postupujeme dosadzovaním do vzťahu pre estimátor najmenších štvorcov využitím funkcie pre násobenie matic a pre výpočet inverznej matice. . Cieľom nie je naučiť študentov Excel, iba ho využiť pri výpočte, preto nebudeme uvádzať podrobný postup pri násobení a inverzii matic a taktiež predpokladáme, že prácu s Excelom študenti ovládajú z predmetu Informatika. Z hľadiska ekonometrie je dôležité ukázať, čo vyjadruje matica  $X$  a vektor  $y$ . V tomto kroku sa takisto do popredia dostávajú **medzipredmetové vzťahy**, teda okrem ekonomickej teórie sa využívajú poznatky z informatiky.

Výsledkom výpočtov sú odhadnuté parametre v bunkách D18 a D19 :

	D	E
16	odhady parametrov	
17		
18	1516800,782	$\beta_0$
19	-99298,59851	$\beta_1$

Obrázok 3 Odhady parametrov modelu

Tie isté výsledky získame v ekonometrickom softvéri EViews. Najprv načítame údaje napríklad jednoduchým potiahnutím súboru vo formáte Excel do EViewsu. Výberom voľby *Quick – Estimate equation* zadáme v zobrazenom okne rovnicu v tvare *názov závislej premennej c názov nezávislej premennej*, pričom  $c$  vyjadruje úroveňnú konštantu  $\beta_0$ . Potvrdením OK sa zobrazí výstup, ktorý obsahuje odhady parametrov:

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	151680.1	29476.10	51.45867	0.0000
R	-99298.60	11210.37	-8.857741	0.0000

R-squared	0.867344	Mean dependent var	1258098.
Adjusted R-squared	0.856289	S.D. dependent var	39266.44
S.E. of regression	14885.58	Akaike info criterion	22.18574
Sum squared resid	2.66E+09	Schwarz criterion	22.27703
Log likelihood	-153.3002	Hannan-Quinn criter.	22.17729
F-statistic	78.45958	Durbin-Watson stat	1.051901
Prob(F-statistic)	0.000001		

Obrázok 4 Výstup odhadu lineárneho modelu

V stĺpci *Coefficient* sú uvedené odhady parametrov, teda tie isté hodnoty, ktoré sme získali výpočtom pomocou matice  $\mathbf{X}$  a vektora  $\mathbf{y}$  v Exceli a sú v bunkách D18 a D19.

Model môžeme zapísať v tvare:

$$uvery_t = 1516801 - 99298,6 * r_t$$

Odhad parametrov ekonometrického modelu v ekonometrickom softvéri EViews je z časového a výpočtového hľadiska oveľa rýchlejší a pohodlnejší, avšak vôbec neukazuje, akým spôsobom a z akých hodnôt boli odhady získané. Preto je vhodné na jednom z prvých seminárov ukázať odhad parametrov lineárneho modelu na základe estimátora najmenších štvorcov v prostredí MS Excel. V tomto kroku je potrebné uplatniť zásadu **sústavnosti a postupnosti**, pričom učivo je usporiadané tak, že vedomosti a zručnosti jedna z druhej vychádzajú a majú medzipredmetovú väzbu. Takisto je aplikovaná **zásada názornosti**, nakoľko sa pracuje s reálnymi údajmi a modelmi. Pri výučbe ekonometrie je veľmi dôležité uplatňovať aj zásadu **vedeckosti**, nakoľko poznatky v tejto oblasti sa vyvíjajú a takisto sa učiteľ musí snažiť všetky ekonomické javy a procesy zdôvodniť a ukázať na konkrétnom príklade. Iba vtedy budú získané vedomosti a zručnosti **trvácne**. Zároveň je treba ukázať **prepojenie teórie s praxou**. S riešením uvedeného alebo podobného problému sa reálne môžu študenti stretnúť, ak sa zamestnajú po štúdiu napríklad v banke alebo inej finančnej inštitúcii.

## 4 ZÁVER

Výučba ekonometrie je špecifická tým, že študenti Ekonomickej univerzity vo všeobecnosti neinklinujú ku kvantitatívne orientovaným predmetom. Avšak pochopenie ekonomických javov a vzťahov si vyžaduje ich kvantitatívne vyjadrenie. Učiteľ teda okrem toho, že je v danom odbore fundovaný, musí vynaložiť energiu na to, aby v študentoch vzbudil záujem o tento predmet. Z tohto dôvodu je vhodné začať kurz ekonometrie uvedením konkrétnych reálnych situácií, v ktorých sa dajú metódy a modely ekonometrie aplikovať.

Pri príprave prednášok a cvičení, ako aj pri samotnom vyučovaní by sa mal učiteľ snažiť uplatňovať didaktické zásady. Okrem zásady vedyckosti veľmi dôležitú úlohu zohráva uplatňovanie zásady názornosti, preto je dôležité pracovať na hodinách s modelmi využívajúcimi reálne dáta. Pozornosť treba venovať aj uplatňovaniu zásady sústavnosti a postupnosti, zásade trvácnosti a zásade prepojenia teórie s praxou.

Na základe skúseností z posledného obdobia možno konštatovať, že sa zvyšuje záujem o výučbu ekonometrie aj na iných fakultách Ekonomickej univerzity na druhom a treťom stupni štúdia. Je to zrejme spôsobené tým, že od absolventa študijného programu zameraného na ekonómiu sa očakáva, že dokáže ekonomické vzťahy a javy kvantitatívne vyjadriť a správne interpretovať získané výsledky.

### **Použitá literatúra**

1. BAJTOŠ, J. 2013. *Didaktika vysokej školy*. Bratislava: Iura Edition, 2013. 398 s. ISBN 978-80-8078-652-6.
2. GUJARATI, D. N. 2003. *Basic Econometrics*. 4 vyd. New York: McGraw-Hill, 2003. 1003 s. ISBN 978-00-724-7852-5
3. LUKÁČIK, M. – LUKÁČIKOVÁ, A. – SZOMOLÁNYI, K. 2011. *Ekonometrické modelovanie v programoch EViews a Gretl*. Bratislava: Ekonóm, 2011. 330 s. ISBN 978-80-225-3320-1.
4. LUKÁČIKOVÁ, A. – LUKÁČIK, M. 2008. *Ekonometrické modelovanie s aplikáciami*. Bratislava: Ekonóm, 2008. 344 s. ISBN 978-80-225-2614-2
5. PETLÁK, E. 1997. *Všeobecná didaktika*. Bratislava: IRIS, 1997. 270 s. ISBN 80-88778-49-2
6. PODLAHOVÁ a kol. 2012. *Didaktika pro vysokoškolské učitele. Vybrané kapitoly*. Praha: Grada, 2012. 160 s. ISBN 978-80-247-4217-5.
7. ŠLOSÁR, R. – NOVÁK, J. 2012. *Odborová didaktika*. Bratislava: Ekonóm, 2012. 212 s. ISBN 978-80-225-3438-3.
8. TUREK, I. 2014. *Didaktika*. Tretie, prepracované a doplnené vydanie. Bratislava: Wolters Kluwer, 2014. 618 s. ISBN 978-80-8168-004-5.
9. WOOLDRIDGE, J. M. 2003. *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. 2. vyd. Mason: Thomson South-Western, 2002. 896 s. ISBN 978-03-241-1364-8

### **Kontaktné údaje**

Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 829

email: [adriana.lukacikova@euba.sk](mailto:adriana.lukacikova@euba.sk)

# BEHAVIORÁLNE PARAMETRE V MODELI VŠEOBECNEJ EKONOMICKEJ ROVNOVÁHY SLOVENSKA S DÔRAZOM NA SEKTOR AUTOMOBILOV

## THE BEHAVIORAL PARAMETERS IN THE COMPUTABLE GENERAL EQUILIBRIUM MODEL OF SLOVAKIA WITH THE EMPHASIS TO THE AUTOMOTIVE SECTOR

*Veronika Mitkova*

### Abstrakt

V článku objasňujeme zdroje a hodnoty behaviorálnych parametrov modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy tak, ako ich využíva GTAP (Global Trade Analysis Project) model: Armingtonove elasticity, elasticity substitúcie výrobných faktorov, elasticity transformácie výrobných faktorov, investičné parametre a elasticity spotrebiteľského dopytu.

*Kľúčové slová: CGE model, GTAP, elasticity*

### Abstract

The sources and values of the behavioral parameters of the computable general equilibrium model are clarified such that the GTAP (Global Trade Analysis Project) model uses them: the source substitution or Armington elasticities, the factor substitution elasticities, the factor transformation elasticities, the investment parameters, and the consumer demand elasticities.

*Keywords: CGE model, GTAP, elasticities*

## 1 ÚVOD

Vychádzame z modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy (CGE – Computable General Equilibrium Model), ktorý bol vyvinutý na Purdue University, USA (Hertel, T.W, 1997). Podrobnú dokumentáciu k modelu je možné nájsť v práci Aguiara, Narayanana a McDougalla (2016). V tomto článku sa zaoberáme behaviorálnymi parametrami modelu s dôrazom na sektor automobilov na Slovensku. Motiváciou voľby sektora je silná orientácia Slovenska na výrobu automobilov a ich komponentov. Behaviorálne parametre, ktoré budeme skúmať, sú tzv. Armingtonove elasticity, elasticity substitúcie výrobných faktorov, elasticity transformácie výrobných faktorov, investičné parametre a elasticity spotrebiteľského dopytu. Východiskovým dokumentom bola dokumentačná časť k GTAP modelu, konkrétne 14. kapitola *Behavioral Parameters* of Thomasa W. Hertela a Dominique van der Mensbrugghe.

Štruktúra modelu bola zvolená nasledovne: Z hľadiska komodít sledujeme sektor Automobily, ktorý je definovaný ako výroba motorových vozidiel, prívesov a návesov. Všetky ostatné komodity sú agregované do jednej komodity s názvom Ostatné. Regióny sme ponechali agregované na štandardné geopolitické zoskupenia: Oceánia, Východná Ázia, Juhovýchodná Ázia, Južná Ázia, Severná Amerika, Latinská Amerika, Európska únia (s vyňatím Slovenska), Stredný Východ a Severná Afrika, Subsaharská Afrika a Zvyšok sveta. Výrobné faktory uvažujeme pôdu, nekvalifikovanú prácu, kvalifikovanú prácu, kapitál a prírodné zdroje.

Databáza je skonštruovaná pomocou GTAPAgg2 a zachytáva rok 2011.

## 2 BEHAVIORÁLNE PARAMETRE PONUKY

V tejto časti opíšeme behaviorálne parametre získané priamo kalibráciou GTAP modelu.

### 2.1 Elasticity substitúcie zdrojov

Elasticity substitúcie zdrojov sú definované pre každého agenta v rámci jednotlivých regiónov, takže pre každú komoditu v každom regióne je stanovená skladba domácich a dovezených zdrojov zvlášť pre každé odvetvie a pre každú kategóriu finálneho dopytu (investície, spotreba domácností a vlády). Pôvodným zdrojom elasticít substitúcie je model SALTER (Jomini et al, 1991), neskôr boli hodnoty upravené o ekonometrické odhady Hertela, Hummelsa, Ivanica a Keeneyho (2004). Hodnota elasticity substitúcie medzi domácimi a dovezenými statkami  $\sigma_D$  nadobúda pre Armingtonovu CES (Constant Elasticity of Substitution) funkciu hodnotu 2,80 pre sektor automobilov a 2,55 pre ostatné sektory. Znamená to, že sektor automobilov je pružnejší voči substitúcii domácich a zahraničných zdrojov než ostatné sektory v priemere.

Elasticita substitúcie medzi importmi z rôznych regiónov boli získané z odhadov Hertela, Hummelsa, Ivanica a Keeneyho (2004). Tieto odhady vykazujú vyššie odchýlky pre jednotlivé sektory než odhady bez využitia ekonometrických metód. Za predpokladu Armingtonovej CES produkčnej funkcie nadobúda hodnota  $\sigma_M$  pre Slovensko v sektore automobilov 5,60 a v agregovanom sektore ostatných komodít 7,00, čo môžeme interpretovať ako nižšiu pružnosť voči substitúcii dovozu z rôznych regiónov v automobilovom priemysle než v iných odvetviach v priemere. Automobilový priemysel je špecifický zoskupeniami značiek vyrábaných automobilov, kde je regionálna substitúcia možná len do určitej miery, a teda menej než v iných odvetviach.

Na vzťah medzi elasticitou substitúcie medzi domácimi a importovanými komoditami  $\sigma_D$  a elasticitou substitúcie medzi importmi z rôznych regiónov  $\sigma_M$  sa vzťahuje „pravidlo dvojnásobku“, teda platí  $\sigma_M = 2\sigma_D$ . Toto pravidlo ako prví navrhli Jomini et al. (1991).

### 2.2 Elasticity substitúcie faktorov

Vnorené CES produkčné funkcie v GTAP modeli sa neodlišujú od zaužívaných funkcií v iných aplikovaných modeloch všeobecnej ekonomickej rovnováhy. Primárne faktory produkcie sú substituovateľné na základe konštantnej elasticity substitúcie  $\sigma_{VA}$ , pričom medzistatky a zložená (kompozitná) pridaná hodnota sú využívané vo fixných proporciách. Elasticita substitúcie medzi primárnymi faktormi determinuje schopnosť ekonomiky zameniť output v závislosti od zmien relatívnych cien alebo dostupnosti faktorov. Hodnoty týchto elasticít vychádzajú z prehľadu medzinárodných prierezových odhadov a pochádzajú tiež z Jominiho (1991) modelu SALTER. Pre sektor automobilov nadobúda hodnota  $\sigma_{VA}$  1,26 a pre ostatné sektory 1,24.

Aj keď v štandardnom GTAP modeli predpokladáme využitie zloženej pridanej hodnoty a zložených medzivstupov vo fixných proporciách, máme možnosť špecifikovať ich elasticitu substitúcie na samom vrchu zloženej produkčnej funkcie (defaultné nastavenie je nulová elasticita pre všetky komodity).

### 2.3 Elasticity transformácie faktorov

Táto trieda behaviorálnych parametrov v GTAP modeli opisuje stupeň mobility primárnych faktorov medzi sektormi. V rámci každého regiónu sa rozlišujú dokonale mobilné primárne faktory a takzvané lenivé. Ak je elasticita transformácie faktorov  $\sigma_T$  hodnota blízka nule, alokácia faktorov medzi sektormi je takmer fixná, a teda ponuka nie je schopná reagovať na

zmenách v relatívnych výnosoch. So znižujúcou sa hodnotou elasticity (smerom k záporným hodnotám) ponuka faktorov viac a viac reaguje na relatívne výnosy. So  $\sigma_T \rightarrow -\infty$  sa faktor stáva dokonale mobilným. Nastavenie modelu predpokladá všetky typy práce a kapitálu ako dokonale mobilné faktory, kým prírodné zdroje a poľnohospodárska pôda sú považované za lenivé faktory.

## 2.4 Parametre flexibility investícií

Tieto parametre sa vzťahujú na stupeň flexibility regionálnych investícií. Čím nižšia je hodnota parametra, tým vyššia je reakcia medzinárodných investícií na zmenu miery návratnosti v regióne. Hodnota pre Slovensko je 10.

## 3 BEHAVIORÁLNE PARAMETRE DOPYTU

GTAP model využíva pre opis dopytu súkromných domácností CDE (Constant Difference of Elasticities) funkčnú formu, ktorá bola po prvý krát opísaná Hanochom (1975). Je založená na implicitnej aditivite a umožňuje bohatšie zobrazenie príjmových efektov v systéme dopytu. CDE funkcia je daná vzťahom

$$\sum B_{i,r} UP_r^{\beta_{i,r} \gamma_{i,r}} [PP_{i,r} / E_r(PP_r, UP_r)]^{\beta_{i,r}} \equiv 1$$

kde  $E_r(\cdot)$  reprezentuje minimálne výdavky potrebné na dosiahnutie špecifikovanej úrovne užitočnosti súkromnej domácnosti  $UP_r$  pri danom vektore cien  $PP_r$ . Jednotlivé ceny sú normalizované použitím minimálnych výdavkov, umocnené na  $\beta_{i,r}$  a skombinované do aditívnej formy. Kalibrácia vyžaduje výber hodnoty parametra substitúcie  $\beta_{i,r}$  tak, aby sa replikovala vlastná cenová elasticita dopytu a následne výber hodnoty parametra expanzie  $\gamma_{i,r}$  tak, aby sa replikovala cieľová hodnota príjmovej elasticity dopytu.

Odhady  $\beta$  a  $\gamma$  získané z Reimer a Hertel (2004) boli upravené o GTAP údaje o súkromnej spotrebe, dovozy v trhových a svetových cenách. Tieto odhady predpokladajú len 10 kategórií statkov: 1. obilie a iné plodiny, 2. mäso, mliečne výrobky a ryby, 3. spracované potraviny, nápoje a tabak, 4. textil, odevy, obuv, 5. údržba domácností, 6. veľkoobchod/maloobchod, 7. priemyselné výrobky, elektronika, 8. doprava, 9. finančné a obchodné služby, 10. bývanie, vzdelávanie, zdravotníctvo, verejné služby.

Hodnoty parametra substitúcie  $\beta$  pre sektor automobilov (v pôvodných odhadoch patrí do sektora priemyslu) je 0,377 a pre zvyšné sektory 0,431. Elasticita substitúcie je teda pre automobilový priemysel nižšia než v iných sektoroch dopytu v priemere. Hodnoty parametra expanzie  $\gamma$  v CDE systéme dopytu sú 1,13 pre sektor automobilov a 0,996 pre ostatné sektory spolu. Tieto hodnoty indikujú, že pri zvýšenom príjme od určitej hladiny príjmu vynakladajú domácnosti 38 centov na výdavky na automobily a hodnota 1,13 znamená, že automobily nie sú statkom základnej životnej potreby.

## 4 ZÁVERY A DISKUSIA

Z uvedeného je zrejmé, že hodnoty elasticít využívaných v GTAP modeli nie sú pre Slovensko úplne adekvátne. V ďalšom výskume sa zameriame na vyhodnotenie citlivosti modelu na zmeny hodnôt parametrov tak, aby hodnovernejšie zobrazovali hospodársko-ekonomické vzťahy sektorov na Slovensku.

### **Použitá literatúra**

1. AGUIAR, A., B. NARAYANAN AND R. MCDUGALL 2016. An Overview of the GTAP 9 Data Base. In: Journal of Global Economic Analysis 1, no. 1, s. 181-208.
2. HANOCH, G. 1974. Production and Demand Models with Direct and Indirect Implicit Additivity. In: Econometrica, roč. 43, s. 395-419.
3. HERTEL, T. W. 1997. Global Trade Analysis: Modeling and Applications, Cambridge University Press.
4. HERTEL, T.H., D. HUMMELS, M. IVANIC and R. KEENEY 2004. How Confident Can We Be in CGE-Based Assessments of Free Trade Agreements? GTAP Working Paper No. 26, Center for Global Trade Analysis, West Lafayette, Indiana.
5. JOMINI, P., J.F. ZEITSCH, R. McDOUGALL, A. WELSCH, S. BROWN, J. HAMBLEY and J. KELLY 1991. SALTER: A General Equilibrium Model of the World Economy, vol. 1. Model Structure, Data Base, and Parameters. Canberra, Australia: Industry Commission.
6. REIMER, J. and T.W. HERTEL 2004. International Cross Section Estimates of Demand for Use in the GTAP Model, GTAP Technical paper No. 23, Center for Global Trade Analysis, West Lafayette, Indiana.

### **Kontaktné údaje**

Ing. Veronika Mit'ková, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied, Ústav ekonomie

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

email: [veronika.mitkova@fses.uniba.sk](mailto:veronika.mitkova@fses.uniba.sk)



# HISTORICKÁ KONFRONTÁCIA IDENTIKÁCIE INVESTIČNÝCH PRÍLEŽITOSTÍ<sup>1</sup>

## HISTORICAL CONFRONTATION OF INVESTMENT OPPORTUNITIES IDENTIFICATION

*Vladimír Mlynarovič*

### **Abstrakt**

Článok prezentuje konfrontáciu makroekonomického prístupu k identifikácii investičných príležitostí medzi vládnymi dlhopismi a ich reálnymi historickými výnosmi. Identifikácia investičných príležitostí je založená na konfrontácii rozpätí ich výnosov a úrovni a trendov vo vývoji makroekonomických charakteristík zodpovedajúcich krajín. Rozpätie definované ako rozdiel medzi výnosom do splatnosti vládneho dlhopisu v konkrétnej krajine a výnosom nemeckého vládneho dlhopisu s tou istou splatnosťou. Na makroekonomické zoradenie vybraných krajín sa využívajú historické a prognózované údaje publikované OECD. Tieto odporúčania sú porovnávané s výnosmi 10 ročných vládnych dlhopisov

**KLúčové slová:** *makroekonomický vývoj, Promethee II, výnosy vládnych dlhopisov*

### **Abstract**

The paper presents a confrontation of macroeconomic approach for identification of investment opportunities among government bonds with their real performance. The identification of investment opportunities is based on a confrontation of their spreads and level and trends characteristic of the macroeconomic development of corresponding countries. The spread is defined as the difference between the yield to maturity of the specific country government bond and Germany government bond with the same maturity. The OECD historical and prognostic macroeconomic data are used for macroeconomic ranking of selected countries. These recommendations are compared with the performance of 10 years government bonds

**Keywords:** *macroeconomic development, Promethee II, government bonds performance*

## **1 ÚVOD**

Existuje veľa aplikácii techník komplexného vyhodnocovania variantov, ktoré ako hlavný a jediný výsledok ponúkajú zoradenie skúmaných variantov alebo alternatív. V mnohých prípadoch dokonca chýba aj akákoľvek analýza senzitivnosti k možným zmenám vstupných údajov. V takýchto prípadoch môže vzniknúť otázka týkajúca sa užitočnosti takýchto výsledkov. V tomto príspevku síce tiež využívame takéto techniky na zoradenie krajín na báze vývoja ich makroekonomických charakteristík vývoja, ale tieto výsledky sú

---

<sup>1</sup> This paper research was supported by the Slovak Research and Development Agency, project No. APVV-14-0020: "Pareto Optimal Interactions Modeling in the Financial and Business Adaptive Processes", and by the Slovak Ministry of Education, Science and Sport, project No. VEGA 1/0340/16: "Modelovanie efektívnosti financovania a kooperácie sektorov a regiónov slovenskej ekonomiky."

konfrontované s rozpätiami výnosov vládnych dlhopisov s cieľom identifikovať sľubné investičné príležitosti v tejto kategórii aktív

## 2 MODEL

Predpokladajme, že poznáme hodnoty  $a_{ij}^t$  jednotlivých variantov (krajín)  $i, i = 1, \dots, m$ , podľa jednotlivých kritérií (makroekonomických charakteristík)  $j, j = 1, \dots, n$ , pre špecifikované časové obdobia (roky)  $t, t = 1, \dots, T$ . Pre tieto hodnoty definujeme dva typy makroekonomických kritérií, a to kritéria úrovne a kritéria trendu. Nech  $[d_l, h_l], 1 \leq d_l \leq h_l \leq T$ , je časové obdobie pre kritéria úrovne a  $[d_r, h_r], 1 \leq d_r < d_l \leq h_l \leq h_r \leq T$ , je časové obdobie pre kritéria trendu, potom

$$c_{ij}^l = \frac{\sum_{t=d_l}^{h_l} a_{ij}^t}{h_l - d_l + 1}$$

je hodnota úrovne pre kritérium  $j, j = 1, \dots, n$ , pre krajinu  $i, i = 1, \dots, m$ , a

$$c_{ij}^r = c_{ij}^l - \frac{\sum_{t=d_r}^{h_r} a_{ij}^t}{h_r - d_r + 1}$$

je hodnota trendu pre kritérium  $j, j = 1, \dots, n$ , pre krajinu  $i, i = 1, \dots, m$ .

Takže máme úlohu viackritériálneho rozhodovania s  $m$  alternatívami a  $2n$  kritériami a môžeme použiť niektoré so známych metód, (Mlynarovič, 1998) na zoradenie alternatív. V tejto aplikácii ale navrhujeme použiť tzv. *z-scores* namiesto priameho použitia hodnôt úrovní a trendov podľa kritérií. Výhodou takéhoto prístupu je skutočnosť že sa zohľadňujú nielen hodnoty kritérií ale aj ich variabilita. Nech  $\mu_j^l$  a  $\sigma_j^l$  je stredná hodnota a štandardná odchýlka hodnôt  $c_{ij}^l, i = 1, \dots, m$ , a  $\mu_j^r$  and  $\sigma_j^r$  je stredná hodnota a štandardná odchýlka hodnôt  $c_{ij}^r, i = 1, \dots, m$ , potom

$$s_{ij}^l = \frac{c_{ij}^l - \mu_j^l}{\sigma_j^l}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

sú hodnoty *z-scores* pre kritériá úrovne a

$$s_{ij}^r = \frac{c_{ij}^r - \mu_j^r}{\sigma_j^r}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

sú hodnoty *z-scores* pre kritériá trendu.

Makroekonomické zoradenie krajín možno zapísať ako úlohu komplexného vyhodnocovania variantov

$$\text{"max"} \quad \{s_i = (s_i^l, s_i^r) = (s_{i1}^l, \dots, s_{im}^l, s_{i1}^r, \dots, s_{in}^r) \quad i = 1, \dots, m\}$$

kde sa, bez straty všeobecnosti, predpokladá, že "čím viac, tým lepšie" pre všetky kritéria. Predpokladajme, že aplikácia metódy PROMETHEE II poskytne hodnoty čistých tokov  $\Phi_i, i = 1, \dots, m$ , pre ktoré

$$\Phi_1 > \Phi_2 > \dots > \Phi_i > \dots > \Phi_m$$

V terminológii metódy PROMETHEE to znamená, že krajina 1 je najlepšia a krajina  $m$  je najhoršia krajina.

Predpokladajme, že  $r_i, i = 1, \dots, m$ , výnos do splatnosti vládnych dlhopisov ponúkaný krajinou  $i$ . Potom vo svete ideálnych informácií by pre uvedené PROMETHEE výsledky malo platiť

$$r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots < r_m$$

pretože čím horšie je na tom krajina, tým vyššie výnosy musí ponúkať. V tejto situácii sa potenciálny investor musí rozhodnúť, aké veľké riziko je ochotný akceptovať. Prakticky ťažko možno očakávať takýto jednoznačný výsledok a možné kontradikcie medzi makroekonomickými výsledkami a rozpätiami výnosov poskytujú priestor pre identifikáciu dobrých investičných príležitostí.

### 3 HISTORICKÁ KONFRONTÁCIA VÝSLEDKOV

Údaje OECD pre obdobie od roku 1992 do roku 2010 boli na modelovanie makroekonomického vývoja a navrhnutá metodika bola použitá na identifikáciu investičných príležitostí medzi vládnyimi dlhopismi. Details boli publikované v Mlynarovič – Tuš (2010) a sú zhrnuté v Tab. 1.

Tab. 1: Zoradenie krajín a výnosy vládnych dlhopisov

Country	Promethee II Ranking	Spreads	Macroeconomics	Government Bonds Attractiveness	10years Bonds Performance
Sweden	0.1620	32.4	Good	high	29.16%
Poland	0.1595	159.7	Good	very high	23.63%
Slovakia	0.1193	134.9	Good	very high	32.51%
Denmark	0.1131	61.9	Good	high	-
Finland	0.0740	11.3	Good	low	-
Germany	0.0599	0	Good	none	31.10%
Netherlands	0.0586	14.3	Good	low	31.33%
Italy	0.0583	119.4	Good	very high	18.36%
United Kingdom	0.0563	0	Good	none	-
Luxembourg	0.0505	0	Good	none	-
Austria	0.0479	39.4	Good	high	33.36%
Belgium	0.0426	45.7	Good	high	31.28%
France	0.0201	19.5	Good	low	27.37%
Portugal	-0.0265	148.9	Bad	high	1.21%
Czech Republic	-0.0336	132.9	Bad	high	36.35%
Estonia	-0.0395	-	Bad	-	-
Slovenia	-0.0433	107.3	Bad	high	33.01%
Hungary	-0.0756	-	Bad	-	44.67%
Bulgaria	-0.0964	-	Bad	-	-
Ireland	-0.1481	153.1	Bad	high	39.09%
Spain	-0.1800	117.4	Bad	high	23.65%
Greece	-0.3795	-	Bad	high	-

V stĺpci *Promethee II Ranking* sú uvedené čisté toky metódy Promethee II a krajiny s kladnou hodnotou čistého toku boli zaradené medzi makroekonomicky dobré. V stĺpci *Spreads* sú uvedené rozdiely medzi výnosmi 10-ročných vládnych dlhopisov krajiny a výnosmi nemeckých 10-ročných vládnych dlhopisov v roku 2010. Čím je táto hodnota vyššia, tým atraktívnejší bol ponúkaný výnos vládneho dlhopisu. Navrhnutá metodika hovorí, že investičné príležitosti treba hľadať medzi makroekonomicky „dobrými“ krajinami, ktoré majú zároveň vysoké hodnoty rozpätí výnosov. V poslednom stĺpci uvádzame skutočné hodnoty výnosov 10-ročných vládnych dlhopisov za obdobie od roku 2010 do apríla 2017.

#### **Použitá literatúra**

1. MLYNAROVÍČ, V., 1998: Modely a metódy viackriteriálneho rozhodovania. Ekonóm, Bratislava, 1998
2. MLYNAROVÍČ, V. – B. TUŠ, 2010: Investment opportunities identification – a multiple criteria approach.

#### **Kontaktné údaje**

doc. Ing. Vladimír Mlynarovič, CSc.

Fakulta sociálnych a ekonomických vied Univerzity Komenského v Bratislave

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava

email: vladimir.mlynarovic@fses.uniba.sk

# OPTIMALIZÁCIA SEKVENČNÝCH MODELOV POUŽITÍM MS EXCELU<sup>1</sup>

## OPTIMIZATION OF SEQUENCE MODELS USING MS EXCEL

*Juraj Pekár, Ivan Brezina*

### **Abstrakt**

Podstatou sekvenčných modelov (modely rozvrhovania) je určenie postupu vykonávania jednotlivých operácií pomocou jedného alebo viacerých obslužných objektov (strojov, zariadení, osôb, pracovných čiat a pod.). Sekvenčné modely sa používajú hlavne pri riešení problémov logistiky výrobných procesov. V praktických sekvenčných úlohách často vzniká požiadavka usporiadania jednotlivých operácií, vytvorenia ich rozvrhu, na báze určeného kritéria optimálnosti, ktoré najčastejšie súvisí s minimalizáciou celkových nákladov realizácie všetkých operácií. Pre takýto typ problémov je formulácia všeobecného matematického modelu pomerne ťažká, preto sa matematické modely a algoritmy zvyčajne vypracúvajú špeciálne pre jednotlivé problémy. V prezentovanom príspevku uvedieme alternatívny prístup na riešenie uvedených problémov pomocou nástroja MS Excel.

***Kľúčové slová:** sekvenčné modely, optimalizácia, MS Excel*

### **Abstract**

The essence of sequence models (scheduling models) is to determine the schedule in order to perform individual operations on one or more service objects (machines, devices, persons, jobs, etc.). Sequence models are mainly used to solve logistics problems in manufacturing. In practical sequential tasks, the requirement to organize individual operations is often raised by creating their schedule based on the optimality criterion, which is most often associated with minimizing the total cost of carrying out all operations. For such a type of problem, the formulation of a general mathematical model is rather difficult, so mathematical models and algorithms are usually designed specifically for individual problems. In the present paper, we will introduce an alternative approach to solving these problems using MS Excel.

***Keywords:** Sequence models, optimization, MS Excel*

## **1 ÚVOD**

V logistike výrobných procesov (výrobnej logistike) ide o zabezpečenie procesu produkcie (transformácie zdrojov zabezpečených nákupnou logistikou na konečné produkty) vnútropodnikovým pohybom výrobných zdrojov a polotovarov a ich skladovaním, zabezpečením ich optimálneho rozdelenia jednotlivým pracoviskám a o organizáciu výroby až po fázu distribúcie konečných tovarov (distribučnej logistiky). Dobrú organizáciu výroby možno zabezpečiť vhodným rozvrhnutím jednotlivých výrobných operácií, ktoré na seba technicky a technologicky nadväzujú. *Teória rozvrhov* (napr. (Brezina 2003), (Palúch, Peško 2006), (Unčovský 1991)) je zameraná na riešenie problémov časového alebo priestorového

---

<sup>1</sup> This paper is supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA, grant No. 1/0245/15 Transportation planning focused on greenhouse gases emission reduction.

rozvrhovania rozličných operácií prostredníctvom jedného alebo viacerých obslužných objektov (zariadení). *Sekvenčné modely* (v literatúre označované často aj ako *modely rozvrhovania*) sú spojené s určením postupu vykonávania rozličných operácií pomocou jedného alebo viacerých obslužných objektov. Tieto modely sa používajú hlavne pri riešení problémov *logistiky výrobných procesov*.

Pod pojmom *operácia* (často sa používajú aj pojmy úkon, dávka), označíme ako  $o$ , sa rozumie základná ucelená činnosť, ktorá už ďalej nie je deliteľná na čiastkové operácie (z hľadiska teórie rozvrhov je operácia nedeliteľná, niektoré prístupy však pripúšťajú prerušenie operácie a po určitom časovom intervale pokračovanie v jej vykonávaní). Operácie môžu byť technologického rázu (strojárské, chemické, stavebné a pod.), ale pod operáciou môžeme rozumieť napríklad aj vyskladnenie tovaru zo skladu, príjem tovaru na sklad, opracovanie výrobkov, obsluhuje zákazníkov a podobne.

Podstatou najjednoduchších modelov rozvrhovania je rozvrhnutie operácií na jednom pracovnom objekte, stroji  $M$ . Medzi zložitejšie modely na základe počtu obslužných objektov patria operácie rozvrhnuté na viac ako dva obslužné objekty. Medzi zložitejšie modely patria taktiež modely *rozvrhovania prúdovo organizovaných systémov*. Ich podstatou je rozvrhnutie operácií, ktorých poradie je pevne určené, na jednotlivých objektoch (spracované sú jednoduché heuristické algoritmy pre dva, tri a pre viac objektov). V prípade, keď treba rozvrhnúť operácie na jednotlivé obslužné objekty, ktoré sú rozmiestnené podľa druhov a príbuznosti, hovoríme o modeloch rozvrhovania fázovo organizovaných systémov.

## 2 CHARAKTERISTIKA VSTUPNÝCH A VÝSTUPNÝCH ÚDAJOV

Model rozvrhovania považujeme za daný, ak sú určené:

1. počet obslužných zariadení (strojov)  $m$ ,
2. množina  $m$  obslužných zariadení  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ ,
3. počet realizovaných operácií  $n$ ,
4. postupnosť  $n$  operácií  $\{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ ,
5. trvanie  $j$ -tej operácie na  $i$ -om zariadení  $t_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ),
6. kritérium optimálnosti modelu rozvrhovania.

Ďalej budeme pre zjednodušenie predpokladať, že sa operácie majú realizovať len na jednom obslužnom zariadení (teda  $m = 1$ ). Potom stačí uvažovať len údaj  $t_j$  a z neho vyplývajúce ďalšie vstupné údaje:

- najskôr možný začiatok spracovania  $j$ -tej operácie  $r_j$ ,
- požadovaný termín ukončenia  $j$ -tej operácie  $d_j$ ,

Predpokladajme, že všetky operácie (pracovné úkony) sú pripravené na realizáciu v čase  $t = 0$ . Pre každú úlohu rozvrhovania  $n$  operácií na jednom obslužnom zariadení potom možno vypočítať tieto *výstupné údaje*:

- skutočný čas ukončenia  $j$ -tej operácie  $C_j$ ,
- čas pobytu  $j$ -tej operácie v obslužnom systéme  $F_j$ , kde  $F_j = C_j - r_j$ ,
- celkový čas čakania  $j$ -tej operácie v obslužnom systéme na realizáciu  $W_j$ , kde  $W_j = F_j - t_j$ ,

- časová odchýlka od požadovaného termínu ukončenia  $j$ -tej operácie (tzv. latentné oneskorenie) operácie  $L_j = C_j - d_j$ , pričom ak  $L_j < 0$ , dochádza k predstihu, ak  $L_j > 0$ , dochádza k oneskoreniu,
- oneskorenie  $j$ -tej operácie  $T_j$ , kde  $T_j = \max \{0, C_j - d_j\}$ ,

Všetky uvedené veličiny sú definované ako funkcie ukončenia  $j$ -tej operácie  $C_j$ . Na ich základe môžeme určiť pomerne jednoduché minimalizačné kritériá optimálnosti sekvenčného problému, podľa ktorých hodnotíme efektívnosť jednotlivých rozvrhov. Najlepšie riešenie bude mať potom minimálnu hodnotu príslušného kritéria.

Na hodnotenie rozvrhov možno na základe uvedeného použiť relatívne jednoduché kritériá optimálnosti:

- minimalizácia počtu nerealizovaných operácií do požadovaného termínu ukončenia  $j$ -tej operácie  $d_j$ ,
- minimalizácia maximálnej hodnoty času ukončenia operácií

$$C_{\max} = \max_j \{C_j\},$$

pričom toto kritérium sa používa v tom prípade, keď je potrebné minimalizovať termín ukončenie poslednej operácie,

- minimalizácia hodnoty maximálnej odchýlky od požadovaného termínu ukončenia operácií,

$$L_{\max} = \max_j \{L_j\},$$

- minimalizácia hodnoty maximálneho oneskorenia operácií

$$T_{\max} = \max_j \{T_j\},$$

- minimalizácia maximálneho čas pobytu operácií v obslužnom systéme

$$F_{\max} = \max_j \{F_j\}.$$

V praktických úlohách však často vzniká požiadavka na zložitejšie kritériá optimálnosti, ktoré najčastejšie súvisia s minimalizáciou celkových nákladov realizácie. Ako už bolo uvedené, pre takýto typ problémov je formulácia všeobecného matematického modelu pomerne ťažká, preto sa príslušné matematické modely a algoritmy zvyčajne vypracúvajú špeciálne pre daný problém. Ďalej uvedieme alternatívny nástroj na riešenie uvedených problémov na systémoch s jedným obslužným zariadením.

Ako už bolo v predchádzajúcom texte uvedené, o systémoch s jedným obslužným objektom hovoríme, ak je k dispozícii práve jedno obslužné zariadenie  $M$ , na ktorom treba vykonať  $n$  operácií ( $o_1, o_2, \dots, o_n$ ). Predpokladajme, že všetky operácie vstúpia do príslušného obslužného systému naraz v časovom okamžiku nula ( $r_j = 0$ ). Nech sú ďalej známe čas realizácie každej operácie  $o_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) na danom obslužnom objekte  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) a požadovaný termín ukončenia  $j$ -tej operácie  $d_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Najlepšie riešenie bude mať potom minimálnu hodnotu určeného kritéria, pričom budeme uvažovať prípad, v ktorom minimalizujeme počet operácií nevykonaných v požadovanom termíne.

### 3 RIEŠENIE ÚLOH ROZVRHOVANIA OPERÁCIÍ V MS EXCELI

Sekvenčné úlohy (úlohy teórie rozvrhovania) opísané v predchádzajúcej časti možno riešiť aj pomocou nástrojov programu MS Excel (riešenie uvedeného problému je možné realizovať v programe MS Excel od verzie 2010). V tejto časti ukážeme spôsob riešenia úlohy rozvrhovania  $n$  operácií na jednom obslužnom zariadení ( $m = 1$ ) v uvedenom programe. Predpokladáme pritom zadanie vstupných dát do zošitu MS Excel tak, ako je to uvedené na obr. 1 (stĺpce A, B, C). V stĺpci A je pritom označenie príslušnej operácie ( $o_j$ ), v stĺpci B jej trvanie ( $t_j$ ) a v stĺpci C požadovaný termín ukončenia ( $d_j$ ),

Východiskom je možnosť hľadania riešení (pomocou *Riešiteľa* od verzie MS Excel 2010), ktoré predstavuje rôzne kombinácie čísel od 1 po  $n$ . Pretože pri sekvenčných úlohách (všeobecne v úlohách rozvrhovania operácií) je cieľom nájsť také poradie operácií, ktoré bude vyhovovať určenému optimalizačnému kritériu, možno na nájdenie príslušného rozvrhu využiť uvedený nástroj, teda *Riešiteľa*. Nastavenie v *Riešiteľovi* sa realizuje definovaním relácie pri zadávaní štruktúrnych ohraničení (*Relácia - dif* – všetky hodnoty budú navzájom rozdielne).

Predpokladajme rozloženie vstupných údajov tak, ako sú uvedené na obr. 1. Pre výpočet poradia si vyhradíme miesto od bunky E2 po bunku E8, ktoré budú reprezentovať hodnoty zodpovedajúce postupnosti vykonávaných činností. Na výpočet hodnoty účelovej funkcie možno použiť funkcie INDEX (trvanie činností a požadovaný termín ukončenia činnosti), SUM (termín ukončenia činností a v bunke I9 počet nesplnených operácií) a IF (nedodrжание požadovaného termínu ukončenia činnosti).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Uzol	Trvanie	Termín		Poradie	Trvanie	Ukončenie	Termín	Nesplnenie
2	1	2	4		1	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E2)	=SUM(\$F\$2)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E2)	=IF(G2>H2;1;0)
3	2	10	14		7	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E3)	=SUM(\$F\$2:F3)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E3)	=IF(G3>H3;1;0)
4	3	6	16		3	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E4)	=SUM(\$F\$2:F4)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E4)	=IF(G4>H4;1;0)
5	4	7	18		5	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E5)	=SUM(\$F\$2:F5)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E5)	=IF(G5>H5;1;0)
6	5	5	15		6	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E6)	=SUM(\$F\$2:F6)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E6)	=IF(G6>H6;1;0)
7	6	4	25		4	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E7)	=SUM(\$F\$2:F7)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E7)	=IF(G7>H7;1;0)
8	7	2	21		2	=INDEX(\$B\$2:\$B\$8;E8)	=SUM(\$F\$2:F8)	=INDEX(\$C\$2:\$C\$8;E8)	=IF(G8>H8;1;0)
9							Počet nesplnených		=SUM(I2:I8)

Obr. 1

Po ukončení prípravy vstupných dát môže byť aktivovaný vlastný optimalizačný modul – doplnok *Riešiteľ*. Po jeho spustení (*Údaje - Riešiteľ*) je používateľovi ponúknuté dialógové okno „*Parametre doplnku Riešiteľ*“ určené na zadávanie parametrov riešenej úlohy. V nasledujúcej časti sú popísané jednotlivé vstupné parametre *Riešiteľa* (Obr. 2) tak, ako sú použité v riešenej úlohe.

*Nastaviť cieľ* – v zadanej úlohe je optimalizačné kritérium v bunke I9.

*Do* – v uvedenej úlohe je požadované minimalizačné kritérium (*Minimum*).

*Zmenou premenných buniek* – ide o oblasť E2:E8, tieto bunky na konci výpočtu obsahujú výsledné hodnoty, poradie jednotlivých operácií.

*Podlieha obmedzeniam* – daná úloha neobsahuje štruktúrne ohraničenie, ale treba definovať vlastnosť premenných, že sú všetky navzájom rozdielne:

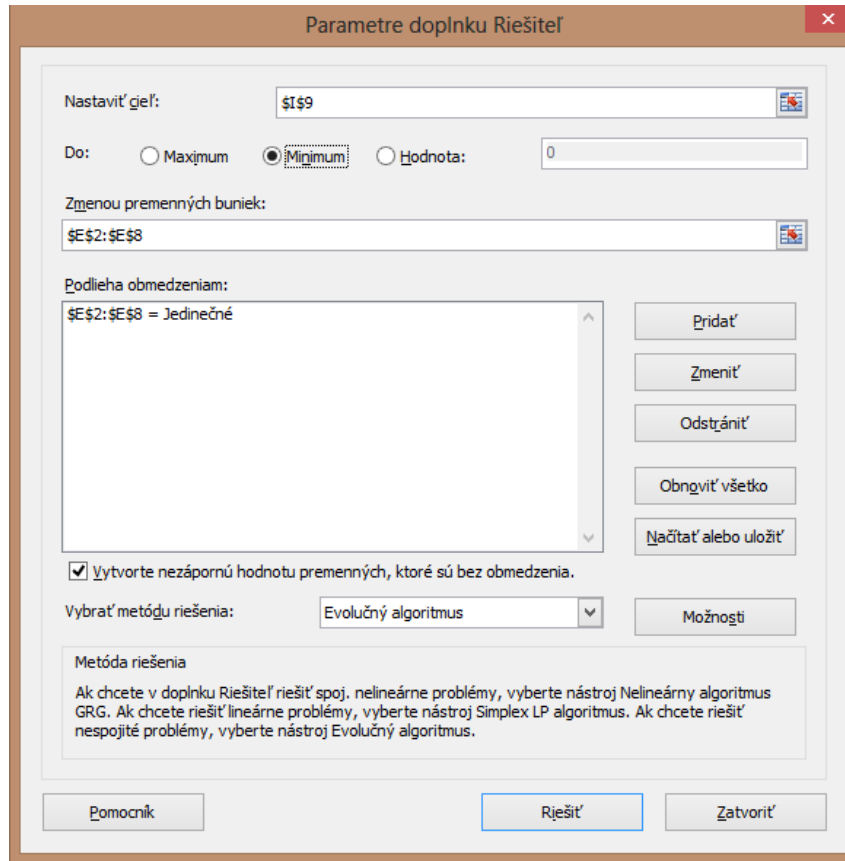
*Odkaz na bunku* – ide o bunky E2:E8 obsahujúce premenné úlohy.

*Relácia* – typ obmedzenia je *dif*.



*Obmedzenie* – hodnota sa nedefinuje.

V tomto prípade treba zvoliť v ponuke *Vybrať metódu riešenia* možnosť *Evolučný algoritmus*, lebo pri použití relácie *dif* rieši úlohy iba týmto druhom algoritmom.



Obr. 2

Na obr. 3 je uvedené výsledné riešenie úlohy v stĺpcoch E, F, G, H, I. Stĺpec E predstavuje výsledné poradie realizovaných operácií, stĺpec F trvanie jednotlivých operácií (na základe stĺpca vstupných údajov B), stĺpec G termín ukončenia príslušných operácií (podľa stĺpca E), stĺpec H požadované termíny ukončenia operácií (na základe stĺpca vstupných údajov C), stĺpec I dodržané (hodnota 0) a nedodržané (hodnota 1) požadované termíny ukončenia jednotlivých operácií. Z bunky I9 je zrejmé, že minimálny počet neuskutočnených operácií v požadovanom termíne predstavujú 2 operácie (operácie 4 a 2 na základe poradia zo stĺpca E a hodnôt 1 zo stĺpca I). Pre reálne riešenie uvedeného problému sú dôležité reálne termíny ukončenia jednotlivých operácií (stĺpec G), na základe možno skonštruovať časový plán rozvrhu jednotlivých operácií.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Uzol	Trvanie	Termín		Poradie	Trvanie	Ukončenie	Termín	Nesplnenie
2	1	2	4		1	2	2	4	0
3	2	10	14		7	2	4	21	0
4	3	6	16		3	6	10	16	0
5	4	7	18		5	5	15	15	0
6	5	5	15		6	4	19	25	0
7	6	4	25		4	7	26	18	1
8	7	2	21		2	10	36	14	1
9							Počet nesplnených		2
10									

Obr. 3

## Záver

Vytvorenie rozvrhu realizácie jednotlivých operácií na množine strojov vo všeobecnosti predstavuje problém často riešený v praxi. Na ich riešenie možno použiť modely matematického programovania. Z hľadiska výpočtovej zložitosti týchto modelov, pri riešení klasickými optimalizačnými prístupmi vznikajú problémy s ich riešiteľnosťou v reálnom čase, preto sa pomerne často pri ich riešení štandardne používajú rôzne heuristické prístupy, ktoré v reálnom čase poskytujú „dobré“ prípustné riešenia. Pritom vývojom nových alternatívnych prístupov možno v súčasnosti dosiahnuť také riešenia sekvenčných úloh, ktoré sú z hľadiska časovej zložitosti ako aj kvality riešenia vhodnejšie pre bežnú prax. Okrem vybraného problému boli uvedené postupy pomocou MS Excel použité aj pre iné typy sekvenčných problémov (vytvorenia rozvrhu realizácie jednotlivých operácií na obslužných zariadeniach), pričom boli dosiahnuté lepšie riešenia ako pri použití známych heuristik. To môže viesť k záveru, že moderné nástroje sú vhodným doplnkom na riešenie rôznych typov sekvenčných úloh pri zachovaní minimálne takej kvality riešenia ako pri použití zodpovedajúcich heuristických prístupov.

## Použitá literatúra

1. BREZINA, I. 2003. Kvantitatívne metódy v logistike. EKONÓM, Bratislava.
2. BREZINA, I. – PEKÁR, J. 2014. Operačná analýza v podnikovej praxi. EKONÓM, Bratislava.
3. PALÚCH, S. – PEŠKO, Š. 2006. Kvantitatívne metódy v logistike, EDIS ŽU, Žilina.
4. UNČOVSKÝ, L. a kol. 1991. Modely sieťovej analýzy. ALFA, Bratislava.
5. WINSTON, W. (2014) Microsoft Excel 2013 Data Analysis and Business Modeling: Data Analysis and Business Modeling. Pearson Education, New Jersey.

## Kontaktné údaje

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.  
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
 Tel: (421 2) 67 295 828  
 email: juraj.pekar@euba.sk, ivan.brezina@euba.sk

# OPTIMALIZACE KAMIONOVÉ DOPRAVY TRUCK TRANSPORT OPTIMIZATION

*Jan Pelikán*

## **Abstrakt**

Mezinárodní přeprava zboží od výrobců k odběratelům se většinou realizuje kamionovou dopravou. Navržený problém se týká efektivním využitím těchto vozidel, tedy problémem, jak efektivně naplnit kamiony a jakém časovém okamžiku je odeslat. Úloha se týká určitého časového intervalu a znalosti požadavků na přepravu v tomto časovém intervalu. Kromě toho se řeší otázka, zda je výhodné využít přeprava přímo k odběratelům nebo přes cross-dock, což závisí na obchodně technických podmínkách přepravce, jehož služby je využíváno. Prostor pro optimalizaci je obsažen v dvou možnostech přepravy (přímé a přes cross-dock) a v možnosti zásilky pozdržet po určitou dobu k odeslání. Problém je založen na případové studii, data této případové studie jsou rovněž využita pro výpočetní experimenty s modelem, ověření vlastnosti výsledků a jejich využitelnosti.

***KLíčové slová:*** kamionová doprava, cross-dock, celočíselného programování

## **Abstract**

The international transport of goods from manufacturers to customers is in most cases realized by the truck transport. The proposed problem relates to making effective use of these carriers, considering the way of how to load the trucks effectively and when to send them off. The problem is solved for a particular time interval, during which all requirements for transport are known. Apart from this, the question of whether it is efficient to make use of the cross-dock or the direct routes to customers is discussed. This is dependent on the trade and technical conditions of a particular logistic company. The space for optimization arises thanks to the two options of the transport (direct or via cross-dock) and a possibility that a parcel can be kept not sent off over a certain period of time. The problem is based on a case study. The data from the case study are used for the purposes of computational experiments on the model, verification of the properties of results and their applicability.

***Keywords:*** truck transportation, cross-dock, integer programming

## **1 ÚVOD**

Práce se zabývá logistickým problémem týkající se přepravy zboží kamiony, které se využívají hlavně v mezinárodní přepravě. Logistické firmy poskytují služby kamionové přepravy za určitých přepravních a obchodních podmínek. Významnou roli v přepravě zboží hraje cross-dock, tedy logistické centrum, kde je zboží od přepravců překládáno z jednoho kamionu na další kamiony s účelem maximálního využití kapacity kamionů a minimalizace jejich nákladů na přepravu k odběratelům. Využívání logistických center (cross-dock) představuje způsob dopravy, ve kterém zásilky jsou nejprve dopraveny do logistického centra a tam roztříděny podle místa určení a následně přeloženy do vozidel jedoucích do těchto destinací. Vozidla směřující z logistických center pak obsahují zásilky od různých dodavatelů a tím dochází k redukci nákladů. K přepravě do cross-docku je využíván celý kamion, náklady na jeho využití je fixní, nezávisí na jeho nákladu. Naopak pro přepravu z cross-docku, kde je sdružováno zboží více výrobců, jsou náklady odvozeny z množství resp. váze zboží a délce trasy.

Požadavky na přepravu vznikají u výrobce, který požaduje u logistické firmy realizovat přepravu svých výrobků z odběratelům a chce to realizovat s minimálními náklady. Optimalizace v reálné případové studii se týká určitého časového intervalu, v němž je dán seznam zásilek, u každé je dáno: čas kdy je zásilka připravena k přepravě, její objem, váha a místo určení případně další atributy (např. priorita zásilky,...). Přeprava zásilky může být realizovaná v době kdy zásilka je předána k přepravě nebo i po tomto termínu nejpozději např. do tří dnů (toto neplatí pro urgentní zásilky).

Úloha, která je předmětem příspěvku, je založena na případové studii. Přeprava výrobků firmy do zahraničí je zajišťována externí logistickou firmou, problém spočívá v optimalizaci nakládání kamionů a časového harmonogramu jízd. Kamiony s výrobky z firmy mohou být přepravovány buď přímo k odběratelům, nebo přes cross-dock. Kamiony jedoucí přímo, mohou obsahovat zásilky pouze do nejvýše dvou destinací, toto platí také pro kamiony jedoucí z cross-docku. Náklady u přímých jízd nejsou závislé na váze přepravovaného zboží, náklady jízd kamionů z cross-docku k odběratelům jsou kalkulovány na základě váhy přepravovaného zboží a délce trasy, přitom závislost nákladů na váze není lineární.

V článku budou navrženy dva optimalizační modely: první bude optimalizovat dopravu z firmy a to jak dopravu přímo k odběratelům tak do cross-docku. V tomto modelu se minimalizuje počet kamionů, které budou vyjíždět z firmy v určitém časovém intervalu. Druhý model bude minimalizovat náklady přepravy z cross-docku k odběratelům také v daném časovém intervalu.

Tématem zabývajícím se nakládáním kamionů je věnováno několik článků v odborné literatuře. Obsahem těchto článků je problematika odlišná od problému řešených v tomto příspěvku. V řadě z těchto zdrojů se řeší problém cyklických jízd kamionů vezoucích různé produkty, například pro dopravu ropných produktů tak, aby časový interval mezi dvěma dodávkami byl maximální [1] [3]. Další autor [2] navrhl způsob periodického nakládání vozidel s více odděleními na ložné ploše, kde oddělení mají různou kapacitu, a jedná se o různé druhy zboží. Yuceer [4] dokázal NP obtížnost úlohy, navrhl matematický model, zkoumal jeho vlastnosti a navrhl algoritmus řešení.

## **2. MODEL OPTIMALIZACE PŘEPRAVY ZÁSILEK KAMIONY OD VÝROBCE**

Je dán časový interval  $\langle 0, T \rangle$  a  $n$  zásilek, které se mají přepravit z výrobního závodu k zahraničním odběratelům.

U každé zásilky je určeno, kdy bude připravena k odeslání s tím, že pokud je urgentní, musí být odeslána v tomto časovém termínu, u neurgentních zakázek lze odeslání odložit o určitá počet dní (v modelu budeme předpokládat odložení zaslání o dva dny). U zásilky známe objem a váhu. Logistická firma, která přepravu zajišťuje, nabízí dvě možnosti přeprava: přepravu přímo k odběrateli, nebo přes cross-dock. Přeprava se realizuje kamiony o dané kapacitě. Pokud kamion jede přímo k odběratelům (FTL direct), pak může obsahovat zásilky nejvýše k dvěma odběratelům.

Cílem je naplánovat způsob přepravy s minimálním počtem kamionů, tedy určit u každého kamionu termín, kdy bude vypraven a odeslán, co se naloží a zda pojede přímo k odběrateli nebo do cross-docku. Počet kamionů není omezen (z důvodu formulace modelu budeme předpokládat určitý maximální počet kamionů každý den, tento počet odpovídá stávající potřebě v případové studii). Kapacita kamionu je 26 palet, nosnost není omezujícím faktorem.

Matematický model obsahuje následující parametry a proměnné.

### **Parametry modelu:**

$t_i$  čas kdy zásilka  $i$  je připravena k odeslání,  
 $q_i$  objem zásilky  $i$ , měřený počtem palet,  
 $w_i$  váha zásilky  $i$ ,  
 $d_i^s$  binární parametr, je roven 1 pokud  $i$ -tá zásilka je určena pro destinaci  $s$ .

### Proměnné modelu:

$x_{ijk}$  binární proměnná, je rovna 1 pokud zásilka  $i$  bude odeslána v čase  $j$  přímou přepravou v kamionu  $k$ , 0 v opačném případě,  
 $x'_{ijl}$  binární proměnná, je rovna 1 pokud zásilka  $i$  bude odeslána v čase  $j$  do cross-docku, 0 v opačném případě,  
 $y_{jk}$  binární proměnná je rovna 1 pokud  $k$ -tý kamion bude v čase  $j$  odeslán k odběratelům přímo  
 $y'_{jl}$  binární proměnná je rovna 1 pokud  $l$ -tý kamion bude v čase  $j$  odeslán do cross-docku  
 $h_{jks}$  binární proměnná rovna jedné, pokud  $k$ -té vozidlo v čase  $j$  jede do  $s$ -té destinace.

### Matematický model.

$$\sum_{j,k} y_{jk} + \sum_{j,l} y'_{jl} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_i x_{ijk} q_{i \leq} \leq 26 y_{jk}, \quad \forall j, k \quad (2)$$

$$\sum_i x'_{ijl} q_{i \leq} \leq 26 y'_{jl}, \quad \forall j, l \quad (3)$$

$$\sum_{j,k} x_{ijk} + \sum_{j,l} x'_{ijl} = 1, \quad \forall i \quad (4)$$

$$x_{ijk} = x'_{ijl} = 0, \quad \forall i, k, l \quad \forall j > t_i + 2, \quad j < t_i \quad (5)$$

$$\sum_s h_{jks} \leq 2, \quad \forall j, k \quad (6)$$

$$x_{ijk} \leq \sum_s d_{is} h_{jks}, \quad \forall i, j, k \quad (7)$$

Účelovou funkci (1) tvoří počet všech kamionů využitých k přepravě zásilek v daném časovém intervalu. Nerovnost (2) zajišťuje to, že pokud kamion  $k$  v čase  $j$  nejede do cross-docku, pak není možné ho využít k přepravě zásilek, zároveň tato nerovnost omezuje množství nákladu kapacitou vozidla. Obdobně (3) platí pro kamiony jedoucí přímo k odběrateli. V (5) se nepřipouští, aby zásilka nebyla naložena dříve, než je k dispozici nebo později než je přípustné, tedy více než o dva dny později. Nerovnost (6) vyjadřuje podmínku maximálně dvou destinací u kamionu směřující přímo k odběrateli. Omezení (7) nepřipouští naložit zásilku do kamionu, pokud nejede do destinace, kam je zásilka určena.

Model je lineární s binárními proměnnými, ale pro reálné problémy to může znamenat velký počet binárních proměnných, pokud je velký počet zásilek a dlouhý časový horizont, i když mnoho z nich podmínka (5) fixuje na nulu.

### 3. MODEL OPTIMALIZACE NÁKLADŮ NA PŘEPRAVU ZÁSILEK Z CROSS-DOCKU

Kamiony jedoucí z cross-docku jedou přímo k odběratelům. Opět platí, že mohou směřovat maximálně do dvou destinací. Na rozdíl od modelu (1)-(7) budeme minimalizovat náklady, které jsou závislé na váze přepravovaného zboží, přičemž tato závislost je nelineární. Cena přepravy jednotky váhy je dána tabulkou 1.

Interval	1	2	...	$L$
Váha[t]	$(r_1, r_2)$	$< r_2, r_3)$	...	$< r_L, \infty)$
Cena 1 t	$c_1$	$c_2$	...	$c_L$

Tabulka 1. Náklady na 1tkm přepravy kamionem

Zachováme nyní parametry modelu z předchozí kapitoly a definujeme následující proměnné:  
 $x_{ijk}$  binární proměnná, je rovna 1 pokud zásilka  $i$  bude odeslána v čase  $j$  přímou přepravou z cross-docku k odběrateli v kamionu  $k$ , 0 v opačném případě,  
 $y_{jk}$  binární proměnná je rovna 1 pokud  $k$ -tý kamion bude v čase  $j$  odeslán z cross-docku k odběratelům,  
 $h_{jks}$  binární proměnná rovna jedné, pokud  $k$ -té vozidlo v čase  $j$  jede do  $s$ -té destinace.

Omezující podmínky (2), (6), (7) budou stejné jako v předchozím modelu. Podmínku (4) a (5) upravíme takto:

$$\sum_{jk} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \quad (4')$$

$$x_{ijk} = 0, \quad \forall i, k, l \quad \forall j > t_i + 2, \quad j < t_i \quad \forall i, j, k \quad (5')$$

Předpokládejme, že náklady na využití jednoho kamionu jsou tedy závislé na součinu váhy a délky trasy tohoto vozidla (tkm), kde cena 1 tkm je dána tabulkou 1. Abychom tuto cenu mohli vložit do modelu, musíme zavést další proměnné:

$$u_{jk} = \sum_i x_{ijk} w_i \quad (8)$$

váhu  $k$ -tého kamionu vypraveného v čase  $j$  z cross-docku, binární proměnnou  $f_{jkl}$ , která je rovna jedné, pokud váha kamionu  $k$  v čase  $j$  je v cenovém interval  $l$ . Tato proměnná pak splňuje nerovnost (9).

$$-M(1 - f_{jkl}) + f_{jkl} r_l \leq u_{jk} \leq r_{l+1} f_{jkl} - \frac{1}{M} + M(1 - f_{jkl}) \quad \forall j, k, l \quad (9)$$

Druhou složkou nákladů na dopravu kamionu  $k$  v čase  $j$  je délka jeho trasy, kterou označme  $D_{kj}$ . Pro její výpočet budeme potřebovat znát vzdálenost destinace  $s$  z cross-docku, označme ji  $d_{1s}$  a vzdálenost mezi dvěma destinacemi  $s1$  a  $s2$  označené  $d_{s1,s2}$ . Pak délku trasy kamionu  $k$  v čase  $j$  můžeme vyjádřit jako (9):

$$D_{kj} = \sum_s d_{1,s} h_{kjs} + \sum_{s1,s2} d_{s1,s2} h_{kjs1} h_{kjs2} \quad (10)$$

Pak účelová funkce shrnující náklady na přepravu z cross-docku k odběratelům tvoří nelineární funkci (11).

$$z = \sum_{k,j,l} u_{jk} c_l f_{jkl} D_{kj} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Matematický model optimalizující přepravu z cross-docku k odběratelům tvoří

- nelineární účelová funkce (11),
- omezující podmínky: (2), (6), (7), (4'), (5'), (8), (9) a (10).

## 5. NUMERICKÉ EXPERIMENTY.

Popsaný problém řízení mezinárodní kamionové dopravy je založen na případové studii a na podkladech firmy, jíž se problém týká, byly ověřovány popsané modely. Časový interval pro tyto výpočty bylo 14 dní, v tomto intervalu bylo třeba přepravit asi 1000 zásilek do 10 destinací. Matematický model (1)-(10) obsahoval asi 60 tis. binárních proměnných a cca. 100 tis. omezení. Výpočet běžel 30 minut na CPLEX 12.5.1.0 na počítači PC (IntelCore2Quad,

2,83GHz). Výsledné řešení bylo získáno v první minutě výpočtu, po přerušení výpočtu toto řešení vykazovalo gap 3,5%. Model dopravy z cross-docku není lineární, protože omezující podmínky i účelová funkce obsahují pouze binární proměnné, bylo by možné model linearizovat, ale za cenu zvýšeného počtu proměnných.

#### **4. ZÁVĚR.**

V článku jsou navrženy modely optimalizující kamionovou přepravu. Jsou založeny na předem známém souboru zásilek, které se mají přepravit. V případě, že zásilky nejsou předem známe, pak optimalizace je založena pouze na rozhodnutí, zda zásilku připravenou k odeslání naložit na kamion a odeslat, nebo pokud kamion není zcela naplněn, pozdržet odeslání zásilky do doby než se kamion naplní na určitý ekonomicky výhodný objem dalšími nově příchozími zásilkami. Podstatné je pak, jaké procento naplnění kamionu je ekonomicky dostatečné pro odeslání kamionu s tím, že u zásilek není možné příliš dlouho odkládat jejich odeslání. K stanovení limitu naplnění kamionu je možné využít navržený matematický model a historická data a z výsledku optimalizace navrhnout tento limit. Jak již bylo uvedeno, model obsahuje značný počet proměnných, který závisí hlavně na počtu zásilek v daném časovém intervalu, proto možnosti řešení budou vyšší, pokud se jedná spíše o menší počet zásilek.

Podporováno z prostředků grantu No. 16-00408S Czech Grant Agency.

#### **Použitá literatura**

- [1] BUKCHIN Y., and SARIN S.C. (2004) : A cyclic policy for the loading of multiple products on a vehicle with different compartment sizes. In: IIE Transactions 30/7, 2004 pp.641-653
- [2] BROWN G.G. and GRAVES G.W. (1981): Real-time dispatching of petroleum tank trucks. In: Management Science 27, pp. 19-32
- [3] RONEN D. (1994): Dispatching petroleum products. In: Operations Research 43, pp. 379-387
- [4] YUCEER, U. (1997): A multi-product loading problem: A model a solution method. In: European Journal of Operational Research, 101, pp. 519-631

#### **Kontaktné údaje**

Prof. RNDr.Jan Pelikán, CSc..

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

W. Churchilla 4, 13067 Praha 3

Tel: (420) 224 095 430

email: [pelikan@vse.cz](mailto:pelikan@vse.cz)

# TAGUCHIHO SCENÁRE V SLUŽBÁCH ZÁCHRANÁROV

## TAGUCHI'S SCENARIOS IN RESCUE SERVICES

*Štefan Peško*

### Abstrakt

Príspevok sa zaoberá problémom umiestnenia sanitiek, ktoré zaisťujú zdravotnú starostlivosť pri neistej dobe jazd, dobe a mieste zásahu.. Základným model je modifikovaná formulácia váženého kapacitného  $p$ -mediánu s viacerými kritickými no neistými scenármi s neznámou frekvenciou výskytu. Pri vyhodnocovaní min – max kritéria navrhujeme využiť Taguchiho metódu z plánovania experimentov, ktorá ponúka odhad pravdepodobnostného rozdelenia kritických scenárov. Taguchiho scenáre tvoríme z dvoch optimálnych min-max riešení úloh váženého kapacitného  $p$ -mediánu, ktoré formulujeme ako úlohy zmiešaného lineárneho programovania (MLP).

*KLúčové slová: Taguchiho metóda , záchranný systém, kapacitné úlohy o  $p$ -mediáne, MLP*

### Abstract

The paper deals with the problem of sanitation placement that provide health care in case of uncertain driving times, the time and the place of intervention. The basic model is modified formulation of the weighted capacity  $p$ -median with several critical but uncertain scenarios with an unknown frequency of occurrence. When evaluating the min - max criteria, we suggest to use the Taguchi's method of experiment planning, which offers an estimate of the probability distribution of critical scenarios. We create Taguchi's scenario from two optimal min-max solutions for weighted capacity  $p$ -median tasks, which we formulate as Mixed Linear Programming (MLP) problems.

*Keywords: Taguchi's method, rescue service, capacity  $p$ -median problems, MLP*

## 1 ÚVOD

Problematike umiestnenia sanitiek v regiónoch Slovenska sa venuje na Katedre matematických metód a operačnej analýzy - KMMOA, Fakulty riadenia a informatiky Žilinskej univerzity dlhodobá pozornosť. Príspevok je reakciou na práce mojich kolegov [2,3,4,5,6,7], ktorí sa touto problematikou intenzívne zaoberajú.

Začneme základným min-max modelom a jeho slabým miestom, ktorý nás priviedol na myšlienku použiť metódu založenú na Taguchiho ortogonálnych poliach [8] pre odhad frekvencie scenárov. Taguchiho metóda je totiž známa najmä ako jedna z najpoužívanejších štatistických metód navrhovania experimentov spoločne s analýzou rozptylu (ANOVA) [1].

## 2 ZÁKLADNÝ MIN-MAX MODEL

Nech je daná množina  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  a trojindexová matica ocenení  $C = (c_{ijk})$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K = \{1, 2, \dots, m\}$ , kde

- $I$  je množina možných stredísk,
- $J$  je množina miest zásahu,
- $K$  je množina indexov scenárov,



- $b_j$  početnosť obyvateľov c mieste zásahu  $j \in J$ ,
- $J_{ik}$  podmnožina miest zásahu  $J$ , ktoré sú v scenári  $s_k$  v dosahu strediska  $i$ ,
- $p$  počet disponibilných sanitiek,
- $\lambda$  maximálny počet zásahov za sledované obdobie.

Pre  $i \in I, j \in J_{ik}, k \in K$  majme priradovaciu (rozhodovaciu) premennú  $x_{ijk}$ , ktorá nadobúda hodnotu 1 ak je v scenári  $s_k$  stredisku  $i$  priradené miesto  $j$ , ináč je 0. Výberovou premennou je tu  $y_i \in \{0, 1, \dots, p\}$ , ktorá udáva počet sanitiek v stredisku  $i$ . Nezáporné premenné  $w_1$  a  $w_2$  udávajú celkové ocenenie priradenia miest zásahu v 1. a 2. najhoršom scenári, s najväčšou cenou.

Na získanie prvého najhoršieho scenáru treba vyriešiť túto úlohu zmiešaného lineárneho programovania MLP:

$$w_1 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_{ik}} b_j c_{ijk} x_{ijk} \leq w_1 \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I: j \in J_{ik}} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in J, \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J_{ik}} x_{ijk} \leq \lambda y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in K \quad (5)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall j \in J_{ik} \quad (6)$$

$$y_i \in \{0, 1, \dots, p\} \quad \forall i \in I \quad (7)$$

$$w_1 \geq 0 \quad (8)$$

Cieľovou funkciou (1) je cena prvého najhoršieho scenára  $w_1$ , ktorá sa minimalizuje. Podmienka (2) určuje cenu najhoršieho scenára. Podmienka (3) priraduje každému miestu zásahu práve jedno stredisko v každom scenári. Podmienka (4) vyberá  $p$  stredísk z množiny možných stredísk. Kapacitné obmedzenie (5) pripúšťa maximálny počet zásahov v sledovanom období. Podmienky (5), (6), (7) sú obligatorné.

Druhý najhorší scenár  $k^*_2$  dostaneme riešením redukovanej úlohy MLP pre  $K - \{k^*_1\}$ , kde  $k^*_1$  je prvý najhorší scenár. Scenáre nazveme  $k^*_1$  a  $k^*_2$  kritické. Takto môžeme získať minimálne ceny prvého a druhého najhoršieho scenára  $w^*_1$  a  $w^*_2$  no ich praktická interpretácia je diskutabilná. Nie je totiž jasné s akou frekvenciou k takýmto kritickým „katastrofickým“ scenárom dôjde.

### 3 TAGUCHIHO SCENÁRE

Ortogonalným polom [6] z  $s$  prvkov, ktoré označujeme  $L_N(s^m)$  nazývame maticu typu  $N \times m$ , ktorej stĺpce majú tú vlastnosť, že každá dvojica stĺpcov obsahuje každú možnú usporiadanú dvojicu prvkov rovnaký počet krát. Ortogonálne polia slúžia ako štatisticky postačujúca náhrada s  $m-1$  experimentov s  $N$  experimentami pri analýze vplyvu  $m$  faktorov  $s$  hodnotami na výsledky pozorovaní.

V tomto príspevku sa obmedzíme na využitie dvojhodnotových Taguchiho polí v úlohe scenárov. Na obr.1 máme príklad dvojhodnotového Taguchiho poľa  $L_8(2^7)$ .

Row / Col.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	1	1	1	1
3.	0	1	1	0	0	1	1
4.	0	1	1	1	1	0	0
5.	1	0	1	0	1	0	1
6.	1	0	1	1	0	1	0
7.	1	1	0	0	1	1	0
8.	1	1	0	1	0	0	1

Obr.1. Dvojhodnotové Taguchiho pole pre 7 faktorov a 8 experimentov.

Majme ortogonálne pole  $T = L_N(2^m)$ , kde  $m = |S|$  je počet scenárov a  $N$  je počet výpočtov zodpovedajúcich min-max úloh, zrejme má matica  $T = (t_{vk})$  prvky  $t_{vk} \in \{0,1\}$ . Taguchiho scenármi pre úlohu MLP1 nazveme množiny  $K_{v1} = \{k \in K \mid t_{vk}=0\}$ ,  $v \in \{1,2,\dots,N\}$ .

Najhorší scenár  $k^*_1$  potom dostaneme riešením tejto optimalizačnej úlohy MLP(v1):

$$w_{v1} \rightarrow \min \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_{ik}} b_j c_{ijk} x_{ijk} \leq w_{v1} \quad \forall k \in K_{v1} \quad (10)$$

$$\vdots \quad \quad \quad (11)$$

$$w_{v1} \geq 0 \quad (12)$$

Pre úlohu MLP(v2) s druhými najhoršími scenármi  $k^*_2$  potom máme Taguchiho scenáre  $K_{v2} = K_{v1} - \{k^*_1\}$ , kde  $k^*_1$  je najhorší scenár v úlohe MLP(v1) t.j. tam kde je podmienka (10) splnená ako rovnosť.

Row / Col.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	0	0	0 <sup>•</sup>	0 <sup>•</sup>	0	0	0
2.	0 <sup>•</sup>	0	0 <sup>•</sup>	1	1	1	1
3.	0 <sup>•</sup>	1	1	0	0 <sup>•</sup>	1	1
4.	0 <sup>•</sup>	1	1	1	1	0	0 <sup>•</sup>
5.	1	0	1	0 <sup>•</sup>	1	0 <sup>•</sup>	1
6.	1	0	1	1	0 <sup>•</sup>	1	0 <sup>•</sup>
7.	1	1	0 <sup>•</sup>	0	1	1	0 <sup>•</sup>
8.	1	1	0 <sup>•</sup>	1	0 <sup>•</sup>	0	1

Obr.2. Výsledky riešenia MLP(1) a MLP(2) pre 7scenárov a 8 inštancií.

Na obrázku 2 máme označené • kritické scenáre v úlohách MLP(v). Riadkové súčty • nám dávajú pravdepodobnostné rozdelenie kritických scenárov:

$$\pi = (3/16, 0, 4/16, 2/16, 3/16, 1/16, 3/16).$$

## 4 STOCHASTICKÝ MIN-SUM MODEL

Z  $N$  optimálnych riešení úloh MLP( $\nu$ ) dostaneme  $N$  kritických hodnôt  $w_{\nu 1}^*$  a  $w_{\nu 2}^*$  váh scenárov, ktoré sú vybrané podmienkou (10) do zoznamu scenárov

$$\mathcal{S}^* = [s_{1,k_{11}^*}, s_{1,k_{12}^*}, \dots, s_{N,k_{N1}^*}, s_{N,k_{N2}^*}],$$

v ktorom sa prvky budú opakovať. Z početností výskytu scenárov v zozname môžeme odhadnúť pravdepodobnostné rozdelenie scenárov

$$\pi_k = \frac{|\{\nu | s_{\nu k} \in \mathcal{S}^*\}|}{2N}, k \in K$$

resp. cien scenárov

$$\pi_k = \frac{\sum_{\nu: s_{\nu k} \in \mathcal{S}^*} w_{\nu 1}^* + w_{\nu 2}^*}{\sum_{\nu \in \mathcal{N}} w_{\nu 1}^* + w_{\nu 2}^*}, k \in K.$$

Potom už môžeme riešiť známy model stochastického váženého kapacitného p-mediánu:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_{ik}} \pi_k b_j c_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I: j \in J_{ik}} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in J, \forall k \in K \quad (14)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (15)$$

$$\sum_{j \in J_{ik}} x_{ijk} \leq \lambda y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in K \quad (16)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall k \in K, \forall j \in J_{ik} \quad (17)$$

$$y_i \in \{0, 1, \dots, p\} \quad \forall i \in I \quad (18)$$

Tento model sa líši od modelu MLP len cieľovou funkciou (13), ktorou je priemerná cena scenárov.

## 5 ZÁVER A BUDÚCI VÝSKUM

V tomto príspevku prezentujeme nový návrh na odhad frekvencie (pravdepodobnosti) scenárov umiestnenia sanitiek v regióne, ktorý je vstupným parametrom úlohy stochastického váženého kapacitného p-mediánu. S prístupom, ktorý je založený na Taguchiho metóde, sme sa nestretli v dostupnej literatúre pri riešení lokačných úloh.

V ďalšom výskume by sme sa chceli zamerať na počítačovú verifikáciu zvolenej metódy na reálnych inštanciách, výsledky (umiestnenia sanitiek) by sme mohli porovnať s inými alternatívnymi prístupmi pomocou simulačných nástrojov vyvíjaných na KMMOA aj pre potreby záchranárov [5].

Do úvahy tiež prichádza tvorba Taguchiho scenárov v dopravnej sieti SR, ktorej dĺžky úsekov sú modelované intervalmi. Potom 0-1 hodnoty Taguchiho ortogonálnych polí môžeme interpretovať ako dolné a horné hranice intervalov, čo postačuje v min-max regret kombinatorických optimalizačných modeloch. Taguchiho scenáre sa tiež môžu týkať dôb obsluhy pacientov v mieste zásahu resp. v nemocnici.

### **Pod'akovanie**

Práca bola podporovaná grantami VEGA 1/0518/15 „Spoľahlivé záchranné systémy s neistou dosiahnuteľnosťou služby“ a VEGA 1/0582/16 „Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach“

1. BALA, M. G., Biswanath M. and Sukamal G., 2009: Taguchi method and ANOVA: An approach for process parameters optimization of hard machining while machining hardened steel, Journal of Scientific & Industrial Research, Vol. 68, pp. 686-695.
2. JANÁČEK, J., 2013: Emergency Public Service System Design Using IP-solver, in Proceedings of the 1st WSAS International Conference on Optimization Techniques in Engineering, OTENG'13, Antalya, pp. 97-101.
3. JANÁČEK, J., KVET M., 2016: Min-max robust emergency service system design, In: Communications, Volume 18, no 3, pp. 12-18.
4. JANÁČKOVÁ, M., SZENDREYOVÁ, A., 2015: Vplyv nehodových lokalít na umiestnenie staníc záchranej zdravotnej služby, Sborník "Optimalizační úlohy v dopravných a logistických systémech a SW podpora rozhodování v inteligentních dopravných systémech", Praha, Albertov 20-21.11.2015, str.12-17.
5. JANKOVIČ, P. , 2015: Agent-based simulation for creating robust plans and schedules, In: Procedia computer science, Vol. 51, pp. 895-904.
6. JANOŠÍKOVÁ, L., 2007: Emergency Medical Service Planning, Communications, No 2, Volume 9, pp. 64-68.
7. GÁBRIŠOVÁ, L., JANÁČEK, J., 2015: Design of capacitated emergency service system In: Communications, Volume 17, no. 2 pp. 42-48.
8. KACKER, R.N., LAGERGREN, E.,S., FILIBEN, J.J., 1991: Taguchi's Orthogonal Arrays Are Classical Designs of Experiments, J Res Natl Inst Stand Technol. 1991 Sep-Oct; 96(5), pp. 577-591.

### **Kontaktné údaje**

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiku

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (041 5) 134 275

email: [stefan.pesko@fri.uniza.sk](mailto:stefan.pesko@fri.uniza.sk)

# EKONOMICKÉ APLIKÁCIE TEÓRIE HIER

## ECONOMIC APPLICATIONS OF GAME THEORY <sup>1</sup>

*Allan Jose Sequeira Lopez*

### **Abstrakt**

Teória hier je disciplína aplikovanej matematiky, ktorá sa zaoberá riešením rozhodovacích situácií zahŕňajúcich viac než jeden subjekt. Pojem teória hier zahŕňa rôzne konfliktné situácie medzi rôznymi subjektami (jednotlivci, firmy, štáty, politické strany a pod.), pričom predpoklady a dané pravidlá sú presne definované. V súčasnosti existuje množstvo rozličných typov hier, pričom spoločným znakom hier je použitie matematického aparátu na popis konfliktných situácií. Príspevok je zameraný na analýzu vybraných ekonomických aplikácií teórie hier na analýzu rozličného správania sa firiem v odlišných trhových štruktúrach, napr. monopolistická konkurencia, oligopol – duopolistické modely Cournota, Betranda a Stackelberga odhaľujú typy tajných dohôd (spolupráce), ktoré sa môžu vyskytnúť na trhu: implicitné (kartel) a explicitné – prostredníctvom stratégie cenového vedenia.

***Kľúčové slová:** teória hier, kooperačné hry, nekooperačné hry*

### **Abstract**

Game Theory is a discipline of applied mathematics focused on decision-making situations with more than one subject involved. The term Game Theory involves any conflicting cases between any subjects (individuals, firms, states, political parties etc.) with clearly specified assumptions and rules. Nowadays, there is a number of different types of games known around the world, however, a mathematical mechanism is always used to describe conflict situations. The commentary is focused on analysis of chosen economic applications of Game Theory in order to analyze different behaviors that companies develop in the face of different market structures such as: monopolistic competition, oligopoly - introducing the duopolies of Cournot, Bertrand and Stackelberg - to expose the types of collusion (cooperation) that can occur in the market: implicit - cartels - and explicit - through a strategy of price leadership.

***Keywords:** game theory , coalitional game, non-cooperative games*

## **ECONOMIC APPLICATIONS OF GAME THEORY**

Game theory is a mathematical tool with economical applications. It allows analysis of situations where the participants have conflict of interest. There are two options to resolve this kind of conflicts based on the fact that the participants cooperate or not cooperate together.

- Reach an agreement i.e. they play cooperative game (coalitional game)
- Not reach an agreement i.e. they play non-cooperative games

---

<sup>1</sup> The paper was developed as part of the project application of selected models of game theory to solve some economic problems of Slovakia.

Game theory was first applied in the economic area by Von Neumann and Morgenstern in 1944, in the book *The Theory of Game Behavior*.

Thanks the game theory we are able to make various types of models: the ones that represent the financial trade usually include different numbers of participants (sellers, buyers etc.). Game theory has also been used to solve various economic problems such as oligopoly, monopoly and auction cases. It could also be applied in other cases such as the equitable division of property and inheritance.

Before we proceed to analyze the models of behavior of companies, it's relevant to make a reference to different structures existing on the market. Within the scope of the game theory it is interesting to focus on those structures which count with a relation of interdependence strategy between different participated companies.

A priori, we could think that the only market structure which holds the power of monopoly is the pure monopoly, however, there are other three structures that can show the power of monopoly as well, such as monopolistic competition, oligopoly, cartel and price leadership.

## **1. Monopolistic Competition**

The monopolistic competition can be defined as the market where the companies can enter freely, each of them can produce its own products or a types of different products which can be easily substituted for others but not completely substituted (Pindyck, 2009). The seller of a product has a certain power of monopoly if he can charge a price over marginal costs to be rentable. Whilst in monopoly the benefits are maximized by choosing the volume of production where marginal income equals marginal costs, in competitive markets efficiency is achieved by maximizing the sum of the surplus of consumers and producers. (Pindyck, 2009)

## **2. Oligopoly**

It should be emphasized that both the situation of perfect competition and that of pure monopoly do not represent at all the existing economic reality since they represent an idealized economy. In everyday life there are common situations in which there are either a large number of companies in the market or few companies but with a high concentration in the market. In the last case - of the existence of few companies - the figure of the oligopoly is framed. Within the scope of game theory it is interesting to study the oligopoly since the companies that intervene in the market can be assimilated to some players that act based on strategic decisions.

Oligopoly can be defined as a market in which there are only a few companies that compete with each other and new companies are not allowed to enter the market. The product can be differentiated or not. (Pindyck, 2009)

At the same time, it should be noted that monopoly power and profitability depend partially on how firms interrelate. So every company is forced to behave and act in a strategic way: every time you make an economic decision you will try to find out the most likely reactions from your competitors. It is necessary to weigh the possible reactions of the competitors in order to proceed to a decision on a business aspect considering that the rivals will also do the same when they want to make their decisions. Since these reactions and decisions are dynamic, we can conclude that in the oligopoly games are infinite.

In order to proceed with the explanation of the different situations which we can find within the oligopoly market structure, we are going to establish a simplifying hypothesis: we consider a market where only two companies compete (duopoly), nevertheless, the results obtained for the duopoly are similar for markets in which "n" companies compete.

Among others, let's mention the following strategic behavioral models which take into account that companies know that their actions will affect the decisions of their competitors.

- Cournot Model
- Bertrand Model
- Stackleberg Model

The first two models – Cournot and Bertrand – are known as simultaneous game and the third, model of Stackleberg can be defined as a sequential game.

Simultaneous games can be described as games where the players move simultaneously or where the players do not know the previous movements of other players. On the other hand, in sequential games (or dynamic games) the players have some knowledge of previous actions of other players. Such knowledge is not necessarily perfect, it can only consist of some information.

### **2.1. Cournot Model**

The Cournot model is based on the following basic hypothesis:

- There are two companies on the market (simplified).
- Production is homogenous.
- The single market price is obtained from the aggregate supply of the different companies. So, although the level of interdependence between companies is low, it is reflected in the market.
- Each company considers the level of production of its competitors fixed and all decide simultaneously the quantity they produce. This is the essence of the Cournot model.

Companies 1 and 2 produce  $q_1$  and  $q_2$  simultaneously. So the total quantity is:

$$Q_T = q_1 + q_2$$

Since the profit is calculated as price x quantity, then the profit of each company will be as follows:

$$P \times q_1 \times q_2 \begin{cases} \rightarrow B_1 = p \times q_1 - C_1(q_1) \\ \rightarrow B_2 = p \times q_2 - C_2(q_2) \end{cases}$$

Cournot equilibrium says that each firm correctly assumes how much its competitor will produce and consequently maximizes its profits. (Pindyck, 2009)

### **2.2. Bertrand Model**

The Bertrand model is based on the following basic hypothesis:

- The companies compete in price. When choosing the price, each company has to predict the price set by the other company.
- Production is homogenous.
- Companies consider the prices of their rivals as given. And they simultaneously choose the price they will charge to their consumers.

The equilibrium will be based on a pair of prices so that each company has a profit-maximizing price whilst the price of the other company given. That is, if firm 1 sets a price  $P_1$ , the company 2 could choose several options when setting its price  $P_2$ :

- Company 2 sets a price higher than that of company 1:  $P_2 > P_1$ . In this case  $q_2 = 0$  because firm 1 would penetrate the entire market.
- Both sets the same price:  $P_2 = P_1$ . Companies distribute the market at that price.
- Company 2 sells cheaper than company 1:  $P_2 < P_1$ . In this case  $q_1 = 0$

Given the price of its rival, the most profitable option for company 2 is the third one because in this case its competitor - the company 1 - does not sell anything and the company 2 gets a penetration – 100% in the market. As this argument is repeated over time, it leads to  $P_1 = P_2 = C_{mg}$ . However, it should be noted that if the price is higher than the marginal cost, no equilibrium can be reached because any company would reduce the price slightly.

### 2.3. Stackleberg Model

Notwithstanding the above, it is not realistic for companies to act simultaneously, since it is common for one to act before another (company 2 will have to act knowing the action that has been taken by company 1 based on the game theory). Therefore, one company acts as a leader and the other as a follower. One company sets the level of production before the others.

Leading company: Company 1 is the first to choose its level of production. So the company 2 will act accordingly:

$$dq_2/dq_1 = dR_2/dq_1$$

The company 1 acts on the basis that the company 2 - follower - will consider the level of production as fixed. So the follower behaves as in the Cournot model. The objective of the leader company will be to maximize the profit knowing that the follower will act according to its reaction function.

Follower company: is the one that chooses according to the action that has carried out the leader. Its goal will be to maximize the profit given the leader's output.

$$dq_1/dq_2 = 0$$

When comparing with Cournot model we can reach the following conclusion:

- Company 1 (leader) obtains the greatest possible benefits.
- Company 2 (follower), obtains a lower profit than that would obtain with Cournot.

### 3. Cartel

As we have already mentioned, companies can choose between several strategic decisions. We can highlight, among others: cooperation and competition. In the first case, both companies could set a price above the marginal cost causing significant profits to be obtained; while in the second case, they would derive less profit compared to cooperation.

There are two types of cooperation (collusion): explicit or implicit. The first has its reflection in the figure of the cartel while the second in the price leadership. (Pindyck, 2009)

First of all, in the cartel cooperating companies coordinate both their prices and their production levels in order to maximize their joint benefits. This structure often occurs in very competitive markets where the interdependence of companies is vital to reduce the level of competition. An example could be the OPEC.



A priori, we could think that we are talking about a structure of a pure monopoly; however, we can find two important differences:

- Since it is not often that they control the market as a whole, it is necessary for these companies to take into consideration how their price decisions will affect the production of the part not controlled by them.
- Since the cartel members are not part of the same company - as there are several firms from different companies - they often tend to "cheat" as each company has incentives to break the agreement by lowering its price and attracting sales of its competitors causing its market share to increase.

In this model, the companies (producers) explicitly collude in terms of pricing and production levels. It is vital to have business success that:

- Total demand is not too elastic with respect to price.
- The cartel controls most of the supply.
- Or that the supply of non-cartel undertakings must be inelastic.

However, it should be noted that these practices are illegal at the national level and are pursued by the government. This is why they are usually in the international arena. In addition, collusive agreements are quite tempting to fail, so the so-called punishment strategy has been implemented: to cooperate and respect both prices and the level of production if the other party has complied or reduced prices and produce at the level of quantity of the Cournot model in the opposite case.

Therefore, if both companies are aware of the long-term stability and profitability, the threat with a punishment strategy discourages them from breaking the agreement because what they are going to lose is going to be higher than what they are going to win.

#### **4. Price Leadership: Implicit Collusion**

Before explaining what we mean by price leadership strategy, it should be emphasized that a characteristic of oligopolistic markets is price rigidity: companies that are part of that market structure will not easily alter prices even if changes are made in costs or demand.

This rigidity is the basis of the oligopoly model of demand curve broken by price: in the sense that in the higher price levels demand is very elastic while in the lower it is inelastic. This is because each company is aware that if it raises its price above the current price, none of its rivals will imitate it therefore losing a large part of its sales; while if you lower it, everyone will do the same so your sales will only increase as demand for the market increases.

However, this model does not give us an explanation of how companies proceed to fix their prices. In order to obtain this explanation, we have to resort to the prisoner's dilemma, since it shows that companies are working harder to avoid a price war with dire consequences both for companies (in particular) and economy (in general).

In case of such price signals, if they occur in a continuous way through the price, we can say that we are facing a strategy of price leadership that solves the problem of coordinating to fix the price since other companies must follow the guideline fixed by the leader.

It should be pointed out that if companies do not act with discretion, they will be prosecuted for pro-monopoly practices. Most often, however, the leading company arises naturally and others follow it in order to adapt to changing needs, especially when price rigidity has been maintained over a long period of time.

To conclude, to emphasize that price leadership is a type of implicit collusion that sometimes obliterates the prisoner's dilemma: one company sets the price and the others follow to fix the same.

## CONCLUSION

In our paper we opted for an exposition of the different behaviors that companies develop in the face of different market structures such as: monopolistic competition, oligopoly - introducing the duopolies of Cournot, Bertrand and Stackelberg - to expose the types of collusion (cooperation) that can occur in the market: implicit - cartels - and explicit - through a strategy of price leadership.

## BIBLIOGRAPHY

Bertrand, J. 1883. *Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses*. s.l. : Journal de Savants 67, 1883.

Cournot, A. A. 1971. *Researches into the Mathematical Principle of the Theory of Wealth*. New York : A. M. Kelley Publishers, 1971.

Dlouhý, M. - Fiala, P. 2007. *Úvod do teórie hier*. Praha : Oeconomica, 2007.

Nemann, J. von - Morgenstern, O. 1944, 2004. *Theory of Games and Economic Behavior*. Woodstock : Princeton University Press, 1944, 2004.

Pindyck, Robert S., Rubinfeld, Daniel L. 2009. *Microeconomía 7ª Ed*. Madrid : Pearson Educación, 2009. ISBN: 978-84-832-2706-0.

Policonomics. 2012. [www.policonomics.com](http://www.policonomics.com). [Online] Policonomics, 2012. [Cited: March 15, 2017.] <http://www.policonomics.com/stackelberg-duopoly-model/>.

Quirós, C. Z. 2014. *La teoria de los juegos y sus aplicaciones en la economía actual*. Madrid : s.n., 2014.

Stackelberg, H.F. von. 1952. *The Theory of Market Economy*. Oxford : Oxford University Press, 1952.

### Contact

Ing. Allan Jose Sequeira Lopez.  
University of Economics in Bratislava  
Faculty of Economic Informatics  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (+421) 918528099  
e-mail: [sequeira\\_36@hotmail.com](mailto:sequeira_36@hotmail.com)

# MOŽNOSTI VYUŽITIA AKTIVIZUJÚCICH VYUČUJÚCICH METÓD V EKONOMETRII<sup>1</sup>

## POSSIBILITIES OF USING ACTIVATING TEACHING METHODS IN ECONOMETRICS

*Kvetoslava Surmanová, Marian Reiff*

### **Abstrakt**

Cieľom príspevku je stručne predstaviť vybrané aktivizujúce metódy, ktoré je možné aplikovať vo výuke ekonometrie, čím je možné zatriktívniť a zefektívniť túto vednú disciplínu. Pri výuke je dôležité aplikovať také metódy, ktoré uľahčia v procese zapamätania si pochopiť pojmy a vzťahy medzi nimi. Už J. A. Komenský sa domnieval, že učiť sa naspamäť a memorovanie nemá do budúca pre praktický význam žiadny zmysel. Preto by mal učiteľ vhodne využívať didaktické pomôcky a hlavne aktivizačné metódy vo výuke.

*Kľúčové slová: aktivizujúca metóda, ekonometria, motivácia*

### **Abstract**

The aim of the paper is to briefly introduce selected activation methods, which can be applied in econometrics teaching, which makes it possible to make this discipline more attractive and effective. In teaching, it is important to apply methods that make it easier for the memorization process to understand the concepts and relationships between them. Already J. A. Komensky thought that learning to remember and memorizing does not have any meaning in the future for the practical purpose. Therefore, the teacher should make good use of teaching aids and activation methods in teaching.

*Keywords: activation methods, econometrics, motivation*

## **1 VYMEDZENIE ZÁKLADNÝCH POJMOV**

Byť učiteľom je poslanie, ktoré je často veľmi náročné a predovšetkým zodpovedné. Mnohí schopnosť učiť iných označujú ako umenie, poslanie alebo profesiu. Verejnosť ho však často nevníma tak, ako by mala a nevedomuje si jeho náročnosť. Pritom práve učiteľ je ten, kto dokáže v študentoch vzbudiť záujem o poznanie, po vzdelávaní sa a po učení. Práve k tomu, aby došlo k vzniku záujmu o vzdelanie, musí učiteľ vo vyučovacom procese uplatniť také činnosti, ktoré vyvolajú záujem u študentov. Učiteľ musí poznať cestu k predávaniu informácií a musí poznať výukové metódy, ktoré môže vo vyučovacom procese efektívne využívať.

Vedieť vzbudiť záujem žiakov a študentov platí vo zvýšenej miere hlavne vo výuke matematiky a ostatných kvantitatívnych vedách, v ktorých je matematika hlavným vyjadrovacím prostriedkom.

---

<sup>1</sup> Príspevok vznikol s podporou projektu 1/0248/17 Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie a v rámci projektu Optimalizačné modely a metódy ako nástroje efektívnej regulácie v modernej teórii organizácie sieťových odvetví“, 2015 – 2017. grant č. 1/0697/15

Pri výuke je dôležité aplikovať také metódy, ktoré uľahčia v procese zapamätania si pochopiť pojmy a vzťahy medzi nimi. Už J. A. Komenský sa domnieval, že učiť sa naspamäť a memorovanie nemá do budúcnosti pre praktický význam žiadny zmysel. Preto by mal učiteľ vhodne využívať didaktické pomôcky a hlavne aktivizačné metódy vo výuke.

Rozvoj tvorivých schopností študentov si vyžaduje zámerné vytváranie tvorivých situácií vo vyučovacom procese. Použitie didaktických hier rozširuje vyučovanie o nové prvky, čím vzniká priestor na nové zážitky na oboch stranách – učiteľa i študenta.

Kotrba a Lacina (2007)<sup>2</sup> uvádzajú, že každý učiteľ by mal byť nespokojný s doterajšou praxou a sám by sa mal naďalej vzdelávať. Používaním rozličných metód sa stane vyučovací proces zaujímavejším a lákavejším nielen pre samotného študenta, ale i pre učiteľa. Výsledkom bude v najväčšou pravdepodobnosťou kvalitnejšie vzdelávanie a hlavne výsledky vzdelávacieho procesu.

Zakomponovať do procesu vyučovania samotné aktivizačné metódy je nepostačujúce. Dôležité je prebudiť a budovať v študentoch vnútornú motiváciu, ktorá je chápaná ako rozumová hodnotová orientácia, záujmy, určitá potreba, popud atď.<sup>3</sup> Základom aktívnej činnosti každého študenta na vyučovaní by mala byť správna motivácia. Nejde však len o motiváciu ako povzbudenie, či udržiavanie záujmu študenta o učebnú činnosť, ale je potrebné vidieť úzky vzťah medzi motiváciou a aktivitou.<sup>4</sup> Práve z tohto dôvodu sa v tejto časti práce venujeme motivácii a tvorivosti.

## 1.1 Motivácia

Pod motiváciou rozumieme istý stav vnútornej aktivizácie jednotlivca, vyplývajúcej z jeho potrieb zameranej na uspokojenie týchto potrieb. Podľa Gardnera (1985) motivácia zahŕňa 4 základné aspekty – cieľ, snaživé správanie, túžbu dosiahnuť cieľ a pozitívny postoj k danej aktivite<sup>5</sup>. K správne motivovaniu študentov je možné využiť vhodné didaktické pomôcky, navodenie podmienok a situácií, pričom je možné využiť vnútorné a povzbudzujúce činitele študenta. Motivačné prvky by mali byť prítomné vo všetkých fázach vyučovacieho procesu. Úlohou pedagóga je pomocou priebežných motivačných metód rôznymi vstupmi udržiavať pozornosť a záujem študentov.

## 1.2 Metóda

Tento pojem pochádza z gréckeho slova „methodos“ a znamená cestu, postup, spôsob ako sa dostať, ako dosiahnuť cieľ. Metóda môže byť chápaná ako nástroj, ako cieľavedomý postup, ktorý sa využíva k dosiahnutiu nadefinovaného cieľa. Metóda v procese výučby predstavuje veľmi dôležitý prvok, lebo pomocou nej je možné študentom sprostredkovať obsah učiva. Všeobecne môžeme rozlišovať metódy klasické a moderné, tzv. aktivizujúce metódy. Súčasná doba vyžaduje, aby sa vo veľkej miere využívali aj netradičné aktivizujúce metódy, ktoré

---

<sup>2</sup> KOTRBA, T. – LACINA, L. 2007. *Praktické využití aktivizačních metod ve výuce*. Brno: Barrister a Principal, 2007. ISBN 978-80-87029-12-1.

<sup>3</sup> UHEROVÁ, Z. – HORŇÁKOVÁ, H. 2014. *Možnosti zvyšovanie motivácie vo vyučovacom procese*. 2014. [online]. p.2 [cit. 16.5.2017]. Dostupné na internete <[http://www.unipo.sk/public/media/files/docs/fz\\_veda/svk/dokument\\_51\\_14.pdf](http://www.unipo.sk/public/media/files/docs/fz_veda/svk/dokument_51_14.pdf)>.

<sup>4</sup> HORŇÁKOVÁ, A. 2014. Aktivizujúce a motivujúce metódy vo vyučovaní odborného jazyka. In *GRANT journal* [online]. 2014, vol. 3, no. 1, p.15. [cit. 17.5.2017]. Dostupné na internete: <[http://www.grantjournal.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs](http://www.grantjournal.com/index.php?option=com_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs)>. ISSN 1805-0638

<sup>5</sup> GARDNER, R., C. *Social Psychology and Second Language Learning. The Role of Attitudes and Motivation*. London: Edward Arnold Publishers, Ltd. 1985, p. 50, ISBN 0-7131-6425-5.

dokážu študentov aktivizovať do samostatnej práce a do hľadania vhodných riešení problémov.<sup>6</sup>

### 1.3 Tvorivosť a myslenie

Metódy rozvíjania tvorivosti nemôžeme zvládnuť len učením. Tvorivosť sa nedá schematizovať. Dargová (2001)<sup>7</sup> píše o viacerých princípoch. V rámci tvorivosti môžeme rozlišovať dva typy myslenia. Konvergentné (vedie k jednému správne riešenie stanovnej úlohy) a divergentné (vedie k alternatívnemu riešeniu) myslenie. Konvergentné myslenie môžeme charakterizovať ako postupnosti, ktoré majú logicko-deduktívny, schematický a systematický charakter. Uplatňuje sa v úlohách s 1 riešením, pričom myslenie má zbiehavý charakter, pričom sa logicky a algoritmicky postupuje k správne záveru.

### 1.4 Aktivizujúce metódy

Podstatou aktivizujúcich metód je plánovanie, riadenie vyučovania tak, aby dochádzalo k naplneniu vzdelávacieho cieľa prostredníctvom vlastnej poznávacej činnosti študentov. Aktivizujúce metódy majú za cieľ podporiť záujem o učenie, intenzívne prežívanie, myslenie a konanie študentov. Využívajú už nadobudnuté poznatky a skúsenosti študentov a významne podporujú a rozvíjajú poznávacie procesy študentov.

Hornáková (2014, citované podľa Maňáka a Šveca, 2003) uvádza nasledovné triedenie vyučovacích metód<sup>8</sup>:

- a) problémové metódy (kladú dôraz na aktivitu, produktívne myslenie a samostatnosť),
- b) hry,
- c) diskusné metódy (cieľom je naučiť sa vzájomne komunikovať a vnímať ostatných),
- d) situačné metódy (zamerané na modelované situácie zamerané na reálne udalosti, ktoré je potrebné vyriešiť, vyžadujú si vedomosti z rôznych iných predmetov),
- e) inscenačné metódy – hranie rolí (vychádzajú z priamej skúsenosti, študent sa naučí viac, keď si danú rolu zahrá, ako keď len pasívne pozoruje),
- f) špeciálne metódy (cvičenie vnímavosti, projektové metóda, atď., slúžiace na odstránenie psychických bariér, napätia, stresu a vytvorenie priateľskej atmosféry).

Petty (2008)<sup>9</sup> odporúča vo výuke vyskúšať čo najviac metód. Nedat' sa odradiť, ak na prvý krát nebude metóda fungovať tak ako sme si predstavovali. Je potrebné ju zopakovať viackrát. Len tak sa môžeme presvedčiť o vhodnosti, príp. nevhodnosti danej vyučovacej metódy.

## 2 VYBRANÉ AKTIVIZUJÚCE METÓDY

Nakoľko existuje množstvo aktivizujúcich metód a ich využitie sa líši v závislosti od konkrétnej oblasti ich uplatnenia, v nasledujúcich podkapitolách uvádzame len zopár vybraných metód. Vo výučbe ekonometrie môžeme podľa nášho názoru aplikovať nasledovné aktivizujúce metódy:

---

<sup>6</sup> HORŇÁKOVÁ, A. 2014. Aktivizujúce a motivujúce metódy vo vyučovaní odborného jazyka. In *GRANT journal* [online]. 2014, vol. 3, no. 1, p.15. [cit. 17.5.2017]. Dostupné na internete: <[http://www.grantjournal.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs](http://www.grantjournal.com/index.php?option=com_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs)>. ISSN 1805-0638

<sup>7</sup> DARGOVÁ, J. 2001. *Tvorivé kompetencie učiteľa*. Prešov: Privat Press, 2001. ISBN 80-968608-1-X

<sup>8</sup> HORŇÁKOVÁ, A. 2014. Aktivizujúce a motivujúce metódy vo vyučovaní odborného jazyka. In *GRANT journal* [online]. 2014, vol. 3, no. 1, p3 [cit. 17.5.2017]. Dostupné na internete: <[http://www.grantjournal.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs](http://www.grantjournal.com/index.php?option=com_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs)>. ISSN 1805-0638

<sup>9</sup> PETTY, G. 2008. *Moderní vyučování*. Praha: Portál, s.r.o., 2008, s. 113. ISBN 978-80-7367-427-4

## 2.1 Brainstorming – skonštruujeme si vlastný model

Ako príklad môžeme uviesť diskusiu na seminári, na ktorom je cieľom aplikovať problematiku simultánneho viacrovnicového modelu na ekonomiku Slovenskej republiky. Za základné východisko považujeme u študentov byť oboznámený so základmi viacrovnicového modelu, s jeho konštrukciou a možnosťami odhadu neznámych parametrov. Na základe už nadobudnutých poznatkov by mali navrhnúť a skonštruovať takýto model, pričom využijú aj poznatky z predmetov Ekonomická teória a Makroekonómia. V rámci skupinovej diskusie je ich úlohou skonštruovať model pozostávajúci z viacerých stochastických rovníc a niekoľkých identít tak, aby mohli sledovať ďalší vývoj skupinovo zvolených ukazovateľ aj v budúcich obdobiach.

## 2.2 Rozhodovacia hra – Kam patrí

Hra, v ktorej študenti pracujú v skupinkách po 3. Každá skupinka dostane papieriky, na ktorých sú tvrdenia, pričom na každom papieriku bude vždy len 1 tvrdenie. Zároveň dostanú aj tri kartičky s pojmi: „Autokorelácia“, „Umelé premenné“ a „Verifikácia ekonometrického modelu“. Ich úlohu bude priradiť každé tvrdenie k niektorej z troch kartičiek. Odmenená bude tá pracovná skupina, ktorá prerozdolí tvrdenia správne a v čo najkratšom čase.

Príklady papierikov s tvrdeniami:

1. Medzi osobným disponibilným dôchodkom a úsporami domácností sa preukázal vzťah.
2. Hodnota Durbinovej–Watsonovej štatistiky je blízka hodnote 2.
3. Vzájomnú závislosť reziduálov nespôsobila neriešená sezónnosť, ale skôr nepostačujúca dynamizácia modelu.
4. Ide o premennú, ktorá vyjadruje vplyv údajov z druhého štvrťroku.
5. V testovanom modeli musí byť prítomná úrovňová konštanta.
6. Vypočítaná testovacia štatistika musí byť v absolútnej hodnote väčšia ako kritická hodnota.
7. Parameter pri premennej disponibilný dôchodok je štatisticky významný a parameter pri premennej miera inflácie je štatisticky nevýznamný.
8. Možná je prítomná závislosť medzi náhodnými zložkami vyššieho rádu ako 1.
9. Premenná môže nadobúdať hodnotu 0 alebo 1.
10. Testovacia štatistika má  $\chi^2$  rozdelenie.
11. Testovanie porovnáva vypočítanú hodnotu s kritickou hodnotou F-štatistiky.
12. Takýto typ hypotézy testujeme t-štatistikou.
13. Premenná nadobúda 4 obmeny.
14. Chceme overiť skutočnosť, či osobný disponibilný dôchodok a miera inflácie majú vplyv na úspory domácností.
15. Na sezónne výkyvy časového radu nie je nutné aplikovať metódy za účelom ich odstránenia.
16. Model ako celok nie je štatisticky významný.
17. Model musíme transformovať, t. j. rozšíriť o dynamiku v premenných a koeficient autokorelácie.
18. Koeficient determinácie nadobúda hodnotu 0,75.
19. Parametre modelu už nie sú najlepšie lineárne neskreslené odhady.
20. Premenná sezónneho charakteru môže zlepšiť vypovedaciu schopnosť modelu.
21. Je potrebné overiť závislosť reziduálov vyššieho rádu.

### 2.3 Simulačná hra - Analytik v komerčnej banke

Táto simulačná hra je hrou na analytikov v komerčnej banke, ktorých úlohou bude zrealizovať prognózu vývoja hypotekárneho trhu s ohľadom na vývoj úrokových sadzieb. Završením hry bude vystúpenie vybraného člena analytického tímu vystúpiť v diskusnej relácii nazvanej „Ekonomické a prognostické okienko“.

Úlohou analytického oddelenia je zostaviť vhodný model, na základe ktorého budú môcť zostaviť prognostickú aplikáciu hypotekárneho trhu a úrokových sadzieb. Študenti si musia rozdeliť úlohy v rámci oddelenia pre jednotlivé činnosti, ktoré sú pre dosiahnutie cieľa potrebné. Kto zabezpečí zber a spracovanie údajov, kto načrtne ekonometrický model, voľbu vhodných determinantov, kto odhadne model, atď. Po pridelení jednotlivých rolí je dôležité, aby si študenti vedeli rozvrhnúť postupnosť krokov a časovú následnosť jednotlivých činností, ktoré po sebe nasledujú.

#### Záver

Všetky uvedené cvičenia sú typovo rozmanité a majú charakter primárny, automatizačný, opakovací a kontrolný. Ich výber a kvalita je prispôsobená povahe vysvetľovanej využívame aktívne a receptívne precvičovanie. Hra na analytika vystupujúceho v relácii „Ekonomické prognostické okienko“ odkazuje na multidisciplinárny rozmer štúdia, podnecovanie kreativity a zmyslu pre detail.

Využitie aktivizujúcich vyučovacích metód môže mať súčasne niekoľko výhod. Zovšeobecnene platí, že podporujú rozvoj tvorivosti, študent má možnosť lepšie pochopiť učivo prostredníctvom aplikovaných poznatkov a skúseností a zároveň študent aplikuje viacero myšlienkových pochodov (hodnotenie, analýza, syntéza, tvorivé myslenie).

Aktivizujúce metódy majú určite pre výuku nesporný význam a ich implementovanie do výuky je veľakrát nevyhnutné. No na druhej strane sa môžeme stretnúť aj s problémami, pri ich zavádzaní do praxe. Jedným z problémov môže byť časová náročnosť prípravy na výuku, zvýšené nároky na pedagogické skúsenosti a vedomosti a v neposlednom rade by sme mohli uviesť ešte pomalší postup vo výuke.

Proces vzdelávania sa, by mal byť prostredníctvom uvedených metód efektívnejší, nakoľko takéto metódy dokážu študentov aktivizovať k samostatnej práci a rovnako do bádania a hľadania vhodných riešení analyzovaného problému.

#### Použitá literatúra

1. DARGOVÁ, J. 2001. *Tvorivé kompetencie učiteľa*. Prešov: Privat Press, 2001. 204 s. ISBN 80-968608-1-X.
2. GARDNER, R., C. *Social Psychology and Second Language Learning. The Role of Attitudes and Motivation*. London: Edward Arnold Publishers, Ltd. 1985, s. 216, ISBN 0-7131-6425-5.
3. GUJARATI, D. N. 2003. *Basic Econometrics*, 4. vyd. New York: McGraw-Hill, 2003. 1002 s. ISBN 0-07-233542-4.
4. HLAVSA, J. – JURČOVÁ, M. 1978. *Psychologické metódy zisťovania tvorivosti*. Bratislava: Psychodiagnostické a didaktické testy, 1978. 264 s.
5. HUSÁR, J. – LUKÁČIK, M. 2004. *Aplikovaná ekonometria*. Bratislava: Vyd. EKONÓM, 2004. 261 s. ISBN 80-225-1869-7.
6. HORŇÁKOVÁ, A. 2009. Zvyšovanie motivácie na učenie sa odborného jazyka. In *Odborný jazyk na vysokých školách V* [elektronický zdroj]: sborník prací z mezinárodní konference. Praha: Česká zemědělská univerzita v Praze; 2009, p. 85-87. ISBN 978-80-213-1901-1. 5.

7. HORŇÁKOVÁ, A. 2014. Aktivizujúce a motivujúce metódy vo vyučovaní odborného jazyka. In *GRANT journal* [online]. 2014, vol. 3, no. 1, p.15-17. [cit. 17.5.2017]. Dostupné na internete: <[http://www.grantjournal.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs](http://www.grantjournal.com/index.php?option=com_content&view=article&id=75&Itemid=68&lang=cs)>. ISSN 1805-0638.
8. KOTRBA, T. – LACINA, L. 2007. *Praktické využití aktivizačních metod ve výuce*. Brno: Barrister a Principal, 2007. 186 s. ISBN 978-80-87029-12-1.
9. MAŇÁK, J. – ŠVEC, V. 2003. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003, 219 s., ISBN 80-73-150375.
10. PETTY, G. 2008. *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 380 s. ISBN 978-80-7367-427-4.
11. VENDEL, Š. 2007. *Pedagogická psychológia*. Bratislava: Epos, 2007, 447 s. ISBN 978-80-8057-710-0.
12. TKÁČOVÁ, A. 2014. *Didaktické hry vo vyučovacom procese*. SOŠ Lipany. 2014. [online]. p. 38 [cit. 17.5.2017]. Dostupné na internete: <<http://www.soslipany.sk/Projekty/Prilohy/Technológia/Didaktické%20hry%20vo%20vyučovacom%20processe.pdf>>.
13. UHEROVÁ, Z. 2014. *Zvyšovanie motivácie vo vyučovaní prostredníctvom využitia interaktívnej tabule*. Prešov: Prešovská univerzita v Prešove, 2014. [online]. p. 86 [cit. 16.5.2017]. Dostupné na internete <<file:///C:/Users/ssov/Downloads/Uherova.pdf>>. ISBN 978-80-555-1071-2.
14. UHEROVÁ, Z. – HORŇÁKOVÁ, H. *Možnosti zvyšovanie motivácie vo vyučovacom procese*. 2014. [online]. p. 2 [cit. 16.5.2017]. Dostupné na internete <[http://www.unipo.sk/public/media/files/docs/fz\\_veda/svk/dokument\\_51\\_14.pdf](http://www.unipo.sk/public/media/files/docs/fz_veda/svk/dokument_51_14.pdf)>.

#### **Kontaktné údaje**

Ing. Kvetoslava Surmanová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: [kvetoslava.surmanova@euba.sk](mailto:kvetoslava.surmanova@euba.sk)

Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: [marian.reiff@euba.sk](mailto:marian.reiff@euba.sk)



# ELASTICITA SUBSTITÚCIE VSTUPOV Z KRÁTKODOBÉHO HĽADISKA

## ELASTICITY OF INPUT SUBSTITUTION FROM THE SHORT-RUN VIEW

*Karol Szomolányi*

### Abstrakt

V práci využívame kointegračnú analýzu, v ktorej vyjadríme krátkodobý a dlhodobý dopyt po vstupoch produkcie zapísané jednou špecifikáciou vhodnou pre odhad krátkodobej elasticity substitúcie. Využívame Jorgensonove odvetvové americké údaje. Výsledný odhad krátkodobej elasticity substitúcie vstupov sa líši v rôznych sektoroch. Hodnoty odhadov sa pohybujú v rozpätí 0,05 až 0,64. Malé a v rôznych odvetviach odlišné hodnoty elasticity substitúcie sú podporené empirickým aj teoretickým výskumom vo svete.

**Kľúčové slová:** *elasticita substitúcie vstupov, dlhodobé a krátkodobé hľadisko, neoklasická teória rastu*

### Abstract

We use the co-integration analysis to specify short-run and long-run factor demands written in one estimation form to estimate the short-run elasticity of substitution. We use Jorgenson's sector data of the United States of America. In the results U.S. short-run elasticity of substitution is relatively small and it differs in different sectors. These values are between 0.05 and 0.64. In the conclusions we argue that the small and in different sectors different values of the coefficient is supported by the both empirical and theoretical research.

**Keywords:** *elasticity of factor substitution, long-run and short-run, co-integration analysis, neoclassical growth theory*

## 1 ÚVOD

Chirinko (2008) a Klump, McAdam a Willman (2012) ponúkli bohatý prehľad prác zaoberajúci sa problémom elasticity substitúcie vstupov. Lukáčik (2013) uviedol historický vývoj teórií produkčných funkcií. V práci sa zameriame na kointegračnú analýzu cien vstupov. Uvažujeme špecifikáciu modelu s korekčným členom (*ECM*) v tvare:

$$\Delta(y_t - x_t) = \alpha_0 + \beta_1 \Delta(p_t^x - p_t^y) + \lambda \left[ (y_{t-1} - x_{t-1}) - \gamma_0 - \gamma_1 (p_{t-1}^x - p_{t-1}^y) \right] + u_t \quad (1)$$

v ktorom uvažujeme vzťah medzi prirodzeným logaritmom podielu produkcie  $y_t$  a vstupu  $x_t$  a podielom cien. Vzťah *ECM* (1) je odvodený z CES produkčnej funkcie, čo predpokladá interpretáciu sklonov  $\beta_1$  a  $\gamma_1$  ako dlhodobá a krátkodobá elasticita substitúcia vstupov. Chirinko a Mallick (2011) však spochybnili túto interpretáciu z dlhodobého hľadiska. Dlhodobý vzťah medzi podielom produkcie a vstupu a ich cenami v hranatej zátvorke (1) je daný teoretickými ekonomickými predpokladmi. Podiel práce na *HDP* by mal byť dlhodobo konštantný a teda kointegračný vzťah v hranatej zátvorke predpokladá jednotkovú hodnotu

parametra  $\gamma_1$ , ak považujeme prácu za vstup  $x_t$ . Ak považujeme kapitál za vstup  $x_t$ , teória nepredpovedá kointegračný vzťah v hranatej zátvorke (1), a keď existuje pravdepodobne opisuje iný dlhodobý proces nevysvetlený modelom.

Ak prácu považujeme za vstup, teória predpokladá úpravu vzťahu (1), podľa ktorej  $\gamma_1 = 1$ :

$$\Delta(y_t - x_t) = \beta_0 + \beta_1 \Delta(p_t^x - p_t^y) + \lambda \left[ (y_{t-1} - x_{t-1}) - (p_{t-1}^x - p_{t-1}^y) \right] + u_t \quad (2)$$

Parameter  $\beta_1$  možno interpretovať ako krátkodobú elasticitu substitúcie vstupov. Pre jeho odhad využívame model s korekčným členom, ktorého kointegračný vzťah predpisuje teória.

## 2 ÚDAJE A METODOLÓGIA

Pre odhad parametrov *ECM* (2) využijeme ročné údaje podielu *HDP* a práce  $y_t - l_t$ , resp. podielu *HDP* a kapitálu  $y_t - k_t$  a podielov ich cien, ktoré sú zverejnené v Jorgensonových (2008) tabuľkách z 35 amerických odvetví. Stacionaritu údajov sme testovali Dickeyho-Fullerovým a Phillipsovým-Perronovým testami (pozri Lukáčik a Lukáčiková, 2008). Konštatujeme, že podiely vstupov a produkcie sú nestacionárne, preto potrebujeme využiť ich prvé diferencie v ekonometrickej špecifikácii. Obe špecifikácie (1) a (2) využívajú prvé diferencie.

Z teoretických poznámok Chirinka a Mallicka (2011) možno predpovedať, že podiel práce na *HDP* ( $p_t^l + l_t - p_t^y - y_t$ ) je stacionárny, pričom v testovacej rovnici neuvažujeme žiadnu exogénnu premennú. V skutočnosti využitím Dickeyho-Fullerového a Phillipsového-Perronového testu stacionarity konštatujeme, že uvedené časové rady sú stacionárne vo väčšine odvetví. Ak uvažujeme prácu za vstup, ekonometrická špecifikácia (2) vyhovuje predpokladom pre odhad krátkodobej elasticity substitúcie  $\beta_1$ .

Teória predpovedá nestacionaritu podielov kapitálu na *HDP* ( $p_t^k + k_t - p_t^y - y_t$ ), avšak na základe Dickeyho-Fullerového a Phillipsového-Perronového testu aj tieto podiely sú stacionárne vo väčšine odvetví, ak testovacie rovnice nevyužívajú exogénne premenné ako konštantu alebo trend. Ich využitie naopak indikuje jednotkový koreň. Tento výsledok je zlučiteľný s teóriou, ak predpokladáme, že podiely *HDP* a kapitálu a ich cien sú ovplyvnené inými kointegračnými procesmi. Preto nemožno považovať ekonometrickú špecifikáciu (1) za vhodnú pre odhad dlhodobej elasticity substitúcie. Ale pre neskreslený krátkodobý odhad elasticity substitúcie  $\beta_1$  potrebujeme zahrnúť do špecifikácie aj premenné vedľajšieho kointegračného procesu. Vhodný kandidát je podiel kapitálu na *HDP*, ak uvažujeme, že je stacionárny. Taká špecifikácia je (2).

Na základe tejto úvahy sme sa rozhodli odhadnúť systém rovníc v tvare:

$$\begin{aligned} \Delta(y_{it} - l_t) &= \beta_{l0i} + \beta_{li} \Delta(p_{it}^l - p_{it}^y) + \lambda_{li} \left[ (y_{i,t-1} - l_{i,t-1}) - (p_{i,t-1}^l - p_{i,t-1}^y) \right] + u_{it} \\ \Delta(y_{it} - k_t) &= \beta_{k0i} + \beta_{ki} \Delta(p_{it}^k - p_{it}^y) + \lambda_{ki} \left[ (y_{i,t-1} - l_{i,t-1}) - (p_{i,t-1}^l - p_{i,t-1}^y) \right] + u_{it} \end{aligned} \quad \forall i = 1, 2, \dots, 35 \quad (3)$$

kde krátkodobá elasticita substitúcie v odvetví  $i$  je označená symbolom  $\beta_{1i}$ . Keďže náhodne zložky jednotlivých rovníc sú teoreticky korelované, využili sme metódu zdanlivo nesúvisiacich regresí (*SUR*). Množina inštrumentov pozostáva z úrovňovej konštanty, podielov *HDP* a vstupov a ich cien vo všetkých 35 odvetviach.

### 3 VÝSLEDKY

Odhady parametrov systému (3) sú v tab. 1. – odhad elasticity substitúcie vstupov  $\beta_1$ , prislúchajúca štandardná odchýlka  $s_{\beta_1}$ , odhad kointegračných parametrov  $\lambda_l$  a  $\lambda_k$  a prislúchajúcech  $t$ -štatistiky  $t_{\lambda_l}$  a  $t_{\lambda_k}$ . Väčšina parametrov je štatisticky významná na 5 % hladine štatistickej významnosti. Pre testy významnosti kointegračných parametrov  $\lambda_{li}$  a  $\lambda_{ki}$ , sme využili tabuľky Dolada a Mestrehu (1998) (pozri Lukáčiková, 2013). Hodnoty prislúchajúcich  $t$ -štatistik, ktoré sú podfarbené indikujú štatistickú nevýznamnosť na 10 % hladine významnosti. Nemôžeme brať do úvahy odhady so štatisticky nevýznamným kointegračným vzťahom pre prácu, pretože odporujú teórii (podfarbené riadky). Z konzistentných odhadov konštatujeme, že hodnota elasticity substitúcie sa líši naprieč odvetviami v rozpätí od 0,05 do 0,64. Na základe testov stacionarity konštatujeme, že reziduály sú stacionárne.

### 4 ZÁVER

Odlíšne hodnoty elasticity substitúcie vstupov podporuje teória Jonesa (2003 a 2005) a Jürgena (2009 a 2010). Jonesove teoretické práce predpokladajú nižšie hodnoty elasticity substitúcie v procese výroby „lokálneho“ (Jones, 2005) (resp. krátkodobého; Jones, 2003) charakteru ako v procese výroby „globálneho“ (alebo aj dlhodobého) charakteru. Jürgen predpokladá proces výroby s Cobbovou Douglasovou produkčnou funkciou s jednotkovou elasticitou substitúcie v ustálenom stave (Jürgen, 2009), resp. za predpokladu dokonalej konkurencie a všeobecnej rovnováhy (Jürgen, 2010). Relatívne nízke hodnoty elasticity substitúcie vstupov v porovnaní s aktuálnymi odhadmi Chirinka a Mallicka (2014) resp. Klumpa, McAdama a Willmana (2007) môže vyplývať práve z rozdielu z krátkodobého a dlhodobého hľadiska.

**Tabuľka 1:** Odhad krátkodobej elasticity substitúcie vstupov v 35 amerických odvetviach.

<b>Industry</b>	$\beta_1$	$s_{\beta 1}$	$\lambda_l$	$t_{\lambda l}$	$\lambda_k$	$t_{\lambda k}$
Agriculture	0,149	0,007	-0,067	-8,195	-0,060	-12,483
Metal mining	0,372	0,014	-0,085	-6,509	-0,164	-9,509
Coal mining	0,205	0,009	0,046	5,863	0,006	0,952
Oil and gas extraction	0,570	0,008	-0,176	-12,210	-0,022	-2,394
Non-metallic mining	0,608	0,007	-0,024	-1,454	-0,097	-10,773
Construction	0,449	0,010	-0,050	-3,974	-0,026	-3,546
Food and kindred products	0,048	0,005	-0,147	-6,074	-0,009	-5,805
Tobacco	0,240	0,006	-0,030	-4,148	-0,056	-11,668
Textile mill products	0,227	0,011	-0,107	-4,483	-0,024	-3,390
Apparel	0,183	0,008	-0,110	-9,141	-0,023	-3,649
Lumber and wood	0,405	0,008	-0,204	-16,813	-0,120	-16,149
Furniture and fixtures	0,217	0,010	-0,133	-5,548	-0,157	-19,412
Paper and allied	0,256	0,007	-0,273	-25,274	-0,039	-6,151
Printing, publishing and allied	0,200	0,008	-0,282	-10,570	-0,039	-5,512
Chemicals	0,553	0,008	-0,080	-6,637	-0,010	-2,073
Petroleum and coal products	0,156	0,007	-0,074	-8,838	-0,025	-4,937
Rubber and misc plastics	0,383	0,009	-0,219	-9,115	-0,106	-12,859
Leather	0,174	0,010	-0,044	-4,521	-0,052	-9,609
Stone, clay, glass	0,410	0,008	-0,084	-6,172	-0,084	-13,725
Primary metal	0,416	0,011	-0,278	-13,576	-0,168	-15,381
Fabricated metal	0,276	0,008	-0,072	-9,122	-0,068	-13,919
Machinery, non-electrical	0,477	0,011	-0,060	-3,206	-0,028	-3,005
Electrical machinery	0,269	0,009	0,074	9,217	-0,119	-21,365
Motor vehicles	0,445	0,009	-0,500	-20,917	-0,136	-16,539
Transportation equipment & ordnance	0,635	0,012	-0,719	-18,525	-0,325	-24,009
Instruments	0,605	0,011	-0,075	-6,469	-0,156	-17,152
Misc, manufacturing	0,218	0,008	0,033	3,925	-0,070	-14,009
Transportation	0,305	0,010	-0,033	-3,551	-0,070	-9,523
Communications	0,575	0,012	-0,041	-9,724	-0,039	-6,419
Electric utilities	0,430	0,011	-0,342	-18,226	-0,046	-7,995
Gas utilities	0,272	0,010	-0,014	-1,757	-0,116	-24,160
Trade	0,394	0,007	-0,048	-7,007	-0,056	-10,877
Finance Insurance and Real Estate	0,517	0,011	-0,112	-6,641	-0,130	-14,928
Services	0,298	0,008	0,001	0,098	-0,118	-22,443
Government enterprises	0,272	0,002	-0,215	-14,887	-0,031	-15,505

Zdroj: vlastné spracovanie

## Použitá literatúra

1. CHIRINKO, R.S. 2008. The Long and Short of It. In: *Journal of Macroeconomics*, roč. 30, č. 2, s. 671–686.
2. CHIRINKO, R. S. a MALLICK, D. 2011. Cointegration, Factor Shares, and Production Function Parameters. In: *Economics Letters*, 112(2), 205-206.
3. CHIRINKO, R. S. a MALLICK, D. 2014. The Substitution Elasticity, Factor Shares, Long-Run Growth, and the Low-Frequency Panel Model. In: CESifo Working Paper Series 4895, CESifo Group Munich, July 2014 (this version December 2015).
4. JONES, C.I. 2003. Growth, Capital Shares, and a New Perspective on Production Functions. In: Mimeo, University of California Berkeley.
5. JONES, C.I. 2005. The Shape of Production Functions and the Direction of Technical Change. In: *Quarterly Journal of Economics*, roč. 120, č. 2, s. 517-549.
6. JORGENSEN, D. W. 2008. *35 Sector KLEM*. Harvard Dataverse.
7. JÜRGEN, A. 2009. A Dual Elasticity of Substitution Production Function with an Application to Cross Country Inequality. In: *Economics Letters*, Vol. 102, No.1, pp.10-12.
8. JÜRGEN, A. 2010. On the Dynamic Implications of the Cobb-Douglas Production Function. In: *The Selected Works of Jürgen Antony*.
9. KLUMP, R. – MCADAM, P. – WILLMAN, A. 2007. Factor Substitution and Factor Augmenting Technical Progress in the US. In: *Review of Economics and Statistics*, roč. 89 č. 1, s. 183-92.
10. KLUMP, R. – MCADAM, P. – WILLMAN, A. 2012. The Normalized CES Production Function: Theory and Empirics. In: *Journal of Economic Surveys*, roč. 26, s. 769-799.
11. LUKÁČIK, M. 2013. Parametre produkčnej funkcie ekonomiky. In: *Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu : mezinárodní vědecký seminář: zborník príspevkov: Praha, 10.-12. december / prosinec - Bratislava: EKONÓM*.
12. LUKÁČIK, M. a LUKÁČIKOVÁ, A. 2008. Význam testovania stacionarity v ekonometrii. *Ekonomika a informatika*. 6(1). 146-157.
13. LUKÁČIKOVÁ, A. 2013: Englova-Grangerova procedúra a dynamická metóda najmenších štvorcov. In: *Zborník 15. medzinárodnej vedeckej konferencie AIESA – budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach*, Bratislava: Ekonóm.

## Kontaktné údaje

Doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.  
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky  
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava  
Tel: (421 2) 67 295 824  
email: [karol.szomolanyi@euba.sk](mailto:karol.szomolanyi@euba.sk)