

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ PRE OPERAČNÝ VÝSKUM
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY
EKONOMICKEJ UNIVERZITY V BRATISLAVE

SSOR



SLOVAK SOCIETY FOR
OPERATIONS RESEARCH

**ZBORNÍK ZO SEMINÁRA
VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD
VO VEDECKOVÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XIII**

18. – 20. júna 2019
Zuberec

Programový výbor:

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava (predseda)
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, Vysoká škola ekonomická Praha
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická Praha
prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc., Žilinská univerzita Žilina
Ing. Martina Kuncová, PhD., Vysoká škola polytechnická Jihlava
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc., Žilinská univerzita Žilina

Recenzenti:

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Andrea Furková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Marián Goga, CSc., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Marian Reiff, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava

Organizačný výbor:

doc. Ing. Andrea Furková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava
Ing. Tomáš Majer, PhD., Žilinská univerzita v Žiline
doc. Ing. Marian Reiff, PhD., Ekonomická univerzita Bratislava

Zborník neprešiel jazykovou úpravou.

AH 11,90

Náklad: 50 ks

Kontakt: ssov@euba.sk

Zostavovateľ: Marian Reiff

Web Editor: Martin Lukáčik

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre
operačný výskum, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava
© Ekonomická univerzita v Bratislave, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2019
ISBN 978-80-225-4617-1

Obsah

Michaela Chocholatá	<u>Co-movements of the selected currencies</u>	5
Michal Fendek	<u>Porovnanie efektívnosti analytických schém cenovej regulácie monopolu</u>	11
Petr Fiala	<u>Rozvrhování výroby na vstřikovacím lisu</u>	18
Dana Figurová, Zuzana Čičková	<u>Viackriteriálne rozhodovanie v oblasti teórie hier</u>	24
Andrea Furková	<u>Spatial panel data models and estimation possibilities in R</u>	29
Pavel Gežík	<u>Predikcia tvorby radu a optimalizácia počtu otvorených pokladní</u>	35
Marián Goga	<u>Niektoré problémy riešenia kooperatívnej hry s nekonštantným súčtom platieb</u>	40
Dobroslav Grygar	<u>Exaktný prístup na návrh minimálnej siete pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov</u>	52
Jaroslav Janáček	<u>Rychlé prohledávání okolí řešení p-lokační úlohy pro zobecněnou disutilitu</u>	59
Ľudmila Jánošíková	<u>Optimalizácia parametrov skupinového genetického algoritmu pomocou Taguchiho metódy</u>	65
Maroš Janovec	<u>Exaktný prístup k turnusovaniu elektrických autobusov</u>	74
Michal Koháni	<u>Optimalizačné úlohy súvisiace s plánovaním flotily elektrobusev vo verejnej doprave</u>	83
Stanislav Kováč	<u>Úvod do analýzy priestorovej autokorelácie s programovacím jazykom R</u>	90
Martina Kuncová, Jana Sekničková.	<u>Volba dodavatele elektriny v roce 2018 v ČR – optimalizační model</u>	98
Marek Kvet	<u>Vybrané pokročilé metódy optimalizácie férových záchranných systémov</u>	107
Martin Lukáčik	<u>Odhad vektorovo autoregresných modelov v R</u>	118
Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková Karol Szomolányi	<u>Bayesovský odhad vektorovo autoregresných modelov v R</u>	127
Petra Marková Jan Pelikán	<u>Optimalizace distribuce pohonných hmot</u>	137

Sanislav Palúch	<u>Exaktný model pre optimalizáciu obehu vozidiel s viacerými depami</u>	142
Juraj Pekár	<u>Historický prehľad mier výkonnosti portfólia</u>	148
Štefan Peško	<u>Problém rovnomerného odpočtu elektromerov v susedných regiónoch</u>	151
Marian Reiff	<u>Možnosti modelovania ekonomických procesov pomocou skrytých Markovových modelov</u>	157
Allan Jose Sequeira Lopez	<u>Priestorová hra ako hra dvoch hráčov s nulovým súčtom a participáciou regulátora so zásahom v určitom uzle v grafe</u>	164
Milan Svoboda	<u>Aplikace Markovových řetězců - praktický příklad: plánování lidských zdrojů</u>	169
Karol Szomolányi	<u>Minimálna mzda</u>	174
Patrik Vasilovský	<u>Návrh nabíjacej infraštruktúry pre elektrobuses v mestskej hromadnej doprave</u>	180

CO-MOVEMENTS OF THE SELECTED CURRENCIES¹

SPOLOČNÝ POHYB VYBRANÝCH MIEN

Michaela Chocholatá

Abstract

This paper deals with the assessment of the development of the Czech koruna (CZK) and the Japanese yen (JPY) based on the movements of the global currencies – EUR and USD for the daily data over the period 2015-2018. The sensitivity of currency movements (i.e. of the CZK and of the JPY, respectively) was measured based on the values of parameters beta-EUR and the beta-USD indicating the sensitivity of the analysed currency to the movement of the EUR and USD, respectively. The confirmation of the dominant impact of the EUR movement to the CZK movement during the whole analysed period, as well as during individual years, was supported by the results from analysing the elasticity of the CZK exchange rate to the movements of the EUR and the USD exchange rates vis-à-vis JPY. As for the JPY, based on the values of beta-EUR and beta-USD, the clear dominant impact of neither the EUR nor the USD was confirmed during the analysed period.

Keywords: *currency, co-movements, exchange rate*

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá posúdením vývoja českej koruny (CZK) a japonského yenu (JPY) v závislosti od pohybu globálnych mien – EUR a USD pre denné dáta v období 2015-2018. Senzitivita pohybu meny (t.j. CZK, resp. JPY) bola meraná na báze hodnôt parametrov beta-EUR a beta-USD, ktoré sú indikátormi citlivosti pohybu analyzovanej meny na pohyb EUR, resp. USD. Potvrdenie dominantného vplyvu pohybu EUR na pohyb CZK počas celého analyzovaného obdobia, ako aj počas jednotlivých rokov tohto obdobia, bolo podporené výsledkami analýzy elasticity výmenného kurzu CZK na pohyby výmenných kurzov EUR, resp. USD voči JPY. Pokiaľ ide o JPY, vychádzajúc z hodnôt beta-EUR a beta-USD, v analyzovanom období nebol potvrdený jasný dominantný vplyv ani jednej z dvojice globálnych mien – EUR a USD.

Kľúčové slová: *mena, spoločný pohyb, výmenný kurz*

1 INTRODUCTION

Analysing of the exchange rates developments, revealing their co-movements or predicting their future development has become an attractive issue especially since the collapse of the Bretton Woods system. As pointed out e.g., by Eun a Lai (2004), European central bank – ECB (2006), Fatum (2008), Eun (2009), Doman (2010) and Chocholatá (2011) it can be concluded that the development of the currency exchange rates over the past decades is, among other factors, significantly influenced by the global currencies – the US Dollar (USD) and the Euro (EUR). In this respect, it is worth noting that while there was no currency in the pre-euro period that could be an equivalent alternative to the US dollar, it is no longer the case. Eun (2009)

¹ This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA grant No. 1/0248/17 "Analysis of Regional Disparities in the EU based on Spatial Econometric Approaches".

points out that the euro area is comparable to the US in terms of population, GDP size or share of world trade.

It is important to keep in mind that examining the similarity of the exchange rate development of a selected currency pair inevitably requires the specification of a third currency against which the exchange rate is calculated. The determination of this third currency plays a key role. Eun and Lai (2004) investigated the "relative" impact of the global currencies (EUR and USD) on the other currencies using a statistical tool called "currency beta", which represents the sensitivity of the exchange rate movement of the analysed currency caused by any of the global currencies. The same tool was used by Doman (2010) to analyse the average annual impact of USD and EUR on 20 selected currencies over the period April 11, 1997–April 11, 2008. She came to the conclusion that e.g., the Czech koruna (CZK), the Swiss franc (CHF), the Norwegian krone (NOK) and the British pound (GBP) show a very similar development to the USD, due to the strong impact of the EUR on the dynamics of these currencies, but the development of these currencies against the USD is quite different. It means that no other currency determines the development of these currencies against the EUR. For the Korean Won (KRW) and the Indian Rupee (INR) she received opposite results. These currencies showed similar dynamics of development against the EUR and significantly different developments in relation to their dominant currency – USD. Chocholatá (2011) provided similar analysis (including also the modelling of the autoregressive conditional heteroscedasticity) for the daily data over the period 1999-2010 giving the results for the separate periods of one year. The results for the whole period confirmed the dominant impact of the EUR on the V4 countries' currencies (except for Polish zloty – PLN) and dominant impact of the USD on the Chinese yuan (CNY). In case of GBP it was identified the switch of the dominating currency during the analysed period from the USD (1999, 2000) to the EUR (2001-2010). For JPY the clear existence of the dominating currency was not confirmed. The residuals were in case of confirmation of the autoregressive conditional heteroscedasticity modelled by GARCH(1,1) models in almost all cases without sharp influence on dominating currency determination.

Analysts of the European central bank (ECB, 2006) dealt with the co-movements of main currencies in order to specify their sensitivity to EUR and USD movements². The analysis was published for monthly data January 1999 – March 2006 as well as for two sub-sample periods January 1999 – August 2002 and September 2002 – March 2006. The results showed that while most of the European currencies was relatively strong linked to the EUR, the Asian currencies (CNY, KRW, Hong Kong dollar – HKD and Singapore dollar – SGD) as well as the Canadian dollar (CAD) had the tendency to move much more closely with the USD. The GBP tended to move midway between the EUR and the USD. For the majority of currencies, the intensity of the co-movement remained almost unchanged during the both sub-sample periods. The only exception was Lithuania and its Lithuanian litas reflecting the switch of the currency board from the USD to the EUR in 2002.

The aim of the paper is to assess the development of the CZK and JPY vis-à-vis the global currencies – EUR and USD, the calculation of the corresponding beta-EUR and beta-USD as well as to compute the elasticity of the CZK to movements of the EUR and the USD vis-à-vis JPY. The analyses are based on daily data over the period 2015-2018. The structure of the paper is as follows. The second section is devoted to the theoretical aspects of assessing the impact of EUR and USD on selected currencies, the third section deals with the data and empirical results and the fourth section concludes.

² As a third, i.e., numeraire currency, was used the Japanese yen – JPY.

2 ASSESSING THE IMPACT OF EUR AND USD ON SELECTED CURRENCIES

One way to measure the impact of EUR and USD on selected currencies is to calculate the "beta" of the selected currency vis-à-vis EUR and USD³. Let's assume a strong EUR impact on a particular currency. Then appreciation (depreciation) of the EUR vis-à-vis the USD will result in an increase (decrease) in value of this currency vis-à-vis the USD. The analysed currency is also exposed to a large influence of the EUR, i.e. it has a high beta-EUR value. Similarly, when the currency tends to follow USD movements, i.e. it has a high beta-USD value, it means that the USD has a significant impact on its development.

Let P_t be the exchange rate at time t , then the continuously compounded return (log return) has the following form (Tsay, 2005):

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \quad (1)$$

Values of beta-EUR (β_{EUR}) and beta-USD (β_{USD}) for each currency can be obtained based on ordinary least squares (OLS) estimation of following equations (see e.g. Doman, 2010):

$$r(X/USD)_t = \alpha_1 + \beta_{EUR} r(EUR/USD)_t + \varepsilon_{1t} \quad (2)$$

$$r(X/EUR)_t = \alpha_2 + \beta_{USD} r(USD/EUR)_t + \varepsilon_{2t} \quad (3)$$

where the symbol $r(X/Y)_t$ denotes the log return (1) of the exchange rate of the currency "X" vis-à-vis currency "Y", i.e. the exchange rate is defined as the number of units of currency "X" per 1 unit of the currency "Y". Symbols α_1, α_2 represent the unknown parameters (intercepts) and $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ are random components.

It is clear that the value of beta-EUR (β_{EUR}) is a measure of the sensitivity how the analysed currency reacts to the EUR movement in the currency market and the value of beta-USD (β_{USD}) reflects analogously the currency sensitivity to the movement of the USD. The beta-currency values approaching to 1 indicate that the analysed currency almost fully follows the behaviour of EUR and USD, respectively. Values greater than 1 reflect the excessive response of the analysed currency to the EUR and the USD movements, respectively (Doman, 2010). In order to assess the relevance of the beta currency values, the R^2 (coefficient of determination) values should be taken into account.

Another way how to assess the degree of co-movement of the currency "X" with the EUR and USD, respectively is to calculate the elasticity to movements in the EUR and the USD using a third currency "A" as the numeraire (see e.g. ECB, 2006):

$$r(A/X)_t = \alpha + \beta r(A/EUR)_t + \gamma r(A/USD)_t + \varepsilon_t \quad (4)$$

³ For a detailed explanation of "beta" values see e.g., Eun (2009) and Doman (2010).

where $r(A/X)_t$ denotes log return of the exchange rate of currency "X" for which the co-movement with the EUR and the USD is to be computed. In equation (4) the parameter β denotes the sensitivity of the currency "X" to the movements of the EUR exchange rate and the parameter γ informs about the sensitivity to USD movements. The parameter values β and γ close to 1 indicate strong co-movement of the currency "X" with the EUR and the USD, respectively. Furthermore, it is worth to mention that the values of the R^2 play an important role in interpretation of results.

3 DATA AND EMPIRICAL RESULTS

The analysis was based on the daily data of the following exchange rates: CZK/USD, CZK/EUR, JPY/EUR, JPY/USD, EUR/USD, USD/EUR and JPY/CZK over the period January 5, 2015 – December 31, 2018, the data set contains 1034 observations. Data were retrieved from the web-site: www.stooq.com. The whole analysis was mainly inspired by Doman (2010) and by ECB (2006). The econometric software EViews was used for analysis.

In the first step of analysis it was tested the co-movement of the CZK with the EUR and the USD, respectively as well as the co-movement of the JPY with each of the global currencies (EUR and USD). The analysis was based on the log returns of exchange rates CZK/USD, CZK/EUR, JPY/USD, JPY/EUR, EUR/USD and USD/EUR following the equations (2) and (3). The values of beta-EUR (β_{EUR}) and beta-USD (β_{USD}) together with the coefficient of determination from the regression equation with dominant currency are summarized in Figure 1. Based on estimation results presented in Figure 1 it can be concluded that while the currency CZK was clearly determined by the EUR over the whole analysed period, in case of the JPY the dominant impact of the USD was confirmed with considerably lower intensity.

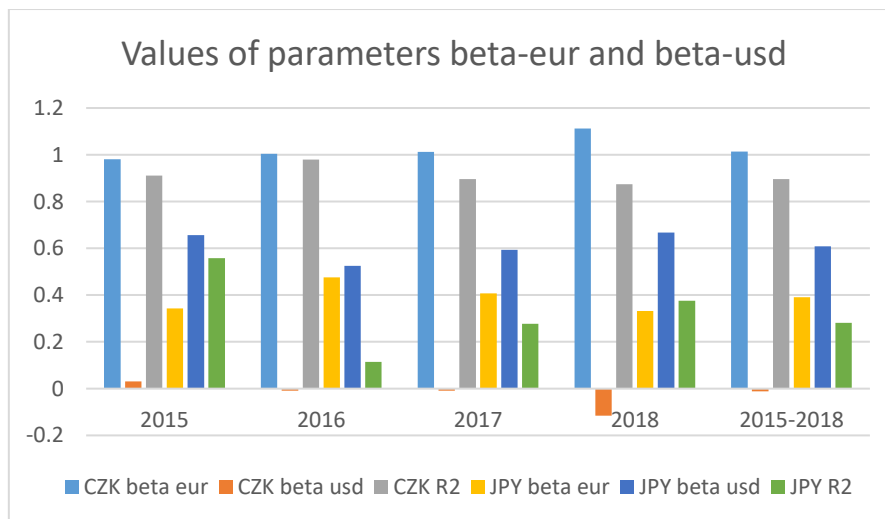


Figure 1 Estimated values of beta-EUR and beta-USD parameters

The results are supported by the Figure 2 confirming the dominant impact of the EUR on the CZK. There is a clear evidence that while the exchange rate CZK/USD largely "copies" the EUR/USD exchange rate, the exchange rate CZK/EUR moves in a different manner than USD/EUR. As for the JPY currency – on the one hand, the results in Figures 1 and 2 show that JPY could play a role of the third global currency (especially in 2016), on the other hand, during the 2018 the JPY/EUR exchange rate behaves similar as USD/EUR which indicates the

dominant impact of the USD (this is in line with the higher beta-USD value during this period). Both the results are in line with the results of Doman (2010) and Chochołatá (2011).

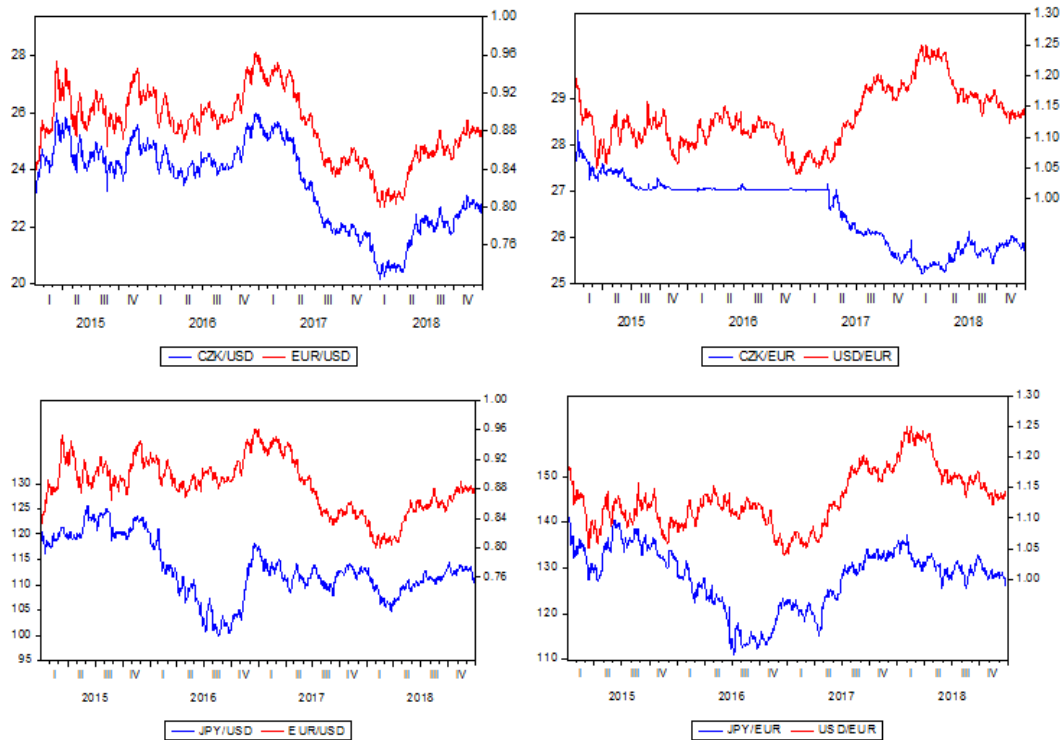


Figure 2 Development of the daily values of exchange rates

The next part of analysis was devoted to computation of the elasticity of the CZK to movements of EUR a USD vis-à-vis JPY based on equation (4). The estimated values of the parameter β were close to 1 during the individual years as well as during the whole analysed period and statistically significant at significance level 0.01, which indicates strong co-movement of the CZK with the EUR. On the other hand, the values of γ parameter were close to zero which indicates no relevant co-movement of the CZK with the USD. The estimated values of the parameter β together with the values of the R^2 are depicted in Figure 3.

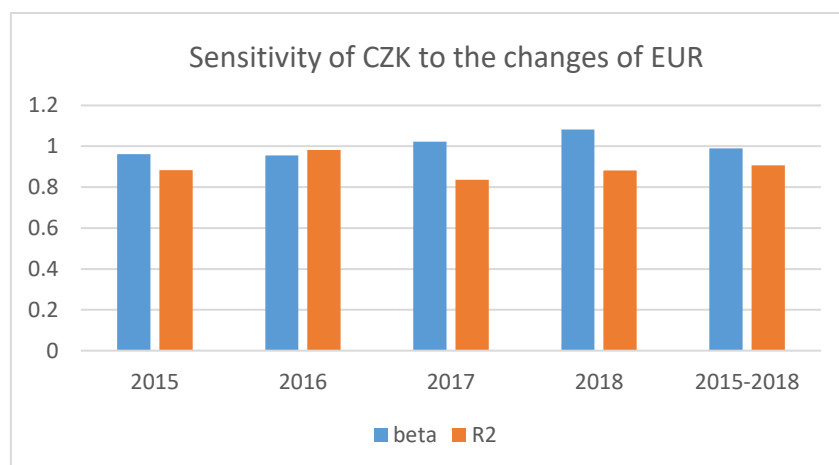


Figure 3 Sensitivity of the CZK to the movements in the EUR exchange rate

4 CONCLUSION

Based on the results presented above, it was confirmed that while the CZK co-moves strongly with the EUR, in case of the JPY no clear impact of either the EUR or USD currencies was confirmed in the period under consideration. However, higher beta-USD value in the last year does not support the possibility that JPY could become the third global currency in addition to the EUR and the USD. Using the JPY as a numeraire currency, it was confirmed that the CZK is very sensitive to the movements in the EUR currency.

References

1. CHOCHOLATÁ, M. 2011. Analýza vplyvu USD a EUR na výmenné kurzy vybraných mien a vplyv existencie GARCH efektu. *Ekonomika a informatika*, 9(1), pp. 31-44.
2. DOMAN, M. 2010. Does the Weakening of the US Dollar Change the Pattern of the Currency Co-Movement? *Forecasting Financial Markets and Economic Decision Making (FindEcon)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 8, pp. 27-41.
3. EUROPEAN CENTRAL BANK (ECB). 2006. How close are the co-movements of main currencies? *ECB Monthly Bulletin*, April 2006, pp. 54-56.
4. EUN, C.S. – LAI, S.S. 2004. Currency Comovement. Georgia Institute of Technology, Working Paper.
5. EUN, C.S. 2009. International Currency Competition: Dollar vs. Euro. *SERIQuarterly*, April 2009, Available at: www.SERIWorld.org [2011-05-03].
6. FATUM, R. 2008. Daily effects of foreign exchange intervention: Evidence from official Bank of Canada data. *Journal of International Money and Finance*, 27(3), pp. 438-454.
7. TSAY, R.S. 2005. *Analysis of Financial Time Series*. Second Edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 605 p.
8. www.stooq.com [2019-03-03]

Author's address

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.

University of Economics in Bratislava, Faculty of Economic Informatics, Department of Operations Research and Econometrics
Dolnozemska cesta 1/b, 852 35 Bratislava
Slovak Republic

POROVNANIE EFEKTÍVNOSTI ANALYTICKÝCH SCHÉM CENOVEJ REGULÁCIE MONOPOLU¹

COMPARISON OF THE EFFICIENCY OF THE ANALYTICAL SCHEMES FOR THE MONOPOL PRICE REGULATION

Michal Fendek

Abstrakt

V súvislosti s objektivizáciou a zvyšovaním celospoločenskej efektívnosti pôsobenia prirodzených monopolov na trhu sa zvyšuje úloha regulačných mechanizmov, ktorých cieľom je čo najviac priblížiť proporcie medzi cenou a úrovňou ponuky produktu odvetvia situácii, ku ktorej by na trhu došlo za predpokladu existencie konkurenčných trhových vzťahov.

V príspevku sa budeme zaoberať porovnaním efektívnosti dvoch často používaných schém cenovej regulácie monopolu, a to modelom regulácie miery návratnosti investícií a modelom regulácie miery návratnosti nákladov. Regulácia návratnosti nákladov je schéma regulácie prirodzeného monopolu, ktorá sa principiálne odlišuje od modelu regulácie na báze návratnosti investícií. Tá totiž bariéru pre neprekročenie primeraného zisku odvodzuje iba z časti vstupných aktivít monopolu, a to z objemu investícií. To nežiaducim spôsobom motivuje monopol k neprimeranému navšňovaniu kapitálových investícií, čo je samozrejme kontraproduktívne.

Príučové slová: mikroekonomický optimalizačný model, podmienky optimálnosti, regulované ceny, primeraný zisk regulovaného odvetvia

Abstract

In relation with objectification and increases in nationwide operation effectiveness of natural monopolies on the market the role of regulation mechanisms is increasing. Its aim is the closest approximation of proportions between price and level of industry products supply to the situation which would occur in the conditions of market competition.

In the paper we will analyze effectiveness comparison of the two frequently used schemes for monopoly price regulation – rate of return model and return over costs model. Return over costs is a scheme of natural monopoly regulation, which is in principle different form the model of regulation on the basis of rate of return. It derives the barrier for not exceeding the reasonable profit only from the part of the regulated entity input activities, namely from the volume of investment. This undesirably motivates monopoly to disproportionate increase the capital investments, which is, of course, contra productive.

Keywords: *Microeconomic optimization model, optimality conditions, regulated prices, reasonable profit in regulated industries*

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0368/18 “Cenové stratégie v prostredí pôsobenia efektívnych regulačných mechanizmov na nadnárodných trhoch sieťových odvetví slovenskej ekonomiky”.

1 ÚVOD

Moderné trhové štruktúry v ekonomicky rozvinutých krajinách predstavujú vo všeobecnosti trhy nedokonalkej konkurencie. Treba si uvedomiť, že monopol v dôsledku svojho výlučného postavenia na trhu ako jediného dodávateľa výrobku alebo služby na relevantnom trhu, môže stanoviť takú trhovú cenu a ponúkať taký objem produkcie, ktorý mu umožní maximalizovať zisk nad rámec možností konkurenčnej firmy.

Monopol pravdaže koná v rámci legitímnych trhových podmienok a jeho pozícia je determinovaná reálnou situáciou na trhu. Na druhej strane je však prirodzené, aby existovali nástroje umožňujúce tento zisk monopolu prerozdeliť tak, aby jeho časť podporila celospoločenské ciele rozvoja ekonomiky krajiny, na trhu ktorej monopol pôsobí.

Pre reguláciu subjektov vybraných odvetví, ktoré predstavujú z hľadiska ich pozície na trhu monopoly resp. prirodzené monopoly vytvára štát inštitúciu tzv. regulátora, ktorého úlohou je v konečnom dôsledku z poverenia štátu vytvoriť také legislatívne prostredie a regulačné mechanizmy, ktoré zabezpečia trhovú rovnováhu pre sledované komodity pri garantovaní primeraného zisku pre regulovaný subjekt (Fendeková, E., Fendek, M, 2018). Medzi tieto odvetvia patria predovšetkým sieťové odvetvia, ktorých subjekty majú často charakter monopolov a štát má preto záujem ich činnosť regulovať.

V podmienkach Slovenska plní túto funkciu regulátora Úrad pre reguláciu sieťových odvetví, ktorého úlohou je vydávať licencie a regulovať ceny a normy kvality pre produkty sieťových odvetví. Regulačné úrady v súvislosti s plnením svojho základného poslania, ktorým je vecná a cenová regulácia podnikania v regulovaných činnostiach vybraných odvetví stoja pred zabezpečením efektívneho riešenia dvoch úloh:

- vytvorenie fungujúceho a zároveň, a to sa žiada zdôrazniť, konkurenčného trhového prostredia s produktmi sieťových odvetví pri uplatnení štandardných regulačných mechanizmov, a to najmä v kontexte vstupu Slovenska do Európskej únie a postupnou adaptáciou Slovenska na podmienky na trhoch s energiami v zjednotenej Európe;
- pripraviť taký analytický aparát pre cenovú reguláciu sieťových odvetví, ktorý by garantoval efektívny rozvoj regulovaných subjektov, pričom v prvej etape bolo rovnako dôležitou úlohou aj odstránenie deformácií v cenách produktov sieťových odvetví.

Účinné fungovanie trhu s tovarom a službami v sieťových odvetviach v podmienkach SR je možné zabezpečiť len za pomoci efektívnej regulácie vykonávanej na základe kvalitnej a účinnej regulačnej politiky v kontexte s právnym poriadkom Slovenskej republiky pri rešpektovaní prebraných právnych aktov Európskeho spoločenstva a Európskej únie. Všetci spotrebitelia s dôrazom na „zraniteľné“ skupiny musia mať možnosť užívať vysoký stupeň ochrany odberateľa, najmä domácností pri zachovaní primeraných záruk a vhodných stimulov pre regulované subjekty.

2 REGULÁCIA NA BÁZE MIERY NÁVRATNOSTI INVESTÍCIÍ

Tradičným metodologickým nástrojom pre cenovú reguláciu, ktorý uplatňujú cenoví regulátori pri stanovení cien produktov sieťových odvetví je regulácia na báze miery návratnosti investícií - Rate of Return Regulation, ktorou sa regulujú vo väčšine vyspelých ekonomík ceny produkcie napr. elektrárenských, plynárenských a ďalších spoločností (Fendeková, E., Fendek, M, 2009).

Cieľom je zabezpečiť, aby regulovaný subjekt stanovil cenu produkcie alebo služby pre svojich zákazníkov tak, aby zo svojich tržieb uhradil, všetky svoje *primerané a obozretne vzniknuté náklady* ako aj regulovanú návratnosť na svoju *obozretnú investíciu*.

Odvodíme teraz prípustnú mieru návratnosti výdavkov na investície, tzv. parameter *RoR* u regulovanej firmy analyticky. Predpokladajme, že firma vyrába homogénny výrobok o objeme produkcie q , ktorý realizuje na relevantnom trhu za cenu p . Predpokladajme ďalej, že firma využíva dva výrobné faktory, a to pracovnú silu s úrovňou spotreby L pri cene práce w a kapitál s úrovňou spotreby K pri cene kapitálu r .

Zisk firmy je vo všeobecnosti definovaný ako rozdiel medzi výnosmi a nákladmi v tvare

$$z(q) = t(q) - n(q)$$

kde

$t(q) = p \times q$ – funkcia tržieb firmy, $t: R \rightarrow R$

$n(q) = nv(q) + nf$ – funkcia celkových nákladov firmy, $n: R \rightarrow R$

$nv(q)$ – funkcia variabilných nákladov firmy, $nv: R \rightarrow R$

nf - fixné náklady firmy, $nf \in R$

Ak nahradíme všeobecnú nákladovú funkciu nákladovou funkciou na báze spotreby výrobných faktorov, dostávame funkciu zisku v nasledovnom tvare

$$z(q) = p \times q - w \times L - r \times K$$

Ak ďalej vyjadríme objem produkcie q na základe produkčnej funkcie v tvare

$$q = f(K, L)$$

a cenu produkcie p na základe cenovooodbytovej funkcie v tvare

$$p = p(q)$$

tak funkciu zisku môžeme vyjadriť v tvare

$$z(q) = p(q) \times q - w \times L - r \times K$$

a po ďalšej úprave v tvar

$$z(q) = p(f(K, L)) \times f(K, L) - w \times L - r \times K$$

Neregulovaná firma môže nastaviť svoje riadené, resp. endogénne parametre rozhodovania ľubovoľným spôsobom. Takže zvolí si optimálny objem výstupu q^* , akceptovateľnú optimálnu cenu p^* a zodpovedajúce spotreby výrobných faktorov práca L a kapitál K tak, aby dosiahla maximálny zisk. Optimálny výstup a optimálnu cenu vypočíta riešením nasledovnej úlohy matematického programovania

$$z(q) = p(f(K, L)) \times f(K, L) - w \times L - r \times K \rightarrow \max$$

$$K, L \in R_{\geq 0}$$

V tomto prípade teda neregulovaná firma nemá žiadne formálne prekážky pre nastavenie parametrov garantujúcich jej maximálny zisk. Naproti tomu regulovaná firma musí rešpektovať ohraničenia definované regulátorom. Režim cenovej regulácie na báze miery návratnosti potom spočíva v tom, že prostredníctvom exogénne definovanej riadiacej premennej RoR sa reguluje pre firmu prípustná úroveň podielu tržieb firmy $p \times q$ znížených o jej nekapitálové náklady $L \times w$ a objemu spotrebovaného kapitálu K .

Inými slovami, firma môže optimalizovať, resp. ľubovoľne stanoviť na jednej strane úroveň spotreby práce L , kapitálu K pri trhových cenách výrobných faktorov w , r a na strane druhej úroveň svojej produkcie q ale aj cenu produkcie p s jedinou podmienkou, že bude rešpektovať regulátorom definovanú mieru návratnosti, to znamená platnosť vzťahu

$$RoR \geq \frac{p \times q - w \times L}{K}$$

Preskúmame teraz podrobnejšie vzťah medzi mierou návratnosti kapitálových výdavkov a ziskom regulovaného subjektu, ktorý možno analyticky vyjadriť ako rozdiel medzi tržbami a nákladmi firmy v tvare

$$z(q) = p \times q - w \times L - r \times K$$

Po ďalšej úprave dostávame

$$(RoR - r) \times K \geq z(q)$$

Zo vzťahu vidíme, že regulovaný subjekt môže nastaviť svoje parametre systému len tak, aby jeho dosiahnutý zisk neprevýšil hodnotu kapitálu oceneného rozdielom medzi regulátorom definovanou mierou návratnosti RoR a cenou kapitálu r .

V prípade, ak je firma regulovaná, tak môže vybrať len takú kombináciu výrobných faktorov, aby zodpovedajúci objem ponuky a ceny produkcie generoval tzv. *primeraný zisk*, t. j. aby platil vzťah

$$(RoR - r) \times K \geq p(f(K, L)) \times f(K, L) - w \times L - r \times K$$

$$(RoR - r) \times K \geq z(q)$$

V konečnom dôsledku teda môže regulovaná firma vyrábať takým spôsobom, aby jej *primeraný zisk* neprevýšil $RoR - r$ násobok úrovne variabilného vstupu kapitál. Táto podmienka sa v odbornej literatúre označuje ako *hranica primeraného zisku regulovanej firmy*. Je zrejmé, že v prípade, ak regulátor nastaví mieru návratnosti kapitálu RoR tak, že táto prevyšuje jeho cenu r , tak firma dosahuje pre každú kombináciu vstupov s kladnou hodnotou spotreby výrobného faktora K kladný zisk. Už toto konštatovanie predikuje problematicky exkluzívne postavenie výrobného faktora kapitál pri rozhodovaní regulovanej firmy.

Na základe výsledkov analýzy modelu sú formulované nasledovné dôležité závery (Fendeková, E., Fendek, M, 2015) o správaní sa firmy regulovanej podľa princípu regulácie miery návratnosti použitého kapitálu:

1. Firma regulovaná podľa princípu regulácie miery návratnosti použitého kapitálu je v snahe zvyšovať svoj povolený „primeraný“ zisk motivovaná k neprimeranému a zbytočnému navyšovaniu kapitálových investícií.

2. Pri znížení miery návratnosti kapitálových výdavkov, za predpokladu, že naďalej platí $RoR > r$, reaguje firma v snahe zachovať objem zisku zvýšením kapitálových výdavkov.
3. Možno povedať, že zníženie miery návratnosti kapitálových výdavkov znamená pre regulovanú firmu sprísnenie podmienok regulácie.

3 REGULÁCIA NA BÁZE MIERY NÁVRATNOSTI NÁKLADOV

Regulácia návratnosti nákladov konštruuje hranicu pre maximálnu úroveň zisku regulovanej firmy na základe jej celkových nákladov (Fendek, M, 2008). Vidíme teda, že je tu určitá analógia medzi touto formou regulácie a reguláciou na báze miery návratnosti použitého kapitálu. Rozdiel je však v tom, že regulácia návratnosti nákladov nepreferuje konkrétnu nákladovú skupinu, ale vychádza z celkových nákladov.

Predstava, že zisk firmy je v tomto prípade určitou funkciou jej nákladov je samozrejme mystifikáciou, táto schéma však účinne zabraňuje prirodzenému monopolu aby presadzoval takú kombináciu svojej ponuky a trhovej monopolistickej ceny, ktorá by mu umožnila realizovať v porovnaní s vynaloženými nákladmi neadekvátny zisk.

Stručne povedané, podstata regulácie návratnosti nákladov spočíva v tom, že regulátor ako základ pre definovanie primeraného zisku regulovaného subjektu použije jeho celkové náklady a primeraný zisk potom definuje ako určité povolené percento RoC z jeho nákladov. Analyticky môžeme túto podmienku vyjadriť takto

$$RoC \times n(q) \geq z(q)$$

resp.

$$RoC \times (w \times L + r \times K) \geq z(q)$$

Regulovaný výstup a regulovaná cena sa v prostredí regulácie návratnosti nákladov vypočítajú riešením nasledovnej úlohy matematického programovania

$$z(q) = z(f(K, L)) = p(f(K, L)) \times f(K, L) - w \times L - r \times K \rightarrow \max$$

pri ohraničení

$$p(f(K, L)) \times f(K, L) - w \times L - r \times K - RoC \times (w \times L + r \times K) \leq 0$$

$$K, L \in R_{\geq 0}$$

Riešením optimalizačnej úlohy je optimálna úroveň spotreby výrobných faktorov práca L^* a kapitál K^* , na základe ktorých sa následne kvantifikuje s využitím produkčnej funkcie regulovaná optimálna úroveň výstupu q_{RoC}^* na základe vzťahu

$$q_{RoC}^* = f(K^*, L^*)$$

a regulovaná optimálna cena p_{RoC}^* s využitím cenovooodbytovej a produkčnej funkcie na základe vzťahu

$$p_{RoC}^* = p(q_{RoC}^*) = p(f(K^*, L^*))$$

pričom sa aj v tomto regulačnom prístupe rešpektuje miera návratnosti tržieb firmy definovaná parametrom RoC , t. j. exogénnym riadiacim parametrom stanoveným regulátorom.

Na základe a analýzy riešenia optimalizačnej úlohy môžeme formulovať nasledovné dôležité závery o správaní sa firmy v podmienkach regulácie podľa princípu návratnosti nákladov:

1. Vo všeobecnej rovine konštruuje metóda regulácie návratnosti nákladov hranicu výšky primeraného zisku pre regulovaný subjekt na základe percentuálnej časti jej celkových vynaložených nákladov. Táto percentuálna časť je definovaná parametrom *RoC*. Primárne teda podporuje výrobcu vyrábať vyšší objem ponuky pri nižšej cene, čo zvyšuje spoločenský blahobyt.

2. Konkrétna optimálna pozícia regulovanej firmy je determinovaná na jednej strane vlastnosťami nákladovej funkcie, ktorá má priamy vzťah k charakteru funkcie zisku, nakoľko platí

$$z(q) = t(q) - n(q)$$

a na strane druhej vlastnosťami cenovo odbytovej funkcie $p(q)$, ktorá špecifikuje zóny elastického a neelastického dopytu.

4 ZÁVER

Cieľom príspevku bolo analyzovať efekty cenovej regulácie v odvetviach Slovenskej republiky z hľadiska dosahovanej úrovne primeraného zisku regulovaných subjektov.

Na základe analýzy správania firmy v podmienkach regulácie na báze návratnosti použitého kapitálu sme ukázali, že v tejto regulačnej schéme má firma tendenciu reagovať na sprísnenie podmienok regulácie zvýšením objemu využívaného kapitálu. Zvýšenie objemu využívaného kapitálu však vonkoncom nie je tým, čo systém regulácie sleduje. Regulácia má za cieľ skôr ovplyvniť hodnoty iných, pre firmu, ale i ekonomiku dôležitých indikátorov, akými je objem produkcie, úroveň predaja výrobkov, resp. úroveň nákladov.

Preto boli vyvinuté aj iné formy cenovej regulácie, ktoré ovplyvňujú primeraný zisk firmy priamo na báze objemu jej produkcie, úrovne predaja výrobkov regulovanej firmy, resp. na báze výšky jej celkových nákladov. Cieľom je s použitím regulačných mechanizmov podporiť efektívny rozvoj regulovaného subjektu.

Ukázali sme, že regulovaná firma môže nastaviť svoje parametre ponuky produkcie, ceny produkcie a spotreby výrobných faktorov len tak, aby trhovú cenu produkcie bola maximálne o *RoC* percent vyššia ako sú priemerné náklady firmy na jednotku produkcie. Vidíme teda, že neefektívne zvyšovanie nákladov firmy v súlade s regulačným vzťahom tejto metódy by síce vytváralo priestor pre zvyšovanie primeraného zisku firmy, súčasne však treba nájsť takú kombináciu ponuky firmy a ceny produkcie, ktorá by zabezpečila jej odbyt.

Použitá literatúra:

- [1] Bazaraa, M. - C. M. Shetty, C.M.: Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Wiley-Interscience. New York, 2006
- [2] Fendek, M.; Fendeková, E. (2008). Mikroekonomická analýza. IURA Edition. Bratislava 2008. 557 strán. ISBN 80-88715-54-7.
- [3] Fendeková, E. - Fendek, M. (2018). Mikroekonómia : Oligopoly a regulované monopoly. Recenzenti: Miroslav Grznár, Marián Goga. 1. vydanie. Bratislava : Wolters Kluwer, 2018. 230 s. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-765-5.

- [4] Fendeková, E. - Fendek, M. (2015). Mikroekonomická analýza efektov cenovej diferenciacie produkcie monopolu. In *Modely rovnováhy v podmienkach produktovej a cenovej diferenciacie na regulovaných trhoch sieťových odvetví* / Eleonora Fendeková a kolektív. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2015. - ISBN 978-80-225-4035-3.
- [5] Fendek, M.; Fendeková, E. (2010). Modely cenovej regulácie sieťových odvetví. *Ekonomický časopis: časopis pre ekonomickú teóriu a hospodársku politiku, spoločensko-ekonomické prognózovanie*. Bratislava : Ekonomický ústav SAV: Prognostický ústav SAV, ISSN 0013-3035, 2010, roč. 58, č. 10, pp. 1039 – 1055..
- [6] Fendek, M.; Fendeková, E. (2012). Podmienky optimálnosti Kuhna-Tuckera v modeloch rovnováhy trhu sieťových odvetví / Kuhn –Tucker optimality conditions in equilibrium models of network industry markets. In *Politická ekonomie : teorie, modelování, aplikace*. - Praha : Vysoká škola ekonomická, ISSN 0032-3233. - Roč. 60, č. 6 (2012), s. 801-821.
- [7] Fendek, M.; Fendeková, E. (2009). Models of regulation of network industries in Slovakia. In *International journal of economics and business research*. - UK : Inderscience Enterprises Ltd, ISSN 1756-9850, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 479-495.
- [8] Fendek, M. (2008). Natural monopoly cost-oriented price regulation. (2008). *Quantitative methods in economics: multiple criteria decision making XIV*. – Bratislava, IURA EDITION, 2008. ISBN 978-80-8078-217-7, pp. 45-53.
- [9] Jarre, F.; Stoer, J. *Optimierung*. Berlin: Springer Verlag. (2004). ISBN3-540-43575-1. Martin, S. 2012. *Industrial Organization: A European Perspective*. Oxford: Oxford University Press, USA.

Adresa autora:

Dr. h. c. prof. Ing. Michal Fendek, PhD.

Department of Operations Research and Econometrics, University of Economics Bratislava

Dolnozemska cesta 1/b

852 35 Bratislava

Slovakia

e-mail: michal.fendek@euba.sk

ROZVRHOVÁNÍ VÝROBY NA VSTŘIKOVACÍM LISU

PRODUCTION SCHEDULING ON THE INJECTION PRESS MACHINE

Petr Fiala

Abstrakt

Článek je věnován vytvoření heuristického algoritmu pro rozvržení výroby sportovní obuvi na vstřikovacím lisu. Vstřikovací lis je zařízení karuselového typu, které je osázeno formami pro různé velikosti obuvi. Výroba se rozvrhuje na dekádu, kdy zakázka je zadaná sortimentem velikostí obuvi a počtem kusů dané velikosti. Je navržen postup vycházející z modelu rozvrhování na paralelní procesory s cílem minimalizace doby pro výrobu a minimalizace počtu výměn forem. Výměny forem vyžadují určitý čas a specializovanou obsluhu. Tato dvoukriteriální úloha je NP-obtížná. Navržený postup vychází z kombinace optimalizačního Mc Naughtonova algoritmu pro stanovení nejkratší doby zpracování při povoleném přerušení dávek a heuristického postupu pro rozvrhování na paralelní procesory bez přerušení dávek. Volbou vhodné tolerance doby zpracování můžeme redukovat počet přerušení dávek. Algoritmus nachází celou množinu nedominovaných řešení této dvoukriteriální úlohy.

***Klíčová slova:** produkční systém, rozvrhování výroby, vstřikovací lis, heuristika*

Abstract

The paper deals with the creation of a heuristic algorithm for the layout of the production of sports shoes on an injection press machine. The injection press machine is a carousel type machine that is fitted with shapes for different shoe sizes. The production is scheduled for a decade, when the order is specified by the size range of the footwear and the number of pieces of a given size. Shape changes require time and specialized service. This two-criterion task is NP-hard. The proposed approach is based on a combination of the Mc Naughton algorithm to determine the shortest processing time for allowed batch interruptions and the heuristic procedure for scheduling on parallel processors without batch interruption. By selecting a suitable processing time tolerance, we can reduce the number of batch interruptions. The algorithm finds the whole set of non-dominated solutions of this two-criterion task.

***Keywords:** production system, production scheduling, injection press machine, heuristics*

1 ÚVOD

V systémovém pojetí je možno podnik brát jako otevřený produkční systém, který vstupy ze svého okolí transformuje na výstupy, které poskytuje rovněž svému okolí (Fiala, 2002). Při analýze produkčních systémů procházíme základními fázemi: navrhování, řízení, měření výkonnosti, zlepšování výkonnosti. Jednou z nejdůležitějších aktivit fáze řízení je rozvrhování produkce na zařízení. Tato oblast je značně propracovaná a existuje řada modelů a metod. Reálné problémy jsou však často obtížně řešitelné a je nutno použít heuristické postupy.

Teorie rozvrhování se zabývá úlohami časového rozmístění určitých činností na určitá zařízení (Baker, 1974, Vlach, 1982, Fiala, 2002). Základními pojmy jsou procesor a dávka. Procesory jsou zařízení, na kterých se výroba zpracovává, a dávky jsou série produktů, které se zpracovávají stejným způsobem.

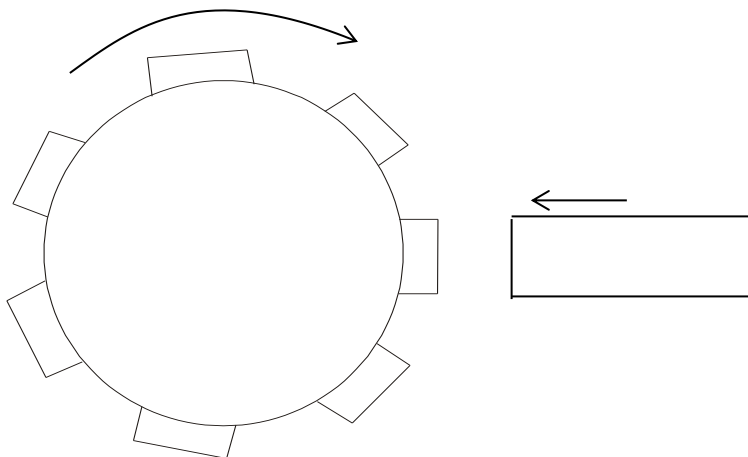
Problém optimalizace rozvrhování výroby na vstřikovacím lisu byl formulován v obuvnickém průmyslu. Pro tento problém se hodí model rozvrhování na paralelních procesorech. Na m paralelních procesorech je rozvrhováno n dávek, z nichž každá je tvořena jedinou operací, která

se může realizovat na kterémkoliv z m procesorů. Budeme předpokládat, že procesory jsou identické, tzn. doba trvání dávek je nezávislá na procesoru realizace dávky.

Vstříkovací lis je zařízení karuselového typu, které je osázeno formami pro různé velikosti obuvi. Výroba se rozvrhuje na dekádu, kdy zakázka je zadaná sortimentem velikostí obuvi a počtem kusů dané velikosti. Je navržen postup vycházející z modelu rozvrhování na paralelní procesory s cílem minimalizace doby pro výrobu a minimalizace počtu výměn forem. Výměny forem vyžadují určitý čas a specializovanou obsluhu. Tato dvoukriteriální úloha je NP-obtížná. Navržený postup vychází z kombinace optimalizačního Mc Naughtonova algoritmu pro stanovení nejkratší doby zpracování při povoleném přerušení dávek a heuristického postupu pro rozvrhování na paralelní procesory bez přerušení dávek. Volbou vhodné tolerance doby zpracování můžeme redukovat počet přerušení dávek. Pro vícekriteriální modely rozhodování se hledají tzv. nedominovaná řešení, tj. řešení, ke kterým neexistují lepší řešení podle alespoň jednoho kritéria a ne horší podle ostatních kritérií (Fiala, 2008). Algoritmus nachází celou množinu nedominovaných řešení této dvoukriteriální úlohy.

2 FORMULACE PROBLÉMU

Vstříkovací lis je stroj karuselového typu na výrobu sportovní obuvi. Vyrábí podrážky sportovní obuvi vstříkáním plastické směsi do forem. Na lisu je m paralelních forem.



Obr. 1. Vstříkovací lis

Produkce je organizována tak, že příchozí výrobní požadavky jsou považovány za nezávislé jednotky. Obuv je balena vždy po deseti párech stejné velikosti, proto je nutné zabývat se výrobou deseti párů obuvi. Výrobní zakázka musí být zpracována v celém sortimentu n velikostí a je požadována minimalizace výrobního času a počtu výměn forem.

Výměny forem mohou být trojího druhu:

1. Výměna je nutná k výrobě celé produkce s přihlédnutím k velikosti. Počet těchto výměn je konstantní a je roven $A = n - m$.
2. Výměna vyplývající z rozdělení velké dávky obuvi stejné velikosti na dvě formy. Počet těchto výměn L je roven počtu velkých dávek, které je nutno rozdělit na dvě formy.
3. Výměny vynucené přerušením dávek. Počet těchto výměn P má být minimalizován.

Celkový počet výměn $E = A + L + P$.

Problém může být formulován jako rozvrhovací úloha s paralelními procesory s dvěma cíli: minimalizací délky rozvrhu T a s minimalizací počtu výměn vynucených přerušeními dávek P .

3 ROZVRHOVÁNÍ NA VSTŘIKOVACÍM LISU

V tomto problému budeme používat následující označení:

- n počet velikostí ve výrobním požadavku,
- t_i počet párů obuvi velikosti i ,
- N zakázka pro jednu výrobní dekádu ($N = \sum t_i, i=1,2,\dots,n$),
- m počet míst pro formy na vstřikovacím lisu,
- r_j průběžný počet přiřazených párů na procesoru j ,
- δ tolerance proměnné T_{min} (T_{min} délka nejkratšího rozvrhu).

Produkce musí být vyrobena v celém sortimentu velikostí. Pro nejčtenější velikosti jsou k dispozici nejméně dvě formy. Počet forem používaných pro výrobu může být větší než počet velikostí ve výrobní zakázce.

Minimální délku rozvrhu můžeme určit pomocí Mc Naughtonova algoritmu (Mc Naughton, 1961) s tím, že druhý člen v určení délky rozvrhu není nutný vzhledem k možnosti rozdělení velkých dávek obuvi stejné velikosti na dvě nebo více forem.

$$T_{min} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n t_i.$$

Počet přerušení je v tomto případě maximální P_{max} a je nejvýše roven $m - 1$.

Maximální délku rozvrhu T_{max} můžeme určit pomocí heuristického algoritmu pro paralelní procesory bez přerušení dávek. V tomto případě je zřejmě počet přerušení P minimální a je roven 0.

Samozřejmě, $T \in \langle T_{min}, T_{max} \rangle$ a $P \in \langle 0, P_{max} \rangle$. Pro ideální řešení je hodnota $P=0$ a $T=T_{min}$. Obvykle nemohou být tyto dvě podmínky dodrženy současně. Když zvolíme vhodnou toleranci δ proměnné T_{min} , můžeme redukovat počet přerušení dávek. Tolerance δ je vždy vyjádřena jako celý násobek deseti párů obuvi, v rozsahu od 0 do $T_{max} - T_{min}$.

Hodnoty T a P určené touto cestou mohou být použity jako základ pro volbu výsledného rozvrhu.

4 ROZVRH PRO JEDNU DEKÁDU

Algoritmus pro nalezení rozvrhu pro jednu dekádu má následující kroky:

Krok 1. Porovnáme t_i ($i= 1, 2, \dots, n$) s $T_{min} + \delta$. Jestliže $t_i > T_{min} + \delta$, pak je dávka vyráběna pomocí dvou forem. Jedna forma vyrobí T_{min} párů, druhá forma $t_i - T_{min}$. Jinak používáme jednu formu. Poznamenanáme si L .

Krok 2. Vytvoříme nerostoucí posloupnost (LPT) počtu párů vyráběných rozdílnými formami. ($t_{[1]} \geq t_{[2]} \geq \dots \geq t_{[n]}$).

Krok 3. V tomto pořadí přiřazujeme dávky na procesory, které mají přiděleno nejmenší množství párů obuvi. Kontrolujeme, zda platí $r_j \leq T_{min} + \delta$, jestliže $r_j > T_{min} + \delta$, potom rozdělíme t_j na dvě části ($t_j = t_j^{(1)} + t_j^{(2)}$) tak, aby $t_j^{(1)}$ bylo dokončeno v T_{min} . Jde o přerušení. Rozvrhneme $t_j^{(1)}$ párů obuvi na místo j a $t_j^{(2)}$ párů přidělíme v LPT posloupnosti mezi nerozvržené dávky. Pokračujeme v tomto procesu, dokud nenarazíme na $t_j^{(2)}$. Pro $t_j^{(2)}$

použijeme druhou formu (pokud je k dispozici) nebo přidělíme $t_i^{(2)}$ na začátek dekády. Tímto způsobem přidělíme všechny páry obuvi na místa na vstřikovacím lisu. Poznamenejme si P .

Nejlepší možností je předložit uživateli celou množinu aproximačně nedominovaných rozvrhů a on si vybere nejvhodnější rozvrh. Míry substituce přináší uživateli užitečné informace.

Položíme $\delta_1 = 0$, $T_1 = T_{min}$ a vypočteme pomocí heuristické procedury první aproximačně nedominovaný rozvrh R_1 . Počet aproximačně nedominovaných rozvrhů bude roven $s = L + P + 1$.

Ostatní aproximačně nedominované rozvrhy R_k , $k = 2, 3, \dots, s$ jsou vypočteny pomocí heuristické procedury s hodnotami

$$\delta_k = \min [p_i^{k-1}(2), t_i^{k-1}(2)], T_k = T_{min} + \delta_k,$$

kde $p_i^{k-1}(2)$ je počet párů vyrobených na druhé formě v předchozím rozvrhu R_{k-1} , $t_i^{k-1}(2)$ je počet párů druhé části dávky vytvořené při přerušení v předchozím rozvrhu R_{k-1} .

5 PŘÍPADOVÁ STUDIE

Data pro tuto studii jsou převzata z reálného zadání úlohy.

Velikost	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	310
Počet forem	1	1	1	2	2	3	2	2	1	1	1	1
t_i	600	600	800	900	1200	1070	970	570	280	150	40	20

Tab. 1. Zadání úlohy

$N = 7200$, $m = 7$, $n = 12$, $T_{min} = 1030$ (zaokrouhleno na desítky párů), $A = n - m = 5$.

Použijeme navržený postup pro rozvržení výroby:

Položíme $\delta = 0$, $T_{min} = 1030$ a vypočteme:

1. [270]-1200 rozdělíme na dvě formy - [270-1]-1030

[270-2]-170

[275]-1070 rozdělíme na dvě formy - [275-1]-1030

[275-2]-40

$L = 2$.

2. LPT posloupnost:

formy	270-1	275-1	280	265	260	250	255	285	290	270-2	295	300	275-2	310
počet párů	1030	1030	970	900	800	600	600	570	280	170	150	40	40	20

Tab. 2. LPT posloupnost

3. [285]-570 rozdělíme do dvou částí [285]-430(1)

[285]-140(2)

Zařadíme druhou část dávky [285]-140(2) na začátek dekády na místo 4.

[265]-900 rozdělíme do dvou částí [265]-890(1)

[265]- 10(2)

Zařadíme druhou část dávky [265]- 10(2) na začátek dekády na místo 5.

$P = 2$.

Místo	Rozvrh	r_j
1	[270-1]-1030	1030
2	[275-1]-1030	1030
3	[280]-970,[300]- 40,[310]-20	970, 1010, 1030
4	[285]-140(2), [265]-890(1)	140, 1030
5	[260]-800,[270-2]-170,[275-2]-40 [265]-10(2)	800, 970, 1010, 1020
6	[250]-600,[290]-280,[295]-150	600, 880, 1030
7	[255]-600,[285]-430(1)	600, 1030

Tab. 3. Rozvrh na dekádu

$T = 1030, A = 5, L = 2, P = 2, E = 9$.

Pomocí heuristického algoritmu nalezneme rozvrh R_2 :

$$\delta_2 = \min [p_i^{k-1}(2), t_i^{k-1}(2)] = \min (170, 40, 140, 10),$$

$$T_2 = T_{min} + \delta_2 = 1030 + 10 = 1040$$

$$A_2 = 5, L_2 = 2, P_2 = 1, E_2 = 8.$$

Pro další hodnoty δ dostáváme další aproximačně nedominované rozvrhy:

R_k	δ_k	T_k	A_k	L_k	P_k	E_k
R_1	0	1030	5	2	2	9
R_2	10	1040	5	2	1	8
R_3	40	1070	5	1	1	7
R_4	140	1170	5	1	0	6
R_5	170	1200	5	0	0	5

Tab. 4. Nedominované rozvrhy

6 ZÁVĚR

Navržení algoritmu bylo vyvoláno reálným problémem pro rozvrhování výroby sportovní obuvi na vstříkovacích lisech. Formulace vedla na dvoukriteriální úlohu rozvrhování na paralelních procesorech s minimalizací času dokončení a současně minimalizací počtu přerušení. Tato úloha je NP-obtížná. Navržený heuristický algoritmus poskytuje celou množinu nedominovaných řešení. Celá výroba zakázky je určena pro jednu dekádu nebo může být určena pro několik dekád. V druhém případě je cílem minimalizace ve všech dekádách odděleně. Algoritmus umožňuje i úpravy podle reálného zadání problému a je jej možno využít v řadě odvětví, kde se vyskytují podobné rozvrhovací úlohy.

Poděkování

Výzkumný projekt je podporován grantem č. IGA F4/66/2019, Fakulty informatiky a statistiky, VŠE, Praha.

Použitá literatura

1. BAKER, K. R. (1974): Introduction to Sequencing and Scheduling. John Wiley, New York.
2. FIALA, P. (2002): Modelování a analýza produkčních systémů. Professional Publishing, Praha.
3. FIALA, P. (2008): Modely a metody rozhodování. Oeconomica, Praha.
4. MC NAUGHTON, R. (1961): Scheduling with deadlines and loss functions. Management Science 6 (6), 1-12.
5. VLACH, M. (1983): Deterministické modely rozvrhování výroby. SNTL, Praha.

Kontaktní údaje

Prof. RNDR. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420 2) 24 095 447

email: pfiala@vse.cz

VIACKRITERIÁLNE ROZHODOVANIE V OBLASTI TEÓRIE HIER

MULTI-CRITERIAL DECISION MAKING IN GAME THEORY

Dana Figurová, Zuzana Čičková

Abstrakt

V súčasnosti možno považovať teóriu hier za vednú disciplínu s pomerne rozsiahlym záberom a širokospektrálnym využitím v rôznych oblastiach. Modely konfliktných rozhodovacích situácií, v ktorých nie je prípustný vznik koalície, nazývame nekooperatívnymi hrami. V opačnom prípade hovoríme o kooperatívnych alebo koaličných hrách. Okrem štandardných konfliktov, v ktorých jednotliví hráči maximalizujú len jedno kritérium (napr. zisk), sa v praxi však často stretávame s takými situáciami, kedy sa aspoň jeden z hráčov rozhoduje na základe viacerých kritérií, ktoré chce maximalizovať súčasne. Práve preto bola do teórie hier aplikovaná teória viackriteriálnej optimalizácie a vznikla tak nová teória viackriteriálnych hier, ktorá sa zaoberá hľadaním rovnovážnych stratégií hier, kedy aspoň jeden hráč má viac ako jednu funkciu platieb. V príspevku sa budeme zaoberať predovšetkým prehľadom literatúry a teoretickému vymedzeniu takéhoto typu hier v prípade kooperatívnych hier.

Kľúčové slová: teória hier, viackriteriálne rozhodovanie, kooperatívne hry

Abstract

Nowadays, the game theory can be considered as a discipline with a relatively wide-ranging use in various fields. Models of conflicting decision-making situations in which the formation of a coalition is not permissible are called non-cooperative games. Otherwise, we are considering about the cooperative or coalition games. In addition to standard conflicts where individual players maximize only one criterion (e.g. profit), we often in practice encounter situations where at least one player decides on the basis of multiple criteria that he wants to maximize at the same time. This is why multi-criterion optimization theory has been applied to the game theory to create a new multi-criterion game theory that deals with finding equilibrium game strategies where at least one player has more than one payment function. In the paper, we will focus primarily on the literature review and theoretical definition of such games in the case of cooperative and non-cooperative games

Keywords: game theory, multi-criterial decision making, cooperative games

1 ÚVOD

Teória rozhodovania zahŕňa viacero oblastí, ako je napríklad teória hier, teória spoločenského výberu, analýza dát a v neposlednom rade viackriteriálne rozhodovanie. Ak rozhodovateľ porovnáva možné varianty na základe jedného obmedzenia, jedná sa o úlohy jednokriteriálneho rozhodovania. Tento prístup sa však v praxi príliš často nevyužíva a v reálnom svete sa častejšie stretáme s úlohami ako je napríklad nasledovná: manažment firmy sa usiluje o taký výrobný program, ktorého realizáciou by firma maximalizovala tržby, zabezpečila plánovaný zisk spoločnosti, zabezpečila požadovanú úroveň nákladov, znížila ekologické dopady výroby a pod. Z tohto dôvodu sa vyvinulo viackriteriálne rozhodovanie, kde sa jeden rozhodovateľ rozhoduje na základe dvoch alebo viac kritérií.

Vo všeobecnosti možno povedať, že riešenie viackriteriálnych problémov je veľmi aktuálna a potrebná záležitosť. S jednoduchými problémami tohto typu sa stretávame aj v bežnom živote. Náročné úlohy, napríklad práve z oblasti okružných úloh, riešia najmä firmy v sektore logistiky. Oproti jednokriteriálnemu, viackriteriálne rozhodovaniu umožňuje nájsť vhodné kompromisné riešenie, ktoré zohľadňuje viacero obmedzení alebo kritérií, keďže v problémoch tohto typu častokrát nie je jedinečné riešenie, ktoré by mohlo extremalizovať všetky ciele súčasne.

Viackriteriálna optimalizácia je veľmi aktuálnym a dôležitým optimalizačným nástrojom, keďže v mnohých reálnych aplikáciách existuje viac ako jedno kritérium, ktoré treba zohľadniť pre zhodnotenie kvality možných riešení. Historicky prvý pokus o odvodenie správania sa hráčov v strategickej situácii má na svedomí francúzsky filozof, ekonóm a matematik A. Cournot (1838). Vo svojom diele „*Výskumy o matematických princípoch teórie bohatstva*“ sa zaoberá podrobnou analýzou monopolu, skúma vplyv rôznych foriem dani a poplatkov na príjem výrobcov a zákazníkov. V práci pojednáva aj o duopoloch a oligopoloch a prezentuje riešenie, ktoré je obmedzenou verziou „Nashovej rovnováhy“. Cournot zostavil prvý matematický model oligopolu, ktorý z pohľadu teórie hier predstavuje nekooperatívnu hru s nekonečným počtom stratégií. V roku 1953 publikoval L.S. Shapley svoju štúdiu, v ktorej prezentoval ďalšie výsledky k teórii hier, ako napr. analýzy modelov volieb, stochastických hier a pod. V prípade viackriteriálneho rozšírenia teórie hier bol po prvýkrát predstavený koncept D. Blackwella (1956). Shapley (1959) neskôr predstavil koncept hľadania rovnovážnych bodov, z ktorých potom vychádzali ďalší autori, ktorí sa začali orientovať na hry s viacerými kritériami. L.S. Shapley bol veľmi dôležitou postavou v teórii viackriteriálnych hier.

V ďalších rokoch sa záujem autorov presunul od nekooperatívnych viackriteriálnych hier ku kooperatívnym. Nekooperatívne hry, v ktorých hráči nemôžu spolupracovať medzi sebou, rozpracovali autori M. Zelený (1976) a H.W. Corley (1985). Autori F. R. Fernandez a J. Puerta (1998) predstavili viackriteriálne cieľové hry. V literatúre môžeme nájsť viaceré koncepty riešenia viackriteriálnych hier s využitím priradenia váh jednotlivým kritériám každého hráča. Koncept skalarizovania po prvýkrát predstavil L. Krus a P. Bronisz (1994), na základe ktorého sa potom študovali Paretove rovnovážne body. Získanie potrebných váh v praxi však môže byť pomerne zložitým problémom, pretože často nemáme dostatok informácií, prípadne zdrojov, aby sme mohli jednotlivých kritériám priradiť dôležitosť.

Ďalším prístupom k riešeniu viackriteriálnych nekooperatívnych hier rozpracoval M. Voorneveld (2000), ktorý definoval ideálne rovnovážne body. Jedná sa o takú kombináciu stratégií, ktorú musí dodržať každý hráč, inak si v nejakom kritériu nutne pohorší a v žiadnom nepolepší. Nevýhodou tohto konceptu je fakt, že tieto ideálne rovnovážne body zvyčajne neexistujú. Inú možnosť riešenia ponúkli P. Borm, D. Vermeulen, M. Voorneveld (2003), ktorí na riešenie viackriteriálnych úloh dvoch hráčov využívajú grafickú metódu, z ktorých jeden má maximálne dve kritéria. Toto riešenie síce nájde kompletnú množinu rovnovážnych bodov, avšak sa dá aplikovať len na úzku množinu hier.

Kooperatívnym viackriteriálnym hrám sa venovalo oveľa menej autorov ako nekooperatívnym. Môžeme spomenúť prácu K. Bergstressera a P.L. Yu (1977), ktorí sa venujú viackriteriálnym hrám n -hráčov, prípadne prácu M. Linda (1996) skúmajúci kooperatívnu teóriu hier a viackriteriálne rozhodovanie. Na tieto práce neskôr nadväzujú M. Voorneveld a C. G. A. M. Van de Noweland (1998), ktorí vo svojom článku rozoberajú hry s dvoma kritériami – jedno je verejné, v ktorom majú všetci hráči rovnakú hodnotu a jedno súkromné, ktoré má každý hráč vlastné. V nedávnej štúdií predstavili L. Monroy a L. Fernandez (2011)

Shapley - Shubikov index pre viackriteriálne hry. Samotnej ekonomickej aplikácii viackriteriálnych hier sa venoval J. Roemer (2005).

Aj v súčasnosti sa teória hier naďalej vyvíja, implementuje sa do bežného života a nachádza si svoje nové uplatnenia. Ako príklad nám poslúži práca amerických ekonómov Alvina Rotha a Lloyda Shapleya, ktorí získali Nobelovu cenu za ekonómiu v roku 2012 za teóriu stabilných trhových alokácií a praktických návrhov optimálnej podoby trhov (Goga, 2013). Roth nadviazal na výskum Shapleyho a spoločne tak prišli nato, že ekonomike sa darí viac, keď sa medzi jej prvkami tvoria stabilné dvojice. Obmedzí sa tak možnosť manipulácie a trhy začnú lepšie fungovať.

2 VIACKRITERIÁLNE ROZHODOVANIE V KOOPERATÍVNYCH HRÁCH

Kooperatívnym viackriteriálnym hrám bol v súčasnom výskume autorov venovaný omnoho menší priestor než hrám nekooperatívnym. Jedným z mála článkov venujúcim sa problematike hľadania riešenia v kooperatívnej viackriteriálnej hre je článok (Hinojosa a kol., 2005), ktorý využíva Rawslov princíp maxminu pre rozdelenie výhry v koalícií. V nadväznosti na dopravné úlohy môžeme konštatovať, že vo všeobecnosti predstavujú prepravné náklady veľkú časť prevádzkových nákladov spoločnosti a práve jedným z riešení na zníženie takýchto nákladov je spolupráca medzi jednotlivými logistickými spoločnosťami. V závislosti od skúmanej úlohy potom možno použiť viacero typov optimalizačných kritérií napr. minimalizácia fixných nákladov (napr. minimalizácia počtu použitých vozidiel), prípadne minimalizácia variabilnej zložky (napr. minimalizácia celkovej najazdenej vzdialenosti alebo celkového času potrebného na prepravu napr. z dôvodu veľkosti mzdy vodiča alebo s cieľom eliminovať penále za neobslúženie uzla). Hasani a Tavakkoli-Moghaddam (2012) skúmali dopravnú úlohu s kapacitným ohraničením v prípade viackriteriálneho rozhodovania, aby sa určili najlepšie trasy vozidiel a optimálny počet použitých vozidiel. Niekoľko výskumníkov prijalo CGT (Cooperative Game Theory) ako model spolupráce logistických firiem, napr. Lozano (2013) uviedol matematický model pre vyčíslenie benefitov vyplývajúcich zo zlúčenia transportných požiadaviek rozličných firiem. Dokázal, že dochádza k zníženiu spoločných prepravných nákladov práve z dôvodu použitia väčších alebo viacerých vozidiel a zvýšeného počtu pripojených ciest. Montoya a kol. (2015) predstavili úplný prehľad vedeckej literatúry týkajúcej sa okružnej úlohy s viacerými strediskami, kde komplexne analyzovali jednokriteriálnu a viackriteriálnu okružnú úlohu a algoritmy ich riešenia.

Okružné úlohy teda ponúkajú možnosť zohľadnenia viacerých obmedzení, pričom každé z obmedzení zvyčajne komplikuje možnosti riešenia úlohy, ale súčasne približuje uvažované matematické modely požiadavkám praxe a tým zvyšuje ich využiteľnosť. Spomínané obmedzenia v praxi môžeme formulovať a chápať ako kritéria. Ak chceme optimalizovať nejaké obmedzenie a v danej oblasti úlohu maximalizovať alebo minimalizovať, dané obmedzenie sa automaticky stáva kritériom. Najčastejšie sa uvažuje s nasledujúcimi obmedzeniami v oblasti viackriteriálnych okružných úloh:

- ohraničenia týkajúce sa dopravných prostriedkov
- ohraničenia týkajúce sa obslužných uzlov
- ohraničenia týkajúce sa iných faktorov

Vzhľadom k viacerým kritériám (často protichodným), pojem optimálne riešenie vo viackriteriálnych úlohách vo všeobecnosti neexistuje a môže byť nahradený pojmom efektívne, alebo kompromisné riešenie. Metódy viackriteriálneho rozhodovania vo všeobecnosti

predstavujú súhrn pravidiel a postupov, ktoré môžu byť použité k nájdeniu a prijatiu najlepšieho riešenia. Termín viackriteriálny prístup sa vyvinul v oblasti vývojovej multikriteriálnej optimalizácie (Evolutionary Multi-Criterion Optimization -EMO). Tento prístup transformuje problém s jedným cieľom na „multikriteriálny“ problém.

Pre kooperatívne viackriteriálne hry je situácia komplikovaná, pretože hráči sa môžu dohodnúť na voľbách stratégií, aby mali svoje výplatné funkcie čo najvyššie, avšak obvykle majú jednotliví hráči odlišné preferencie. Budeme napríklad uvažovať, že hráči majú dve výplatné funkcie a jeden z hráčov môže preferovať viac prvú výplatnú funkciu, druhý hráč môže viacej preferovať druhú výplatnú funkciu, zatiaľ čo tretí hráč chce maximalizovať obe funkcie a nie je ochotný sa vzdať zisku v prvej výplatnej funkcii v prospech zisku v druhej výplatnej funkcii či naopak. Ukážeme si definíciu viackriteriálnej kooperatívnej hry.

Definícia 2.1. Viackriteriálna kooperatívna hra je dvojica (P, v) , kde

$$P = \{1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

je množina hráčov, $n \in \mathbb{N}$ predstavuje počet hráčov. Neprázdna podmnožina $S \subseteq P$ množiny hráčov sa nazýva koalícia. Charakteristická funkcia hry

$$v: S \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2)$$

priraduje akejkoľvek koalícii $S \subseteq P$ výhru $v(S) \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ predstavuje počet kritérií. Výhru v τ -tom kritériu označíme ako $v^\tau(S)$.

Vo viackriteriálnej kooperatívnej hre hráči rovnako ako v tej jednokriteriálnej vytvárajú koalície tak, aby si zaistili čo najvyšší zisk. Rozdiel je však v tom, že tento zisk je vyjadrovaný vektorom.

3 ZÁVER

Teória viackriteriálnych hier je špeciálnou oblasťou teórie hier, ktorá je považovaná za relatívne mladú vednú disciplínu. V prípade riešenia kooperatívnych viackriteriálnych hier je situácia komplikovanejšia ako pri riešení nekooperatívnych hier, pretože hráči sa môžu dohodnúť na voľbe stratégií tak, aby svoje funkcie platieb mali čo najvyššie, avšak problémom je, že zvyčajne majú jednotliví hráči odlišné preferencie. Mnoho autorov sa venovalo viackriteriálnemu rozhodovaniu v oblasti teórie hier. V tomto príspevku sme prezentovali prípad viackriteriálnej optimalizácie v kooperatívnej hre. Zohľadnenie viacerých obmedzení (kritérií) zvyčajne komplikuje možnosti riešenia úlohy, ale súčasne približuje uvažované matematické modely požiadavkám praxe a tým zvyšuje ich využiteľnosť.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17 *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska*.

Použitá literatúra

1. COURNOT, A. A. 1838. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. In: *Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* . L'Universite Royale de France.
2. SHAPLEY, L. S. 1959. *Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs*. In: *Naval Research Logistics Quarterly*, roč. 6, 1959, s. 57-61.
3. ZELENÝ, M. 1976. *Game with Multiple Payoffs*. In: *International Journal of Game Theory*, roč. 4, 1976, č. 4, s. 179-191

4. CORLEY, H. W. 1985. *Games with Vector Payoffs*. In: Journal of Optimization Theory and Applications, roč. 47, 1985, č. 4, s. 463-475.
5. FERNANDEZ, F. R., MONROY, L. & PUERTO, J. 1998. *Multicriteria Goal Games*, Journal of Optimization Theory and Applications, roč. 99, č. 2, s. 403-421.
6. GOGA, M. 2013. *Teória hier*. Bratislava: Iura Edition. 2013. ISBN: 978-80-8078-613-7.
7. BLACKWELL, D. 1956. *An analog of the minimax theorem for vector payoffs*. In: Pacific Journal of Mathematics. roč. 6, 1956, č. 1, s. 1-8.
8. SHAPLEY, L. S. 1953. *A Value for n-Person Games*. In: Annals of Mathematics Studies, roč. 28, 1953, s. 307-317.
9. BERGSTRESSER, K.; YU, P. L. 1977. *Domination Structures and Multicriteria Problems in N-Person Games*. In: Theory and Decisions, roč. 8, 1977, s. 5-48.
10. HINOJOSA, M. A., MARMOL, A. M. & MONROY, L. 2005. *Generalized Maximin Solution in Multicriteria Bargaining*. In: Annals of Operational Research, roč. 137, 2005, s. 243-255.
11. LOZANO, S., MORENO, P., ADESO-DIAZ, B., & ALGABA, E. 2013. *Cooperative game theory approach to allocating benefits of horizontal cooperation*. In: European Journal of Operational Research, roč. 229, 2013, č. 2, s. 444-452.
12. ROEMER, J. 2005. *Games with Vector-Valued Payoffs and Their Application to Competition between Organizations*. In: Economics Bulletin, roč. 3, 2005, č. 16, s. 1-13.
13. KRUG, L. & BRONISZ, P. 1994. *On n-person Noncooperative Games Describe in Strategic Form*. In: Annals of Operation Research, č. 51, 1994, s. 83-97.
14. VOORNEVELD, M. 2000. *Maximum likelihood equilibria of games with population uncertainty*. Tilburg: Microeconomics. ISSN 0924-7815.
15. BORM, P., VERMEULEN, D. & VOORNEVELD, M. 2003. *The structure of the set of equilibria for two person multicriteria games*. In: European Journal of Operational Research, roč. 148, 2003, č. 3, s. 480-493.
16. VOORNEVELD, M. & NOUWELAND, A. 1998. *A new axiomatization of the core of games with transferable utility*. In: Economics letters, roč. 60, 1998, č. 2, s. 151-155.
17. LIND, M. 1996. *Cooperative Game Theory and Multiple Criteria Decision Making*. PhD thesis, Department of Operations Research, University of Aarhus, Denmark, 1996.
18. MONROY, L. & FERNANDEZ, F. R. 2011. *The Shapley-Shubik index for multicriteria simple games*. In: European Journal of Operational Research, č. 209, 2011, s. 122-128.
19. HASANI, A., TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R. 2012. *Capacited Vehicle Routing Problem for Multi-Product Cross-Docking with Split Deliveries and Pickups*. In: Procedia-Social and Behavioral Sciences. roč. 62, 2012, s. 1360-1365.
20. MONTROYA-TORRES, J. R., FRANCO, J. L., ISAZA, S. N., LIMÉNEZ, H. F. & HERAZO-PADILLA N. 2015. *A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots*. In: Computers & Industrial Engineering. roč. 79, 2015, s. 115-129.

Kontaktné údaje

Ing. Dana Figurová

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: dana.figurova@euba.sk, zuzana.cickova@euba.sk

SPATIAL PANEL DATA MODELS AND ESTIMATION POSSIBILITIES IN R

PRIESTOROVÉ MODELY PANELOVÝCH DÁT A MOŽNOSTI ICH ODHADU V R

Andrea Furková

Abstract

The spatial panel data as a field of econometrics has exhibited a growing interest and methodological progress. The paper deals with the problem of spatial panel data models and their estimation possibilities in R studio. We implemented `spml` function from `splm` R package in order to point out to estimation possibilities of such specific econometric models. We described the `spml` implementation of the fixed (random) effects spatial lag (error) models based on the Munell's dataset and production function specification.

Keywords: *Spatial Panel Data Model, SAR model, SEM model, R package spml*

Abstrakt

Priestorové panelové údaje ako oblasť ekonometrie zaznamenávajú rastúci záujem a metodologický rozvoj. Príspevok sa zaoberá problematikou priestorových modelov panelových dát a ich odhadom v štúdiu R. Implementovali sme `spml` funkciu z balíka `splm` R, aby sme poukázali na možnosti odhadu takýchto špecifických ekonometrických modelov. Popísali sme `spml` implementáciu priestorového lag (error) modelu s fixným (náhodným) efektom na Munellovom dátovom súbore a Munellovej špecifikácii produkčnej funkcie.

Kľúčové slová: *Priestorové modely panelových dát, SAR model, SEM model, R balíček spml*

1 INTRODUCTION

The analysis of spatial panel data is a field of econometrics that has exhibited a growing interest and methodological progress. Standard panel data refers to a cross section of observations observed over several time periods. In spatial context, the observations are associated with particular position in space (spatial unit). We distinguish data observed at point locations (e.g. housing data, firm data) or areal data (e.g. states or regions). In both cases, the spatial structure between each pair of spatial units must be represented by means of a spatial weight matrix \mathbf{W} . Recent contributions regarding spatial panel data methodology include e.g. Debarsy and Ertur (2010), Elhorst (2010a), Elhorst et al. (2010), Pesaran and Tosetti (2011). However, empirical applications are sparse due to lack of readily available software. Some exceptions for procedures for estimating spatial panel data models include the MATLAB functions (Elhorst, 2011), the Stata code (Kapoor et al. 2007) or R package `splm` (Millo and Piras, 2012).

The aim of the paper is to present estimation possibilities of spatial panel data models in R package `splm`. Maximum likelihood (ML) implementation will be illustrated based on the spatial panel fixed effects (FE) and random effects (RE) models.

The study is organized as follows: section 2 deals with main theoretical issues concerning the spatial panel data methodology, section 3 presents ML estimations in R and the paper closes with concluding remarks.

2 BRIEF METHODOLOGICAL BACKGROUNDS - SPATIAL PANEL DATA MODELS

In this section we deal with selected methodological issues for spatial panel data models supposing, the reader is familiar with the issues of spatial econometric models for cross sectional data and their estimation as well. Let us denote i as is an index for the cross-sectional dimension (spatial units) and t as is an index for the time dimension. We assume balanced panels. Before formulating spatial panel data models, let us consider a simple pooled linear regression model without spatial interaction effects (Elhorst, 2010b; Furková, 2013):

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \mu_i + \varepsilon_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

where

y_{it} is an observation on the dependent variable at i and t ,

\mathbf{x}_{it} is an $1 \times K$ (K is a number of explanatory variables) row vector of observations on the independent variables,

$\boldsymbol{\beta}$ is a $K \times 1$ vector of unknown parameters,

$\varepsilon_{it} \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ is an error term for i and t ,

μ_i is a spatial specific effect.

Specific effects control for all time-invariant variables whose omission could bias the estimates in a typical cross-sectional study. If μ_i is assumed not to be correlated with observed \mathbf{x} 's then we can absorb it into the disturbance term what results to the model with random effects (RE). On the other hand, if μ_i is correlated with observed \mathbf{x} 's, then we cannot absorb it into disturbance term because it would induce correlation between errors and regressors. This results to the model with fixed effects (FE).

From spatial point of view, the model may contain a spatially lagged dependent variable or spatial autoregressive process in the error term, known as the spatial lag or spatial autoregressive model (SAR) and the spatial error model (SEM), respectively. Of course, interaction between spatial units can be specified even more complicated than it is specified in SAR or SEM models (see e.g. Anselin and Rey, 2014) but we will only deal with the estimation of SAR and SEM panel data extensions.

When we adopt fixed effect assumption concerning μ_i and we assume spatial lag dependence, then SAR model (for cross section version of this model see e.g. Anselin and Rey, 2014 or Chocholatá, 2017) can be extended for panel data:

$$y_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} y_{jt} + \mathbf{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \mu_i + \varepsilon_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

where λ is called the spatial autoregressive coefficient, μ_i is a fixed effect and w_{ij} is an element of a spatial weights of matrix \mathbf{W} describing the arrangement of spatial units (the problems of specification and construction of this matrix can be found e. g. in Anselin and Rey, 2014).

If μ_i is assumed not to be correlated with observed \mathbf{x} 's (random effect assumption) then we can absorb it into the disturbance term and resulting spatial SAR model for panel data can be written:

$$y_{it} = \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij} y_{jt} + \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$u_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$$

where λ , w_{ij} are defined before and μ_i is now a random effect.

The spatial error model, on the other hand, posits that the dependent variable depends on a set of observed local characteristics and that the error terms are correlated across space. SEM model (for cross section version of this model see e.g. Anselin and Rey, 2014) for panel data with fixed effects can be formulated as follows:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + \mu_i + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon_{jt} + \eta_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

where ε_{it} reflects the spatially autocorrelated error term and ρ is called the spatial autocorrelation coefficient, and remaining terms were defined before.

And finally SEM model for panel data with random effects is defined as follows:

$$y_{it} = \mathbf{x}_{it} \boldsymbol{\beta} + u_{it}$$

$$u_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$\varepsilon_{it} = \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} \varepsilon_{jt} + \eta_{it}$$

Two main approaches have been suggested in the literature to estimate models (cross sectional and panel data) that include spatial interaction effects, one is based on the maximum likelihood (ML) principle and the other on instrumental variables or generalized method of moments (IV/GMM) techniques. The problem of parameter estimation, specific effect selection and testing of presented spatial panel data models is very extensive and convenient for single studies (for more details see e.g. Anselin and Rey, 2014).

3 SPATIAL PANEL DATA MODELS – ESTIMATION PROCEDURES IN R

The R package `splm` (available from the Comprehensive R Archive Network at <https://cran.r-project.org/web/packages/splm/index.html>) provides consistent tool for estimating and testing various spatial panel data models. Package as usual, must be installed by command `install.packages(splm)` and then must be loaded at the beginning of each session by command `library(splm)`. Also, the `plm` package (Croissant and Millo, 2008) for non-spatial panel models must be also loaded. The working data set must contain the necessary pair of indices related to spatial units (the first column of the dataset) and time (the second column of the dataset). Of course, spatial positions of units must be also defined in the same way as for cross sectional spatial estimation. Two main functions which are involved in `splm` package are `spml` (for estimation spatial panel model by ML) and `spgm` (for estimation spatial panel model by GMM). In this section we will illustrate ML estimation functionalities using Munnell's built-in dataset (Munnell, 1990) on public capital productivity in 48 US states observed over 17 years (available in R in the `splm` or `Ecdat` package). A contiguity spatial weights matrix for the 48 US states is also included in the `splm` package (`usaww`). The data set can be loaded (e.g. from `plm` package) through the command:

```
R>data("Produc", package = "plm")
```

```
R>data("usaww")
```

Munnell (1990) specified a Cobb-Douglas production function that relates the gross social product (gsp) of a given state to the input of public capital (pcap), private capital (pc), labor (emp) and state unemployment rate (unemp) added to capture business cycle effects (Millo and Piras, 2012). The model formula is defined as follows:

```
R>fm <- log(gsp) ~ log(pcap) + log(pc) + log(emp) + unemp
```

ML estimation of both random and fixed effects spatial models are implemented within the same framework. The `spml` is the general wrapper function and the argument `model` controls the specification:

```
spml(formula, data, index=NULL, listw, listw2=listw, na.action,  
      model=c("within","random","pooling"), effect=c("individual","time","twoways"),  
      lag=FALSE, spatial.error=c("b","kkp","none"))
```

Arguments of the function are exactly described in `splm` package. In accordance with the syntax in `plm`, `model` takes up the value "within" for fixed effects, "random" for random effects, and "pooling" for no effects. The spatial structure is specified by combining the logical arguments `lag` (that, if true, adds a spatial autoregressive term in the dependent variable) and `spatial.error`. This last argument takes three possible values: "b" ("Baltagi"), "kkp" ("Kapoor, Kelejian and Prucha") and "none" for no spatial error correlation for the model specification in (5). It is necessary to mention that the spatial weighting matrix (usaww) is standardized and it must be transformed into weights list object (listw object) through "mat2listw" function from `spdep` package.

Next, we illustrate estimation of models defined in (2) -(5) based on the Munnell's dataset and model specification. The corresponding estimation results (see table 1 and 2) can be obtained through the following codes:

Fixed effects spatial lag (SAR) model (FE lag):

```
> spml(fm, data = Produc, listw = mat2listw(usaww), model="within", spatial.error="n", lag=TRUE)
```

Fixed effects spatial error (SEM) model (FE error):

```
> spml(fm, data = Produc, listw = mat2listw(usaww), model="within", spatial.error="b")
```

Random effects spatial lag (SAR) model (FE lag):

```
> spml(fm, data = Produc, listw = mat2listw(usaww), model="random", spatial.error="n", lag = TRUE)
```

Random effects spatial error (SEM) model (RE error):

```
> spml(fm, data = Produc, listw = mat2listw(usaww), model="random", spatial.error="b")
```


Table 1: Estimated coefficients and t statistics, spatial lag and spatial error models with fixed effects

		Coefficient estimate	t statistic
FE lag	λ	0.274689***	11.681
	log(pcap)	-0.0465819	-1.8309
	log(pc)	0.1874325***	8.1336
	log(emp)	0.6250902***	21.0437
	unemp	-0.0044816***	-5.1792
FE error	ρ	0.557401***	16.853
	log(pcap)	0.0051438	0.2057
	log(pc)	0.2053026***	8.12
	log(emp)	0.7822540***	28.1328
	unemp	-0.0022317*	-2.0839

Source: own calculations in R studio

Table 2: Estimated coefficients and t statistics, spatial lag and spatial error models with random effects.

		Coefficient estimate	t statistic
RE lag	λ	0.161615***	5.554
	constant	1.65814995***	11.0016
	log(pcap)	0.01294505	0.5190
	log(pc)	0.22555376***	10.4258
	log(emp)	0.67081075***	25.3892
	unemp	-0.00579716***	-6.5009
RE error	ρ	0.53888***	15.9855
	constant	2.3868275***	17.1246
	log(pcap)	0.0424138	1.9102
	log(pc)	0.2418396***	11.9196
	log(emp)	0.7423454***	30.4164
	unemp	-0.0034279**	-3.2295

Source: own calculations in R studio

4 CONCLUSION

In this paper we dealt with the problem of spatial panel data models and their estimation possibilities in R studio. We implemented `spml` function from `splm` R package in order to point out to estimation possibilities of such specific econometric models. We described the `spml` implementation of the fixed (random) effects spatial lag (error) models based on the Munell's dataset and production function specification. With regard to the scope of the paper we did not devote to `spgm` function for estimation spatial panel models by GMM nor other useful functions such spatial Hausman test or Lagrange Multiplier tests for spatial panel data.

Acknowledgements: This work was supported by the Grant Agency of Slovak Republic – VEGA grant no. 1/0248/17 „Analysis of regional disparities in the EU based on spatial econometric approaches“.

References

1. ANSELIN, L. – REY, S. J. 2014. *Modern Spatial Econometrics in Practice*. GeoDa Press LLC, Chicago.
2. CHOCHOLATÁ, M. 2017. Analýza mzdových disparít v okresoch Slovenska v období 2001-2015. In: AIESA – Building of Society based on Knowledge (17th International Scientific conference). [online] Bratislava: Letra Edu, pp. 316–326. Available at: https://fhi.euba.sk/www_write/files/veda-vyskum/konferencie/aiesa/AIESA_2017/AIESA_2017__cely_zbornik.pdf [Accessed 20 Feb. 2018].
3. CROISSANT, Y. – MILLO, G. 2008. Panel Data Econometrics in R: The plm Package. *Journal of Statistical Software*, 27(2), pp. 1-43.
4. DEBARSY, N. – ERTUR, C. 2010. Testing for Spatial Autocorrelation in a Fixed Effects Panel Data Model. *Regional Science and Urban Economics*, 40, pp. 453-470.
5. ELHORST, J.P. 2010a. Dynamic Panels with Endogenous Interactions Effects when T Is Small. *Regional Science and Urban Economics*, 40, pp. 272-282.
6. ELHORST, J.P. 2010b. Spatial Panel Data Models. In Fisher, M.M. –Getis, A. 2010. *Handbook of Applied Spatial Analysis, Software Tools, Methods and Applications*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. pp. 377-407.
7. ELHORST, J.P.– PIRAS, G. – ARBIA, G. 2010. Growth and Convergence in a Multi-Regional Model with Space-Time Dynamics. *Geographical Analysis*, 42, pp. 338-355.
8. ELHORST, J.P. 2011. MATLAB Software to Estimate Spatial Panels. *International Regional Science Review*, 37(3), pp. 1-22.
9. FURKOVÁ, A. 2013. Spatial dependence econometrics models, *Ekonomika a informatika*, 11(2), pp. 41-52.
10. KAPOOR, M. – KELEJIAN, H.H. – PRUCHA, I.R. 2007. Panel Data Model with Spatially Correlated Error Components. *Journal of Econometrics*, 140(1), pp. 97-130.
11. MILLO, G. – PIRAS, G. 2012. splm: Spatial Panel Data Models in R. *Journal of Statistical Software*, 47(1), pp. 1-38.
12. MUNNELL, A. 1990. Why Has Productivity Growth Declined? Productivity and Public Investment. *New England Economic Review*, 30, pp. 3-22.
13. PESARAN, H.M. – TOSETTI, E. 2011. Large Panels with Common Factors and Spatial Correlations. *Journal of Econometrics*, 161(2), 182 -202.
14. The R package splm. Available at: <https://cran.r-project.org/web/packages/splm/index.html> [Accessed 20 Jan. 2019].

Author's address

doc. Ing. Andrea Furková PhD.

University of Economics in Bratislava, Faculty of Economic Informatics, Department of Operations research and Econometrics

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Slovak Republic

Email: andrea.furkova@euba.sk

PREDIKCIA TVORBY RADU A OPTIMALIZÁCIA POČTU OTVORENÝCH POKLADNÍ

QUEUE PREDICTION AND CASHIERS COUNT OPTIMIZATION

Pavel Gežík

Abstrakt

Príspevok poskytuje základné predpoklady a princípy, ktoré môžu efektívne ovplyvniť plánovanie potreby otvorených pokladní v maloobchodných prevádzkach typu FMCG. Sú v ňom definované základné vzťahy riadenia radov a možné predikcie súvisiace s elimináciou radov pri pokladniach.

Príspevok popisuje stanovenie množstva prichádzajúcich zákazníkov k pokladniam a na základe tohto počtu výpočet potrebného množstva pokladní. Následne poskytuje nástroj na optimalizáciu počtu otvorených pokladní s ohľadom na obmedzenia spojené s procesmi obsluhy. Spomínané princípy sú popísané všeobecne s uvedením špecifik, ktoré je nutné zohľadniť pri ich možnej aplikácii.

***Kľúčové slová:** teória radov, predikcia návštev obchodu, optimálny počet pokladní*

Abstract

The paper provides the basic assumptions and principles that can have an effective influence on the planning of needs of open cashiers in FMCG-type stores. There are basic equations of queue management and possible predictions related to the elimination of queues at cash desks.

The paper describes the determination of the number of incoming customers to the cash desks. There is a calculation of the required amount of cash desks based on the number of incoming customers. There is also a tool to optimize the number of open cash desks with regard to the limitations associated with processes of services of cash desks. These principles are described in general with a set of the specificities which has to be taken into consideration in their application.

***Keywords:** Queue Theory, Prediction of Store Visits, Optimal Cashiers Count*

1 ÚVOD

Príspevok poskytuje základné predpoklady a princípy, ktoré môžu efektívne ovplyvniť plánovanie potreby otvorených pokladní a zároveň predpoklad tvorby radu v maloobchodných prevádzkach typu FMCG. Na trhu je množstvo maloobchodných prevádzok typu FMCG a väčšina z nich je súčasťou niektorého z nadnárodných reťazcov. Práve tento fakt ovplyvňuje množstvo aspektov v rámci prevádzky, ponúkaného sortimentu, cenotvorby, marketingu atd. V súvislosti s týmito aspektmi je náročné správne definovať konkurenčné výhody, resp. faktory, ktoré ovplyvnia zákazníka pre vyber danej prevádzky.

Jeden z kľúčových faktorov je ale čakanie zákazníka v rade pri pokladni, keďže v danom segmente je samoobslužný nákup s následnou úhradou nákupu pri pokladni najčastejší typ nákupu, typický pre väčšinu maloobchodov, a v princípe pre všetky reťazce. Z toho dôvodu je práve optimalizácia v tejto oblasti jedna z najdôležitejších úloh spojených s riadením prevádzky, ktorej riešenie môže poskytnúť istú konkurenčnú výhodu.

Reťazce majú často zavedené isté pravidlá, ktoré sú spojené s obsluhou zákazníkov. Tieto pravidlá, okrem iného, popisujú správanie sa pokladníka, ale aj správanie sa manažmentu, spojené s čakaním zákazníka pri pokladni. Pod tvorbou radu sa teda na účely tohto príspevku rozumie situácia, kedy sa pri pokladni nahromadí viac zákazníkov čakajúcich na úhradu ich nákup.

Jedno z týchto pravidiel hovorí o počte čakajúcich zákazníkov. Toto pravidlo je často spojené s vysokou prioritou a môže znieť napr. „v prípade viac ako troch čakajúcich otvor ďalšiu pokladňu“.

Príspevok rieši práve spomínaný princíp riadenia a možnosti ako splniť toto pravidlo bez vzniku dlhšieho radu, teda viac ako napr. spomínaných troch zákazníkov alebo bez otvorenia zbytočne veľkého množstva pokladní, nakoľko obe tieto situácie sú pre maloobchod nežiaduce.

2 PREDIKCIA TVORBY RADU

Základným nástrojom na zamedzenie čakania zákazníkov v rade je predikcia tvorby radu, resp. predikcia adekvátneho počtu otvorených pokladní. Samotná predikcia tvorby radu je výsledný výraz, nakoľko samotným cieľom tejto predikcie je určenie množstva zákazníkov prichádzajúcich k pokladniám v určitom čase.

2.1 Tvorba radu

Vo všeobecnosti je jednoduché definovať situáciu, kedy vzniká rad. Rad vzniká práve vtedy, ak k pokladniám prichádza väčšie množstvo zákazníkov ako je počet pokladní. Ak je množstvo prichádzajúcich zákazníkov rozpočítané na počet otvorených pokladní v danom čase je možné získať hodnotu priemerného počtu čakajúcich zákazníkov AQ , teda vzťah (1). AQ hovorí o tvorbe radu, resp. jeho hodnota môže byť porovnaná so stanovenou hranicou e (*edge*). Ak nie je hranica stanovená, tak všeobecne platí, že rad vzniká pri $AQ > 1$, teda $e = 1$.

$$C/CD = AQ \quad (1)$$

C - počet prichádzajúcich zákazníkov (*Customers*)

CD - počet otvorených pokladní v danom čase (*CashDesks*)

AQ - priemerný počet čakajúcich zákazníkov (*AverageQueue*)

Priemerný počet čakajúcich zákazníkov je hodnota, ktorá hovorí všeobecne o celej prevádzke. Táto hodnota ešte nemusí byť spájaná so spomínanými pravidlami, tie sa zväčša viažu až na hodnoty pre jednotlivé pokladne i , z celkového množstva pokladní na prevádzke n ($i = 1, 2, \dots, n$). Pre jednotlivé pokladne možno teda stanoviť Q_i - počet čakajúcich zákazníkov (*Queue*) vo vzťahu k stanovenej hranici. Napr. práve pravidlo, ktoré bolo vyššie uvedené ako príklad by mohlo vyzeráť: ak ľubovoľné $Q_i > 3$, kedy $i = 1, 2, \dots, n$, tak otvor ďalšiu pokladňu.

Dané pravidlo ale možno generalizovať za predpokladu, že zákazníci sa správajú racionálne a v prípade príchodu k pokladniám vždy obsadzujú pokladňu, ktorá ma najmenej čakajúcich zákazníkov. Vtedy možno vzťah (1) upraviť a získať tak vzťah, ktorý hovorí o vzniku radu ak:

$$C > eCD \quad (2)$$

Alebo vzťah, ktorý hovorí o tom, aký je potrebný počet otvorených pokladní v danom čase NCD (*NeedeCashDesks*):

$$NCD = C/e \quad (3)$$

2.2 Predikcia prichádzajúcich zákazníkov k pokladni

Z predchádzajúcich vzťahov je zrejme, že predikcia tvorby radu je v princípe predikcia prichádzajúcich zákazníkov k pokladniám v určitom čase a následnom určení potrebného množstva obslužných kanálov. Spôsoby, ako predpokladať, resp. robiť odhad prichádzajúcich zákazníkov sú rôzne a najmä dané špecifikami reťazca alebo daného typu maloobchodu, či špecifikami prevádzky. Najčastejšie sa ale tieto odhady robia krátkodobo na základe prichádzajúcich zákazníkov do maloobchodnej prevádzky.

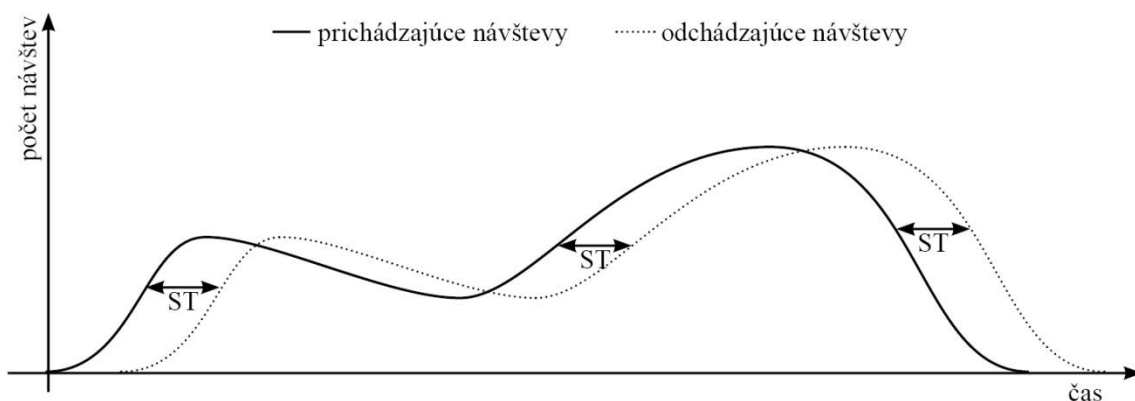
Práve v súvislosti s príchodom zákazníkov je nutné spomenúť počítanie zákazníkov, resp. vhodnejšie označenie je počítanie návštev. Počítanie je spojené s počítadlom, teda zariadením, ktoré umožňuje zistiť počet návštev prevádzky. Práve na základe informácie môže manažment prevádzky určiť potrebný počet otvorených pokladní.

Uvedený spôsob umožňuje jednoducho predikovať prichádzajúcich zákazníkov k pokladniám za predpokladu poznania času pobytu v prevádzke ST (*ShoppingTime*). Čas pobytu v prevádzke možno určiť ako čas medzi okamihom príchodu zákazníka do prevádzky a okamihom odchodu zákazníka z prevádzky. Ako bolo spomenuté, vhodnejšie je uvádzať ako entitu návštevu a tak je nutné definovať množstvo prichádzajúcich návštev InV (*IncomingVisits*) a množstvo odchádzajúcich návštev $OutV$ (*OutgoingVisits*). Informácie o InV ako aj o $OutV$ poskytuje počítadlo a po abstrakcii od špecifických faktoroch (zaľudnenosť prevádzky, sezónnosť alebo akcie v jednotlivých zónach, alebo v celej prevádzke, väčšie množstvo návštevníkov v zónach prechodu, resp. v uličkách, naplnenosť pokladní, rýchlosť jednotlivých prechodov pokladňami, atď.) možno určiť aj istú strednú hodnotu ST , resp. odhadnúť jeho hodnotu.

Počet prichádzajúcich návštev k pokladniám by následne vychádzal z rozkladu ST na čas prechodu prevádzkou (samotný nákup) BT (*BrowsingTime*) a čas čakania pri pokladni QT (*QueueTime*) a teda:

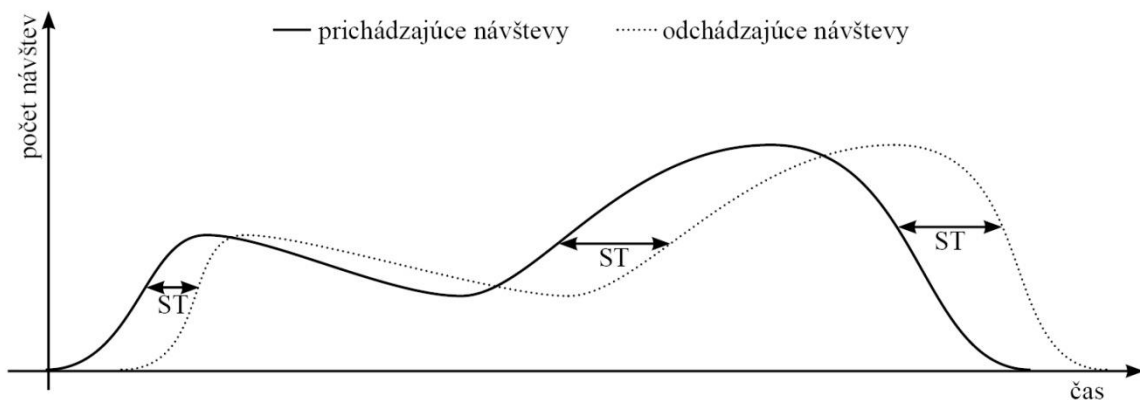
$$ST = BT + QT \quad (4)$$

Po vyjadrení času odchodu $OutV$ a následnom odrátaní QT by bolo možné určiť čas príchodu k pokladniám a následne počet prichádzajúcich návštevníkov k pokladniám. Ak by bol ST počas celého dňa rovnaký, čo je striktno teoretická situácia, tak by bolo relatívne jednoduché určiť počet prichádzajúcich návštevníkov k pokladniám. Danú situáciu popisuje obrázok 1.



Obrázok 1 – priebeh príchodu a odchodu návštevníkov s konštantným časom pobytu

V praxi je samozrejme ST rôzny v jednotlivých okamihoch dňa a to nielen v súvislosti s už spomenutými špecifickými faktormi ale aj v súvislosti s faktom, že na QT ako súčasť ST práve vplyva počet otvorených pokladní. A s touto skutočnosťou je spojená optimalizácia počtu pokladní. Uvedené ilustruje obrázok 2.



Obrázok 2 – priebeh príchodu a odchodu návštevníkov s rôznym časom pobytu

Vychádzajúc z uvedeného jednoduchého odhadu počtu prichádzajúcich návštev k pokladniam možno využívať aj zložitejšie metódy, ktoré budú využívať rovnaké princípy ako takýto jednoduchý odhad. Voľba jednotlivých metód je podmienená aj časom, kedy sa predikcia vykonáva a na základe toho možno predikcie rozdeliť na:

- **Predikcie v reálnom čase**, ktoré konštantne vypočítavajú hodnoty jednotlivých časov (BT , QT), porovnávajú ich s aktuálnymi počtami návštev (InV a $OutV$) a na základe aktuálnych hodnôt určuje predpokladaný počet prichádzajúcich návštev k pokladniam. Tieto hodnoty je vhodné dopĺňať o historické hodnoty jednotlivých premenných a porovnávať ich s nimi na spresnenie aktuálneho možného trendu. Dané hodnoty je vhodné odhadovať na základe simulačných modelov v spojení s identifikáciou trendov z historických dát.
- **Predikcie na nasledujúce obdobie**, ktoré predstavujú rôzne odhady na dlhšie obdobie (napr. na nasledujúci deň, týždeň, atď.) a sú využívané pri plánovaní procesov prevádzky. Tieto predikcie môžu vychádzať tiež zo simulácii ale vhodnejšie sú ekonometrické modely, resp. prognózy trendov (napr. ARIMA), kedy sa určujú prognózy jednotlivých premenných.

3 OPTIMALIZÁCIA POČTU OTVORENÝCH POKLADNÍ

Optimalizácia počtu otvorených pokladní vychádza najmä z predikcie, ktorá bola popísaná vyššie a teda sa predpokladá, že optimálne množstvo otvorených pokladní je také, ktoré na zamedzí tvorbe radu. Samozrejme, tak by tomu bolo, keby počet otvorených pokladní nepodliehal aj istým obmedzeniam. Ak by manažment mohol otvárať ľubovoľný počet pokladní presne tak ako mu budú prichádzať zákazníci, tak by sa rady netvorili a teda by sa mohlo zdať, že sa jedná o optimálny stav, nakoľko by nevznikali negatívne skutočnosti, ktoré rady vytvárajú.

Optimálny počet ale znamená, že sa manažment priblíži čo najviac k potrebnému (predikovanému) počtu pokladní s množstvom pokladníkov, ktoré ma k dispozícii, resp. za splnenia všetkých obmedzení, ktoré sú spojené s plánovaním procesov prevádzky súvisiacimi s obsluhou na pokladniach (napr. rovnomerné zaťaženie pokladníkov, rešpektovanie dĺžky zmien, prestávok, atď.). Na toto splnenie jednotlivých obmedzení s cieľom priblíženia sa predikovanému počtu môže byť využité matematické programovanie, konkrétne zmiešané bivalentné programovanie, kedy jednotlivé rozhodovacie premenné budú predstavovať neotvorené, ale potrebné pokladne stanovené jednotlivé časové úseky.

Úloha môže byť formulovaná: $\min \rightarrow f(x) = \sum_{t=1}^n x_t$ (5)

$$x_t = y_t - \sum_{i=1}^n z_{it}; \quad i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$$
$$\sum_{t=1}^T z_{it} \leq DT_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^n z_{it} \leq MCD_t; \quad t = 1, 2, \dots, T$$
$$z_{i,j} \in \langle 0,1 \rangle$$

kde:

x_t - počet neotvorených, ale potrebných pokladní v čase t z celkového počtu časových úsekov, počas ktorých je prevádzka otvorená T ($t = 1, 2, \dots, T$),

y_t - predikovaný počet potrebných pokladní v čase t ($t = 1, 2, \dots, T$),

z_{it} - pokladňa i z celkového počtu všetkých pokladní n ($i = 1, 2, \dots, n$), v čase t ($t = 1, 2, \dots, T$),

DT_i – maximálny počet časových úsekov, ktoré môže byť otvorená pokladňa i ($i = 1, 2, \dots, n$),

MCD_t - maximálny možný počet pokladní v čase t ($t = 1, 2, \dots, T$),

Optimálny stav dosiahne manažment prevádzky ak otvorí pokladne v časových úsekoch, kedy premenná z_{it} dosahuje hodnotu 1 (ak je hodnota 0, ponechá pokladňu zavretú).

4 ZÁVER

Príspevok ponúka len teoretické princípy, ktoré je nutné doplniť o v príspevku spomínané špecifiká a následne aplikovať aby boli adekvátne zrejme možnosti využitia. Hlavný cieľ je ale poskytnúť riešenie pre dva základné pohľady na riadenie procesov spojených s obsluhou zákazníkov pri pokladniach a to pohľad s ohľadom na zákazníka, ktorý chce byť obslužený bez čakania a pohľad manažmentu, ktorý je nútený minimalizovať prestoje pokladní (čas, kedy pri pokladni nie je zákazník).

Problematika optimalizácie počtu a potreby pokladní je spojená s množstvom faktorov a špecifik jednotlivých prevádzok, ktoré majú ale spoločné princípy, ktorých zapracovanie do riadenia procesov na prevádzke môže priniesť kvantifikovateľné prínosy ale aj prínosy spojené s kvalitou obsluhy a dobrým menom prevádzky.

Použitá literatúra

1. FAŠIANG, T.: *Komunikačné stratégie maloobchodu*. Trnava: Univerzita sv. Cyrila a Metoda v Trnave, Fakulta masmediálnej komunikácie, 2012. 117 s. ISBN 978-80-8105-466-2.

Kontaktné údaje

Ing. Pavel Gežík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: pavel.gezik@euba.sk

NIEKTORÉ PROBLÉMY RIEŠENIA KOOPERATÍVNEJ HRY S NEKONŠTANTNÝM SÚČTOM PLATIEB

SOME PROBLEMS IN THE THEORY OF COOPERATIVE SOLUTIONS WITH NONCONSTANT THE SUM OF PAYMENTS

Marián Goga¹

Abstrakt

V príspevku sa metodologicky zameriame na tie situácie, ktoré obsahujú neantagonistický konflikt. To sú také situácie, v ktorých záujmy hráčov nie sú v priamom protiklade. Výhra jedného účastníka nie je prehrou iného účastníka hry. Tento typ kooperatívnej hry metodologicky uvedieme na dvoch modeloch rozhodovania v podmienkach nedokonalkej konkurencie. Pri kooperatívnych konfliktoch predpokladáme, že hráči majú možnosť uzavrieť záväznú dohodu a môžu vzájomne spolupracovať. Cieľom príspevku je metodologicky ukázať možnosti analýzy kooperatívnych hier a možnosti ich využitia pri modelovaní a riešení konfliktných rozhodovacích situácií a vytváraní koalícií.

Kľúčové slová: teória hier, kooperatívna hra, koalícia, stratégia, koaličná štruktúra

Abstract

In the article, which forms the first part of the research in this area is methodologically we focus on those situations which contain non antagonistic conflict. It is such a situation, in which the interests of the players are not in direct contradiction. Win one participant is not losing another participant of game. This type of cooperative game models of decision-making under conditions of imperfect competition, methodologically will. In cooperative conflict suggests that the players have the opportunity to conclude a binding agreement and can cooperate with each other. The aim of the paper is to show the possibilities of the analysis of the cooperative games and their methodological use for modelling and solving of conflict situations and decision-making create coalitions.

Keywords: game theory, cooperative game, coalition, strategy, the coalition structure

1 ÚVOD

Základným cieľom analýzy v teórii hier je vybrať z množiny rôznych postupov čo najlepšiu možnosť (optimálnu) z hľadiska hry, teda určiť, ktorá stratégia je najlepšou odpoveďou na stratégiu zvolenú ostatnými účastníkmi hry. Existuje mnoho variantov hier, ktoré sú obsahom tejto vednej disciplíny. V niektorých hrách jeden účastník vždy vyhrá a druhý prehrá, v iných

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17 *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska.*

môžu vyhrať obaja. V príspevku, ktorý tvorí časť výskumu v tejto oblasti sa metodologicky zameriame na tie situácie, ktoré obsahujú neantagonistický konflikt. To sú také situácie, v ktorých záujmy hráčov nie sú v priamom protiklade. Výhra jedného účastníka nie je prehrou iného účastníka hry. Tento typ kooperatívnej hry metodologicky uvedieme na dvoch modeloch rozhodovania v podmienkach nedokonalnej konkurencie. Pri kooperatívnych konfliktoch predpokladáme, že hráči majú možnosť uzavrieť záväznú dohodu a môžu vzájomne spolupracovať. To urobia vtedy, keď je pre nich spolupráca výhodná, teda pokiaľ majú obaja väčšiu výhru, ako keby nespolupracovali. Potreba kooperovať na trhu môže byť odlišná pre rôzne firmy, avšak ich hlavnými cieľmi je zvyčajne rozširovanie trhov, získanie konkurenčnej výhody alebo poznatkov v podobe know-how. Na základe analýzy tej-ktorej konfliktnej situácie a pochopenia správania sa jednotlivých účastníkov na trhu ponúka teória hier hráčom návod, akú najlepšiu stratégiu majú zvoliť. Nie vždy je však možné určiť „najlepšiu“ stratégiu, v takom prípade teória hier aspoň poradí vybrať „lepšiu“ stratégiu.

Za kooperáciu môžeme označiť spoluprácu firiem, ktoré si ponechávajú plnú hospodársku i právnu samostatnosť a združujú sa kvôli spoločnému vykonávaniu určitých operácií a kvôli dosiahnutiu spoločných cieľov. Toto združovanie (konzorcium, kartel, koncern, holding) sa realizuje na zmluvnom základe. Spolupráca podnikov sa realizuje častokrát na globálnej úrovni, kedy podniky využívajú medzinárodné prostredie na realizáciu svojej konkurenčnej výhody. Pri vstupe na zahraničné trhy sú bežné podnikateľské činnosti ovplyvňované napríklad jazykovými rozdielmi, rozdielmi v správaní spotrebiteľov, rôznymi cenovými, platobnými, menovými podmienkami a pod.

Cieľom prvej časti príspevku je metodologicky ukázať možnosti analýzy kooperatívnych hier s nekonštantným súčtom platieb a možnosti ich využitia pri modelovaní a riešení konfliktných rozhodovacích situácií a vytváraní koalícií. V druhej časti príspevku uvedieme dva ilustratívne modely riešenia konfliktných situácií v kooperatívnej teórii so zameraním na nekonštantný súčet platieb.

2 MODELOVANIE KOALIČNÝCH VZŤAHOV V TEÓRII HIER

Predpokladáme situáciu, v ktorej môže n hráčov (účastníkov) vzájomne spolupracovať a uzatvárať záväzné dohody o voľbe stratégií a o rozdeľovaní spoločne nadobudnutých výhier. V praxi existujú také situácie, v ktorých spolupráca hráčov v porovnaní so samostatným postupom zabezpečí hráčom výhodnejšie výsledky.

Množina hráčov $P = (1, 2, \dots, n)$, ktorí v konfliktnej situácii postupujú spoločne pri voľbe stratégií na základe uzatvorenej dohody sa nazýva *koalícia*.

Ak hráči v koalícii, ktorí v dôsledku spoločného postupu získavajú, vyplácajú (prerozdeľujú) ostatným hráčom, ktorí týmto spoločným postupom strácajú, nejaké kompenzácie, ide o *koalície s prenosnými platbami*.

Ak nedochádza v koalícii k prerozdeľovaniu platieb medzi hráčmi, ide o *koalíciu s neprenosnými platbami*.

Teraz uvedieme niekoľko dôležitých definícií, ktoré matematicky objasňujú koalíčné chápanie vzťahov v niektorých štruktúrach.

Definícia 1: Súbor neprázdnych podmnožín $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$, pre ktorý platí $\bigcup_{j=1}^k B_j = P$

nazývame *koaličnou štruktúrou*. Ak pre koaličnú štruktúru B platí $B_i \cap B_j = \emptyset$ (prázdna množina), pre všetky $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \dots, k$, potom ju nazývame *disjunktnou koaličnou štruktúrou* (každý hráč takejto koaličnej štruktúry je členom práve jednej koalície).

V opačnom prípade ide o *nedisjunktnú koaličnú štruktúru* (jeden hráč môže byť súčasne členom viacerých koalícií).²

Poznamenávame, že koalícia sa označuje zapísaním jej členov do zložených zátvoriek. Koaličná štruktúra sa označuje tak, že sa jednotlivé koalície zapisujú do okrúhlych zátvoriek. Napríklad, v hre šiestich hráčov označuje $\{2, 3, 5\}$ koalíciu druhého, tretieho a piateho hráča a zápis $(\{2, 3, 5\}, \{1, 4, 6\})$ označuje disjunktnú koaličnú štruktúru, ktorá sa skladá z dvoch koalícií: druhý, tretí a piaty hráč spolupracujú v jednej koalícii a prvý, štvrtý a šiesty hráč v druhej koalícii. V kooperatívnej hre n hráčov je možné vytvoriť $2^n - 1$ rôznych neprázdnych koalícií.

Definícia 2: Nech je daná kooperatívna hra n hráčov v normálnom tvare: $[P = \{1, 2, \dots, n\}; X_1, X_2, \dots, X_n; M_1, M_2, \dots, M_n; K = (K_1, K_2, \dots, K_k)]$,

kde:

P je množina hráčov,

X_i – množina stratégií hráča P_i ,

M_i – funkcia platieb hráča P_i ,

K – množina prípustných koaličných štruktúr K_1, K_2, \dots, K_k .

Potom:

- ak množinu prípustných koaličných štruktúr tvorí väčší počet koaličných štruktúr, ide o *hru s premenlivou koaličnou štruktúrou*,
- ak sa množina prípustných koaličných štruktúr skladá iba z jedného prvku, ide o *hru s fixovanou koaličnou štruktúrou*.

Kooperatívne hry n hráčov sa podľa prípustných koaličných štruktúr členia na tri skupiny:

1. Prvú skupinu tvoria hry, v ktorých sú prípustné všetky koaličné štruktúry s podmienkou, že ani jeden hráč nesmie byť súčasne v dvoch alebo viacerých koalíciách. Tieto hry sa nazývajú hrami s *voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou*.
2. V druhej skupine sú hry, v ktorých sú prípustné všetky koaličné štruktúry, aj také, v ktorých jeden hráč môže byť súčasne v niekoľkých koalíciách. Tieto hry sa nazývajú hrami s *voľnou nedisjunktnou koaličnou štruktúrou*.
3. Ak sa množina prípustných koaličných štruktúr K skladá z jediného prvku (hráča), ide o *hru s fixovanou koaličnou štruktúrou*. Takéto hry analyzuje *nekooperatívna teória hier*, pričom jediná prípustná koaličná štruktúra má tvar $(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$. Ak hráči môžu tvoriť väčší počet koaličných štruktúr, ide o *hru s premenlivou koaličnou štruktúrou*.

² DRESHER, M. – SHAPLEY, L. S. – TUCKER, A. W. (ed.) (1964). *Advances in Game Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1964.

Z uvedených skupín je v kooperatívnej teórii hier najlepšie teoreticky rozpracovaná skupina hier s voľnou disjunktnou koalíčnou štruktúrou a s prenosnými platbami.³ Priebeh takýchto hier spočíva v tom, že hráči vytvoria nejakú koalíčnú štruktúru, členovia každej koalície sa dohodnú na voľbe spoločnej stratégie, ktorá im zabezpečí čo možno najvyššiu úhrnnú platbu koalície, a získanú platbu si po skončení hry medzi sebou rozdelia podľa vopred uzatvorenej záväznej dohody.

V kooperatívnej teórii hier sa na analytické účely často využíva hra v tvare *charakteristickej funkcie*.

Definícia 3: Nech je daná množina hráčov $P = (1, 2, \dots, n)$. *Charakteristickou funkciou* kooperatívnej hry sa nazýva reálna funkcia v definovaná pre všetky podmnožiny $S \subset P$, ktorá má tieto vlastnosti:

a) $v(\emptyset) = 0$,

b) $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$,

pre všetky disjunktné dvojice $S_1, S_2 \subset P$. Dvojica (P, v) sa nazýva *kooperatívna hra n hráčov v tvare charakteristickej funkcie*.

Poznamenávame, že každá funkcia definovaná na všetkých podmnožinách nejakej množiny, ktorá vyhovuje podmienke b) sa nazýva *superaditívna*. Ak vo vzťahu b) platí rovnosť, potom ide o *aditívnu funkciu*.

Podstata charakteristickej funkcie sa dá interpretovať takto: každej koalícii $S \subset P$ priraduje charakteristická funkcia veličinu $v(S)$, ktorá vyjadruje „silu“ koalície S . Táto veličina sa tiež nazýva *hodnota* koalície S . Vlastnosť a) z definície 3 vyjadruje, že hráči sa nikdy nezriekajú časti svojich platieb. Z vlastnosti b) vyplýva, že hodnota koalície, ktorá vznikne zjednotením dvoch disjunktných koalícií nemôže byť menšia, ako je súčet hodnôt týchto dvoch koalícií, konajúcich samostatne („silu“ celku nie je menšia ako „silu“ jeho častí).⁴

Definícia 4: Kooperatívnu hru (P, v) nazývame *nepodstatnou*, ak pre ľubovoľnú dvojicu disjunktných koalícií $S_1, S_2 \subset P$ platí: $v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2)$. Ak tento vzťah neplatí, hovoríme o *podstatnej* hre.

Kooperatívna teória hier analyzuje predovšetkým *podstatné hry*, pretože *nepodstatné hry* sú hry s fixovanou koalíčnou štruktúrou, v ktorých sú prípustné len jednočlenné koalície.

Definícia 5: Kooperatívnu hru (P, v) nazývame *hrou s konštantným súčtom platieb*, ak pre každé $S \subset P$ platí: $v(S) + v(P - S) = v(P)$.

V kooperatívnej hre s konštantným súčtom platieb sa úhrnný súčet platieb pri rozdelení všetkých hráčov do dvoch disjunktných koalícií nemení. Každá hra dvoch hráčov s konštantným súčtom platieb je *nepodstatná* a každá *nepodstatná* hra je *hrou s konštantným súčtom platieb*.

Poznamenávame, že v kooperatívnej hre s *nekonštantným súčtom platieb* sa skutočné správanie hráčov odlišuje od predpokladu, ktorý je základom na odvodenie *charakteristickej funkcie* z normálneho tvaru hry. *Maximalizácia úhrnnej platby koalície $(P - S)$* už nie je v tomto prípade

³ AUMANN, R. J. (1989). *Lectures on Game Theory*. Boulder: Westview Press, 1989.

⁴ CHOBOT, M. (1973). *Teória hier*. Bratislava: ES VŠE, 1973, s. 277.

totožná s minimalizáciou úhrnnej platby koalície S. Charakteristická funkcia preto už nevyjadruje správanie hráčov, ktoré by sa mohlo považovať za úplne rozumné. Aj vtedy však hodnota koalície poskytuje určitú informáciu o „sile“ koalície a jej postavení v konfliktnej situácii.

V praxi sa dá charakteristická funkcia odvodiť aj v modeloch, ktoré nemajú na prvý pohľad charakter modelu hry.⁵ Ďalej ukážeme dva ilustratívne modely, v ktorých je ekonomický problém sformulovaný ako kooperatívna hra.

3 ILUSTRATÍVNE MODELY RIEŠENIA KOOPERATÍVNEJ HRY S NEKONŠTANTNÝM SÚČTOM PLATIEB

V literatúre o teórii hier sa dá nájsť viacero prístupov k riešeniu kooperatívnych hier s prenosnou výhrou a nekonštantným súčtom platieb. Vo väčšine prípadov sa odčleňuje problematika konštrukcie charakteristickej funkcie a voľby stratégií od problematiky tvorby koalícií a prerozdelenia výhry.

V tejto časti príspevku uvidíme dva ilustratívne modely riešenia konfliktných situácií v kooperatívnej teórii. Najskôr však ukážeme, do akých výsledkov vyústi kooperatívna hra, ak sa jej účastníci správajú racionálne.

Uviedli sme už, že charakteristická funkcia poskytuje informáciu o stratégiách, ktoré sú pre každú koalíciu optimálne a o úhrnných platbách jednotlivých koalícií.

Modelovaním konfliktnej situácie pomocou kooperatívnej hry v tvare charakteristickej funkcie je výsledok určený *dvoma podmienkami* – vytvorením koaličnej štruktúry rozdelením hráčov do jednotlivých koalícií a rozdelením platieb hráčov vo vnútri každej koalície. V tejto súvislosti vzniká otázka: aké vlastnosti majú spĺňať koaličné štruktúry a im zodpovedajúce rozdelenia platieb, ktoré sa dajú v určitom zmysle považovať za „prijateľné“ riešenia kooperatívnej hry? Teoretická analýza ponúka *dve všeobecné požiadavky*:

1. „Prijateľné“ riešenia (výsledky) by mali vyhovovať určitým zdôvodniteľným axiómam racionality.
2. Každé z „prijateľných“ riešení (výsledkov) by malo byť stabilné z hľadiska toho, že neexistujú dostatočné motívy na jeho zmenu.

Ilustratívny model č. 1:⁶

Je daná konečná kooperatívna hra troch hráčov P_1, P_2, P_3 v normálnom tvare. Každý hráč má dve čisté stratégie, t. j. $j_1 = 1, 2$, $j_2 = 1, 2$ a $j_3 = 1, 2$. Platby hráčov pri rôznych výsledkoch sú uvedené v tabuľke č. 1:

⁵ BIERMAN, H. S. – FERNANDEZ, L. (2005). *Game Theory with Economic Applications*. Reading: Addison–Wesley, 2005; DUTTA, P. K. (1999). *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge: MIT Press, 1999.

⁶ CHOBOT, M. – TURNOVEC, F. – ULAŠIN, V. (1991). *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Alfa, 1991.

Tabuľka č. 1

j_1, j_2, j_3	M_1	M_2	M_3	$M_1 + M_2 + M_3$
1, 1, 1	2	1	3	6
1, 1, 2	1	3	1	5
1, 2, 1	3	2	1	6
1, 2, 2	-1	1	4	4
2, 1, 1	0	2	-1	1
2, 1, 2	3	0	2	5
2, 2, 1	1	3	-2	2
2, 2, 2	2	-2	3	3

V tejto kooperatívnej hre sú prípustné všetky možné koalície hráčov, ktorých matice platieb majú tvar: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Urobíme analýzu optimálnych zmiešaných stratégií pre všetky koalície hráčov.

a) Matica platieb „koalície“ $\{1\}$ má takýto tvar:

	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1	2	1	3	-1
2	0	3	1	2

Riadky v tabuľke zodpovedajú čistým stratégiám (j_1) hráča P_1 a stĺpce zodpovedajú spoločným čistým stratégiám (j_2, j_3) proti koalícii hráča P_2 a P_3 . Napríklad, prvok v prvom riadku matice platieb a stĺpci (2, 1) zodpovedá situácii, v ktorej hráč P_1 zvolí prvú čistú stratégiu a koalícia hráčov P_2, P_3 zvolí spoločnú čistú stratégiu (j_2, j_3) = (2, 1), t. j. hráč P_2 zvolí čistú stratégiu $j_2 = 2$ a hráč P_3 zvolí čistú stratégiu $j_3 = 1$. Tento prvok sa rovná veličine $M_1(1, 2, 1) = 3$.

Vypočítame optimálnu zmiešanú stratégiu maximalizujúceho hráča P_1 v maticovej hre s touto maticou platieb. Optimálnou zmiešanou stratégiou je vektor $\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$ a hodnota hry je $v = \frac{4}{7}$.

Z vlastností riešenia maticovej hry je zrejmé, že hodnotou hry je stredná hodnota platby E hráča P_1 , ktorú si maximalizujúci hráč môže zabezpečiť voľbou optimálnej zmiešanej stratégie bez ohľadu na správanie proti koalícii $\{2, 3\}$. Hodnotu „koalície“ – charakteristickej funkcie $\{1\}$ predstavuje veličina $v(\{1\}) = \frac{4}{7}$.

b) Matica platieb „koalície“ $\{2\}$ má tvar:

	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1	1	3	2	0
2	2	1	3	-2

Podobným spôsobom nájdeme optimálnu zmiešanú stratégiu maximalizujúceho hráča P_2 , t. j. vektor (1, 0) a hodnotu charakteristickej funkcie $v(\{2\}) = 0$.

c) Matica platieb „koalície“ $\{3\}$ má tvar:

	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1	3	1	-1	-2
2	1	4	2	3

Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča P_3 je vektor $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ a hodnota charakteristickej funkcie je $v(\{3\}) = \frac{7}{5}$.

d) Ďalej vytvoríme matice platieb dvojčlenných koalícií a odvodíme príslušné hodnoty charakteristickej funkcie.

Matica platieb koalície $\{1, 2\}$ má tvar:

	1	2
(1, 1)	$2 + 1 = 3$	$1 + 3 = 4$
(1, 2)	$3 + 2 = 5$	$-1 + 1 = 0$
(2, 1)	$0 + 2 = 2$	$3 + 0 = 3$
(2, 2)	$1 + 3 = 4$	$2 - 2 = 0$

Riadky tejto matice platieb zodpovedajú spoločným čistým stratégiám (j_1, j_2) koalície $\{1, 2\}$ hráčov P_1 a P_2 . Stĺpce zodpovedajú čistým stratégiám hráča P_3 . Prvky matice platieb zodpovedajú úhrnným platbám koalície $\{1, 2\}$. Napríklad, prvok v treťom riadku a prvom stĺpci matice zodpovedá situácii, v ktorej koalícia $\{1, 2\}$ zvolí spoločnú čistú stratégiu (2, 1) a hráč P_3 zvolí prvú čistú stratégiu, t. j. tento prvok sa rovná súčtu $M_1(2, 1, 1) + M_2(2, 1, 1) = 2$ v zadanej matici platieb.

Koalícia $\{1, 2\}$ vystupuje ako maximalizujúci hráč v maticovej hre s uvedenou maticou platieb.

Optimálnou zmiešanou stratégiou tejto koalície je vektor $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$ a hodnotou hry je $v = \frac{10}{3}$.

Koalícia $\{1, 2\}$ môže voľbou tejto optimálnej zmiešanej stratégie zabezpečiť, že bez ohľadu na správanie hráča P_3 nie je stredná hodnota úhrnnej platby v jej prospech nižšia ako $\frac{10}{3}$. Hodnotu

koalície predstavuje veličina $v(\{1, 2\}) = \frac{10}{3}$.

e) Podobne zostavíme matice platieb a nájdeme príslušné hodnoty charakteristickej funkcie pre ďalšie dvojčlenné koalície.

Matica platieb koalície $\{1, 3\}$ má tvar:

	1	2
(1, 1)	$2 + 3 = 5$	$3 + 1 = 4$
(1, 2)	$1 + 1 = 2$	$-1 + 4 = 3$
(2, 1)	$0 - 1 = -1$	$1 - 2 = -1$
(2, 2)	$3 + 2 = 5$	$2 + 3 = 5$

Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča (koalície $\{1, 3\}$) je vektor (0, 0, 0, 1) a hodnota charakteristickej funkcie je $v(\{1, 3\}) = 5$.

f) Matica platieb koalície $\{2, 3\}$ má tvar:

	1	2
(1, 1)	$1 + 3 = 4$	$2 - 1 = 1$
(1, 2)	$3 + 1 = 4$	$0 + 2 = 2$
(2, 1)	$2 + 1 = 3$	$3 - 2 = 1$
(2, 2)	$1 + 4 = 5$	$-2 + 3 = 1$

Optimálnou zmiešanou stratégiou maximalizujúceho hráča (koalície $\{2, 3\}$) je vektor $(0, 1, 0, 0)$ a hodnota charakteristickej funkcie je $v(\{2, 3\}) = 2$.

g) Hodnotu charakteristickej funkcie pre koalíciu všetkých hráčov $\{1, 2, 3\}$ získame ako maximum súčtu platieb všetkých hráčov, t. j. maximálny prvok v poslednom stĺpci zadanej matice platieb. Vidíme, že maximálna hodnota je $v(\{1, 2, 3\}) = 6$, pričom zodpovedajúce trojice čistých stratégií hráčov, pri ktorých sa dosahuje táto platba sú $(j_1, j_2, j_3) = (1, 1, 1)$ a $(j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 1)$.

Charakteristická funkcia v tejto analyzovanej hre má tvar:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(\{1\}) = \frac{4}{7}, \quad v(\{2\}) = 0, \quad v(\{3\}) = \frac{7}{5},$$

$$v(\{1, 2\}) = \frac{10}{3}, \quad v(\{1, 3\}) = 5, \quad v(\{2, 3\}) = 2,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 6.$$

Z modelu vyplýva, že ide o *podstatnú hru s nekonštantným súčtom* platieb.

Ilustratívny model č. 2:⁷

Predpokladajme, že tri firmy F_1, F_2 a F_3 rokujú o vzájomnej spolupráci. Každá firma vyrába určitý výrobok, pričom jeho výrobné podmienky charakterizuje nejaký technologický vektor (spotreba zdrojov na jednotku produkcie). Každá firma vyrába z určitých zdrojov – predpokladáme, že sa používajú dva zdroje Z_1 a Z_2 . Tieto zdroje sú mobilné, čiže každá firma môže poskytnúť časť svojich zdrojov inej firme, resp. môže použiť vo výrobe zdroje od iných firiem.

Výrobné podmienky každej firmy charakterizuje jeden technologický vektor, teda uvažujeme o troch technologických vektorech T_1, T_2 a T_3 . Vektory objemu zdrojov, ktorými disponujú firmy sú označené ako B_1, B_2 a B_3 . Ďalej sú známe ceny, resp. ziskové koeficienty jednotlivých výrobkov c_1, c_2 a c_3 . Snahou každej firmy je maximalizovať vlastné výnosy.

Číselné údaje o technologických vektorech, vektorech objemu zdrojov a cenách (ziskových koeficientoch) sú uvedené v tabuľke č. 2:

⁷ GOGA, M. (2013). *Teória hier*. Bratislava: Iura Edition, 2013, 144 s. ISBN 978-80-8078-613-7.

Tabuľka č. 2

Zdroje	Spotreba zdrojov			Objemy zdrojov		
	T_1	T_2	T_3	B_1	B_2	B_3
Z_1	2	5	3	8	10	12
Z_2	4	3	5	12	6	25
Ceny	4	5	3			

Objem produkcie i – tej firmy označíme x_i , pre $i = 1, 2, 3$.

a) Predpokladáme, že každá firma sa rozhoduje samostatne, potom môžeme riešiť jednoduchú úlohu lineárneho programovania:

Firma F_1 : $\max f_1 = 4x_1$

za podmienok $2x_1 \leq 8$

$$4x_1 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0$$

Optimálne riešenie je: $x_1 = 3$ a $f_1 = 12$.

Firma F_2 : $\max f_2 = 5x_2$

za podmienok $5x_2 \leq 10$

$$3x_2 \leq 6$$

$$x_2 \geq 0$$

Optimálne riešenie je: $x_2 = 2$ a $f_2 = 10$.

Firma F_3 : $\max f_3 = 3x_3$

za podmienok $3x_3 \leq 12$

$$5x_3 \leq 25$$

$$x_3 \geq 0$$

Optimálne riešenie je: $x_3 = 4$ a $f_3 = 12$.

b) Predpokladajme, že firma F_1 a F_2 vytvoria koalíciu $\{1, 2\}$, čiže spoločne využívajú zdroje. Optimálne riešenie nájdeme z úlohy lineárneho programovania:

$$\max f_{12} = 4x_1 + 5x_2$$

za podmienok $2x_1 + 5x_2 \leq 18$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

pričom pravá strana v sústave ohraňení predstavuje spoločný objem zdrojov F_1 a F_2 , t. j. $B_1 + B_2$ ($8 + 10 = 18$ a $12 + 6 = 18$).

Optimálne riešenie je: $x_1 = \frac{18}{7}$, $x_2 = \frac{18}{7}$ a $f_{12} = 23,14$.

c) Predpokladajme, že sa vytvorí koalícia $\{1, 3\}$, potom úloha lineárneho programovania má tvar:

$$\begin{aligned} \max f_{13} &= 4x_1 + 3x_3 \\ \text{za podmienok } 2x_1 + 3x_3 &\leq 20 \end{aligned}$$

$$4x_1 + 5x_3 \leq 37$$

$$x_1, x_3 \geq 0$$

Optimálne riešenie je: $x_1 = \frac{11}{2}$, $x_3 = 3$, $f_{13} = 31$.

d) Predpokladajme, že sa vytvorí koalícia $\{2, 3\}$, potom úloha lineárneho programovania má tvar:

$$\begin{aligned} \max f_{23} &= 5x_2 + 3x_3 \\ \text{za podmienok } 5x_2 + 3x_3 &\leq 22 \end{aligned}$$

$$3x_2 + 5x_3 \leq 31$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

Optimálne riešenie je: $x_2 = \frac{5,2}{5}$, $x_3 = 5,6$, $f_{23} = 22$.

e) Predpokladajme, že všetky tri firmy spolupracujú v jednej koalícii $\{1, 2, 3\}$. Potom úloha lineárneho programovania má tvar:

$$\begin{aligned} \max f_{123} &= 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{za podmienok } 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 30 \end{aligned}$$

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 43$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Optimálne riešenie je: $x_1 = 8,9$, $x_2 = 15$, $x_3 = 0$, $f_{123} = 110,6$.

Z vypočítaných optimálnych riešení pre jednotlivé koalície vieme určiť charakteristickú funkciu: $v(\emptyset) = 0$, $v(\{1\}) = 12$, $v(\{2\}) = 10$, $v(\{3\}) = 12$,

$$v(\{1, 2\}) = 23,14, \quad v(\{1, 3\}) = 31, \quad v(\{2, 3\}) = 22,$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 110,6.$$

V modeli sme dostali **podstatnú kooperatívnu hru s nekonštantným súčtom** platieb.

4 ZÁVER

V tomto príspevku uvedené metodologické problémy a prístupy riešenia kooperatívnych hier nevyčerpávajú všetky existujúce možnosti. V literatúre o teórii hier existujú rôzne koncepcie, ktorými sa riešia kooperatívne hry. Napríklad koncepcia *K-jadra hry* vychádzajúca z podobných princípov ako *vyjednávacia množina*, ktorej autormi sú *M. Davis* a *M. B.*

Maschler.⁸ V rámci tejto koncepcie autori upúšťajú od požiadavky koalíciej racionality a hľadajú stabilné výsledky medzi individuálne racionálnymi formáciami platieb. Táto koncepcia je prijateľná pre kooperatívne hry troch hráčov. Pri vyššom počte hráčov vznikajú problémy posudzovania „vyjednávacej pozície“ väčších skupín hráčov.

Inú koncepciu predstavuje všeobecné riešenie kooperatívnej hry n hráčov s prenosnými platbami pomocou N -jadra, ktorú navrhol *D. Schmeidler*.⁹ Koncepcia vychádza z predpokladu, že všetci účastníci kooperatívnej hry majú záujem dohodnúť sa o individuálne a kolektívne racionálne rozdelení (t. j. imputácii), ktoré vyvolá v istom zmysle „najmenšie námietky“ potenciálnych koalícií. Ide teda o *kompromisné riešenie* v rámci spolupráce všetkých hráčov.

Spracovanie aplikačných problémov spojených s riešením kooperatívnej hry n hráčov s prenosnými platbami a platbami s nekonštantným súčtom, ako aj tvorbou koalícií je náplňou ďalšej etapy výskumu autora príspevku.

Použitá literatúra

1. AUMANN, R. J. (1989). *Lectures on Game Theory*. Boulder: Westview Press, 1989.
2. AUMANN, R. J. – MASCHLER, M. B. (1964). *The Bargaining Set for Cooperative Games*. In: DRESHER, M. – SHAPLEY, L. S. – TUCKER, A. W. (ed): *Advances in Game Theory*. (Annals of Mathematical Studies), No. 52, Princeton: Princeton University Press, 1964, s. 443 – 476.
3. BIERMAN, H. S. – FERNANDEZ, L. (2005). *Game Theory with Economic Applications*. Reading: Addison – Wesley, 2005.
4. DAVIS, M. – MASCHLER, M. B. (1965). The Kernel of a Cooperative Game. In: *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 3, No. 12, 1965, s. 223 – 259.
5. DRESHER, M. – SHAPLEY, L. S. – TUCKER, A. W. (ed.) (1964). *Advances in Game Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1964.
6. DUTTA, P. K. (1999). *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge: MIT Press, 1999.
7. GILLIES, D. B. (1959). Solutions to General Non–Zero–Sum Games. In: TUCKER, A. W. – LUCE, R. D. (ed.): *Contributions to the Theory of Games*, (Annals of Mathematics Studies), Vol. IV, No. 40, s. 47 – 85. Princeton: Princeton University Press, 1959.
8. GOGA, M. (2013). *Teória hier*. Bratislava: Iura Edition, 2013, 144 s. ISBN 978-80-8078-613-7.
9. CHOBOT, M. (1973). *Teória hier*. Bratislava: ES VŠE, 1973.
10. CHOBOT, M. – TURNOVEC, F. – ULAŠIN, V. (1991). *Teória hier a rozhodovania*. Bratislava: Alfa, 1991.
11. NEUMANN, J. v. – MORGENSTERN, O. (1944, 2004). *Theory of Games and Economic Behavior*. Woodstock: Princeton University Press, 1944, 2004 (1953).
12. SHAPLEY, L. S. (1953). A Value for n -Person Games. In: KUHN, H. W. – TUCKER, A. W. (ed.): *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II. (Annals of Mathematics Studies 28). Princeton: Princeton University Press, 1953, s. 307 – 317.

⁸ DAVIS, M. – MASCHLER, M. B. (1965). The Kernel of a Cooperative Game. In: *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 3, No. 12, 1965, s. 223 – 259; CHOBOT, M. (1973). *Teória hier*. Bratislava: ES VŠE, 1973, s. 308 – 313.

⁹ SCHMEIDLER, D. (1969). The Nucleolus of a Characteristic Function Game. In: *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, No. 6, 1969, s. 1163 – 1170.

13. SCHMEIDLER, D. (1969). The Nucleolus of a Characteristic Function Game. In: *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 17, No. 6, 1969, s. 1163 – 1170.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Marián Goga, CSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 824

e-mail: goga@euba.sk

EXAKTNÝ PRÍSTUP NA NÁVRH MINIMÁLNEJ SIETE PRE PREVÁDZKU A NABÍJANIE PARCIÁLNYCH TROLEJBUSOV

EXACT APPROACH TO DESIGN OF MINIMAL OVERHEAD WIRES NETWORK FOR THE BATTERY ASSISTED TROLLEYBUS

Dobroslav Grygar

Abstrakt

Technológia parciálnych trolejbusov prepája výhody klasických trolejbusov so slobodou pohybu autobusov. Môžeme predpokladať, že záujem o nasadzovanie tejto technológie bude mať stúpajúci trend. Z týchto dôvodov sa v našom výskume zameriavame na návrh matematického modelu na tvorbu a minimálnej siete trolejových vedení, ktoré by boli dostatočné na nabíjanie a prevádzku parciálnych trolejbusov. Momentálne neexistujú komplexné spôsoby na pokrytie miest takýmto vedením.

KLúčové slová: parciálny trolejbus, trolejové vedenie, elektro-mobilita, hromadná doprava, matematický model

Abstract

The technology of battery assisted trolleybus combines benefits of classical trolleybus with freedom movement of standard buses. It can be assumed that we will experience growing trend of implementation of battery assisted trolleybuses in cities. Therefore, in our research we are trying to develop the mathematical model to create a minimal network of overhead wires that would be sufficient for deployment and operation such battery assisted trolleybuses. Currently, there are no complex ways how to deploy such technology to cities.

Keywords: battery assisted trolleybus, overhead wire network, electro-mobility, public transport, mathematical model

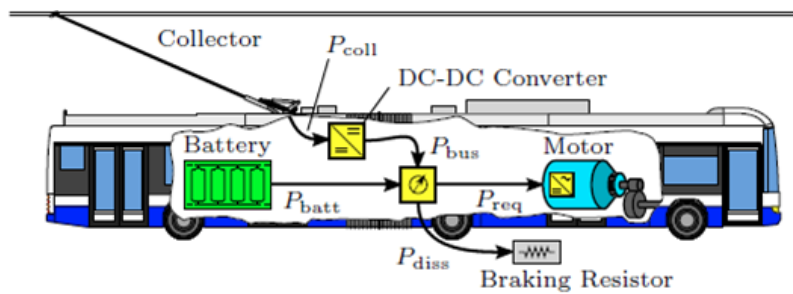
1 ÚVOD

Znečistenie ovzdušia sa na celom svete stáva čoraz väčším problémom. Počas parížskej konferencie, ktorá sa konala v decembri 2015, bola prijatá historická dohoda až 195 krajín na vytvorení akčného plánu, ktorého cieľom je obmedziť nárast globálneho otepľovania hlboko pod 2 stupne Celzia. Aby to bolo možné dosiahnuť, je nutné zníženie emisií oxidu uhličitého naprieč všetkými odvetvami ekonomiky [1].

Dobrou správou je, že sa ľudia snažia postupne prechádzať na využívanie menej znečisťujúcich zdrojov energií. Pokiaľ sa jedná o hromadnú dopravu, tak sme zvyknutí na to, že boli elektrifikované mnohé dôležité železničné trasy. Vo väčších mestách sa používajú trolejbusy, či električky. Nastáva ale otázka, ako vyriešiť menej vyťažené trasy, kde nie je rentabilné vybudovať kompletnú trolejovú sieť.

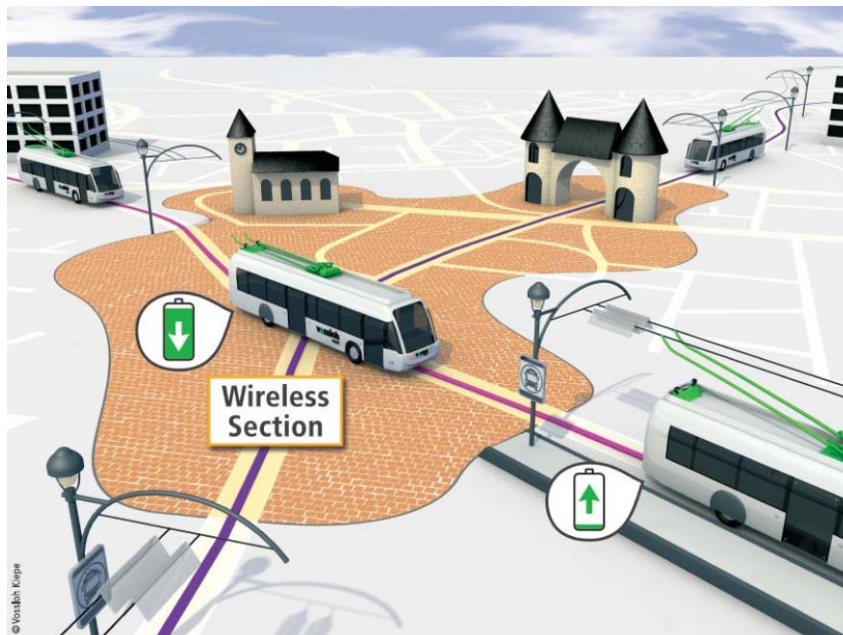
V predchádzajúcom výskume [2] sme vytvorili detailnú analýzu limitujúcich faktorov, ktoré ovplyvňujú prevádzku a nasadenie parciálnych trolejbusov. Zdá sa, že tento typ vozidiel je

najvýhodnejší zo súčasne dostupných alternatív. Tento fakt je dokázaný niekoľkými ekonomickými štúdiami [3]. Ukážka komponentov takéhoto vozidla sa nachádza na obrázku 1.



Obrázok 1. Ilustrácia kľúčových komponentov asistovaného trolejbusu [4]

V súčasnom výskume sa zameriavame na tvorbu minimálnej siete trolejových vedení, ktorá by bola dostatočná pre nasadenie a prevádzku parciálnych trolejbusov. V ideálnom prípade by sme mali byť schopní pokryť všetky linky vo zvolenej oblasti. Základná myšlienka infraštruktúry parciálnych trolejbusov je na obrázku 2.



Obrázok 2. Základná myšlienka infraštruktúry pre parciálne trolejbusy [© Vossloh Kiepe] [3]

2 SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY

Po ekonomickej stránke sú parciálne trolejbusy považované za najvýhodnejšie z dostupných elektro-vozidiel pre hromadnú dopravu osôb. Viaceré štúdie sú založené na pozorovaní reálneho nasadenia tejto technológie [4], [5] a [6].

Trakčné batérie sú dôležitou časťou parciálnych trolejbusov. V Poľsko meste Gdynia boli takéto trolejbusy úspešne nasadené. Autori z tamojšej univerzity publikovali cenné výskumy na základe pozorovaní [3] a [7]. Životnosť batérie je citlivá na výber správnej nabíjacej stratégie. Zároveň rýchlosť nabíjania batérie nie je lineárna. Takže stav nabitia batérie by sa mal držať medzi 20% až 80%. Tieto informácie boli publikované v niekoľkých článkoch [8] a [9].

Používanie klimatizácie, prípadne vykurovania spôsobuje zvýšenú spotrebu elektrickej energie [10]. Simulačná štúdia [11] analyzovala spotrebu energie elektro-vozidiel v hromadnej doprave. Profil trasy takisto ovplyvňuje spotrebu energie [12] a [13].

Pripájanie a odpájanie vozidla od trolejovej siete je automatické a nepredlžuje trvanie trasy. Podmienkou je ale, aby vozidlo stálo a tento proces vykonávalo tam, kde je vybudované pomocné zariadenie. Tieto zariadenia sa budujú na vybraných zastávkach [2].

V súčasnej dobe sú preskúvané možnosti vybudovania indukčného vedenia v cestách [14], [15] a [16]. Budovanie a údržba trolejového vedenia je ale jednoduchšia. Preto spomínané práce slúžia na inšpiráciu, ale ich zistenia je nutné upraviť.

3 DEFINOVANIE ÚLOHY

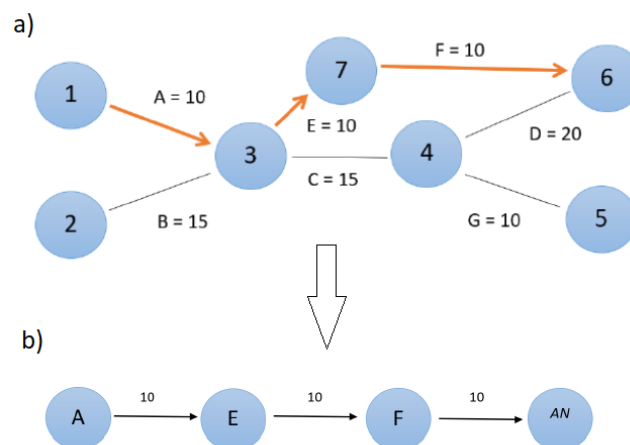
Ako bolo vyššie spomenuté, v našom výskume sa snažíme vytvoriť minimálnu sieť trolejového vedenia, ktorá by bola dostatočná na prevádzku parciálnych trolejbusov. Výstavby a údržba takéhoto vedenia tvorí hlavú časť nákladov celého systému. Preto sa ich snažíme minimalizovať [2].

Táto úloha môže byť rozdelená do niekoľkých častí. Ako prvé potrebujeme zozbierať a upraviť dáta z reálnej prevádzky hromadnej dopravy. Druhou časťou je riešenie úlohy na rôznych vstupných dátach. Ďalej je nutné nájsť hranice riešiteľnosti úloh. Toto bude spravené pomocou solvera Xpress IVE.

4 KONVERZIA DÁT

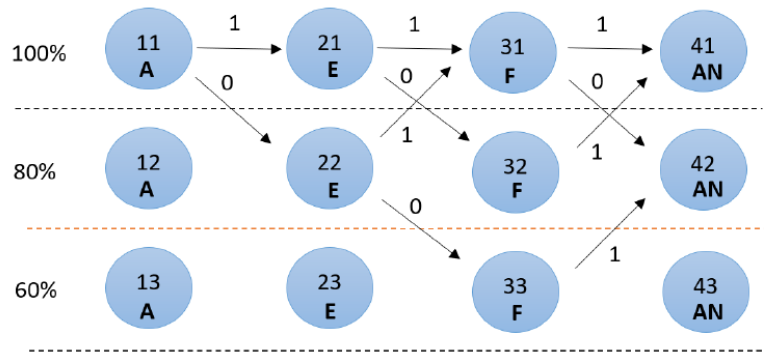
Konverzia dát predstavuje dôležitú časť riešenia danej úlohy. Ako prvé potrebujeme zvoliť linky na optimalizáciu. Každá linka prechádza cez určitý počet zastávok. Tieto zastávky sú vrcholy grafu cestnej siete. Iba používané segmenty trasy medzi zastávkami sú zvolené ako hrany grafu cestnej siete.

Pre účely nášho výskumu potrebujeme úlohu riešiť ako lokačnú na hranách. Teda vyberáme hrany, na ktorých bude vybudované trolejové vedenie. Pri klasickej lokačnej úlohe sú ale vyberané vrcholy. Preto potrebujeme transformovať našu sieť do inej podoby. Pre každú z liniek konvertujeme graf cestnej siete na graf úsekov cesty. Teda konvertujeme hrany na vrcholy a opačne. Táto transformácia je ilustrovaná na obrázku 3.



Obrázok 3. Vytváranie grafu úsekov cesty z grafu cestnej siete. a) Příklad grafu cestnej siete. Linka autobusu (zo zastávkami 1, 3, 7, 6) je označená oranžovou farbou. Vrcholy sú zastávky a hrany úseky. B) Graf úsekov cesty, vytvorený pre linku. Vrcholy sú segmenty trasy.

Stav nabitia vozidla reprezentuje aktuálnu zostávajúcu energiu v batérii a %. Parciálny trolejbus začína svoju trasu so zvolenou počiatočnou úrovňou. Vývoj hladiny navitia sa počíta podľa toho, či je, alebo nie je vybudované vedenie na segmente, ktorým prešiel. V ďalšej fáze potrebujeme vytvoriť graf nabitia vozidla pre každú z liniek. Ukážka takéhoto grafu sa nachádza na obrázku 4.



Obrázok 4. Graf stavu nabitia vozidla. Riadky reprezentujú jednotlivé úrovne nabitia a vrcholy sú segmenty trasy. Prechody medzi stavmi sú vyznačené 1 ak sa vozidlo nabija a 0 ak nie.

5 MATEMATICKÝ MODEL

Rozhodovacie premenné:

$x_{r,i} \in \{0,1\}$ – Výber alternatívy spôsobu prechodu i trasy r v grafe G_{soc}

$y_s \in \{0,1\}$ – či je (nie je) úsek s na grafe cestnej siete pokrytý vedením

Vstupné dáta a konštanty:

$w_{r,s,i} \in \{0,1\}$ – či je pre trasu r na úseku s pre alternatívu i vybudované vedenie

a_r - počet alternatív prechodu pre trasu r

c_s – cena vybudovania vedenia na segmente s

n – počet segmentov

m – počet liniek

Účelová funkcia (1) má za úlohu minimalizovať celkovú cenu výstavby vedení.

$$\min \sum_{s=1}^n c_s \cdot y_s \quad (1)$$

Podmienka (2) pre výber práve jednej kombinácie pre všetky trasy.

$$\sum_{i=1}^{a(r)} x_{r,i} = 1 \quad \text{for } r = 1..m \quad (2)$$

Podmienka výstavby (3) zaručuje že vedenie bude vybudované, ak aspoň jedna z trás vyžaduje jeho využitie.

$$M \cdot y_s \geq \sum_{r=1}^{n_r} \sum_{i=1}^{a(r)} x_{r,i} \cdot w_{r,s,i} \quad \text{for } s = 1..n \quad (3)$$

Obligatórne podmienky (4), (5):

$$y_s \in \{0, 1\} \quad \text{for } s = 1..n \quad (4)$$

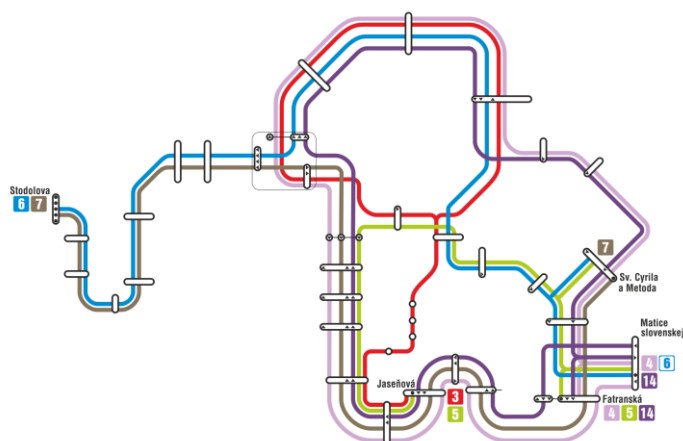
$$x_{r,i} \in \{0, 1\} \quad \text{for } r = 1..m ; \quad i = 1..a(r) \quad (5)$$

6 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Súčasný testovanie bolo zamerané na overenie funkčnosti modelu. Pre tento účel boli použité reálne dáta z Dopravného podniku v Žiline. Vybrali sme niekoľko liniek. Zgrupovanie segmentov trás a iné optimalizácie vstupných dát neboli potrebné. Dáta boli konvertované pomocou spomínaného postupu. Maximálny počet zastávok na linke bol 21. Testovanie dáta sa nachádzajú v tabuľke 1. Použité trasy sú tiež vyznačené na obrázku 5.

Číslo linky	počet zastávok	začiatková	konečná
14	20	Matrice slovenskej	Fatranská
3	21	Jaseňová	Jaseňová
4	21	Fatranská	Matrice slovenskej
5	15	Fatranská	Jaseňová
50	21	Železničná stanica	Stodolova
6	18	Stodolova	Matrice slovenskej
7	12	Stodolova	Sv. Cyrila a Metoda

Tabuľka 1. Použité linky v Žiline.



Obrázok 5. Schematický náčrt vybraných liniek v Žiline.

Zároveň sme sa snažili nájsť maximálnu dĺžku linky, ktorá môže byť spracovaná. Zároveň bolo potrebné, aby sa zvolené linky čiastočne prekryvali. Tieto spoločné úseky je rovnako vidieť na obrázku 5. Najdlhšie z trás boli na začiatku skrátené a úseky sme postupne pridávali. Nakoniec sme narazili na limity, či sa už jednalo o časové, alebo spôsobené nedostatkom operačnej pamäte. Výsledky týchto testov sa nachádzajú v tabuľke 2.

Počet liniek	Manimálna dĺžka	Čas konverzie dát (s)	Čas optimalizácie (s)
7	15	1,30	8,20
7	18	5,10	142,40
7	19	9,10	525,60
7	20	16,80	134568,40
7	21	out off memory	

Tabuľka 2. Časy konverzie dát a optimalizácie

Z týchto výsledkov vyplýva, že je možné exaktne riešiť také, úlohy, ktoré majú maximálne 21 segmentov, čo je dostatok pre väčšinu testovaných liniek.

7 ZÁVER

Téma výskumu efektívnych algoritmov pre návrh siete nabíjacej infraštruktúry elektro vozidiel vo verejnej doprave je zaujímavá. Výsledky výskumu môžu pomôcť pri návrhu riešení, ktoré budú nasadené v reálnej prevádzke. Predpokladáme, že záujem o nasadzovanie parciálnych trolejbusov vo verejnej doprave bude narastať.

Tento článok predstavil prístup na konverziu dát, a matematický model. Na základe týchto poznatkov je možné riešiť úlohu pre individuálne linky a skupiny liniek. Testovaním sme dokázali že, postup je správny.

Do budúca by sme sa chceli venovať práve optimalizácií vzostupných dát. Do úvahy prichádza zlučovanie za sebou nasledujúcich segmentov. Toto pomôže znížiť počet možností výstavby a aj zaručí, že výstavba bude logickejšia. V ideálnom prípade by sme mali byť do budúca schopní pokrývať turnusy vozidiel. Výsledky, ktoré takýmto spôsobom získame bude potrebné overiť pomocou simulačného softvéru.

Pod'akovanie

Radi by sme poďakovali VEGA 1/0689/19 „Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest“ a VEGA1/0089/19 „Vývoj metodiky pre analýzu prevádzkových dát za účelom podpory rozhodovania v oblasti riadenia obslužných systémov pre elektrické vozidlá“ za podporu výskumných aktivít.

Použitá literatúra

1. XYLIA, Maria; LEDUC, Sylvain; PATRIZIO, Piera; KRAXNER, Florian; SILVEIRA, Semida. Locating charging infrastructure for electric buses in Stockholm. Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2017, roč. 78, s. 183–200. ISSN 0968-090X.
2. Grygar D., Kohani M., Stefun R., Drgona P.: Analysis of limiting factors of battery assisted trolleybuses, 3rd ed. 13th International Scientific Conference on Sustainable,

- Modern and Safe Transport (TRANSCOM 2019), High Tatras, Novy Smokovec, Grand Hotel Bellevue, Slovak Republic, May 29-31, 2019.
3. Bartłomiejczyk M.: Practical application of in motion charging: Trolleybuses service on bus lines, 2017 18th International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE), Kouty nad Desnou, 2017, pp. 1-6. n
 4. Ritter A., Elbert P., Onder Ch.: Energy Saving Potential of a Battery-Assisted Fleet of Trolley Buses. 2016 In: IFAC-PapersOnLine, Volume 49, Issue 11, 2016, Pages 377-384, ISSN 2405-8963
 5. Bergk F., Biemann K., Lambrecht U., Pütz R., Landinger H.: Potential of In-Motion Charging Buses for the Electrification of Urban Bus Lines Journal of Earth Sciences and Geotechnical Engineering, vol.6, no. 4, 2016, 347-362, ISSN: 1792-9040 (print version), 1792-9660 (online) Scienpress Ltd, 2016
 6. Rice D., Söderholm T., Mortensen O.: Teknisk Forprosjekt – Trolleybus Extension to Laksevag, 2017
 7. Bartłomiejczyk M., Stýskala V., Hrbac R., Połom M. Trolleybus with traction batteries for autonomous running. 2013.
 8. Montoya A., Gu´eret Ch., Mendoza J., Villegas J.: The electric vehicle routing problem with nonlinear charging function. Transportation Research Part B: Methodological. 2017.
 9. Rogge, M.; Wollny, S.; Sauer, D.U.: Fast Charging Battery Buses for the Electrification of Urban Public Transport—A Feasibility Study Focusing on Charging Infrastructure and Energy Storage Requirements. Energies 2015.
 10. Kunith A., Mendelevitch R., Goehlich D.: Electrification of a city bus network - An optimization model for cost-effective placing of charging infrastructure and battery sizing of fast-charging electric bus systems. 2017. International Journal of Sustainable Transportation, 11:10, 707-720, DOI: 10.1080/15568318.2017.1310962
 11. Gohlich D., Kunith A., Ly T.: Technology assessment of an electric urban bus system for Berlin. 2014 WIT Transactions on the Built Environment. 138. 10.2495/UT140121.
 12. Jenkins J.: A closer look at energy consumption in EVs, 2018. CHARGED, Electric Vehicles Magazine, under Features, Tech Features.
 13. Yang S.C., Li M., Lin Y., Tang T.Q., Electric vehicle’s electricity consumption on a road with different slope, 2014. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 402, Pages 41-48, ISSN 0378-4371,
 14. Hwang I., Jang Y., J., Ko Y., D., Lee M. S.: System Optimization for Dynamic Wireless Charging Electric Vehicles Operating in a Multiple-Route Environment. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, vol. 19, no. 6, pp. 1709-1726, June 2018.
 15. Chen Z., He F., Yin Y.: Optimal deployment of charging lanes for electric vehicles in transportation networks. Transportation Research Part B: Methodological, Volume 91, 2016, Pages 344-365, ISSN 0191-2615,
 16. Ushijima-Mwesigwa H., Khan Z., Chowdhury M. A., Safro I.: Optimal Installation for Electric Vehicle Wireless Charging Lanes 2017-2018.

Kontaktné údaje

Ing. Dobroslav Grygar
 Katedra matematických metód a operačnej analýzy
 Fakulta riadenia a informatiky
 Žilinská univerzita
 email: dobroslav.grygar@fri.uniza.sk

RYCHLÉ PROHLEDÁVÁNÍ OKOLÍ ŘEŠENÍ P-LOKAČNÍ ÚLOHY PRO ZOBECNĚNOU DISUTILITU

SMART SEARCH OF NEIGHBORHOOD OF P-LOCATION PROBLEM SOLUTION FOR GENERALIZED DISUTILITY

Jaroslav Janáček

Abstrakt

Prohledávání okolí současného řešení a výpočet hodnoty účelové funkce patří mezi nejčastěji prováděné operace v heuristických metodách pro řešení kombinatorických úloh. Na rychlosti těchto operací závisí obvykle úspěch nebo neúspěch heuristiky. Tento příspěvek se zabývá způsobem urychlení výpočtu účelové funkce při prohledávání okolí současného řešení p -lokační úlohy se zobecněným min-sum kritériem.

KLúčové slová: p-lokační úloha, rychlé prohledávání okolí, zobecněná disutilita

Abstract

The search across neighborhood of a current solution and computation of the objective function value belong to the most frequently performed operations in heuristic methods used for solution of combinatorial problems. Success or fail of the used heuristic depends on speed of the operations. This contribution deals with a way of acceleration of generalized min-sum objective function computation in the case, when a neighborhood of a current solution of the p -location problem is inspected.

Keywords: p-location problem, smart neighbourhood search, generalized disutility

1 ÚVOD

Pojem p -lokační úloha označuje celou třídu úloh, v kterých je třeba v množině m možných umístění rozmístit p objektů – obslužných středisek tak, aby hodnota účelové funkce byla co nejmenší. Hodnota účelové funkce v p -lokačních úlohách obvykle závisí na vzájemných vzdálenostech obslužných středisek a obsluhovaných objektů. Nejznámější představitelé p -lokačních úloh jsou úloha o p -mediánech anebo úloha o p -centrech, které se často vyskytují v praktických aplikacích, jako je třeba navrhování systému rychlé zdravotní pomoci anebo jiných veřejných obslužných systémů [1], [2],[5] a [8]. Zmíněné úlohy lze modelovat jako úlohy 0-1 lineárního programování a je možné je řešit exaktními metodami matematického programování založenými obvykle na principu větví a hranic [3], [6] a [7]. Nevýhodou těchto exaktních přístupů založených na částečném prozkoumání stromu prohledávání, je nepredikovatelnost doby výpočtu, která při řešení rozsáhlých úloh může přesáhnout jakýkoliv akceptovatelný limit. Tuto nevýhodu je možno odstranit za cenu ztráty exaktní optimality použitím heuristik, respektive metaheuristik jako řešícího nástroje. Efektivita heuristik měřená rozdílem hodnoty účelové funkce počátečního a hodnoty účelové funkce řešení získaného po zadané době výpočtu je obvykle závislá na počtu prozkoumaných řešení a ten je úměrný rychlosti s jakou jsou prováděné nejčastěji se vyskytující operace. Protože nejčastěji prováděnou operací v heuristických metodách je výpočet hodnoty účelové funkce zkoumaného řešení, zaměříme svou pozornost na zefektivnění této operace. Studovat budeme případ úlohy a váženém p -mediánu se zobecněnou disutilitou uživatele danou váženými vzdálenostmi od prvního až r -tého nejbližšího obslužného střediska. Ukážeme jak výrazně

urychlit výpočet účelové funkce všech řešení ze zkoumaného okolí zadaného řešení. Zkoumané okolí je tvořeno všemi řešeními p -lokační úlohy, která mají Hammingovu vzdálenost od zadaného řešení rovnou dvěma.

2 FORMULACE ZOBECNĚNÉ MIN-SUM P-LOKAČNÍ ÚLOHY A ALGORITMU ZKOUMÁNÍ OKOLÍ

Obecnou p -lokační úlohu na množině možných umístění indexovaných čísly $1, \dots, m$ je možno formulovat pomocí binárních proměnných $y_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, \dots, m$. Proměnná y_i hodnotou 1 modeluje rozhodnutí, že v místě i bude umístěno obslužné středisko. Pro obecnou účelovou funkci f je možno p -lokační úlohu formulovat ve tvaru (1).

$$\min\{f(\mathbf{y}): y_i \in \{0,1\} \text{ pro } i=1,\dots,m, \sum_{i=1}^m y_i = p\} \quad (1)$$

Hodnotu zobecněné min-sum účelové funkce pro řešení určené p umístěními středisky definujeme pro n uvažovaných uživatelů, kde každý uživatel $j = 1, \dots, n$ je spojen s velikostí b_j svého požadavku. Vzdálenost mezi možným umístěním střediska i a uživatelem j označujeme symbolem d_{ij} . Hodnota zobecněné min-sum účelové funkce $f(\mathbf{y})$ je popsána výrazem (2).

$$f(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=1}^r q_k \min_k \{d_{ij} : i = 1, \dots, m, y_i = 1\} \quad (2)$$

Ve výrazu (2) označení \min_k značí k -tou minimální hodnotu z těch, které patří do množiny hodnot specifikované v složených závorkách. Koeficienty q_k jsou úměrné pravděpodobnostem, že uživatel bude obsluhován z k -tého nejbližšího střediska.

Množina všech přípustných řešení p -lokační úlohy je částí množiny všech vrcholů m -rozměrné hyperkrychle, kde pro měření vzdálenosti mezi řešeními můžeme uplatnit Hamingovu vzdálenost definovanou pro dvě řešení \mathbf{x} a \mathbf{y} p -lokační úlohy výrazem (3).

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \quad (3)$$

Pro dvě různá řešení p -lokační úlohy platí, že jejich vzdálenost musí být sudá a musí ležet v celočíselném oboru čísel od 2 do $2p$.

Nejmenší okolí současného řešení \mathbf{y}^c p -lokační úlohy budou tvořit všechna přípustná řešení, jejichž vzdálenost od řešení \mathbf{y}^c je rovna dvěma. Úplné prozkoumání okolí daného řešení \mathbf{y}^c včetně určení nejlepšího řešení nacházejícího se v tomto okolí je možno provést následujícím algoritmem, v kterém je řešení \mathbf{y}^c reprezentované seznamem sY umístěných středisek daného řešení a dále komplementárním seznamem sC těch možných umístění, v kterých dané řešení žádné středisko neumístilo. Jinými slovy, v poli sY na pozicích $0, \dots, p-1$ jsou indexy i pro které platí $y_i^c = 1$ a v poli sC na pozicích $0, \dots, m-p+$ jsou indexy, pro které $y_i^c = 0$.

Algoritmus prozkoumání okolí

0. Vyčíslí $f(\mathbf{y}^c)$, vytvoř z \mathbf{y}^c seznamy sY a sC , inicializuj $F^b = +\infty$, $i^b = -1$ a $t^b = -1$.

1. Pro $i = 0, \dots, p-1$ prováděj krok 2 a po zpracování všech hodnot jdi na krok 4.

2. Pro $t = 0, \dots, m-p-1$ prováděj krok 3.

3. V seznamech sY a sC vyměň prvky $sY(i)$ a $sC(t)$, konstruuji pracovní řešení y^w a vyčíslí $f(y^w)$. Pokud $F^b > f(y^w)$, tak aktualizuj $F^b = f(y^w)$, $i^b = i$ a $t^b = t$. Proveď zpětnou výměnu $sY(i)$ a $sC(t)$.

4. Nejlepší řešení v okolí y^c má hodnotu F^b a je určené seznamy sY a sC po výměně prvků $sY(i^b)$ a $sC(t^b)$.

Z uvedeného je zřejmé, že prozkoumání okolí si vyžádá $p^*(m-p)$ vyčíslení účelové funkce f popsané výrazem (2) pro pracovní řešení y^w .

V následující sekci ukážeme implementaci výpočtu $f(y^w)$, která výpočetní náročnost výrazu (2) významným způsobem redukuje.

3 REDUKOVANÝ VÝPOČET ÚČELOVÉ FUNKCE PŘI ZKOUMÁNÍ OKOLÍ

Standardní algoritmus výpočtu účelové funkce $f(y)$ definované výrazem (2) pro řešení y reprezentované seznamy sY a sC následuje:

0. Inicializuj $s=0$.

1. Pro $j = 1, \dots, n$ prováděj krok 2.

2. Inicializuj $minr(k) + \infty$ pro $k = 1, \dots, r$ a proveď krok 3.

3. Projdi seznam sY pro $i = 0, \dots, p-1$ a definuj $minr(k)$ pro $k = 1, \dots, r$ jako index, pro který je hodnota $d_{sY(minr(j)), j}$ k -tá nejmenší z hodnot $d_{sY(i), j}$ pro $i = 0, \dots, p-1$. Aktualizuj $s = s + b_j(q_1 d_{sY(minr(1)), j} + \dots + q_r d_{sY(minr(r)), j})$.

Složitost standardního algoritmu výpočtu hodnoty účelové funkce bude $O(n.p.r)$, protože pro každého uživatele j je třeba probrat p středisek a každé porovnat s indexy dočasně uloženými v poli $minr$.

Algoritmus redukovaného výpočtu je založen na tom, že při prvním výpočtu účelové funkce pro řešení y^c je vypočítáno $minr(k)$ pro každého uživatele j a obsah toho pole je uschován v struktuře $Minr(k, j)$ pro $k = 1, \dots, r$ a $j = 1, \dots, n$. Tato struktura je použita pro redukovaný výpočet účelové funkce v kroku 3 algoritmu prozkoumávání okolí, kde se zkoumané řešení y^w od současného řešení y^c liší jen v jednom umístění střediska.

Při redukovaném výpočtu přírůstku účelové funkce pro uživatele j pro pracovní řešení y^w je třeba určit indexy prvního až r -tého nejbližšího střediska uživatele j . Pro řešení y^c jsou tyto indexy uloženy v struktuře $Minr(*, j)$ v pořadí od nejbližšího k r -tému nejbližšímu středisku. Tato posloupnost se bude od potřebné posloupnosti indexů pro řešení y^w lišit nejvýše ve dvou prvcích.

Z podrobnější analýzy možných případů lze snadno zjistit, že mohou nastat tyto případy:

a) $sY(i)$ není obsaženo v posloupnosti $Minr(k, j)$ pro $k = 1, \dots, r$ a $d_{sC(t), j} \geq d_{sY(Minr(r, j)), j}$. V tomto případě lze vypočítat přírůstek účelové funkce podle (2) přímo z posloupnosti $Minr(k, j)$ pro $k = 1, \dots, r$.

b) $sY(i)$ není obsaženo v posloupnosti $Minr(k, j)$ pro $k = 1, \dots, r$ a $d_{sC(t), j} < d_{sY(Minr(r, j)), j}$. V tomto případě je index $sC(t)$ zařazen na správné místo v posloupnosti $Minr(*, j)$, z které je vyloučen index $Minr(r, j)$ a přírůstek je vypočítán z aktualizované posloupnosti.

c) $sY(i)$ je obsaženo v posloupnosti $Minr(k, j)$ pro $k=1, \dots, r$ a $d_{sC(t), j} \geq d_{sY(Minr(r, j)), j}$. Zde je posloupnost $Minr(*, j)$, redukována o prvek $sY(i)$ a doplněna o index dalšího $r+1$ vého nejbližšího střediska a přírůstek je vypočítán z aktualizované posloupnosti.

d) $sY(i)$ je obsaženo v posloupnosti $Minr(k, j)$ pro $k=1, \dots, r$ a $d_{sC(t), j} \leq d_{sY(Minr(r, j)), j}$. Zde je posloupnost $Minr(*, j)$, redukována o prvek $sY(i)$ a doplněna o index $sC(t)$ a přírůstek je opět vypočítán z aktualizované posloupnosti.

Žádný z bodů a)- d) si nevyžádá více než r kroků a tak složitost výpočtu $f(y^w)$ bude $O(n.r)$.

4 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Pro porovnání obou přístupů z hlediska rychlosti vyčíslení účelové funkce jsme provedli experimenty na úlohách odvozených z reálných dopravních sítí a osídlení odpovídajícími jednotlivým samosprávným krajům Slovenské republiky. Každá úloha je charakterizovaná počtem n obcí považovaných za uživatele s požadavky b_j , které odpovídají velikosti populace udávané v stovkách obyvatel. Počet možných umístění m je dán opět počtem obcí kraje, tedy každá obec je i možným umístěním střediska a platí $m=n$. Tímto způsobem bylo pro experimenty stanoveno osm základních p -lokačních úloh charakterizovaných následujícími údaji uváděnými za jménem sídelního města kraje (Zkratka, m, p): Bratislava (BA, 87, 25), Banská Bystrica (BB, 515, 46), Košice (KE, 460, 38), Nitra (NR, 350,36), Prešov (PO, 664, 44), Trenčín (TN, 276, 26), Trnava (TT, 249, 22) a Žilina (ZA, 315, 29). Koeficienty q_k byly převzaty z [4] v následující sestavě $q_1 = 77.063, q_2 = 16.476, q_3 = 4.254, q_4 = 1.593, q_5 = 0.47$. Samotné experimenty prováděné pro zadanou úlohu a zadané r z oboru 1 až 5 spočívaly v náhodném vygenerování řešení y^c o p umístěných střediscích a v prozkoumání příslušného okolí následovaným vydáním nejlepšího nalezeného řešení. Prozkoumání okolí bylo provedeno jak standardním způsobem, tak i redukováním výpočtem účelové funkce. Každý experiment byl proveden stokrát. Výsledky experimentů – doby trvání stonásobného opakování jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2 v sekundách.

Tabulka 1: Doby výpočtu v sekundách stonásobného opakování prohledání okolí standardním způsobem

r\kraj	BA	BB	KE	NR	PO	TN	TT	ZA
1	0.71	164.16	96.93	44.96	219.41	15.18	9.43	38.04
2	0.84	214.54	131.39	59.15	293.02	20.30	12.01	48.71
3	1.01	264.89	171.16	71.91	362.79	24.08	14.73	61.23
4	1.19	308.83	193.20	84.81	401.30	28.15	17.20	71.59
5	1.33	350.84	212.91	96.89	456.36	32.44	19.52	80.87

Tabulka 2: Doby výpočtu v sekundách stonásobného opakování prohledání okolí redukováním způsobem

r\kraj	BA	BB	KE	NR	PO	TN	TT	ZA
1	0.07	4.81	3.30	1.84	7.45	0.93	0.66	1.65
2	0.11	8.49	6.18	3.29	13.45	1.64	1.13	2.81
3	0.15	12.31	9.72	4.70	19.46	2.29	1.66	4.08
4	0.20	15.98	12.04	6.18	23.89	2.99	2.18	5.32
5	0.25	19.59	14.51	7.68	29.49	3.74	2.70	6.48

Výpočty byly provedeny na stolním počítači s procesorem Intel® Core™ i7-4790 CPU s parametry 3.6 GHz a s instalovanou operační pamětí 8 GB. Algoritmy byly naprogramovány v jazyku Java a spuštěny v prostředí NetBeans 8.1.

5 ZÁVĚR

Porovnáme-li odpovídající výpočetní časy v tabulce 1 a 2, snadno zjistíme, že redukovaný výpočet je přibližně desetkrát až dvacetkrát rychlejší než standardní způsob. To znamená, že bude-li redukovaný přístup použit v heuristikách založených na zpracování okolí současného řešení, tak příslušná heuristika za stanovený čas prozkoumá řádově větší počet řešení p-lokační úlohy a tím výrazně zvýší šanci nalézt lepší výsledné řešení v porovnání s heuristikou využívající standardní výpočet účelové funkce. Uvedené výsledky jsou zároveň ukázkou, jak pečlivá implementace základních operací může významně zlepšit efektivitu heuristik.

OZNÁMENÍ

Tato práce vznikla v rámci projektů VEGA 1/0342/18 “Optimálne dimenzovanie obslužných systémov”, APVV-15-0179 “Spol’ahlivosť záchranných systémov na infraštruktúre s neistou funkcionalitou kritických prvkov” a VEGA1/0089/19 “Vývoj metodiky pre analýzu prevádzkových dát za účelom podpory rozhodovania v oblasti riadenia obslužných systémov pre elektrické vozidlá”.

Použitá literatúra

1. BROTCORNE, L., LAPORTE, G., SEMET, F. 2003. Ambulance location and relocation models. *European Journal of Operational Research* 147, pp. 451–463
2. DOERNER, K.F., et al. 2005. Heuristic Solution of an Extended Double-Coverage Ambulance Location Problem for Austria. *Central European Journal of operations research*, Vol. 13, No 4, pp. 325-340.
3. GARCÍA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. 2011. Solving large p-median problems with a radius formulation. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 23, No 4, pp. 546-556
4. JANKOVIČ, P. 2016. Calculating Reduction Coefficients for Optimization of Emergency Service System Using Microscopic Simulation Model. In *17th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*, Budapest, Hungary, pp. 163-167
5. JÁNOŠIKOVÁ, L., JANKOVIČ, P., KVET, M. 2017. Improving emergency system using simulation and optimization. *SOR'17: proceedings of the 14th international symposium on operational research: Bled, Slovenia*, pp. 27-29
6. KVET, M. 2015. Exact and heuristic radial approach to fair public service system design. *Information and Digital Technologies 2015: IEEE catalog number CFP15CDT-USB*, Zilina: Slovak Republic
7. KVET, M., JANÁČEK, J. 2016. Radiálny prístup na zlepšenie existujúceho záchranného systému. In *Optimalizační úlohy v dopravních a logistických systémech a SW podpora rozhodování v inteligentních dopravních systémech*, Praha, Czech Republic, pp. 11-25
8. MARIANOV, V., SERRA, D. 2004. Location problems in the public sector, in facility location. *Applications and theory (by Drezner Z (ed.) et al.)*, Berlin, Springer, pp. 119-150

Kontaktné údaje

prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 1, 010 26 Žilina

Tel: +421 (0)41 513 4204

email: jaroslav.janacek@fri.uniza.sk

OPTIMALIZÁCIA PARAMETROV SKUPINOVÉHO GENETICKÉHO ALGORITMU POMOCOU TAGUCHIHO METÓDY

FINE-TUNING OF THE GROUPING GENETIC ALGORITHM USING TAGUCHI METHOD

Eudmila Jánošíková

Abstrakt

Približné metódy riešenia optimalizačných úloh sa vyznačujú tým, že majú mnoho parametrov, od ktorých závisí kvalita výsledného riešenia aj rýchlosť algoritmu. Spravidla neexistuje také nastavenie parametrov, ktoré by zaručilo dobré výsledky pre všetky triedy úloh, a pre každú úlohu je vhodné iné nastavenie. Článok popisuje princíp Taguchiho metódy, ktorú možno použiť na určenie najlepších hodnôt parametrov a ukazuje jej aplikáciu na skupinový genetický algoritmus pre úlohu o kapacitnom p -mediáne.

Príučové slová: *skupinový genetický algoritmus, p -medián, Taguchiho metóda*

Abstract

Approximate methods for solving optimization problems have a lot of parameters that influence the quality of the solution as well as computational time. Usually, there does not exist such parameter setting that ensures good results for all problem classes but every problem requires specific parameter values. This paper describes the principle of the Taguchi method that can be used for parameter tuning and presents its application for the capacitated p -median problem.

Keywords: *grouping genetic algorithm, p -median, Taguchi method*

1 ÚVOD

Metaheuristické metódy sa vyznačujú tým, že majú mnoho parametrov, ktoré je potrebné dobre nastaviť, aby metaheuristika dávala uspokojivé výsledky. Navyše neexistuje také nastavenie parametrov, ktoré by dávalo dobré výsledky pre každú triedu úloh. V článkoch, ktoré popisujú aplikáciu metaheuristiky pre nejaký optimalizačný problém, sa len zriedkakedy stretávame s aplikáciou štatistických metód pre optimálne nastavenie parametrov. Autori obvykle používajú také hodnoty parametrov, ktoré už niekto iný vyskúšal a vyhodnotil ako dobré, hoci aj pre iný problém. Iný, často používaný prístup je, že hodnoty parametrov nastaví autori „na základe predbežných experimentov“. Tieto experimenty však nebývajú v článkoch bližšie popísané, preto ich nie je možné zopakovať pre inú úlohu alebo inštancie s inými vlastnosťami. Významný príspevok v oblasti optimalizácie parametrov predstavuje článok autorov Adenso-Díaz a Laguna [1], ktorí navrhli optimalizovať parametre algoritmov pomocou Taguchiho metódy pre plánovanie experimentov. Kritérium optimality pre nastavenie parametrov závisí od algoritmu. V exaktnom algoritme je kritériom čas. Pretože exaktný algoritmus dá vždy optimálne riešenie, o kvalite algoritmu rozhoduje jeho výpočtová zložitosť, resp. rýchlosť výpočtu. Heuristický algoritmus sa obvykle vykoná rýchlo, takže tu je hlavným kritériom kvalita riešenia, čiže parametre treba nastaviť tak, aby riešenie bolo čo najlepšie z hľadiska účelovej funkcie. Pri metaheuristickom algoritme môže byť rozhodujúcim činiteľom pre nastavenie parametrov kvalita riešenia aj výpočtový čas. Adenso-

Díaz a Laguna navrhli univerzálny postup, ktorý nezávisí od riešenej úlohy ani od použitého algoritmu. Postup je založený na Taguchiho metóde plánovania experimentov.

2 TAGUCHIHO METÓDA

Genichi Taguchi (1924 – 2012) bol japonský inžinier a štatistik. V 50. rokoch minulého storočia pracoval vo výskumnom ústave Electrical Communications Laboratory, kde vyvinul metódu pre zlepšenie kvality a spoľahlivosti telefonických služieb. Jeho metóda však bola natoľko univerzálna, že sa rozšírila aj do oblasti priemyslu a neskôr ju aplikovali veľké priemyselné spoločnosti, napr. Ford Motor Company, Boeing, Xerox a iné.

Taguchiho metóda slúži na zlepšenie kvality produktov a procesov, kde výsledok závisí od mnohých faktorov. Postup, ako definovať a preskúmať vplyv faktorov na výsledok, sa nazýva plánovanie experimentov (*design of experiments*, DOE).

Taguchi navrhol efektívny spôsob ako skúmať vplyv faktorov na kvalitu s najmenším počtom experimentov. Navrhol zapísať plán experimentu pomocou tzv. ortogonálneho poľa. Ortogonálne pole označené symbolom $L_n(s^m)$ predstavuje plán viacfaktorového experimentu, ktorý skúma m faktorov, z ktorých každý má s úrovní. Je to vlastne matica rozmeru $n \times m$, v ktorej sa vyskytuje s rôznych čísiel 0, 1, 2, ..., $s-1$ predstavujúcich úrovne faktorov. Stĺpce zodpovedajú faktorom, riadky jednotlivým pokusom (pokus je vykonanie experimentu pri nastavených podmienkach – hodnotách faktorov, ktoré sa v priebehu experimentu nemenia). Riadky sú podmnožinou všetkých možných s^m kombinácií s úrovní m faktorov. Pole teda predstavuje čiastočný faktorový plán, presnejšie n/s^m zlomok úplného s^m faktorového plánu. Pri veľkom počte faktorov by počet pokusov v úplnom faktorovom pláne bol veľmi veľký, takto sa obmedzíme len na niekoľko pokusov, ktoré ale vďaka premyslenej štruktúre (t.j. nastaveniu parametrov podľa presnej schémy) stačia na to, aby sme určili vplyv jednotlivých faktorov na výsledok. Stĺpce ortogonálneho poľa majú tú vlastnosť, že v každej dvojici stĺpcov sa každá usporiadaná dvojica čísiel 0, 1, 2, ..., $s-1$ vyskytuje rovnaký počet krát. Navyše, stĺpce sú vyvážené aj vo vnútri, lebo každý stĺpec obsahuje rovnaký počet úrovní faktorov. Podmatica, ktorú vytvoríme vypustením niektorých stĺpcov ortogonálneho poľa, je tiež ortogonálne pole. Písmeno L v označení ortogonálneho poľa znamená latinský štvorec a naznačuje, že ortogonálne polia sú zovšeobecnené latinské štvorce. Matematické odvodenie čiastočných faktorových plánov a ortogonálnych polí možno nájsť v článku [2]. Pre ilustráciu je v tabuľke 1a) ortogonálne pole $L_8(2^5)$, v tabuľke 1b) pole $L_9(3^4)$.

Tabuľka 1. Ortogonálne polia [4]

a) pole $L_8(2^5)$						b) pole $L_9(3^4)$				
Pokusy	Faktory					Pokusy	Faktory			
	1	2	3	4	5		1	2	3	4
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	2	0	1	1	1
3	0	1	1	0	0	3	0	2	2	2
4	0	1	1	1	1	4	1	0	1	2
5	1	0	1	0	1	5	1	1	2	0
6	1	0	1	1	0	6	1	2	0	1
7	1	1	0	0	1	7	2	0	2	1
8	1	1	0	1	0	8	2	1	0	2
						9	2	2	1	0

V Taguchiho metóde je cieľom experimentov odpovedať na nasledujúce otázky:

- Aký je trend vplyvu faktorov a ich vzájomná interakcia?
- Ktoré sú významné faktory a aký je ich relatívny vplyv na variabilitu výsledku?
- Aké sú optimálne hodnoty faktorov?
- Aký výsledok možno očakávať pri optimálnom nastavení faktorov?

Pri odvodení hlavného a relatívneho vplyvu jednotlivých faktorov budeme používať nasledujúce označenie:

m	počet faktorov
s	počet úrovní faktora
n	počet pokusov
r	počet replikácií jedného pokusu
y_{ij}	výsledok v replikácii j pokusu i
\bar{y}	stredná hodnota všetkých meraní (všetkých replikácií všetkých pokusov)
y_0	cieľová hodnota
y^{opt}	očakávaný výsledok pri optimálnom nastavení parametrov
\bar{A}_h	hlavný (priemerný) efekt faktora A na úrovni h
$L(A,h)$	podmnožina pokusov, v ktorých má faktor A úroveň h
T	celkový súčet všetkých meraní
CF	korekčný faktor (<i>correction factor</i>)
S_A	suma štvorcov pre faktor A
S_T	celková suma štvorcov
$L(A,h)$	podmnožina pokusov, v ktorých má faktor A úroveň h
f_A	počet stupňov voľnosti pre faktor A ; $f_A = s - 1$
f_T	celkový počet stupňov voľnosti
V_A	rozptyl faktora A (<i>variance</i>)
F	pomer rozptylov (<i>variance ratio</i>)
e	experimentálna chyba

Všeobecný trend vplyvu jednotlivých faktorov možno určiť podľa priemerného vplyvu faktorov. Priemerný (alebo hlavný) efekt faktora A na úrovni h vypočítame tak, že sčítame výsledky pokusov, v ktorých má faktor A úroveň h a súčet vydelíme počtom takých pokusov:

$$\bar{A}_h = \frac{1}{r \cdot |L(A,h)|} \sum_{i \in L(A,h)} \sum_{j=1}^r y_{ij} \quad (1)$$

Podľa priemerného vplyvu potom môžeme predpokladať, aká úroveň faktora prinesie najlepší výsledok a odhadnúť výsledok pri optimálnom nastavení všetkých faktorov. Ak budeme predpokladať, že máme tri faktory označené písmenami A , B a C a h^* predstavuje najlepšiu úroveň faktora, potom očakávaný výsledok pri optimálnom nastavení faktorov vypočítame podľa vzťahu (2):

$$y^{opt} = T / (n \cdot r) + (\bar{A}_{h^*} - T / (n \cdot r)) + (\bar{B}_{h^*} - T / (n \cdot r)) + (\bar{C}_{h^*} - T / (n \cdot r)) \quad (2)$$

Poznanie príspevku jednotlivých faktorov je kľúčom k tomu, aby sme účinne vedeli riadiť výrobný (alebo iný) proces. Na to, aby sme určili relatívny vplyv jednotlivých faktorov a oddelili významné faktory od nevýznamných, slúži štatistická metóda, ktorá sa nazýva analýza rozptylu (ANOVA). Stručne vysvetlíme, ktoré rozptyly treba vypočítat' a čo z nich možno usudzovať.

Rozptyl je podiel súčtu štvorcov odchýlok nameraných hodnôt od strednej hodnoty a počtu meraní. Najprv vyjadríme celkovú sumu štvorcov odchýlok nameraných hodnôt od strednej

hodnoty pomocou odchýlok od cieľovej hodnoty, pretože podľa Taguchiho možno kvalitu dosiahnuť minimalizovaním odchýlky výsledku od cieľovej hodnoty:

$$S_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - y_0)^2 - nr(\bar{y} - y_0)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - y_0)^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - y_0) \right]^2}{nr} \quad (3)$$

Celú úpravu možno nájsť v [6]. Ak požadovaná cieľová hodnota je nulová, výraz možno upraviť:

$$S_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij}^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij} \right]^2}{nr} \quad (4)$$

a zjednodušiť zavedením nového označenia pre súčet všetkých meraní T a takzvaného korekčného faktora CF :

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij} \quad (5)$$

$$CF = T^2 / (n \cdot r) \quad (6)$$

$$S_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij}^2 - CF \quad (7)$$

Súčet štvorcov pre faktor A vypočítame podľa vzorca:

$$S_A = \sum_{h=1}^s \frac{1}{r \cdot |L(A, h)|} \left(\sum_{i \in L(A, h)} \sum_{j=1}^r y_{ij} \right)^2 - CF \quad (8)$$

Ďalej definujeme:

$$V_A = S_A / f_A \quad (9)$$

$$S_e = S_T - \sum_{k=1}^m S_k \quad (10)$$

$$f_T = n \cdot r - 1 \quad (11)$$

$$f_e = f_T - \sum_{k=1}^m f_k \quad (12)$$

$$V_e = S_e / f_e \quad (13)$$

Stupeň voľnosti je miera množstva informácií, ktoré môžeme jednoznačne určiť z danej množiny dát. Stupeň voľnosti pre faktor je o jeden menší než počet úrovní faktora, pretože výsledok pre jednu úroveň faktora sa môže porovnať s výsledkom pre druhú a tretiu úroveň, ale nie so sebou samým. Pretože experiment predstavuje len časť všetkých možných výstupov, pri výpočte rozptylu sa používa počet stupňov voľnosti namiesto počtu všetkých pozorovaní.

Pomer rozptylov

$$F_A = V_A / V_e \quad (14)$$

je pomer rozptylu spôsobeného daným faktorom a rozptylu spôsobeného experimentálnou chybou. Používa sa na zistenie významnosti daného faktora s ohľadom na všetky faktory, ktoré sú zahrnuté v experimentálnej chybe. Pomer rozptylov sa porovná s tabuľkovou

hodnotou F rozdelenia s parametrami f_A a f_e na zvolenej hladine významnosti. Ak vypočítaný pomer rozptylov je menší než tabuľková hodnota $F_{\alpha}(f_A, f_e)$, potom daný faktor nie je štatisticky významný (nemá vplyv na variabilitu výsledku).

3 SKUPINOVÝ GENETICKÝ ALGORITMUS PRE KAPACITNÝ P-MEDIÁN

Úloha o kapacitnom p -mediáne je klasická lokačná úloha. Je daná množina I , ktorej prvkami sú geografické lokality, kam možno umiestniť stredisko poskytujúce službu zákazníkom. Objem požiadaviek zákazníkov, ktoré môže každé stredisko uspokojiť, označme symbolom Q . Zákazníci v danom regióne tvoria množinu J . Zákazník $j \in J$ je definovaný svojou geografickou polohou a požiadavkou b_j . Vzdialenosť z miesta $i \in I$ do miesta $j \in J$ označme symbolom d_{ij} . Z množiny kandidátov I treba vybrať presne p stredísk tak, aby celková vzdialenosť medzi zákazníkmi a strediskami bola čo najmenšia, pričom každý zákazník bude obsluhovaný práve z jedného strediska a objem požiadaviek zákazníkov, ktorí budú obsluhovaní z jedného strediska, neprekročí kapacitu strediska Q .

Rozhodnutie o otvorení strediska v mieste i budeme modelovať bivalentnou premennou y_i . Ďalej potrebujeme bivalentné alokačné premenné x_{ij} , ktoré vyjadrujú, či zákazník j bude obsluhovaný zo strediska i .

Matematický model úlohy možno zapísať takto:

$$\text{minimalizujte} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \quad (15)$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pre } j \in J \quad (16)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pre } i \in I, j \in J \quad (17)$$

$$\sum_{j \in J} b_j x_{ij} \leq Q \quad \text{pre } i \in I \quad (18)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (19)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \quad \text{pre } i \in I, j \in J \quad (20)$$

Účelová funkcia (15) minimalizuje celkovú vzdialenosť zákazníkov k najbližšiemu stredisku. Podmienky (16) priradujú každého zákazníka j práve jednému stredisku. Podmienky (17) zabezpečia, že ak je nejaký zákazník priradený miestu i , potom sa v mieste i musí otvoriť stredisko. Podmienky (18) zabezpečia, že objem požiadaviek obsluhovaných zo strediska i neprekročí jeho kapacitu. Podmienka (19) obmedzuje počet otvorených stredísk. Podmienky (20) sú obligatórne podmienky.

Úloha o kapacitnom p -mediáne je NP-tažká úloha. Na riešenie úloh praktického rozsahu sa používajú heuristické a metaheuristické metódy. Jednou z metaheuristických metód je skupinový genetický algoritmus, ktorého implementácia pre úlohu o kapacitnom p -mediáne bola popísaná v príspevku [3]. V implementácii vystupujú tieto parametre:

- L veľkosť populácie
- TG počet generácií
- p_{mi} počiatočná pravdepodobnosť mutácie
- p_{mf} konečná pravdepodobnosť mutácie
- p_{ls} pravdepodobnosť operácie *local search*

Účelom mutácie je udržiavať rôznorodosť populácie a zabrániť uviaznutiu algoritmu v lokálnom minime. Mutácia sa vykoná na náhodne vybratom jedincovi tak, že náhodne zvolené stredisko sa nahradí iným strediskom, ktoré nie je otvorené. Pri tejto operácii sa mení štruktúra stredísk, preto treba opätovne prideliť všetkých zákazníkov otvoreným strediskám, aby sme vypočítali fitness hodnotu zmutovaného jedinca. Kvôli časovej náročnosti sa mutácia nevykonáva v každej generácii, ale len s istou pravdepodobnosťou, ktorá sa v priebehu výpočtu zvyšuje z počiatočnej hodnoty p_{mi} po konečnú hodnotu p_{mf} podľa vzťahu

$$p_m(k) = p_{mi} + \frac{k}{TG}(p_{mf} - p_{mi}) \quad (21)$$

kde $p_m(k)$ je pravdepodobnosť mutácie v generácii k .

Operácia *local search* slúži na zlepšenie náhodne vybratého jedinca. Je to výmenná heuristika, pri ktorej sa hľadá lacnejšie priradenie zákazníkov existujúcim strediskám. Pretože tiež ide o časovo náročnú operáciu, podobne ako mutácia sa nevykonáva v každej generácii, ale len s istou malou pravdepodobnosťou p_{ls} .

4 APLIKÁCIA TAGUCHIHO METÓDY PRE OPTIMALIZÁCIU PARAMETROV

V implementácii [3] boli parametre algoritmu nastavené presne tak, ako je popísané v úvode, teda niektoré podľa dobrých skúseností iných autorov publikovaných v literatúre, niektoré na základe predbežných experimentov. Seriózny experiment so štatistickým spracovaním výsledkov nebol vykonaný. V rámci tohto príspevku taký experiment vykonáme a popíšeme jeho výsledky. Zameriame sa na veľké inštancie úlohy o kapacitnom p -mediáne s tisíckami zákazníkov, pretože inštancie takýchto rozmerov sa často vyskytujú pri návrhu verejných obslužných a záchranných systémov. Veľké testovacie inštancie vytvorili Lorena a Senne [5]. Sú dostupné na webovej stránke <http://www-usr.inf.ufsm.br/~stefanello/instances/cmp/>. Inštancie majú mená $p3038_600$, $p3038_700$, $p3038_800$, $p3038_900$ a $p3038_1000$. Každá z nich obsahuje 3038 miest, ktoré sú zároveň kandidátmi na umiestnenie strediska aj zákazníkmi. Počet stredísk, ktoré treba umiestniť, sa mení od 600 do 1000. Pretože optimálne riešenia týchto úloh neboli doposiaľ publikované, budeme naše výsledky porovnávať s najlepším známym riešením dosiahnutým dekompozičným algoritmom IRMA [7].

Pri hľadaní najlepších hodnôt pre parametre skupinového genetického algoritmu sa nebudeme zaoberať počtom generácií, lebo je zrejmé, že čím vyšší počet generácií, tým lepšie riešenie dosiahneme. Budeme skúmať len vplyv ostatných štyroch parametrov a pre každý z nich tri úrovne podľa tabuľky 2. Cieľom experimentu bude určiť štatisticky významné parametre pomocou analýzy rozptylu a nájsť ich optimálne hodnoty. Plán experimentu je vyjadrený ortogonálnym poľom $L_9(3^4)$ v tabuľke 1b).

Tabuľka 2. Tri úrovne faktorov

Faktor	Úroveň 0	Úroveň 1	Úroveň 2
L	50	100	150
p_{mi}	0.1	0.2	0.3
p_{mf}	0.5	0.6	0.7
p_{ls}	0	0.1	0.2

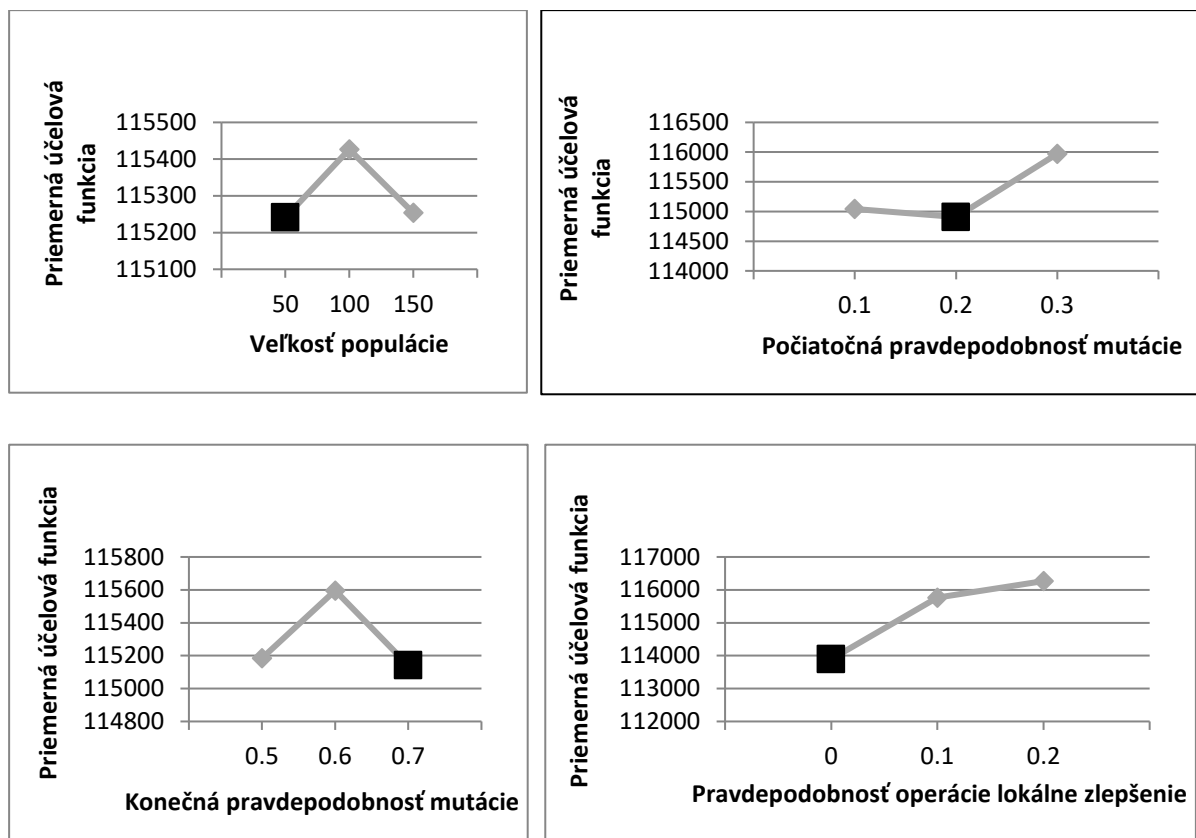
Na nastavenie optimálnych hodnôt parametrov pre uvedenú triedu úloh sme vybrali úlohu $p3038_800$. Každý pokus sme vykonali 10-krát. Doba výpočtu jednej replikácie bola 300 s. Hodnoty veličín získaných pri analýze rozptylu sú v tabuľke 3. Kritická hodnota F rozdelenia na hladine významnosti 0.05 je $F_{0.05}(2,81) = 3.109$. Porovnaním pomerov rozptylu s touto hodnotou vidíme, že štatisticky významné sú len dva faktory, a to počiatočná pravdepodobnosť mutácie a pravdepodobnosť operácie *local search* (v tabuľke 3 vyznačené tučným písmom). Veľkosť populácie ani konečná pravdepodobnosť mutácie nemajú vplyv na variabilitu výsledkov.

Tabuľka 3. Analýza rozptylu

Faktor	Súčet štvorcov S	Počet stupňov voľnosti f	Rozptyl V	Pomer rozptylov F
L	642383.87	2	321191.93	0.11
p_{mi}	20087324.22	2	10043662.11	3.58
p_{mf}	3779820.95	2	1889910.48	0.67
p_{ls}	93697850.85	2	46848925.42	16.72
Chyba e	227020179.89	81	2802718.27	
Spolu	345227559.78	89		

Z grafického znázornenia hlavného efektu faktorov s tromi úrovňami na obr. 1 môžeme určiť optimálne hodnoty parametrov: $L = 50$, $p_{mi} = 0.2$, $p_{mf} = 0.7$ a $p_{ls} = 0$. Podľa vzťahu (2) vypočítame očakávanú hodnotu účelovej funkcie: $y^{opt} = 113260.92$. Tento výsledok potvrdil kontrolný výpočet, kedy sme vykonali 10 replikácií skupinového genetického algoritmu s optimálnymi hodnotami parametrov. Priemerná hodnota účelovej funkcie bola 113364.76 (pozri tab. 4, príklad $p3038_800$). Pôvodné nastavenie parametrov v článku [3] bolo $L = 100$, $p_{mi} = 0.2$, $p_{mf} = 0.5$ a $p_{ls} = 0$. Vidíme, že štatisticky významné parametre počiatočná pravdepodobnosť mutácie a pravdepodobnosť operácie *local search* boli na základe predbežných, nepublikovaných experimentov v predchádzajúcej štúdii nastavené na optimálnu hodnotu.

Pre porovnanie sme vykonali experimenty pre všetky testovacie príklady sady $p3038$, a to s pôvodnými aj optimálnymi hodnotami parametrov s cieľom zistiť, či optimálne hodnoty parametrov prinesú lepšie výsledky. Na každej úlohe bol skupinový genetický algoritmus spustený 10-krát, doba výpočtu bola 300 sekúnd. Výsledky pre pôvodné nastavenie parametrov sú v tab. 5, pre optimálne nastavenie parametrov v tab. 6. V tabuľkách sú hodnoty účelovej funkcie najlepšieho (Min), priemerného (Avg) a najhoršieho (Max) riešenia z 10 replikácií, smerodajná odchýlka riešení (St. dev.) aj relatívne zhoršenie účelovej funkcie najlepšieho riešenia oproti doteraz najlepšiemu riešeniu získanému algoritmom IRMA (Gap). Porovnaním výsledkov vidíme, že optimálne nastavenie parametrov prinieslo lepší priemer aj najlepšie riešenie, ale zväčšil sa rozptyl hodnôt účelovej funkcie.



Obrázok 1. Hlavný efekt faktorov

Tabuľka 4. Výpočtové experimenty pre pôvodné hodnoty parametrov

Príklad	IRMA	$L = 100, p_{mi} = 0.2, p_{mf} = 0.5, p_{ls} = 0$				
		Min	Avg	Max	St. dev.	Gap (%)
$p3038_600$	122711.17	131530.87	133774.51	137845.89	1863.29	7.19%
$p3038_700$	109677.30	120351.56	122210.70	124393.60	1100.69	9.73%
$p3038_800$	100064.94	111733.10	113525.73	114320.25	733.29	11.66%
$p3038_900$	92310.09	105032.45	107055.82	111524.20	1823.36	13.78%
$p3038_1000$	85854.05	99799.97	100920.85	102852.49	926.08	16.24%
Priemer					1289.34	11.72%

Tabuľka 6. Výpočtové experimenty pre optimálne hodnoty parametrov

Príklad	IRMA	$L = 50, p_{mi} = 0.2, p_{mf} = 0.7, p_{ls} = 0$				
		Min	Avg	Max	St. dev.	Gap (%)
$p3038_600$	122711.17	130610.47	133062.68	135285.53	1374.40	6.44%
$p3038_700$	109677.30	119142.65	120407.38	121462.15	750.18	8.63%
$p3038_800$	100064.94	110198.48	113364.76	119204.03	2645.77	10.13%
$p3038_900$	92310.09	104912.08	106404.83	108996.71	1436.81	13.65%
$p3038_1000$	85854.05	98543.42	100521.65	102787.37	1325.98	14.78%
Priemer					1506.63	10.73%

5 ZÁVER

Príspevok popisuje použitie Taguchiho metódy pre optimálne nastavenie parametrov algoritmu. Metódu sme demonštrovali na metaheuristickom algoritme – skupinovom genetickom algoritme implementovanom pre riešenie NP-ťažkej úlohy o kapacitnom p -mediáne. Výpočtový čas algoritmu bol pre účely tejto štúdie významne skrátený oproti štúdiu [3], lebo cieľom bolo demonštrovať použitie Taguchiho metódy, a nie nájsť optimálne hodnoty parametrov pre prakticky použiteľnú verziu algoritmu. Je pravdepodobné, že pri dlhšej dobe výpočtu (v spomenutej štúdiu bežala jedna replikácia hodinu) by optimálne hodnoty parametrov boli iné, ale aj proces ich ladenia podľa Taguchiho metódy plánovania experimentu by trval podstatne dlhšie. Taguchiho metóda je univerzálna metóda, ktorú možno použiť bez ohľadu na charakter algoritmu aj riešenej úlohy. V budúcnosti sa chceme zamerať na vytvorenie softvérového nástroja pre automatizované ladenie parametrov, kde sa bude ladený algoritmus považovať za čiernu skrinku.

Tento príspevok vznikol s podporou výskumného projektu VEGA 1/0342/18 Optimálne dimenzovanie obslužných systémov a projektu IKT pre smart spoločnosť – smartIKT (ITMS kód NFP313010T462).

Použitá literatúra

1. ADENSO-DÍAZ, B., LAGUNA, M. (2006). Fine-tuning of algorithms using fractional experimental design and local search. In: Operations Research, roč. 54, 2006, č. 1, s. 99–114.
2. BOSE, R. C. (1947). Mathematical Theory of the Symmetrical Factorial Designs. In: Sankhya, roč. 8, 1947, s. 107–166.
3. JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ., VASILOVSKÝ, P. (2017). Grouping genetic algorithm for the capacitated p -median problem. In: Proceedings of the International Conference on Information and Digital Technologies 2017, Žilina, Slovakia, 5 – 7 July 2017, s. 152–159.
4. KACKER, R. N., LAGERGREN, E. S., FILLIBEN, J. J. (1991). Taguchi's orthogonal arrays are classical designs of experiments. In: Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, roč. 96, 1991, č. 5, s. 577–591.
5. LORENA, L. A. N., SENNE, E. L. (2004). A column generation approach to capacitated p -median problems. In: Computers & Operations Research, roč. 31, 2004, č. 6, s. 863–876.
6. ROY, R. K. (1990). A Primer on the Taguchi Method. Van Nostrand Reinhold, New York.
7. STEFANELLO, F., DE ARAÚJO, O. C. B., MÜLLER, F. M. (2015). Matheuristics for the capacitated p -median problem. In: International Transactions in Operational Research, roč. 22, 2015, č. 1, s. 149–167.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ľudmila Jánošíková, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 1, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 51 34 200

e-mail: Ludmila.Janosikova@fri.uniza.sk

EXAKTNÝ PRÍSTUP K TURNUSOVANIU ELEKTRICKÝCH AUTOBUSOV

EXACT APPROACH TO ELECTRIC BUS SCHEDULING

Maroš Janovec

Abstrakt

V posledných rokoch začína výskum v oblasti elektromobility získavať množstvo pozornosti. Jeden z problémov riešených v tejto oblasti je aj zmena flotily klasických autobusov za elektrobuses. V rámci tohto problému sa rieši úloha turnusovania vozidiel. V tomto článku sa venujeme úlohe priradenia dostupných elektrobuses spojov, ktoré treba obslúžiť, čiže vytváraniu turnusov pre jednotlivé elektrobuses. Elektrobuses majú obmedzený dojazd a musia sa počas prevádzky nabíjať, čo vyžaduje dlhší čas ako dotankovanie autobusu. V našom prípade uvažujeme o známych umiestneniach a počtoch nabíjačiek. V tomto článku prezentujeme lineárny matematický model, ktorý rešpektuje všetky potrebné obmedzenia. Výkonnosť modelu je otestovaná na dátach z verejného dopravného systému v Žiline použitím štandardného IP solvera na ohodnotenie kvality riešenia ako aj výpočtového času.

Príčné slová: *elektrické vozidlá, turnusovanie vozidiel, IP solver, exaktné riešenie, elektrické autobusy*

Abstract

In the recent years the research in the field of electromobility has been gaining a lot of interest. One of the problems researched in the field is transformation of the classical bus fleet into the fleet of electrobuses. One of the tasks that should be solved is the problem of scheduling. This paper deals with the problem of assigning available electric buses to the set of service trips, in other words scheduling of electric buses. Electric buses have limited operation range and must be charged during the operation, which takes more time than refueling a bus. In our case it is assumed that the charging is possible at the depot and at chosen locations. In the paper we propose a linear mathematical model that respects all necessary limitations. The performance of the model is tested on the dataset from the public transport system in the city of Žilina using a standard IP solver to evaluate the quality of the solution and computational time.

Keywords: *electric vehicles, vehicle scheduling, IP solver, exact solution, electric buses*

1 ÚVOD

Elektromobilita je v súčasnosti veľmi skúmanou oblasťou. Veľkými výhodami nasadzovania elektrovozidiel sú veľmi nízke emisie CO₂, ako aj potenciálne nízke náklady na prevádzku. Spolu so súčasným trendom znižovania cien obstarávacích nákladov na nákup elektrovozidiel a batérií začínajú byť elektrovozidlá zaujímavou alternatívou ku konvenčným vozidlám.

Jedným z miest, kde je možné aplikovať a testovať elektrické vozidlá v praxi je verejný dopravný systém miest. Tento systém je charakteristický veľkou dennou najazdenou vzdialenosťou na vozidlo, čiže transformácia flotily na elektrické vozidlá môže priniesť redukcii nákladov na prevádzku oproti flotile konvenčných vozidiel. Najpoužívanejším

typom vozidla v mestách je naftový autobus. Teda hlavným smerom transformácie flotily bude výmena naftových autobusov za elektrobusy.

Experimenty s nasadením elektrobusu sa odohrali v rôznych mestách, ako napríklad v Soule[1], Milton Keynes[2], Oporto[3], Putraya[4]. Prevažne sa tieto experimenty vykonávali za účelom zberu dát ako sú spotreba, výkon, správanie sa v premávke. V týchto experimentoch boli elektrobusy prevažne nasadzované iba na vybraných linkách, nie ako celková transformácia systému.

Pri nasadzovaní flotily elektrobusov vo verejnej doprave treba riešiť množstvo problémov. Sú to hlavne plánovanie liniek, plánovanie turnusov vozidiel a následné plánovanie turnusov osádok. Tieto problémy sú v podstate rovnaké ako aj pri nasadzovaní flotily naftových autobusov, ale nedajú sa riešiť rovnakým spôsobom, keďže elektrobusy majú svoje špecifické vlastnosti, ktoré sa odlišujú od naftových autobusov. Najproblematickejšími vlastnosťami sú obmedzený dojazd elektrobusu a čas jeho nabíjania. Operačný dojazd elektrobusov sa v súčasnosti pohybuje od 100 do 300 km, čo v porovnaní s naftovým autobusom nestačí na celodennú prevádzku, čiže dobíjanie elektrobusu musí prebiehať častejšie počas dňa. Zároveň čas, ktorý potrebujeme na dobitie batérie je podstatne dlhší ako dotankovanie naftového autobusu.

Tento článok sa zaoberá riešením jedného z problémov pri nasadzovaní elektrobusov do reálneho systému, a síce pridelovaním vozidiel jednotlivým linkám alebo inak povedané plánovaním turnusov pre jednotlivé vozidlá. V kapitole 2 popíšeme prácu iných autorov v tejto oblasti. Kapitola 3 sa zaoberá detailným popisom problému a formuláciou lineárneho matematického modelu pre riešenie úlohy turnusovania elektrobusov. V poslednej kapitole popíšeme metódu riešenia a numerické experimenty na vybraných testovacích sieťach liniek získaných z reálnych dát poskytnutých prevádzkovateľom verejného dopravného systému v meste Žilina.

2 PRÍBUZNÁ PRÁCA

Problém turnusovania vozidiel je pomerne dobre známy a zároveň sú známe aj dobré metódy riešenia. Náš problém je odnožou tohto problému, avšak má podstatne viacej obmedzení ako problém turnusovania. Systém riešenia úlohy turnusovania je závislý aj na vybranej technológii nabíjania, keďže časy nabíjania sa odvíjajú od použitej technológie.

Jednou z technológií, ktorá je zaujímavá hlavne z toho dôvodu, že nie je nutné počítať s dlhou dobou nabíjania je výmena batérií. Kim, Song and Choi [1] sa snažili v ich článku ukázať použiteľnosť tejto technológie, pričom vychádzali z reálnych dát z experimentu v Soule , ktoré použili v simulácii.

Touto technológiou sa zaoberali aj Chao a Xiaohong[5], ktorý riešili problém turnusovania vozidiel s jedným depom (SDVS) s dvomi nezávislými účelovými funkciami, ktoré reprezentovali kapitálovú investíciu a dopyt po nabíjaní. Túto úlohu riešili pomocou Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA- II).

Model na riešenie úlohy turnusovania so systémom výmeny batérii predstavili aj Mirchandani a kol.[6], ktorý však riešili úlohu turnusovania nie pre verejný dopravný systém, ale pre flotilu obslužných vozidiel.

Ďalšou použiteľnou technológiou je rýchle nabíjanie (fast charging). Táto technológia je špecifická hlavne tým, že sa nabíja na nabíjaciach stanicích, ktoré sú umiestnené v dopravnej sieti na vybraných miestach. Pri tomto type nabíjania treba brať do úvahy aj samotné nabíjanie, keďže trvá dlhší časový úsek. Teoh a kol.[4] riešili úlohu návrhu dopravného

systému, čo zahrňovalo návrh liniek, ako aj návrh turnusov elektrobusev a ich osádok, pričom zvažovali technológiu rýchleho nabíjania. Rozhodli sa pre simulačný prístup k riešeniu tejto úlohy. Tento prístup je ale vhodnejší len na overenie riešenia ako na samotné riešenie problému turnusovania.

Ďalšou možnosťou ako riešiť úlohu turnusovania sú metódy matematického programovania. Niekerk a kol. [7] predstavujú dva modely na riešenie úlohy turnusovania elektrobusev. Tieto modely riešia úlohu s jedným depom a jedným typom vozidla. Prvý model predpokladá lineárnosť nabíjania, druhý model je schopný popísať aj nelineárne nabíjanie pomocou diskretizácie stavu nabitia batérie. V oboch modeloch je dostupný čas na nabíjanie diskretizovaný na rovnako dlhé intervaly, pričom sa elektrobusev nabíja počas celého intervalu. Prvý model je riešený exaktne pomocou metód mat. programovania pre úlohy malého a stredného rozsahu. Druhý model je riešený aj pre väčšie úlohy pomocou metódy generovania stĺpcov.

Lineárny matematický model navrhli aj Sassi a Oularama [8]. Ich model zvažuje kombináciu elektrobusev a konvenčných autobusov. Okrem základných obmedzení pre stav batérie tento model obsahuje aj obmedzenie pre elektrickú sieť, a síce obmedzenie maximálneho odberu zo siete pre daný časový interval, čím reprodukuje aj zníženie nabíjacie výkonu, ak je k nabíjačke pripojených niekoľko elektrobusev v tom istom čase. Okrem návrhu modelu sú v článku navrhnuté aj sekvenčná heuristika (SH) a globálna heuristika (GH) na riešenie definovaného problému. Zároveň dokázali že úloha návrhu turnusov je NP-t'ážka.

Ďalším model, ktorý rieši okrem turnusovania elektrobusev aj optimalizáciu počtu prípojok na nabíjačke, navrhol Rogge a kol.[9]. Nabíjanie sa v tomto prípade odohráva iba v depe a elektrobusev sa vždy nabíja do maximálnej kapacity. Avšak, navrhnutý model nie je lineárny a preto je riešenie založené na heuristických princípoch. V článku je navrhnutá a otestovaná metaheuristika založená na Grouping genetic algorithm (GGA), ktorá rieši definovaný problém.

3 POPIS PROBLÉMU

V tomto článku navrhujeme lineárny matematický model na riešenie úlohy turnusovania elektrobusev vo verejnej doprave, ktorý vychádza z Roggeho modelu [9]. Na rozdiel od Roggeho modelu, náš model je lineárny. Ďalej sa zameriava hlavne na aplikáciu čiastočného nabíjania (batéria sa nemusí nabiť do maximálnej kapacity), nabíjanie v depe a na vybraných nástupištiach. Posledným rozdielom je variabilný čas ukončenia nabíjania. Takže model, ktorý prezentujeme sa zaoberá čiastočným nabíjaním, nabíjaním na viacerých miestach s variabilným časom nabíjania, čo nebolo skúmané žiadnym z autorov spomenutých vyššie.

Pri našej úlohe predpokladáme, že umiestnenia nabíjačiek a počet prípojok na jednotlivých nabíjačkách je známy. Hlavnou úlohou je vytvoriť rozvrhy pre jednotlivé elektrobusev a zároveň aj rozvrhy nabíjania na jednotlivých nabíjačkách, tak aby sme použili čo najmenej elektrobusev a zároveň rešpektovali obmedzenia dojazdu elektrobusev a kapacity ich batérií.

Pri úlohe návrhu turnusov elektrobusev vo verejnej doprave sa snažíme vytvoriť rozvrh pre elektrobusev, ktoré spoje má obslúžiť, pričom musíme brať do úvahy štandardné podmienky pre úlohu návrhu turnusov, ako aj obmedzenia špecifické pre elektrobusev. Medzi klasické podmienky patria:

- Každý spoj je obslúžený práve jedným vozidlom.
- Vozidlo má priradenú iba možnú sekvenciu spojov, inými slovami žiadne vozidlo nemôže byť súčasne na viacerých spojoch.

- Celkové náklady sú minimálne.

Ďalšie obmedzenia, ktorými sa úloha návrhu turnusov elektrobusev líši od klasického návrhu turnusov sú obmedzenia týkajúce sa batérie:

- Kapacita batérie musí byť dostatočná na prejsenie k nabíjačke alebo depu počas celého turnusu.
- Na vybraných miestach sa môže batéria nabiť. Pri nabíjaní však nesmieme presiahnuť maximálnu kapacitu batérie.
- Na každej prípojke sa v jednom čase môže nabíjať iba jedno vozidlo.

3.1 Formálna formulácia problému

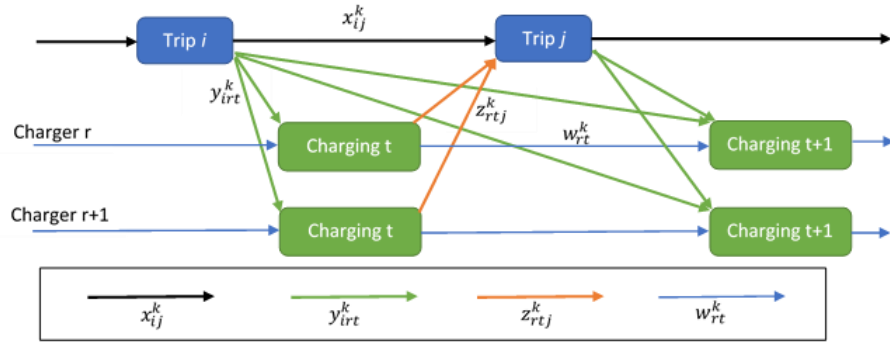
Majme množinu spojov N , ktoré treba obslúžiť a depo reprezentované zdrojom D_0 a ústím D_n . Ďalej máme množinu R reprezentujúcu všetky nabíjacie prípojky a množinu T^r , ktorá reprezentuje nabíjacie udalosti prislúchajúce k danej nabíjacej prípojke $r \in R$.

Každý spoj $i \in N$ je charakterizovaný začiatkom spoja – s_i , ďalej trvaním spoja – t_i a spotrebou energie na prejsenie spoja – c_i . Okrem týchto charakteristík je pre každý spoj definovaná množina možných nasledujúcich spojov $F(i)$. Aby spoj j mohol byť následníkom spoja i , musí platiť $s_i + t_i + t_{ij} \leq s_j$, kde s_i je začiatok spoja i , t_i je trvanie spoja i , t_{ij} je čas prechodu medzi spojom i a j a s_j je začiatok nasledujúceho spoja j . Pri prechode z i do j sa spotrebúva energia, takže je nutné vedieť, koľko energie sa spotrebuje na prechod. Túto hodnotu vyjadruje konštanta c_{ij} . Podobným spôsobom definujeme aj množinu možných predchádzajúcich udalostí $B(i)$.

Nabíjačka $r \in R$ je definovaná svojou polohou a nabíjacou rýchlosťou q_r . Konštanta t_{ir} predstavuje čas potrebný na prejsenie zo spoja i k nabíjačke r a konštanta t_{rj} naopak od nabíjačky r k spoju j . Okrem času je nutné poznať aj spotrebu na tieto prechody. To vyjadrujú konštanty c_{ir} – spotreba na prechod od spoja i k nabíjačke r , a c_{rj} – spotreba na prechod od nabíjačky r k spoju j .

Okrem nabíjačky máme definované aj nabíjacie udalosti na nabíjačke r . Počet nabíjacích udalostí na nabíjačke r bude rovnaký ako počet spojov. Začiatok nabíjacej udalosti s_{rt} je definovaný ako $s_{rt} = s_i + t_i + t_{ir}$ pre nabíjaciu udalosť $t \in T^r$ na nabíjačke r a je naviazaný na koniec spoja, keďže jediný čas kedy môže elektrobús prísť na nabíjačku je po skončení spoja. Pre prechod zo spoja k nabíjačke si definujeme množinu nasledujúcich nabíjacích udalostí $Fc(r, i)$ pre každý spoj i . Nabíjacia udalosť t na nabíjačke r môže byť zaradená ako možná nasledujúca nabíjacia udalosť ak spĺňa podmienku $s_{rt} \geq s_i + t_i + t_{ir}$. Podobne definujeme aj množinu predchádzajúcich nabíjacích udalostí $Bc(r, i)$ pre každý spoj i a každú nabíjačku r . Následne sa definujú aj množiny možných nasledujúcich $Fi(r, t)$ a predchádzajúcich $Bi(r, t)$ spojov pre každú nabíjaciu udalosť t na nabíjačke r . Pre pridanie spoja ako možného nasledovníka pre nabíjaciu udalosť musí platiť $s_{rt} + t_{rj} \leq s_j$.

Množina K je množina vozidiel, ktoré máme k dispozícii. Batéria v každom vozidle $k \in K$ je charakterizovaná svojím maximálnym a minimálnym stavom nabitia SoC_{max}^k a SoC_{min}^k . Tieto stavy reprezentujú použiteľný rozsah batérie, aby sa zabránilo zvýšenej degradácii batérie, prípadne ak chceme stanoviť rezervu energie elektrobusev [10].



Obr. 1. Popis rozhodovacích premenných

Nech binárna rozhodovacia premenná x_{ij}^k reprezentuje rozhodnutie, či budeme obsluhovať spoj j priamo po spoji i vozidlom k , Táto premenná existuje len v prípade, že platí $j \in F(i)$. Binárna rozhodovacia premenná y_{irt}^k bude 1, ak zo spoja i pôjdem nabíjať vozidlo k na nabíjačku r počas nabíjacej udalosti t . Taktiež musí platiť, že nabíjacia udalosť t na nabíjačke r je možný následník spoja i . Nech binárna rozhodovacia premenná z_{rtj}^k bude jedna, ak pôjde vozidlo k obslúžiť spoj j po nabíjacej udalosti t na nabíjačke r . Spoj j musí byť z množiny nasledovníkov nabíjacej udalosti t na nabíjačke r . Posledná binárna rozhodovacia premenná w_{rt}^k reprezentuje rozhodnutie, či budem pokračovať v nabíjaní na nabíjacej udalosti $t + 1$ na nabíjačke r po skončení nabíjacej udalosti t vozidlom k . Z tohto dôvodu je nutné, aby nabíjacie udalosti na každej nabíjačke boli zoradené podľa času začiatku nabíjacej udalosti. Vizualizáciu premenných môžeme vidieť na obrázku 1. Na sledovanie stavu nabitia energie pre jednotlivé vozidlá slúžia premenné e_i^k a ε_{rt}^k , kde e_i^k reprezentuje stav nabitia batérie vozidla k pred spojom i a ε_{rt}^k reprezentuje stav nabitia batérie vozidla k pred nabíjacou udalosťou t na nabíjačke r .

3.2 Účelová funkcia

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{D_0j}^k + \sum_{k \in K} \sum_{r \in R} \sum_{t \in Fc(r, D_0)} y_{D_0rt}^k \quad (1)$$

Účelová funkcia (1) minimalizuje počet použitých elektrobusev. Tento počet je vyjadrený ako dve sumy. Prvá suma reprezentuje elektrobusev, ktoré vychádzajú z depa a idú priamo obslúžiť spoje. Druhá suma reprezentuje elektrobusev, ktoré idú z depa najprv na nabíjačku.

3.3 Podmienky turnusovania

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in B(j)} x_{ij}^k + \sum_{k \in K} \sum_{r \in R} \sum_{t \in Bc(r, j)} z_{rtj}^k = 1 ; pre j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{i \in B(j)} x_{ij}^k + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Bc(r, j)} z_{rtj}^k = \sum_{l \in F(j)} x_{jl}^k + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Fc(r, j)} y_{jrt}^k ; pre j \in N, k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in Bi(r, t)} y_{jrt}^k + \sum_{k \in K} w_{rt-1}^k \leq 1 ; pre r \in R, t \in T^r \quad (4)$$

$$\sum_{i \in Bi(r, t)} y_{irt}^k + w_{rt-1}^k = \sum_{j \in Fi(r, t)} z_{rtj}^k + w_{rt}^k ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K \quad (5)$$

Podmienky (2) zaručujú, že každý spoj bude obslúžený práve jedným vozidlom. Ako podmienka zachovania toku pre každý spoj slúžia podmienky (3), čo znamená, že ak elektrobusev príde obslúžiť spoj, tak musí aj zo spoja odísť po jeho skončení. Podmienky (4) definujú obmedzenie, že na prípojke

sa v jednom čase môže nabíjať maximálne jeden elektrobús. Podmienky (5) reprezentujú zachovanie toku pre jednu nabíjaciu udalosť.

3.4 Podmienky spotreby energie

$$e_{D_0}^k = SoC_{max}^k ; pre k \in K \quad (6)$$

$$e_i^k \geq SoC_{min}^k + c_i + \sum_{j \in F(i)} x_{ij}^k c_{ij} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Fc(r,i)} y_{irt}^k c_{ir} ; pre i \in N, k \in K \quad (7)$$

$$e_j^k \leq e_i^k - x_{ij}^k (c_i + c_{ij}) + SoC_{max}^k (1 - x_{ij}^k) ; pre j \in N, i \in B(j), k \in K \quad (8)$$

$$e_j^k \geq e_i^k - x_{ij}^k (c_i + c_{ij}) - SoC_{max}^k (1 - x_{ij}^k) ; pre j \in N, i \in B(j), k \in K \quad (9)$$

$$e_j^k + c_{rj} + Mq_r (1 - z_{rtj}^k) \geq SoC_{min}^k + z_{rtj}^k c_{rj} ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K, j \in Fi(r, t) \quad (10)$$

$$\varepsilon_{rt}^k \leq e_i^k - y_{irt}^k (c_i + c_{ir}) + SoC_{max}^k (1 - y_{irt}^k) ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K, i \in Bi(r, t) \quad (11)$$

$$\varepsilon_{rt}^k \geq e_i^k - y_{irt}^k (c_i + c_{ir}) - SoC_{max}^k (1 - y_{irt}^k) ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K, i \in Bi(r, t) \quad (12)$$

Podmienky (6) definujú, že na začiatku dňa bude každý elektrobús plne nabitý. Podmienky (7) zaručujú, že každý elektrobús bude mať dost energie na prejdienie spoja a následný prechod k ďalšiemu spoju, respektíve nabíjačke. Podmienky (8) a (9) reprezentujú zachovanie energie medzi dvomi spojmi nasledujúcimi za sebou. Obmedzenie, že elektrobús bude mať dostatok energie na prechod k ďalšiemu spoju po nabíjaní zabezpečujú podmienky (10).

3.5 Podmienky nabíjania

$$e_j^k + c_{rj} - \varepsilon_{rt}^k + SoC_{max}^k (1 - z_{rtj}^k) \geq 0 ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K, j \in Fi(r, t) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{rt+1}^k - \varepsilon_{rt}^k + SoC_{max}^k (1 - w_{rt}^k) \geq 0 ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K \quad (19)$$

$$SoC_{max}^k \geq e_j^k + c_{rj} - Mq_r (1 - z_{rtj}^k) ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K, j \in Fi(r, t) \quad (11)$$

$$SoC_{max}^k \geq \varepsilon_{rt+1}^k - Mq_r (1 - w_{rt}^k) ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K \quad (12)$$

$$e_j^k \leq \varepsilon_{rt}^k + z_{rtj}^k ((s_j - t_{rj} - s_{rt})q_r - c_{rj}) + SoC_{max}^k (1 - z_{rtj}^k) ; pre j \in N, r \in R, t \in Bc(r, j), k \in K \quad (10)$$

$$\varepsilon_{rt+1}^k \leq \varepsilon_{rt}^k + w_{rt}^k (s_{rt+1} - s_{rt})q_r + SoC_{max}^k (1 - w_{rt}^k) ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K \quad (16)$$

$$e_j^k + c_{rj} - \varepsilon_{rt}^k - SoC_{max}^k (1 - z_{rtj}^k) \leq (s_{rt+1} - s_{rt})q_r ; pre r \in R, t \in T^r, k \in K, j \in Fi(r, t) \quad (17)$$

Podmienky (13) a (14) definujú, že ak nabíjam, tak nesmiem nabiť záporné množstvo energie vzhľadom na nasledujúci spoj, respektíve nasledujúcu nabíjaciu udalosť. Podmienky (15) a (16) naopak definujú, že počas nabíjania nesmiem prekročiť maximálnu kapacitu batérie z pohľadu nasledujúceho spoja, respektíve nabíjacej udalosti. Posledným typom obmedzenia je maximálna doba nabíjania batérie. Podmienky (17) predstavujú prípad že po nabíjaní nasleduje spoj, a teda môžem nabiť maximálne toľko, koľko mi dovolí čas medzi začiatkom nabíjacej udalosti a časom začiatku nasledujúceho spoja. Podmienky (18) reprezentujú prípad, že za sebou nasledujú dve nabíjacie udalosti, teda môžem nabíjať iba dovtedy, kým nezačne ďalšia nabíjaciu udalosť. Podmienky (19) reprezentujú kombináciu dvoch predchádzajúcich prípadov. Ak po nabíjaní pokračujem na spoji, čas nabíjania je obmedzený aj začiatkom nasledujúcej nabíjacej udalosti.

3.6 Obligatorne podmienky

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} ; pre k \in K, i \in N \cup D_0 \cup D_n, j \in F(i) \quad (20)$$

$$z_{rtj}^k \in \{0,1\} ; pre k \in K, r \in R, t \in T^r, j \in Fi(r, t) \quad (21)$$

$$y_{irt}^k \in \{0,1\} ; pre k \in K, i \in N, r \in R, t \in Fc(r, i) \quad (22)$$

$$w_{rt}^k \in \{0,1\} ; pre k \in K, r \in R, t \in T^r \quad (23)$$

$$\varepsilon_{rt}^k \geq 0 ; pre k \in K, r \in R, t \in T^r \quad (24)$$

$$e_i^k \geq 0 ; pre k \in K, i \in N \quad (25)$$

Podmienky (20), (21), (22) and (23) vyjadrujú binárnosť rozhodovacích premenných x_{ij}^k , z_{rtj}^k , y_{irt}^k and w_{rt}^k . Na záver je definovaný rozsah premenných ε_{rt}^k a e_i^k v podmienkach (24) a (25).

4 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Na otestovanie modelu a zistenie jeho základných limitov bolo vykonaných niekoľko testov. Testy boli vykonané na stroji s Intel Core i5-7200U 2,5Ghz, 16GB of RAM. Úlohy definované modelom boli riešené exaktne pomocou štandardného IP solvera Xpress IVE.

4.1 Popis dát a scenárov

Dáta pre numerické experimenty boli poskytnuté prevádzkovateľom verejného dopravného systému DPMŽ v meste Žilina. Tieto dáta obsahujú informácie o turnusoch naftových autobusov používaných v prevádzke počas jedného pracovného týždňa. Z týchto dát sme pre otestovanie modelu vytvorili štyri datasety. Prvý dataset (značený ako DS1) obsahuje 49 spojov obsluhovaných na autobusovej linke 26. Druhý dataset (DS2) pokrýva autobusovú linku 27 so 77 spojmi. Tretí dataset (DS3) obsahuje 83 spojov obsluhovaných na autobusových linkách 26 a 29. Posledný dataset (DS4) je zjednotením liniek 26, 27 a 29 a obsahuje 160 spojov.

K testovanie modelu ešte potrebujeme poznať umiestnenia nabíjajúcich staníc. Boli vytvorené tri scenáre s rôznym počtom nabíjačiek umiestnených na rôznych miestach. Prvý scenár, značený ako scenár A, zahŕňa tri nabíjačky na dvoch miestach. Jedna nabíjačka je umiestnená v centre mesta a ďalšie dve sú umiestnené v trolejbusovom depe. Toto umiestnenie reprezentuje aktuálne rozmiestnenie nabíjačiek. V druhom scenári, scenár B, sme pridali ďalšie dve nabíjačky do autobusového depa, kde všetky autobusy začínajú svoj pracovný deň. Posledný scenár, scenár C, pokrýva šesť nabíjačiek, pričom k predchádzajúcim sme pridali jednu nabíjačku na železničnej stanici.

Celkovo teda máme štyri datasety a tri scenáre, čo nám vytvára 12 experimentov. V experimentoch testujeme homogénnu flotilu s jedným typom vozidla. Pre všetky experimenty sme definovali nasledujúce konštanty:

- Maximálna kapacita batérie - $SoC_{max} = 140$ kWh
- Minimálna kapacita batérie - $SoC_{min} = 0$ kWh
- Rýchlosť nabíjania každej nabíjačky $q_r = 1.33$ kWh/min
- Spotreba energie $C = 0.8$ kWh/km
- Priemerná rýchlosť elektrobusu počas presunov $v = 35$ km/h

4.2 Výsledky

Výsledky z vykonaných experimentov môžeme vidieť v tabuľke 1. Ako vidíme vo výsledkoch počet spojov spôsobuje najväčší nárast náročnosti problému, čo ukazuje aj zvýšený čas výpočtu. Druhý faktor, ktorý zvyšuje náročnosť úlohy je počet dostupných nabíjajúcich staníc. Predĺženie času výpočtu môžeme vidieť aj v tomto prípade. V tabuľke 1 sú pre porovnanie aj výsledky klasickej úlohy turnusovania vozidiel (VSP).

Výsledok úlohy turnusovania elektrobusev (EBSP) pre vyššie uvedené datasety sú rovnaké ako pre úlohu klasickeho turnusovania vozidiel (VSP). Preto môžeme povedať, že pre špecifikované linky transformácia z klasickeho autobusu na elektrobusev by prebehla v pomere jeden elektrobusev za jeden klasický autobus.

Tabuľka 1. Výsledky experimentov

Dataset	DS1			DS2			DS3			DS4		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Počet nabíjačiek	3	5	6	3	5	6	3	5	6	3	5	6
Počet spojov	49	49	49	77	77	77	83	83	83	160	160	160
Počet spojov pri VSP	4	4	4	4	4	4	5	5	5	9	9	9
Riešenie EBSP – počet elektrobusev	4	4	4	4	4	4	5	5	5	9	9	9
Výpočtový čas EBSP (s)	2.8	4.9	5.9	12.0	42.5	70.2	35.4	25.8	88.1	277.6	647.9	746.7

5 ZÁVER

V tomto článku sme prezentovali navrhnutý lineárny matematický model pre úlohu turnusovania elektrobusev vo verejnej doprave. Model bol otestovaný na vybraných datasetoch z dát poskytnutých prevádzkovateľom verejného dopravného systému DPMŽ v meste Žilina. Experimenty potvrdili použiteľnosť modelu na riešenie daného problému turnusovania v reálnych situáciách. Takisto boli nájdené základné obmedzenia veľkosti problému, ktoré je možné riešiť optimálne v rozumnom čase pomocou štandardného IP solvera.

Pri riešení reálnych úloh sa však stretávame s podstatne väčšími rozsahmi úloh ako boli vykonané experimenty. Z tohto dôvodu by sme mali navrhnúť rýchlejšiu metódu založenú na heuristických a metaheuristických princípoch aj za cenu straty optimality riešenia.

OZNÁMENIE

Tento príspevok bol podporovaný grantmi VEGA1/0089/19 “Vývoj metodiky pre analýzu prevádzkových dát za účelom podpory rozhodovania v oblasti riadenia obslužných systémov pre elektrické vozidlá” a VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest”.

Použitá literatúra

1. JEONGYONG K. & INHO S. & CHOI, W. 2015. An Electric Bus with a Battery Exchange System. *Energies*. 8. 6806-6819. 10.3390/en8076806
2. MILES, J. & POTTER, S. (2014). Developing a viable electric bus service: The Milton Keynes demonstration project. *Research in Transportation Economics*. 48. 10.1016/j.retrec.2014.09.063.
3. PEROTTA, D. & MACEDO, J. & ROSETTI, R. & SOUSA, J. & KOKKINOGENIS, Z & RIBEIRO, B. & AFONSO, J.L.. (2014). Route Planning for

- Electric Buses: A Case Study in Oporto. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 111. 1004-1014. 10.1016/j.sbspro.2014.01.135.
4. TEOH, L.E. & KHOO, H.L. & YOKE GOH, S. & MUN CHONG, L.. (2017). Scenario-based Electric Bus Operation: A Case Study of Putrajaya, Malaysia. *International Journal of Transportation Science and Technology*. 7. 10.1016/j.ijtst.2017.09.002.
 5. CHAO, Z. & XIAOHONG, CH.. (2013). Optimizing Battery Electric Bus Transit Vehicle Scheduling with Battery Exchanging: Model and Case Study. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 96. 2725-2736. 10.1016/j.sbspro.2013.08.306.
 6. MIRCHANDANI, P. & MADSEN, O. B. G., & ADLER, J. (2012). Scheduling and location issues in transforming service fleet vehicles to electric vehicles. Paper presented at 12th International Conference on Advanced Systems for Public Transport, Santiago, Chile.
 7. van KOOTEN NIEKERK, M. & AKKER, J.M. & HOOGEVEEN, J.A.. (2017). Scheduling electric vehicles. *Public Transport*. 9. 10.1007/s12469-017-0164-0.
 8. SASSI, O. & OULAMARA, A.. (2014). Electric Vehicle Scheduling and Optimal Charging Problem: Complexity, Exact and Heuristic Approaches. *International Journal of Production Research*. 55. 10.1080/00207543.2016.1192695.
 9. ROGGE, M. & van der HURK, E. & LARSEN, A. & SAUER, D.. (2018). Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. *Applied Energy*. 211. 282-295. 10.1016/j.apenergy.2017.11.051.
 10. ROGGE, M. & WOLLNY, S. & SAUER, D.U.. Fast Charging Battery Buses for the Electrification of Urban Public Transport—A Feasibility Study Focusing on Charging Infrastructure and Energy Storage Requirements. *Energies* 2015, 8, 4587-4606.

Kontakné údaje

Ing. Maroš Janovec

Žilinská univerzita, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

email: maros.janovec@fri.uniza.sk

OPTIMALIZAČNÉ ÚLOHY SÚVISIACE S PLÁNOVANÍM FLOTILY ELEKTROBUSOV VO VEREJNEJ DOPRAVE

OPTIMISATION PROBLEMS RELATED TO THE PLANNING OF ELECTRIC BUS FLEET IN THE PUBLIC TRANSPORT

Michal Koháni

Abstrakt

V súvislosti s nástupom elektromobility existuje viacero výskumných úloh, ktoré je nutné riešiť a ich riešenie v poslednom období zaujíma pozornosť výskumníkov v čoraz väčšej miere. V tomto príspevku sa zameriame na úlohy súvisiace s elektrickými autobusmi vo verejnej doprave. Pri návrhu transformácie flotily klasických autobusov na elektrické autobusy je nutné riešiť úlohy súvisiace s umiestnením nabíjajúcich staníc, ale aj úlohu turnusovania, nakoľko na rozdiel od klasických naftových autobusov je dobíjanie energie proces zaberajúci viac času a je nutné s ním pri plánovaní obehov počítať. V príspevku predstavíme matematické modely a naznačíme spôsoby ich riešenia.

KLúčové slová: *umiestňovacie úlohy, nabíjacie stanice, elektrické autobusy*

Abstract

There is a number of research challenges that need to be addressed in the context of the emergence of electromobility. In the recent times researchers are increasingly addressing the issue of solving these problems. In this paper, we will focus on problems related to the electric buses in public transport. When designing the transformation of a classic bus fleet into the electric buses, it is necessary to deal with the problems related to the location of charging stations, but also the scheduling problems, because the recharging energy is a process that takes more time and it is necessary to take it into account. We present mathematical models and suggest ways of solving them.

Keywords: *electric buses, charging stations, location problems*

1 ÚVOD

V decembri 2015 bola prijatá Parížska dohoda, podľa ktorej by bolo potrebné udržať nárast priemernej svetovej teploty pod 2°C [1]. Tento cieľ sa dá dosiahnuť znížením produkcie skleníkových plynov, najmä CO₂, ktorý produkujú hlavne mestské regióny (70 % v roku 2013) [2]. Jednou z oblastí, ktorej sa znižovanie emisií týka, je doprava, ktorá má 23 % podiel na globálnych emisiách. Zníženie emisií a zníženie súvisiacich nákladov je možné podporou verejnej dopravy a alternatívnych pohonov, ako sú napríklad elektrobuses [3].

Nástup elektrobuses nastal v posledných rokoch. Z technologického hľadiska šlo prevažne o testovanie rôznych technológií nabíjania a prevádzky elektrobuses, ktoré boli spojené s vysokými nákladmi na budovanie infraštruktúry a ich prevádzku. Podľa záverov projektu ZeEUS [3] viaceré európske mestá plánujú masívny nárast podielu elektrobuses vo mestách. Do roku 2020 plánuje 19 dopravných podnikov prevádzkujúcich dopravu v 25 mestách Európy zaradenie 2500 elektrobuses do prevádzky, čo bude predstavovať 6 % podiel na všetkých prevádzkovaných vozidlách týchto podnikov. Do roku 2025 plánujú prevádzkovatelia v 18

mestách zakúpiť viac než 6100 elektrobusev. [3] V tejto súvislosti dôjde k zníženiu investičných nákladov, ale aj k ďalším výzvam, ktoré bude treba riešiť v súvislosti s optimálnym návrhom infraštruktúry a ekonomicky efektívnou prevádzkou siete elektrobusev.

V tomto príspevku sa zameriame na úlohy súvisiace s elektrickými autobusmi vo verejnej doprave. Pri návrhu transformácie flotily klasických autobusov na elektrické autobusy je nutné riešiť úlohy súvisiace s umiestnením nabíjajúcich staníc, ale aj úlohu turnusovania, nakoľko na rozdiel od klasických naftových autobusov je dobíjanie energie proces zaberajúci viac času a je nutné s ním pri plánovaní obehov počítať. V príspevku predstavíme matematické modely a naznačíme spôsoby ich riešenia.

2 SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY

Prvou veľkou oblasťou výskumu v oblasti zavedenia elektrických autobusov je výskum možností rôznych technológií nabíjania elektrobusev a vytvorenie matematických modelov na výber ekonomicky najvhodnejšej technológie. V súčasnosti je prevádzka elektrobusev len v 4 mestách na Slovensku. Ide o niekoľko vozidiel s nízkym dojazdom a dobíjanie je riešené počas nočného pobytu v depe. Podľa [3] existuje viacero iných technológií v rámci nabíjania vozidiel a viacero typov vozidiel s rôznym dojazdom. V dostupnej literatúre sa problematike ekonomickej efektivity rôznych technológií venuje málo autorov. V [4] je popísaná štúdia, ktorá súvisí s analýzou rôznych stratégií rýchleho nabíjania elektrobusev z hľadiska použitej technológie vo vozidle, ale aj z hľadiska cien elektriny. Podobnou štúdiou je aj [5], ktorá sa zaoberá stratégiami nabíjania osobných elektrických vozidiel, avšak uvedené poznatky sa budú dať prispôbiť aj pre elektrobusey. Pri posudzovaní najvhodnejšej technológie je potrebné brať do úvahy aj celkovú ekonomickú výhodnosť, pričom metodika posudzovania bola autormi v článku [20] otestovaná na prípade prevádzky elektrobusev v MHD Berlín. V [6] je uvedená štúdia, ktorá sa zaoberá špecifikom verejnej dopravy, kedy vozidlá jazdia po plánovaných trasách a v denných turnusoch [7].

Ďalšou oblasťou je výskum možností využitia rôznych typov umiestňovacích úloh pri plánovaní siete nabíjajúcich staníc pre elektrobusey v mestskej doprave a návrh metód pre ich riešenie. Jednou z prác, ktorá sa komplexne venuje návrhu umiestnenia nabíjajúcej infraštruktúry, je práca [8], v ktorej vytvorili autori celočíselný model na umiestnenie nabíjajúcich staníc v mestskej oblasti a otestovali ho na údajoch o autobusových linkách v Štokholme. Výpočet bol realizovaný pomocou komerčného IP solvera CPLEX. Pre riešenie úlohy návrhu umiestnenia nabíjajúcich staníc môžu byť použité aj úpravy matematických modelov predstavených v prácach, ktoré sa zaoberajú návrhom nabíjajúcej infraštruktúry pre osobné elektrické vozidlá. V práci [9] bol použitý model, ktorý slúži pre overovanie návrhov umiestnenia nabíjajúcich staníc, ktoré sú vytvárané pomocou genetického algoritmu. Niekoľko autorov sa inšpirovalo lokačnými úlohami vedúcimi k riešeniu úloh zmiešaného celočíselného programovania. V [10] bol na základe dopravného prieskumu pre mesto Lyon odhadnutý dopyt po nabíjaní elektrických vozidiel a minimalizáciou nákladov bolo nájdené vhodné umiestnenie nabíjajúcich staníc. Optimalizačný problém bol vyriešený pomocou univerzálneho optimalizačného nástroja. Podobná metodológia bola použitá aj v práci [11]. Riešenia navrhnutých optimalizačných problémov sú verifikované pomocou simulačných metód, ako napríklad v [12]. Pri riešení návrhu siete nabíjajúcich staníc pre elektrobusey využijeme je možné využiť aj podobné štúdie, ktoré boli zamerané nie na elektrobusey, ale na klasické elektrické automobily. V [13] a [14] sme sa venovali metodológii a návrhu matematického modelu umiestnenia nabíjajúcich staníc pre flotilu elektrických vozidiel pomocou lokačno-rozvrhového modelu, ktorý sme riešili pomocou IP solvera.

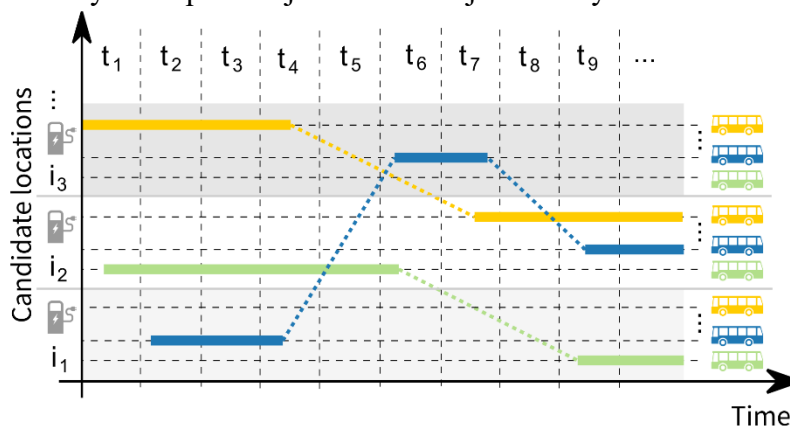
Ďalšou oblasťou je výskum plánovania turnusov pre elektrobuses v mestskej doprave a návrh metód pre ich riešenie. Na rozdiel od klasických naftových autobusov, v prípade elektrobuses je nutné počítať pri tvorbe turnusov s viacerými obmedzeniami navyše. Jedná sa najmä o výrazne dlhší čas potrebný na nabitie vozidla, ktorý je obvykle niekoľkonásobne vyšší, než v prípade tankovania naftových vozidiel. V modeloch je preto nutné počítať s väčším množstvom obmedzení a štruktúrnych podmienok. V súčasnej literatúre je možné nájsť viacero prístupov, ktoré sú závislé na použitej technológii.

Jednou z technológií je fast charging, ktorej sa venujeme aj v našom výskume. Táto technológia je špecifická hlavne tým, že sa nabíja na nabíjacích staniách, ktoré sú umiestnené v dopravnej sieti na vybraných miestach. Pri tomto type nabíjania treba brať do úvahy aj samotné nabíjanie, keďže trvá dlhší časový úsek. Touto oblasťou sa zaoberali najmä autori v práci [15], kde riešili úlohu návrhu dopravného systému, čo zahrňovalo návrh liniek, ako aj návrh turnusov elektrobuses prostredníctvom sumulačného prístupu. Ďalšie možnosti riešenia je možné nájsť napríklad v [16], kde boli predstavené dva modely na riešenie úlohy turnusovania elektrobuses.

3 ÚLOHA ROZMIESTNENIA NABÍJACÍCH STANIČ PRE ELEKTROBUSY

Úloha rozmiestnenia nabíjacích staníc pre elektrobuses je bližšie popísaná v [17][18]. Pri riešení tejto úlohy predpokladáme, že sa nebudú meniť existujúce turnusy vozidiel a pri riešení úlohy rozmiestnenia nabíjacích staníc sú tieto turnusy známe. Cieľom je nájsť také umiestnenie nabíjacích staníc a počet nabíjacích bodov na týchto staniách tak, aby bolo možné všetky vozidlá vo flotile transformovať na elektrické vozidlá. Predpokladá sa, že vozidlá sa môžu nabíjať nie len v depe, ale aj na iných miestach, kde je umiestnená nabíjacia stanica a to aj počas dňa v rámci existujúcich prestávok v turnusoch. Nabíjacie stanice môžeme budovať v ktoromkoľvek mieste množiny I , čo je množina kandidátov, kde je možné umiestniť nabíjajúcu stanicu. V našom prípade bude množinu kandidátov tvoriť depo a všetky možné konečné zastávky v rámci siete liniek. Rozhodovacie premenné súvisiace s budovaním nabíjacích staníc sú nasledovné. Premenné $y_i \in \{0,1\}$ predstavujú rozhodnutie o vybudovaní nabíjajúcej stanice v mieste $i \in I$ a premenné $q_i \in \mathbb{Z}^+$ určujú počet počet nabíjacích bodov v mieste $i \in I$.

Okrem umiestňovacích premenných potrebujeme v modeli riešiť aj rozvrh nabíjania vozidiel. Ako inšpiráciu pre tvorbu modelu sme použili postup použitý v článku [18], kde sa čas diskretizoval po určitých úsekoch dňa a nabíjanie vozidiel sa riešilo v daných časových úsekoch pomocou 0-1 premenných. Popis nabíjania vozidiel je uvedený na obr. 1.



Obr. 1. Popis nabíjania vozidiel

Predpokladáme, že riešime úlohu pre množinu vozidiel V , pričom každé vozidlo vykonáva v deň $d \in D$ spoje $j \in J_{vd}$. Pre každé vozidlo máme popísané časové intervaly, v ktorých sa

môže medzi dvoma spojmi nabíjať, popísané ako množinu T_{ijvd} . Rozhodovacie premenné súvisiace s nabíjaním preto môžeme popísať nasledovne. Premenné $x_{ijvd} \in \{0,1\}$ predstavujú rozhodnutie, či sa bude vozidlo $v \in V$ nabíjať pred spojom $j \in J_{vd}$ na zastávke $i \in I$ počas časového intervalu $t \in T_{ijvd}$ v deň $d \in D$. Premenné $d_{jvd} \in \mathbb{R}^+$ predstavujú kapacitu batérie vozidla $v \in V$ na začiatku spoja $j \in J_{vd}$ v deň $d \in D$.

V modeli sme tak isto riešili aj situácie, že ak je medzi dvoma nasledujúcimi spojmi dostatočný časový priestor na to, aby sa nabíjalo, môže na nabíjanie použiť buď nabíjacie miesto na konečnej zastávke vykonaného spoja, ak je vybudované, alebo nabíjacie miesto na zastávke nasledujúceho spoja, ak je vybudované. Táto situácia je riešená prostredníctvom premennej $z_{jvd} \in \{0,1\}$, ktorá reprezentuje rozhodnutie o tom, či sa bude vozidlo $v \in V$ nabíjať na koncovej zastávke spoja $j \in J_{vd}$, alebo na začiatkovej zastávke spoja $j+1 \in J_{vd}$.

Matematický model je bližšie popísaný v [19]. Účelová funkcia (1) zabezpečuje, aby bol vybudovaný čo najmenší počet nabíjacích staníc.

$$\text{Minimize } \sum_{i \in I} q_i \quad (1)$$

Štruktúrne podmienky v modeli je možno rozdeliť na viacero skupín, ich bližší popis je uvedený v [19]. Jedna skupina podmienok zabezpečuje, aby boli vybudované nabíjacie stanice tam, kde majú byť vybudované stojany. Ďalšie skupiny podmienok zabezpečuje kontinuitu nabíjania vozidiel, zabezpečenie neprekročenia maximálnej kapacity batérie vozidla pri nabíjaní a tak isto aj vytvorenie istého plánu nabíjania vozidiel, ktorý rešpektuje počet vybudovaných nabíjacích bodov.

Navrhnutý matematický model bol otestovaný na testovacích dátových sádach rôznej veľkosti, ktoré boli vytvorené zo siete liniek MHD Žilina. Úloha bola riešiteľná exaktne pre pomerne veľké rozsahy úloh (2 týždne prevádzky vozidiel, maximálny počet vozidiel bol 46)[IDT][KOI].

Ďalší výskum v tejto oblasti bude zameraný na otestovanie iných účelových funkcií. Do úvahy pripadá napríklad minimalizácia nákladov spojených s budovaním a prevádzkou infraštruktúry, nakoľko v aktuálnej účelovej funkcii tieto informácie nie sú zahrnuté. Okrem toho uvažujeme aj s úpravou spôsobu nabíjania energie elektrobusev. Momentálne predpokladáme, že nabíjanie je lineárny proces, čo v praxi neplatí. Lineárnu funkciu preto plánujeme nahradiť nelineárnou, ktorá bude lepšie popisovať skutočné nabíjanie vozidiel.

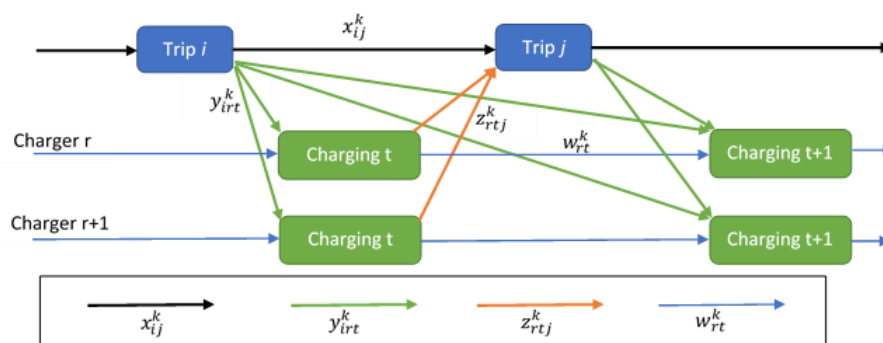
4 ÚLOHA TURNUSOVANIA ELEKTRICKÝCH AUTOBUSOV

Úloha turnusovania elektrobusev je bližšie popísaná v [20][21]. V tejto úlohe predpokladáme, že rozmiestnenie nabíjacích staníc a počet nabíjacích bodov je určený. Cieľom modelu je vytvoriť rozvrhy pre jednotlivé elektrobusev a zároveň aj rozvrh nabíjania na jednotlivých nabíjacích bodoch tak, aby boli rešpektované obmedzenia dojazdu elektrobusev a kapacity ich batérií. Je potrebné vytvoriť optimálny rozvrh elektrobusev tak, aby bol použitý čo najmenší počet vozidiel (2).

Základnými rozhodovacími premennými sú premenné, ktoré zabezpečujú kontinuitu vytvoreného rozvrhu. Vozidlá môžu v rozvrhu prechádzať nie len medzi spojmi, ale aj medzi nabíjacími udalosťami. Rozhodovacie premenné $x_{ij}^k \in \{0,1\}$, ktoré reprezentujú rozhodnutie, či budeme obsluhovať spoj $j \in N$ priamo po spoji $i \in N$ vozidlom $k \in K$, teda budú obsluhované dva spoje za sebou bez dobíjania. Rozhodovacie premenné $y_{irt}^k \in \{0,1\}$, zabezpečujú rozhodnutia o tom, či zo spoja $i \in N$ pôjdeme nabíjať vozidlo $k \in K$ na nabíjačku $r \in R$ počas nabíjacej udalosti $t \in T$. Rozhodovacie premenné z_{rtj}^k zabezpečujú ukončenie nabíjania a pokračovanie vozidla na spoj, t.j. vozidlo $k \in K$ obsluží spoj $j \in N$ po nabíjacej

udalosti $t \in T$ na nabíjačke $r \in R$. V prípade tohto modelu boli nabíjacie udalosti riešené iným spôsobom, ako v úlohe rozmiestnenia nabíjacích staníc. Čas nebol diskretizovaný, ale nabíjacie udalosti boli naviazané na existujúcu množinu spojov N , teda dĺžka nabíjacích udalostí je rôzna.

Nakoľko nabíjanie môže trvať viac nabíjacích udalostí za sebou, rozhodovacie premenné $w_{rt}^k \in \{0,1\}$ zabezpečujú rozhodnutie, či vozidlo $k \in K$ bude pokračovať v nabíjaní na nabíjacej udalosti $t + 1$ na nabíjačke $r \in R$ po skončení nabíjacej udalosti t . Ilustráciu rozhodovacích premenných môžeme vidieť na obrázku 1. Na sledovanie stavu nabitia energie pre jednotlivé vozidlá slúžia premenné e_i^k a ε_{rt}^k , kde e_i^k reprezentuje stav nabitia batérie vozidla k pred spojom i a ε_{rt}^k reprezentuje stav nabitia batérie vozidla k pred nabíjacou udalosťou t na nabíjačke r .



Obr. 2. Popis rozhodovacích premenných pri úlohe turnusovania elektrických autobusov [IDT][ZUB]

Matematický model úlohy je bližšie popísaný v [20][21]. V účelovej funkcii (2) sa snažíme o minimalizáciu počtu použitých vozidiel, pričom vozidlá môžu začínať svoj turnus buď spojom, alebo nabíjaním.

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{D_0j}^k + \sum_{k \in K} \sum_{r \in R} \sum_{t \in Fc(r, D_0)} y_{D_0t}^k \quad (2)$$

V modeli je viacero skupín štruktúrálnych podmienok. Prvú skupinu tvoria podmienky turnusovania, ktoré zabezpečujú kontinuitu spojov a nabíjacích udalostí u každého vozidla. Druhá skupina sú podmienky spotreby energie a treťou skupinou podmienky nabíjania. Tieto podmienky zabezpečujú, aby stav nabitia batérie nepresiahol maximálnu kapacitu a neklesol pod nulovú hodnotu.

Navrhnutý matematický model bol otestovaný na testovacích dátových sadách rôznej veľkosti, ktoré boli vytvorené zo siete liniek MHD Žilina. Úloha bola riešiteľná exaktne len pre menšie testovacie úlohy, nakoľko výpočtový čas rýchlo narastal so zväčšujúcim sa rozsahom úlohy [20][21].

V budúcnosti sa plánujeme zaoberať inými typmi účelových funkcií, ako sú napríklad minimalizácia nákladov spojených s manipulačnými presunmi, alebo celkovými nákladmi na prevádzku takéhoto systému. Bude nutné nájsť aj iné metódy riešenia, založené napríklad na princípoch metódy generovania stĺpcov alebo metaheuristických metódach.

5 ZÁVER

Elektromobilita vo verejnej doprave je oblasť, v ktorej v najbližšom období predpokladáme zvýšený záujem o riešenie optimalizačných úloh s ňou súvisiacich. Ako je vidieť z príspevku, úloh spojených s elektrobusedmi je viacero. Jedná sa o úlohy súvisiace s budovaním infraštruktúry, ale aj s prevádzkou a turnusovaním elektrobusedov. V najbližšom období predpokladáme, že naše výskumné aktivity sa budú zaoberať úpravami matematických

modelov, testovaním vplyvu iných účelových funkcií na riešenie uvedených modelov, ale aj hľadáním iných spôsobov riešenia týchto úloh, aby sme boli schopní riešiť úlohy väčšieho rozsahu.

OZNÁMENIE

Tento príspevok bol podporený grantom VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest”.

Použitá literatúra

1. European Commission – Paris Agreement, 2016, <http://ec.europa.eu>
2. IEA, CO2 emissions from fuel combustion 2015, OECD Publishing, Paris, 2015
3. ZeEUS - eBus Report, 2016, ZeEUS is co-funded by the European Commission under the 7th Research & Innovation Framework Programme, Mobility & Transport Directorate General under grant agreement n° 605485.
4. QIN, N., GUSRIALDI, A., BROOKER, R. P. AND T-RIASSI, A., 2016: Numerical analysis of electric bus fast charging strategies for demand charge reduction, In: *Transportation Research Part A*, Elsevier, **94**, pp: 386-396
5. KARBASIOUN, M., LAMBADARIS, I., SAHIKHET, G., KRANAKIS, E., 2014: Optimal charging strategies for electrical vehicles under real time pricing, In: 2014 IEEE International Conference on Smart Grids Communications, Venice, November 2014, pp: 746 – 751.
6. PAUL, T., YAMADA, H., 2014: Operation and charging scheduling of electric busses in a city bus route network, In: IEEE 17th International Conference on Intelligent Transport Systems (ITSC), 2014, pp: 2780 – 2786.
7. JÁNOŠÍKOVÁ, L., KOHÁNI, M., BLATOŇ, M., TEICHMANN, D. 2012. Optimization of the urban line network using a mathematical programming approach. In *International Journal of Sustainable Development and Planning*. ISSN 1743-7601, 2012, Vol. 7, No. 3, p. 288–301
8. XYLIA, M., LEDUC, S., PATRIZIO, P., KRAXNER, F. AND SILVEIRA, S. 2017. Locating charging infrastructure for electric buses in Stockholm, In: *Transportation Research Part C*, **78**, Elsevier, pp: 183-200
9. L. DICKERMAN, J. HARRISON, JESSICA, A. 2010. New Car, a New Grid, IEEE Power & Energy Magazine, Vol. 8, No. 2, pg. 55-61
10. F. BAUCHE, R. BILLOT, R. TRIGUI, N.E. EL FAOUZI, 2014. Efficient Allocation of Electric Vehicles Charging Stations: Optimization Model and Application to a Dense Urban Network, IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine, Vol. 33
11. J. CAVADAS, G. CORREIRA, J. GOUVEIA, 2014. Electric Vehicles Charging Network Planning, In: J.F. De Sousa, and R. Rossi (eds.), *Computer-based Modelling Optimization in Transportation*, Advances in Intelligent Systems and Computing 262, Springer International Publishing Switzerland
12. T. SWEDA, D. KLABJAN, 2011. An agent-based decision support system for electric vehicle charging infrastructure deployment, Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), IEEE , pp. 1 - 5
13. CZIMMERMANN, P., KOHANI, M., BUZNA, L., 2017. The design of charging infrastructure for electric vehicles and its properties, In: SOR '17: proceedings of the 14th international symposium on operational research: Bled, Slovenia, September 27-29, 2017. - Ljubljana: Slovenian Society Informatika, Section for Operational Research, 2017. - ISBN 978-961-6165-50-1. - pp. 123-128.

14. KOHÁNI, M., CZIMMERMANN, P., VÁŇA, M., CEBECAUER, M., BUZNA, L., 2017. Designing charging infrastructure for a fleet of electric vehicles operating in large urban areas, In: ICORES 2017: proceedings of the 6th International conference on operations research and enterprise systems : Porto, Portugal February 23-25, 2017. - [S.l.]: SCITEPRESS - Science and technology publications, 2017. - ISBN 978-989-758-218-9. - pp. 360-368.
15. TEOH, L.E. & KHOO, H.L. & YOKE GOH, S. & MUN CHONG, L.. (2017). Scenario-based Electric Bus Operation: A Case Study of Putrajaya, Malaysia. International Journal of Transportation Science and Technology. 7. 10.1016/j.ijtst.2017.09.002.
16. van KOOTEN NIEKERK, M. & AKKER, J.M. & HOOGEVEEN, J.A.. (2017). Scheduling electric vehicles. Public Transport. 9. 10.1007/s12469-017-0164-0.
17. KOHÁNI, M., VASILOVSKÝ, P. 2018. Location-scheduling approach to the electric buses charging infrastructure design in urban areas, In: KOI 2018 conference, Zadar, Chorvátsko
18. VASILOVSKÝ P., KOHÁNI, M. 2019. Simulation verification of location of charging stations for electric buses, In: IDT 2019 conference, Žilina, Slovensko, v tlači
19. VASILOVSKÝ, P., 2019. Návrh nabíjacej infraštruktúry pre elektrobuses v mestskej hromadnej doprave, In: SSOV - Quantitative Methods in Research and Practice, seminár, Zuberec.
20. JANOVEC, M., KOHÁNI, M. 2019. Exact approach to the electric bus fleet scheduling, In: Transcom 2019 – konferencie, Starý Smokovec, v tlači
21. JANOVEC, M., 2019. Exaktný prístup k turnusovaniu elektrických autobusov, In: SSOV - Quantitative Methods in Research and Practice, seminár, Zuberec.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michal Koháni, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 01026 Žilina

Tel: (421 41) 513 4060

email: novak@euba.sk

ÚVOD DO ANALÝZY PRIESTOROVEJ AUTOKORELÁCIE S PROGRAMOVACÍM JAZYKOM R

AN INTRODUCTION TO ANALYSIS OF SPATIAL AUTOCORRELATION WITH PROGRAMMING LANGUAGE R

Stanislav Kováč

Abstrakt

Priestorová analýza dát je rýchlo rastúci kvantitatívno-grafický aparát s aplikáciou vo viacerých vedných disciplínach, napr. regionálna ekonómia, kriminológia, politológia, psychológia, demografia, epidemiológia, analýza trhu nehnuteľností či marketing. Častým javom priestorových dát je podobnosť blízkyh územných jednotiek. Tento jav predstavuje problém priestorovej autokorelácie, ktorá má za následok porušenie predpokladu metódy najmenších štvorcov, je preto nevyhnutné testovanie jej prítomnosti. Na testovanie použijeme programovací jazyk a prostredie R.

Kľúčové slová: priestorová ekonometria, autokorelácia, R programovací jazyk

Abstract

Spatial data analysis is a rapidly expanding quantitative-graphical apparatus with applications in many scientific disciplines, e.g., regional economics, criminology, political sciences, psychology, demography, epidemiology, real estate or marketing. A very frequent phenomenon of spatial data is similarity of close areal units. This represents a problem of spatial autocorrelation which leads to the violation of least squares regression assumption hence it is necessary to test it. We use a programming language and working space of R.

Keywords: spatial econometrics, autocorrelation, R programming language

1 PREREKvizITY ANALÝZY: SUSEDNOSŤ A MATICA VÁH

Už v roku 1889 Galton (Bivand et al., 2013) spochybnil nezávislosť pozorovaní právnej úpravy manželstiev medzi územnými jednotkami, nakoľko právna úprava častokrát len reflektuje všeobecne akceptovateľný vzorec správania rozširujúci sa od rodiska myšlienky. Dopad tejto rastúcej pozitívnej závislosti má tendenciu redukovať množstvo zachytenej informácie v pozorovaniach, pretože i -tá územná jednotka je v takom prípade aproximáciou j -tej územnej jednotky. Táto situácia predstavuje problém priestorovej autokorelácie, často v literatúre označovaný ako Galtonov problém.

Ak je prítomná autokorelácia v stochastickej zložke, potom niektoré alebo všetky mimo-diagonálne prvky variančno-kovariančnej matice sú nenulové. Kvôli tomu je porušený predpoklad metódy najmenších štvorcov a zovšeobecnená metóda najmenších štvorcov môže byť použitá, len ak sme schopní špecifikovať vhodnú formu autokorelácie.

Pozitívna autokorelácia je prítomná, ako Galton správne postrehol, keď blízke územné jednotky sú si podobné. Je zrejmá nevyhnutnosť definovať koncept územnej blízkosti - **susednosti**. Práve v tom je rozdiel medzi štandardnou a priestorovou ekonometriou. Zatiaľ čo v prípade štandardnej ekonometrie informačná množina zahŕňa údaje zachytené prostredníctvom hodnôt premenných, v prípade priestorovej ekonometrie sa informačná

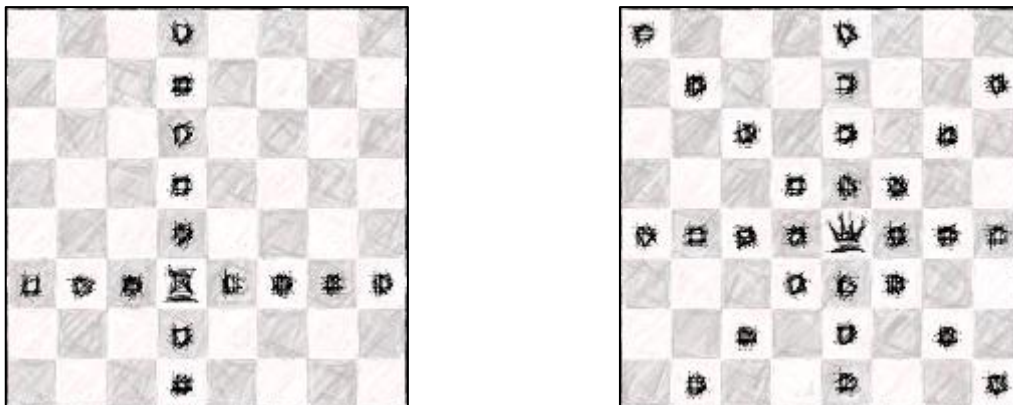
množina rozšíri o údaje zachytené v pozícii územnej jednotky. Táto dodatočná podmnožina informácií je tiež dôvodom, prečo sa niektoré ekonometrické a štatistické softvéry (EViews, SPSS) nevenujú priestorovej ekonometrii.

Pokiaľ sú dáta na regulárnej štvorcovej mriežke, územná blízkosť (susednosť) môže byť definovaná prostredníctvom 2 kritérií, ktoré vychádzajú z pravidiel šachu:

1. veža - dve územné jednotky sú susedmi, ak zdieľajú stranu,
2. kráľovná - dve územné jednotky sú susedmi, ak zdieľajú stranu alebo roh.

Prepojenie so šachom je zobrazené na obr. 1. Avšak vo väčšine prípadov územné jednotky nie sú regulárnych tvarov.

Obr. 1: Kritérium susednosti vľavo - veža, vpravo - kráľovná



Zdroj: spracované podľa: <http://www.chess-class.com> [cit. 2019-04-21].

Prvý krok je definovanie susednosti na základe zvoleného kritéria. Na vytvorenie susednosti v RStudiu využijeme balík **spdep**¹, kde susedské vzťahy medzi n územnými jednotkami sú reprezentované objektom triedy *nb*. Objekt vytvorí n -rozmerný vektor, ktorý definuje susedov i -tej územnej jednotky. Za zmienku stojí pomocná funkcia *card*, ktorá vráti kardinalitu množiny susedov i -tej územnej jednotky, je zrejmé, že sa to môže líšiť od hodnoty navrátenej funkciou *length* (zoznam komponentov - aj susedov, aj nesusedov).

V našej analýze použijeme dáta od Wallera a Gotwaya (2004), neskôr upravené Bivandom (2019). Sledovanou oblasťou je 8 regiónov severu štátu New York, čo predstavuje 281 územných jednotiek. Kvôli zjednodušeniu bude analýza priestorovej autokorelácie zrealizovaná na podmnožine zastupujúcej región Syracuse (63 územných jednotiek).

Na zobrazenie priestorových objektov (vo formáte .SHP) je potrebný balík **rgdal**², ktorý obsahuje funkciu *readOGR*. S touto funkciou je RStudio schopné spracovať vektorové, priestorové dáta pre geografické informačné systémy. Súbor .SHP nie je možné otvoriť v MS Excel-i, ale sprevádzajúci súbor .DBF áno, pomocou ktorého môžeme získať prehľad o obsahu.

Problém nastáva nielen pri definovaní susednosti, ale aj pri spracovaní susednosti programom RStudio. Využijeme definovanie susednosti prostredníctvom kritériá kráľovná, kde každý dotýkajúci polygón (mnohouholník reprezentujúci územnú jednotku) je sused. Na spracovanie údajov susednosti použijeme súbor vo formáte .GAL, ktorého ukázkový obsah je zobrazený

¹ **spdep** - zbierka funkcií a testov na meranie priestorových vzorov a autokorelácie.

² Ďalšou možnosťou na spracovanie .SHP súborov je využitie balíka **GISTools** a funkcie *readShapePoly*.

na obr. 2. Prvý riadok obsahuje označenie prvej a poslednej územnej jednotky. V druhom riadku definujeme počet susedov pre prvú územnú jednotku (označenú nulou) a v nasledujúcom riadku týchto susedov individuálne vypíšeme. Obdobne pre všetky územné jednotky. Príprava takého súboru je časovo náročná. Existuje ale viacero možností vytvorenia množiny susednosti pre i -tú územnú jednotku (ozn. N_i), napr. prostredníctvom súboru vo formáte .GWT a funkcie `read.gwt2nb`. Najjednoduchší spôsob je využiť funkciu `poly2nb` z balíku **spdep**, prostredníctvom ktorej môžeme definovať susedov priamo z grafu polygónov. Úvodný kód spolu s výstupom sú reprezentované pod označením kód 1 a obr. 3.

Obr. 2: Ukážka súboru .GAL

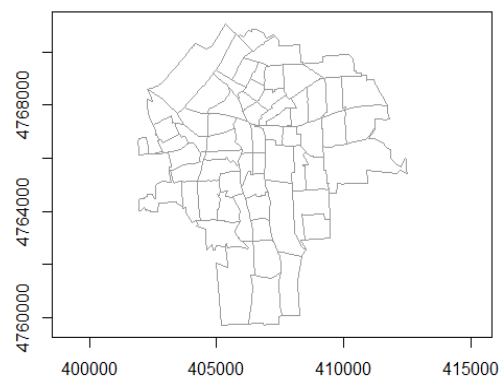
	A	B	C
1	0 281	unknown	unknown
2	0 8		
3	1 12 13 14	46 47 48 49	
4	1 6		
5	0 2 12 34	46 47	
6	2 3		
7	1 12 34		
8	3 3		
9	4 5 34		
10	4 4		
11	3 5 9 11		

Zdroj: vlastné spracovanie.

Kód 1: Načítanie³ a zobrazenie priestorových objektov v R

```
install.packages("rgdal","spdep")
library(rgdal)
library(spdep)
NY8 <- readOGR("NY8.shp","NY8")
NY_nb <- read.gal("NY_nb.gal",
  region.id = row.names(NY8))
# definovanie sledovanej podmnožiny
Syracuse <- NY8[NY8$AREANAME ==
  "Syracuse city",]
Sy0_nb <- subset(NY_nb, NY8$AREANAME
  == "Syracuse city")
# zobrazenie
plot(Syracuse, border = "grey60",
  axes = TRUE)
```

Obr. 3: Zobrazenie podmnožiny (regiónu) Syracuse - 63 územných jednotiek



Zdroj: spracované podľa Bivanda (2019).

Program RStudio povoľuje definovanie maximálneho počtu susedov. Prirodzene, takéto stanovanie zvyčajne vedie k asymetrii, avšak definovanie práve jedného najbližšieho suseda môže napomôcť k nájdeniu najkratšej vzdialenosti medzi bodmi (najbližší s ohľadom na centroidy polygónov). Na definovanie k najbližších susedov použijeme funkciu `knearneigh`,

³ Na načítanie súborov do RStudia odporúčame použiť funkciu `file.choose`.

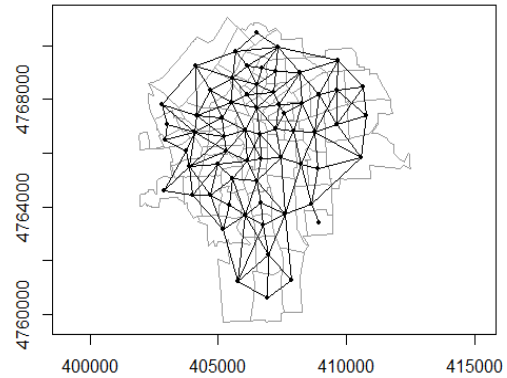
ktorá využíva súradnice priestorových objektov a za pomoci *knn2nb* vytvoríme zoznam susedov z *knn* objektu. Kód 2 poskytuje možnosť zobrazenia susedností⁴ podľa kritéria kráľovná a práve jedného najbližšieho suseda. Výstup je zobrazený na obr. 4.

Kód 2: Grafy susednosti v R

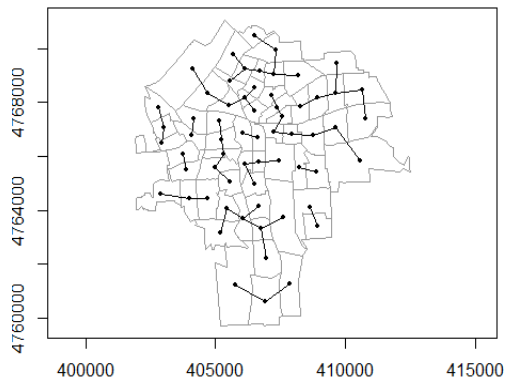
```
coords <- coordinates(Syracuse)
IDs <- row.names(Syracuse)
Sy1_nb <- knn2nb(knearneigh(coords,
  k = 1, row.names = IDs)
# zobrazenie kráľovnej
plot(Syracuse, border = "grey60",
  axes = TRUE)
plot(Sy0_nb, coords, pch = 19, cex =
  0.6, add = TRUE)
# zobrazenie najbližšieho suseda
plot(Syracuse, border = "grey60",
  axes = TRUE)
plot(Sy1_nb, coords, pch = 19, cex =
  0.6, add = TRUE)
```

Obr. 4: Zobrazenie grafov susednosti

a) kritérium kráľovná



b) najbližší sused



Zdroj: spracované podľa Bivanda (2019).

Nevyhnutnou prerekvizitou pre testovanie priestorovej autokorelácie je definovanie **matice váh**: $W_{n \times n} = \{w_{ij}\}$. RStudio využíva funkciu *nb2listw*, ktorá vezme objekt zoznamu susedov a konvertuje ho do objektu váh. Prednastavený štýl je *style="W"*, kde váhy pre každú územnú jednotku sú riadkovo normalizované (súčet rovný jednej), tzn.:

$$w_{ij}^* = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^n w_{ij}}, \quad w_{ij}^* \in W^*. \quad (1)$$

Je zrejmé, že územné jednotky s menším počtom susedov majú väčšie hodnoty váh.

Prvotný pohľad na definovanie matice váh je prostredníctvom binárnej kombinácie, kde každý susedský vzťah je ohodnotený jednotkou a nesusedský nulou. Riadková suma je závislá od počtu susedov územnej jednotky. V prípade, že máme záujem využiť binárny štýl, je nutné ho definovať ako argument funkcie *nb2listw(style="B")*. Takto generované prvky matice váh vychádzajú zo vzťahu:

⁴ Ak objekt *nb* obsahuje nesusedské oblasti, napr. ostrovy, je nutné povoliť vytvorenie priestorových objektov s nulovými váhami pre celú sekciu R prostredníctvom *set.ZeroPolicyOption(TRUE)*.

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in N_i \\ 0, & j \notin N_i \end{cases}, \quad (2)$$

kde N_i je množina susedov i -tej územnej jednotky. Z definície tiež vyplýva, že $w_{ii} = 0$.

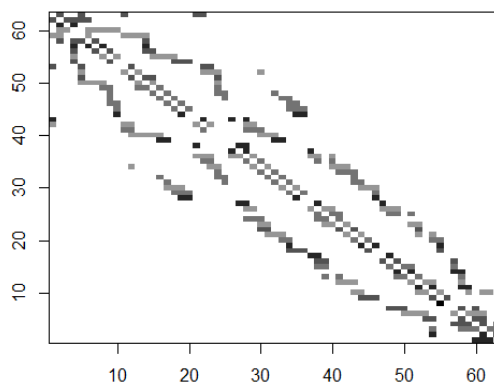
Existujú aj iné metódy definovania matice váh. Ak veríme, že sila susedských vzťahov sa utlmuje s rastúcou vzdialenosťou, je vhodné stanoviť váhy proporcionálne k inverznej hodnote vzdialenosti medzi centroidmi územných jednotiek. Na výpočet vzdialenosti pre objekt nb využívame funkciu $nb\text{dist}$. Ak chceme aplikovať $nb\text{dist}$ na prvky vektora/zoznamu, je nutné použiť rozšírenú funkciu $lapply$. Ak nemáme dôvod predpokladať viac o susedských vzťahoch než je existencia alebo absencia, táto metóda výpočtu váh je záväzujúca.

Kód 3 prezentuje výpočet matice vzdialenosti štýlom W, B a inverzných vzdialeností spolu s grafickou reprezentáciou hodnôt matice váh štýlom W, čo podľa Arbie (2014) môže napomôcť identifikovať prítomnosť priestorovej autokorelácie.

Kód 3: Matica susednosti v R

```
# "matica" štýlu W
Sy0_lw_W <- nb2listw(Sy0_nb)
# "matica" štýlu B
Sy0_lw_B <- nb2listw(Sy0_nb, style =
  "B")
# "matica" inverzných vzdialeností
coords <- coordinates(Syracuse)
dsts <- nbdist(Sy0_nb, coords)
idw <- lapply(dsts, function(x)
  1/(x/1000))
Sy0_lw_idwB <- nb2listw(Sy0_nb,
  glist = idw, style = "B")
# zobrazenie matice štýlu W
install.packages("RColorBrewer")
library(RColorBrewer)
pal <- brewer.pal(9, "Greys")
w <- t(listw2mat(Sy0_lw_W))
brks <- c(0, 0.1, 0.143, 0.167, 0.2,
  0.5, 1)
nbr3 <- length(brks)-3
image(1:63, 1:63, w[,ncol(w):1],
  breaks = brks,
  col = pal[c(1, (9-nbr3):9)])
box()
```

Obr. 5: Grafické zobrazenie matice susednosti štýlu W



Zdroj: spracované podľa Bivanda (2019).

2 TESTOVANIE AUTOKORELÁCIE

Na zdôraznenie významnosti vhodného výberu formy matice váh budeme pracovať so simulovanou priestorovou autokoreláciou v tvare $(I - \rho W^*)$, kde $I_{n \times n}$ je jednotková matica, ρ je koeficient autokorelácie a $W_{n \times n}^*$ je matica váh štýlu "W".

Prvým krokom je grafická analýza, kde porovnáme simulovanú nekorelovanú a autokorelovanú náhodnú premennú v tzv. priestorovom oneskorení. Priestorové oneskorenie s maticou váh štýlu "W" (riadkovo normalizovanú) možno definovať:

$$L(x) = (W^*)x, \quad (3)$$

kde $L(\cdot)$ zastupuje priestorové oneskorenie (spatially lagged, v RStudiu zabezpečuje funkcia *lag*), x reprezentuje náhodnú premennú. Potom pre i -tú územnú jednotku platí:

$$L(x_i) = \sum_{j=1}^n w_{ij}^* x_j = \sum_{j=1}^n \frac{w_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^n w_{ij}} = \frac{\sum_{j \in N_i} x_j}{\#N_i}, \quad (4)$$

kde $\#N_i$ je kardinalita množiny N_i .

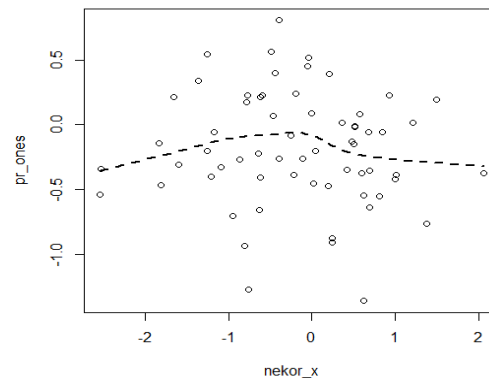
Obr. 6 a) má na horizontálnej osi nekorelovanú normálne rozdelenú náhodnú premennú generovanú prostredníctvom pseudonáhodného výberu. Obr. 6 b) má priestorovo autokorelovanú náhodnú premennú, ktorú vytvoríme prostredníctvom funkcie *invIrW* a vynásobením nekorelovanej náhodnej premennej. Postup je prezentovaný v kóde 4.

Kód 4: Simulácia nekorelovanej a autokorelovanej náhodnej premennej

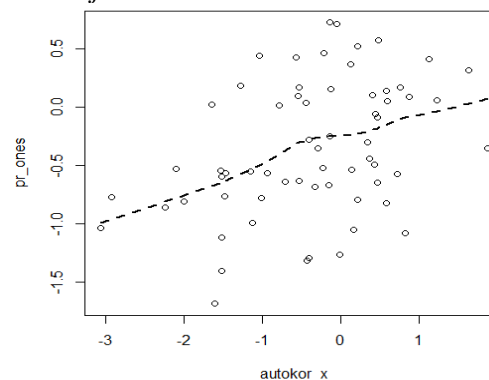
```
set.seed(987654)
n <- length(Sy0_nb)
nekor_x <- rnorm(n)
rho <- 0.5
autokor_x <- invIrW(Sy0_lw_W, rho)
  %*% nekor_x
# zobrazenie nekorelovanej NP
plot(nekor_x, lag(Sy0_lw_W,
  nekor_x), xlab = "nekor_x",
  ylab = "pr_ones")
lines(lowess(nekor_x,
  lag(Sy0_lw_W, nekor_x)),
  lty = 2, lwd = 2)
# zobrazenie korelovanej NP
plot(autokor_x, lag(Sy0_lw_W,
  autokor_x), xlab = "autokor_x",
  ylab = "pr_ones")
lines(lowess(autokor_x,
  lag(Sy0_lw_W, autokor_x)),
  lty = 2, lwd = 2)
```

Obr. 6: Grafické zobrazenie

a) priestorovo nekorelovanej náhodnej premennej



b) priestorovo autokorelovanej náhodnej premennej



Zdroj: spracované podľa Bivanda et al. (2013).

Najznámejšiu testovaciu štatistiku priestorovej autokorelácie predstavil Moran (1950). Za zmienku stojí, že Durbin a Watson (1950) prišli v rovnakom čase s testovacou štatistikou autokorelácie, ktorú možno považovať za špeciálny prípad Moranovej štatistiky.

Nulová hypotéza Moranovej I štatistiky predpokladá neprítomnosť priestorovej autokorelácie. Tvar štatistiky prispôsobenej nášmu problému:

$$I = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right). \quad (5)$$

V kóde 5 prezentujeme testovanie priestorovo nekorelovanej a autokorelovanej náhodnej premennej spolu s výstupom (tab. 1), kde RStudio poskytuje hodnotu testovacej štatistiky, strednú hodnotu, rozptyl a najvyššiu hladinu významnosti, pri ktorej akceptujeme nulovú hypotézu.

Kód 5: Moranová testovacia štatistika

```
# matica váh W
moran.test(nekor_x, listw =
  Sy0_lw_W)
moran.test(autokor_x, listw =
  Sy0_lw_W)
# matica váh B
moran.test(nekor_x, listw =
  Sy0_lw_B)
moran.test(autokor_x, listw =
  Sy0_lw_B)
```

Tab. 1: Výstup testovania autokorelácie

Premenná	I	E[I]	Var[I]	P
nekor_W	-0,03	-0,02	0,01	0,59
autokor_W	0,22	-0,02	0,01	0,00
nekor_B	-0,02	-0,02	0,01	0,54
autokor_B	0,22	-0,02	0,01	0,00

Zdroj: spracované podľa Bivanda et al. (2013).

Bivand et al. (2013) potvrdili, že použitie nevhodnej verzie priestorových váh môže viesť k nesprávnym záverom, nakoľko nemusia zodpovedať skutočnému generujúcemu procesu, ktorý je nositeľom priestorovej autokorelácie. V našom prípade nevedlo použitie rozdielnych typov matic k rozličným záverom na štandardných hladinách významnosti (1, 5 a 10 %).

3 ZÁVER

Softvérová podpora analýzy priestorových dát je v súčasnosti široká. Jedným z najpoužívanejších softvérov je voľne dostupná GeoDa. Viacerí autori úspešne využili jej prostredie vo svojej práci, napr. Chocholatá (2017).

Príspevok poskytol prehľad kódov v programe RStudio a výstupov na spracovanie priestorových objektov a na testovanie priestorovej autokorelácie prostredníctvom Moranovej I štatistiky. Jednoduchá reprodukcia analýzy s využitím voľne dostupných priestorových dát (napr. z eurostatu) môže napomôcť k sledovaniu priestorovej závislosti regiónov v Európskej únii.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0248/17 *Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie* a VEGA 1/0294/18 *Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov*.

Použitá literatúra

1. ARBIA, G. 2014. A Primer for Spatial Econometrics: With Applications in R. Hampshire: Palgrave Macmillan, 2014. 230 p.
2. BIVAND, R. 2019. Creating Neighbors, [Online]. Dostupné na: <https://cran.r-project.org/web/packages/spdep/vignettes/nb.pdf> [cit. 2019-04-21].
3. BIVAND, R. S. et al. 2013. Applied Spatial Data Analysis with R. 2nd ed. New York: Springer, 2013. 405 p.

4. CHOHLATÁ, M. 2017. Analýza mzdových disparít v okresoch Slovenska v období 2001 - 2015. In: AIESA - budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: zborník 17. medzinárodnej vedeckej konferencie: 9. november 2017, Bratislava. Bratislava: Publisher Letra Edu, 2017. 368 p.
5. DURBIN, J. & WATSON, G. S. 1950. Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression: I. In: Biometrika, roč. 37, 1950, č. 3/4, s. 409-428.
6. <http://www.chess-class.com> [cit. 2019-04-21].
7. MORAN, P. A. P. 1950. Notes on Continuous Stochastic Phenomena. In: Biometrika, roč. 37, 1950, č. 1/2, s. 17-23.
8. WALLER, L. A. & GOTWAY, C. A. 2004. Applied Spatial Statistics for Public Health Data. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 494 p.

Kontaktné údaje

Ing. Stanislav Kováč

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: stanislav.kovac@euba.sk

VOLBA DODAVATELE ELEKTŘINY V ROCE 2018 V ČR – OPTIMALIZAČNÍ MODEL

SELECTION OF ELECTRICITY SUPPLIER IN 2018 IN THE CZECH REPUBLIC - OPTIMIZATION MODEL

Martina Kuncová, Jana Sekničková

Abstrakt

Trh s elektřinou v České republice byl specifický až do roku 2002, kdy začal proces transformace orientovaný na plnou liberalizaci. Od roku 2006 si mohou domácnosti a firmy vybrat dodavatele elektřiny. Rostoucí počet dodavatelů v minulých letech a rostoucí počet nabízených produktů v každé distribuční sazbě ztěžuje pozici domácností, neboť je těžké pochopit pravidla pro výpočet nákladů na spotřebu elektřiny. V tomto článku je provedena analýza trhu z pohledu distribuční sazby D25d za roky 2017-2018. Hlavním cílem je zjistit intervaly pro spotřebu elektřiny, ve kterých je daný produkt nejlevnější. K získání řešení jsou použity lineární optimalizační modely. Součástí analýzy bylo i využití testu nedomínovanosti k vybrání cenově vhodných produktů.

Klíčová slova: *dodavatelé elektřiny, spotřeba elektřiny, náklady, optimalizační model*

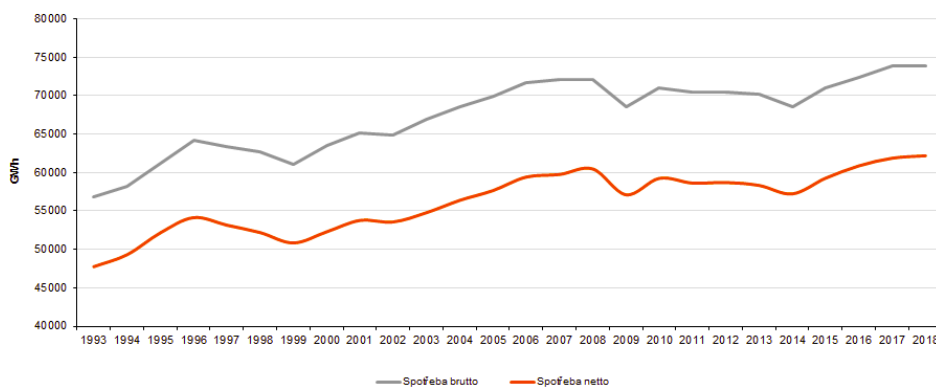
Abstract

The electricity market in the Czech Republic was specific till 2002 when the transformation process oriented at the fully liberalization has started. Since 2006 households and companies could choose the electricity supplier. The growing number of suppliers in previous years and the increasing number of products offered in each distribution rate embarrasses the position of the households as it is hard to understand the rules for the consumption costs calculation. In this article the analysis of the market from the distribution rate D25d point of view is made for the years 2017-2018. The main aim is to find out the ranges for the electricity consumption where the given product is the cheapest one. Linear optimization models are used to obtain the solution. The analysis also included the use of the non-dominance testing to select the suitable (cheap) products.

Keywords: *electricity suppliers, electricity consumption, costs, optimization model*

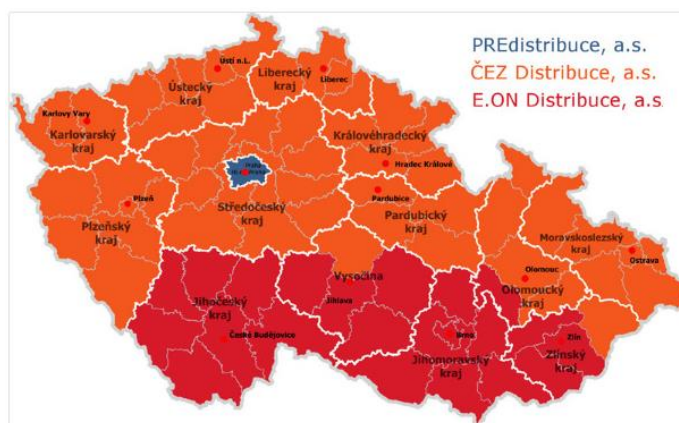
1 ÚVOD

Jednou z komodit, která beze sporu významně ovlivňuje život každého z nás, je elektrická energie. Elektřina nám automaticky usnadňuje práci i studium, díky ní využíváme stále víc a víc strojů, přístrojů a zařízení, umožňuje relaxaci, uchovávání potravin apod. To, jak silný je její vliv na náš život, si však uvědomíme až v okamžiku jejího výpadku. Teprve pak zjistíme, jak mnoho svítíme, používáme elektronická zařízení jako jsou televize, počítače, mobilní telefony a tablety, elektrické spotřebiče jako chladničky, mrazničky, sporáky, vysavače a další domácí zařízení. Nikoho tak nepřekvapí, že poptávka domácností po elektřině neklesá (Obrázek 1).



Obrázek 1: Vývoj spotřeby elektřiny v ČR. zdroj: CEZ.cz

V roce 2006 prošel český trh s elektřinou pro domácnosti významnou transformací a jednotlivé domácnosti (ale i společnosti) si mohou v současné době zvolit svého dodavatele elektřiny. Zcela logicky domácnosti preferují dodavatele, kteří jim elektřinu poskytují levněji. Náklady na elektřinu pro domácnost ovlivňuje také distributor, Energetický regulační úřad (ERU) a operátor trhu s elektřinou (OTE) (OTE, 2019). Na českém trhu operují tři distributoři, přičemž každý z nich spravuje jinou oblast. Pražská energetika, a. s. (PRE) pokrývá oblast hlavního města Prahy, E.ON Česká republika, s. r. o. (E.ON) spravuje celý Jihočeský a Jihomoravský kraj a dále Kraj Vysočinu (kromě okresu Havlíčkův Brod), Zlínský kraj (kromě okresu Vsetín) a okres Prostějov v Olomouckém kraji. Zbývající oblasti ČR spadají pod ČEZ, a. s. (ČEZ) – viz Obrázek 2.



Obrázek 2: Mapa distributorů elektřiny, zdroj: vemexenergie.cz

Množství dodavatelů elektřiny na českém trhu se každý rok mění a většina z nich nabízí hned několik možných produktů pro domácnosti v příslušné distribuční sazbě. Produkty se pak liší smluvními podmínkami i cenami. Pro spotřebitele je tak obtížné vybrat nejvhodnějšího dodavatele a příslušný produkt, a to i přesto, že ERÚ nabízí na webových stránkách kalkulačtor, dle kterého lze produkt vybrat (ERÚ-kalkulačtor, 2019). Pro výběr je však nutná znalost přesné spotřeby elektřiny a zákazník (domácnost) nemá přehled, zda při o něco málo vyšší či nižší spotřebě není výhodnější jiný produkt či jiný dodavatel. Navíc se často nevyzná v záplavě cen a sazeb (viz popis v kap.2).

Vzhledem k tomu, že ve své podstatě jde o optimalizační úlohu, lze pro modelování použít různé postupy (Ventosa a kol., 2005, Kuncová, 2015). Nabízí se samozřejmě optimalizace z vícekritériálního pohledu (Diakoulaki, Karangelis, 2007; Sekničková, Kuncová, 2014), simulačního pohledu (Hegazy a kol., 2003; Kuncová, Sekničková, 2014) nebo klasický jednokritériální optimalizační pohled zaměřený na minimalizaci nákladů (Kuncová,

Sekničková, 2015). Tento přístup bude využit také v tomto článku. Hlavním cílem analýzy je určit, v jakém rozsahu se může pohybovat skutečná spotřeba elektřiny vybrané domácnosti se sazbou D25d, aby byl produkt vybraného dodavatele nabízený v roce 2018 pro domácnost nejvýhodnější z pohledu minimalizace nákladů na distribuci a dodávku elektřiny. Výsledky pak budou porovnány s rokem 2017 a se závěry z předchozích výzkumů (Kuncová, Sekničková, 2014; Kuncová, Sekničková, 2015).

2 TRH S ELEKTRINOU V ČESKÉ REPUBLICE

Na českém trhu s elektřinou operuje několik významných subjektů. Provozovatel trhu s elektřinou (OTE) předpovídá spotřebu elektřiny na celém trhu a provádí analýzy chování tohoto trhu (OTE, 2019), Energetický regulační úřad (ERU) pak reguluje ceny převodu a distribuci elektřiny (ERÚ, 2019). Distributoři mají na starost správu distribuční sítě a distribuci elektrické energie až ke konečným spotřebitelům. Dodavatelé pak nabízí konečným zákazníkům, a tedy i domácnostem, své tarify, které svými podmínkami vytváří konečnou cenu distribuované a dodávané energie. OTE a ERU ovlivňují stejným způsobem všechny zákazníky a distributor je jednoznačně daný lokalizací konečného zákazníka. Žádného z těchto subjektů si tedy domácnost nevybírání. Naopak si ale může zvolit pro sebe nejvýhodnější produkt a s ním i příslušného dodavatele. Jak již bylo zmíněno výše, počet dodavatelů a jejich produktů je poměrně široký. V posledních letech se počty ustálily na cca 60 produktech od cca 30 dodavatelů, což ale neznamená, že nedochází k zániku dodavatelů, resp. ke vstupu nových firem na tento trh.

Výběr nejvhodnějšího produktu je ovlivněn především množstvím odebrané elektřiny, sjednanou sazbou (určenou distributorem na základě podmínek a typu odběru a jističe) a cenami za spotřebovanou elektřinu. Konečnou cenu pak ovlivňují ještě pevné poplatky a daně. Obecně lze konečnou cenu rozdělit na dvě složky. První z nich je poplatek za dopravu elektřiny ke koncovému zákazníkovi a o jeho výši každoročně rozhoduje ERU (ERÚ-kalkulátor, 2019). Zahrnuje následující položky:

- cenu za měsíční pronájem příslušného jističe (dle sjednané sazby),
- cenu za megawatthodinu (MWh) ve vysokém tarifu (VT),
- cenu za megawatthodinu v nízkém tarifu (NT),
- cenu za systémové služby,
- cenu za podporu nákupu energie z obnovitelných zdrojů,
- poplatky provozovateli trhu s elektřinou a
- ekologickou daň z elektřiny (28,30 Kč za 1 MWh).

Druhou složkou celkové ceny udává dodavatel elektřiny a je tedy závislá na zvoleném tarifu. Ta zahrnuje:

- fixní měsíční poplatek za vybraný produkt,
- cenu za megawatthodinu (MWh) ve vysokém tarifu (VT),
- cenu za megawatthodinu v nízkém tarifu (NT).

Ke konečné ceně je pak od roku 2013 přičtena DPH ve výši 21 %.

3 DATA A METODY

V předchozí analýze (Kuncová, Sekničková, 2014) jsme porovnávali 57 produktů roku 2014 pro domácnost se sjednanou sazbou D25d. Tato sazba je určena domácnostem používajícím elektrickou energii k akumulárnímu vytápění a ohřevu vody. Sazba předpokládá, že roční množství odebrané elektřiny je průměrné a denně je vymezeno 8 hodin, kdy je energie odebrána v nízkém tarifu. Zbývajících 16 hodin spadá do vysokého tarifu. Analyzována byla situace pro domácnost s jističem od 3x20A do 3x25A a s pevně stanovenou výší spotřeby elektrické energie 10 MWh. Analýza byla provedena za předpokladu, že 45 % energie je odebráno ve vysokém tarifu a 55 % v nízkém tarifu. V dalším článku (Kuncová, Sekničková, 2015) jsme mimo jiné analyzovali kromě produktů roku 2014 obdobným způsobem také 60 produktů roku 2015 (nabízených 32 dodavateli pro všechny tři distribuční oblasti) dle kalkulátoru ERÚ (ERÚ-kalkulátor, 2019).

Pro tento článek byla data aktualizována a hodnoceno bylo 60 produktů roku 2018 a pro srovnání i 60 produktů roku 2017 (poskytovaných 29 dodavateli).

Volbu vhodného produktu z pohledu jednokriteriální optimalizace by měl konečný zákazník provádět na základě celkových nákladů na distribuci a dodávku elektrické energie. Konečná výše ročních nákladů se stanovuje pro každý produkt podle následujícího vztahu:

$$N_{ij} = (1 + DPH)[12(p_{ij} + p_j + p_m) + s_r(r^{VT}(c_{ij}^{VT} + c_j^{VT}) + r^{NT}(c_{ij}^{NT} + c_j^{NT}) + c_s + d)] \quad (1)$$

kde

i ... produkt, $i = 1, \dots, 60$,

j ... distributor, $j = 1, \dots, 3$,

$DPH = 0,21$... daň z přidané hodnoty,

p_{ij} ... fixní měsíční poplatek dodavateli za produkt i v síti distributora j v Kč,

p_j ... fixní měsíční poplatek distributorovi j v Kč (za jistič),

p_m ... fixní měsíční poplatek za činnost operátore trhu v Kč,

s_r ... roční spotřeba elektřiny v MWh,

r^{VT} ... poměr elektřiny spotřebované ve vysokém tarifu,

r^{NT} ... poměr elektřiny spotřebované v nízkém tarifu, evidentně $r^{NT} = 1 - r^{VT}$,

c_{ij}^{VT} ... cena za 1 MWh odebranou ve vysokém tarifu pro produkt i v síti distributora j v Kč,

c_j^{VT} ... cena za 1 MWh odebranou ve vysokém tarifu za distribuci - distributor j v Kč,

c_{ij}^{NT} ... cena za 1 MWh odebranou v nízkém tarifu pro produkt i v síti distributora j v Kč,

c_j^{NT} ... cena za 1 MWh odebranou v nízkém tarifu za distribuci - distributor j v Kč,

c_s ... cena za ostatní regulované položky za 1 MWh v Kč,

$d = 28,30$... daň z elektrické energie za odebranou MWh v Kč.

Konečný odběratel v distribuční oblasti j by tedy měl vybrat vhodný produkt i s cílem minimalizace těchto ročních nákladů:

$$I_j = \arg \min_i N_{ij}, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Podíváme-li se na problém z pohledu vícekritériálního rozhodování, je evidentní, že dominované produkty nemají šanci na úspěch a racionálně uvažující odběratel by si takový produkt neměl nikdy vybrat. Bohužel realita je mnohdy jiná a běžná domácnost často netuší, že jejich produkt patří mezi dominované, tj. že existuje produkt s nižšími cenami. Pro námi navržený model však postačí provedení vlastní analýzy pouze na množině nedominovaných produktů. Pro tyto produkty tedy bude vyčíslena očekávaná hodnota celkových ročních nákladů podle vztahu (1) a vybrán nejvhodnější produkt podle vztahu (2).

Při známé spotřebě s_r a známém poměru spotřeby v nízkém a vysokém tarifu r^{NT} a r^{VT} se jedná o jednoduché rozhodování při jistotě. Skutečnost je ale taková, že spotřebu a poměr můžeme předem pouze odhadovat. Pro vlastní analýzu lze pak použít např. simulační přístup (Sekničková, Kuncová, 2014), nebo přistoupit ke spotřebě (nebo poměru) také jako k náhodné veličině a určit nejen nejvýhodnější produkt při předpokládané spotřebě, ale také interval stability této volby. Jinými slovy, cílem následující analýzy bude zvolit nejvýhodnější produkt a určit, za jakých podmínek zůstane produktem nejvýhodnějším.

Předpokládejme dále neměnný poměr r^{NT} a tedy i r^{VT} . Určení intervalu spotřeby, pro který je konkrétní produkt k ($k = 1, \dots, 60$) nabízený v distribuční síti j ($j = 1, 2, 3$) nejvýhodnější, je z matematického pohledu řešením soustavy optimalizačních modelů:

$$\min(\max) s_r \tag{3}$$

za podmínky

$$N_{ij} \leq N_{kj}, i = 1, \dots, 60.$$

Pokud bychom soustavu (3) řešili pro dominovaný produkt k , kterému dominuje produkt l , bude platit, že $N_{lj} > N_{kj}$ a úloha nebude mít řešení. Místo 180 lineárních optimalizačních problémů (60 produktů pro 3 distributory) s 60 lineárními omezujícími podmínkami a dvěma extrémy (min a max) tedy stačí řešit pouze úlohy pro nedominované produkty. V roce 2017 bylo nedominovaných produktů pouze 11 pro PRE a ČEZ a 10 pro E.ON a optimalizační model (3) tak povede na 32 úloh s 11 omezujícími podmínkami. V roce 2018 bylo nedominovaných produktů 13 pro PRE a ČEZ a 12 pro E.ON a podle (3) řešíme tedy 38 úloh s 13 omezujícími podmínkami.

4 VÝSLEDKY

Jak již bylo zmíněno výše, situace na trhu s elektřinou z pohledů nabídky produktů pro domácnosti, resp. volby dodavatelů, se každým rokem mění. Průměrné ceny za odběr elektřiny od roku 2012 klesaly, nicméně od roku 2017 již opět dochází k jejich růstu, jak dokládají tabulky 1 a 2 (Kuncová, 2018). Nejdražším distribučním regionem je region ČEZ.

Tabulka 1 – Průměrné ceny a poplatky stanovené dodavateli v letech 2017-2018

Rok	Distrib. region	Prům. měsíční poplatek dodavateli	Prům. cena za 1MWh ve vysokém tarifu	Prům. cena za 1MWh v nízkém tarifu
2017	E.ON	43,838	1253,853	826,139
	PRE	46,824	1234,639	820,437
	ČEZ	44,990	1244,705	818,420
2018	E.ON	49,646	1384,163	951,274
	PRE	52,630	1363,746	945,424
	ČEZ	60,446	1369,246	945,424

Zdroj: vlastní výpočty dle dat z ERÚ-kalkulátoru (2018)

Tabulka 2 – Průměrné ceny a platby stanovené distributory v letech 2017-2018

Rok	Distrib. region	Měsíční platba za jistič	Cena za 1 MWh ve vysokém tarifu	Cena za 1 MWh v nízkém tarifu	Platba za ostatní služby za spotřebovanou 1 MWh
2017	E.ON	113	1607,38	72,22	588,94
	PRE	116	1503,96	70,58	
	ČEZ	120	1624,71	64,01	
2018	E.ON	119	1687,78	77,28	588,63
	PRE	123	1590,53	75,52	
	ČEZ	127	1719,17	71,69	

Zdroj: vlastní výpočty dle dat z ERÚ-kalkulátoru (2018)

Abychom mohli výsledky optimalizačního modelu porovnat s dřívější analýzou, ponechali jsme nastavení procentní spotřeby ve vysokém (45 %) a nízkém (55 %) tarifu. Ve vztahu (1) tak byly použity následující parametry: $DPH = 0,21$, $r^{VT} = 0,45$, $r^{NT} = 0,55$, $c_s = 588,94$, $d = 28,3$ a byl upraven do tvaru:

$$N_{ij} = 1,21[12(p_{ij} + p_j + p_m) + s_r(0,45(c_{ij}^{VT} + c_j^{VT}) + 0,55(c_{ij}^{NT} + c_j^{NT}) + c_s + 28,3)] \quad (4)$$

Pro rok 2017 byly do vztahu (4) dosazeny parametry $p_m = 4,9$ a $c_s = 588,94$, pro rok 2018 šlo o hodnoty $p_m = 5,4$ a $c_s = 588,63$.

4.1 Spotřeba pro rok 2017

V roce 2017 bylo z nabízených 60 produktů v distribuční sazbě D25d pouze 11 nedominovaných produktů (pro PRE a ČEZ), resp. 10 (pro E.ON), řešili jsme tedy 32 optimalizačních úloh s 11 omezujícími podmínkami. Výsledky byly co do výše spotřeby stejné ve všech distribučních regionech (Tabulka 3), odlišnosti pak jsou v nákladech na roční spotřebu elektřiny (Tabulka 4). V tabulkách je uveden i produkt firmy Energie ČS, a.s., který je nejlevnějším pouze při nulové spotřebě, což je spíše hypotetická situace. Pro nižší spotřebu elektřiny nabízela nejlevnější produkt firma Fonergy, u střední spotřeby pak firma Nano Energies Trade a u vysoké spotřeby byla nejlevnější firma CARBOUNION BOHEMIA, spol. s.r.o.

Tabulka 3 – Výsledky optimalizačních modelů pro rok 2017

Spotřeba MWh		vítězný tarif PRE 2017
od	do	
0,00000	0,00000	Energie ČS, a.s., ON-LINE Elektřina
0,00000	5,59509	Fonergy, PREMIUM Aku 8
5,59509	8,71972	Nano Energies Trade s.r.o., Dobrý skutek
8,71972	∞	CARBOUNION BOHEMIA, spol.s.r.o., STANDARD
		CARBOUNION BOHEMIA, spol.s.r.o., STANDARD 12

Zdroj: vlastní výpočty dle dat z ERÚ-kalkulátoru (2019)

Tabulka 4 – Výsledky optimalizačních modelů – náklady – pro rok 2017

Vítězný tarif 2017	Náklady PRE		Náklady E.ON		Náklady ČEZ	
	od	do	od	do	od	do
Energie ČS, a.s., ON-LINE Elektřina	1755,5	1755,5	1711,9	1711,9	1813,6	1813,6
Fonergy, PREMIUM Aku 8	1755,5	17073	1711,9	17351	1813,6	17475
Nano Energies Trade s.r.o., Dobrý skutek	17073	25474	17351	25931	17475	26067
CARBOUNION BOHEMIA, spol.s.r.o., STANDARD	25474	∞	25931	∞	26067	∞
CARBOUNION BOHEMIA, spol.s.r.o., STANDARD 12						

Zdroj: vlastní výpočty dle dat z ERÚ-kalkulátoru (2019)

4.2 Spotřeba pro rok 2018

Pro rok 2018 bylo nedominovaných produktů 13 pro PRE a ČEZ a 12 pro E.ON, tj. bylo nutné vyřešit 38 optimalizačních úloh (4) s 13 omezujícími podmínkami. Výsledky jsou uvedeny v tabulkách 5 a 6. Tentokrát se ve výpisu objevuje 5 firem, nicméně pro reálnou spotřebu v dané distribuční sazbě bychom měli vybírat mezi třemi: pro nižší spotřebu produkt firmy Energie ČS, a.s., pro střední výši spotřeby produkt firmy Europe Easy Energy a pro vysokou spotřebu produkt firmy Eneka. Vzhledem k odlišným intervalům oproti roku 2017 nelze porovnávat jednotlivé náklady, ale jak již bylo zmíněno výše, náklady pro rok 2018 vzrostly – a výpočty ukazují, že např. vítězná firma u vyšší spotřeby (10 MWh) z roku 2017 (CARBOUNION BOHEMIA spol. s.r.o.) se v roce 2018 propadla až na poslední místa z hlediska ročních nákladů na spotřebu elektřiny.

Tabulka 5 – Výsledky optimalizačních modelů pro rok 2018

Spotřeba MWh		vítězný tarif PRE 2018
od	do	
0,00000	0,00000	Fonergy, PREMIUM
0,00000	1,58940	Pražská plynárenská, PPRODUKT Komplet
1,58940	2,51748	Energie ČS, a.s., ON-LINE Elektřina
2,51748	6,12766	Europe Easy Energy, e Domácnost
6,12766	∞	Eneka s.r.o., Jednička

Zdroj: vlastní výpočty dle dat z ERÚ-kalkulátoru (2019)

Tabulka 6 – Výsledky optimalizačních modelů – náklady – pro rok 2018

vítězný tarif 2018	Náklady PRE		Náklady E.ON		Náklady ČEZ	
	od	do	od	do	od	do
Fonergy, PREMIUM	1864,4	1864,4	1806,3	1806,3	1922,5	1922,5
Pražská plynárenská, PPRODUKT Komplet	1864,4	6753,5	1806,3	6781,4	1922,5	6918,8
Energie ČS, a.s., ON-LINE Elektřina	6753,5	9523,5	6781,4	9601,7	6918,8	9751,5
Europe Easy Energy, e Domácnost	9523,5	19674	9601,7	19948	9751,5	20146
Eneka s.r.o., Jednička	19674	∞	19948	∞	20146	∞

Zdroj: vlastní výpočty dle dat z ERÚ-kalkulátoru (2019)

5 ZÁVĚR

Počet produktů nabízených dodavateli elektřiny domácnostem v distribuční sazbě D25d je stále velmi vysoký (cca 60 produktů nabízených téměř 30 dodavateli), ale většina z nich není vhodná pro žádnou domácnost, neboť patří mezi dominované produkty, tj. produkty s horšími cenami ve srovnání s jiným produktem. Přesto je stále mnoho domácností využívá, a to i přesto, že lze využít kalkulátor ERÚ (2019) a najít si vhodnějšího dodavatele, resp. produkt. Pouze zhruba šestina z produktů patří mezi nedominované, tj. teoreticky mohou patřit mezi nejlevnější. Na základě využití lineárních optimalizačních modelů byly získány intervaly pro spotřebu elektřiny v domácnostech a jim odpovídající nejlevnější produkty. V roce 2017 šlo o produkty 4 firem, v roce 2018 o produkty 5 firem (v obou případech však je zahrnut i produkt, který je nejlevnější při nulové spotřebě, což není příliš reálné). Celkově je patrný nárůst cen elektřiny z pohledu dodavatelů i distributorů v roce 2018 oproti předchozím rokům. Podíváme-li se na výsledky z předchozích analýz (Kuncová, Sekničková, 2015), vidíme, že počet firem, resp. produktů nejlevnějších při určité výši spotřeby, je téměř stejný. V roce 2014 se jednalo pouze o 2 produkty, v roce 2015 již o 3 a stejně tomu bylo i v roce 2017. Pro rok 2018 se sice nabízejí produkty 4, nicméně reálně nelze v dané distribuční sazbě očekávat velmi nízkou spotřebu (pod 2 MWh/rok), proto i zde nalézáme 3 nejvhodnější produkty pro nízkou (3 MWh/rok), střední (6 MWh/rok) či vysokou (nad 10 MWh/rok) spotřebu. Nicméně zatímco v letech 2014 a 2015 se mezi vítězi objevily v obou letech 2 stejné firmy (Fonergy, CARBOUNION KOMODITY), situace v letech 2017 a 2018 je zcela jiná a vítězné produkty, resp. firmy se liší. O důvodech lze spíše spekulovat, velmi pravděpodobný je zde dopad zvýšení cen elektřiny v roce 2018, kdy některé z firem navýšily ceny více než ostatní a díky tomu se mezi vítězi již neobjevují (resp. dokonce se propadly pořadím až na poslední místa, tj. mezi nejdražší produkty). I proto lze při volbě dodavatele elektřiny doporučit každoroční zvážení, zda je vhodné prodloužit smlouvu u stávajícího dodavatele, či zda není lepší přejít k jinému.

Poděkování

Tento výzkum byl financován z prostředků grantu IGA F4/66/2019 Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze.

Použitá literatura

1. CEZ.cz. 2019. Energetika v ČR. [online], dostupné z: <https://www.cez.cz/cs/pro-media/cisla-a-statistiky/energetika-v-cr.html> [cit. 2019-04-15]
2. ERÚ – o úřadu. 2019. [online], dostupné z: <http://www.eru.cz/cs/o-uradu> [cit. 2019-04-15]
3. ERÚ – kalkulátor. 2019. [online], dostupné z: <http://kalkulator.eru.cz/VstupniUdaje.aspx> [cit. 2019-04-15]
4. Diakoulaki, D., Karangelis, F. 2007. Multi-criteria decision analysis and cost–benefit analysis of alternative scenarios for the power generation sector in Greece. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 11/4, s.716–727.
5. Hegazy, Y.G., Salama, M.M.A. and Chickhani, A.Y. 2003. Adequacy assessment of distributed generation systems using Monte Carlo Simulation. *Power Systems - IEEE Transactions* 18/1, s. 48-52.
6. Kuncová, M. 2018. Electricity suppliers in the Czech Republic – changes in the offer of products for households in the D25d distribution rate. *Logos Polytechnikos* [online]. 2018, roč. 9, č. 3, s. 94–108. Dostupné z: <http://www.vspj.cz/soubory/download/id/7142>.

7. Kuncová, M. 2015. Methods for the Electricity Supplier Selection - Case Study of the Czech Republic. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9, s.714-720.
8. Kuncová, M., Sekničková, J. 2014. Analysis of the efficiency of the electricity supplier selection de-pending upon the price changes. *Proceedings of the 32nd Mathematical Methods in Economics*. Palacký University in Olomouc, s. 542–547.
9. Kuncová, M., Sekničková, J. 2015. Optimization Models Used for the Electricity Supplier Selection. *Proceedings of the 33rd Mathematical Methods in Economics 2015 Conference*. West-Bohemia University, Cheb, s. 443-448.
10. OTE, 2019. Základní údaje [online], dostupné z: <https://www.ote-cr.cz/cs/o-spolecnosti/zakladni-udaje> [cit. 2019-04-10]
11. Sekničková, J., Kuncová, M. 2014. Evaluation of the locality influence on the electricity supplier selection. *Proceedings of the 32nd Mathematical Methods in Economics*, Palacký University in Olomouc, s. 879–883.
12. Ventosa, M., Baíllo, Á., Ramos, A. and Rivier, M. 2005. Electricity Markets modeling trends, *Energy Policy* 33, s. 897–913.
13. Vemexenergie.cz – Distribuční území elektřiny v ČR. 2019. [online], dostupné z: <https://www.vemexenergie.cz/poradna/technicke-informace/kdo-jsou-distributori-elektriny-a-plynu-1/> [cit. 2019-04-25]

Kontaktní údaje

Ing. Martina Kuncová, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 449

email: kuncovam@vse.cz

Mgr. Jana Sekničková, Ph.D.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

Nám. W.Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420) 224 095 449

email: jana.seknickova@vse.cz

VYBRANÉ POKROČILÉ METÓDY OPTIMALIZÁCIE FÉROVÝCH ZÁCHRANNÝCH SYSTÉMOV

SELECTED ADVANCED METHODS OF FAIR EMERGENCY SERVICE SYSTEM OPTIMIZATION

Marek Kvet

Abstrakt

Základným cieľom tohto príspevku je poskytnúť stručný ucelený prehľad pokročilých metód optimalizácie záchranných systémov, pričom hlavný dôraz bude kladený na aspekt férovosti. Ten možno chápať ako istú mieru rovnosti v prístupe k službe. Jednotlivé matematické modely budú experimentálne porovnané na reálnych dátach v podmienkach samosprávnych krajov Slovenskej republiky.

Kľúčové slová: *Rozmiestňovanie staníc záchrannej služby, radiálny prístup, férovosť*

Abstract

The basic goal of this paper is to provide the readers with a brief and complex summary of selected advanced methods of emergency medical service system optimization. The main attention will be paid to the fairness aspect, which can be understood as a certain level of equality in service accessibility. All presented mathematical models will be experimentally compared based on real data corresponding to the self-governing regions of Slovakia.

Keywords: *Location of service centers, radial approach, fairness*

1 ÚVOD

Väčšina zaužívaných a často uplatňovaných prístupov k návrhu záchranných systémov je postavená na optimalizácii kritéria kvality pre tzv. *priemerného* používateľa (*average user*). V praxi to znamená, že najnižšiu hodnotu účelovej funkcie dosiahneme minimalizáciou súčtu hodnôt daného kritéria pre jednotlivých používateľov systému. Napriek tomu, že tento prístup je všeobecne považovaný za najvhodnejší, nemusí vždy priniesť také výsledky, s ktorými bude verejnosť úplne spokojná. Uvedené tvrdenie podporuje aj analýza výsledkov riešenia úlohy váženého p -mediánu, v ktorej sa minimalizuje vzdialenosť (alebo iná forma dostupnosti služby) pacientov k najbližšej stanici záchrannej zdravotnej služby (ďalej ZZS). Túto úlohu návrhu siete staníc ZZS sme riešili exaktne pre jednotlivé kraje SR pomocou radiálnej formulácie. Okrem toho sme daný model vyriešili aj pre celé územie Slovenska, kde je rozmiestnených celkom 273 staníc [7]. Následne sme výsledný návrh siete staníc podrobili analýze, v ktorej sme skúmali tieto vybrané ukazovatele:

- hodnotu štandardného *minSum* kritéria, teda súčet vzdialeností všetkých pacientov od ich najbližšej stanice ZZS (*ObjF*),
- priemernú vzdialenosť, resp. časovú dostupnosť služby (d_{avg}) vypočítanú ako podiel hodnoty účelovej funkcie *ObjF* a celkového počtu obsluhovaných používateľov,
- maximálnu vzdialenosť pacienta od najbližšej stanice (d_{max}).

Dosiahnuté výsledky spolu s hodnotami vybraných ukazovateľov sú zhrnuté v Tabuľke 1, kde $|I|$ reprezentuje počet možných umiestnení stanice ZZS. Z tohto počtu je potrebné vybrať práve p (v niektorých prípadoch najviac p) tak, aby priemerná vzdialenosť pacientov od najbližšej stanice ZZS bola minimálna. Okrem základných rozmerových charakteristík jednotlivých úloh uvádzame aj výpočtový čas v sekundách v stĺpci Čas [s] a celkový počet obsluhovaných pacientov v stovkách označený ako SB .

Tabuľka 1 Analýza vybraných ukazovateľov pri návrhu siete staníc ZZS pomocou úlohy váženého p -mediánu

Kraj	Skratka	$ I $	p	SB	Čas [s]	$ObjF$	d_{avg}	d_{max}
Bratislava	BA	87	9	6061	0,1	20342	3,36	25
Banská Bystrica	BB	515	52	6609	1,8	17289	2,62	26
Košice	KE	460	46	7929	2,2	20042	2,53	23
Nitra	NR	350	35	6900	1,4	22651	3,28	17
Prešov	PO	664	67	8183	5,2	20025	2,45	22
Trenčín	TN	276	28	5942	3,1	15686	2,64	30
Trnava	TT	249	25	5563	0,8	18873	3,39	24
Žilina	ZA	315	32	6911	0,8	20995	3,04	26
Slovenská republika	SR	2916	273	55488	63,9	161448	2,91	24

Údaje v Tabuľke 1 poukazujú na fakt, že hoci bola optimalizovaná dostupnosť služby (vzdialenostná alebo časová) pre tzv. *priemerného* používateľa systému, stále existuje určitá malá skupina pacientov, ktorých dostupnosť služby je veľmi zlá. Z legislatívnych predpisov SR vyplýva, že neodkladná prednemocničná zdravotná starostlivosť by mala byť poskytnutá najneskôr do 15 minút od vzniku akútneho stavu. Ako môžeme vidieť, v niektorých prípadoch je pri použití úlohy váženého p -mediánu a štandardného *minSum* kritéria dosiahnutý takmer dvojnásobný čas pre najhoršie položených pacientov. Na druhej strane, priemerná časová dostupnosť služby je veľmi dobrá. Je preto logické, že časť populácie považuje takýto návrh usporiadania siete staníc za neférový. V nasledujúcich kapitolách sa budeme zaoberať takými spôsobmi návrhu rozsiahlych záchranných systémov, ktoré zohľadňujú férovosť chápanú ako istú mieru rovnosti prístupu pacientov k službe. Inými slovami, treba zabezpečiť, aby zdroje pre poskytovanie ZZS boli spravodlivo a rovnomerne rozdelené medzi všetkých používateľov systému, ktorí prispievajú na jeho fungovanie [1], [8], [9].

2 „MIN-MAX“ FÉROVOSŤ

Prvým krokom pri navrhovaní férových záchranných systémov je optimalizácia dostupnosti (vzdialenostnej alebo časovej) služby pre najhoršie umiestnených pacientov, teda riešenie úlohy typu *minMax*, ktorá je známa aj pod označením *p-center problem*. Ide o úlohu, v ktorej sa má rozmiestniť najviac p obslužných stredísk tak, aby maximálna vzdialenosť (časová dostupnosť) medzi najhoršie umiestnenými pacientmi a ich najbližšou stanicou ZZS bola čo najnižšia. Podobne ako pri úlohe váženého p -mediánu, aj v tomto prípade je možné model formulovať klasickým lokačno-alokačným spôsobom, ktorý je však z pohľadu riešiteľnosti veľmi časovo náročný. Preto sa v tejto práci obmedzíme len na výhodnejšiu radiálnu formuláciu [2].

Aby bolo možné formulovať model s účelovou funkciou typu *minMax*, je potrebné zaviesť nezápornú premennú h , ktorá bude reprezentovať minimalizovanú hornú hranicu vzdialeností medzi pacientmi a ich najbližšou stanicou ZZS. Všetky ostatné premenné a označenia pramena z radiálnej formulácie, ktorá bola prezentovaná pre úlohu váženého p -mediánu napríklad v [3]. Matematický model *minMax* úlohy má potom tvar (1) - (7).

$$\text{Minimalizujte } h \quad (1)$$

$$\text{Za podmienok: } x_{js} + \sum_{i \in I} a_{ij}^s y_i \geq 1 \quad \forall j \in J, s = 0, \dots, v \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (3)$$

$$\sum_{s=0}^v e_s x_{js} \leq h \quad \forall j \in J \quad (4)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (5)$$

$$x_{js} \geq 0 \quad \forall j \in J, s = 0, \dots, v \quad (6)$$

$$h \geq 0 \quad (7)$$

Účelová funkcia (1) daná premennou h vyjadruje hornú hranicu všetkých vzdialeností pacientov od ich najbližšej stanice ZZS. Podmienky (2) zabezpečujú, že premenná x_{js} môže nadobúdať hodnotu 0 vtedy, ak v okruhu veľkosti D_s od pacienta v mieste $j \in J$ existuje aspoň jedna stanica ZZS. V opačnom prípade musí byť $x_{js}=1$. Podmienka (3) zhora ohraničuje počet umiestnených staníc hodnotou p . Posledná séria štruktúrnych podmienok (4) definuje vzťah medzi vzdialenosťami pacientov k ich najbližšej stanici a príslušnou hodnotou hornej hranice h , ktorú minimalizujeme. Ostatné podmienky (5) a (6) sú obligatórne a udávajú definičný obor premenných modelu. Aj napriek tomu, že nezápornosť premennej h vyplýva z väzobných podmienok (4), pre úplnosť uvádzame aj obligatórnu podmienku (7).

Hoci sa radiálna formulácia ukázala v úlohe váženého p -mediánu ako efektívny modelovací nástroj, v prípade *minMax* modelu (1) - (7) sa jej výhodné vlastnosti neprejavili naplno. Ako sme ukázali v [5], v porovnaní s lokačno-alokačným prístupom možno síce dosiahnuť výrazné skrátenie výpočtového času, pri rozsiahlych úlohách však problémy s vysokými nárokmi na čas pretrvávajú. Pomalá konvergencia metódy vetiev a hraníc, ktorá predstavuje základný riešiaci algoritmus pre úlohy celočíselného lineárneho programovania, sa obvykle vysvetľuje práve väzobnými štruktúrными podmienkami (4). Keď sa detailne pozrieme na štruktúru modelu (1) - (7), zistíme, že radiálna formulácia pôvodného modelu umožňuje pomerne jednoduchú transformáciu úlohy na jednoduchší tvar bez nutnosti hornej hranice h a väzobných podmienok (4), ako sme to načrtli v [5]. Podstata transformácie spočíva vo využití výhodných vlastností pokrývacích úloh a je postavená na nasledujúcich dvoch predpokladoch:

1. Bez akejkoľvek ujmy na všeobecnosti a presnosti modelu *minMax* úlohy možno deliace body D_0, D_1, \dots, D_v nadefinovať tak, aby dĺžky jednotlivých zón boli rovné 1. To nám umožní vynechať koeficienty e_s a vyjadriť vzdialenosť d_{ij} pomocou súčtu premenných x_{js} . Rovnaký prístup používame pri exaktnom riešení úlohy váženého p -mediánu.
2. Hodnoty premenných x_{js} pre $j \in J$ a $s = 0, 1, \dots, v$ tvoria vektor so špecifickou štruktúrou. Ak zoradíme premenné x_{js} podľa indexu s od 0, potom bude mať príslušný vektor tvar $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$. Teda, na začiatku budú premenné rovné 1 a v určitom bode zmenia svoje hodnoty, pričom a od tohto indexu až do konca budú nulové [2]. Tento fakt je potom kľúčový v transformácii *minMax* modelu na pokrývaciu úlohu.

Minimalizáciu najväčšej vzdialenosti medzi pacientmi a ich najbližšou stanicou ZZS potom namiesto riešenia modelu (1) - (7) dosiahneme takto: Spomedzi vzdialeností d_0, d_1, \dots, d_m si

vyberieme stredný deliaci bod D_s . Pre tento deliaci bod budeme riešiť jednoduchú pokrývaciú úlohu (9) – (13), na základe ktorej zistíme, či existuje prípustné riešenie úlohy také, že všetky vzdialenosti medzi pacientmi a ich obsluhujúcimi strediskami sú menšie alebo rovné ako hodnota D_s . V takomto prípade by všetky premenné x_j nadobudli hodnotu 0. Inak by existovala aspoň jedna nenulová premenná x_j . Koeficienty a_{ij}^s určíme pre daný deliaci bod D_s podľa vzťahu (8).

$$a_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{ak } d_{ij} \leq D_s \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (8)$$

Matematický model pokrývacej úlohy riešenej pre deliaci bod D_s má tvar (9) - (13).

$$\text{Minimalizujte} \quad \sum_{j \in J} x_j \quad (9)$$

$$\text{Za podmienok:} \quad x_j + \sum_{i \in I} a_{ij}^s y_i \geq 1 \quad \forall j \in J \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (11)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (13)$$

Ak riešením modelu zistíme, že všetky premenné x_j nadobudli hodnotu 0, potom výpočet opakujeme pre nižšiu hodnotu D_s , v opačnom prípade zvolíme vyšší deliaci bod D_s . Takýmto spôsobom – kombináciou pokrývacej úlohy (9) - (13) a metódy bisekcie aplikovanej na celej postupnosti hodnôt d_0, d_1, \dots, d_m na nájdenie minimálnej hodnoty D_{s^*} – získame minimálnu vzdialenosť najhoršie položených pacientov od ich najbližšej stanice ZZS. Ako sme ukázali v [5], riešenie *minMax* úlohy pomocou opakovaného riešenia jednoduchej pokrývacej úlohy je v porovnaní s riešením pôvodného modelu (1) - (7) oveľa rýchlejšie. V tejto habilitačnej práci sa však zameriame na *minMax* úlohu ani nie tak z hľadiska jej riešiteľnosti, ako skôr z pohľadu dosiahnutej férovosti.

Keďže sme riešením *minMax* úlohy (1) - (7) získali dodatočnú informáciu o možnosti maximálneho možného zlepšenia dostupnosti služby pre najhoršie umiestnených pacientov, k analýze riešenia úlohy váženého p -mediánu popísanej v Tabuľke 1, sme pridali jeden nový ukazovateľ v podobe percentuálneho podielu pacientov, ktorých dostupnosť služby je nad hodnotou h získanou riešením modelu (1) - (7). Túto hodnotu označujeme symbolom *Afl*. Nasledujúca Tabuľka 2 obsahuje porovnanie výsledkov úlohy váženého p -mediánu a *minMax* prístupu z pohľadu férovosti. Aby boli výsledky porovnateľné, pre výsledný návrh usporiadania siete (vektor umiestňovacích premenných y_i , kde $i \in I$) získaný riešením *minMax* úlohy sme vypočítali hodnotu *ObjF* ako súčet vzdialeností všetkých pacientov od ich najbližšej stanice ZZS. Hodnota *BD* [%] udáva percentuálny podiel pacientov, ktorých dostupnosť služby je na úrovni hodnoty h minimalizovanej modelom (1) - (7).

Tabuľka 2 Vyhodnotenie *minMax* prístupu z pohľadu férovosti

Kraj	I	p	SB	Vážený p -medián				<i>minMax</i> prístup			
				ObjF	d_{avg}	d_{max}	Afl [%]	ObjF	d_{avg}	d_{max}	BD [%]
BA	87	9	6061	20342	3,36	25	2,92	33018	5,45	14	1,86
BB	515	52	6609	17289	2,62	26	1,48	42410	6,42	13	3,24
KE	460	46	7929	20042	2,53	23	1,79	39310	4,96	12	2,03
NR	350	35	6900	22651	3,28	17	1,42	36810	5,33	13	2,73
PO	664	67	8183	20025	2,45	22	1,75	53560	6,55	12	2,24
TN	276	28	5942	15686	2,64	30	2,26	33789	5,69	12	2,21
TT	249	25	5563	18873	3,39	24	1,71	27823	5,00	13	2,84
ZA	315	32	6911	20995	3,04	26	1,01	39556	5,72	14	4,05
SR	2916	273	55488	161448	2,91	24	1,66	342896	6,18	13	3,02

Dosiahnuté výsledky poukazujú na pár zaujímavých skutočností, ktoré treba starostlivo preskúmať a analyzovať spôsoby, ako im buď zabrániť, alebo naopak, ako ich ďalej využiť:

1. Aplikáciou *minMax* modelu pre návrh férového záchranného systému je možné oproti štandardne zaužívanej úlohe váženého p -mediánu zlepšiť dostupnosť služby pre najhoršie umiestnených používateľov systému danú vzdialenosťou k najbližšej stanici ZZS približne o polovicu, čo predstavuje oveľa férovejší spôsob návrhu siete staníc v porovnaní s pôvodným prístupom, kde sa optimalizovala dostupnosť služby pre tzv. priemerného používateľa.
2. Zlepšenie dostupnosti služby pre najhoršie umiestnených pacientov je pomerne drahé „zaplatené“. Ako môžeme vidieť, v niektorých prípadoch došlo k zvýšeniu priemernej vzdialenosti d_{avg} o viac ako sto percent, čo rozhodne nie je pre verejnosť dobré. Na druhej strane, toto zhoršenie možno jednoducho vysvetliť, pretože bolo očakávané. Model *minMax* úlohy (1) - (7) totiž kladie dôraz len na najhoršie umiestnených pacientov, ktorých môže byť zanedbateľne malé percento, pričom na situáciu ostatných (väčšiny) tento prístup nijako neprihliada. Zároveň môžeme pozorovať pomerne veľkú časť populácie (na Slovensku vyše tri percentá), ktorej dostupnosť služby sa pohybuje práve na hranici maximálnej hodnoty h .

Podrobná analýza a porovnanie uvedených prístupov viedli k spojeniu týchto dvoch metód do spoločného spôsobu navrhovania záchranných systémov tak, aby sa naplno využili výhodné vlastnosti oboch prístupov a zároveň, aby sa odstránili nevýhody, ktoré so sebou prináša *minMax* prístup v súvislosti s tzv. priemerným používateľom systému.

3 KOMBINOVANÁ MINSUM METÓDA S MIN-MAX PODMIENKOU

Kombinovaná *minSum* metóda s *minMax* podmienkou publikovaná v [6] predstavuje dvojfázový spôsob návrhu usporiadania siete staníc ZZS, kde sa v prvom kroku rieši *minMax* úloha popísaná modelom (1) - (7) s možnosťou efektívneho riešenia pomocou viacnásobnej aplikácie pokrývacej úlohy (9) - (13) a následne sa optimalizuje dostupnosť služby pre tzv. priemerného používateľa pomocou *minSum* kritéria, pričom maximálna vzdialenosť získaná v prvom kroku metódy sa nesmie prekročiť. Inak povedané, najprv sa optimalizuje vzdialenosť k najbližšej stanici ZZS pre najhoršie umiestnených pacientov a na základe výsledku sa optimalizuje dostupnosť služby pre ostatných. Riešením prvého kroku dostaneme hodnotu h , ktorá predstavuje vzdialenosť najhoršie umiestnených pacientov od ich najbližšej stanice ZZS. Túto hodnotu h nie je možné znížiť (pre nižšiu hodnotu h by neexistovalo prípustné riešenie). My ju využijeme v druhej fáze kombinovanej metódy na dva účely:

1. Ak vieme, že všetky vzdialenosti medzi umiestneniami pacientov $j \in J$ a stanicami ZZS musia byť menšie alebo rovné ako h , potom stačí v radiálnom modeli z postupnosti hodnôt d_0, d_1, \dots, d_m vziať len tie vzdialenosti, ktoré túto podmienku spĺňajú. Teda, hodnota h ovplyvní veľkosť modelu úlohy váženého p -mediánu riešeného v druhej fáze danú počtom zón a premennými x_{js} . V tomto prípade môžeme hodnotu deliaceho bodu D_{v+1} , ktorá definuje koniec poslednej zóny v , položiť rovnú hodnote h bez akejkoľvek straty presnosti.
2. Model štandardnej úlohy váženého p -mediánu rozšírime o podmienku, ktorá zabezpečí, že všetky vzdialenosti medzi umiestneniami pacientov a stanicami ZZS budú menšie alebo rovné ako hodnota h .

súlade s uvedenými skutočnosťami môžeme matematický model úlohy riešený v druhej fáze kombinovanej metódy formulovať pomocou výrazov (14) - (19).

$$\text{Minimalizujte} \quad \sum_{j \in J} b_j \sum_{s=0}^v e_s x_{js} \quad (14)$$

$$\text{Za podmienok:} \quad x_{js} + \sum_{i \in I} a_{ij}^s y_i \geq 1 \quad \forall j \in J, s = 0, \dots, v \quad (15)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (16)$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij}^{v+1} y_i \geq 1 \quad \forall j \in J \quad (17)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (18)$$

$$x_{js} \geq 0 \quad \forall j \in J, s = 0, \dots, v \quad (19)$$

Účelová funkcia (14) minimalizuje súčet vzdialeností medzi pacientmi a ich najbližšími stanicami ZZS. Podmienky (15) slúžia na definovanie vzťahov medzi umiestňovacími premennými y_i a pomocnými premennými x_{js} , pomocou ktorých vyjadrujeme jednotlivé vzdialenosti. Podmienka (16) limituje počet umiestnených staníc. Posledná séria podmienok (17) zabezpečí, že v dosahu D_{v+1} každého pacienta bude umiestnená aspoň jedna stanica ZZS. Inak povedané, vzdialenosť k najbližšej stanici neprekročí hodnotu D_{v+1} , ktorá je rovná hodnote h získanej riešením *minMax* modelu v prvej fáze. Podmienky (18) a (19) udávajú definičný obor premenných modelu. Z analýzy férovosti vykonanej bezprostredne pred návrhom dvojfázovej metódy vyplývajú nasledovné očakávania:

1. Hodnota d_{max} sa v porovnaní s predchádzajúcimi výsledkami nezmení. Optimalizáciou dostupnosti záchranej služby pre tzv. *priemerného* používateľa sa však dá očakávať, že percentuálny podiel pacientov na hranici d_{max} sa zníži.
2. Oproti *minMax* prístupu očakávame výrazné zlepšenie priemernej vzdialenosti d_{avg} , čo dosiahneme riešením úlohy váženého p -mediánu s *minMax* podmienkou v druhej fáze.

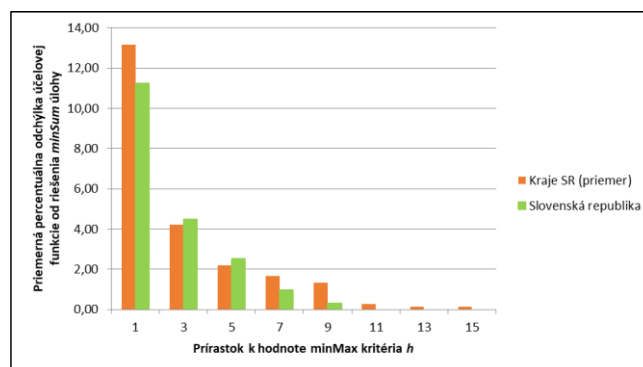
Analýza výsledkov navrhutej kombinovanej metódy je uvedená v Tabuľke 3, ktorá má rovnakú štruktúru ako Tabuľka 2.

Tabuľka 3 Vyhodnotenie kombinovanej *minSum* metódy s *minMax* podmienkou z pohľadu férovosti

Kraj	I	p	SB	Vážený p-medián				Kombinovaný prístup			
				ObjF	d_{avg}	d_{max}	Afl [%]	ObjF	d_{avg}	d_{max}	BD [%]
BA	87	9	6061	20342	3,36	25	2,92	26229	4,33	14	2,03
BB	515	52	6609	17289	2,62	26	1,48	21780	3,30	13	1,44
KE	460	46	7929	20042	2,53	23	1,79	24117	3,04	12	0,85
NR	350	35	6900	22651	3,28	17	1,42	26894	3,90	13	3,41
PO	664	67	8183	20025	2,45	22	1,75	24467	2,99	12	1,55
TN	276	28	5942	15686	2,64	30	2,26	23476	3,95	12	2,41
TT	249	25	5563	18873	3,39	24	1,71	21067	3,79	13	1,20
ZA	315	32	6911	20995	3,04	26	1,01	24424	3,53	14	1,52
SR	2916	273	55488	161448	2,91	24	1,66	193715	3,49	13	1,34

Výsledky uvedené v Tabuľke 3. potvrdzujú očakávania, že uplatnením dvojfázovej metódy možno získať lepšie rozmiestnenie staníc ZZS z pohľadu pacientov ako jednoduchým *minMax* prístupom, ktorý je založený na minimalizácii maximálnej vzdialenosti.

Na záver tejto podkapitoly uvedieme ešte jednu krátku analýzu, ktorej cieľom bolo zistiť, k akým efektom dôjde, ak by sme hodnotu h získanú v prvej fáze riešením *minMax* úlohy považovali za príliš limitujúcu a pokúsili by sme sa ju „uvoľniť“ tým, že k nej pripočítame istý prírastok, ktorý by nadobúdval hodnoty 1, 3, 5, ..., 15. V druhej fáze by sa tak riešil väčší model, pričom podmienka (17) by bola voľnejšia (veľkosť okruhu D_{v+1} by bola väčšia). Výsledky druhej fázy sme potom porovnali s riešením úlohy váženého p -mediánu s jednoduchým *minSum* kritériom, kde sa minimalizuje súčet vzdialeností medzi pacientmi a ich najbližšími stanicami ZZS. Výsledky vykonaných experimentov sú znázornené na Obrázku 1 ako priemer pre jednotlivé kraje a celé územie SR. Z grafu je zrejmé, že čím slabší je limit h (čím väčší je jeho prírastok), tým viac sa približujeme k riešeniu úlohy váženého p -mediánu a logicky, tým viac strácame na férovosti výsledného riešenia [6].



Obrázok 1 Vplyv zvýšenia *minMax* kritéria h na priemernú percentuálnu odchýlku od *minSum* riešenia

4 LEXIKOGRAFICKÝ PRÍSTUP

Potreba navrhovania spravodlivých záchranných systémov z pohľadu dostupnosti služby pre všetkých používateľov viedla k rôznym pohľadom na férovosť, ktorých cieľom je prekonať nedostatok pozorovaný pri analýze riešenia úlohy váženého p -mediánu. Napriek tomu, že sa minimalizovala priemerná doba potrebná na dosiahnutie pacienta, niektoré komunity zostali príliš vzdialené od najbližšej stanice, čo logicky považovali za neférové.

V tejto časti budeme prezentovať tzv. *lexikografický* prístup [4], ktorý je považovaný za najférovejší. Jeho princíp spočíva v sekvenčnom riešení špecifického modelu, kde sa najprv minimalizuje dostupnosť služby vo forme vzdialenosti alebo času pre najhoršie umiestnených pacientov a v každom ďalšom kroku sa hľadá také rozmiestnenie staníc ZZS, ktoré zaručí čo najlepšiu dostupnosť služby pre čo najvyšší počet pacientov. Inými slovami, postupne sa minimalizuje počet pacientov, ktorých dostupnosť služby je najhoršia, druhá najhoršia, tretia najhoršia a tak ďalej až po tých, ktorí majú sídlo stanice ZZS vo svojej obci. Prítom počas celého sekvenčného procesu nesmieme zhoršiť dostupnosť služby tým pacientom, ktorým sme ju optimalizovali v predošlých krokoch. Ako ukážeme na príkladoch, formulácia modelu pre férový návrh záchranného systému predstavuje komplikovaný problém. Preto sa obmedzíme len na radiálnu formuláciu, ktorá sa ukázala ako vhodná alternatíva už niekoľkokrát, najmä pri úlohe váženého p -mediánu, z ktorej budeme vychádzať aj v tomto prípade. Navyše budeme predpokladať, že každá požiadavka na obsluhu je pridelená výlučne najbližšiemu stredisku bez ohľadu na jeho kapacitu a vyťaženosť.

V súlade s princípom radiálnej formulácie popísaným napríklad v [3] môžeme pre každého používateľa v mieste $j \in J$ vyjadriť jeho dostupnosť služby $g_j(\mathbf{x})$ pomocou vektora \mathbf{x} premenných x_{js} podľa vzťahu (20).

$$g_j(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^v e_s x_{js} \quad (20)$$

Rozsah všetkých možných hodnôt $g_j(\mathbf{x})$ pre $j \in J$ možno popísať pomocou konečnej množiny zoradených hodnôt $G_0, G_1, \dots, G_w, G_{w+1}$, kde $G_{max} = G_0 > G_1 > \dots > G_w > G_{w+1} = G_{min}$. Táto množina môže obsahovať všetky hodnoty $g_j(\mathbf{x})$ alebo len vybrané hodnoty, tzv. *deliace body*, ktoré potom definujú celkom $w+1$ intervalov (G_{u+1}, G_u) pre $u = 0, 1, \dots, w$. Podobný princíp tvorí základ radiálneho prístupu pri aproximácií vzdialeností.

Férový návrh usporiadania staníc ZZS potom spočíva v lexikografickej minimalizácii tzv. *distribučného vektora* $[B_0(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{x}), \dots, B_w(\mathbf{x})]$ za podmienok (15), (16), (18) a (19). Jednotlivé zložky distribučného vektora sú definované ako celkový počet používateľov, ktorých dostupnosť služby leží v určitom intervale (G_{u+1}, G_u) , čo možno zapísať v tvare (21).

$$B_u(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j \in J \\ g_j(\mathbf{x}) \in (G_{u+1}, G_u]}} b_j \quad \forall u = 0, \dots, w \quad (21)$$

Optimálne riešenie lexikografickej *minMax* úlohy pre férový návrh záchranných systémov potom získame opakovaným riešením radiálne formulovaného modelu, ktorý má pre krok t tvar (22) - (27). Pripomeňme, že v každom kroku metódy počet štrukturálnych podmienok narastá z dôvodu zachovania účelovej funkcie získanej v predchádzajúcich krokoch.

$$\text{Minimalizujte} \quad \sum_{j \in J} b_j \sum_{s=v-t}^v e_s x_{js} \quad (22)$$

$$\text{Za podmienok:} \quad x_{js} + \sum_{i \in I} a_{ij}^s y_i \geq 1 \quad \forall j \in J, s = 0, \dots, v \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leq p \quad (24)$$

$$\sum_{j \in J} b_j \sum_{s=v-u}^v e_s x_{js} \leq \underline{B}_u^* \quad \forall u = 0, \dots, t-1 \quad (25)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (26)$$

$$x_{js} \geq 0 \quad \forall j \in J, s = 0, \dots, v \quad (27)$$

Účelová funkcia (22) vyjadruje parciálny podiel celkovej dostupnosti záchranej služby pre pacientov, ktorý odpovedá zjednoteniu intervalov (G_{t+1}, G_t) pre aktuálny a všetky doterajšie kroky. Štruktúrne podmienky (23) a (24) sú známe z radiálnej formulácie úlohy váženého p -mediánu, preto ich netreba podrobne komentovať. Podmienky (25) zabezpečia, že hodnota účelovej funkcie minimalizovaná v predchádzajúcich krokoch algoritmu sa nesmie zhoršiť, čím sa dosiahne aj lexikografická minimalizácia vektora $[B_0(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{x}), \dots, B_w(\mathbf{x})]$. Hodnota B_u^* odpovedá účelovej funkcii optimalizovanej v kroku $u = 0, \dots, t-1$. Obligatórne podmienky (26) a (27) udávajú definičný obor premenných modelu.

Lexikografický prístup k návrhu férových záchranných systémov sme overili na niekoľkých testovacích úlohách. Cieľom experimentov bolo okrem vyhodnotenia základných charakteristík ako d_{avg} a BD [%] aj preskúmanie časovej náročnosti metódy. Pre výsledné rozmiestnenie staníc ZZS sme vypočítali hodnotu kritéria $ObjF$ ako súčet vzdialenosti pacientov od ich najbližšej stanice. Ostatné charakteristiky majú rovnaký význam ako v predchádzajúcich experimentoch. Výsledky lexikografickej metódy sú zhrnuté v Tabuľke 4.

Tabuľka 4 Vyhodnotenie lexikografickej $minMax$ metódy z pohľadu férovosti

Kraj	I	p	SB	Vážený p -medián				Lexikografický $minMax$ prístup				
				$ObjF$	d_{avg}	d_{max}	Afl [%]	Čas [s]	$ObjF$	d_{avg}	d_{max}	BD [%]
BA	87	9	6061	20342	3,36	25	2,92	0,1	35189	5,81	14	0,12
BB	515	52	6609	17289	2,62	26	1,48	4,9	31209	4,72	13	0,38
KE	460	46	7929	20042	2,53	23	1,79	179,6	44130	5,57	12	0,03
NR	350	35	6900	22651	3,28	17	1,42	99,5	37370	5,42	13	0,04
PO	664	67	8183	20025	2,45	22	1,75	138,9	44760	5,47	12	0,01
TN	276	28	5942	15686	2,64	30	2,26	23,6	32120	5,41	12	0,37
TT	249	25	5563	18873	3,39	24	1,71	13,0	27469	4,94	13	0,09
ZA	315	32	6911	20995	3,04	26	1,01	4,1	29576	4,28	14	0,19

Výsledky uvedené v Tabuľke 4 ukazujú, že radiálna formulácia lexikografickej $minMax$ úlohy je riešiteľná v krátkom výpočtovom čase. Z pohľadu férovosti môžeme pozorovať fakt, že dostupnosť služby pre väčšinu pacientov je výrazne pod hranicou d_{max} . Oproti návrhu siete staníc ZZS pomocou úlohy váženého p -mediánu však priemerná vzdialenosť d_{avg} k najbližšej stanici mierne vzrástla. Zároveň treba dodať, že v riešení úlohy váženého p -mediánu je d_{max} takmer dvojnásobná ako v prípade férového návrhu rozmiestnenia staníc. Podrobnejšiu analýzu lexikografickej metódy a porovnanie radiálnej formulácie s lokačno-alokačným prístupom možno nájsť v [4].

Na záver tejto kapitoly ešte v stručnosti poukážeme na zaujímavú skutočnosť. Pri dôkladnej analýze jednotlivých krokov výpočtového procesu lexikografickej $minMax$ úlohy sme dospeli k hypotéze, že strategické rozhodnutia o umiestnení staníc ZZS sa prijímajú v niekoľkých prvých iteráciách. To znamená, že podobu usporiadania siete staníc určujú najhoršie umiestnenia používateľa. V neskorších fázach a predovšetkým v závere metódy, kde sa rieši najväčší model s vysokým počtom štruktúrnych podmienok (25), už k výrazným zmenám v návrhu siete staníc ZZS nedochádza. Túto skutočnosť možno pozorovať na základe hodnôt umiestňovacích premenných y_i pre $i \in I$ a ich postupnými zmenami v jednotlivých krokoch. Uvedený fakt nás viedol k vytvoreniu aproximatívnej metódy, ktorá spočíva v zavedení pravidiel zastavenia, ktoré ukončí iteračný proces predčasne po niekoľkých prvých krokoch.

Ako sme ukázali v [4], vhodným nastavením ukončovacieho kritéria možno dosiahnuť niekoľkonásobné skrátenie výpočtového času (najväčšie modely sa vôbec neriešia) pri zanedbateľne malých odchýlkach (neprekračujúcich hranicu 0,5 percenta hodnoty účelovej funkcie). Takýmto spôsobom možno efektívne využiť bežne dostupné IP-solvery ako XPRESS-IVE na rýchle získanie kvalitného férového návrhu siete staníc záchranej služby.

5 ZÁVER

V príspevku sme sa zaoberali problematikou formulácie matematických modelov slúžiacich na návrh a optimalizáciu záchranných systémov s kritériom férovosti. Jednotlivé modely boli skúmané nielen z hľadiska ich riešiteľnosti pomocou bežne dostupných informatických prostriedkov, ale aj z pohľadu kvality výsledného návrhu siete staníc ZZS.

Budúci výskum v tejto oblasti by mohol byť zameraný na rozšírenie navrhnutých postupov o koncept všeobecnej disutility, ktorej cieľom je aspoň čiastočne zakomponovať stochastický charakter reálnych systémov do deterministických matematických modelov. V takomto prípade sa predpokladá, že služba nemusí byť poskytovaná iba z najbližšieho strediska, ale modeluje sa vzdialenosť k predpokladanému najbližšiemu voľnému stredisku.

Druhou výskumnou témou by mohla byť optimalizácia záchranných systémov s férovým kritériom kvality v podmienkach neistoty, ktoré pramenia z náhodne sa vyskytujúcich nežiadúcich javov na dopravných sieťach, po ktorých je záchranná služba poskytovaná.

POĎAKOVANIE

Tento príspevok vznikol vďaka podpore výskumných grantov VEGA 1/0342/18 “Optimálne dimenzovanie obslužných systémov”, VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest” a APVV-15-0179 “Spoľahlivosť záchranných systémov na infraštruktúre s neistou funkcionalitou kritických prvkov”.

Použitá literatúra

1. BUZNA, L., KOHÁNI, M., JANÁČEK, J. (2013). *Proportionally Fairer Public Service Systems Design. Communications - Scientific Letters of the University of Žilina*, ISSN 1335-4205, vol. 15, No. 1, 2013, pp. 14-18
2. GARCIA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. (2011). *Solving large p -median problems with a radius formulation*. In *INFORMS Journal on Computing* 23 (4), 2011, pp. 546-556
3. JANÁČEK, J., KVET, M. (2011). *Approximate solving of large p -median problems*. In *ORP3 = Operational research peripatetic post-graduate programme: Cádiz, Spain*. September 13-17, 2011, ISBN 978-84-9828-348-8, pp. 221-225
4. JANÁČEK, J., KVET, M. (2014). *Lexicographic optimal public service system design*. In *Mathematical methods in economics*, Olomouc, Czech Republic, September 10-12, 2014, Olomouc: Palacký university, 2014, ISBN 978-80-244-4209-9, pp. 366-371
5. KVET, M., JANÁČEK, J. (2015). *Min-max optimal public service system design*. In *Croatian Operational Research Review*, ISSN 1848-0225, Vol. 6, no. 1, 2015, pp. 17-27
6. KVET, M., JANÁČEK, J. (2017). *Composed min-max and min-sum radial approach to the emergency system design*. In *Operations research proceedings 2015: selected papers of the international conference of the German, Austrian and Swiss operations research society (GOR, ÖGOR, SVOR/ASRO)*, University of Vienna, Austria, September 1-4, 2015, Springer, 2017, ISBN 978-3-319-42901-4, ISSN 0721-5924, pp. 41-47

7. KVET, M. (2018). *Advanced radial approach to resource location problems*. In: *Developments and advances in intelligent systems and applications*. Cham: Springer International Publishing, 2018, Studies in computational intelligence, 718, ISSN 1860-949X, ISBN 978-3-319-58963-3, pp. 29-48
8. MARSH, M., SCHILLING, D. (1994). *Equity Measurement in Facility Location Analysis*. In *European Journal of Operational Research*, 74, 1994, pp. 1-17
9. OGRYCZAK, W., SLIWINSKI, T. (2006): *On Direct Methods for Lexicographic Min-Max Optimization*. In Gavrilova M. et al. (Eds.): ICCSA 2006, LNCS 3982, Berlin: Heidelberg: Springer, 2006, pp. 802-811

Kontaktné údaje

Ing. Marek Kvet, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4024

email: marek.kvet@fri.uniza.sk

ODHAD VEKTOROVO AUTOREGRESNÝCH MODELOV V R¹

ESTIMATE OF VECTOR AUTOREGRESSIVE MODELS WITH R

Martin Lukáčik

Abstrakt

Rozvoj ekonometrickej analýzy je v posledných rokoch úzko spojený s rozvojom výpočtovej techniky a zodpovedajúceho softvéru. Bez kvalitného programového vybavenia by sme nemohli realizovať takmer žiadne analýzy. Vďaka vzrastajúcemu počtu analýz využívajúcich vektorovo autoregresné modely v rôznych oblastiach ekonómie sa rozšírili aj ich možnosti v jednotlivých programoch. V príspevku sme sa preto rozhodli predstaviť možnosti analýz pomocou vektorovo autoregresných modelov v programovacom systéme R, ktorý je voľne dostupný a predstavuje alternatívu komerčným špecializovaným softvérovým produktom.

Keľúčovú slová: *ekonometrická analýza, VAR modely, programovací systém R, RStudio*

Abstract

The development of econometric analysis is in recent years closely linked to the development of computers and appropriate software. Without high-quality software, we could hardly make any analysis. Thanks to the increasing number of analyzes using vector autoregressive models in various fields of economics, their possibilities in software have been extended. In paper, we decided to present the possibilities of analysis using vector autoregressive models in R, which is freely available and it is an alternative to the commercial software product.

Keywords: *econometric analysis, VAR models, R programming system, RStudio*

1 VEKTOROVO AUTOREGRESNÉ MODELY

Vektorovo autoregresné modely (VAR) našli uplatnenie v mnohých oblastiach ekonomickej analýzy. Stock a Watson (2001) uvádzajú, že makroekonometria robia v podstate štyri základné veci, pričom pri každej z nich sa dajú využiť vektorovo autoregresné modely. Prvou sférou záujmu je popis a súhrn makroekonomických údajov. Druhou oblasťou záujmu je tvorba makroekonomických prognóz. V týchto oblastiach považujú Stock a Watson VAR modely za osvedčený nástroj. Tretím poľom pôsobnosti je kvantifikácia štruktúry ekonomiky a poslednou oblasťou je vplyv na tvorcov hospodárskej politiky. V týchto oblastiach je využitie jednoduchých VAR modelov obmedzenejšie, lebo záleží aj na ďalších okolnostiach.

Vektorovo autoregresný model rádu p , v ktorom sú všetky premenné endogénne, ich počet je n a každá je vysvetľovaná zvyšnými premennými toho istého obdobia a o 1 až p období oneskorenými hodnotami všetkých premenných modelu:

$$\Gamma \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{B}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t, \quad E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t^T) = \boldsymbol{\Sigma}_u = \text{diag} \quad (1)$$

nazývame štruktúrnym tvarom modelu. Štruktúrný model tvorí $(p+1)n^2$ parametrov, ale len n rozptylov, ak sú náhodné zložky u_i a u_j pre $\forall i \neq j$ vzájomne nekorelované. Kovariančná

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0294/18 "Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomickeho vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov" a VEGA 1/0248/17 "Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie".

matica náhodných zložiek u_i je diagonálnou maticou. Prenásobením (1) maticou Γ^{-1} zľava získame redukovaný tvar modelu, ktorý možno odhadovať metódou najmenších štvorcov:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi}_0 + \Pi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \Pi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \dots + \Pi_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{v}_t, \quad E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T) = \Sigma_v \quad (2)$$

Skúmaním identifikácie rovníc modelu zistíme, že model je neidentifikovaný. Redukovaný tvar tvorí $n + pn^2$ parametrov modelu a $(n^2 + n)/2$ prvkov symetrickej kovariančnej matice náhodných zložiek v_t . Počet pozorovaní premenných označujeme T .

Pri identifikácii sa obvykle vyberá medzi krátkodobými a dlhodobými ohraňeniami, prípadne ich kombinácia. Softvérové riešenia vychádzajú zo vzťahu medzi štruktúrnymi a redukovanými šokmi, a to v tvare:

$$\Gamma \mathbf{v}_t = \Lambda \mathbf{u}_t \text{ resp. } \mathbf{v}_t = \Gamma^{-1} \Lambda \mathbf{u}_t$$

Z neho odvodíme vzťah medzi kovariančnými maticami Σ_u a Σ_v :

$$\Sigma_v = \Gamma^{-1} \Lambda \Sigma_u \Lambda^T (\Gamma^{-1})^T \text{ resp. ak } \Sigma_u = \mathbf{I}, \text{ platí } \Sigma_v = \Gamma^{-1} \Lambda \Lambda^T (\Gamma^{-1})^T$$

Identifikácia sa v rôznych aplikáciách odlišuje spôsobmi, akými sa zavedú ohraňenia na parametre matic Γ a Λ . Základnou stratégiou je Choleskeho dekompozícia, ktorá znamená trojuholníkovú Γ a diagonálnu Λ . Okrem nej je bežnou identifikačnou schémou krátkodobých ohraňení líšiaca sa od Choleskeho dekompozície. Ohraňenia vyplývajú z apriórnej informácie. Takéto modely sú často preidentifikované a ohraňenia sa dajú testovať.

Pri dlhodobých ohraňeniach $\Gamma = \mathbf{I}$, Λ nebýva ohraňená a pre maticu dlhodobých vplyvov štruktúrnych šokov na premenné platí:

$$(\mathbf{I} - \Pi_1 - \Pi_2 - \dots - \Pi_p)^{-1} \Lambda \mathbf{u}_t = \Pi^{-1} \Lambda \mathbf{u}_t$$

Koeficienty Π^{-1} sa získajú z odhadu redukovaného tvaru a následne sa tu zavedú ohraňenia.

Prepisom (2) pomocou polynómu operátora oneskorenia získame:

$$\Pi(L) \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_t - \Pi_1 L \mathbf{y}_t - \Pi_2 L^2 \mathbf{y}_t - \dots - \Pi_p L^p \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\pi}_0 + \mathbf{v}_t$$

kde $\Pi(L) = \mathbf{I} - \Pi_1 L - \Pi_2 L^2 - \dots - \Pi_p L^p$. Každý stacionárny VAR proces sa dá Woldovou dekompozíciou zapísať v tvare kľzavých priemerov nekonečného rádu:

$$\mathbf{y}_t = \Pi(L)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0 + \Pi(L)^{-1} \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k \mathbf{v}_{t-k}, \text{ kde } \Theta_0 = \mathbf{I}, \lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_k = \mathbf{0}$$

Jednotlivé Woldove koeficienty získame riešením $\Pi(L)\Theta(L) = \mathbf{I}$, z ktorého vyplýva $\Theta_1 = \Pi_1$, $\Theta_2 = \Pi_1 \Pi_1 + \Pi_2$ až $\Theta_k = \Pi_1 \Theta_{k-1} + \dots + \Pi_p \Theta_{k-p}$. Závislosť od štruktúrnych šokov je:

$$\mathbf{y}_t = \Pi(L)^{-1} \boldsymbol{\pi}_0 + \Pi(L)^{-1} \Gamma^{-1} \Lambda \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k \mathbf{u}_{t-k}, \text{ kde } \Psi_0 = \Gamma^{-1} \Lambda \text{ a } \Psi_k = \Theta_k \Gamma^{-1} \Lambda$$

Prvky matice Ψ_k , teda $\Psi_{ij}^{(k)}$ predstavujú reakciu i -tej premennej na jednotkovú zmenu j -tého štruktúrneho šoku po k obdobiach. Krátkodobý multiplikátor okamžitej reakcie prvej premennej na šok z druhej rovnice je označený $\Psi_{12}^{(0)}$ a krátkodobý multiplikátor reakcie po jednom období $\Psi_{12}^{(1)}$. Zobrazením $\Psi_{12}^{(k)}$ s meniacim sa k získame funkciu reakcie prvej premennej na impulz z druhej rovnice. Ich spočítaním získame dlhodobý multiplikátor. Zobrazením $\Psi_{12}^{(k)}$ s meniacim sa k získame funkciu reakcie prvej premennej na impulz z druhej rovnice.

2 KLASICKÝ ODHAD PARAMETROV VAR MODELOV

Na klasický odhad parametrov vektorovo autoregresného modelu sa v programovacom systéme R môžu využiť viaceré prídavné balíčky. Zvolíme si balíček *vars*. Po jeho stiahnutí a nainštalovaní ukážeme odhad, ktorý prezentovali Leeper, Sims a Zha (1996). Aby získali dostatočné množstvo údajov, skúmali mesačné údaje od januára 1960 do marca 1996, čo je vyše 400 údajov v každom rade². Z ich analýzy vyberáme VAR model, kde v trojrozmernom systéme je využitý rad logaritmov sezónne očisteného *CPI* označený *LP*, rad logaritmov sezónne očisteného *HNP* označený *LY* a rad logaritmov sezónne očistenej peňažnej zásoby *LM*. Autori štúdie odhadovali model so 6 oneskoreniami.

```
> install.packages("vars") # stiahne a nainštaluje vars
> library(vars) # aktivácia prídavného balíka vars
> Sims <- read.csv(file = "sims.csv", header = T, sep = ";", dec = ",") # dáta
```

Načítanie údajov z csv súboru uvádza Lukáčik, Lukáčiková a Szomolányi (2016). Pri odhade parametrov autoregresných modelov a aj VAR modelov je výhodné previesť používané údaje na objekt typu *ts*, teda časový rad pomocou funkcie *ts*. V nej sa špecifikuje frekvencia aj rozsah dostupných údajov. Viac sa o tomto type objektu dá nájsť v Lukáčik (2016).

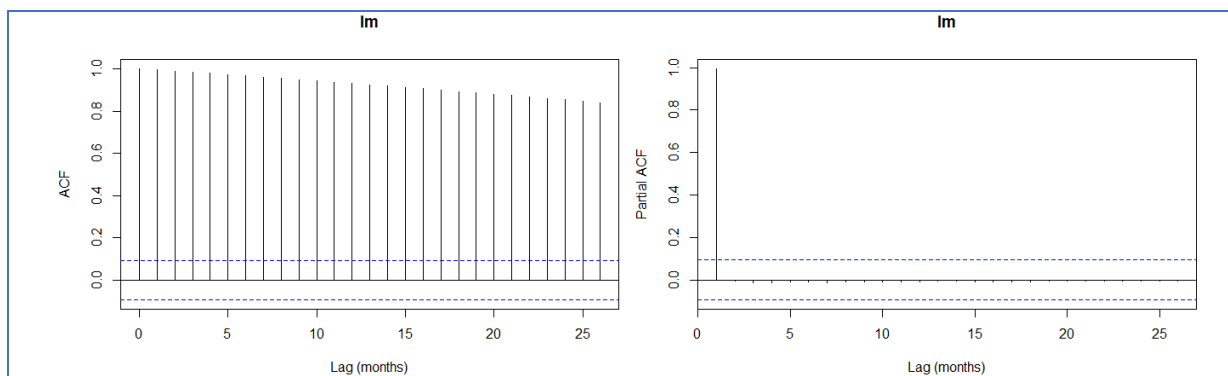
```
> Sims.ts <- ts(Sims, start=c(1959,7), frequency=12) # prevod dát na typ ts
```

Pri každom type údajov ale obzvlášť pri časových radoch je podstatná ich vizualizácia, ktorá môže pomôcť pri mnohých rozhodnutiach.

```
> ts.plot(Sims.ts[, "lp"], Sims.ts[, "lm"], Sims.ts[, "ly"], type="l", lty=c(1,2,3), col=c(1,2,3))
# čiarové grafy použitých časových radov
> legend("topleft", border=NULL, legend=c("lp", "lm", "ly"), lty=c(1,2,3), col=c(1,2,3))
# popisky zobrazených časových radov
```

Zistenie, či je analyzovaný proces stacionárny, je dôležitou nielen pri Boxovej Jenkinsonovej metodológii ale aj pri výbere premenných vo VAR modeli a type modelu (pri kointegrácii namiesto VAR zvolíme VECM). Základnými nástrojmi na identifikáciu stacionarity sú grafy autokorelačnej funkcie ACF a parciálnej autokorelačnej funkcie PACF.

```
> plot(acf(coredata(Sims.ts[, "lm"])), main="ly", xlab="Lag (months)") # acf
> plot(pacf(coredata(Sims.ts[, "lm"])), main="ly", xlab="Lag (months)") # pacf
```



Obrázok 1: Grafy autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie

Rozlíšenie, či sa v procese nachádza stochastický, deterministický trend alebo oba, potrebné pri výbere typu modelu sa obvykle získava testovaním jednotkového koreňa

² Údaje autorov nie sú priamo k dispozícii, preto využívame údaje, ktoré uvádza profesor Nicola Viegi na stránke: <http://www.nvegi.net/teaching/master/sims.xls>

a deterministických členov v testovacej rovnici typu:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + (\gamma_1 - 1)y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + u_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \lambda y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \delta_j \Delta y_{t-j} + u_t$$

Rozšírený Dickeyho-Fullerov test (ADF) skúma štatistickú významnosť parametra λ , pričom kritické hodnoty τ -štatistiky závisia od deterministickej schémy skúmaného modelu (či obsahuje aj trend, iba konštantu alebo je bez oboch). Rozhodnutie o počte autoregresných členov p , ktoré eliminujú problém autokorelácie, sa vykonáva pomocou informačných kritérií Akaikeho (AIC) alebo Schwarz (BIC). Nižšia hodnota znamená vhodnejší model.

Aby na rozhodovanie o parametri λ nevlplyvali α_0 a α_1 , testujú sa kombinácie združených hypotéz o parametroch pomocou Φ -rozdelení, pričom testovaná hodnota Φ sa vypočíta rovnako ako F -štatistika. Rozdelenie Φ_2 sa používa pri združenej hypotéze $\alpha_0 = \alpha_1 = \lambda = 0$ a rozdelenie Φ_3 pri združenej hypotéze $\alpha_1 = \lambda = 0$ v modeli s trendom a rozdelenie Φ_1 sa používa pri združenej hypotéze $\alpha_0 = \lambda = 0$ v modeli s konštantou.

```
> # adf test s testovacou rovnicou obsahujúcou trend
> summary(ur.df(Sims.ts[, "lm"], type="trend", lags=12, selectlags="BIC"))
> # adf test s testovacou rovnicou obsahujúcou konštantu
> summary(ur.df(Sims.ts[, "lm"], type="drift", lags=12, selectlags = "BIC"))
> # adf test s testovacou rovnicou bez trendu a konštanty
> summary(ur.df(Sims.ts[, "lm"], type="none", lags=12, selectlags = "BIC"))
> # prípadná diferenciacia sa vytvorí príkazom      d.lm <- diff(Sims.ts[, "lm"])
```

Výpis testu ADF na obrázku 2 okrem odhadu testovacej rovnice s trendom obsahuje v dolnej časti zvýraznené hodnoty testovacích štatistík a kritické hodnoty rôznych hladín významnosti. Hodnota tau štatistiky $-2,6936$ nie je menšia ako kritické hodnoty, teda nezamietame jednotkový koreň. Hodnota Φ_2 štatistiky $9,6982$ je väčšia ako kritické hodnoty, parametre pri trende a konštantе sa súčasne nerovnjajú 0 a testovacia rovnica je vhodne zvolená.

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression trend
Call:  lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:
    Min     1Q   Median     3Q     Max
-0.0187269 -0.0024087 -0.0000786  0.0023968  0.0145917

Coefficients:  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.883e-02  1.390e-02  2.792  0.00547 **
z.lag.1       -7.984e-03  2.964e-03 -2.694  0.00735 **
tt            4.476e-05  1.618e-05  2.767  0.00591 **
z.diff.lag1   3.892e-01  4.760e-02  8.176 3.50e-15 ***
z.diff.lag2  -4.976e-02  5.091e-02 -0.977  0.32897
z.diff.lag3   2.208e-01  4.989e-02  4.426 1.23e-05 ***
z.diff.lag4  -1.299e-01  5.102e-02 -2.546  0.01125 *
z.diff.lag5   2.014e-01  4.786e-02  4.208 3.15e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.004184 on 420 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2764, Adjusted R-squared: 0.2644
F-statistic: 22.92 on 7 and 420 DF, p-value: < 2.2e-16
```

```
Value of test-statistic is: -2.6936 9.6982 3.9864
```

```
Critical values for test statistics:
```

```
1pct 5pct 10pct
tau3 -3.98 -3.42 -3.13
phi2 6.15 4.71 4.05
phi3 8.34 6.30 5.36
```

Obrázok 2: Výpis ADF testu testovacej rovnice s trendom balíčka vars

Vhodná dĺžka maximálneho oneskorenia použitého v modeli závisí od rozhodnutia tvorcu modelu. Na výber dĺžky maximálneho oneskorenia sa používajú informačné kritériá Akaikeho, Schwarz, Hannana a Quinna alebo chyba prognózy FPE.

```
> VARselect(Sims.ts, lag.max = 12, type = "const") # výber oneskorenia
```

Odhad parametrov si vyžaduje voľbu maximálneho oneskorenia p a typu deterministickej schémy ("const", "trend", "both" alebo "none"). Zároveň umožňuje zadať exogénne premenné pomocou argumentu *exogen*, čo ale v našom prípade nevyužívame. Vzhľadom na rozsiahlosť výpisu je výhodné zobrazovať ho po jednotlivých rovniciach prípadne zvoliť úspornejší výpis. Zobrazit' môžeme aj graf pre odhad jednej rovnice VAR modelu.

```
> Sims.VAR <- VAR(Sims.ts, p = 6, type = "const") # odhad VAR modelu
> summary(Sims.VAR, equation = "lm") # výpis odhadu VAR modelu
> plot(Sims.VAR, names = "lm") # graf vyrovnaných hodnôt a reziduálov
```

Úspornejší výpis odhadnutých parametrov môžeme získať príkazom:

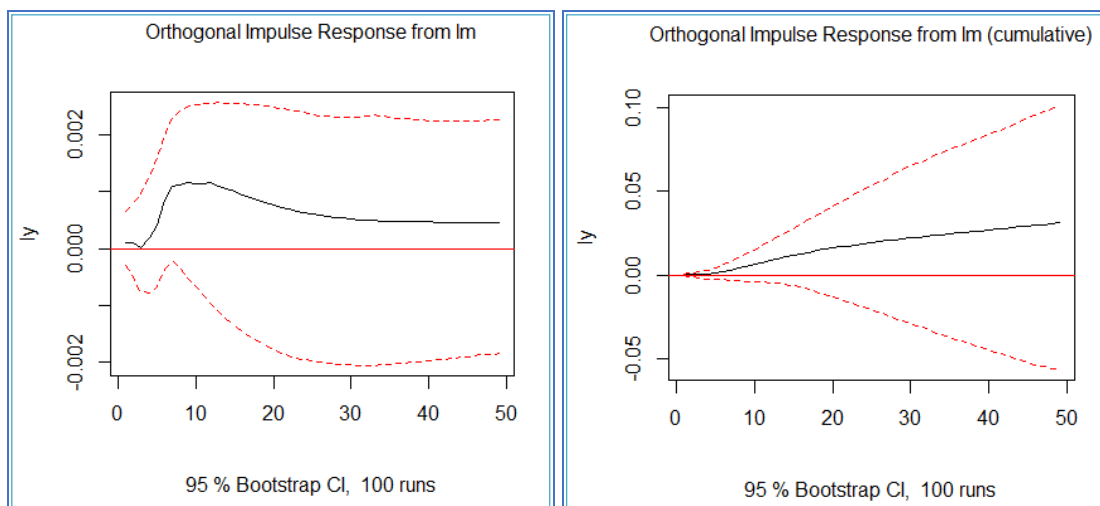
```
> round(rbind(coef(Sims.VAR)[[1]][,1:2],coef(Sims.VAR)[[2]][,1:2]),2)
```

Pri výbere VAR modelu sa používajú diagnostické testy reziduálov. Na testovanie sériovej korelácie odporúča Lütkepohl (2005) portmanteau test, v ktorom sa vypočítava Ljung-Boxova štatistika a na testovanie autokorelácie odporúča test Lagrangeových multiplikátorov. Ďalej testujeme normalitu reziduálov a autoregresne podmienenú heteroskedasticitu alebo môžeme zobrazit' výsledok CUSUM testu stability.

```
> serial.test(Sims.VAR, lags.pt = 12, type = "PT.asymptotic") # portmanteau
> serial.test(Sims.VAR, lags.bg = 6, type = "BG") # Ljungovej-Boxov test
> normality.test(Sims.VAR) # Jarqueov-Beraov test normality
> arch.test(Sims.VAR, lags.multi = 4) # testovanie ARCH(4)
> plot(stability(Sims.VAR)) # graf výsledkov CUSUM testu stability
```

Výsledkom odhadu VAR modelu bývajú najčastejšie funkcie reakcie na impulz, ktoré zobrazujú dynamiku vývoja po zavedení analyzovaného šoku. Reakcia na monetárny impulz aj keď na prvý pohľad vyzerá byť kladná, je nulová, lebo v konfidenčnom intervale sa pre všetky obdobia nachádza 0.

```
> plot(irf(Sims.VAR, impulse="lm", response="ly", n.ahead=48, boot=TRUE))
> plot(irf(Sims.VAR, impulse="lm", response="ly", n.ahead=48, boot=TRUE,
cumulative = TRUE)) # kumulatívna funkcia reakcie ly na impulz v lm
```



Obrázok 3: Grafy funkcie a kumulatívnej funkcie reakcie na impulz

3 ŠTRUKTURÁLNE VAR MODELY

V prvej časti sme ukázali, aký je vzťah medzi kovariančnými maticami Σ_u a Σ_v , ak $\Sigma_u = \mathbf{I}$:

$$\Sigma_v = \Gamma^{-1} \Lambda \Lambda^T (\Gamma^{-1})^T, \text{ v značení dokumentácie k balíčku vars to je } \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T (\mathbf{B}^{-1})^T.$$

V balíčku *vars* sa pri identifikácii rozlišujú tri základné prípady:

- prvým je ohraničenie parametrov, ktoré predpokladá trojuholníkovú maticu Γ resp. \mathbf{A} a jednotkovú maticu Λ resp. \mathbf{B} . V dokumentácii je označená ako A model. Ohraničenia v matici Γ resp. \mathbf{A} z nej nemusia vytvárať trojuholníkovú maticu, minimálny počet ohraničení zavedených na parametre kvôli identifikáciu sa rovná $n(n-1)/2$, ale jej hodnosť musí zostať úplná, teda sa rovnať n ;
- druhým je ohraničenie parametrov, ktoré predpokladá trojuholníkovú maticu Λ resp. \mathbf{B} a jednotkovú maticu Γ resp. \mathbf{A} . V dokumentácii je označená ako B model. Ohraničenia v matici Λ resp. \mathbf{B} z nej nemusia vytvárať trojuholníkovú maticu, minimálny počet ohraničení zavedených na parametre kvôli identifikáciu sa rovná $n(n-1)/2$, ale jej hodnosť musí zostať úplná, teda sa rovnať n ;
- tretím je ohraničenie parametrov, ktoré umožňuje ľubovoľné zadávanie ohraničení na matice Γ a Λ resp. \mathbf{A} a \mathbf{B} . V dokumentácii je označená ako AB model. Minimálny počet ohraničení zavedených na parametre kvôli identifikáciu sa rovná $n^2 + n(n-1)/2$.

Podľa toho, ktorá matica sa zadá ako argument pri odhade SVAR funkcie (*Amat*, *Bmat* alebo obe), sa odhadne daný typ modelu. Matica, ktorú nezadáme ako argument SVAR funkcie, zostáva prednastavená a vstupuje do výpočtu ako jednotková matica. Vo všetkých prípadoch sa maticové prvky, ktorých hodnota sa má odhadnúť, musia zadať ako NA vstupy. V prípade, ak je zavedených viac ohraničení, ako je potrebných na presnú identifikáciu modelu, je súčasťou odhadu aj výpočet štatistiky LR pre preidentifikujúce ohraničenia. Zo vzťahu medzi štruktúrnymi a redukovanými šokmi $\mathbf{v}_t = \Gamma^{-1} \Lambda \mathbf{u}_t$ resp. $\mathbf{v}_t = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_t$ sa môže vypočítať matica okamžitých multiplikátorov $\Psi_0 = \Gamma^{-1} \Lambda$ resp. $\Psi_0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$.

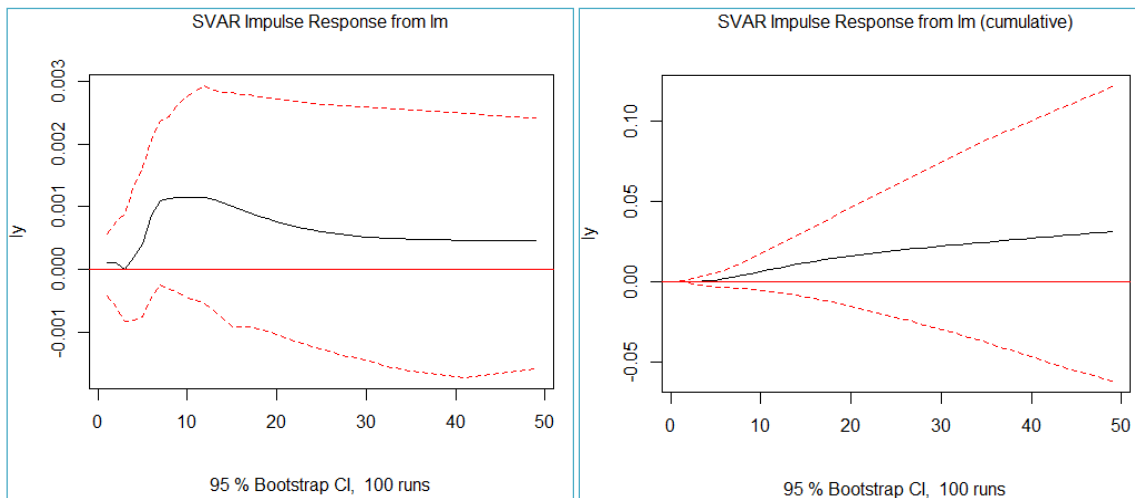
Pri ohraničení matice dlhodobých vplyvov podľa Blancharda a Quaha (1989) sa môže využiť B model, kde \mathbf{A} je jednotková matica. Potom sa matica dlhodobých vplyvov vypočíta ako:

$$(\mathbf{I} - \Gamma^{-1} \mathbf{B}_1 - \dots - \Gamma^{-1} \mathbf{B}_p)^{-1} \Lambda = (\mathbf{I} - \Pi_1 - \dots - \Pi_p)^{-1} \Lambda \text{ resp. } (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \dots - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}$$

3.1 A model

Základnou stratégiou je Choleskeho dekompozícia, ktorá znamená trojuholníkovú maticu \mathbf{A} .

```
> Amat <- matrix(NA, 3,3) # vytvoríme maticu 3x3, ktorej všetky prvky sú NA
> Amat[upper.tri(Amat)] <- 0 # nad hlavnú diagonálu zadáme do matice 0
> svar.A <- SVAR(Sims.VAR, estmethod = "scoring", Amat = Amat, max.iter = 1000,
  lrtest = FALSE) # kvôli presnej identifikácii odmietneme výpočet LR štatistiky
> Sims.irf2 <- irf(svar.A, n.ahead = 48, boot = TRUE) # výpočet hodnôt IRF
> plot(irf(svar.A, impulse = "lm", response = "ly", n.ahead = 48, boot = TRUE)) # graf IRF
> plot(irf(svar.A, impulse = "lm", response = "ly", n.ahead = 48, boot = TRUE,
  cumulative = TRUE)) # kumulatívna funkcia reakcie ly na impulz v lm
> short_run <- solve(svar.A$A) # vypočítame maticu okamžitých multiplikátorov
```



Obrázok 4: Grafy IRF a kumulatívnej IRF – A model, Choleskeho usporiadanie lp , lm a ly

3.2 B model

Ak chceme priamo odhadnúť maticu krátkodobých vplyvov $\Psi_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, uvažujme $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

```
> Bmat <- diag(3) # vytvoríme jednotkovú maticu 3x3
> diag(Bmat) <- NA # na hlavnú diagonálu zadáme do matice NA
> Bmat[lower.tri(Bmat)] <- NA # pod hlavnú diagonálu zadáme do matice NA
> svar.B <- SVAR(Sims.VAR, estmethod = "scoring", Bmat = Bmat, max.iter = 1000,
  lrtest = FALSE) # kvôli presnej identifikácii odmietneme výpočet LR štatistiky
```

Grafy funkcie aj kumulatívnej funkcie reakcie na impulz nezobrazujeme, lebo by boli totožné s obrázkami 3 aj 4, pretože dokola ukazujeme totožný prípad Choleskeho dekompozície.

3.3 AB model

Aby sme si ukázali aj možnosť testovania preidentifikujúcich ohraničení, pridajme vo všeobecnom prípade AB modelu jedno ohraničenie navyše oproti predošlým prípadom. Budeme uvažovať, že neexistuje okamžitá reakcia v produkcii na monetárny šok

```
> Amat <- diag(3) # vytvoríme jednotkovú maticu 3x3
> Amat[lower.tri(Amat)] <- NA # pod hlavnú diagonálu zadáme do matice NA
> Amat[3,2] <- 0 # zadáme preidentifikujúce ohraničenie, na pozíciu  $A(3,2)=0$ 
```

```

> Bmat <- diag(3) # vytvoríme jednotkovú maticu 3x3
> diag(Bmat) <- NA # na hlavnú diagonálu zadáme do matice NA
> svar.AB <- SVAR(Sims.VAR, estmethod = "scoring", Amat = Amat, Bmat = Bmat,
max.iter = 1000) # odhadneme SVAR aj s výpočtom LR štatistiky
> LR_test <- svar.AB$LR # zapamätáme si vypočítanú LR štatistiku
> short_run2 <- solve(svar.AB$A)%*%svar.AB$B # matica okamžitých multiplikátorov

```

3.4 Dlhodobé ohraničenia

Pri odhade podľa Blancharda a Quaha (1989) sa využije opäť Choleskeho dekompozícia, ale tentokrát v matici dlhodobých vplyvov.

```

> svar.BQ <- BQ(Sims.VAR) # odhadneme SVAR podľa Blancharda a Quaha
> svar.BQ # zobrazenie výsledkov SVAR odhadu podľa BQ

```

SVAR Estimation Results:

```

=====
Estimated contemporaneous impact matrix:
      lp      lm      ly
lp -0.0003909 -1.677e-03 -0.0012756
lm -0.0003147  2.824e-03 -0.0029146
ly  0.0046812 -1.259e-05 -0.0007251

```

Estimated identified long run impact matrix:

```

      lp      lm      ly
lp  5.577  0.0000  0.0000
lm  6.895  0.8646  0.0000
ly  3.227  0.5785  0.2072

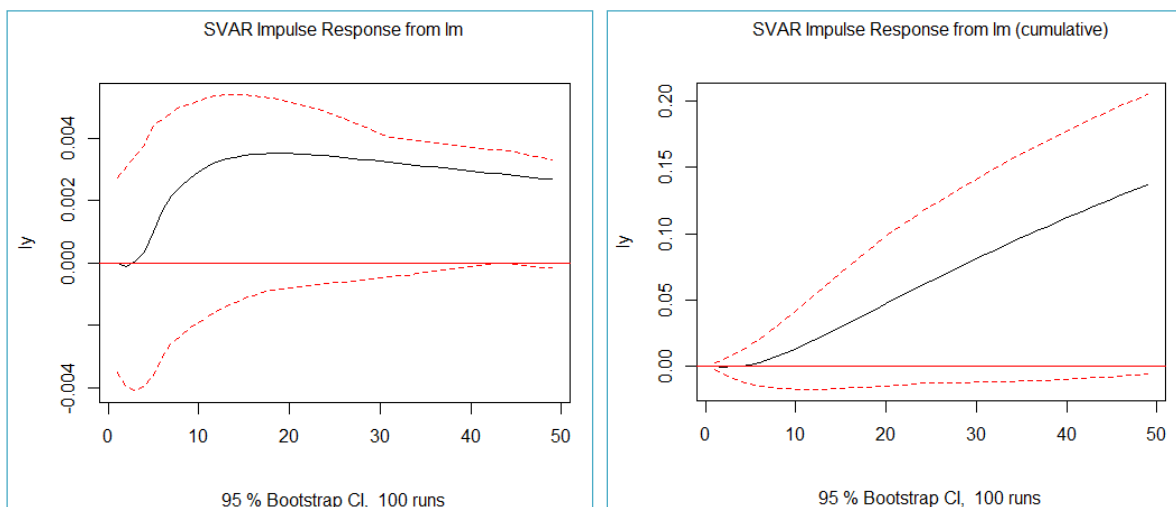
```

Obrázok 5: Výpis odhadu SVAR modelu podľa Blancharda a Quaha

```

> Sims.irfBQ <- irf(svar.BQ, n.ahead = 48, boot = TRUE) # odhadneme SVAR podľa BQ
> Sims.irfBQ.fevd <- fevd(svar.BQ, n.ahead = 50) # dekompozícia rozptylu chyby prognózy
> plot(irf(svar.BQ, impulse = "lm", response = "ly", n.ahead = 48, boot = TRUE)) # graf IRF
> plot(irf(svar.BQ, impulse = "lm", response = "ly", n.ahead = 48, boot = TRUE,
cumulative = TRUE)) # kumulatívna funkcia reakcie ly na impulz v lm

```



Obrázok 6: Grafy IRF a kumulatívnej IRF – Choleskeho usporiadanie – Blanchard a Quah

4 ZÁVER

Vidíme, že odhad VAR modelov je v programovacom systéme R plne podporovaný a balíček *vars* vytvorený Pfaffom (2008) ponúka širokú variabilitu postupov z tejto oblasti analýz. Okrem nich sú k dispozícii aj ďalšie balíčky zaoberajúce sa VAR modelmi, medzi ktorými môžeme uviesť *MTS*, *mAr*, *VARsignR* alebo *BigVAR*, balíček *svars* rozširujúci možnosti identifikácie, balíčky *urca* a *ecm* na analýzu kointegrácie vo vektorových modeloch, balíček *BMR* na bayesovský odhad vektorovo autoregresných modelov, ktorého možnosťami sa zaoberá Lukáčik, Lukáčiková a Szomolányi (2019) alebo *varpanel* a *pco* na prácu s panelovými VAR modelmi. Každý analytik by mal zvážiť použitie daného balíčka a jeho možností pri svojom výskume.

Použitá literatúra

1. BLANCHARD, O. J., QUAH, D. 1989. The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances. *The American Economic Review*, roč. 79, č. 4, s. 655-673.
2. LEEPER, E. M., SIMS, C. A., ZHA, T. 1996. What Does Monetary Policy Do? *Brookings Papers on Economic Activity*, roč. 2, č. 2, s. 1-63.
3. LUKÁČIK, M. 2016. Úvod do ekonometrickej analýzy so systémom R. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
4. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A., SZOMOLÁNYI, K. 2016. Úvod do práce so systémom R. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
5. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A., SZOMOLÁNYI, K. 2019. Bayesovský odhad vektorovo autoregresných modelov v R. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
6. LÜTKEPOHL, H. 2005. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlín: Springer.
7. PFAFF, B. 2008. VAR, SVAR and SVEC Models: Implementation Within R Package vars. *Journal of Statistical Software*, roč. 27, č. 4, s. 1-32.
8. STOCK, J. H., WATSON, M. W. 2001. Vector Autoregressions. *Journal of Economic Perspectives*, roč. 15, č. 4, s. 101-115.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: lukacik@euba.sk

BAYESOVSKÝ ODHAD VEKTOROVO AUTOREGRESNÝCH MODELOV V R¹

BAYESIAN ESTIMATE OF VECTOR AUTOREGRESSIVE MODELS WITH R

Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková, Karol Szomolányi

Abstrakt

Rozvoj ekonometrickej analýzy je v posledných rokoch úzko spojený s rozvojom výpočtovej techniky a zodpovedajúceho softvéru. Bez kvalitného programového vybavenia by sme nemohli realizovať takmer žiadne analýzy. Vďaka vzrastajúcemu počtu bayesovských analýz využívajúcich vektorovo autoregresné modely sa rozšírili aj ich možnosti v jednotlivých programoch. V príspevku sme sa preto rozhodli predstaviť možnosti bayesovského odhadu vektorovo autoregresných modelov v programovacom systéme R, ktorý je voľne dostupný a predstavuje alternatívu komerčným špecializovaným softvérovým produktom.

Kľúčové slová: ekonometrická analýza, bayesovský odhad VAR modelov, systém R, RStudio

Abstract

The development of econometric analysis is in recent years closely linked to the development of computers and appropriate software. Without high-quality software, we could hardly make any analysis. Thanks to the increasing number of Bayesian analyzes using vector autoregressive models, their possibilities in software have been extended. In paper, we decided to present the possibilities of Bayesian estimates of vector autoregressive models in R, which is freely available and it is an alternative to the commercial software product.

Keywords: econometric analysis, Bayesian estimate of VAR models, R system, RStudio

1 BAYESOVSKÝ ODHAD PARAMETROV VAR MODELOV

V n -rozmernom $VAR(p)$ modeli sa odhaduje $n + pn^2$ parametrov modelu a $(n^2 + n)/2$ prvkov kovariančnej matice náhodných zložiek, čo pri preparametrizovaní znamená veľký počet nevýznamných parametrov. Litterman (1986), ktorý medzi prvými navrhol svoj prior, chápe bayesovský prístup práve ako riešenie problému preparametrizovania znamenajúceho neefektívny odhad. Litterman (1986) pri tvorbe svojho prioru vychádzal z pravidiel pre makroekonomické časové rady, v ktorých očakával: prítomnosť trendu; posledné hodnoty v sebe nesú viac informácie o súčasnosti ako dávnejšie hodnoty radu a minulé hodnoty radu v sebe nesú viac informácie o súčasnosti ako minulé hodnoty ostatných radov. Do bayesovskej analýzy sa to premietne takto: priemer parametrov priradených všetkým oneskoreniam okrem prvého sa rovná 0; rozptyl koeficientov inverzne závisí od oneskorenia a parametrom i -tej premennej v j -tej rovnici sa priradí menší rozptyl ako j -tej premennej.

Každá z týchto informácií sa podľa Ciccarelliho a Rebucciho (2003) dá špecifikovať niekoľkými hodnotami hyperparametrov.

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0294/18 "Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov" a VEGA 1/0248/17 "Analýza regionálnych disparít v EÚ na báze prístupov priestorovej ekonometrie".

Namiesto odhadu $n + pn^2$ parametrov sa odhadne len 6 hyperparametrov $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$:

- λ_1 určuje hodnotu priemeru prvého vlastného oneskoreného koeficienta,
- λ_2 určuje rozptyl oneskorení vlastnej j -tej premennej v j -tej rovnici,
- λ_3 určuje rozptyl oneskorení inej k -tej premennej v j -tej rovnici,
- λ_4 určuje rýchlosť poklesu rozptylu s rastom oneskorenia,
- λ_5 určuje rozptyl deterministickej časti modelu,
- λ_6 určuje celkový stupeň neurčitosti priora.

1.1 Minnesotský (Littermanov) prior

Ciccharelli a Rebucci (2003) prezentujú bayesovský princíp odhadu priamo pre VAR model, ktorý sa pomocou Kroneckerovho súčinu matic (\otimes) a vektorizácie (vec) dá zapísať v tvare:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

kde $\mathbf{X}_t = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{W}_{t-1}^T)$, $\mathbf{W}_{t-1} = (\mathbf{y}_{t-1}^T, \mathbf{y}_{t-2}^T, \dots, \mathbf{y}_{t-p}^T, 1)^T$ a $\boldsymbol{\beta} = vec(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_p, \boldsymbol{\beta}_0)$

Neznámymi parametrami modelu sú $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$. Vierohodnostná funkcia (funkcia hustoty pravdepodobnosti pre dáta \mathbf{y} , ak sú dané hodnoty parametrov $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$) má tvar:

$$f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-T/2} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}) \right\}} \quad (2)$$

Ak združené apriórne rozdelenie pravdepodobnosti je $f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$, potom združené aposteriórne rozdelenie pravdepodobnosti $f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y})$ sa získa Bayesovým pravidlom. Pri VAR modeloch sa využívajú rôzne špecifikácie priora. Základným priorom je už spomínaný Littermanov (1986) prior nazývaný aj minnesotský prior podľa FEDu v Minneapolise, kde pôsobil.

Uvažujme problém odhadu vektora $\boldsymbol{\beta}_g$ zahŕňajúceho parametre g -tej rovnice VAR modelu (1), ak je známy rozptyl náhodných zložiek σ_g^2 .

Litterman (1986) predpokladá, že

$$f(\boldsymbol{\beta}_g) = N(\boldsymbol{\beta}_g, \boldsymbol{\Omega}_g) \quad (3)$$

kde $\boldsymbol{\beta}_g$ a $\boldsymbol{\Omega}_g$ označujú priemer a kovariančnú maticu priora $\boldsymbol{\beta}_g$. Kovariančná matica reziduálov je diagonálna a fixná, teda rovná sa $\sigma_g^2 \mathbf{I}_T$.

Za predpokladu nezávislosti náhodných zložiek má vierohodnosť tvar:

$$f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\sigma_g^2|^{-T/2} e^{\left\{ -\frac{1}{2\sigma_g^2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_g - \mathbf{X}_g \boldsymbol{\beta}_g)^T (\mathbf{y}_g - \mathbf{X}_g \boldsymbol{\beta}_g) \right\}} \quad (4)$$

a pre posterior platí:

$$f(\boldsymbol{\beta}_g | \mathbf{y}) \sim N(\bar{\boldsymbol{\beta}}_g, \bar{\boldsymbol{\Omega}}_g) \quad (5)$$

kde $\bar{\boldsymbol{\beta}}_g = \bar{\boldsymbol{\Omega}}_g (\bar{\boldsymbol{\Omega}}_g^{-1} \boldsymbol{\beta}_g + \sigma_g^{-2} \mathbf{X}_g^T \mathbf{y}_g)$ a $\bar{\boldsymbol{\Omega}}_g = (\bar{\boldsymbol{\Omega}}_g^{-1} + \sigma_g^{-2} \mathbf{X}_g^T \mathbf{X}_g)^{-1}$

Vidíme, že každú rovnicu môžeme odhadovať oddelene. Kovariančná matica reziduálov je diagonálna a fixná, pričom jej diagonálne prvky sa dajú získať z odhadu množiny autoregresných modelov $AR(p)$ jednej premennej. $\boldsymbol{\beta}_g$ a $\boldsymbol{\Omega}_g$ sa môžu špecifikovať pomocou niekoľkých hyperparametrov.

Predpoklad nekonečného rozptylu rozdelenia priora okolo jeho priemeru $\underline{\Omega}_g^{-1} = \mathbf{0}$, čo je predpoklad tzv. rozptýleného priora, vedie k priemeru posteriora v tvare estimátora MNŠ, lebo vtedy platí: $\underline{\beta}_g = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_g$.

Litterman (1986) priradil hodnoty hyperparametrov podľa uvedených predpokladov makroekonomických časových radov, ktoré sú veľmi dobre reprezentované procesmi náhodnej prechádzky. Pre diagonálne prvky $\underline{\Omega}_g$ uvažuje takúto štruktúru:

$$\text{var } \underline{\beta}_g = \begin{cases} \lambda_6 \lambda_2 / l^{\lambda_4} & \text{pre } g\text{-tú oneskorenú endogénnu premennú} \\ (\lambda_6 \lambda_3 / l^{\lambda_4}) \sigma_g / \sigma_j & \text{pre } j\text{-tú oneskorenú endogénnu premennú} \\ \lambda_6 \lambda_5 \sigma_g & \text{pre deterministické čl. a exogénne premenné} \end{cases}$$

Hyperparameter λ_6 kontroluje celkovú tesnosť (tightness) priora (prv nazývaná neurčitosť) a hyperparameter λ_2 kontroluje tesnosť vlastných oneskorení, kým λ_3 riadi tesnosť vlastných oneskorení relatívne k tesnosti oneskorení ostatných premenných v rovnici. Hyperparameter λ_4 má na starosti útlm rozptylu priora s rastúcim oneskorením $l = 1, \dots, p$ a λ_5 kontroluje stupeň neurčitosti pre exogénne premenné a deterministické členy g -tej rovnice. Hyperparameter λ_1 predstavuje priemer priora parametra prvého vlastného oneskorenia v rovnici.

Ciccarelli a Rebucci (2003) upozorňujú, že voľbou λ_6 blížiacou sa k nekonečnu sa prior stáva rozptýleným a voľbou λ_3 rovnajúcou sa nula, bude prior definovať množinu autoregresných modelov AR(p) jednej premennej.

Pre minnesotský prior sa odporúčajú rôzne pravidlá:

- V prípade stacionárnych premenných sa priemer priora nastavuje na hodnotu menšiu ako 1. Ak chceme, aby vplyv premennej pretrvával relatívne dlhšie, nastavíme priemer priora napríklad na 0,9.
- Ak sa nastaví pre λ_3 nízka hodnota, vplyv oneskorených hodnôt ostatných premenných sa rýchlo vytráca, čo je výhodné, ak majú tieto premenné exogénny charakter, ale modelujeme ich ako endogénne.
- Súčet parametrov pri vlastných oneskoreniach sa odporúča, aby bol 1 a súčet parametrov pri oneskoreniach ostatných premenných 0.
- Sims pridáva ďalší umelý hyperparameter λ_7 pre štartovacie pozorovanie. Ak je nastavený na 0, buď sú všetky premenné stacionárne alebo majú jednotkový koreň bez konštanty.

Hyperparametrom nemusia byť priradené náhodné hodnoty, ale môžu byť konzistentne odhadnuté, lebo pomocou nich môže byť vyjadrená funkcia hustoty údajov, ktorá sa následne môže maximalizovať.

1.2 Rozptýlený (difuse) prior

Ak uvažujeme rozptýlený prior, vylúčime dve hlavné vlastnosti minnesotského priora: nezávislosť posteriora medzi rovnicami a fixnú kovariančnú maticu reziduálov, potom platí:

$$f(\underline{\beta}, \underline{\Sigma}) \propto |\underline{\Sigma}|^{-(n+1)/2}$$

so združeným posteriorom:

$$f(\underline{\beta}, \underline{\Sigma} | \mathbf{Y}) = f(\underline{\beta} | \underline{\Sigma}, \mathbf{Y}) f(\underline{\Sigma} | \mathbf{Y})$$

kde posterior $\underline{\beta}$ podmienený $\underline{\Sigma}$ má viacrozmerne normálne rozdelenie:

$$f(\boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}) = \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{\beta}}, \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) \quad (6)$$

pričom $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MNS}$ a $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$

a posterior $\boldsymbol{\Sigma}$ má inverzné Wishartovo rozdelenie (pozri Lukáčik et al, 2017):

$$f(\boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Y}) \sim \text{IW}_p(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \bar{\nu}) \quad (7)$$

kde $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS})$ a $\bar{\nu} = T - (p + 1)$

Pripomeňme, že matica \mathbf{X} rozmeru $T \times (p + 1)$ a matica \mathbf{Y} rozmeru $T \times n$ predstavujú maticové verzie \mathbf{X}_t a \mathbf{y}_t vo vzťahu (1). Maticu \mathbf{B} rozmeru $T \times n$ získame ako $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1^T, \mathbf{B}_2^T, \dots, \mathbf{B}_p^T, \boldsymbol{\beta}_0^T)$.

Kadyiala a Karlsson (1997) ukázali, že integrovaním $\boldsymbol{\Sigma}$ zo združeného posteriora dostaneme pre marginálny posterior matice \mathbf{B} (maticového tvaru vektora parametrov $\boldsymbol{\beta}$) vzťah:

$$f(\mathbf{B} | \mathbf{y}) \propto \left| (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS}) + (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{MNS})^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_{MNS}) \right|^{-T/2}$$

ktorý je zovšeobecneným Studentovým t rozdelením s váhami (scales) $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS})$, $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ a priemerom $\hat{\mathbf{B}}_{MNS}$ pre $T - (p + 1)$ stupňov voľnosti.

1.3 Normálny-Wishartov prior

Iným spôsobom ako neuvažovať predpoklad o fixnej a diagonálnej kovariančnej matici reziduálov je použitie prirodzeného združeného priora, ktorým je normálny-Wishartov prior:

$$f(\boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{N}(\underline{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \underline{\boldsymbol{\Omega}}) \quad (8)$$

$$f(\boldsymbol{\Sigma}) \sim \text{IW}_p(\underline{\boldsymbol{\Sigma}}, \underline{\nu}) \quad (9)$$

Nepodmienené apriórne rozdelenie $\boldsymbol{\beta}$ bude normálne rozdelenie s priemerom $E(\boldsymbol{\beta}) = \underline{\boldsymbol{\beta}}$ a rozptylom $\mathbf{V}(\boldsymbol{\beta}) = (\underline{\nu} - n - 1)^{-1} (\underline{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \underline{\boldsymbol{\Omega}})$, pričom platí $\underline{\nu} > n - 1$.

Podľa Kadyialu a Karlssona (1997) posterior $\boldsymbol{\beta}$ podmienený $\boldsymbol{\Sigma}$ má viacrozmerné normálne rozdelenie:

$$f(\mathbf{B} | \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}) = \mathcal{N}(\bar{\mathbf{B}}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \bar{\boldsymbol{\Omega}}) \quad (10)$$

kde $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} (\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \underline{\mathbf{B}} + \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{B}}_{MNS})$ a $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = (\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} + \mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$

a posterior $\boldsymbol{\Sigma}$ má inverzné Wishartovo rozdelenie:

$$f(\boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Y}) \sim \text{IW}_p(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}, \bar{\nu}) \quad (11)$$

kde $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\mathbf{B}}_{MNS}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{B}}_{MNS} + \underline{\mathbf{B}}^T \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \underline{\mathbf{B}} + \bar{\boldsymbol{\Sigma}} + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}_{MNS}) - \underline{\mathbf{B}}^T (\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} + \mathbf{X}^T \mathbf{X}) \underline{\mathbf{B}}$ a $\bar{\nu} = \underline{\nu} + T$

Ako v prípade minnesotského priora dostaneme integrovaním $\boldsymbol{\Sigma}$ zo združeného posteriora pre marginálny posterior matice \mathbf{B} vzťah, ktorý je zovšeobecneným Studentovým t rozdelením a ktorý sa dá jednoducho získať numericky. Prior sa takisto dá špecifikovať pomocou hyperparametrov podobným minnesotskému prioru.

1.4 Normálny rozptýlený (normal-difuse) prior

Ďalším prirodzeným združeným priorom, ktorý nevyžaduje toľko predpokladov ako normálny-Wishartov prior je normálny rozptýlený prior, v ktorom sa predpokladá nezávislosť β a Σ :

$$f(\beta) = N(\beta, \underline{\Omega}) \quad (12)$$

$$f(\Sigma) \propto |\Sigma|^{-(n+1)/2} \quad (13)$$

Kombináciou týchto priorov s dátami dostaneme podľa Ciccarelliho a Rebucciho (2003) marginálne podmienené rozdelenia:

$$f(\beta | \Sigma, Y) = N(\bar{\beta}, \bar{\Omega}) \quad (14)$$

$$f(\Sigma | \beta, Y) \sim IW_p(\bar{\Sigma}, \bar{\nu}) \quad (15)$$

kde $\bar{\beta} = \bar{\Omega}(\underline{\Omega}^{-1}\underline{\beta} + (\Sigma^{-1} \otimes X^T X)\beta_{MNS})$, $\bar{\Omega} = (\underline{\Omega}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes X^T X)^{-1}$

a $\bar{\Sigma} = (Y - X\hat{B}_{MNS})^T (Y - X\hat{B}_{MNS}) + (B - \hat{B}_{MNS})^T X^T X (B - \hat{B}_{MNS})$ a $\bar{\nu} = \nu + T$

2 PRÍKLAD BAYESOVSKÉHO ODHADU VAR MODELOV

Na bayesovský odhad VAR modelu sme zvolili balíček *BMR*, ktorý vytvoril Keith O'Hara (2016). Po jeho stiahnutí a nainštalovaní budeme pracovať s dátami, ktoré využili Leeper, Sims a Zha (1996). Aby získali dostatočné množstvo údajov, skúmali mesačné údaje od januára 1960 do marca 1996, čo je vyše 400 údajov v každom rade². Z ich analýzy vyberáme VAR model, kde v trojrozmernom systéme je využitý rad logaritmov sezónne očisteného *CPI* označený *LP*, rad logaritmov sezónne očisteného *HNP* označený *LY* a rad logaritmov sezónne očistenej peňažnej zásoby *LM*. Autori štúdie odhadovali model so 6 oneskoreniami.

Inštalácia balíčka *BMR* je zložitejšia a aj dlhšie trvá, lebo predstavuje rozhranie R pre C++ knižnicu *BMLib* slúžiacu na odhad bayesovských vektorovo autoregresných modelov a aj preto, že jeho zdrojové kódy sú prístupné iba cez tzv. *GitHub*. Preto potrebujeme nainštalovať niekoľko iných nástrojov (napr. *Rtools*) a postup je potrebné, ak zlyhá, niekedy aj zopakovať. Balíček je v neustálom vývoji, preto je niekedy potrebné sledovať odporúčania z *GitHubu*.

```
> install.packages("RcppArmadillo") # stiahne a nainštaluje RcppArmadillo
> install.packages("ggplot2") # stiahne a nainštaluje ggplot2
> install.packages("devtools") # stiahne a nainštaluje devtools
> library(devtools) # aktivácia prídavného balíka devtools
> install.packages("BMR") # stiahne a nainštaluje BMR
> library(BMR) # aktivácia prídavného balíka BMR
```

Načítanie údajov z csv súboru uvádza Lukáčik, Lukáčiková a Szomolányi (2016).

```
> Sims <- read.csv(file = "sims.csv", header = T, sep = ";", dec = ",") # dáta
> # na odhad je potrebné zadať údaje usporiadané v matici (nie v objekte ts)
> bvar_data <- data.matrix(Sims[,1:3]) # objekt typu matica s údajmi
```

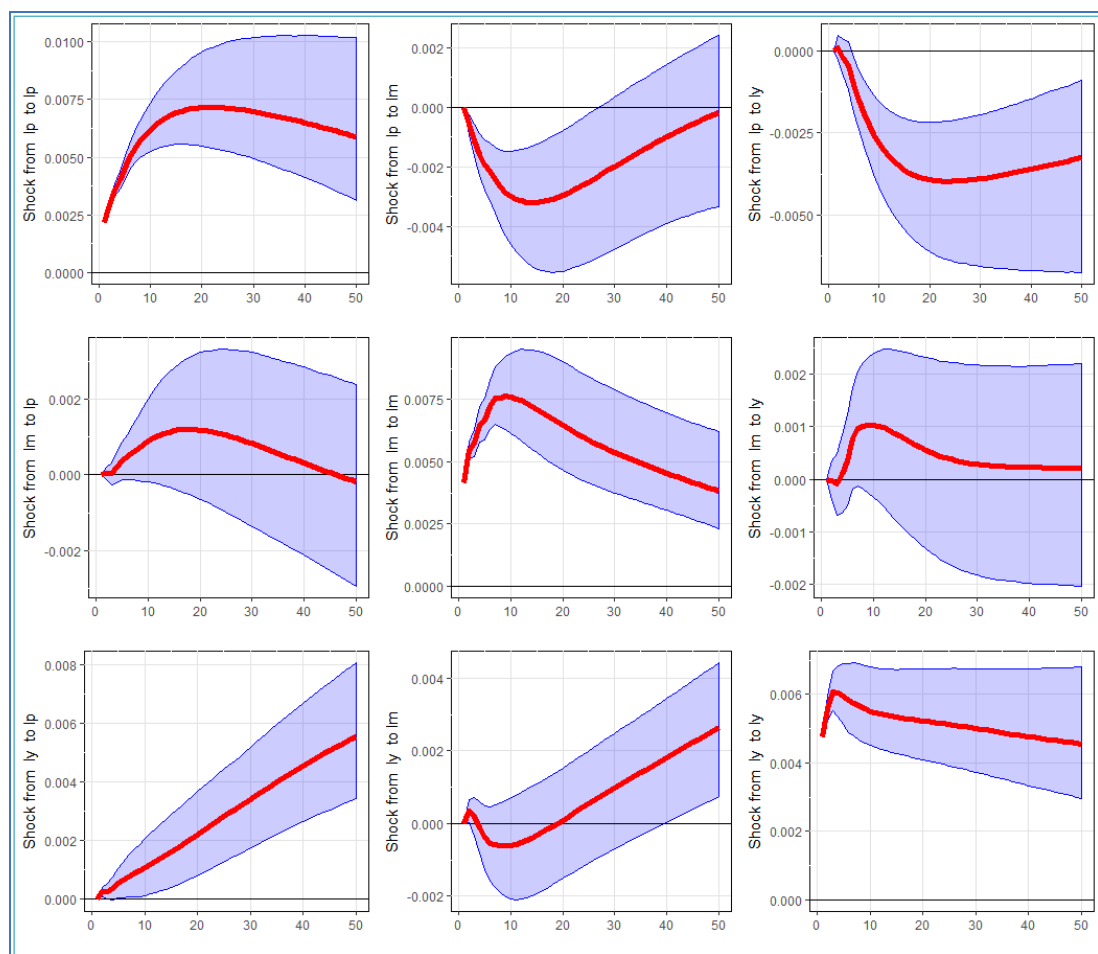
² Údaje autorov nie sú priamo k dispozícii, preto využívame údaje, ktoré uvádza profesor Nicola Viegi na stránke: <http://www.nvegi.net/teaching/master/sims.xls>

Vektorom *coef_prior*, ktorý má *n* prvkov, sa nastaví priemer priora parametra prvého vlastného oneskorenia v každej rovnici.

```
> coef_prior <- c(0.9,0.9,0.9)
> # vytvoríme objekt typu prostredie pre BVAR s minnesotským priorom M
> bvar_obj <- new(bvarm) # objekt typu prostredie má meno bvar_obj
> # špecifikujeme prostredie pre BVAR – údaje, prior, počet opakovaní, ...
> bvar_obj$build(bvar_data,TRUE,6) # matica endog. prem., konštanta, lagy
> bvar_obj$prior(coef_prior,1,1,0.5,0.5,100.0,1.0) # špecifikácia priorov
> bvar_obj$gibbs(10000) # počet opakovaní Gibbsovho vzorkovača
> # zadáme simuláciu s cieľom zobrazenia IRF pre BVAR na 50 období
> IRF(bvar_obj,50,var_names=colnames(Sims[,1:3]),save=FALSE)
```

Reakcia produkcie na šok peňazí je v 2. riadku a 3. stĺpci na obrázku 1 a môžeme ju porovnať s reakciou z klasického prístupu, ktorý uvádza Lukáčik (2019).

Balíček *BMR*, ktorý sme použili na odhad BVAR modelu s minnesotským priorom ponúka funkcie, ktoré okrem minnesotského priora môžu využiť normálny inverzný Wishartov prior alebo prior ustáleného stavu (*steady-state prior*) navrhnutý Villanim (2009). Vtedy stačí nahradiť pri vytváraní prostredia (*environment*) funkciu *bvarm* za *bvarw* resp. *bvars* podľa kľúčového posledného písmena funkcie a správne pre daný typ zadať hyperparametre priora.



Obrázok 1: Funkcie reakcie na impulz bayesovský prístup – balíček *BMR*

V prípade minnesotského priora sa prostredie špecifikuje príkazom:

```
> bvar_obj$build(data_endog, data_exog, cons_term, p)
```

prípadne sa vynechá matica exogénnych premenných, ktorá sa zadáva druhá v poradí. Ako sme uviedli, aj endogénne premenné musia byť zadané ako matice. Ďalej logickou premennou volíme prítomnosť konštanty a na záver zadávame maximálny počet oneskorení modelu.

Hyperparametre sa v prípade minnesotského priora zadávajú príkazom:

```
> bvar_obj$prior(coef_prior, var_type, decay_type, HP_1,HP_2,HP_3,HP_4)
```

Vektor priemerov priora parametrov prvého vlastného oneskorenia nasleduje voľba typu definície priora (O'Hara (2016) umožňuje zadanie podľa Koopa a Korobilisa číslom 1 resp. podľa Canovu číslom 2). Za ním sa volí funkčný tvaru rastúceho oneskorenia $d(l)$ pre $l = 1, \dots, p$ (harmonický pokles voľbou čísla 1 a geometrický pokles číslom 2). Ak zvolíme HP_4 zodpovedajúce λ_4 hodnotu 1, pokles bude mať lineárny priebeh. Hyperparameter HP_1 zodpovedá λ_6 celkovej tesnosti priora. Hyperparameter HP_2 zodpovedá λ_3 riadiacej tesnosti vlastných oneskorení relatívne k tesnosti oneskorení ostatných premenných v rovnici. Hyperparameter HP_3 zodpovedá λ_5 kontroluje stupeň neurčitosti pre exogénne premenné a deterministické členy.

Poslednou špecifikáciou prostredia pred simuláciou je určenie počtu opakovaní Gibbsovoho vzorkovača, ktorú zadávame:

```
> bvar_obj$gibbs(n_draws)
```

Simuláciu spustíme príkazom zobrazenia funkcií reakcie na impulz:

```
> IRF(bvar_obj, periods, var_names = colnames(dataframe), percentiles =  
c(0.05, 0.5, 0.95), save=FALSE)
```

alebo príkazom, ktorý zobrazí rozdelenia posteriorov všetkých parametrov:

```
> plot(bvar_obj, var_names = colnames(dataframe), save = FALSE)
```

Zobraziť môžeme prognózu modelovaných endogénnych premenných:

```
> forecast(bvar_obj, periods=10, shocks=T, var_names=colnames(dataframe),  
percentiles=c(.05,.50,.95), back_data=10, save=F)
```

Aby sme ukázali využitie aj iného priora, prezentujeme príklad, ktorý uvádzajú Stock a Watson (2001), kde okrem klasického odhadu využijeme pri bayesovskom prístupe normálny inverzný Wishartov prior. Stock a Watson navrhli VAR model s premennými: inflácia, nezamestnanosť a úroková miera.

```
> library(BMR) # aktivácia prídavného balíka BMR  
> data(BMRVARData) # využijeme americké dáta prítomné v balíku  
> var_data <- data.matrix(USMacroData[,2:4]) # matica s údajmi  
> var_obj <- new(cvar) # objekt typu prostredie pre klasický VAR  
> var_obj$build(var_data, TRUE, 4) # matica end. prem., konštanty, oneskor.  
> var_obj$estim() # odhad metódou najmenších štvorcov  
> var_obj$boot(1000) # počet opakovaní pri bootstrappingu  
> var_obj$beta_hat # výsledná odhadnutá matica parametrov  
> var_obj$Sigma_hat # výsledok odhadu kovariančnej matice  
> IRF(var_obj, 20, var_names=colnames(var_data), save=FALSE) # IRF  
> forecast(var_obj, shocks=TRUE, back_data=10, save=FALSE) # prognóza
```

Klasický odhad síce nie je tradične usporiadaný, ale z výsledných matíc nie je problém vytvoriť si výstup v požadovanom tvare.

Bayesovský prístup s normálnym inverzným Wishartovym priorom:

```

> bvar_data <- data.matrix(USMacroData[,2:4]) # matica s údajmi
> coef_prior <- c(0.9,0.9,0.9) # priemer priora parametra 1. vlastného onesk.
> XiBeta <- 4 # škálovací parameter priora kovariančnej matice beta
> XiSigma <- 1 # škálovací parameter priora kovariančnej matice sigma
> gamma = 4 # stupeň voľnosti priora kovariančnej matice sigma
> bvar_obj <- new(bvarw) # objekt typu prostredie pre BVAR s norm-IW
> bvar_obj$build(bvar_data,TRUE,4) # matica end. prem., konštanta, onesk.
> bvar_obj$prior(coef_prior,XiBeta,XiSigma,gamma) # špecifikácia priorov
> bvar_obj$gibbs(10000,5000) # počet opak. a burnin Gibbsovho vzorkovača
> bvar_obj$alpha_pt_mean # vektor posteriora priemeru  $\alpha = \text{vec}(\beta)$ 
> bvar_obj$alpha_pt_var # posterior kovariančnej matice  $\alpha = \text{vec}(\beta)$ 
> bvar_obj$Sigma_pt_mean # posterior kovariančnej matice sigma
> bvar_obj$Sigma_pt_dof # stupne voľnosti posteriora kovariančnej matice  $\Sigma$ 
> IRF(bvar_obj,20,var_names=colnames(bvar_data),save=FALSE) # IRF
> forecast(bvar_obj,shocks=TRUE,back_data=10,save=FALSE) # prognóza

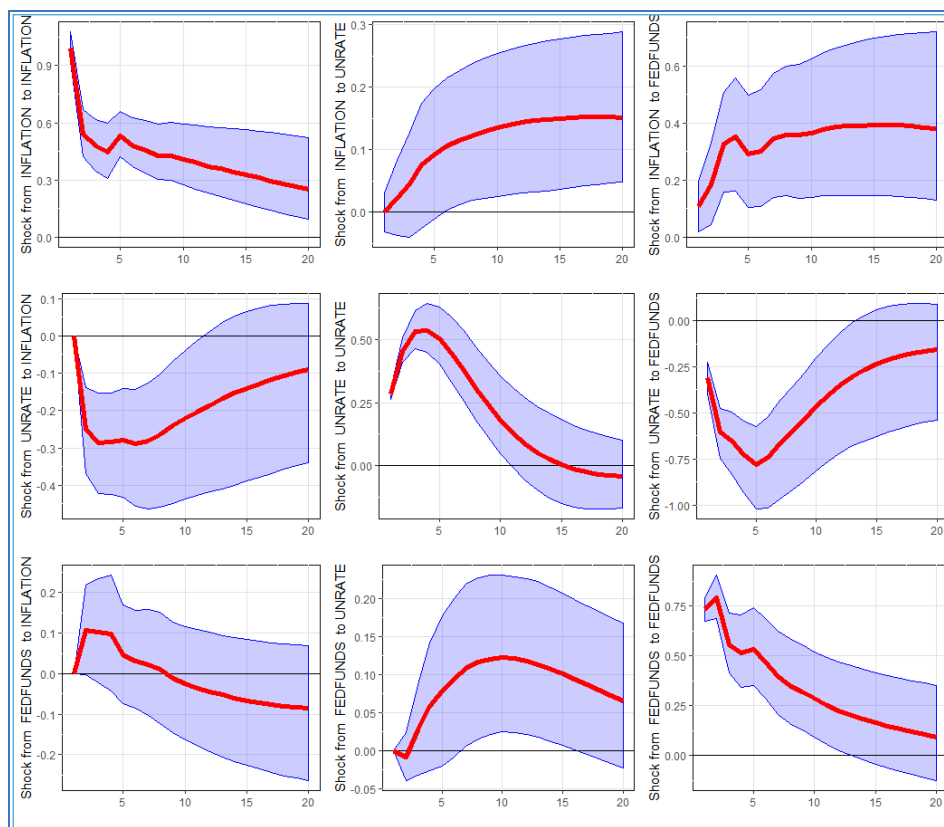
```

Výsledné funkcie reakcie na impulz sú zobrazené na obrázku 2. Grafy prognózovaných hodnôt s konfidenčnými intervalmi sú prezentované na obrázku 3. Zobrazit' môžeme aj rozdelenia posteriorov všetkých parametrov:

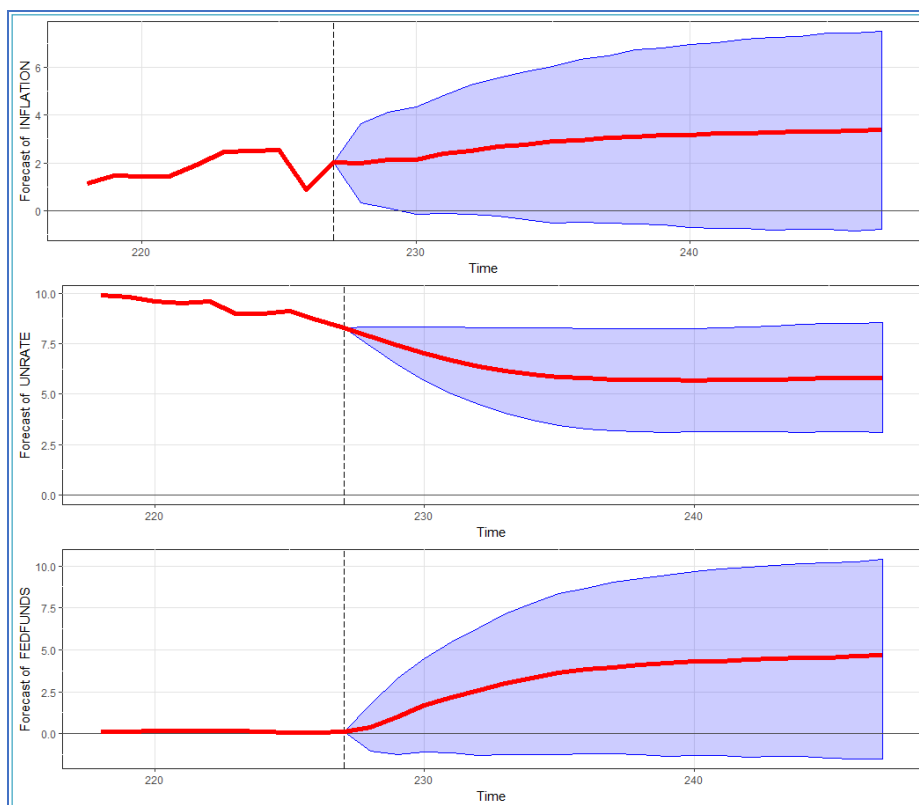
```

> plot(bvar_obj, var_names = colnames(bvar_data), save = FALSE)

```



Obrázok 2: Funkcie reakcie na impulz – bayesovský prístup (bvarw)



Obrázok 3: Grafy prognóz modelovaných endogénnych premenných

3 ZÁVER

Vidíme, že bayesovský odhad VAR modelov je v programovacom systéme R plne podporovaný a balíček *BMR* ponúka širokú variabilitu postupov z tejto oblasti analýz. Na bayesovský odhad VAR modelu v programovacom systéme R bolo okrem *BMR* vytvorených viacero ďalších balíčkov, ako napr. *Bvar* alebo *MSBVAR*. Každý analytik by mal individuálne zvážiť možnosti použitia konkrétneho balíčka pri svojom výskume.

Použitá literatúra

1. CICCARELLI, M., REBUCCI, A. 2003. *Bayesian VARs: A Survey of the Recent Literature with an Application to the European Monetary System*. IMF Working Paper 03/102.
2. KADIYALA, K. R., KARLSSON, S. 1997. Numerical Methods for Estimation and Inference in Bayesian VAR-Models. *Journal of Applied Econometrics*, roč. 12, č. 2, s. 99-132.
3. LEEPER, E. M., SIMS, C. A., ZHA, T. 1996. What Does Monetary Policy Do? *Brookings Papers on Economic Activity*, roč. 2, č. 2, s. 1-63.
4. LITTERMAN, R. 1986. Forecasting with Bayesian Vector Autoregressions – Five Years of Experience. *Journal of Business and Economic Statistics*, roč. 4, s. 25-38.
5. LUKÁČIK, M. 2019. *Odhad vektorovo autoregresných modelov v R*. In: Zborník medzinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výskumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
6. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A., SZOMOLÁNYI, K. 2017. *Bayesovská ekonometria*. Bratislava: LETRA Interactive.

7. LUKÁČIK, M., LUKÁČIKOVÁ, A., SZOMOLÁNYI, K. 2016. *Úvod do práce so systémom R*. In: Zborník mezinárodného vedeckého seminára Nové trendy v ekonometrii a operačným výzkumu, Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
8. LÜTKEPOHL, H. 2005. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlín: Springer.
9. O'HARA, K. 2016. *Bayesian Macroeconometrics in R*. Dostupné na: <http://www.kthohr.com/bmr> [26. 04. 2019]
10. STOCK, J. H., WATSON, M. W. 2001. Vector Autoregressions. *Journal of Economic Perspectives*, roč. 15, č. 4, s. 101-115.
11. VILLANI, M. 2009. Steady-State Priors for Vector Autoregressions. *Journal of Applied Econometrics*, roč. 24, č. 4, s. 630-650.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 822
email: lukacik@euba.sk, istvanik@euba.sk, szomolan@euba.sk

OPTIMALIZACE DISTRIBUCE POHONNÝCH HMOT

FUEL DISTRIBUTION OPTIMIZATION

Petra Marková, Jan Pelikán

Abstrakt

Tato práce se zabývá problémem stanovení distribuční trasy rozvozu pohonných hmot s cílem optimalizovat distribuční procesy na základě případové studie. Úkolem je dopravit na čerpací stanice pohonné hmoty tak, aby poptávka nebyla ohrožena, tedy reagovat na aktuální stav pohonných hmot v nádržích čerpacích stanic a doplnit je v případě, že by hrozilo jejich vyčerpání. K tomuto doplňování slouží cisterny, které obsahují určitý počet komor, ve kterých lze přepravovat odděleně různý druh pohonných hmot. V práci jsou navrženy matematické modely optimalizace tvorby tras a rovněž heuristická metoda řešení tohoto problému zahrnující specifické podmínky firmy případové studie. Je ukázáno, že použitá heuristická metoda je efektivní a snadno zobecnitelná i na další obdobné úlohy.

***Klíčová slova:** rozvoz pohonných hmot, rozvozní problém, heuristická metoda*

Abstract

This paper deals with the problem of determining the paths of fuel distribution. The aim is to optimize the fuel distribution processes based on a case study. The task is to transport the fuel to gas stations without endangering the demand, i.e. to respond to the current state of fuel in tanks of gas stations and to refill them before stocks run out. Tank vehicles are used for refilling the tanks in gas stations. Tank vehicles contain a number of compartments, in which different types of fuel can be transported. This paper proposes mathematical models for optimizing the route of tank vehicles as well as a heuristic method for solving this problem involving specific conditions of the company in the case study. We show that the presented heuristic method is effective and easily applicable also to other similar studies.

***Keywords:** fuel distribution, vehicle routing problem, heuristic*

1 ÚVOD

V této práci se zabýváme problémem stanovení distribuční trasy rozvozu pohonných hmot s cílem optimalizovat distribuční procesy na základě případové studie. Studie řeší problém firmy specializující se na logistický servis zásobování čerpacích stanic a smluvních odběratelů ve vnitrostátní i mezinárodní dopravě. Cílem je zajistit maximální vytížení vozidel povolené legislativou a stanovit takové distribuční trasy, které zohledňují specifické podmínky tohoto druhu přepravy.

Specifikou této úlohy je nutnost přepravy pohonných hmot různého typu najednou. K tomuto účelu se používají cisterny s několika oddělenými komorami o příslušné kapacitě. Požadavky na přepravu pohonných hmot k odběratelům, tedy k čerpacím stanicím, jsou dány aktuálním stavem pohonných hmot a kapacitou zásobníku neboli nádrže této stanice. Pokud je stav zásoby nízký, je potřeba zásobu doplnit a je proto stanoven požadavek na doplnění této zásoby tak, aby nedošlo k úplnému vyčerpání zásoby. Tento požadavek se týká všech druhů pohonných hmot, které čerpací stanice skladuje a prodává. Cílem je minimalizace celkové délky všech tras a současně efektivní využití cisteren.

2 PŘÍPADOVÁ STUDIE

Problém popisovaný a řešený v této práci vznikl u konkrétního provozovatele distribuční sítě na zásobování čerpacích stanic v ČR pohonnými hmotami. Dodavatelský řetězec se skládá: (1) z několika depotů, kde se nachází a jsou servisovány cisterny, (2) z určitého počtu skladů pohonných hmot, kde cisterny čerpají pohonné hmoty pro rozvoz, a (3) ze sítě odběratelů, což jsou čerpací stanice a další firmy, které odebírají pohonné hmoty. V úloze uvažujeme 10 depotů a skladů pohonných hmot a přibližně 100 odběratelů. Dále, předpokládáme znalost matice nejkratších vzdáleností mezi depoty, sklady pohonných hmot a odběrateli a na základě těchto vzdáleností je minimalizovaná celková délka všech tras.

Požadavky odběratelů se odvozují od aktuálních stavů pohonných hmot ve skladech, které jsou reprezentovány nádržemi o určité kapacitě. Počet druhů pohonných hmot obsahuje daný sortiment jednotlivých čerpacích stanic ale i požadavek, aby daný typ pohonné hmoty byl od určitého výrobce (tedy distribučního skladu). Stav zásob každé čerpací stanice je závislý na poptávce, tedy na denní spotřebě, která se může v čase měnit. Požadavek na doplnění zásoby je pak odvozen z aktuálního stavu a průměrného denního čerpání zákazníky čerpací stanice. Signál k doplnění skladu může představovat kritická výše této zásoby, která činí 10% kapacity skladu, nebo stav zásoby, která by měla pokrýt např. 3 denní spotřebu. Objem požadavku na doplnění skladu je pak rozdílem kapacity skladu a aktuální výše zásoby u každé z pohonných hmot čerpací stanice.

Konkrétní čerpací stanice může každý den požadovat jeden nebo více druhů pohonných hmot, případně žádnou z nich. Než vozidlo přijede k čerpací stanici, musí navštívit sklad pohonných hmot a pohonné hmoty požadovaného druhu načerpat do jedné nebo více komor vozidla. Pokud vozidlo zásobuje více čerpacích stanic na trase, které požadují stejný druh pohonných hmot, pak sklad navštíví jen jednou. Pokud ale jedna nebo více čerpacích stanic na trase vozidla požadují dva a více druhů pohonných hmot, je třeba předem navštívit sklady, ve kterých se uvedené druhy pohonných hmot nacházejí.

Popsaná úloha stejně jako všechny rozvozní úlohy, je NP obtížná. Proto kromě matematického modelu, který pro rozsah dat případové studie nemusí v reálném čase poskytnout optimální řešení, je v práci uvedena metoda založená na heuristikách používaných pro rozvozní problém.

3 MATEMATICKÝ MODEL STATICKÉ ÚLOHY ROZVOZU POHONNÝCH HMOT

Cílem modelu je optimalizovat rozvoz pohonných hmot k těm čerpacím stanicím, které vykazaly k danému termínu méně než 20% kapacity své nádrže u některého z produktů. Předpokládáme, že vozidla mají 6 komor pro skladování různých produktů a komory mají stejnou kapacitu. Vzhledem k případové studii není v modelu zohledněna cesta od depotů, kde vozidla nakládají jednotlivé produkty.

Parametry modelu:

- n počet čerpacích stanic,
- m počet produktů,
- c_{ij} vzdálenost uzlu i od uzlu j ,
- V_k kapacita jedné komory vozidla k ,
- q_{is} požadavek čerpací stanice i na produkt s .

Proměnné modelu:

- x_{ij}^k binární proměnná, která je rovna 1, pokud vozidlo k pojedje z uzlu i do uzlu j ,
 y_s^k binární proměnná, která je rovna 1, pokud vozidlo k veze produkt s ,
 u_{is}^k množství produktu s ve vozidle k , pokud vozidlo přijede do uzlu i .

Matematický model:

minimalizovat

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K c_{ij} x_{ij}^k, \quad (1)$$

za podmíněk

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K x_{ij}^k = 1, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{1j}^k \leq 1, \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, K, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^k = \sum_{i=1}^n x_{ji}^k, \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (4)$$

$$\sum_{s=1}^m y_s^k \leq 6, \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, K, \quad (5)$$

$$u_{is}^k + q_j^s y_s^k - M(1 - x_{ij}^k) \leq u_{js}^k, \quad \text{pro } j = 2, 3, \dots, n, \quad i \neq j, \\ s = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$u_{is}^k \leq V_k y_s^k, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (7)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (8)$$

$$y_s^k \in \{0,1\}, \quad \text{pro } s = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (9)$$

Účelová funkce (1) představuje délku všech tras vozidel. Rovnice (2) zajišťuje, že každý uzel musí být navštíven právě jednou. Nerovnost (3) znamená, že každé vozidlo vyjede z depotu nejvýše jednou. Podmínka (4) zajišťuje, že pokud vozidlo k přijede do uzlu j , pak z něj také odjede. Nerovnost (5) zajišťuje, že v každém cisternovém vozidle může být uskladněno nejvýše 6 produktů, neboť každé cisternové vozidlo má právě 6 komor. Podmínky (6) a (7) nedovolí přepravu více pohonných hmot v každé komoře než je její kapacita.

4 MATEMATICKÝ MODEL DYNAMICKÉ ÚLOHY ROZVOZU POHONNÝCH HMOT

Dynamická úloha oproti statické úloze, která řešila pouze jednodenní rozvoz pohonných hmot, umožňuje odložit dopravu pohonných hmot na čerpací stanice o jeden či více dnů a to, pokud takové odložení není kritické, nebo pokud by doprava byla spojena s vyššími přepravními náklady. Odložení je definováno tak, že požadavek každé čerpací stanice na pohonné hmoty je doplněn o časový interval, ve kterém by měl být požadavek na dodávku pohonných hmot zajištěn. Tento interval závisí na úbytku těchto pohonných hmot v čase a je určen pomocí intervalu, kdy je na čerpací stanici určitého produktu mezi 10 až 20% kapacity nádrže tohoto

produktu. Pojetí času je v této úloze diskrétní neboli rozvozní trasy budou tvořeny pro dobu 1, 2, ..., T. Totéž platí i pro časové intervaly dodávek pohonných hmot na čerpací stanice. Pro čerpací stanici i je takový interval definován jako $\langle t_i^{min}, t_i^{max} \rangle$.

U takto definovaného dynamického modelu je třeba rozšířit některé proměnné stejně tak, jako některé parametry modelu, o index času t . Proměnná $x(t)_{ij}^k$ je binární proměnná, která nabývá hodnoty 1 v případě, že cisternové vozidlo k v čase t jede na čerpací stanici j ihned po návštěvě čerpací stanice i a hodnoty 0 v případě opačném. Binární proměnná $y(t)_s^k$ pak nabývá hodnoty 1 v případě, že v cisternovém vozidle k je v čase t produkt s a naopak hodnoty 0 v případě opačném, a proměnná $u(t)_{is}^k$ je definována jako množství produktu s v čase t v cisternovém vozidle k , pokud toto vozidlo přijede na čerpací stanici i .

Matematický model:

minimalizovat

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T c_{ij} x(t)_{ij}^k, \quad (10)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K x(t)_{ij}^k = 1, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n x(t)_{1j}^k \leq 1, \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n x(t)_{ij}^k = \sum_{i=1}^n x(t)_{ji}^k, \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ t = 1, 2, \dots, T, \quad (13)$$

$$\sum_{s=1}^m y(t)_s^k \leq 6, \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (14)$$

$$u(t)_{is}^k + q_j^s y(t)_s^k - M(1 - x(t)_{ij}^k) \leq u(t)_{js}^k, \quad \text{pro } j = 2, 3, \dots, n, \\ s = 1, 2, \dots, m, \\ t = 1, 2, \dots, T, \\ i \neq j, \quad (15)$$

$$u(t)_{is}^k \leq V_k y(t)_s^k, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^m x(t)_{ij}^k = 0, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ t < t_i^{min}, t > t_i^{max} \quad (17)$$

$$x(t)_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (18)$$

$$y(t)_s^k \in \{0,1\}, \quad \text{pro } s = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (19)$$

ve kterém je oproti předchozímu modelu navíc podmínka (17), která zabraňuje dodání produktu s v čase t na čerpací stanici j v případě, když čas t není z intervalu $\langle t_i^{min}, t_i^{max} \rangle$.

5 HEURISTICKÁ METODA

Krok 1. {hledání první CS trasy vozidla}

- Pokud požadavky všech CS byly splněny, pak výpočet končí.
- Pokud u všech vozidel jsou obsazeny všechny komory, pak výpočet končí, požadavky zbývajících CS nelze splnit, konec.
- Hledej depot-sklad-CS, tak aby vzdálenost depot-sklad-CS byla minimální (vyzkoušení všech možností) a platilo:
 - vybraná CS má kladný požadavek na určitý produkt,
 - vybraný sklad zásobuje produktem požadovaným v CS,
 - zvolené vozidlo má volnou kapacitu,
 - ve vybraném depotu je umístěno zvolené vozidlo.

Pro vybrané vozidlo s minimální délkou depot-sklad-CS je určena tato výchozí trasa. U CS je redukován požadavek na produkt, který byl touto trasou zajištěn a u vozidla je redukována kapacita vozidla o množství, které bylo dodáno do CS (lze využít všechny volné komory). Pokud vozidlo již nemá volnou kapacitu, trasa vozidla je ukončená, jdi na Krok 1.

Krok 2. {hledání další čerpací stanici do trasy vozidla vybrané v Kroku 1}

- Pokud požadavky všech CS byly splněny, pak výpočet končí.
- Pokud jsou u vozidla již obsazeny všechny komory, pak výpočet končí, požadavky zbývajících CS nelze splnit, konec.
- Vyber CSdalší tak:
 - u CSdalší je kladný požadavek na určitý produkt,
 - pokud požadovaný produkt zajišťuje sklad, který již je na trase vozidla, pak délka prodloužení trasy je vzdálenost CS ---> CSdalší, v opačném případě je třeba do stávající trasy vozidla vložit další sklad, který zásobuje CSdalší o požadovaný produkt (toto vložení se provede tak, aby prodloužení trasy bylo minimální). Vybraný produkt je třeba umístit ve vozidle v jiné komoře, pokud jde o produkt, který se liší od produktu předcházejících čerpacích stanic na trase. Výběr CSdalší minimalizuje celkové prodloužení trasy vozidla.

Takto vybraná CSdalší s případným vložením dalšího skladu se přidá do trasy, redukuje požadavek CSdalší o dodaný produkt a rovněž se redukuje kapacita vozidla o dodané množství (v dané komoře). Dosad' $CS:=CSdalší$ a jdi na Krok 2.

Použitá literatura

1. Bortfeldt, A. and Wascher, G.: Constraints in container loading – A state-of-the-art review. European Journal of Operational Research, (2013), 229, 1–20.

Kontaktné údaje

Bc. Petra Marková,

Prof. RNDr. Jan Pelikán, CSc.

Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky

W. Churchilla 3, Praha 3

Tel: (420) 224095 430

email: pelikan@vse.cz

EXAKTNÝ MODEL PRE OPTIMALIZÁCIU OBEHU VOZIDIEL S VIACERÝMI DEPAMI

AN EXACT MODEL FOR AN OPTIMUM VEHICLE SCHEDULING WITH SEVERAL DEPOTS

Sanislav Palúch

Abstrakt

Problém optimalizácie obehov vozidiel s viacerými depami je tento: Je daná množina spojov a množina dep. Cieľom optimalizácie je priradiť jednotlivé vozidlá depám a vytvoriť turnusy vozidiel tak, aby sa minimalizoval počet použitých vozidiel a pritom aby bol súčet cien všetkých prejazdov spolu s cenami prístavných a odstavných jazd z priradených dep minimálny.

Kľúčové slová: spoj, turnus vozidla, optimalizácia, bivalentné lineárne programovanie

Abstract

The problem of an optimum vehicle scheduling with several depots is as follows: A set of trips and a set of depots are given. The goal is to assign trips to depots and to create running boards of vehicles with minimum number of used vehicles so that the total sum of costs of all trip linkages together with all pull-out and pull-in costs is minimal.

Keywords: trip, running board, optimization, binary linear programming

1 PROBLÉM TVORBY OBEHU VOZIDIEL

1.1 Spoj, precedenčná relácia, digraf spojov

Spoj s v dopravnej sieti C je určený päťicou údajov

$$s = (m_o, m_p, c_o, c_p), \quad (1)$$

kde m_o, m_p je miesto odchodu resp. miesto príchodu spoja s a c_o, c_p je čas odchodu resp. čas príchodu spoja s . Nech $\mathbf{M} = \{\mu(i, j)\}$ je matica časových vzdialeností medzi uzlami dopravnej siete C . Dva spoje $s_i = (m_o^i, m_p^i, c_o^i, c_p^i)$, $s_j = (m_o^j, m_p^j, c_o^j, c_p^j)$ môžu byť zaradené do denného plánu práce jedného autobusu, ak

$$c_p^i + \mu(m_p^i, m_o^j) \leq c_o^j, \quad (2)$$

t.j. ak autobus po skončení spoja s_i stihne dôjsť do miesta odchodu spoja s_j pred odchodom spoja s_j . Vtedy budeme hovoriť, že spoj s_i **predchádza** spoj s_j a píšat' $s_i < s_j$, reláciu $<$ nazveme **precedenčná relácia**.

Majme množinu spojov $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ s precedenčnou reláciou $<$ a cenou prejazdu $c(s_i, s_j)$ vozidla zo spoja s_i na spoj s_j na niektorej dopravnej sieti C . **Digrafom spojov** nazveme digraf

$$G = (S, H, c), \quad (3)$$

kde za množinu vrcholov digrafu G berieme množinu S spojov na dopravnej sieti C , kde H je množina orientovaných hrán digrafu G definovaná ako

$$H = \{(s_i, s_j) \mid s_i, s_j \in S, s_i < s_j\}, \quad (4)$$

a kde cena $c(s_i, s_j)$ je už definovaná a cena prejazdu $c(s_i, s_j)$ vozidla zo spoja s_i na spoj s_j .

1.2 Formulácia tvorby obehového rozvrhu

Je daná množina spojov $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, ktorú tvorí cestovný poriadok jedného dňa uvažovanej oblasti spolu s precedenčnou reláciou $<$ a cenou prejazdu $c(s_i, s_j)$ vozidla zo spoja s_i na spoj s_j .

Riešiť úlohu obehu vozidiel a osádok znamená nájsť istý počet vozidiel a každému z týchto vozidiel priradiť istú postupnosť spojov tak, aby toto vozidlo mohlo realizovať postupne všetky spoje priradenej postupnosti aj s prípadnými prejazdmi medzi spojmi, a tak, aby každý spoj bol priradený práve jednému vozidlu. Táto časť sa volá rozvrhovanie vozidiel – bus-scheduling.

Turnus vozidla T je postupnosť spojov

$$T = s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_r}, \quad (5)$$

taká, že

$$s_{i_1} < s_{i_2} < \dots < s_{i_r}. \quad (6)$$

Ak už bude spoj s_j bezprostredne priradený za spoj s_i v nejakom turnuse T , budeme písať $s_i \rightarrow s_j$ a turnus zapíšeme ako

$$T = s_{i_1} \rightarrow s_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{i_r}. \quad (7)$$

Obehový rozvrh v digrafe spojov $G = (S, H, c)$ je množina turnusov $O = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ tvaru

$$\begin{aligned} T_1 &= s_{1,1} \rightarrow s_{1,2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{1,n(1)} \\ T_2 &= s_{2,1} \rightarrow s_{2,2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{2,n(2)} \\ &\dots \dots \\ T_k &= s_{k,1} \rightarrow s_{k,2} \rightarrow \dots \rightarrow s_{k,n(k)} \end{aligned} \quad (8)$$

taká, že každý spoj množiny S sa vyskytuje práve v jednom turnuse z množiny O .

1.3 Kriteiálna funkcia obehového rozvrhu

Problém tvorby optimálneho rozvrhu obehu vozidiel je nájsť pre danú množinu spojov $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ optimálny obehový rozvrh O - (8) z hľadiska zvoleného kritéria optimality. Prvým najdôležitejším kritériom je minimalizácia počtu použitých vozidiel. Druhým kritériom býva minimalizácia súčtu cien prejazdov. Ak nepočítame prístavné a odstavné jazdy z a do depa, potom cenu turnusu (7) vypočítame ako

$$c(T) = \sum_{j=1}^{r-1} c(s_{i_j}, s_{i_{j+1}}) \quad (9)$$

a cenu obehového rozvrhu (8) ako

$$c(O) = \sum_{i=1}^k c(T_i) \quad (10)$$

1.4 Optimalizácia obehov bez prístavných a odstavných jász

Odtaz budeme predpokladať, že množina spojov je tvaru $S = \{1, 2, \dots, n\}$ a cenu prejazdu zo spoja i na spoj označme symbolom c_{ij} . Definujme rozhodovacie premenné x_{ij} pre $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ takto:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak je spoj } j \text{ zaradený bezprostredne za spojom } i \text{ v nejakom turnuse} \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad (11)$$

Ak by boli všetky premenné $x_{ij} = 0$, potom by na obsluženie všetkých spojov bolo potrebných $|S| = n$ autobusov. To preto, lebo každý spoj by bol vo svojom turnuse a všetky turnusy by obsahovali práve jeden spoj. Ak by práve jedna premenná x_{ij} nadobudla hodnotu 1, potom by bolo potrebných $n-1$ autobusov, lebo práve jeden turnus by obsahoval dva spoje. Každá premenná x_{ij} , ktorá nadobudne hodnotu 1, ušetrí jeden autobus. Počet potrebných autobusov potom vyjadruje vzťah:

$$n - \sum_{(i,j) \in H} x_{ij} \quad (12)$$

Pred každým spojom j v turnuse môže byť najviac jeden spoj, čo vyjadruje podmienka $\sum_{(i,j) \in H} x_{ij} \leq 1$ pre $j = 1, 2, \dots, n$. Podobne po každom spoji i v turnuse môže byť najviac jeden spoj, čo vyjadruje podmienka $\sum_{(i,j) \in H} x_{ij} \leq 1$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Minimalizovať (12) znamená maximalizovať $\sum_{(i,j) \in H} x_{ij}$ pretože n je konštanta.

Cena všetkých priradení následníkov spojov v turnusoch je $\sum_{(i,j) \in H} c_{ij} x_{ij}$. Nájst' obeh s minimálnym počtom vozidiel a pritom s minimálnou cenou je riešiť nasledujúci problém bivalentného programovania

$$\text{Maximalizuj} \quad L. \sum_{(i,j) \in H} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H} c_{ij} x_{ij} \quad (13)$$

$$\text{Za predpokladov} \quad \sum_{\substack{j, \\ (i,j) \in H}} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in S \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{i, \\ (i,j) \in H}} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in S \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in H \quad (16)$$

2 OBEHOVÝ PROBLÉM S VIACERÝMI DEPAMI

Majme množinu spojov s precedenčnou reláciou a cenou prechodu vozidla zo spoja na spoj reprezentovaný hranovoohodnoteným digrafom spojov $G = (V, H, c)$. Majme navyše danú množinu dep $D = \{d_1, d_2, \dots, d_p\}$ a pre každú dvojicu (d_k, i) depa $d_k \in D$ a spoja $i \in S$ čísla p_{ki}, o_{ik} vyjadrujúce ceny prístavnej a odstavnej jazdy z depa resp. do depa d_k k spoju i resp. od spoja i .

Definujme rozhodovacie premenné x_{ij} pre $(i, j) \in H$ vzťahom (11). Ďalej definujme rozhodovacie binárne premenné y_{ik} pre $i \in S$ a pre $k = 1, 2, \dots, p$ takto:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ak je spoj } i \text{ obsluhovaný vozidlom z depa } D_k \\ 0, & \text{inak} \end{cases} \quad (17)$$

Vezmime pevné depo d_k , t.j. pevné k a všetky spoje, ktoré sú obsluhované z depa d_k – sú to spoje, pre ktoré platí $y_{ik} = 1$. Ak by bol každý z týchto spojov obsluhovaný svojim vlastným vozidlom, potom súčet všetkých prístavných a odstavných nákladov by bol

$$P_k = \sum_{i \in S} y_{ik} (p_{ki} + o_{ik}) \quad (18)$$

Nech premenné x_{ij} pre $(i, j) \in H$ definujú nejaký obehový rozvrh. Ak sú oba spoje i, j obsluhované z depa d_k a $x_{ij} = 1$, potom zaradenie spoja j bezprostredne za spoj i ušetrí z prístavných a odstavných nákladov hodnotu $(p_{kj} + o_{ik})$ a pridá náklady c_{ij} za prechod zo spoja i na spoj j . Všetky spoje obsluhované z depa d_k budú mať celkové náklady na pristavenie odstavenie plus celkové náklady na prejazdy

$$D_k = P_k + \sum_{(i,j) \in H} (c_{ij} - p_{kj} - o_{ik}) x_{ij} y_{ik} y_{jk} = P_k + \sum_{(i,j) \in H} c_{ijk} x_{ij} y_{ik} y_{jk}, \quad (19)$$

kde $c_{ijk} = (c_{ij} - p_{kj} - o_{ik})$.

Počet vozidiel potrebných na realizáciu obehového rozvrhu pre spoje priradené depu d_k je

$$B_k = \sum_{i \in S} y_{ik} - \sum_{(i,j) \in H} x_{ij} y_{ik} y_{jk}. \quad (20)$$

Chceme v prvom rade minimalizovať počet vozidiel B_k (20) a pri minimálnom počte vozidiel prejazdy D_k (19), čo vedie ku kriteriálnej funkcii s veľkou konštantou L :

$$\begin{aligned} LB_k + D_k &= L \cdot \sum_{i \in S} y_{ik} - \sum_{(i,j) \in H} L \cdot x_{ij} y_{ik} y_{jk} + P_k + \sum_{(i,j) \in H} c_{ijk} x_{ij} y_{ik} y_{jk} = \\ &= \sum_{i \in S} L y_{ik} + P_k + \sum_{(i,j) \in H} (c_{ijk} - L) x_{ij} y_{ik} y_{jk}. \end{aligned} \quad (21)$$

Pre depo d_k máme kriteriálnu funkciu (21), pre všetky depá dostaneme kriteriálnu funkciu ako minimalizačnú funkciu:

$$\begin{aligned} \sum_k (LB_k + D_k) &= L \cdot \sum_k \sum_{i \in S} y_{ik} + \sum_k P_k + \sum_k \sum_{(i,j) \in H} (c_{ijk} - L) x_{ij} y_{ik} y_{jk} = \\ &= L \cdot n + \sum_k \sum_{i \in S} y_{ik} (p_{ki} + o_{ik}) + \sum_k \sum_{(i,j) \in H} (c_{ijk} - L) x_{ij} y_{ik} y_{jk} \end{aligned} \quad (22)$$

Pri odvodzovaní druhej rovnosti sme za P_k dosadili z rovnosti (18) a tiež sme využili fakt, že $\sum_k \sum_{i \in S} y_{ik} = n = |S|$.

Číslo Ln je konštanta, preto optimalizácia obehu vozidiel pre viacero dep je tvar

$$\text{Minimalizuj: } \sum_k \sum_{i \in S} y_{ik} (p_{ki} + o_{ik}) + \sum_k \sum_{(i,j) \in H} (c_{ijk} - L) x_{ij} y_{ik} y_{jk} \quad (23)$$

$$\text{Za predpokladov: } \sum_{\substack{j, \\ (i,j) \in H}} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in S \quad (24)$$

$$\sum_{\substack{i, \\ (i,j) \in H}} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in S \quad (25)$$

$$\sum_k y_{ik} = 1 \quad \forall i \in S \quad (26)$$

$$x_{ij} \leq 1 + y_{ik} - y_{jk} \quad \forall (i,j) \in H \quad \forall k \quad (27)$$

$$x_{ij} \leq 1 + y_{jk} - y_{ik} \quad \forall (i,j) \in H \quad \forall k \quad (28)$$

$$x_{ij}, y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in H \quad (29)$$

Obmedzujúce podmienky (24), (25), (29) majú rovnaký význam ako podmienky (14), (15) a (16) pri riešení základných úloh obehových rozvrhov. Majú zaručiť, že za každý spoj i možno zaradiť do turnusu maximálne jeden spoj j a pred každým spojom j môže byť zaradený maximálne jeden spoj i .

Podmienka (26) hovorí, že každý spoj musí byť priradený práve jednému depu. Podmienky (27) a (28) (spolu s (29)) vylučujú zaradiť do turnusu spoj j za spoj i ak sú spoje i, j priradené rôznym depám. Napríklad ak je spoj i priradený depu 2 a spoj j priradený depu 3, t.j. $y_{i2} = 1$, $y_{j3} = 1$, potom musí byť $y_{i3} = 0$, $y_{j2} = 0$. Potom je $1 + y_{i3} - y_{j3} = 1 + 0 - 1 = 0$ a tiež $1 + y_{j2} - y_{i2} = 1 + 0 - 1 = 0$. Pre $k = 3$ je pravá strana (27) nulová, pre $k = 2$ je pravá strana (28) nulová a preto musí byť $x_{ij} = 0$.

Kriteriálna funkcia (23) však nie je lineárna. Môžeme ju však linearizovať tak, že zavedieme novú binárnu premennú z_{ijk} namiesto súčinu $x_{ij}y_{ik}y_{jk}$ a pridaním vhodných ohraničujúcich podmienok dosiahneme, že v prípade optimálneho riešenia úlohy bude z_{ijk} rovné jednej práve vtedy, keď $x_{ij}y_{ik}y_{jk} = 1$.

Jedno z možných riešení je

$$2z_{ijk} \leq y_{ik} + x_{ij} \quad \forall (i,j) \in H \quad \forall k \quad (30)$$

$$z_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in H \quad \forall k \quad (31)$$

Naša kriteriálna funkcia bude teda

$$\text{Minimalizuj: } \sum_k \sum_{i \in S} y_{ik} (p_{ki} + o_{ik}) + \sum_k \sum_{(i,j) \in H} (c_{ijk} - L) z_{ijk} \quad (32)$$

a výsledný model bivalentného lineárneho programovania bude:

Minimalizuj (32) za predpokladov (24) – (31).

Pod'akovanie

Tento príspevok bol podporovaný grantom VEGA 1/0342/18 "Optimálne dimenzovanie obslužných systémov"

Použitá literatúra

1. BRUNO DE ATHAYDE PRATA: A multiobjective metaheuristic approach for the integrated vehicle and crew scheduling, Journal of Transport Literature, Vol.10 No.2 Manaus Apr./June 2016
2. CZIMMERMANN, P., PEŠKO, Š.: Autobusové rozvrhy s dvoma typmi vozidiel- Bus Schedules with Two Types of Vehicles, 3-rd International Conference APLIMAT 2004, pp. 321-326
3. ČERNÁ, A.: Optimization of Regional Bus Transport, Czech, (Optimalizace regionální autobusové dopravy.) Proceedings of International Conference "Transportation Science, (Věda o dopravě), Fakulta Dopravní ČVUT Praha, 6.-7.11.2001, pp. 70-75.
4. PALÚCH, S.: Graph Theory Approach to Bus Scheduling Problem, Studies of the faculty of management science and informatics, Vol. 9, October, 2001, pp. 53-57
5. PALÚCH, S.: Bus Scheduling as a Graph Coloring Problem, Komunikácie/Communications, vol. 4, 2003
6. PALÚCH, S., MAJER, T.: Vehicle scheduling with roundabout routes to depot. In: Mathematical methods in economics - MME 2016 : 34th international conference : Liberec, Czech Republic, September 6th-9th, 2016 : conference proceedings. - Liberec: Technical university of Liberec, 2016. - ISBN 978-80-7494-296-9. - S. 623-628
7. PALÚCH, S., PEŠKO, Š., MAJER, T.: An exact solution of the minimum fleet size problem with flexible bus trips. In: Quantitative methods in economics : multiple criteria decision making XVIII : proceedings of the international scientific conference : 25th-27th May 2016, Vrátna, Slovakia. - [S.l.]: Letra Interactive, 2016. - ISBN 978-80-972328-0-1. - S. 278-282.
8. PEŠKO, Š., PALÚCH, S., MAJER, T.: A group matching model for a vehicle scheduling problem. In: Quantitative methods in economics: multiple criteria decision making XVIII : proceedings of the international scientific conference : 25th-27th May 2016, Vrátna, Slovakia. - [S.l.]: Letra Interactive, 2016. - ISBN 978-80-972328-0-1. - pp. 298-302. PEŠKO, Š. 2001. The Minimum Fleet Size Problem for Flexible Bus Scheduling, In: Studies of the Faculty of Management Science and Informatics, Vol. 9, University of Žilina, pp. 59-65

Kontaktné údaje

Doc. RNDr. Stanislav Palúch, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4250

mobil: +421 905 441 958

email: stanislav.paluch@fri.uniza.sk

HISTORICKÝ PREHĽAD MIER VÝKONNOSTI PORTFÓLIA HISTORICAL OVERVIEW OF PORTFOLIO PERFORMANCE

Juraj Pekár

Abstrakt

Pri analýze portfólia investori využívajú rôzne ukazovatele k vyhodnoteniu ich vhodnosti na investovanie. Jednou skupinou ukazovateľov sú miery výkonnosti portfólia, ktoré sú všeobecne definované ako podiel výnosu k riziku. V príspevku je uvedený historický prehľad mier výkonnosti portfólia, ako aj jej všeobecný matematický zápis a jedno z možných rozdelení do kategórií.

KLúčové slová: miera výkonnosti portfólia, investícia

Abstract

In analyzing the portfolio, investors use different indicators to assess their suitability for investment. One set of indicators is portfolio performance measure that are generally defined as the ratio of revenue to risk. The paper presents a historical overview of portfolio performance as well as its general mathematical notation and one of the possible categories.

Keywords: Portfolio Performance Measure, Investment

1 VÝVOJ MIER VÝKONNOSTI

Literatúra o meraní výkonnosti portfólia siaha až k začiatkom modelu oceňovania aktív CAPM vypracovaným Sharpem v roku 1964 (Sharpe 1964). Od prvých mier výkonnosti, tiež nazývaných klasickými mierami výkonnosti, vytvorených Jensenom (Jensen 1968), Treynorom (Treynor 1965) a Sharpem (Sharpe 1966), bolo navrhnutých množstvo ďalších mier výkonnosti portfólia. Problémom klasických mier je, že nie sú schopné zachytiť všetky charakteristiky časového radu výnosov. Tento nedostatok riešia alternatívne miery výkonnosti, ktoré sú v podstate modifikáciami klasických mier výkonnosti. Jednou z takýchto modifikácií je Sortinov pomer, ktorý je alternatívou k Sharpeovmu pomeru (Sortino a Price 1994). Namiesto rozptylu použitého pri Sharpeovom pomere, je použitá semi-štandardná odchýlka. Pedersen a Rudholm-Alfin (Pedersen a Rudholm-Alfin 2003) ho zase nahradili dolnou semi-absolútnou odchýlkou. V roku 1981 Henriksson a Merton (Henriksson a Merton 1981) navrhli alternatívne miery výkonnosti k Jensenovej a Treynorovej miere. Štvorica autorov Biglova, Ortobelli, Rachev a Stoyanov (Biglova, Ortobelli, Rachev, Stoyanov 2004) navrhli ďalšie nové miery výkonnosti. Nazvali ich Rachevov pomer a Rachevov zovšeobecnený pomer. Tie dávajú do pomeru riziko merané pomocou podmienenej hodnoty v riziku (CVaR) pre dve rôzne hodnoty intervalu spoľahlivosti.

2 MERANIE VÝKONNOSTI PORTFÓLIA

Miera výkonnosti portfólia je konštruovaná na základe hodnôt výnosu a rizika portfólia. Meranie výkonnosti investovania je kvantifikácia výsledkov dosiahnutých zvolenou stratégiou.

Je to v podstate štatistické zosumarizovanie miery dosiahnutých výnosov, odhadnutie podstupeného rizika a meranie preukázateľnej schopnosti manažéra efektívne využiť riziko.

Otázka mier rizika a očakávaného výnosu úzko nadväzuje na miery výkonnosti portfólia. Každá prípustná miera výkonnosti portfólia by mala zohľadniť určité podmienky. Jednu z tried mier výkonnosti definovali Rachev a kolektív (Rachev a kol. 2008). Táto je známa pod pojmom koherentná miera výkonnosti.

Predpokladajme funkciu $G: X \rightarrow R, X \in A$ (kde A je množina všetkých prípustných portfólií), pričom uvedenú funkciu budeme nazývať koherentnou mierou výkonnosti, ak platí:

1. Funkciu $G(X)$ možno definovať takto: $G(X) = \frac{V(X)}{\rho(X)}$, kde $V(X)$ reprezentuje mieru očakávaného výnosu a $\rho(X)$ mieru rizika, ktoré sú definované pre náhodnú premennú X .
2. Funkcia miery očakávaného výnosu $V(X)$ musí spĺňať predpoklad superaditivity $\rho(X_1 + X_2) \geq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ pre $\forall X_1, X_2 \in A$ a funkcia miery rizika $\rho(X)$ musí spĺňať predpoklad subaditivity $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ pre $\forall X_1, X_2 \in A$.
3. Ak $X_1 \leq X_2$, tak musí platiť $G(X_1) \leq G(X_2)$ pre $\forall X_1, X_2 \in A$ v prípade, že miera rizika a miera očakávaného výnosu sú striktné kladné. Ak miera rizika a miera očakávaného výnosu sú striktné záporné, musí platiť $G(X_1) \geq G(X_2)$ pre $\forall X_1, X_2 \in A$.

Alternatívnou definíciou koherentnosti uvedenej všeobecnej funkcie miery výkonnosti $G(X) = \frac{V(X)}{\rho(X)}$ je koherentnosť miery očakávaného výnosu $V(X)$ a tiež koherentnosť miery rizika $\rho(X)$.

Meranie výkonnosti prináša celý rad techník, z ktorých mnohé majú pôvod v modernej teórii portfólia. Ohodnotenie výkonu je úzko spojené s rizikom. Moderná teória portfólia stanovila kvantitatívne spojenie medzi rizikom portfólia a jeho výnosmi. Sharpe vytvoril prvé ukazovatele výkonnosti – Sharpeova miera a informačný pomer (Sharpe 1966, 1994).

Z historického hľadiska je progresívnou mierou výkonnosti Omega funkcia. Táto miera výkonnosti portfólia je populárnym nástrojom pre finančné analýzy využívajúca všetky informácie, ktoré časový rad výnosov poskytuje (Keating a Shadwick 2002).

Podľa Pedersena a Rudholm-Alfvina, by mala dobrá miera výkonnosti spĺňať nasledujúce kritéria (Pedersen a Rudholm-Alfin 2003):

- Jednoduchosť – miera výkonnosti by mala byť jednoduchá na vysvetlenie.
- Vhodnosť – miera výkonnosti by mala zachytávať významné črty rozdelenia výnosov pre minimálne riziko a výnos.
- Teoretické východiská – miera výkonnosti by mala mať svoj základ ukotvený vo finančnej teórii a mala by byť akceptovaná ako trhový štandard.
- Špeciálne vlastnosti – miera výkonnosti môže spĺňať aj špeciálne podmienky ako je konzistentnosť s efektívnou hranicou v priestore priemer-rozptyl atď.

Existuje viacero rôznych mier výkonnosti maximalizujúcich finálne bohatstvo v danom časovom intervale. Napríklad Le Sourd rozdelila základné miery výkonnosti do týchto skupín (Le Sourd 2007):

Absolútne riziku prispôsobené miery výkonnosti

- Sharpeov pomer
- Treynorov pomer

Relatívne riziku prispôsobené miery výkonnosti

- Jensenová alfa
- Informačný pomer

Miery založené na „dolnom riziku“ a vyšších momentoch

- Sortinov pomer
- Omega funkcia

Použitá literatúra

BIGLOVA, A. – ORTOBELLI, S. – RACHEV, S. – STOYANOV, S.: Different approaches to risk estimation in portfolio theory. *Journal of Portfolio Management*. 31, 2004.

HENRIKSSON, R. D. – MERTON R. C.: On Market Timing and Investment Performance II: Statistical Procedures for Evaluating Forecasting Skills, *Journal of Business*. 54(4), 1981.

JENSEN, M. C.: The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964. *Journal of Finance*. 23, 1968.

KEATING, C. – SHADWICK, W. F.: A Universal Performance Measure, *Journal of Performance Measurement*. 2002.

LE SOURD, V.: Performance Measurement Traditional Investment. *Literature Survey*. 2007.

PEDERSEN, C. S. – RUDHOLM-ALFIN, T.: Selecting risk-adjusted shareholder performance measure. *Journal of Asset Management*. 4(3), 2003.

RACHEV, S. a kol.: Desirable Properties of an Ideal Risk Measure in Portfolio Theory, *Int. J. Theor. Appl. Finan.* 11, 2008.

SHARPE, W. F.: Mutual Fund Performance, *Journal of Business*. 39(1), 1966.

SHARPE, W. F.: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance*. 19, 1964.

SORTINO, F. A. – PRICE, L. N.: Performance Measurement in a Downside Risk Framework, *Journal of Investing*. 3(3), 1994.

TREYNOR, J. L.: How to Rate Management of Investment Funds, *Harvard Business Review*. 43, 1965.

TREYNOR, J. L. – BLACK, F.: How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection, *Journal of Business*. 46(1), 1973.

YOUNG, T.W.: Calmar Ratio: A Smoother Tool. *Futures Magazine*. 1991.

Kontaktné údaje

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 828

email: juraj.pekar@euba.sk

PROBLÉM ROVNOMERNÉHO ODPOČTU ELEKTROMEROV V SUSEDNÝCH REGIÓNOCH

THE PROBLEM OF EVEN METER READING IN NEIGHBORING REGIONS

Štefan Peško

Abstrakt

V tomto príspevku sa zaoberáme problematikou optimálneho zoskupovania susedných regiónov do súvislých oblastí, v ktorých by boli celkové mesačné doby odpočtov elektromerov v domácnostiach čo najrovnomernejšie. Takto formulovaný problém bol navrhnutý firmou CONSULTING M, s.r.o. pre svojho zákazníka - distribučnú spoločnosť v regióne Východoslovenského kraja. Pre tento zovšeobecnený problém hľadania p -mediánu v sieti navrhujeme dve formulácie zmiešanej úlohy lineárneho programovania. V prvej úlohe sa minimalizujú súčty štvorce celkových dôb odberov oblastiach zatiaľ čo v druhom modeli len rozpätia týchto dôb. V práci prezentujeme výsledky výpočtov pomocou optimalizačného nástroja gurobi pre regióny SR.

KLúčové slová: *optimalizácia regiónov, rovnomernosť, zovšeobecnený p -medián v sieti*

Abstract

In this paper we deal with the issue of optimal grouping of neighboring regions into contiguous areas where the total monthly meter readings in households would be as is possible. This problem was designed by CONSULTING M, s.r.o. for its customer, a distribution company in the East Slovak region. For this generalized p -median problem in network, we propose two formulations of a mixed linear programming. In the first model, the totals of the total sampling times of the areas are minimized while in the second model only the ranges of these times are minimized. We present the results of the computation using the gurobi optimization tool for the regions of Slovakia.

Keywords: *regional optimization, uniformity, generalized p -median in network*

1 ÚVOD

S myšlienkou, zaoberať sa problém rovnomerných časových výkonov v susedných regiónoch Východoslovenského kraja, nás oslovili [3] z firmy CONSULTING M, s.r.o. S kolegom Majerom [1], sme vyvinuli dve alternatívne prístupy na jeho riešení. V tomto príspevku sa sústredíme na modely, ktoré sú založené na pôvodných modifikáciách problému o p -mediáne v sieti. Odvodíme dve formulácie úlohy zmiešaného programovania MIP (Mixed Integer Programming). Tieto modely sme verifikovali na údajoch z regiónov SR pomocou optimalizačného nástroja Gurobi [5].

Po doplnení požiadavkou na rovnomernosť sme dostali úlohu zmiešaného kvadratického programovania (MIQP). Posledný robustný model vedie na úlohu zmiešaného lineárneho programovania (MILP).

2 MATEMATICKÉ MODELY

Najskôr sa budeme zaoberať jednou z verzií problému p -mediánu v sieti, ktorý nám umožní získať horný odhad počtu súvislých oblastí.

2.1 Problém p -mediánu v sieti

Jednu z verzií problému o p -mediáne v sieti možno formulovať takto: Je daný digraf, orientovaný graf, $G = (V, H)$ určený množinou vrcholov V a množinou protismerných orientovaných hrán H t.j. ak $(u, v) \in H$ potom $(v, u) \in H$. Hľadá sa minimálny počet p (spätných) hviezd digrafu, ktoré tvoria faktor t.j. podgraf obsahujúci všetky vrcholy digrafu G .

V našom prípade predstavujú vrcholy okresné mestá. Vrcholy sú spojené hranou ak sa jedná o susedné okresy. V tom modeli sa obmedzujeme na oblasti tvorené veľmi jednoduchými stromami – vstupnými hviezdami - s koreňom v centre mediánu. Takéto zjednodušenie je však pre našu aplikáciu postačujúce.

Uvažujeme tieto premenné:

- p udáva počet oblastí, ktoré sú tvorené najmenej jedným okresom,
- $x_{ij} = 1$ ak buď okres i susedí s okresom j – centrom oblasti,
- $y_j = 1$ ak bude centrom oblasti okres j .

Teraz už môžeme pristúpiť k matematickej formulácii úlohy (pMS):

$$p \rightarrow \text{minimum} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = p \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in H} x_{ij} = 1 - y_i \quad \forall i \in V \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall (i,j) \in H \quad (4)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in H: i < j \quad (5)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in H, \forall i \in V \quad (6)$$

$$p \geq 1 \quad (7)$$

Cieľová funkcia (1) zabezpečuje, že bude vybraný minimálny možný počet súvislých oblastí. Podmienka (2) hovorí, že ich bude p . Obmedzenie (3) požaduje, že každý okres je priradený k práve jednému okresu - centru oblasti. Podmienka (4) zabezpečuje, aby bol okres priradený vybranému centru. Obmedzenie (5) zaručí, že z paralelných hrán digrafu môže byť vybraná nanajvyš jedna orientovaná hrana vedúca do centra oblasti. Podmienky (6) a (7) sú obligatórne.

2.2 Problém p -mediánu v sieti s rovnomernou záťažou

Do formulácie problému pMS, ktorý nerešpektoval mesačnú záťaž okresov, ju môžeme zapracovať takto: Je daný neorientovaný vrcholovo ohodnotený digraf $G = (V, H, e)$ určený ohodnotenou množinou vrcholov V , kde ohodnotenie - záťaž tvorí usporiadaná množina

mesačných odberov ($e_{ik}: k \in M$) pre $i \in V$ a množinou hrán H susedných okresov. Hľadá sa čo najrovnomernejšej mesačné záťaže susedných oblastí pri danom počte oblastí p .

Uvažujeme premenné x_{ij} ako v modeli pMS. Tu p už nie je premenná ale daný parameter, ktorý nadobúda požadovanú hodnotu $p \geq p_{min}$, kde p_{min} je určené modelom pMS.

Ďalšou novou premennou je nezáporná premenná

- y_{ik} udáva počet hodín odberov v okrese $i \in V$ v mesiaci $k \in M$.

Teraz môžeme pristúpiť k našej formulácii úlohy (RMS):

$$\sum_{(i,k) \in V \times M} z_{ik}^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (8)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = p \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in H} x_{ij} = 1 - y_i \quad \forall i \in V \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall (i,j) \in H \quad (4)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in H: i < j \quad (5)$$

$$\sum_{i \in V: (i,j) \in H} e_{ik}x_{ij} + e_{jk}y_j = z_{jk} \quad \forall j \in V, \forall k \in M \quad (9)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in H, \forall i \in V \quad (6)$$

$$z_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in V, \forall k \in M \quad (10)$$

Cieľová funkcia (8) zabezpečuje čo najrovnomernejšiu mesačnú záťaž vo vytvorených oblastiach. Podmienka (9) kumuluje príslušné záťaže vo vybraných oblastiach. Ostatné obmedzenia sa interpretujú ako v modeli pMS. Podmienka (10) je obligatórná. Cieľová funkcia je kvadratická funkcia bivalentných premenných x , no našťastie zodpovedajúca matica je pozitívne definitná, a tak sme mohli očakávať riešenie modelu v prijateľnom čase.

2.3 Problém p-mediánu v sieti s min-max záťažou

Aj napriek excelentnému výkonu optimalizačného nástroja gurobi, sme sa rozhodli pre robustnú cieľovej funkcie ktorá len minimalizuje rozpätie medzi mesačnými odpočtami. Uvažujme ďalej premenné ako v modeli RMS a formulujme nasledujúcu úlohu (MMMS):

$$z_{max} - z_{min} \rightarrow \text{minimum} \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = p \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in H} x_{ij} = 1 - y_i \quad \forall i \in V \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall (i,j) \in H \quad (4)$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in H: i < j \quad (5)$$

$$z_{min} \leq \sum_{i \in V: (i, j) \in H} e_{ik} x_{ij} + e_{jk} y_j \leq z_{max} \quad \forall j \in V, \forall k \in M \quad (11)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in H, \forall i \in V \quad (6)$$

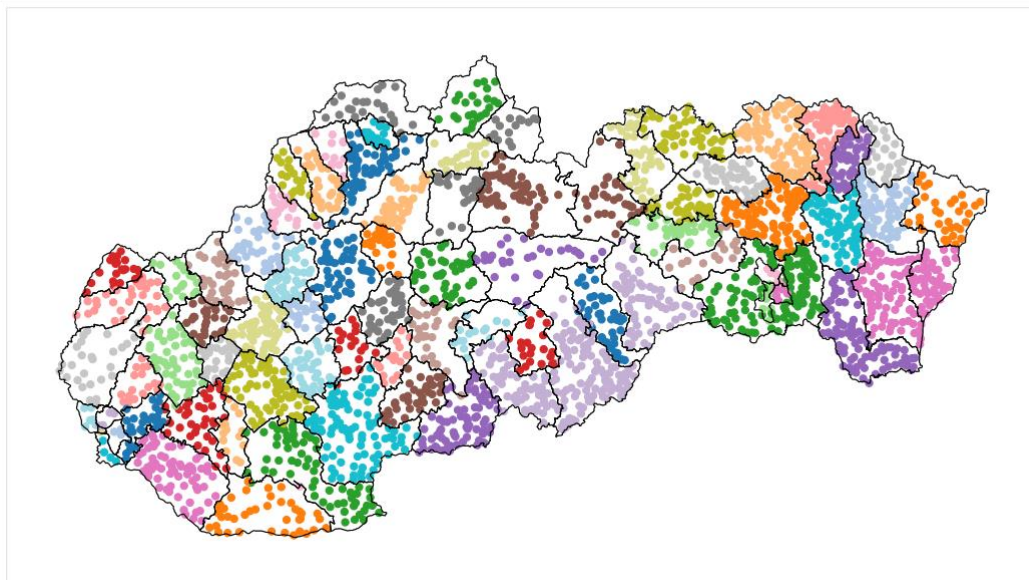
$$0 \leq z_{min} \leq z_{max} \quad (12)$$

Cieľová funkcia (10) zabezpečuje minimálne rozpätie odpočtov v najzaťaženejšom mesiaci v niektorej oblasti. Podmienky (11) a (12) definuje hornú a dolnú hranicu rozpätia. Ostatné podmienky sú obligatórne.

Poznamenajme, že každé optimálne riešenie modelu RMS je aj optimálnym riešením modelu MMMS. Navyše model MMMS má aj isté vlastnosti robustného riešenia t.j. pri niektorých navýšeniach odberov, ktoré môžeme chápať ako scenáre, ostáva riešenie optimálne.

3 POČÍTAČOVÉ EXPERIMENTY

Naše experimenty sme robili na inštancii okresov SR zobrazených na obrázku obr.1.



Obr.1 Okresy s príslušnými atrakčnými obvody v SR .

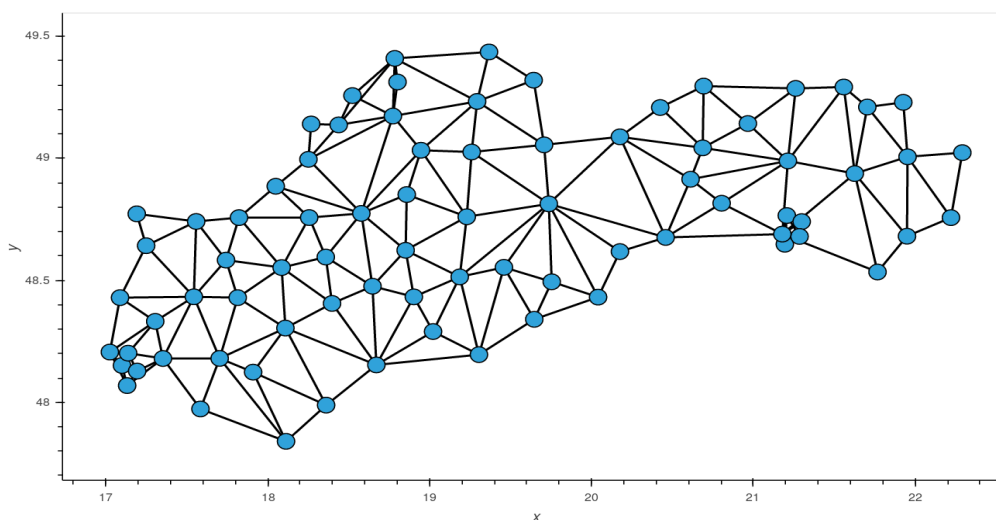
Nakoľko sme nemali k dispozícii odpočty v okresoch celej republiky vychádzali sme zo známych odpočtov vo Východoslovenského kraja, pre ktoré sme vytvorili tento nelineárny regresný model:

$$\ln(y) = y_0 \cdot (ax + b) \cdot (m + 6),$$

kde

- y – odhadovaný počet hodín odpočtu elektromerov,
- y_0 – celkový počet odberateľov v okresoch Východoslovenského kraja,
- x – počet odberateľov v sledovanom okrese,
- m – mesiac v ktorom bol vykonaný odpočet.

Optimalizačné výpočty boli vykonané na digrafe G pre SR, protismerné orientované hrany sú na obr.2 zobrazené úsečkami. Množinu vrcholov tvorí 79 okresných miest a 179 hrán reprezentuje susedné okresy (so spoločnou hranicou).



Obr.2 Digraf G okresov SR

Modelom pMS sme vypočítali za 0.04 sek. na PC s procesorom Intel i7-5960X, 3.00 GHz, 32 GB RAM 8 jadrami, že minimálny počet oblastí je 15. Doby výpočtov pre modely MMMS a RMS sú uvedené v nasledujúcej tabuľke tab1 s $\text{gap} = 0.0$.

Tab.1. Doby výpočtov pre modely v sekundách

p	MMMS	RMS
15	12.61	0.25
16	473.52	1.15
17	11 595.0	9.21
18	4 783.30	48.97
19	> 60 000.0	108.36
20	33 598.76	43.52

4 ZÁVER

Tri netradičné model hľadania p -mediánu v sieti sme aplikovali na problém rovnomerného odpočtu hodín elektromerov. V prvý model umožňuje výpočet minimálneho počtu oblastí, ktoré sú tvorené susednými okresmi. Oblasť je modelovaná vstupnou hviezdou v digrafe, ktorého vrcholy tvoria centrálné okresy a orientované hrany spájajú susedné okresy. V druhom modely je doplnená obmedzujúca podmienka na rovnomernosť v tvare kvadratickej funkcie. To umožňuje zrovnomeniť mesačné odpočtu v oblastiach. Tretí model nahradzuje cieľovú funkciu rozpätím mesačných odpočtov, čo výrazne znižuje časovú náročnosť výpočtov. Nakoľko sme nemali doby odpočtov za celú Slovenskú republiku ale len za Východoslovenský kraj odhadli sme doby odpočtov pre chýbajúce kraje nelineárnym regresným modelom. Tento odhad bude pomerne nepresný ale umožnil nám riešiť inštancie reálnych rozmerov.

Časová náročnosť druhého modelu je pomerne veľká. Vhodnou alternatívou je tretí, časovo nenáročný model, ktorého riešenie je prípustným riešením druhého modelu. V ďalšom výskume sa chceme zamerať na dvojetapový prístup, kde by sa v prvej etape riešil tretí model a v druhej etape druhý model so štartovacím riešením z tretieho modelu.

Ďalšou výzvou je zovšeobecnenie hľadanej oblasti zo vstupnej hviezdy na orientovaný strom väčšej hĺbky. Očakávame, že sa opäť stretneme s problémom časovej náročnosti. Inou výzvou je tvorba robustných modelov, ktorá by našla uplatnenie pri optimalizácii robustných záchranných systémov (ZS), kde sa v dopravnej sieti hľadajú centrá, v ktorých sú umiestnené stanovišťa ZS. Navyiac je tu [2,4] jednak požiadavka na ich kapacitu (počet sanitiek) jednak neistý dopyt na obsluhu pacientov .

PodĎakovanie

The paper was conducted within the project KEGA 041ŽU-4/2017 Experimental Mathematics Accessible for All (granted by Ministry of Education) and supported by the research VEGA 1/0342/18 Optimal dimensioning of service systems.

Použitá literatúra

1. MAJER, T. 2019. Vytváranie kompaktných rajónov pre obslužné systémy, v tomto zborníku.
2. MAJER, T., PALÚCH, S. 2016. Odolnosť záchranného systému voči poruchám v dopravnej sieti, In: Optimalizační úlohy v dopravných a logistických systémech a SW podpora rozhodování v inteligentních dopravních systémech : sborník příspěvků, Praha, Albertov 8.-9.12. 2016, Praha: ČVUT - ISBN 978-80-01-06084-1. s. 52-58.
3. MIKULA, R. 2019, konzultácie pre firmu CONSULTING M, s.r.o.
4. PEŠKO, Š., MAJER, T. 2015. Robust p-median problem in changing networks, In: Transport Problems, International scientific journal. - ISSN 1896-0596. Vol. 10, iss. 3, pp. 125-130.
5. GUROBI, 2015. Gurobi Optimization, Inc. Gurobi Optimizer Reference Manual, Available at: <http://www.gurobi>.

Kontaktné údaje

Doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky,

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: +421-41-513 4061

email: stefan.pesko@fri.uniza.sk

MOŽNOSTI MODELOVANIA EKONOMICKÝCH PROCESOV POMOCOU SKRYTÝCH MARKOVÝCH MODELOV¹

MODELLING OPTIONS OF ECONOMIC PROCESSES WITH HIDDEN MARKOV MODELS

Marian Reiff

Abstract

Skrytý Markovov model je matematický model, v ktorom sa dá analyzovaný systém popísať pomocou stavov modelovaných Markovovým reťazcom. Tieto stavy nie je možné priamo pozorovať. Parametre modelu sú neznáme a musia byť odhadnuté na základe pozorovateľných údajov. Hlavná myšlienka skrytého Markovovho modelu je, že skryté stavy systému a ďalšie neviditeľné informácie sú skryté v pozorovanom procese, ktorý je poškodený určitým šumom. V príspevku sa venujeme prehľadu možnosti modelovania ekonomických procesov pomocou skrytých Markovových modelov.

Kľúčové slová: Skrytý Markovov model, Markovov reťazec, časový rad

Abstrakt

Hidden Markov model is a mathematical model in which an analyzed system can be described using states modelled by the Markov chain. These states cannot be directly observed. Model parameters are unknown and must be estimated based on observable data. The main idea behind Markov hidden model is that hidden system states and other invisible information are hidden in the observed process that is damaged by some noise. In the paper are discussed the possibilities of modeling economic processes using hidden Markov models.

Keywords: Hidden Markov model, Hidden Chain, Time Series

Teória skrytých Markovových modelov sa už viac ako dve desaťročia používa v oblasti spracovania signálov, najmä v súvislosti s automatickým rozpoznávaním reči. Táto teória však poskytuje dostatočne flexibilné, univerzálne modely aplikovateľné v prípadoch, ak sú k dispozícii dáta typu časových radov jednej alebo viacerých premenných, a to buď kvalitatívneho alebo kvantitatívneho charakteru vrátane časových radov s cyklických výskytom hodnôt. Vďaka flexibilitate modelu sa záujem o teóriu a aplikácie skrytých Markovových modelov rýchlo rozšíril aj do iných oblastí:

1. rôzne druhy rozpoznávania: tvár, reč, gesto, rukopis, podpis, strojový preklad,
2. bioinformatika (sekvenovanie DNA, predikcie génov, atď.),
3. finančné modelovanie: analýza časových radov rôznych ukazovateľov,
4. ekonómia a marketing,
5. environmentálne štúdie (predpovede zemetrasení, predpovede počasia, atď.),
6. behaviorálne štúdie (analýzy počtu vražd, samovražd, atď.).

¹ Tento článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0368/18 "Cenové stratégie v prostredí pôsobenia efektívnych regulačných mechanizmov na nadnárodných trhoch sieťových odvetví slovenskej ekonomiky".

Na úvod spomenieme niekoľko významných prác mimo ekonomických vied – medzi dôležité publikácie z oblasti rozpoznania reči môžeme zaradiť publikáciu (Rabiner, 1989), ktorá poskytuje praktické detaily o metódach implementácie teórie spolu s opisom vybraných aplikácií teórie s odlišnými špecifikáciami pri rozpoznávaní reči. Autori (Gales & Young, 2008) predstavujú základy architektúry systému založeného na báze skrytého Markovovho modelu a následne popisujú zdokonalenia, ktoré sú potrebné na dosiahnutie požadovaného výkonu. Rozpoznávaním rukopisu sa zaoberajú publikácie napríklad (Kundu, He, & Bahl, 1988) a (Mohamed & Gader, 1996). Z oblasti bioinformatiky a biofyziky môžeme spomenúť práce (Karplus, Barrett, & Hughey, 1998), (Eddy, 1998) a (Krogh, Larsson, Von Heijne, & Sonnhammer, 2001) zaoberajúce sa aplikáciami predikcie štruktúry bielkovín a analýzy genómovej sekvencie. Medzi prvé aplikácie skrytého Markovovho modelu časových radov na ekonomických ukazovateľoch možno zaradiť publikácie (Hamilton, 1989) a (Hamilton, 1990), kde autor skúma povojnový vývoj hrubého národného produktu Spojených štátov amerických v závislosti od skrytých stavov modelujúcich ekonomické cykly v Spojených štátoch amerických. Hamiltonove práce spopularizovali skrytý Markovov model pre analýzu ekonomických časových radov, keďže preukázali schopnosť modelu zachytiť asymetrický podmienený pohyb časového radu alebo asymetrické dynamické vlastnosti časových radov pomocou homogénnych podmienených pravdepodobností prechodov medzi stavmi systému.

Využitie skrytého Markovovho modelu na riešenie napríklad aj úloh finančného modelovania možno vysvetliť na príklade odhadu fyzikálnej veličiny (signálu), kde úlohou je určiť veľkosť elektrického náboja. Na meranie elektrického náboja však použijeme prístroje, ktorých predmetom merania sú iné veličiny, z ktorých sa následne nepriamo určí veľkosť náboja. V dôsledku chýb merania a faktu, že nie je možné veľkosť náboja priamo odmerať, získame len jeho „nečistú verziu“. Cieľom je odfiltrovať „nečistoty“ zo série pozorovaných hodnôt, a tak získať informáciu o veľkosti náboja. V oblasti finančného modelovania máme k dispozícii pozorovania časových radov rôznych finančných údajov a ekonomických ukazovateľov. Cieľom je zistiť, či takéto pozorované údaje obsahujú informácie o latentných alebo skrytých premenných a ak áno, ako by sme odhadli ich dynamiku. Pritom efektívny odhad dynamiky finančných premenných a presný odhad parametrov má významný vplyv na oceňovanie derivátov, riadenie rizík a alokáciu aktív a iné rozhodnutia v oblasti finančného modelovania (Mamon & Elliott, 2007), (Mamon & Elliott, 2014).

V oblasti finančného modelovania v prvých štúdiách z päťdesiatych a šesťdesiatych rokov dvadsiateho storočia zaoberajúcich sa vlastnosťami pravdepodobnostného rozdelenia denných výnosov aktív bolo často vybrané na účely modelovania denných výnosov aktív normálne rozdelenie so stacionárnymi parametrami. V práci (Fama, 1965) autor vykonal rozsiahle testovanie empirických údajov a zistil, že extrémne veľké alebo malé hodnoty na chvostoch normálneho rozdelenia sú častejšie, ako sa predpokladá v prípade normálneho rozdelenia. Tento jav sa nazýva leptokurtóza a nastáva, keď funkcia hustoty pravdepodobnostného rozdelenia neklesá v okrajových častiach exponenciálne, čoho dôsledkom je, že krivka má „ťažké“ chvosty. Taktiež pre distribúciu hodnôt denných výnosov aktív okolo strednej hodnoty je charakteristická špicatosť. Vysporiadať sa s týmto problémom formou voľby iného pravdepodobnostného rozdelenia sa pokúšali rôzni autori, napríklad v prácach (Praetz, 1972), (Blattberg & Gonedes, 1974) autori využívajú Studentovho rozdelenia s malým počtom stupňov voľností, v práci (Mittnik & Rachev, 1993) autori zistili, že Weibullovo rozdelenie poskytuje najlepšie výsledky pre denné výnosy akciového indexu S&P 500 medzi rokmi 1982 a 1986 a v práci (Granger & Ding, 1995) autori považujú za vhodné použiť dvojité exponenciálne rozdelenie. Laplaceove rozdelenie sa taktiež používa na modelovanie finančných radov v publikáciách (Eberlein & Keller, 1995) a (Kozubowski & Podgórski, 2001). Pre časové rady denných výnosov aktív sú taktiež charakteristické vlastnosti s dočasným

charakterom, čoho dôsledkom je zhlukovanie volatility, prítomnosť heteroskedasticity a autokorelácia, táto problematika je predmetom práce (Granger & Ding, 1995) a (Cont, 2001). V prípade zhlukovania volatility možno použiť modely typu ARCH a GARCH, o ktorých je podrobný prehľad poskytnutý v práci (Bollerslev, Chou, & Kroner, 1992) alebo modely stochastickej volatility, ktorých podrobný prehľad poskytuje publikácia (Jäckel, 2004). Cieľom je objasniť problematiku aplikácie skrytého Markovovho modelu, ktorý je vhodný na zachytenie popísaných špecifik pravdepodobnostného rozdelenia, ako aj vlastností s dočasným charakterom. Pomocou Markovovho reťazca, konkrétne pomocou podmienených pravdepodobností prechodu medzi skrytými (latentnými) stavmi modelovaného systému, je možné modelovať časovú závislosť. Pre konkrétne skryté stavy sa definujú podmienené pravdepodobnostné rozdelenia pre distribúciu pozorovaných premenných, čo umožňuje vysvetliť špicatosť a „ťažké“ chvosty normálneho rozdelenia. Ako príklad môžeme uviesť model s dvoma skrytými stavmi, prvý stav modeluje obdobie s nízkou volatilitou a druhý stav obdobie s vysokou volatilitou a k jednotlivým stavom prislúchajú rôzne pravdepodobnostné rozdelenie denných výnosov. Modelovanie denných výnosov pomocou skrytého Markovovho modelu bolo skúmané niekoľkými autormi. Za významnú prácu možno považovať prácu (Rydén, Teräsvirta, & Åsbrink, 1998), v ktorej autori preukázali, že skrytý Markovov model s dvoma a troma stavmi dobre reprodukuje vlastnosti (časové a distribučné) denných výnosov indexu S&P 500, niekoľko ďalších autorov naviazalo na ich prácu napríklad v publikáciách (Cecchetti, Lam, & Mark, 1990), (Linne, 2002) a (Bialkowski, 2015). Autori Rydén et al. (1998) však poukázali aj na problém, že pomocou skrytého Markovovho modelu nie je možné modelovať pomaly klesajúcu autokorelačnú funkciu štvorcov denných výnosov, s týmto problémom sa neskôr zaoberali autori v publikáciách (Bulla & Bulla, 2006) a (Rogers & Zhang, 2011).

Jednou z ďalších možných aplikácií skrytého Markovovho modelu vo finančnom modelovaní je analýza portfólia a rizika. Analýzou úrokovej miery a kreditného rizika dlhopisov pomocou skrytého Markovovho modelu sa zaoberali autori v práci (Thomas, Allen, & Morkel-Kingsbury, 2002). Autori Giampieri, Davis, and Crowder (2005) použili skrytý Markovov model pri analýze dlhopisového portfólia, kde použili dva skryté stavy, a to stav s normálnym rizikom a stav so zvýšeným rizikom. Ako pozorovateľné premenné použili makroekonomické ukazovatele HDP, úrokovú mieru a výnosy na finančných trhoch. Banachewicz, Lucas, and Van Der Vaart (2008) rozšírili model portfólia model autorov Giampieri et al. (2005) o analýzu, či vplýva príslušnosť k odvetviu priemyslu alebo sektora ekonomiky na počiatočné riziko investície. Z ďalších prác zaoberajúcich sa využitím skrytého Markovovho modelu v oblasti alokácie aktív a optimalizácie portfólia spomenieme publikácie (Zhou & Yin, 2003), (Guidolin & Timmermann, 2007), (Fu, Wei, & Yang, 2014) a (Bae, Kim, & Mulvey, 2014) a (Nguyen, 2017).

V prehľade súčasného stavu využitia skrytého Markovovho modelu sme už spomenuli aplikácie v makroekonómii a finančnom modelovaní, a tretia oblasť ktorú spomenieme je oblasť marketingu. Pre vyššie uvedené aplikácie v makroekonómii a finančnom modelovaní je charakteristické, že skryté stavy sú vo väčšine prípadov modelované pomocou homogénneho Markovovho reťazca, a naopak v marketingu pomocou nehomogénneho Markovovho reťazca, pretože firmy svojimi marketingovými aktivitami chcú ovplyvňovať prechod zákazníkov medzi skrytými (latentnými) stavmi. Pravdepodobne prvým skrytým Markovovým modelom v marketingu bol model od autora Poulsen (1990), v ktorom zákazníci môžu v priebehu času meniť svoje členstvo v latentných triedach. Skrytý Markovov model sa primárne v marketingu používa na modelovanie toho, ako zákazníci (a niekedy firmy) v priebehu času prechádzajú medzi sériou latentných stavov. Počnúc druhou polovicou prvej dekády 21. storočia sa aplikácie skrytého Markovovho modelu začali častejšie objavovať v marketingovej literatúre.

V kontexte zákazníkov modelujú latentné stavy v publikovaných modeloch napríklad: pozornosť zákazníkov, v zmysle upúta-neupúta pozornosť (Liechty, Pieters, & Wedel, 2003), (Van der Lans, Pieters, & Wedel, 2008) a (Shi, Wedel, & Pieters, 2013), vzťah medzi zákazníkom a firmou (Netzer, Lattin, & Srinivasan, 2008) a (Romero, Van der Lans, & Wierenga, 2013), systém hodnôt zákazníka (Brangule-Vlagsma, Pieters, & Wedel, 2002), migrácia zákazníkov medzi stavmi neaktívny, príležitostný a lojálny zákazník (Mark, Lemon, & Vandenbosch, 2014), návyky správania sa zákazníka pri prezeraní internetových stránok a vyhľadávani na internete (Montgomery, Li, Srinivasan, & Liechty, 2004) a (Stüttgen, Boatwright, & Monroe, 2012), zákazníkova voľba z portfólia produktov (Paas, Vermunt, & Bijmolt, 2007) a (Schweidel, Bradlow, & Fader, 2011), spokojnosť zákazníka (Ho, Park, & Zhou, 2006). Skrytý Markovov model je možné použiť na modelovanie vplyvu marketingových aktivít na prechody medzi skrytými stavmi (Netzer et al., 2008), (Montoya, Netzer, & Jedidi, 2010), (Li, Sun, & Montgomery, 2011) a (Zhang, Netzer, & Ansari, 2014). Absorpčné stavy Markovovho reťazca je možné použiť na modelovanie straty zákazníka (Fader, Hardie, & Shang, 2010) a (Schweidel & Knox, 2013). Jednou spoločnou témou vo všetkých vyššie uvedených aplikáciách skrytého Markovovho modelu v marketingu je, že vo všetkých prípadoch je správanie zákazníka ovplyvnené príslušnosťou ku skrytému stavu, teda v ktorom skrytom stave sa nachádza zákazník, pričom tento stav nie je pozorovateľný. Zákazník môže v čase prechádzať medzi skrytými stavmi. Prechody medzi stavmi a príslušnosť zákazníka k určitému stavu reflektuje vnímanie marketingových informácií zákazníkom, zákazníkove stratégie výberu, zákazníkova vernosť, dôveru, úroveň spokojnosti alebo všeobecne zákazníkov vzťah k firme. Predmetom výskumu je často analýza prechodov zákazníkov medzi týmito stavmi v kontexte rozhodnutia a činnosti firmy vplyvajúcej na prechod zákazníka do stavov, ktoré sú pre firmu priaznivejšie.

Na záver možno spomenúť, že aplikácia skrytých Markovových modelov v rôznych oblastiach je možná vďaka ich univerzálnosti a matematickej jednoduchosti. Skrytý Markovov model je stochastický model a sú preňho charakteristické nasledujúce vlastnosti (MacDonald & Zucchini, 1997):

1. Možnosť spracovať viacero momentov: priemer, rozptyl, autokorelácia.
2. Pravdepodobnosť sa ľahko vypočíta; čas výpočtu je lineárny vo vzťahu k počtu pozorovaní.
3. Marginálne pravdepodobnostné rozdelenia sa dajú ľahko určiť a chýbajúce pozorovania nepredstavujú problém.

Použitá literatúra

- Bae, G. I., Kim, W. C., & Mulvey, J. M. (2014). Dynamic asset allocation for varied financial markets under regime switching framework. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 450-458.
- Banachewicz, K., Lucas, A., & Van Der Vaart, A. (2008). Modelling portfolio defaults using hidden Markov models with covariates. *The Econometrics Journal*, 11(1), 155-171.
- Bialkowski, J. (2015). Modelling returns on stock indices for western and central european stock exchanges-a Markov switching approach. *South-Eastern Europe Journal of Economics*, 2(2).
- Blattberg, R. C., & Gonedes, N. J. (1974). A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. *The journal of Business*, 47(2), 244-280.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., & Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52(1-2), 5-59.

- Brangule-Vlagsma, K., Pieters, R. G. M., & Wedel, M. (2002). The dynamics of value segments: modeling framework and empirical illustration. *International Journal of Research in Marketing*, 19(3), 267-285.
- Bulla, J., & Bulla, I. (2006). Stylized facts of financial time series and hidden semi-Markov models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(4), 2192-2209.
- Cecchetti, S. G., Lam, P.-S., & Mark, N. (1990). Mean reversion in equilibrium asset prices. *The American Economic Review*, 80(3), 398-418.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223-236.
- Eberlein, E., & Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, 1(3), 281-299
- Eddy, S. R. (1998). Profile hidden Markov models. *Bioinformatics (Oxford, England)*, 14(9), 755-763.
- Fader, P. S., Hardie, B. G. S., & Shang, J. (2010). Customer-base analysis in a discrete-time noncontractual setting. *Marketing Science*, 29(6), 1086-1108.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Fu, J., Wei, J., & Yang, H. (2014). Portfolio optimization in a regime-switching market with derivatives. *European Journal of Operational Research*, 233(1), 184-192.
- Gales, M., & Young, S. (2008). The application of hidden Markov models in speech recognition. *Foundations and Trends® in Signal Processing*, 1(3), 195-304.
- Giampieri, G., Davis, M., & Crowder, M. (2005). A hidden markov model of default interaction. *Quantitative Finance*, 5(1), 27-34.
- Granger, C. W. J., & Ding, Z. (1995). Some properties of absolute return: An alternative measure of risk. *Annales d'Economie et de Statistique*(40), 67-91
- Guidolin, M., & Timmermann, A. (2007). Asset allocation under multivariate regime switching. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31(11), 3503-3544.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 57(2), 357-384.
- Hamilton, J. D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*, 45(1-2), 39-70.
- Ho, T.-H., Park, Y.-H., & Zhou, Y.-P. (2006). Incorporating satisfaction into customer value analysis: Optimal investment in lifetime value. *Marketing Science*, 25(3), 260-277.
- Jäckel, P. (2004). Stochastic volatility models: past, present and future. *The Best of Wilmott*, 1, 355-377.
- Karplus, K., Barrett, C., & Hughey, R. (1998). Hidden Markov models for detecting remote protein homologies. *Bioinformatics (Oxford, England)*, 14(10), 846-856.
- Kozubowski, T. J., & Podgórski, K. (2001). Asymmetric Laplace laws and modeling financial data. *Mathematical and Computer Modelling: An International Journal*, 34(9-11), 1003-1021.
- Krogh, A., Larsson, B., Von Heijne, G., & Sonnhammer, E. L. L. (2001). Predicting transmembrane protein topology with a hidden Markov model: application to complete genomes. *Journal of molecular biology*, 305(3), 567-580.
- Kundu, A., He, Y., & Bahl, P. (1988). *Recognition of handwritten word: first and second order hidden Markov model based approach*.
- Li, S., Sun, B., & Montgomery, A. L. (2011). Cross-selling the right product to the right customer at the right time. *Journal of Marketing Research*, 48(4), 683-700.
- Liechty, J., Pieters, R., & Wedel, M. (2003). Global and local covert visual attention: Evidence from a Bayesian hidden Markov model. *Psychometrika*, 68(4), 519-541.

- Linne, T. (2002). A Markov switching model of stock returns: an application to the emerging markets in central and eastern Europe. In *East European Transition and EU Enlargement* (pp. 371-379): Springer.
- MacDonald, I. L., & Zucchini, W. (1997). *Hidden Markov and other models for discrete-valued time series*: Chapman and Hall/CRC.
- Mamon, R. S., & Elliott, R. J. (2007). *Hidden markov models in finance* (Vol. 460). Boston: Springer.
- Mamon, R. S., & Elliott, R. J. (2014). *Hidden Markov models in finance: further developments and applications, volume II* (Vol. 209). New York: Springer US.
- Mark, T., Lemon, K. N., & Vandenbosch, M. (2014). Customer migration patterns: evidence from a North American retailer. *Journal of Marketing Theory and Practice*, 22(3), 251-270.
- Mittnik, S., & Rachev, S. T. (1993). Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric reviews*, 12(3), 261-330.
- Mohamed, M., & Gader, P. (1996). Handwritten word recognition using segmentation-free hidden Markov modeling and segmentation-based dynamic programming techniques. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(5), 548-554.
- Montgomery, A. L., Li, S., Srinivasan, K., & Liechty, J. C. (2004). Modeling online browsing and path analysis using clickstream data. *Marketing Science*, 23(4), 579-595.
- Montoya, R., Netzer, O., & Jedidi, K. (2010). Dynamic allocation of pharmaceutical detailing and sampling for long-term profitability. *Marketing Science*, 29(5), 909-924.
- Netzer, O., Lattin, J. M., & Srinivasan, V. (2008). A hidden Markov model of customer relationship dynamics. *Marketing Science*, 27(2), 185-204.
- Nguyen, N. M. (2017). *Hidden Markov Model for Portfolio Management with Mortgage-Backed Securities Exchange-Traded Fund*. Retrieved from <https://www.soa.org/research-reports/2017/2017-hidden-markov-model-portfolio-mgmt/>
- Paas, L. J., Vermunt, J. K., & Bijmolt, T. H. A. (2007). Discrete time, discrete state latent Markov modelling for assessing and predicting household acquisitions of financial products. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 170(4), 955-974.
- Poulsen, C. S. (1990). Mixed Markov and latent Markov modelling applied to brand choice behaviour. *International Journal of Research in Marketing*, 7(1), 5-19.
- Praetz, P. D. (1972). The distribution of share price changes. *Journal of business*, 45(1), 49-55
- Rabiner, L. R. (1989). A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2), 257-286.
- Rogers, L. C. G., & Zhang, L. (2011). An asset return model capturing stylized facts. *Mathematics and Financial Economics*, 5(2), 101.
- Romero, J., Van der Lans, R., & Wierenga, B. (2013). A partially hidden Markov model of customer dynamics for CLV measurement. *Journal of interactive Marketing*, 27(3), 185-208.
- Rydén, T., Teräsvirta, T., & Åsbrink, S. (1998). Stylized facts of daily return series and the hidden Markov model. *Journal of applied econometrics*, 13(3), 217-244.
- Schweidel, D. A., Bradlow, E. T., & Fader, P. S. (2011). Portfolio dynamics for customers of a multiservice provider. *Management Science*, 57(3), 471-486.
- Schweidel, D. A., & Knox, G. (2013). Incorporating direct marketing activity into latent attrition models. *Marketing Science*, 32(3), 471-487.
- Shi, S. W., Wedel, M., & Pieters, F. G. M. (2013). Information acquisition during online decision making: A model-based exploration using eye-tracking data. *Management Science*, 59(5), 1009-1026.

- Stüttgen, P., Boatwright, P., & Monroe, R. T. (2012). A satisficing choice model. *Marketing Science*, 31(6), 878-899.
- Thomas, L. C., Allen, D. E., & Morkel-Kingsbury, N. (2002). A hidden Markov chain model for the term structure of bond credit risk spreads. *International Review of Financial Analysis*, 11(3), 311-329.
- Van der Lans, R., Pieters, R., & Wedel, M. (2008). Eye-movement analysis of search effectiveness. *Journal of the american statistical association*, 103(482), 452-461.
- Zhang, J. Z., Netzer, O., & Ansari, A. (2014). Dynamic targeted pricing in B2B relationships. *Marketing Science*, 33(3), 317-337.
- Zhou, X. Y., & Yin, G. (2003). Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: A continuous-time model. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(4), 1466-1482.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Marian Reiff, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 823

email: marian.reiff@euba.sk

PRIESTOROVÁ HRA AKO HRA DVOCH HRÁČOV S NULOVÝM SÚČTOM A PARTICIPÁCIOU REGULÁTORA SO ZÁSAHOM V URČITOM UZLE V GRAFE

SPATIAL GAME AS A TWO-PLAYER GAME WITH ZERO SUM AND PARTICIPATION OF A REGULATOR WITH AN IMPACT IN A CERTAIN NODE IN A GRAPH

Allan Jose Sequeira Lopez

Abstrakt

V každom konkurenčnom modeli dochádza medzi hráčmi (firmy) k situácii, kde si konkurujú, aby získali viac klientov a väčší trhovú podiel. Príspevok sa zaoberá grafickým modelovaním situácie, kde dve konkurujúce spoločnosti ponúkajú identický produkt, ktorého cena sa môže líšiť. Diferenciácia v cenách môže súvisieť s cenovou politikou každej firmy alebo od vplyvu externej entity (regulátora) v určitom uzle na trhu. Najjednoduchším spôsobom implikácie preferencie určitého uzla regulátora je vo forme subvencie alebo pokuty. Uvedenú situáciu môžeme modelovať ako hru dvoch hráčov, v ktorej externá entita (regulátor) ovplyvňuje umiestnenie hráčov na trhu podľa svojich preferencií. Priebeh hry definujeme vo vývojovom diagrame.

***Kľúčové slová:** priestorová konkurencia, preferencia regulátora, teória hier, cenová regulácia*

Abstract

In every competition model the participants – entities (companies) – are involved in the situations where they compete with the purpose of gaining more clients and a bigger market share. The paper is focused on graphical modelling of such a situation when two competing companies offer identical goods on the market, but the price of these goods may vary. The variation in price could be done by the price policy of each firm or by the influence of an external entity (regulator) in a specific node of the market. The easiest way to implicate a node preference would be to regulate the price in a form of a subsidy or a penalty. Such situation can be modelled as a two player game in which the external entity regulates the location of the players according to his preference. The game process is defined in a flowchart diagram.

***Keywords:** Spatial competition, regulator preference, game theory, price regulation*

1 ÚVOD

Príspevok je zameraný na lokačné modely, ktoré sú súčasťou modelov priestorovej konkurencie. Modelujeme umiestnenie dvoch konkurenčných spoločností, ktoré ponúkajú identický produkt za rôzne ceny na geograficky determinovanom trhu. Prvé známe modely sú spojené predovšetkým s Hotellingom (Hotelling, 1929). Hotelling však uvažoval o umiestnení pozdĺž čiary a naše úvahy rozšírime pridaním priestorovej štruktúry, ktorú možno opísať ako graf. Model ďalej rozšírime o situáciu, keď regulátor chce aktívne zasiahnuť a regulovať umiestnenie firiem na konkrétnom mieste. Je zrejmé, že preferencie regulátora nie vždy

závisia len od ekonomických prínosov, ale môžu to byť čisto politické rozhodnutie na podporu určitých oblastí (Sequeira Lopez & Čičková, 2018).

Najjednoduchší spôsob, ako vziať do úvahy preferencie uzlov, je regulácia ceny prostredníctvom určitej formy dotácie alebo sankcie. Takéto správanie môže spôsobiť negatívne externality, napríklad z dôvodu vyššieho dopravného zaťaženia, ktoré spôsobuje vyššie znečistenie celého územia, a to nielen v danej lokalite. V niektorých prípadoch sa rieši morálny problém, ako napríklad zriadenie kasína v obytnej oblasti. Jedným z hlavných faktorov v preferovaných oblastiach je aplikácia vedomého zónovania (Sequeira Lopez, 2018). Územné plánovanie sa používa ako spôsob izolácie negatívnych externalít (napr. znečistenia) mimo verejných oblastí alebo v prípade podpory produktov alebo služieb v preferovanej oblasti (Pekár J. et al, 2012). Na druhej strane zákazníci, ktorí sa riadia odporúčaniami regulátora, podporujú miestnu ekonomiku a môžu tiež spôsobiť nižší negatívny vplyv na životné prostredie.

2 PRIESTOROVÁ HRA S REGULÁCIOU URČITÉHO UZLA

Analyzovaná hra je založená na (Sequeira Lopez & Čičková, 2018), ako aj nasledujúcich predpokladoch: Nech $N = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina zákazníkov a nech je daný konečný prieběžne orientovaný graf s hraničnými hodnotami $G = (V, H)$, kde V predstavuje neprázdnu množinu n prvkov uzlov grafu a $H \subset V \times V$ predstavuje množinu hrán $h_{ij} = (v_i, v_j)$ od uzla v_i k uzlu v_j , pričom každej orientovanej hrane h_{ij} je priradené reálne číslo $o(h_{ij})$, ktoré sa označuje ako ocenenie alebo hodnota hry h_{ij} . Priestorová hra je formulovaná v ohodnotenom grafe $\bar{G} = (V, \bar{H})$ s rovnakou množinou uzlov ako na graf G , kde \bar{H} je množina hrán medzi každou dvojicou uzlov v_i a v_j , pričom ich ocenenie je rovné minimálnej cene medzi uzlami v_i a v_j v pôvodnom grafe, $i, j \in V$. V kladnom prípade predpokladáme, že $o(h_{ij}) = d_{ij}$ kde d_{ij} predstavuje minimálnu vzdialenosť (najkratšiu dĺžku cesty) medzi uzlami v_i a v_j , potom matica $D_{n \times n} = \{d_{ij}\}$ je matica najkratších vzdialeností.

Predpokladajme, že existujú dve spoločnosti (hráči) $P = \{1, 2\}$, ktoré ponúkajú homogénny produkt (tovar alebo službu) a tieto spoločnosti majú možnosť umiestniť svoje pobočky v jednom z uzlov, to znamená v akomkoľvek prvku množiny $V = \{1, 2, \dots, n\}$, ktoré sú zároveň sídlom zákazníkov. Uvažujeme o konštantnom (jednotkovom) dopyte v každom uzle. Hoci obaja hráči ponúkajú identický produkt v neobmedzenom množstve, cena produktov je odlišná. Označme $p^{(1)}$ cenu produktu hráča 1 a $p^{(2)}$ cenu produktu hráča 2. Neuvažujeme o žiadnych obmedzeniach kapacity, každý zákazník si môže kúpiť produkt ktorejkoľvek spoločnosti. Predpokladáme tiež, že zákazník vždy uskutočňuje nákup, to znamená, že neuvažujeme o stratenom dopyte.

Zásahy regulátora alebo externej entity budeme chápať ako každú zmenu v hre, ktorá nebola spôsobená priamo konaním hráčov.

Do predchádzajúcich predpokladov treba doplniť povahu a správanie sa regulátora a jeho preferencie. Regulátor svojou preferenciou ovplyvňuje správanie sa zákazníka tým, že určí uzol ($l \in V$), ktorý definujeme ako nežiaduci uzol, v ktorom sa regulátor snaží zakázať aktivity hráčov v grafe $G = (V, H)$. Ide teda o uzol, v ktorom je z pohľadu regulátora vybudovanie prevádzky nežiaduce.

Uvažujme, že cena bude zahŕňať pokutu alebo inú formu zaťažujúcej sankcie. Uvedená sankcia bude mať vplyv na maticu platieb obidvoch hráčov. Tým, že cena bude zvýšená v uzle l o pokutu, rozhodnutie hráčov v hre sa zmení, lebo toto zvýšenie sa priamo prejaví v nákladoch spotrebiteľa. Nech výška pokuty je označená ako $s \in \mathbb{R}^+$.

Potom možno maticu nákladov pre hráča 1 definovať na základe (Sequeira Lopez & Čičková, 2018) ako $N^{(1)} = \{n_{ij}^{(1)}\}, i, j = 1, 2, \dots, n, i, j \neq 1$, pričom prvky matice sú definované nasledovne:

$$n_{ij}^{(1)} = t * d_{ij} + p^{(1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

a pre $j = l$ prvky matice $N^{(1)}$ určíme ako $N^{(1)} = \{n_{il}^{(1)}\}, i, l = 1, 2, \dots, n, i \neq l$, pričom prvky matice sú definované nasledovne:

$$n_{il}^{(1)} = t * d_{il} + p^{(1)} + s, \quad i, l = 1, 2, \dots, n \text{ a } s \in R^+ \quad (5)$$

Analogicky pre hráča 2 definujeme maticu nákladov $N^{(2)} = \{n_{ij}^{(2)}\}, i, j = 1, 2, \dots, n, j \neq l$, pričom prvky matice sú definované nasledovne:

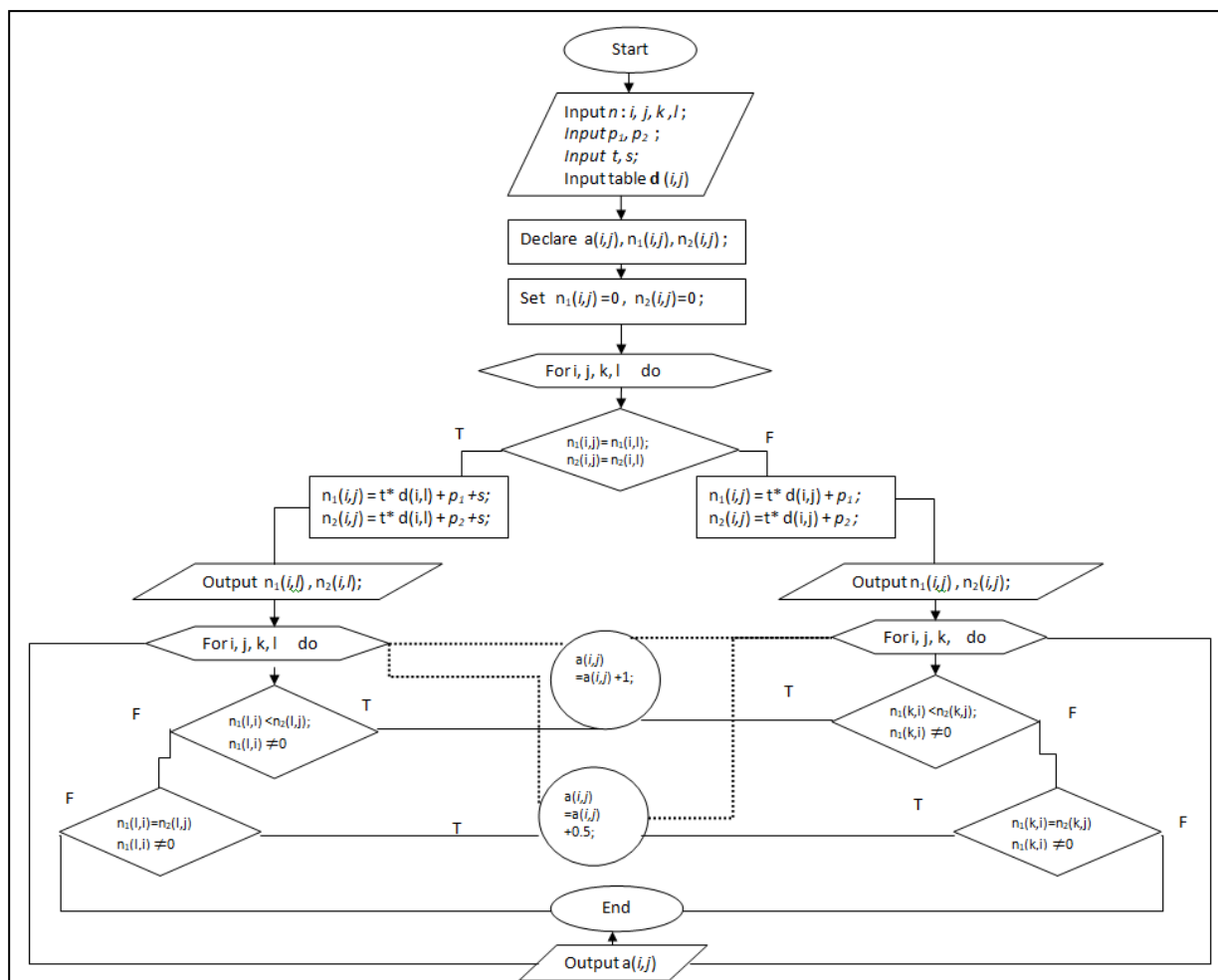
$$n_{ij}^{(2)} = t * d_{ij} + p^{(2)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

a pre $j = l$ prvky matice $N^{(2)}$ určíme ako $N^{(2)} = \{n_{il}^{(2)}\}, i, l = 1, 2, \dots, n, i \neq l$, pričom prvky matice sú definované nasledovne:

$$n_{il}^{(2)} = t * d_{il} + p^{(2)} + s, \quad i, l = 1, 2, \dots, n \text{ a } s \in R^+ \quad (6)$$

Matica (5) a (6) berie do úvahy celkové dopravné náklady od i –teho zákazníka k príslušnej spoločnosti, nákupnú cenu produktu, ako aj zásah regulátora, to znamená zvýšenie ceny o s . V prípade, že sa spoločnosť nachádza v uzle j alebo l tak bude znamenať celkové dopravné náklady od i –teho zákazníka k j respektíve l spoločnosti.

Ďalej predpokladáme nasledujúce: Ak hráč 1 umiestni svoju prevádzku v j -tom uzle, získa zákazníka z i -teho uzla, len ak $n_{ij}^{(1)} < n_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, respektíve ak $n_{il}^{(1)} < n_{il}^{(2)}$, $i, l = 1, 2, \dots, n$, ak $n_{ij}^{(1)} = n_{ij}^{(2)}$ alebo $n_{il}^{(1)} = n_{il}^{(2)}$, hráči si rozdelia dopyt rovnakým dielom; v opačnom prípade zákazník z i –teho uzla bude obslužený hráčom 2. Potom možno určiť prvky matice platieb hráča 1 (**A**), ktoré vyjadrujú počet obsadených uzlov. Celý tento proces možno charakterizovať nasledujúcim vývojovým diagramom:



Zdroj: Vlastné spracovanie

Z vývojového diagramu vyplýva, že je potrebné overiť podmienku, na základe ktorej uzol j , ($j \in V$) bude rovný uzlu l , ($l \in V$), lebo v prípade tohto uzla budú náklady zvýšené o sankciu s , $s \in \mathbb{R}^+$. Podmienky pre uzol l , ($l \in V$) možno vyjadriť deklarovaným parametrom, ktorý bude ovplyvniť rovnice $n_1(i, j)$ a $n_2(i, j)$, to znamená rovnice celkových nákladov, a to minimálne o parameter s , $s \in \mathbb{R}^+$.

V slučke (loop) ide o rovnaké podmienky pre n_1 a n_2 , ako sú uvedené v (Sequeira Lopez & Čičková, 2018), ale navyše pridáva podmienku v prípade vzdialenosti od i -teho zákazníka do l -teho uzla pre tieto matice. Výsledkom bude matica platieb prvého hráča \mathbf{A} .

Je zrejmé, že uvedený scenár môže byť opačný, ak zámerom regulátora nie je obmedzenie, ale naopak podpora určitej oblasti. V tomto prípade by regulátor neuválil sankciu na vybraný uzol, ale formou určitej subvencie by napríklad pokryl časť nákladov.

Uvedený model možno rozšíriť doplnením ďalších parametrov, napríklad zohľadnením rôzneho dopytu v jednotlivých uzloch. Základné východiská budú rovnaké ako v predchádzajúcom modeli, ale predpoklad bude rozšírený o rôznu úroveň dopytu – každý uzol má v skutočnosti rôznu váhu a táto váha je daná tým, že v každom uzle býva rôzny počet obyvateľov a veľkosť uzla je rôzna v závislosti od počtu obyvateľov alebo počtu návštevníkov. Rôzne rozšírenia základného modelu sú predmetom ďalšieho skúmania autora.

Na matematické riešenie môže byť použitý profesionálny softvér GAMS, ktorý patrí medzi výkonné optimalizačné výpočtové prostredia. Výpočet konkrétneho príkladu z dôvodu

rozsahu v tomto príspevku neuvádzame, ale bude predmetom ďalších prác autora zaoberajúcich sa problematikou teórie hier v modeloch priestorovej konkurencie.

3 ZÁVER

Teóriu hier je možné použiť na riešenie špecifických problémov priestorovej konkurencie. Príspevok je zameraný na špecifický prípad, keď je do hry zapojený regulačný subjekt. Proces hry je znázornený prostredníctvom vývojového diagramu, ktorý znázorňuje situáciu, kedy regulátor ovplyvňuje cenu produktu alebo služby prostredníctvom vyrubenia sankcie. Problém je formulovaný pre duopol na strane ponuky. Predajcovia rozhodujú o umiestnení svojej prevádzky a zároveň sa snažia rešpektovať správanie kupujúcich, ktorí minimalizujú náklady spojené s cenou a prepravnými nákladmi. Kupujúci reagujú na stratégiu regulačného subjektu; v tomto prípade aj predajcovia sú povinní to nasledovať.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0351/17 Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov na Slovensku.

Použitá literatúra

1. ČÍČKOVÁ, Zuzana a Allan Jose SEQUEIRA LOPEZ. Rozhodovanie duopolistických firiem na trhu a väzňova dilema: Decision making of duopoly in the market and the prisoner's dilemma. Využitie kvantitatívnych metód vo vedecko-výskumnej činnosti a v praxi XII: zborník zo seminára: 14. - 16. jún 2017, Račkova dolina. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2017, , 5-9. ISBN 978-80-225-4392-7.
2. FENDEK, Michal a Eleonora FENDEKOVÁ. Mikroekonomická analýza. Bratislava: Iura Edition, 2008, 575 s. Ekonómia. ISBN 978-80-8078-180-4.
3. GOGA, Marián. Teória hier. Bratislava: Iura Edition, člen skupiny Wolters Kluwer, 2013, 144 s. [7,2 AH]. Ekonómia = 467. ISBN 978-80-8078-613-7.
4. Hotelling, H. 1929. Stability in Competition. s.l. : The Economic Journal, 1929.
5. SEQUEIRA LOPEZ, Allan Jose a Zuzana ČÍČKOVÁ. Price Policy in Games in Spatial Competition. Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XIX: Proceedings of the International Scientific Conference: 23rd May - 25th May 2018, Trenčianske Teplice, Slovakia. Bratislava: Letra Edu, 2018, , 313-319. ISBN 978-80-89962-07-5.
6. SEQUEIRA LOPEZ, Allan Jose. Zónovanie v hraničnom asymetrickom meste: Zoning in a Cross Border Asymmetrical City. AIESA – Budovanie spoločnosti založenej na vedomostiach: recenzovaný zborník - 18. medzinárodná vedecká konferencia organizovaná Fakultou hospodárskej informatiky EU v Bratislave a Slovenskou spoločnosťou pre hospodársku informatiku, 25.–26. október 2018, Bratislava. Bratislava: Letra Edu, 2018, , 475-481. ISBN 978-80-89962-14-3.

Kontaktné údaje

Ing. Allan Jose Sequeira Lopez.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: allan.lopez@euba.sk

APLIKACE MARKOVOVÝCH ŘETĚZCŮ - PRAKTICKÝ PŘÍKLAD: PLÁNOVÁNÍ LIDSKÝCH ZDROJŮ

MARKET CHAIN APPLICATION - PRACTICAL EXAMPLE: HUMAN RESOURCES PLANNING

Milan Svoboda

Abstrakt

Príspevek se zabývá aplikací kvantitativních metod v oblasti řízení lidských zdrojů v organizaci. Zaměřuje se na využití absorpčních Markovových řetězců a jejich aplikací pro řešení praktické úlohy, což je ilustrováno na konkrétním příkladu. Uvedený příklad může posloužit čtenářům z okruhu akademické obce jako rozšiřující materiál pro výuku a studentům ukázat, že tyto metody mohou mít i praktické využití.

***Klíčová slova:** Kvantitativní management, absorpční Markovův řetězec*

Abstract

The paper deals with the application of quantitative methods in the area of human resources management in an organization. It is focuses on the use of absorption Markov chains and their applications for solving practical problems, which is illustrated on a concrete example. This example can be used by readers from the academic community as an expanding material for teaching, and can show students that these methods have a practical use.

***Keywords:** Quantitative management, absorption Markov chain*

1 ÚVOD

Při výuce předmětů zabývajících se matematickým modelováním v podnikovém řízení, ať už předměty mají jakýkoliv název, např. stochastické modely, kvantitativní management či manažerské modelování, se setkáváme velmi často s nezájmem studentů o tyto předměty. Jednou z příčin tohoto nezájmu bývají pochybnosti o praktické využitelnosti těchto metod v praxi. Velmi často je od studentů slyšet otázka: “A k čemu mi to bude?” Jednou z možností jak zvýšit zájem o tyto předměty, je vysvětlovat učivo na příkladech, které se co nejvíce přibližují realitě. Cílem tohoto příspěvku je nabídnout čtenářům z řad akademické obce praktický příklad na využití absorpčních Markovových řetězců.

Jedním z takových “reálných problémů“ může být následující úloha. Armáda bude za dva roky potřebovat 500 vojáků do nově vznikajícího útvaru speciálních sil. Aby mohl být voják do útvaru zařazen, musí projít náročným dvouletým výcvikem, který je složen ze 4 dílčích kurzů (modulů, semestrů). Na závěr každého kurzu musí voják složit zkoušku. V případě, že u zkoušky neuspěje, je voják z výcviku vyřazen a dále již nepokračuje. Dlouhodobým sledováním se zjistilo, že úspěšnost u zkoušek v jednotlivých kurzech je, po řadě, následující: 80 %, 60 %, 70 %, 90 %. Náklady na výcvik jednoho vojáka v jednom kurzu činí 80 pj (peněžních jednotek). Rozhodněte, kolik vojáků musí být zařazeno do výcviku, aby s 90% pravděpodobností měla armáda za dva roky požadovaný počet vojáků. S jakými náklady na výcvik vojáků v příštích dvou letech musí armáda počítat?

2 TEORETICKÉ MINIMUM

Průchod výcvikem lze modelovat s využitím Markovových řetězců. Markovovy řetězce (MŘ) jsou nejjednodušším typem Markovových procesů. Teorie Markovových řetězců je v literatuře velmi dobře popsána, čtenářům lze doporučit např. Lukáš (2009) nebo Kořenář (2010). MŘ se používají pro modelování stochastických procesů, které se mohou nacházet v jednom z konečného počtu stavů v diskrétních časových okamžicích. MŘ rozumíme posloupnost diskrétních náhodných proměnných X_1, X_2, X_3, \dots , mající Markovovu vlastnost, kterou můžeme formálně popsat následovně:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

Jinými slovy řečeno, MŘ je náhodný proces s diskrétní množinou stavů, diskrétním časem a takový, že pravděpodobnost $p_i(n)$, že v časovém okamžiku t_n bude proces ve stavu i , je stochasticky závislá pouze na stavu v předchozím okamžiku (řetězce nemají paměť), tj. na stavu v čase t_{n-1} . Jednotlivé realizace x_i jsou prvky spočetné množiny $S = \{s_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, kterou nazýváme stavový prostor.

Chování výše popsaného procesu je určeno:

- vektorem absolutních pravděpodobností $p(n)^T = [p_1(n), p_2(n), \dots, p_N(n)]$, kde T značí transpozici. Pro $n = 0, 1, 2, \dots$, značí $p_i(n)$ pravděpodobnost, že proces je v okamžiku n ve stavu i .
- maticí podmíněných pravděpodobností přechodů \mathbf{P} , jejíž jednotlivé prvky p_{ij} udávají podmíněnou pravděpodobnost přechodu procesu ze stavu i do stavu j , což můžeme formálně zapsat $p_{ij} = P(X_n = s_j | X_{n-1} = s_i)$, kde $i = 1, 2, \dots, N$ a $j = 1, 2, \dots, N$.

Známe-li pravděpodobnost výskytu jednotlivých stavů v okamžiku, kdy proces začíná, můžeme popsat chování procesu pomocí následujícího vztahu:

$$p^T(n) = p^T(n-1)\mathbf{P}$$

Podle vzájemné dosažitelnosti mezi dvěma různými stavy rozlišujeme řetězce regulární a absorpční. Pro modelování naší úlohy využijeme absorpční řetězce.

2.1 Absorpční řetězce

Absorpčními řetězci nazýváme takové MŘ, ve kterých se vyskytují jen přechodné a absorpční stavy. Absorpční stav je takový, u něhož pravděpodobnost setrvání v daném stavu je rovna jedné. Tedy stav nelze opustit. Přechodné stavy jsou takové, že se z nich lze dostat do stavů, ze kterých se už nelze dostat zpět.

U absorpčních řetězců řadíme stavy v matici pravděpodobností přechodu tak, abychom získali v matici pravděpodobnosti přechodu následující submatice:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

Je-li celkový počet stavů N a počet přechodných stavů p , potom jednotková submatice \mathbf{I} pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými absorpčními stavy má rozměr $(N-p) \cdot (N-p)$. Submatice \mathbf{Q} udává pravděpodobnosti přechodu mezi přechodnými stavy a má rozměr $p \cdot p$ a submatice \mathbf{R} udává pravděpodobnosti přechodu z přechodných stavů do absorpčních a má rozměr $p \cdot (N-p)$. Pro úplnost dodejme, že $\mathbf{0}$ je nulová matice o rozměrech $(N-p) \cdot p$ udávající pravděpodobnosti přechodu z absorpčních stavů do přechodných stavů.

U absorpčních řetězců obvykle sledujeme střední počet průchodů přechodnými stavy a pravděpodobnosti přechodu do absorpčních stavů. Střední počet průchodů přechodnými stavy udává fundamentální matice \mathbf{N} , kterou určíme dle následujícího vztahu:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

Pravděpodobnosti přechodu do absorpčních stavů udává matice \mathbf{B} , kterou určíme dle následující vztahu:

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR}$$

3 SESTAVENÍ MODELU A ŘEŠENÍ

Proces průchodu výcvikem lze modelovat absorpčním Markovským řetězcem. V modelu se vyskytují čtyři přechodné stavy: s_1 - voják nastoupil do prvního kurzu, s_2 - voják nastoupil do druhého kurzu, s_3 - voják nastoupil do třetího kurzu, s_4 - voják nastoupil do čtvrtého kurzu. V modelu máme dva absorpční stavy: s_5 - voják byl z výcviku vyřazen (neudělal zkoušku na konci nějakého kurzu) a stav s_6 - voják úspěšně prošel výcvikem a může být zařazen do speciálních sil.

Matice podmíněných pravděpodobností přechodu \mathbf{P} a její submatice \mathbf{B} a \mathbf{Q} pak obsahují následující prvky:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} s_5 \\ s_6 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

K provedení výpočtů postačuje běžně dostupný tabulkový kalkulátor MS Excel. K výpočtům použijeme maticové vzorce INVERZE (vrátí matici inverzní k matici obsažené v argumentu matice) a SOUČIN.MATIC (vrátí součin dvou matic). Podrobnější popis vzorců lze nalézt např. v Brož a Bezvoda (2011). Fundamentální matice, počítaná dle výše uvedeného vztahu, má prvky:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,48 & 0,336 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0,42 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvky matice \mathbf{N} interpretujeme následovně. První řádka matice nám říká, že pokud je voják na začátku výcviku, s 80% pravděpodobností se dostane do druhého kurzu, se 48% pravděpodobností se dostane do třetího kurzu a s 33,6% pravděpodobností postoupí i do čtvrtého kurzu. Dále spočítáme matici \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,48 & 0,336 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0,42 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6976 & 0,3024 \\ 0,6220 & 0,3780 \\ 0,3700 & 0,6300 \\ 0,1000 & 0,9000 \end{bmatrix}$$

Matice **B** popisuje úspěšnost vojáků při výcviku. Je-li voják na začátku výcviku (nastoupil do prvního kurzu), s pravděpodobností 0,6976 výcvik nedokončí, tj. nějakou ze čtyř zkoušek, které ho postupně čekají, neudělá. Naopak s pravděpodobností 0,3024 všechny zkoušky úspěšně splní a může nastoupit ke speciálním silám. Pokud je už voják v druhém kurzu, tj. má za sebou úspěšně první kurz, potom s pravděpodobností 0,6220 výcvik nedokončí a s pravděpodobností 0,3780 výcvik úspěšně dokončí. Obdobně lze interpretovat i zbývající řádky matice.

Pravděpodobnost, že voják, který nastoupí do výcviku, ho úspěšně dokončí, je tedy 0,3024. Pravděpodobnost, že z n vojáků zařazených do výcviku, ho úspěšně dokončí právě x , se řídí binomickým rozdělením. My hledáme takové n , pro které platí, že pravděpodobnost, že x bude větší nebo rovno 500, je 90%. Pro vlastní výpočet je vhodnější tento požadavek vyjádřit přes doplněk pravděpodobnosti, tedy, aby pravděpodobnost, že x bude menší než 500, byla méně než deset procent. Což můžeme zapsat:

$$P(x < 500) = \sum_{x=0}^{499} \binom{n}{x} \cdot 0,3024^x \cdot 0,6976^{n-x} < 0,1$$

Tuto úlohu s neznámou n , můžeme vyřešit v MS Excel s využitím funkce BINOM.DIST (funkce vrací hodnotu distribuční funkce pro binomické rozdělení) a nástroje HLEDÁNÍ ŘEŠENÍ (numericky spočítá hodnotu vstupu pro požadovaný výstup). S využitím výše uvedeného získáme řešení: $n = 1\,736$. Tedy pokud armáda s 90% pravděpodobností chce mít za dva roky k dispozici minimálně 500 vycvičených vojáků, musí jich do výcviku nyní zařadit 1 736.

K nalezení n můžeme alternativně využít aproximaci binomického rozdělení normálním rozdělením. Je-li n dostatečně velké (je-li splněna podmínka: $np(1-p) > 9$), je možné binomické rozdělení $Bi[n;p]$ aproximovat normálním rozdělením $N[np;np(1-p)]$. Potom platí:

$$\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = 0,1 \text{ což vede k rovnici } \frac{500-0,3024n}{\sqrt{n \cdot 0,3024 \cdot 0,6976}} = -1,2815 \text{ a odtud } n = 1734,5.$$

Nyní už můžeme určit očekávané náklady, které armáda během příštích dvou let bude muset vynaložit. Očekávané počty vojáků v jednotlivých kurzech získáme pronásobením počtu vojáků zařazených do výcviku pravděpodobnostmi z prvního řádku fundamentální matice. Pak v prvním kurzu bude 1 736 vojáků; ve druhém lze očekávat 1 388,8 vojáků, ve třetím 833,28 a ve čtvrtém 583,296. Očekávané náklady na výcvik tedy budou:

$$\text{očekávané náklady} = 1736(1+0,8+0,48+0,336) \cdot 80 \text{ pj} = 363310 \text{ pj}$$

Dodejme, že v průměru z 1 736 vojáků zařazených do výcviku, by výcvik mělo úspěšně dokončit 525 vojáků.

4 ZÁVĚR

Tento příklad se autorovi osvědčil při výkladu absorpčních MŘ. Kromě využití při výkladu MŘ může úloha posloužit též k zopakování, obvykle již zapomenutého, učiva ze základního kurzu statistiky (binomické rozdělení a jeho aproximace normálním rozdělením). Úlohu lze modifikovat například změnou počtu kurzů, změnou pravděpodobností úspěchu. Dá se i rozšířit o další část, například tím, že jednotlivé kurzy budou mít rozdílné kurzovné a pořadí, v jakém je možno kurzy absolvovat, je libovolné (žádný kurz není podmíněn splněním

jiného). Úkolem potom je, vedle stanovení počtu zařazených účastníků, i volba takového pořadí kurzů, aby náklady byly co nejmenší.

Použitá literatura

1. KOŘENÁŘ, V. 2010. Stochastické procesy. Vysoká škola ekonomická v Praze Nakladatelství Oeconomica. ISBN 978-80-245-1646-2 .
2. LUKÁŠ, L. 2009. Pravděpodobnostní modely v managementu: Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy. Academia, Praha. ISBN978-80-200-1704-8
3. BROŽ, M., BEZVODA, V. 2011. Microsoft Excel 2007/2010 vzorce, funkce, výpočty. Computer Press, a.s. Brno. ISBN 978-80-251-3267-8

Kontaktné údaje:

Ing. Mgr. Milan Svoboda, Ph.D.
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta ekonomická
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
Tel: +420 733 789 099
email: svobodm@kem.zcu.cz

MINIMÁLNA MZDA¹

MINIMUM WAGE

Karol Szomolányi

Abstrakt

Minimálna mzda nie je nástroj sociálnej politiky. Z chudobných nekvalifikovaných zamestnancov robí nezamestnaných. Ak sa nízkoprijmovým zamestnancom zvýši mzda na zákonom požadovanú hodnotu, zvýši sa aj ich očakávané pracovné nasadenie a pracovný stres. Štatistiky vykazujúce zvýšenie priemernej mzdy efektom zvýšenia alebo zavedenia minimálnej mzdy nevypovedajú o všeobecnom zvýšení kúpnej sily ani o zvýšení blahobytu obyvateľstva. Priemerné mzdy rastú, lebo ľudia s najnižšími mzdami sa stanú nezamestnaní a ďalšej skupine zamestnancov sa mzda zvýši na zákonom požadovanú hodnotu. Tá však nie je zadarmo, jej cenou je väčší pracovný stres a preto nemožno jednoznačne tvrdiť o zvýšení blahobytu tejto skupiny zamestnancov.

KLúčové slová: minimálna mzda, produktivita, nezamestnanosť, trh práce

Abstract

Minimum wage is not a social policy tool. It makes unemployed from poor low-skilled employees. If wages of low-wage employees increase to the required legal value, their expected working effort and work-related stress will also increase. Statistics showing an increase in the average wage by the effect of raising or introducing a minimum wage do not indicate a general increase in purchasing power or an increase in the welfare of the population. Average wages are rising because people with the lowest wages will become unemployed and wages of another group of employees will increase to the required value. However, it is not free, its cost is greater work stress and therefore we cannot claim unequivocally that welfare of this employed group is increasing.

Keywords: minimum wage, productivity, labour market

1 ÚVOD

Aký je zmysel minimálnej mzdy? Odpovedať na túto otázku nie je jednoduché. Jej zmysel, poslanie alebo cieľ nie je upravený zákonom (Zákon o minimálnej mzde 663/2007 Z.z.). Podľa najlepšieho vedomia autora tejto práce, nepoznáme teoretické zdôvodnenie existencie minimálnej mzdy. Prvoplánová odpoveď môže byť, že minimálna mzda slúži ako nástroj sociálnej politiky. Ak existuje zákonom garantovaný minimálny príjem, najchudobnejší zamestnanci si polepšia. Podobnú argumentáciu využívajú ľavicové politické sily, ktoré v súčasnosti na Slovensku vytvárajú nemalý tlak na zvýšenie hodnoty minimálnej mzdy. Takéto uvažovanie možno podporiť skutočnosťou, že zvyšovanie minimálnej mzdy spôsobuje zvyšovanie priemernej mzdy a nie vo všetkých prípadoch bolo namerané zníženie nezamestnanosti.

¹ Tento článok vznikol s podporou projektu VEGA č. 1/0294/18, „Analýza krátkodobej a dlhodobej dynamiky ekonomického vývoja európskych postkomunistických krajín a ich regiónov“.

Avšak prihladnuc na ekonomickú teóriu tvorby mzdovej sadzby, táto motivácia zavedenia, udržiavania a zvyšovania minimálnej mzdy je, ako ukážeme v tejto práci, problémová. Ak zavedenie alebo zvýšenie minimálnej mzdy nie je priamo sprevádzané zvýšením nezamestnanosti najmenej kvalifikovaných ekonomicky aktívnych ľudí, prejaví sa ich odchodom z úhrnnej pracovnej sily. Zvýšenie priemernej mzdy preto neznamená zvýšenie kúpnej sily a blahobytu obyvateľstva. Aj keď sa niektorým zamestnancom zvýši mzda na hodnotu novej minimálnej mzdy, ich zamestnávateľa sa snažia svoje straty spôsobené vyššími pracovnými nákladmi kompenzovať na zamestnancoch inak. Preto nemožno jednoznačne konštatovať, že zavedenie alebo zvýšenie minimálnej mzdy pomôže zvýšiť blahobyť aspoň tejto skupine zamestnancov. Zvýši sa im síce príjem z práce, ale na druhej strane sa im zvýši aj stres v práci. Neprekvapí, že v ekonomickej histórii vo svete existovali aj iné ako sociálne motívy pre vznik minimálnej mzdy.

Aby sme pochopili účinky zavedenia alebo zvýšenia minimálnej mzdy, potrebujeme pochopiť spôsob, akým sa tvoria mzdy. Zameriame sa na súčasnú prevládajúcu teóriu vymedzujúcu vzťahy na pracovnom trhu. Využitím modelu možno vysloviť dôležité predpoklady správania na trhu práce po zavedení alebo zvýšení minimálnej mzdy, ktoré konfrontujeme s empirickými pozorovaniami.

2 MODEL TVORBY MZDOVEJ SADZBY

Iste existuje množstvo ekonomických teórií tvorby miezd na trhu práce. V súčasnosti možno považovať za hlavný teoretický prúd Diamondov-Mortensenov-Pisaridesov DMP model pomenovaný podľa laureátov Nobelovej ceny v roku 2010 (Mortensen a Pisarides, 1994). Uvažujeme zjednodušenú učebnicovú verziu modelu (Williamson, 2017). Pre zjednodušenie neuvažujeme nezamestnaneckú podporu. Podľa teórie existuje konečný počet voľných miest vytvorených firmami a konečný počet uchádzačov o prácu (počet uchádzačov budeme označovať symbolom N). Problém hľadania práce je spojiť každé voľné miesto jedným zamestnancom. Pre naše účely nepotrebujeme zísť do detailov tohto problému, viac sa zameriame na spôsob, ako uzavrú firma a uchádzač o prácu pracovnú dohodu, ktorej súčasťou je aj dohodnutá mzda. Ak firma nájde zamestnanca i , ($i = 1 \dots N$) pre voľné pracovné miesto, ich spoločný zisk (produktivita zamestnanca i) je z_i . Podľa teórie dohody, ktorú rozpracoval ďalší laureát Nobelovej ceny John Nash (Nash, 1950), o spoločný zisk sa podelia firma, ktorá ponúkla pracovné miesto (a kapitál k nemu) a zamestnanec, ktorý ponúkol svoju prácu. Spôsob, akým sa podelia závisí od trhového postavenia firmy a zamestnanca i . Čím dominantnejšie je postavenie zamestnanca, tým väčšiu časť zo spoločného zisku mu firma zaplatí v podobe miezd. Silu zamestnanca i možno vyjadriť premennou a_i , $0 < a_i < 1$, potom mzda zamestnanca i je $w_i = a_i \cdot z_i$, pre všetky $i = 1 \dots N$. Zisk firmy z naplneného pracovného miesta i po odčítaní pracovných nákladov je $(1 - a_i) \cdot z_i$.

Čo predpovedá model, ak vláda zavedie minimálnu mzdu? Výška mzdy zamestnanca i závisí od jeho produktivity na danom pracovnom mieste z_i a od jeho trhovej sily a_i . Zavedením minimálnej mzdy sa nezmení produktivita ani trhové postavenie zamestnanca. Podľa efektu zavedenia minimálnej mzdy možno zamestnancov rozdeliť do troch kategórií N_I , N_{II} , a N_{III} .

- I. Pre všetkých zamestnancov N_I , ktorých súčasná hodnota mzdy je vyššia ako minimálna mzda, t.j. $w_i > b$ sa nezmení nič, kde b je hodnota minimálnej mzdy, $i \in N_I$.
- II. Minimálna mzda negatívne zasiahne zamestnancov N_{II} , ktorých produktivita na danom pracovnom mieste je nižšia ako minimálna mzda, t.j. $z_i < b$, kde $i \in N_{II}$. Spoločný zisk firmy a zamestnanca nestačí na vyplatenie minimálnej mzdy, preto model predpokladá, že títo zamestnanci budú prepustení – stanú sa nezamestnaní.

- III. Posledná kategória zamestnancov N_{III} sú tí, ktorých aktuálna mzda je menšia ako minimálna mzda, ale na druhej strane ich produktivita je vyššia, t.j. $w_{it} > b \wedge z_i > b$, kde indexom t označujeme obdobie pred zavedením minimálnej mzdy, $i \in N_{III}$. Znamená to, že spoločný zisk zamestnanca a firmy je vyšší ako minimálna mzda. Ak sa majitelia firmy dokážu uskromniť zo svojho pôvodného príjmu z daného pracovného miesta, zaplatia zamestnancovi mzdu, t.j. $w_{it+1} = b$. Nový zisk firmy z naplneného pracovného miesta bude $z_i - b$, pričom $(1 - a_i) \cdot z_i > z_i - b > 0$. Keďže napriek tomu, že zisk firmy z naplneného pracovného miesta sa zníži, stále je kladný, predpokladáme, že racionálna firma je ochotná produkovať kladný zisk a tak zamestnanca neprepustí.

3 PREDPOVEDE MODELU A EMPIRICKÉ POZOROVANIA

Ako predpovede DMP modelu zodpovedajú realite? Existencia skupiny N_{II} potvrdzuje známe teoretické aj empirické pravidlo, podľa ktorého dostatočne vysoká hodnota minimálnej mzdy spôsobí zvýšenie miery nezamestnanosti (Samuelson, 1973; Minimum Wage Commission, OECD, 1997; Neumark a Wascher, 2000). Sú to zamestnanci s najnižšou produktivitou, $z_i < b$, $i \in N_{II}$, takže ide o najmenej kvalifikovanú pracovnú silu. Tiež je realistické predpokladať, že ide o skupinu najchudobnejšieho obyvateľstva, pretože ich príjmy sú buď najnižšie (ak vláda nezavedie minimálnu mzdu), alebo žiadne (ak vláda zavedie minimálnu mzdu v hodnote b). Tento výsledok zodpovedá empirickým pozorovaniam (Kearl, 1979; Jardim et al. 2018). Vyplýva z neho, že minimálna mzda nie je efektívny sociálny nástroj vlády – jej zavedenie negatívne zasiahne tých najchudobnejších zamestnancov. Podľa nedávneho výskumu sú minimálnou mzdou postihnutí (Clemens et al. 2018b):

- nízko vzdelaní obyvatelia,
- slobodné mamičky, u ktorých je riziko častejších absencií v práci, v prípadoch ak ich deti ochorejú,
- mládež z dobre situovaných rodín, ktorá si chce privyrobiť na počítačové hry,
- mladí ľudia pochádzajúci zo znevýhodneného prostredia, ktorí potrebujú zvláštne usmernenie a zaškolenie pre prácu so zákazníkmi,
- prepustení väzni, ktorí usilujú o návrat do spoločnosti.

Pre minimálnu mzdu sa firmy snažia viac automatizovať prácu (Lordan a Neumark, 2018) alebo preniesť prácu na svojich zákazníkov – preto mizne obsluha na čerpacích staniaciach pohonných hmôt (Besker, et al. 2015). Negatívny efekt zavedenia alebo zvýšenia minimálnej mzdy je v hospodárskych krízach vyšší (Clemens et al. 2018b). Nízko-príjmoví zamestnanci sú väčšinou starší s minimálnymi možnosťami rekvalifikácie; firmy sa dlhodobo snažia zamestnať ľudí s lepšími dôkazmi o ich kvalifikácii, ako diplomy, certifikáty, odporúčenia od bývalých zamestnávateľov (Clemens et al. 2018a). To je dôvod prečo existujú prípady, keď zvýšenie minimálnej mzdy nebolo vždy sprevádzané zvýšením meranej miery nezamestnanosti. Mnohí bývalí zamestnanci opustili skupinu ekonomicky aktívnych obyvateľov a tak sa nepočítajú medzi zamestnaných. Iní hľadali možnosti privyrobiť si v tieňovej ekonomike, pracovali bez uzavretia pracovnej zmluvy alebo dohody (Gorman, 2019). Keďže jednou zo zasiahnutých skupín sú mladí z okrajovej spoločnosti, minimálna mzda je pozitívne korelovaná s kriminalitou vo veku od 16 do 24 rokov (Fone et al. 2019).

Model predpokladá, že zamestnanci v skupine N_{III} si polepšia, keďže ich mzda sa zvýši na hodnotu minimálnej mzdy. Keďže časť nízkopríjmových N_{II} zamestnancov príde o prácu, druhá časť N_{III} bude mať vyššiu mzdu, priemerná mzda zamestnancov narastie, čo je popri spomenutých prípadoch, keď zvýšenie minimálnej mzdy nebolo sprevádzané zvýšením

nameranej nezamestnanosti, ďalší štatistický paradox. Vďaka týmto štatistickým paradoxom mohol u tvorcov hospodárskej politiky mylne vzniknúť dojem, že zvyšovaním minimálnej mzdy sa všeobecne zvyšuje príjem z práce, kúpna schopnosť obyvateľstva aj blahobyt bez zmeny nezamestnanosti. Pravda je taká, že najmenej kvalifikovaní a teda aj chudobní prídu o prácu, o pravidelný príjem, ich kúpyschopnosť a blahobyt sa znížia. Minimálna mzda neslúži k prerozdeleniu bohatstva smerom od bohatých k chudobným. Minimálna mzda prerozdeľuje príjmy medzi chudobnými (Neumark et al. 1999).

Nemožno súhlasiť ani s tvrdením, že sa zvýši blahobyt zamestnancov zo skupiny N_{III} – tých, ktorým sa zvýšením alebo zavedením minimálnej mzdy zvýši mzda na zákonom požadovná úroveň. Musíme si uvedomiť, že ich trhová sila sa nezmenila – nezmenil sa vzťah medzi zamestnancom s minimálnou mzdou a zamestnávateľom, ktorý stále má dominantnejšie postavenie. Skryté nemodelové náklady minimálnej mzdy sú, že zamestnávateľa sa snažia kompenzovať zvýšené pracovné náklady (Clemens et al. 2018a,b). Tieto kompenzácie majú rôzne podoby, ako

- nepriznanie zamestnaneckých výhod, ktoré pred zavedením alebo zvýšením minimálnej mzdy zamestnávateľ zamestnancovi priznal. Takými výhodami sú dodatočné zdravotné poistenie (v USA), možnosti parkovania v zamestnaní, flexibilná pracovná doba a ďalšie,
- vyššie pracovné nároky meniace pracovné vzťahy a pracovné prostredie a
- nižšie náklady na zaškolenie a prípravu nových zamestnancov (Neumark a Wascher, 1998). Toto súvisí s vyššie uvedenou poznámkou, že firmy sa dlhodobo snažia zamestnať viac kvalifikovaných ľudí.

Za povšimnutie stojí pozorovanie pracovných vzťahov predavačiek v obchodoch po zavedení minimálnej mzdy v americkom štáte Oregon na začiatku minulého storočia (Obernauer a van der Nienburg, 1915). Podľa svedectva, pred minimálnou mzdou bol pracovný deň pre tieto zamestnankyne bez zhonu a stresov. Ak bolo treba pracovať trocha nadčas, nerobilo to pre ochotné predavačky problém. Po zavedení minimálnej mzdy však museli čeliť zvýšenému konštantnému tlaku od nadriadených, ktorí sa usilovali o také zvýšenie predaja, aby si kompenzovali zvýšené pracovné náklady spôsobené nárastom miezd.

Aká iná motivácia vedie k zavedeniu alebo zvyšovaniu minimálnej mzdy? Zdôvodnili sme, že je nesprávne považovať minimálnu mzdu za sociálny nástroj vlády. Minimálna mzda naopak spôsobí zhoršenie sociálnej situácie najchudobnejších nízko-kvalifikovaných zamestnancov. Ak sa o niečo produktívnejším zamestnancom zvýši mzdová sadzba na hodnotu minimálnej mzdy, ich trhové postavenie sa nezmení a preto zamestnávateľ môže od zamestnávateľov kompenzovať zvýšené pracovné náklady iným spôsobom. Preto neprekvapuje, že v ekonomickej histórii boli aj iné motívy pre minimálnu mzdu.

Minimálna mzda môže z trhu práce vyradiť pracujúcich zo znevýhodneného prostredia, v mnohých prípadoch ide o príslušníkov rasových menšín. Senátor a neskorší prezident USA John Fitzgerald Kennedy obhajoval minimálnu mzdu na zasadnutí senátu v roku 1957 z dôvodu ochrany bielych pracujúcich pred ich možným nahradením farebnými pracujúcimi s nižšou kvalifikáciou a nižšími platovými nárokmi (U.S. Senate, 1957). Podobne sa odborové hnutia na vyspelejšom severe USA usilujú strážiť konkurencieschopnosť severných spoločností pred južnými s nižšími pracovnými nákladmi (Henderson, 2001). Ak však juh nemôže využiť svoju komparatívnu výhodu vyplývajúcu z nízkych pracovných nákladov, spomalí sa proces konvergenencie – proces ekonomického vyrovnávania medzi chudobným juhom a bohatým západom. V 60. rokoch minulého storočia spoločnosť OTIS Elevator lobovala za minimálnu mzdu v štáte New York (USA). Táto spoločnosť vyrábala pohyblivé

schody a práve v tomto období sa zamerala na výmenu ľudsky riadených pohyblivých schodov plne automatizovanými, aké poznáme v súčasnosti (Henderson, 2001). V podobných súvislostiach možno chápať aj petície niektorých amerických firiem za ďalšie zvyšovanie minimálnej mzdy v USA v roku 2009 (Rampell, 2009).

4 ZÁVER

Minimálna mzda nie je nástroj sociálnej politiky. Z chudobných nekvalifikovaných zamestnancov robí nezamestnaných. Ak sa nízkopríjmovým zamestnancom zvýši mzda na zákonom požadovanú hodnotu, zvýši sa aj ich očakávané pracovné nasadenie a pracovný stres. Štatistiky vykazujúce zvýšenie priemernej mzdy efektom zvýšenia alebo zavedenia minimálnej mzdy nevypovedajú o všeobecnom zvýšení kúpnej sily ani o zvýšení blahobytu obyvateľstva. Priemerné mzdy rastú, lebo ľudia s najnižšími mzdami sa stanú nezamestnaní a ďalšej skupine zamestnancov sa mzda zvýši na zákonom požadovanú hodnotu. Tá však nie je zadarmo, jej cenou je väčší pracovný stres a preto nemožno jednoznačne tvrdiť o zvýšení blahobytu tejto skupiny zamestnancov.

Zo slovenského pohľadu sa môžu efektom ďalšieho zvyšovania minimálnej mzdy prehlbovať rozdiely medzi chudobnými a bohatými, ekonomické rozdiely medzi bohatou Bratislavou a zvyšnými regiónmi, ekonomické zaostávanie rómskej menšiny. Prípadné zavedenie celoeurópskej minimálnej mzdy parametrizované na priemernú európsku mzdu môže spomaliť proces konvergencie v EÚ, proces vyrovnávania ekonomických rozdielov medzi vyspelým západom a postkomunistickými krajinami a tiež medzi juhom a severom. Tieto efekty sú silnejšie v ekonomických krízach, keď produktivita chudobných a nízko kvalifikovaných ľudí klesne pod úroveň minimálnej mzdy.

Použitá literatúra

1. Basker E., Foster L., Klimek S.D. 2015. Customer-Labor Substitution: Evidence from Gasoline Stations. SSRN Journal [Internet] 2015 [cited 2019 May 28]; Available from: <http://www.ssrn.com/abstract=2705494>
2. Clemens J., Kahn L.B., Meer J. 2018a. Dropouts Need Not Apply: The Minimum Wage and Skill Upgrading. 51.
3. Clemens J, Kahn L, Meer J. 2018b. The Minimum Wage, Fringe Benefits, and Worker Welfare [Internet]. Cambridge, MA: National Bureau of Economic Research; 2018 [cited 2019 May 28]. Available from: <http://www.nber.org/papers/w24635.pdf>
4. Fone Z.S., Sabia J.J., Cesur R. 2019. Do Minimum Wage Increases Reduce Crime? [Internet]. National Bureau of Economic Research; 2019 [cited 2019 May 28]. Available from: <http://www.nber.org/papers/w25647>
5. Gorman L. 2019. Minimum Wages [Internet]. Econlib [cited 2019 May 29]; Available from: <https://www.econlib.org/library/Enc/MinimumWages.html>
6. Henderson D.R. 2001. The Joy of Freedom: An Economist's Odyssey. 1st edition. London : New York: Financial Times Management; 2001.
7. Jardim E., Long M.C., Plotnick R., van Inwegen E., Vigdor J., Wething H. 2018. Minimum Wage Increases and Individual Employment Trajectories [Internet]. National Bureau of Economic Research; 2018 [cited 2019 May 28]. Available from: <http://www.nber.org/papers/w25182>
8. Kearn J.R., Pope C.L., Whiting G.C., Wimmer L.T. 1979. A Confusion of

- Economists? The American Economic Review, roč. 69, 1979, s. 28–37.
9. Lordan G., Neumark D. 2017. People Versus Machines: The Impact of Minimum Wages on Automatable Jobs [Internet]. National Bureau of Economic Research; 2017 [cited 2019 May 28]. Available from: <http://www.nber.org/papers/w23667>
 10. Mortensen D.T., Pissarides C.A. 1994. Job Creation and Job Destruction in the Theory of Unemployment. The Review of Economic Studies roč. 61, 1994, s. 397–415.
 11. Nash J.F. 1950. The Bargaining Problem. Econometrica roč. 18, 1950, s.155–62.
 12. Neumark D, Schweitzer ME, Wascher W. 1999. Will Increasing the Minimum Wage Help the Poor? Economic Commentary [Internet] 1999 [cited 2019 May 29];Available from: <https://www.clevelandfed.org/newsroom-and-events/publications/economic-commentary/economic-commentary-archives/1999-economic-commentaries/ec-19990201-will-increasing-the-minimum-wage-help-the-poor>
 13. Neumark D., Wascher W. 1998. Minimum Wages and Training Revisited [Internet]. National Bureau of Economic Research; 1998 [cited 2019 May 28]. Available from: <http://www.nber.org/papers/w6651>
 14. Neumark D., Wascher W. 2000. Minimum Wages and Employment: A Case Study of the Fast-Food Industry in New Jersey and Pennsylvania: Comment. American Economic Review, roč. 90, 2000, s. 362–96.
 15. Obernauer M.L., von der Nienburg B.M. 1915. Effect of Minimum-Wage Determinations in Oregon. Monthly Review of the U.S. Bureau of Labor Statistics roč. 1, 1915, s. 5–8.
 16. Rampell C. 2009. Why Some Employers Support a Minimum Wage Increase [Internet]. Economix Blog2009 [cited 2019 May 29];Available from: <https://economix.blogs.nytimes.com/2009/07/23/why-some-employers-support-a-minimum-wage-increase/>
 17. Samuelson P.A. 1973. Economics: An Introductory Analysis by Paul A. Samuelson. 9th edition. McGraw-Hill Inc.,US; 1973.
 18. Williamson S. 2017. Macroeconomics. 6th ed. Harlow, England: Pearson; 2017.
 19. U.S. Senate, Labor and Public Welfare Committee, Proposals to Extend Coverage of Minimum Wage Protection, Hearings before the Subcommittee on Labor, 85th Congress, 1st session, March 20, 1957, s. 856.
 20. OECD Submission to the Irish National Minimum Wage Commission [Internet]. 1997 [cited 2019 May 28]. Available from: https://www.oecd-ilibrary.org/social-issues-migration-health/oecd-submission-to-the-irish-national-minimum-wage-commission_501028262326
 21. 663/2007 Z. z. Zákon o minimálnej mzde | Aktuálne znenie [Internet]. 2019 [cited 2019 May 28]. Available from: <https://www.zakonypreludi.sk/zz/2007-663>

Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 822

email: karol.szomolanyi@euba.sk

NÁVRH NABÍJACEJ INFRAŠTRUKTÚRY PRE ELEKTROBUSY V MESTSKEJ HROMADNEJ DOPRAVE.

CHARGING INFRASTRUCTRE DESIGN FOR ELECTRIC BUSES IN PUBLIC TRANSPORT

Patrik Vasilovský

Abstrakt

Tento článok sa zoberá návrhom nabíjacej infraštruktúry pre elektobusy v mestskej hromadnej doprave. Pri budovaní návrhu pracujeme s existujúcimi rozvrhmi vozidiel dopravného podniku. Náš návrh pozostáva z určenia rozmiestnenia nabíjacích staníc a počtu nabíjacích bodov na staniach tak, aby pri použití elektobusov v prevádzke, boli takéto vozidlá schopné vykonávať stávajúce rozvrhy vozidiel so spaľovacím pohonným systémom. Množina možných umiestnení nabíjacích staníc tvoria konečne zastávky spojov a depa vozidiel. Pre náš návrh využívame metódy matematického programovania. V článku popisujeme zadaný problém, ktorý riešime zostavením matematického modelu a následným testovaním tohto modelu na dátach z reálnej prevádzky mestskej hromadnej dopravy.

Príčné slová: elektobus, nabíjacie stanice, ločkaná úloha

Abstract

The purpose of this article is to design charging infrastructure for electric buses in public transport. In our design we respect current schedules of the vehicles of the public transport providers. Our proposal consists of specifying locations of charging stations and the number of charging points on each station in the way that electric buses will be able to meet current schedules of vehicles with combustion systems. Possible locations of charging stations are terminal stops and depots. We use methods of mathematical programming to solve the problem. The paper describes problem set that is solved by mathematical model and the tests of this model on real data from operation of public transport system.

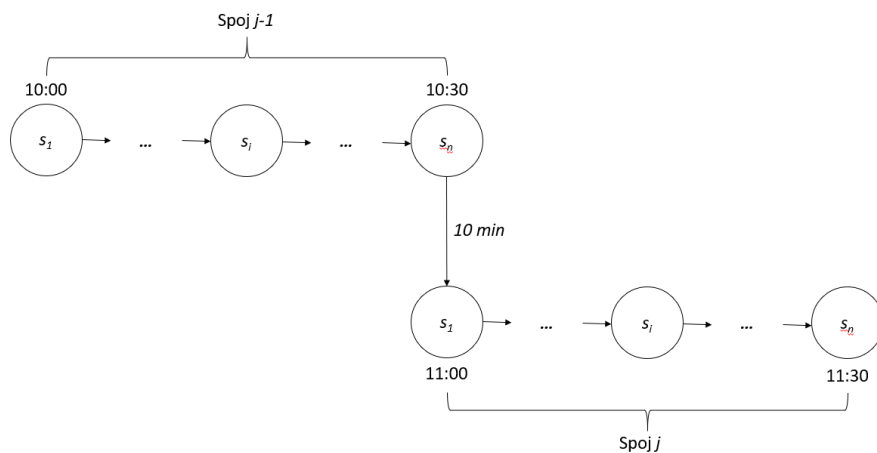
Keywords: battery electric bus, charging stations, location problem

1 METODIKA

Tento článok sa zaoberá návrhom rozmiestnenia nabíjacích staníc pre elektobusy v mestskej hromadnej doprave (MHD). Návrh rozmiestnenia nabíjacích staníc je založený na vopred určených plánoch obsluhy autobusov v dopravnom systéme. Pri našom návrhu tieto plány nemeníme, ale naopak ich dodržiavame a náš návrh nabíjacej infraštruktúry závisí od týchto plánoch. Denný plán obsluhy vozidla $v \in V$ v takomto systéme pozostáva z usporiadanej množiny spojov J_{vd} , ktoré vozidlo obsluhuje v deň $d \in D$. Spoj $j \in J_{vd}$ vozidla $v \in V$ v deň $d \in D$ je definovaný začiatčným časom obsluhy $t_{start_{jvd}}$, končným časom obsluhy $t_{end_{jvd}}$ a usporiadanou množinou zastávok $S_{jvd} = \{1, \dots, N\}$, ktoré spoj $j \in J_{vd}$ postupne obsluhuje. Pre každú zastávku $s \in S_{jvd}$ je určený čas t_{arrive_s} , v ktorom vozidlo prichádza na zastávku s .

Začiatočným časom obsluhy $t_{start_{jvd}}$ spoja $j \in J_{vd}$ je myslený taký čas, kedy vozidlo príde na prvú zastávku, ktorú má obslúžiť. Rovnako je zadefinovaný aj koncový čas obsluhy $t_{end_{jvd}}$ spoja $j \in J_{vd}$. Je to taký čas, v ktorom vozidlo prichádza na poslednú zastávku daného spoja. Pre jednoduchosť budeme označovať prvkom s_i i -tú zastávku spoja $j \in J_{vd}$.

Vozidlo počas dňa postupne obsluhuje zadané spoje v poradí podľa začiatočných časov $t_{start_{jvd}}$ jednotlivých spojov z množiny J_{vd} . Vo všeobecnosti platí, že konečná zastávka $s_n \in S_{j-1vd}$ predchádzajúceho spoja $j-1 \in J_{vd}$ a začiatočná zastávka $s_1 \in S_{jvd}$ nasledujúceho spoja $j \in J_{vd}$ nemusí byť rovnaká. Vozidlo tak počas denného plánu vykonáva aj manipulačné presuny medzi jednotlivými spojmi. Príklad obsluhy dvoch po sebe idúcich spojov $j-1, j \in J_{vd}$ vozidla $v \in V$ v deň $d \in D$ ilustruje obrázok Obr. 1.



Obr. 1 Manipulačný presun medzi spojmi.

Začiatok obsluhy spoja $j-1 \in J_{vd}$ začína na zastávke $s_1 \in S_{j-1vd}$ v čase $t_{start_{j-1vd}} = 10:00$. Vozidlo končí obsluhu spoja $j-1 \in J_{vd}$ na zastávke $s_n \in S_{j-1vd}$ v čase $t_{end_{jvd}} = 10:30$. Nasledujúci spoj $j \in J_{vd}$ začína na zastávke $s_1 \in S_{jvd}$ v čase $t_{start_{jvd}} = 11:00$. Potrebný čas vozidla na presun medzi zastávkou $s_n \in S_{j-1vd}$ a zastávkou $s_1 \in S_{jvd}$ je 10 minút.

V tomto článku sa zaoberáme takým návrhom rozmiestnenia nabíjajúcich staníc, ktorý rešpektuje súčasné denné plány všetkých vozidiel $v \in V$ verejného dopravného systému a zároveň umožňuje nahradiť tieto vozidla elektrobusedmi. V práci sme sa zamerali na umiestňovanie nabíjajúcich staníc na zastávkach $s_1, s_n \in S_{jvd}$, t.j. na začiatočných a konečných zastávkach jednotlivých spojov. Medzi tieto zastávky patria aj depá dopravného systému. Pre takúto množinu I možných umiestnení nabíjajúcich staníc sme sa rozhodli preto, lebo pri súčasných denných plánoch obsluhy, ktoré boli tvorené pre vozidlá so spaľovacím pohonným systémom (t.j. pre vozidlá s väčším dojazdom), sú to jediné miesta, kde môže mať vozidlo dostatok času na nabíjanie za predpokladu dodržania denného plánu. Pri návrhu uvažujeme s týždennými plánmi dopravného systému, pretože vozidlá môžu byť v jednotlivé dni vyťažené rôzne. Taktiež nám to umožňuje lepšie modelovať nabíjanie vozidiel v depe počas noci, pretože v návrhu nepredpokladáme, že vozidlá majú vždy na začiatku svojho denného plánu plný stav batérie.

Vo vyššie uvedenom príklade má vozidlo k dispozícii 20 minút na nabíjanie. Vozidlo sa teda môže po príchode na zastávku $s_n \in S_{j-1vd}$ nabíjať v čase od 10:30 do 10:50, alebo sa môže ihneď presunúť na zastávku $s_1 \in S_{jvd}$ a nabíjať sa v čase od 10:40 do 11:00. Predpokladajme, že výsledkom funkcie $d_time(s_i, s_j)$ je čas potrebný na presun medzi zastávkami s_i a s_j . Celkový čas, kedy sa môže vozidlo $v \in V$ v deň $d \in D$ nabíjať po ukončení obsluhy spoja $j \in J_{vd}$ môžeme určiť ako

$$available_charge_time_{jvd} = g(t_{start_{jvd}}, t_{end_{j-1vd}}) - d_time(s_n, s_1) \quad (1)$$

kde výsledkom funkcie $g(x,y)$ je rozdiel v časových jednotkách. Takýto čas je len hornou hranicou skutočného času nabíjania, pretože výsledný čas nabíjania je závislý od obsadenosti nabíjacej stanice na danej zastávke. To či sa vozidlo bude nabíjať na zastávke $s_n \in S_{j-1vd}$, alebo na zastávke $s_1 \in S_{jvd}$ bude jedným z výsledkov návrhu rozmiestnenia.

Pomocou času $t_{end_{j-1vd}}$ a hodnoty $available_charge_time_{jvd}$ dokážeme zostrojiť množinu T_{ijvd} . Táto množina určuje, kedy sa vozidlo $v \in V$ pri spoji $j \in J_{vd}$ nachádza na zastávke $i \in I$ v deň $d \in D$.

Jedným z hlavných parametrov elektrobuse je kapacita batérie a spotreba energie. Tieto parametre sa u výrobcov elektrobuse uvádzajú zväčša v jednotkách kWh pre kapacitu batérie a v jednotkách kWh/km pre spotrebu energie na kilometer. Nech konštanta c predstavuje spotrebu energie na kilometer (kWh/km) a nech výsledkom funkcie $h(s_i, s_j)$ je vzdialenosť medzi zastávkami s_i a s_j v jednotkách (km). Celkovú spotrebu energie v jednotkách (kWh) vozidla $v \in V$ na spoji $j \in J_{vd}$ v deň $d \in D$ vyčíslime podľa vzorca (2).

$$b_{jvd} = c * \sum_{i=1}^{n-1} h(s_i, s_{i+1}) \quad (2)$$

Nižšie uvedený matematický model je založený na lokačno-rozvrhových úlohách. V modeli rozhodujeme o tom, kde majú byť umiestnené nabíjacie stanice a koľko nabíjajúcich bodov bude v mieste k dispozícii. Tieto nabíjacie body nám určujú, koľko vozidiel sa môže súčasne nabíjať na nabíjacej stanici.

Popis množín

I množina konečných zastávok a depa, kde môže byť vybudovaná nabíjacia stanica,

V množina vozidiel,

J_{vd} množina spojov vozidla $v \in V$, v deň $d \in D$,

Jp_{vd} množina spojov vozidla $v \in V$, v deň $d \in D$, ktoré majú rozdielnu koncovú zastávku predchádzajúceho spoja a spoja nasledujúceho,

T množina všetkých časov,

T_{ijvd} množina časov, kedy je vozidlo $v \in V$ pri spoji $j \in J_{vd}$ na zastávke $i \in I$ v deň $d \in D$.

Popis konštánt

M kapacita batérie,

e_i pomer dobitia energie v jednotkách kWh za časovú jednotku na nabíjacej stanici v mieste $i \in I$,

S veľká konštanta,

b_{jvd} energia potrebná na vykonanie spoja $j \in J_{vd}$ vozidla $v \in V$ v deň $d \in D$.

Popis rozhodovacích premenných

$y_i \in \{0,1\}$ vybudovanie nabíjacej stanice v mieste $i \in I$,

$q_i \in \mathbb{Z}^+$ počet nabíjajúcich bodov v mieste $i \in I$,

$x_{ijvd} \in \{0,1\}$ či sa bude vozidlo $v \in V$ nabíjať pred spojom $j \in J_{vd}$ na zastávke $i \in I$ počas časového intervalu $t \in T_{ijvd}$ v deň $d \in D$,

$d_{jvd} \in \mathbb{R}^+$ kapacita batérie vozidla $v \in V$ na začiatku spoja $j \in J_{vd}$ v deň $d \in D$,

$z_{jvd} \in \{0,1\}$ či sa bude vozidlo $v \in V$ nabíjať na koncovej zastávke spoja $j \in J_{vd}$, alebo na začiatkovej zastávke spoja $j+1 \in J_{vd}$.

$$\min \sum_{i \in I} q_i \quad (3)$$

$$q_i \leq S y_i, \forall i \in I \quad (4)$$

$$d_{1v1} = M, \forall v \in V \quad (5)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{j \in J_{vd}} x_{ijvtd} \leq q_i, \forall d \in D, t \in T, i \in I \quad (6)$$

$$d_{jvd} + \sum_{i \in I} e_i \sum_{t \in T_{ijvd}} x_{ijvtd} \leq M, \forall d \in D, v \in V, j \in J_{vd} \quad (7)$$

$$d_{jvd} \leq d_{j-1vd} - b_{j-1vd} + \sum_{i \in I} e_i \sum_{t \in T_{ij-1vd}} x_{ij-1vtd}, \forall d \in D, v \in V, j \in J_{vd} - \{1\} \quad (8)$$

$$d_{1vd} \leq d_{\tilde{j}vd-1} + \sum_{i \in I} e_i \sum_{t \in T_{i\tilde{j}vd-1}} x_{i\tilde{j}vtd-1}, \forall d \in D - \{1\}, v \in V, \tilde{j} \in J_{vd-1} \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T_{ijvtd}} x_{ijvtd} \leq S z_{jvd}, \forall d \in D, v \in V, j \in J_{pvd} \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T_{ij+1vtd}} x_{ij+1vtd} \leq S(1 - z_{jvd}), \forall d \in D, v \in V, j \in J_{pvd} \quad (11)$$

$$y_i \in \{0,1\}, \forall i \in I \quad (12)$$

$$q_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i \in I \quad (13)$$

$$x_{ijvtd} \in \{0,1\}, \forall d \in D, v \in V, j \in J_{vd}, i \in I, t \in T_{ijvtd} \quad (14)$$

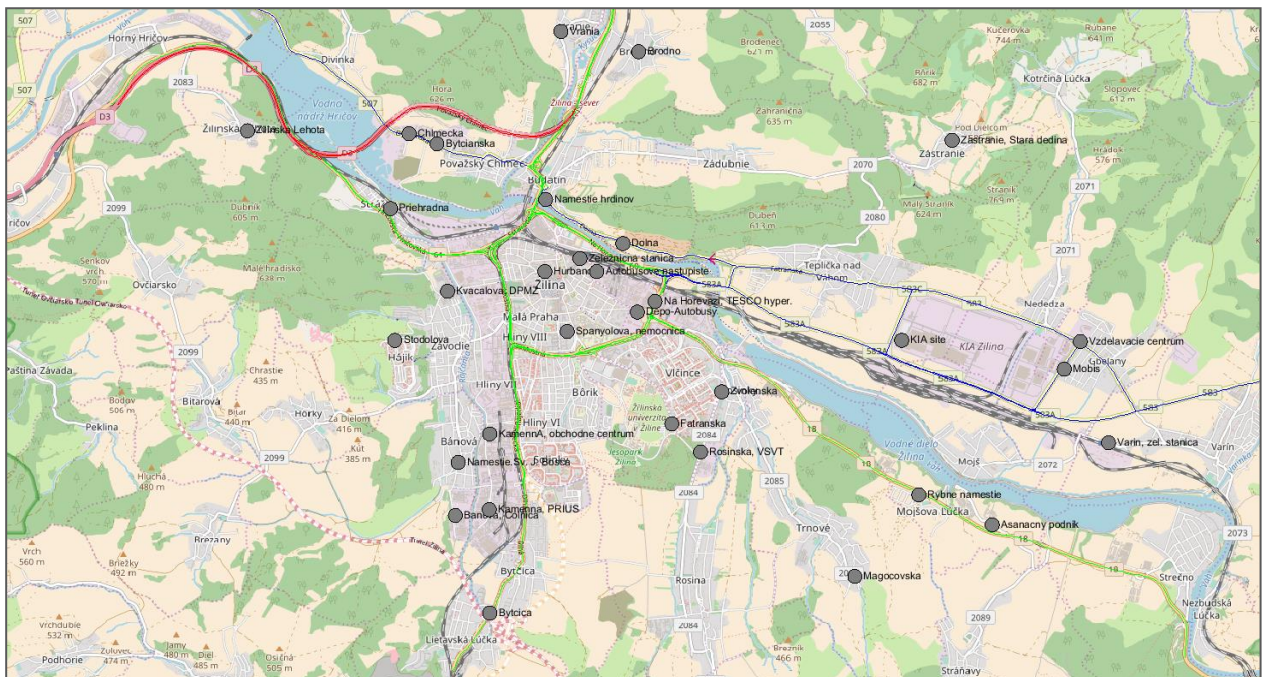
$$d_{jvd} \in \mathbb{R}^+, \forall d \in D, v \in V, j \in J_{vd} \quad (15)$$

$$z_{jvd} \in \{0,1\}, \forall d \in D, \forall v \in V, j \in J_{pvd} \quad (16)$$

Účelová funkcia (3) minimalizuje počet vybudovaných nabíjajúcich bodov na nabíjajúcich staniciach. Podmienka (4) zabezpečuje, že sa využívajú len tie nabíjacie body v mieste $i \in I$ kde sa vybuodovala aj nabíjacia stanica. Podmienka (5) zaručuje, že každé vozidlo $v \in V$ bude mať plný stav batérie na začiatku prvého dňa z modelovaného obdobia obsluhy. Podmienka (6) obmedzuje počet súčasne nabíjaných vozidiel na zastávke $i \in I$ na základe počtu vybudovaných nabíjajúcich bodov na danej zastávke. Podmienka (7) zakazuje prekročenie kapacity batérie. Podmienka (8) modeluje nabíjanie a vybíjanie vozidla batérie počas obsluhy spojov. Podmienka (9) modeluje nabíjanie batérie v depe pri prechádzaní na nový deň. Index \tilde{j} predstavuje číslo posledného spoja pre daný deň $d \in D$. Podmienky (10) a (11) zabezpečujú možnosť nabíjania buď na konečnej zastávke posledného spoja, alebo začiatocnej zastávke nasledujúceho spoja. Podmienky (12) až (16) sú obligatórne podmienky.

2 EXPERIMENTY

V práci boli použité reálne dáta z Dopravného podniku mesta Žiliny. Tieto dáta boli použité pri tvorbe matematického modelu a pri vykonávaní experimentov s matematickým modelom. Na nasledujúcom obrázku môžeme vidieť množinu zastávok I . Tieto zastávky sú buď konečné zastávky spojov, začiatocné zastávky spojov, alebo depo autobusov. Množina obsahuje 33 prvkov. V dátach od dopravného podniku počas týždňa operovalo celkom 46 vozidiel.



Obr. 2 Konečné a začiatocné zastávky na ktorých môžu byť umiestnené nabíjacie stanice.

V rámci experimentov sme sa rozhodli ako typ elektro autobusu vybrať vozidlo značky *Solaris Urbino 8.9 LE electric*.

Výrobca udáva pre daný typ vozidla nasledovné parametre:

- Priemerná spotreba vozidla: 0.8 kWh/km
- Kapacita batérie: 140 kWh

- Rýchlosť nabíjania (*plug-in*): 1.33 kWh/min

Z týchto parametrov sme vychádzali pri testovaní matematického modelu. Pri testovaní modelu sme sa snažili parametre nastaviť tak, aby model čo najpresnejšie odpovedal reálnej situácii. Keďže spotreba vozidla a kapacita batérie elektrobusu závisí od ročného obdobia v ktorom sa vozidlo používa, rozhodli sme sa testovanie modelu rozdeliť na 3 týždne - scenáre. Týmito týždňami sú jarný týždeň, letný týždeň a zimný týždeň.

Počas zimného obdobia sú batériami poháňané vozidla kvôli zime náchylné na zníženie kapacity batérie. Preto sme sa rozhodli kapacitu batérie zmenšiť o 25 %. Okrem toho, elektrobuses musí počas zimného obdobia vykurovať priestor, kde sa nachádzajú cestujúci, čo má za následok zvýšenie spotreby. Pre tento dôvod sme zvýšili aj spotrebu energie na 1 km o 35%.

Naopak, v letnom týždni vozidlo spotrebúva energiu na klimatizovanie priestoru, v ktorom sa nachádzajú cestujúci. To má taktiež vplyv na spotrebu energie vozidla. V tomto týždni bude spotreba energie vozidla takisto zvýšená o 35%. Kapacita batérie bude nastavená na hodnotu udávanú výrobcom vozidla.

Pri jarnom týždni budú parametre vozidla zvolené tak ako udáva výrobca vozidla. V tomto ročnom období vozidlo zväčša nemusí spotrebúvať energiu na kúrenie ani klimatizovanie priestoru pasažierov. Batéria má taktiež vhodné podmienky na uchovávanie energie.

Model bol počítaný pomocou solvera Xpress. Výsledky pre jednotlivé typy týždňov a konfigurácie rýchlosti sú prezentované v Tab. 1.

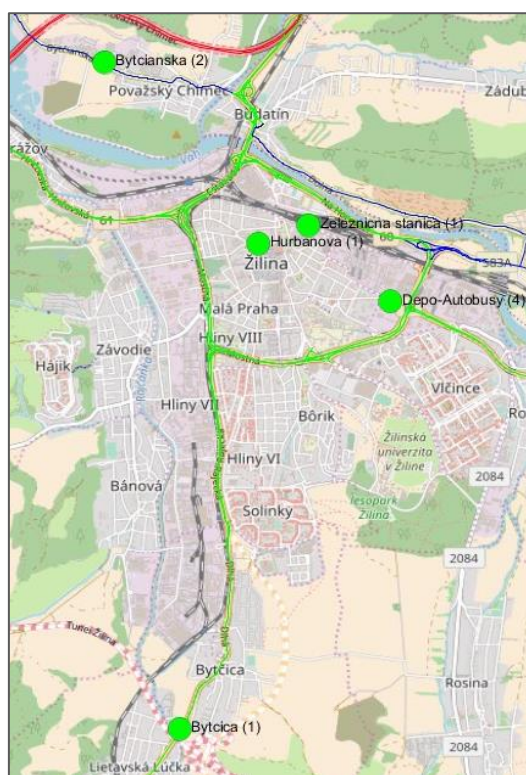
Typ týždňa	Rýchlosť nabíjania v depe [kWh/min]	Čas výpočtu [sec]	Počet nabíjacích bodov
Jarný	1,33	4945,38	5
	0,4	666,07	6
Letný	1,33	316,76	6
	0,4	2602,88	9
Zimný	1,33	272,07	6
	0,4	3388,23	10

Tab. 1 Výsledky experimentov s matematickým modelom

Zo získaných výsledkov vyplýva, že zníženie rýchlosti nabíjania v depe nemá vplyv na počet rozmiestnených nabíjacích staniciach oproti počtu rozmiestnení s rovnakými nabíjacími rýchlostiam pre všetky zastávky. Znížením rýchlosti sa docieli, že sa na nabíjacích staniciach vybuduje viac nabíjacích bodov. Pri všetkých scenároch bolo umiestnených 5 nabíjacích staníc. Pre letný a zimný týždeň boli stanice umiestnené na rovnaké zastávky. Riešenia sa líšili iba v počte nabíjacích bodov na stanici a to len v prípade experimentov s nižšou rýchlosťou nabíjania v depe. Rozmiestnenie nabíjacích staníc pre jarný týždeň sa líšilo oproti rozmiestneniu pre letný a zimný týždeň iba umiestnením zastávky Bánova, colnica oproti zastávke Bytčianska. Zoznam zastávok môžeme vidieť v Tab. 2. Táto tabuľka zároveň predstavuje riešenie pre zimný týždeň. Rozmiestnenie nabíjacích staníc na mape pre letný a zimný týždeň ilustruje Obr. 3.

Názov zastávky	Počet nabíjacích bodov	
	rýchlosť nabíjania v depe 1,33 kWh/min	rýchlosť nabíjania v depe 0,4 kWh/min
Bytčianska	1	2
Bytčica	1	1
Depo - Autobusy	2	4
Hurbanova	1	1
Železničná stanica	1	2

Tab. 2 Výsledok riešenia pre zimný týždeň.



Obr. 3 Rozmiestnenie nabíjacích staníc pre zimný týždeň.

3 ZÁVER

Tento článok sa zoberá návrhom nabíjacej infraštruktúry pre elektrobuses v mestskej hromadnej doprave. Pri budovaní návrhu sme zachovali existujúce rozvrhy vozidiel dopravného podniku. Náš návrh pozostával z určenia rozmiestnenia nabíjacích staníc a počtu nabíjacích bodov na staniach tak, aby boli elektrobuses schopné vykonávať stávajúce rozvrhy vozidiel so spaľovacím pohonným systémom. Ako množinu možných umiestnení nabíjacích staníc sme zvolili konečné zastávky spojov a depa vozidiel. V článku sme predstavili matematický model,

ktorý simuluje nabíjanie elektrobusev počas dennej prevádzky. Tento model sme overovali pomocou dát z reálnej prevádzky systému mestskej hromadnej dopravy. Model sme testovali pomocou rôznych scenárov a parametrov. Z testov vyplýva, že matematický model dokážeme optimálne vypočítať v rozumnom čase pre reálne úlohy. Rozšírením tejto práce môže byť zväčšenie dát, prípadne umiestňovanie nabíjajúcich staníc aj mimo konečných zastávok.. Ďalším vhodným rozšírením je overenie výsledkov matematického modelu pomocou simulačných techník. Model môže byť taktiež rozšírený, prípadne upravený tak, aby lepšie modeloval reálny systém.

Oznámenie

Tento článok bol podporený projektom VEGA 1/0689/19 Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest.

Použitá literatúra

1. ZeEUS - eBus Report, 2016, ZeEUS is co-funded by the European Commission under the 7th Research & Innovation Framework Programme, Mobility & Transport Directorate General under grant agreement n° 605485.
2. Xylia, M., Leduc, S., Patrizio, P., Kraxner, F. and Silveira, S.: Locating charging infrastructure for electric buses in Stockholm, In: Transportation Research Part C, **78**, Elsevier, 2017, pp: 183-200
3. Koháni, M., Czimmermann, P., Váňa, M., Cebecauer, M., Buzna, L.: Designing charging infrastructure for a fleet of electric vehicles operating in large urban areas, In: ICORES 2017: proceedings of the 6th International conference on operations research and enterprise systems : Porto, Portugal February 23-25, 2017. - [S.l.]: SCITEPRESS - Science and technology publications, 2017. - ISBN 978-989-758-218-9. - pp. 360-368.
4. Váňa, M., Dátovo založený návrh nabíjacej infraštruktúry pre elektrické vozidlá. Diplomová práca. Žilinská univerzita v Žiline, 2017.
5. Janáček, J., Matematické programování. EDIS, Žilina, 1999, - 225 s., ISBN 80-7100-573-8
6. Janáček, J., Koháni, M., Szendreyová, A., Buzna, L.: Diskrétna optimalizácia. EDIS, Žilina, 2015, - 316 s., ISBN 978-80-554-1052-4

Kontaktné údaje

Ing. Patrik Vasilovský

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

email: patrik.vasilovsky@fri.uniza.sk