

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ PRE OPERAČNÝ VÝSKUM
FAKULTA HOSPODÁRSKEJ INFORMATIKY
EKONOMICKEJ UNIVERZITY V BRATISLAVE

SSOR



SLOVAK SOCIETY FOR
OPERATIONS RESEARCH

**ZBORNÍK ZO SEMINÁRA
VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD
VO VEDECKOVÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XIV**

24. júna 2021
Bratislava

Programový výbor:

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave (predseda)
prof. Ing. Ivan Brezina, CSc., Ekonomická univerzita v Bratislave
prof. Ing. Michal Fendek, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave
prof. RNDr. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA, Vysoká škola ekonomická v Praze
prof. Ing. Josef Jablonský, CSc., Vysoká škola ekonomická v Praze
prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc., Žilinská univerzita v Žiline
doc. Michal Koháni, PhD., Žilinská univerzita v Žiline
Ing. Martina Kuncová, PhD., Vysoká škola polytechnická Jihlava
prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave
Ing. Veronika Miťková, PhD., Univerzita Komenského v Bratislave

Recenzenti:

doc. Ing. Andrea Furková, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave
Ing. Pavel Gežík, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave
doc. Ing. Marián Goga, CSc., Ekonomická univerzita v Bratislave
doc. Ing. Brian König, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave
Ing. Adriana Lukáčiková, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave
Ing. Tomáš Majer, PhD., Žilinská univerzita v Žiline
doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave

Organizačný výbor:

doc. Ing. Marian Reiff, PhD., Ekonomická univerzita v Bratislave

Zborník neprešiel jazykovou úpravou.

AH 6,90
Náklad: 50 ks

Kontakt: ssov@euba.sk
Zostavovateľ: Marian Reiff
Web Editor: Martin Lukáčik

Fakulta hospodárskej informatiky EU v Bratislave a Slovenská spoločnosť pre
operačný výskum, Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava
© Ekonomická univerzita v Bratislave, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava 2021
ISBN 978-80-225-4831-1

Obsah

Zuzana Čičková, Patrícia Holzerová	<u>Hľadanie cenovej stratégie duopolistu v bimaticových hrách</u>	4
Michal Fendek	<u>Optimalizačné modely efektívnej rovnováhy ponuky a dopytu na trhu produktov sieťových odvetví</u>	12
Petr Fiala	<u>Modelování dodavatelských sítí s e-obchodem</u>	20
Andrea Galadíková	<u>Využitie algoritmov učenia posilňovaním pri optimalizácii železničných dopravných uzlov</u>	25
Dobroslav Grygar	<u>Overenie robustnosti riešení pri riešení úlohy rozmiestňovania nabíjajúcich úsekov v dopravnej sieti</u>	32
Michaela Chocholatá	<u>Úloha lineárneho programovania a programovací jazyk Python vo výučbe</u>	38
Eudmila Jánošíková, Peter Jankovič	<u>Modulárna kapacitná lokačná úloha pre umiestnenie ambulancií v meste</u>	46
Maroš Janovec	<u>Redukcia vstupných dát pre úlohu návrhu turnusov elektrických autobusov</u>	52
Michal Koháni	<u>Optimalizačné úlohy pre efektívny návrh nabíjacej infraštruktúry pre elektrické autobusy v mestskej doprave</u>	59
Marek Kvet	<u>Analýza dopadov možnej reštrukturalizácie siete staníc ZZS na priemernú dostupnosť služby</u>	66
Mário Pčolár.	<u>CVAR optimalizácia a využitie procedúry prevzorkovania</u>	76
Juraj Pekár, Ivan Brezina, Adriana Nguyenová	<u>Investovanie do optimálneho portfólia a akciového indexu počas krízy</u>	82
Štefan Peško, Zuzana Borčinová	<u>Redukcia trojindexových MIP úloh na dvojindexové v okružných úlohách</u>	88
Marian Reiff	<u>Vplyv pandémie Covid-19 na akciový index SDAX</u>	96

HĽADANIE CENOVEJ STRATÉGIE DUOPOLISTU V BIMATICOVÝCH HRÁCH

FINDING PRICING STRATEGY OF DUOPOLIST IN BIMATRIX GAMES

Zuzana Čičková, Patrícia Holzerová

Abstrakt

Priestorové hry predstavujú špecifickú oblasť teórie hier zaoberajúcu sa správaním spoločností pôsobiacich na trhu ako konkurenti, uplatňujúci svoju cenovú politiku s cieľom prilákať zákazníkov, maximalizovať svoje príjmy a nájsť najlepšiu lokalitu pre svoje pobočky. Hlavným cieľom príspevku je špecifická situácia stanovenia ceny produktu jedného z hráčov na základe ceny oponenta. Predstavujeme formuláciu priestorovej hry charakterizovanej grafom, ktorého uzly reprezentujú polohu zákazníkov a potenciálne miesta pre pobočky firiem. Celkové náklady, pozostávajúce z ceny produktu a dopravných nákladov, sú hlavným faktorom ovplyvňujúcim zákazníkov pri výbere od koho budú nakupovať. Hra predpokladá, že zákazníci majú stanovený limitnú cenu, ktorú sú ochotní zaplatiť, čoho dôsledkom sú stratené dopyty. Na analýzu danej situácie využívame bimaticové hry.

***Kľúčové slová:** priestorová konkurencia, doupol, stanovenie ceny, bimaticové hry*

Abstract

Spatial games represent specific area of game theory and deal with the behaviour of companies operating as competitors in the market, applying its own pricing policy with aim to attract customers, maximize its revenues and find the best location for their branches. The main goal of the article is specific situation of determining the product price of one of the players, based on a predetermined price of the opponent. We present formulation of spatial game characterized by a graph, where nodes represent both location of customers and potential places of service of the companies. Total costs, consisting of the price of the product and transport costs, are the main factor influencing customers in choosing from whom to purchase. The game assumes that customers set limit price they are willing to pay, resulting in lost demands. We use bimatrix games to analyse the situation.

***Keywords:** spatial competition, duopoly, pricing, bimatrix games*

1 ÚVOD

Cieľom každej firmy pôsobiacej na trhu je zlepšenie svojho postavenia, rast, získanie si čo najväčšieho počtu zákazníkov a v neposlednom rade maximalizácia ziskov. To, ako sa firma na trhu správa je podmienené aj typom trhovej štruktúry, do ktorej spadá. Na trhu rozlišujeme dokonalú a nedokonalú konkurenciu, pričom obe majú svoje charakteristické črty. Nedokonalá konkurencia je charakterizovaná dvoma základnými predpokladmi: identifikovateľným produktom a možnosťou stanovenia a kontrolovania cien produktov firmami alebo výrobcami. Nedokonalú konkurenciu na strane ponuky poznáme v troch formách, ktorými sú monopolistická konkurencia, monopol a oligopol, ktorý môže byť diferencovaný alebo koncentrovaný (Goga, 2013).

Oligopol predstavuje zložitú trhovú štruktúru, v ktorej sa firmy snažia maximalizovať svoj zisk a zlepšiť svoje postavenie na trhu, čo je dôvodom konfliktnej situácie s ostatnými firmami aj vtedy, ak sa firma snaží konfliktom vyhnúť (Goga, 2013). Keďže správanie sa firiem na trhu nedokonalnej konkurencie musí zohľadňovať rozhodnutia ostatných subjektov (konkurujúcich firiem, ale aj spotrebiteľov), na analýzu tohto typu trhu možno využiť teóriu hier. Pri rozhodovaní sa o množstve a cene ponúkaného produktu musí firma (teda hráč) zvážiť kroky ostatných firiem na trhu. Môžeme predpokladať, že pri rovnakom postavení na trhu budú kroky firiem rovnaké (Goga, 2013). Ich rozhodnutia potom môžu viesť k trhovej rovnováhe. Z pohľadu teórie hier možno potom rozhodovaciu situáciu jednotlivých oligopolistov považovať za hru. Hráči sa snažia svojim strategickým správaním maximalizovať svoju očakávanú platbu. Základným konceptom riešenia takýchto strategických hier je Nashovo equilibrium - profil stratégií, v ktorom každá stratégia je najlepšou odpoveďou na zvyšok profilov.

2 MODEL Y PRIESTOROVEJ KONKURENCIE

Analýza oligopolistického trhu v priestore je pomerne diskutovanou témou. Jedným z prvých, ktorí sa začali venovať tejto problematike bol matematik a ekonóm Harold Hotelling (1929), ktorý predstavil model spočívajúci v prítomnosti dvoch firiem hľadajúcich čo najvýhodnejšiu pozíciu na lineárnom trhu. Model je základom množstva teórií produktovej diferenciácie a lokácie, no napriek svojej využiteľnosti prešiel mnohými kritikami. C. D'Aspremont, J. Jaskold Gabszewicz a J.-F. Thisse (1979) poukazujú na jeho chybnosť a dokazujú, že nie je možné aby existovala rovnováha v prípade, že sú firmy blízko pri sebe. Výsledkom ich upraveného modelu je model, ktorého riešením je zabezpečená existencia rovnováhy v akomkoľvek mieste na trhu (D'Aspremont a kol., 1979).

Autori Melvin L. Greenhut, George Norman a Chao-Shun Hung vo svojej publikácii z roku 1987 *The Economics of Imperfect Competition: A Spatial Approach* zaujali odlišný prístup k tradičnej teórii cien a analýze nedokonalnej konkurencie, a to prostredníctvom priestorovej perspektívy, ktorú aplikujú na celý rad nepriestorových problémov spájajúcich sa s nedokonalou konkurenciou.

Fetter (1924) publikoval prácu, ktorá položila základ analýze vzťahov a vzájomnej závislosti medzi firmami, nakoľko mala významný vplyv na teóriu súťaženia v sieti. Na rozdiel od Hotellinga sa však Fetter zameriaval na modelovanie dopytového správania, nie na optimálne rozhodnutia (Biscaia a Mota, 2013). Ďalšie rozšírenie jeho práce možno nájsť v publikáciách mnohých ďalších autorov, ako napríklad (Hamoudi a Risueño, 2012) a (Hamoudi a Bustamante, 2011). Hamoudi a Bustamante sa vo svojom článku zameriavajú na analýzu cenovej rovnováhy v dvojestupňovej hre modelu priestorovej konkurencie lineárneho mesta. Autori riešia úlohu hľadania lokácie na priamke prostredníctvom úlohy kvadratického programovania s lineárnymi obmedzeniami (Hamoudi a Bustamante, 2011).

Vychádzajúc z Hotellingovho modelu vznikla aj publikácia *The economic theory of product differentiation* (Beath a Katsoulacos, 1991). Autori sa, okrem iného, venujú cenovej konkurencii priestorového duopolu. Zákazníci rozmiestnení pozdĺž lineárneho trhu, nútení cestovať ak si chcú zadovážiť ponúkané produkty, sú jediní, ktorí znášajú dopravné náklady. Pre výrobcov platí, že lokácia ich produktov je pre nich exogénnym parametrom, takže cena je ich jedinou rozhodovacou premennou (Beath a Katsoulacos, 1991).

V tomto príspevku budeme prezentovať špecifický problém priestorovej hry v prípade duopolu. Ten je špecifickým typom oligopolu, kde na trhu na strane ponuky pôsobia iba dva subjekty. Duopolistický trh budeme prezentovať v priestore, ktorý možno charakterizovať formou grafu. Hráči sa rozhodujú o umiestnení svojej prevádzky, pričom výsledky hry sú dané stanovením

ich cien, ktoré ovplyvnia im prislúchajúci podiel na trhu. Zákazníci si pritom vyberajú jedného z dvoch duopolistov na základe svojich nižších nákladov, ktoré zahŕňajú jednak cenu tovaru, ale aj náklady na dopravu. Budeme prezentovať originálny matematický model, na základe ktorého možno stanoviť cenu pre jedného z duopolistov na základe už známej ceny protihráča tak, aby jeho tržby boli čo najvyššie.

3 MODEL Y PRIESTOROVEJ KONKURENCIE

V tejto časti budeme prezentovať originálny matematický model umožňujúci stanoviť cenu dopolistu na základe stanovenej ceny protihráča v prípade špecifickej priestorovej hry. Budeme vychádzať z týchto predpokladov: homogenita produktu (obe firmy na trhu ponúkajú veľmi podobný produkt), neelastickosť dopytu (spotreba jednej jednotky zákazníkmi v každom bode trhu), indiferentnosť spotrebiteľov (vzhlľadom k výberu výrobcu), pričom nebudeme uvažovať s výrobnými nákladmi firiem ani s obmedzením v množstve na strane ponuky.

Ďalej budeme predpokladať: Nech $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \in \mathbb{Z}^+$, je množina zákazníkov a nech je daný úplný graf $\bar{G} = (V, \bar{H})$, kde V predstavuje uzly grafu a \bar{H} je množina hrán medzi každou dvojicou uzlov v_i a $v_j, i, j \in V$. Hrany sú orientované a každej z nich je priradené ohodnotenie d_{ij} , ktoré predstavuje minimálne náklady (najkratšiu dĺžku cesty) medzi uzlami v_i a v_j . Matica $\mathbf{D}_{n \times n} = \{d_{ij}\}$ je potom maticou najkratších vzdialeností medzi uzlami v_i a v_j .

Budeme predpokladať existenciu dvoch spoločností, ktoré ponúkajú homogénny produkt (tovar alebo službu), pričom tieto spoločnosti majú možnosť umiestniť svoje pobočky v jednom z uzlov z grafu \bar{G} . Spoločnosti nazveme hráčmi a označíme ich $P = \{1, 2\}$. Uzly grafu sú súčasne sídlami zákazníkov, pričom uvažujeme jednotkový dopyt uzla. Hoci obaja hráči ponúkajú identický produkt v neobmedzenom množstve, cena produktov môže byť odlišná. Nech $p^{(1)}$ je cenou produktu hráča 1 a $p^{(2)}$ cenou produktu hráča 2. Neuvažujeme sa o žiadnych obmedzeniach kapacity ani diferenciacii produktu, teda každý zákazník môže uskutočniť nákup u ktorejkoľvek spoločnosti. Zákazníci pri rozhodovaní zvažujú celkové náklady na kúpu produktu, ktoré pozostávajú z ceny produktu a nákladov na prepravu k vybranej spoločnosti. Náklady na dopravu sú vyjadrené ako t na jednotku vzdialenosti. Idea príspevku bude vychádzať z (Čičková a Holzerová, 2020). Príspevok sa zameriaval na modelovanie stanovenia ceny duopolistu na základe najlepšej odpovede v prípade, keď každý zo zákazníkov vždy uskutočňoval nákup u toho z hráčov, kde boli celkové náklady spojené s nákupom nižšie a vychádzal z modelu maticovej hry. Teraz budeme uvažovať so strateným dopytom, keď zákazník zvažuje nielen výšku nákladov spojených s nákupom, ale tiež maximálnu pevnú cenu p_{max} , ktorú je ochotný za nákup zaplatiť. Je zrejmé, že daný predpoklad vedie k hre s nekonštantným súčtom platieb (bimaticovej hre), pretože uzol je obslužený buď hráčom 1, alebo je obslužený hráčom 2, alebo uzol zostane neobslužený.

Ak hráč 1 umiestni svoju pobočku v i –tom uzle a hráč 2 umiestni svoju predajňu v j –tom uzle ($i, j \in V$), hráč 1 získa zákazníka z k –teho uzla ($k \in V$) len v prípade, ak $t * d_{ki} + p^{(1)} < t * d_{kj} + p^{(2)}$ a $t * d_{ki} + p^{(1)} \leq p_{max}$, ak $t * d_{ki} + p^{(1)} > t * d_{kj} + p^{(2)}$ a $t * d_{kj} + p^{(2)} \leq p_{max}$, zákazníka získa hráč 2. Ak $t * d_{ki} + p^{(1)} = t * d_{kj} + p^{(2)}$ a $t * d_{ki} + p^{(1)} \leq p_{max}$, hráči zdieľajú dopyt v rovnakej miere. Ak nie je splnený ani jeden z uvedených predpokladov, zákazník ostane neobslužený.

Ak by boli ceny duopolistov stanovené vopred, uvedené predpoklady by viedli k bimaticovej hre kde prvky matice platieb hráčov možno vypočítať na základe tejto procedúry:

Maticu platieb pre hráča 1 ($\mathbf{A} = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n$) a maticu platieb hráča 2 ($\mathbf{B} = \{b_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n$) možno zapísať formou takýchto pseudokódov:

```

LET  $V = \{1,2, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{D}_{n \times n} = \{d_{ij}\}$ ,  $t$ ,  $p^{(1)}, p^{(2)}$ ,  $p_{max}$ 
LOOP  $(i, j \in V)$  DO
 $n_{ij}^{(1)} = t * d_{ij} + p^{(1)}$ ;
 $n_{ij}^{(2)} = t * d_{ij} + p^{(2)}$ ;
 $a_{ij} = 0$ ;
 $b_{ij} = 0$ ;
LOOP  $(k, i, j = 1, 2, \dots, n)$  DO
IF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $n_{ki}^{(1)} \leq p_{max}$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 1$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} = n_{kj}^{(2)}$  and  $n_{ki}^{(1)} \leq p_{max}$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 0,5$ ;
ENDIF

```

V takom prípade možno rovnovážne stratégie hráčov získať pomocou úlohy nelineárneho programovania, vychádzajúc z podmienok optimálnosti Karusha-Kuhna-Tuckera (Čičková a Zagiba, 2018):

Parametre:

- $a_{ij}, i, j \in V$ – platba hráča 1 pri jeho i-tej stratégii a j-tej stratégii protihráča
- $b_{ij}, i, j \in V$ – platba hráča 2 pri jeho i-tej stratégii a j-tej stratégii protihráča

Premenné:

- u_1 – výsledná platba hráča 1
- u_2 – výsledná platba hráča 2
- $x_i \geq 0, i \in V$ – i-ta zmiešaná stratégia hráča 1
- $y_i \geq 0, i \in V$ – i-ta zmiešaná stratégia hráča 2

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij} x_i y_j + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} b_{ij} x_i y_j - u_1 - u_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{j \in V} a_{ij} y_j - u_1 \leq 0, i \in V \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} x_i = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} b_{ji} y_i - u_2 \leq 0, j \in V \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V} y_j = 1 \quad (5)$$

Uvažujme teraz problém určenia rovnovážnej ceny hráča ako reakciu na stanovenú cenu protihráča. Nech cena tovaru druhého hráča $p^{(2)}$ je vopred známa. Cenu tovaru prvého hráča $p^{(1)}$ však považujeme za premennú, pričom hráč by ju chcel stanoviť tak, aby sa maximalizovali jeho tržby. Je zrejmé, že pri takýchto predpokladoch budú prvky matice platieb hráča 1 závisieť od hodnoty $p^{(1)}$. Pre vzťah hodnôt prvkov matice platieb a ceny $p^{(1)}$ platí:

$$a_{ij}(p^{(1)}) = \sum_{i \in V} \frac{\text{sgn}(t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) + 1}{2} \quad (6)$$

kde $t * d_{ki} + p^{(1)} \leq p_{max}$ a $t * d_{kj} + p^{(2)} \leq p_{max}$.

Problémom je nespojitosť funkcie Signum. Tento problém však možno preformulovať ako úlohu binárneho programovania. Zavedme takéto premenné: $b_{kij}^{(1)} \in \{0,1\}, b_{kij}^{(2)} \in \{0,1\}, b_{kij}; k, i, j \in V$. Potom možno úlohu naformulovať pridaním nerovnic:

$$t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \leq M * b_{kij}^{(1)}; k, i, j \in V \quad (7)$$

$$t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \geq -M * b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (8)$$

$$b_{kij}^{(1)} + b_{kij}^{(2)} \leq 1; k, i, j \in V \quad (9)$$

$$b_{kij} = b_{kij}^{(1)} - b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (10)$$

$$b_{kij} * (t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) \geq \varepsilon * b_{kij}; k, i, j \in V \quad (11)$$

$$a_{ij} = \sum_{k \in V} (b_{kij} + 1)/2; i, j \in V \quad (12)$$

kde ε považujeme za male kladné číslo a M za veľké kladné číslo.

Nerovnice (6) až (12) slúžia na stanovenie matice platieb hráča 1. Nerovnice (7) a (8) umožňujú stanoviť priradenie spotrebiteľov z k -tého uzla pre pozíciu (i,j) , $k, i, j \in V$. V prípade ostrej nerovnosti nákladov (ak je k -ty uzol priradený hráčovi 1, premenná $b_{kij}^{(1)} = 1$, ak je tento uzol priradený hráčovi 2, premenná $b_{kij}^{(2)} = 1$). Premenné b_{kij} kalkulujú obslužené uzly pre hráča 1 (ak je k -ty uzol priradený hráčovi 1, premenná $b_{kij} = 1$, ak je tento uzol priradený hráčovi 2, premenná $b_{kij} = -1$). V prípade rovnosti nákladov nerovnice (9) až (11) umožnia nastaviť hodnotu $b_{kij} = 0$.

Problémom je však tiež zabezpečenie rešpektovania maximálnej pevnej ceny p_{max} , ktorú je ochotný za nákup zaplatiť. Toto včleníme do úlohy matematického programovania pomocou binárnych premenných $c_{kij}^{(1)} \in \{0,1\}$ a $c_{kij}^{(2)} \in \{0,1\}; k, i, j \in V$

$$p_{max} - \varepsilon - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \leq M * c_{kij}^{(1)}; k, i, j \in V \quad (13)$$

$$p_{max} - \varepsilon - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \geq -M * c_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \quad (14)$$

$$c_{kij}^{(1)} + c_{kij}^{(2)} \leq 1; k, i, j \in V \quad (15)$$

Kde nerovnice (13) a (14) zabezpečia nastavenie premennej $c_{kij}^{(1)}$ na hodnotu 1, ak $t * d_{ki} + p^{(1)} \leq p_{max}$.

Konečnú kalkuláciu prvkov a_{ij} zabezpečia nerovnice:

$$a_{ij} = \sum_{k \in V} (b_{kij} + 1) \frac{1}{2} * c_{kij}^{(1)}; i, j \in V \quad (16)$$

Pretože ak $b_{kij} = 1$, prvok a_{ij} je zvýšený o 1, ak $b_{kij} = 0$, prvok a_{ij} je zvýšený o 0,5, a ak $b_{kij} = -1$, prvok a_{ij} ostáva nezmenený, pričom premenná $c_{kij}^{(1)}$ reprezentuje splnenie podmienky pre cenový limit spotrebiteľa.

Kalkuláciu prvkov b_{ij} zabezpečia nerovnice:

$$b_{ij} = \sum_{k \in V} (1 - (b_{kij} + 1) \frac{1}{2}) * o_{kij}; i, j \in V \quad (17)$$

kde pri vopred zadanej cene $p^{(2)}$, možno vopred stanoviť parametre o_{kij} takto: ak $t * d_{kj} + p^{(2)} \leq p_{max}$, $o_{kij} = 1$, v opačnom prípade $o_{kij} = 0$.

Matematický model umožňujúci stanoviť cenu prvého hráča potom vyzerá takto:

- $n \in \mathbb{Z}^+$ – number of nodes
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – množina uzlov
- $d_{ij} \geq 0, i, j \in V$ – najkratšia vzdialenosť medzi uzlami i a j
- $t > 0$ – jednotkové dopravné náklady
- $p^{(2)} > 0$ – cena produktu oponenta (hráča 2)
- M – veľké kladné číslo
- ε – malé kladné číslo
- p_{max} – maximálny limit nákladov spotrebiteľa
- $o_{kij} \in \langle 0, 1 \rangle, i, j \in V$ – pomocný parameter, kde $o_{kij} = 1$, ak $t * d_{kj} + p^{(2)} \leq p_{max}$, inak $o_{kij} = 0$.

Premenné:

- $w \in \langle 0, n \rangle$ – počet obslužených uzlov
- $x_i \in \langle 0, 1 \rangle, i \in V$ – i -ta zmiešaná stratégia hráča 1
- $x_j \in \langle 0, 1 \rangle, j \in V$ – j -ta zmiešaná stratégia hráča 2
- $p^{(1)} > 0$ – cena produktu hráča 1
- $a_{ij} \in \langle 0, n \rangle, i, j \in V$ – prvky matice platieb hráča 1
- $b_{ji} \in \langle 0, n \rangle, i, j \in V$ – prvky matice platieb hráča 2
- $b_{kij}^{(1)} \in \{0, 1\}; k, i, j \in V$,
- $b_{kij}^{(2)} \in \{0, 1\}; k, i, j \in V$,
- $b_{kij} \in \langle -1, 1 \rangle; k, i, j \in V$
- $c_{kij}^{(1)} \in \{0, 1\}; k, i, j \in V$,
- $c_{kij}^{(2)} \in \{0, 1\}; k, i, j \in V$,
- $c_{kij} \in \langle -1, 1 \rangle; k, i, j \in V$.

Matematický model:

$$\begin{aligned}
 & w * p^{(1)} \rightarrow \max \\
 & t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \leq M * b_{kij}^{(1)}, k, i, j \in V \\
 & t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \geq -M * b_{kij}^{(2)}, k, i, j \in V \\
 & b_{kij}^{(1)} + b_{kij}^{(2)} \leq 1; k, i, j \in V \\
 & b_{kij} = b_{kij}^{(1)} - b_{kij}^{(2)}; k, i, j \in V \\
 & b_{kij} * (t * d_{kj} + p^{(2)} - (t * d_{ki} + p^{(1)})) \geq \varepsilon * b_{kij}; k, i, j \in V \\
 & p_{max} + \varepsilon - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \leq M * c_{kij}^{(1)}, k, i, j \in V \\
 & p_{max} + \varepsilon - (t * d_{ki} + p^{(1)}) \geq -M * c_{kij}^{(2)}, k, i, j \in V \\
 & c_{kij}^{(1)} + c_{kij}^{(2)} \leq 1; k, i, j \in V \\
 & a_{ij} = \sum_{k \in V} (b_{kij} + 1) \frac{1}{2} * c_{kij}^{(1)}; i, j \in V \\
 & b_{ij} = \sum_{k \in V} (1 - (b_{kij} + 1) \frac{1}{2}) * o_{kij}; i, j \in V
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij} x_i y_j + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} b_{ij} x_i y_j - u_1 - u_2 &= 0 \\ \sum_{j \in V} a_{ij} y_j - u_1 &\leq 0, i \in V \\ \sum_{i \in V} x_i &= 1 \\ \sum_{i \in V} b_{ji} y_i - u_2 &\leq 0, j \in V \\ \sum_{j \in V} y_j &= 1 \end{aligned}$$

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0427/20 - Viackriteriálne modely teórie hier v ekonómii a politológii

Použitá literatúra

1. BEATH, J. a KATSOULACOS, Y. 1991. *The economic theory of product differentiation*. Cambridge University Press.
2. BISCAIA, R. a MOTA, I. 2013. Models of spatial competition: A critical review. *Papers in Regional Science*, roč. 92 č. 4, s. 851-871.
3. ČIČKOVÁ, Z. a HOLZEROVÁ, P. 2020. Duopoly Pricing in Spatial Competition. *Quantitative Methods in Economics: Multiple Criteria Decision Making XX: Proceedings of the International Scientific Conference: 27th May - 29th May 2020, Púchov, Slovakia*. Bratislava: Letra Edu, 27-33. ISBN 978-80-89962-60-0.
4. ČIČKOVÁ, Z. a ZAGIBA, M. 2018. Podmienky optimálnosti Karusha-Kuhna-Tuckera a bimaticové hry: Karush-Kuhn-Tucker Conditions and Bimatrix Games. *Aplikácia vybraných modelov teórie hier pri riešení niektorých ekonomických problémov Slovenska: 1. vedecký workshop k riešeniu projektu Vega č. 1/0351/17: zborník z workshopu: 4.december 2017, Bratislava*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2018, [1-7]. ISBN 978-80-225-4430-6.
5. D'ASPROMONT, C.; GABSZEWICZ, J.J. a THISSE, J.-F. 1979. On Hotelling's "Stability in competition". *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, s. 1145-1150.
6. GOGA, M. 2013. *Teória hier*. Bratislava: Iura Edition, spol. s.r.o..
7. GREENHUT, M. L. a kol. 1987. *The economics of imperfect competition: a spatial approach*. Cambridge University Press.
8. FETTER, F. A. 1924. The Economic Law of Market Areas. In: *The Quarterly Journal of Economics*, roč. 38, č.3, s. 520–529.
9. HAMOUDI, H. a BUSTAMANTE, M.S.M. 2011. Revisiting price Equilibrium Existence in the Linear-city Model of Spatial Competition. In: *Regional Science*, roč. 90, č. 1, s. 179–196.
10. HAMOUDI, H. a RISUEÑO, M. 2012. The Effects of Zoning in Spatial Competition. In: *Journal of Regional Science*, roč. 52, č.2, s. 361-374.
11. HOTELLING, H. 1929. Stability in competition. *The Economic Journal*, roč. 39, č. 153, s. 41-57.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: zuzana.cickova@euba.sk

Ing. Patrícia Holzerová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: patricia.holzerova@euba.sk

OPTIMALIZAČNÉ MODELY EFEKTÍVNEJ ROVNOVÁHY PONUKY A DOPYTU NA TRHU PRODUKTOV SIEŤOVÝCH ODVETVÍ

OPTIMIZATION MODELS OF THE EFFICIENT EQUILIBRIUM OF SUPPLY AND DEMAND ON THE MARKET OF NETWORK INDUSTRIES PRODUCTS

Michal Fendek

Abstrakt

V súčasnosti sa v odborných diskusiách na rôznych úrovniach venuje značná pozornosť problematike sieťových odvetví. Je to pochopiteľné, veď sieťové odvetvia zabezpečujú v konečnom dôsledku výrobu a distribúciu energetických zdrojov, ktoré majú pre efektívne fungovanie rozvinutých ekonomík kľúčový význam. Samozrejme, stav rovnováhy na každom trhu, a teda i na trhu sieťových odvetví je kreovaný na základe konfrontácie medzi úrovňou dopytu a úrovňou ponuky na relevantnom trhu. Stredobodom záujmu sú obvykle otázky primeraného zisku subjektov sieťových odvetví na jednej strane a otázky úrovne cien ich produkcie determinované odôvodnenými a pre spoločnosť akceptovateľnými nákladmi na strane druhej. V príspevku sa budeme zaoberať analýzou optimalizačných modelov správania sa spotrebiteľa a producentov na trhu sieťových odvetví, t. j. analýzou fenoménu dopytu a ponuky na trhu sieťových odvetví, ako aj všeobecnými otázkami efektívnosti tohto špecifického trhu.

Kľúčové slová

Sieťové odvetvia, funkcia užitočnosti, spoločenské preferencie, nadbytok spotrebiteľa a firmy, marginálna užitočnosť, primeraný zisk subjektov sieťových odvetví

Abstract

Currently a considerable attention to the subject of network industries is being paid in discussions on various levels. It is understandable as network industries in fact ensure the production and distribution of energy sources which play a key role in developed economies. The discussions are usually focused on the question of reasonable profit of network industries subjects and on the other hand the question of generally acceptable costs. Naturally, equilibrium on the network industries market, as well as on any market, is being created based on the level of demand and supply on said market. In this paper we will discuss the analysis of microeconomic optimization models of consumers and producers behavior on the network industries market, i.e. the analysis of demand and supply phenomena on this specific market.

Keywords

Network industries, utility function, consumer preferences, consumers' surplus, producers' surplus, marginal utility, reasonable profit of network industries subjects.

JEL Classification

C61, D11, D61, L11, L51

Úvod

Charakteristickou vlastnosťou modelov rovnováhy sieťových odvetví je určitá izolovanosť a uzatvorenosť trhu, v dôsledku čoho sa produkty sieťových odvetví pre spotrebiteľa na tomto trhu zväčša nedajú substituovať (Fendek, M., Fendeková, E., 2009). Preto užitočnosť, ktorú spotrebiteľ pociťuje pri ich používaní môžeme kvantifikovať špecifickým spôsobom. Principiálne ide o takú prezentáciu funkcie užitočnosti, kedy produkt sieťového odvetvia je vnímaný ako tovar so samostatnou a exaktne formulovanou funkciou užitočnosti a ostatné tovary sú vnímané ako spotreba prepočítaného (agregovaného) jedného tovaru s normovanou jednotkovou cenou.

Pre komplexnú charakteristiku trhu sieťového odvetvia sa budeme v rámci príspevku zaoberať formalizovanou analýzou aktivít výrobcov na tomto trhu. Treba upozorniť na to, že aj nákladová funkcia dodávateľskej firmy, resp. výrobcu má v tomto modeli dodávateľa produktu sieťového odvetvia do istej miery atypickú vecnú interpretáciu. Podstatou tejto koncepcie je také vnímanie trhu, na ktorom sú všetky ostatné výrobky a služby, okrem produktu sieťového odvetvia, vyjadrené agregovaným tovarom s jednotkovou cenou.

Nadbytok spotrebiteľa, resp. výrobcu, ako klasické kategórie mikroekonomickej analýzy sa dajú veľmi efektívne využiť pri opise správania sa spotrebiteľov a výrobcov na trhu výrobkov a služieb, nakoľko umožňujú kvalifikovane vysvetliť intuitívne tendencie najmä spotrebiteľov pri prijímaní rozhodnutí o kreovaní svojej optimálnej spotrebnej stratégie pri meniacich sa parametroch trhového prostredia, ktorými sú v tomto type analýzy zvyčajne ceny.

V príspevku poukážeme na špecifickú interpretáciu kategórie „nadbytok spotrebiteľa“ v prípade analýzy dopytu po produktoch sieťových odvetví. Toto špecifikum vyplýva z toho, že spotrebiteľ v krátkom časovom horizonte obvykle nie je reálne schopný substituovať produkt sieťového odvetvia, napr. plyn, iným tovarom s primeranými úžitkovými vlastnosťami, preto vníma produkt ako exkluzívny a táto exkluzivita sa dá potom aj formálne vyjadriť pri konštrukcii funkcie užitočnosti a z toho vyplývajúcich ďalších nadväzujúcich analytických úloh.

1. Optimalizácia spotrebnej stratégie spotrebiteľa

Všeobecná úloha optimalizácie správania spotrebiteľa ako klasická kategória mikroekonomickej analýzy sa veľmi efektívne využíva pri opise správania sa spotrebiteľov, nakoľko umožňujú kvalifikovane vysvetliť intuitívne tendencie spotrebiteľov pri prijímaní rozhodnutí o kreovaní svojej optimálnej spotrebnej stratégie pri meniacich sa parametroch trhového prostredia, ktorými sú v tomto type analýzy obvykle ceny.

V príspevku poukážeme na určité zvláštnosti spotrebnej koša v prípade analýzy produktov sieťových odvetví. Toto špecifikum vyplýva z toho, že spotrebiteľ obvykle v krátkom časovom horizonte nie je reálne schopný substituovať produkt sieťového odvetvia, napr. plyn, elektrickú energiu a podobne iným tovarom s primeranými úžitkovými vlastnosťami, preto vníma produkt ako exkluzívny a táto exkluzivita sa dá potom aj formálne vyjadriť pri konštrukcii funkcie užitočnosti a z toho vyplývajúcich ďalších nadväzujúcich analytických úloh.

Predpokladajme, že na relevantnom trhu sieťového odvetvia pôsobí m spotrebiteľov S_i pre $i = 1, 2, \dots, m$. Tovar, alebo službu sieťového odvetvia, ktoré majú homogénny charakter, povedzme distribúciu elektrickej energie, poskytuje n subjektov, dodávateľov D_j pre $j = 1, 2, \dots, n$.

Budeme teda skúmať trh homogénneho produktu, kde spotreba tovaru o objeme danom premennou x_i je spotrebou homogénneho produktu u i -teho spotrebiteľa S_i a spotreba všetkých ostatných tovarov v spotrebnom koši tohto spotrebiteľa je prezentovaná prepočítanou agregovanou premennou x_{0i} (Martin, S., 2012). Ak je užitočnosť zo spotreby produktu sieťového odvetvia spotrebiteľa S_i daná funkciou $u_i(x_i)$, ktorá vyjadruje úroveň užitočnosti v peňažných jednotkách a cena prepočítaného tovaru je normovaná na hodnotu „1“, tak celková užitočnosť spotrebiteľa S_i je vyjadrená v peňažných jednotkách funkciou $v_i(x_i, x_{0i})$ takto

$$v_i(x_i, x_{0i}) = u_i(x_i) + x_{0i}$$

pričom

$$v_i(x_i, x_{0i}): R^2 \rightarrow R$$

$$u_i(x_i): R \rightarrow R$$

Pri takto vnímanej funkcii užitočnosti ju potom môžeme pre potreby ďalších analýz interpretovať ako celkovú užitočnosť v „peňažných jednotkách“, ktorú pociťuje spotrebiteľ pri kúpe x_i jednotiek produktu sieťového odvetvia a súčasnej kúpe x_{0i} jednotiek agregovaných ostatných tovarov spotrebiteľského koša, ktoré sú ocenené normovanou cenou jedna peňažná jednotka.

Všimnime si, že v dôsledku toho, že funkcia užitočnosti $v_i(x_i, x_{0i})$ je lineárna vzhľadom na premennú x_{0i} dopytu po agregovanom tovare, tak hraničná miera substitúcie nezávisí od spotreby tohto agregovaného tovaru ani od užitočnosti, ktorá je s jeho spotrebou spojená, nakoľko platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i(x_i, x_{0i})}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial v_i(x_i, x_{0i})}{\partial x_{0i}} dx_{0i} &= 0 \\ -\frac{dx_{0i}}{dx_i} &= \frac{\frac{\partial(u_i(x_i) + x_{0i})}{\partial x_i}}{\frac{\partial(u_i(x_i) + x_{0i})}{\partial x_{0i}}} = \frac{\frac{\partial(u_i(x_i) + x_{0i})}{\partial x_i}}{1} = \frac{\partial(u_i(x_i) + x_{0i})}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_i} \\ -\frac{dx_{0i}}{dx_i} &= u_i'(x_i) = mu_i(x_i) \end{aligned}$$

kde

$$u_i'(x_i) = mu_i(x_i): R \rightarrow R$$

je funkcia hraničnej, resp. marginálnej užitočnosti spotreby produktu sieťového odvetvia i -teho spotrebiteľa. Správanie spotrebiteľa možno potom charakterizovať tak, že spotrebiteľ kompenzuje napr. zníženie spotreby tovaru sieťového odvetvia o jedno percento zvýšením spotreby „agregovaného“ tovaru o počet percentuálnych bodov rovný marginálnej užitočnosti tovaru sieťového odvetvia.

Predpokladajme ďalej, že funkcia užitočnosti tovaru sieťového odvetvia $u_i(x_i)$ je pre každého spotrebiteľa S_i hladká, t. j. spojitá a diferencovateľná a jej hodnota je pre nulovú spotrebu

komodity tiež nulová a platí $u_i(0) = 0$. Predpokladajme tiež, že funkcia užitočnosti je konkávna. Ďalej predpokladajme, že funkcia marginálnej užitočnosti $mu_i(x_i)$ je klesajúca, takže pre druhú deriváciu funkcie užitočnosti $u_i''(x_i)$ platí vzťah

$$u_i''(x_i) = \frac{dmu_i(x_i)}{dx_i} = \frac{d^2u_i(x_i)}{dx_i^2} < 0$$

pričom pre definičný obor funkcie hraničnej užitočnosti $mu_i(x_i)$ a obor jej funkčných hodnôt platí $D(mu_i(x_i)) = \langle 0, \infty \rangle$, $H(mu_i(x_i)) = (-\infty, \infty)$.

Inými slovami, hraničná užitočnosť sledovaného tovaru sieťového odvetvia je v zóne rastu užitočnosti kladná, ale jej hodnoty postupne klesajú, aby v bode maxima funkcie užitočnosti dosiahla funkcia hraničnej užitočnosti nulovú hodnotu a pri ďalšom raste spotreby je možný pokles hraničnej užitočnosti do oblasti záporných hodnôt (Rode, S., 2013).

Užitočnosť $u_i(x_i)$ pri kúpe x_i jednotiek tovaru sieťového odvetvia potom zodpovedá ochote spotrebiteľa „zaplatiť“ za x_i jednotiek tohto tovaru adekvátnym počtom x_{0i} jednotiek agregovaného tovaru. Jednoducho vyjadrené, spotrebiteľ je ochotný v záujme získania x_i jednotiek tovaru sieťového odvetvia pri zachovaní úrovne užitočnosti vzdať sa až $u_i(x_i)$ jednotiek agregovaného tovaru s normovanou jednotkovou cenou.

Správanie sa i -teho spotrebiteľa S_i pre každé $i=1, 2, \dots, m$ budeme skúmať prostredníctvom optimalizačnej úlohy maximalizácie funkcie celkovej užitočnosti i -teho spotrebiteľa S_i pri ohraničených výdavkoch na spotrebu so spotrebným limitom w_i a cenou komodity sieťového odvetvia p . Úloha je pre nezáporné premenné x_i a x_{0i} formulovaná takto:

$$v_i(x_i, x_{0i}) = u_i(x_i) + x_{0i} \rightarrow \max$$

pri ohraňení

$$px_i + x_{0i} = w_i$$

$$x_i, x_{0i} \geq 0$$

Hore uvedená optimalizačná úloha matematického programovania je úlohou maximalizácie na viazaný extrém (Jarre, F., Stoer, J., 2012). Upravme túto úlohu na štandardný tvar, t. j. na úlohu minimalizácie takto:

$$-v_i(x_i, x_{0i}) = -u_i(x_i) - x_{0i} \rightarrow \min \quad (1)$$

pri ohraňení

$$px_i + x_{0i} = w_i \quad (2)$$

$$x_i, x_{0i} \geq 0 \quad (3)$$

2. Optimalizácia výrobnjej stratégie firmy

V ďalšom texte sa budeme zaoberať formalizovanou analýzou aktivít výrobcov na tomto trhu. Treba upozorniť na to, že aj nákladová funkcia dodávateľskej firmy, resp. výrobcu má v tomto modeli dodávateľa produktu sieťového odvetvia do istej miery atypickú vecnú interpretáciu.

Podstatou tejto koncepcie je už v rámci analýzy správania sa spotrebiteľa vysvetlené vnímanie trhu, na ktorom sú všetky ostatné výrobky a služby, okrem produktu sieťového odvetvia, vyjadrené agregovaným tovarom s jednotkovou cenou.

Na základe tejto koncepcie potom j -tý dodávateľ na výrobu y_j jednotiek produktu sieťového odvetvia spotrebuje technológiu adekvátny počet jednotiek prepočítaných výrobných faktorov s jednotkovou cenou. Tieto náklady sú vo všeobecnosti súčtom nákladov fixných a nákladov variabilných. Konkrétna štruktúra týchto výrobných faktorov nás v tomto modeli samozrejme nebude zaujímať. Výrobné náklady dodávateľa D_j spojené s produkciou y_j jednotiek vyjadruje funkcia celkových nákladov $n_j(y_j)$, o ktorej budeme predpokladať, že je spojitá a diferencovateľná.

Preskúmame teraz správanie sa j -tej firmy z hľadiska jej prirodzenej tendencie maximalizácie zisku. Správanie sa j -tej firmy D_j pre každé $j=1, 2, \dots, n$ budeme skúmať prostredníctvom optimalizačnej úlohy maximalizácie funkcie zisku j -tej firmy D_j pri podmienke aby trhová cena produktu sieťového odvetvia p , ktorá je parametrom modelu prinajmenšom pokryla priemerné výrobné náklady firmy p (Pfähler, P., Wiese, H., 2005). Táto optimalizačná úloha je pre nezápornú premennú y_j formulovaná takto:

$$z_j(y_j) = py_j - n_j(y_j) \rightarrow \max \quad (4)$$

pri ohraničení

$$\frac{n_j(y_j)}{y_j} \leq p$$

$$y_j \geq 0$$

Hore uvedená optimalizačná úloha je úlohou maximalizácie na viazaný extrém. Upravme túto úlohu na štandardný tvar, t. j. na úlohu minimalizácie:

$$-z_j(y_j) = -py_j + n_j(y_j) \rightarrow \min \quad (5)$$

pri ohraničení

$$\frac{n_j(y_j)}{y_j} - p \leq 0 \quad (6)$$

$$y_j \geq 0 \quad (7)$$

Pre túto úlohu matematického programovania (5), ..., (7) sformulujme zovšeobecnenú Lagrangeovu funkciu v tvare:

$$L_j(y_j, \lambda_j) = -py_j + n_j(y_j) + \lambda_j \left(\frac{n_j(y_j)}{y_j} - p \right) =$$

$$= -py_j + n_j(y_j) + \lambda_j (n_j(y_j)y_j^{-1} - p) \quad (8)$$

Sformulujme podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera (Jarre, F.; Stoer, J., 2012) pre Lagrangeovu funkciu v tvare (8)

j -teho dodávateľa D_j takto

$$\frac{\partial L_j(y_j, \lambda_j)}{\partial y_j} \geq 0 \quad \frac{\partial L_j(y_j, \lambda_j)}{\partial \lambda_j} \leq 0$$

$$y_j \frac{\partial L_j(y_j, \lambda_j)}{\partial y_j} = 0 \quad \lambda_j \frac{\partial L_j(y_j, \lambda_j)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (9)$$

$$y_j \geq 0 \quad \lambda_j \geq 0$$

Podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera v tvare (9) po dosadení analytického tvaru Lagrangeovej funkcie (8) a po ďalšej úprave dostávame v tvare

$$\begin{aligned}
 -p + nm_j(y_j) + \frac{\lambda_j}{y_j}(nm_j(y_j) - np_j(y_j)) &\geq 0 & (h) \quad np_j(y_j) - p &\leq 0 & (k) \\
 y_j \left(-p + nm_j(y_j) + \frac{\lambda_j}{y_j}(nm_j(y_j) - np_j(y_j)) \right) &= 0 & (i) \quad \lambda_j(np_j(y_j) - p) &= 0 & (l) & (10) \\
 y_j &\geq 0 & (j) \quad \lambda_j &\geq 0 & (m)
 \end{aligned}$$

Ak dodávateľská firma bude ponúkať na trhu y_j^* jednotiek produktu sieťového odvetvia, ktoré pri jeho trhovej jednotkovej cene p budú firme garantovať maximálny zisk, tak musí existovať taký Lagrangeov multiplikátor λ_j^* , pre ktorý sú splnené podmienky optimálnosti Kuhna – Tuckera (10), čiže vektor premenných $(y_j, \lambda_j)^*$ je riešením sústavy rovníc a nerovnic (h), (i), ..., (m). Preskúmajme teraz niektoré zaujímavé ekonomicky interpretovateľné dôsledky podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera v kontexte analýzy správania sa dodávateľa na trhu produktov sieťových odvetví:

1. Predovšetkým sa zamyslime nad možnosťami analýzy podmienok optimálnosti Kuhna - Tuckera z hľadiska hodnoty premennej y_j , t.j. objemu produkcie. Zisk firmy je rozdiel medzi jej výnosmi a nákladmi, pričom oborom hodnôt nákladovej funkcie $n_j(y_j)$ sú nezáporné čísla, takže zisk môže byť pri každej kladnej trhovej cene p kladný len pre kladný objem výstupu $y_j^* > 0$. Platnosť podmienky (k) zároveň garantuje, že optimálnemu objemu výstupu y_j^* zodpovedajú priemerné náklady $np_j(y_j^*)$, ktoré neprevyšujú trhovú cenu p .
2. Za predpokladu, že pre optimálny objem ponuky firmy y_j^* platia vzťahy $y_j^* > 0$ a $np_j(y_j^*) \leq p$, tak pre optimálnu hodnotu Lagrangeovho multiplikátora λ_j^* môžu nastať dve situácie:
 - a. Za predpokladu, že hodnota Lagrangeovho multiplikátora je nulová a platí $\lambda_j^* = 0$, tak podmienka (l) je splnená a z platnosti podmienky (i) vyplýva, že pre optimálny objem ponuky sú jej marginálne náklady rovné trhovej cene produkcie a platí $nm_j(y_j^*) = p$, pričom podmienka (h) sa spĺňa ako rovnosť a podmienka (k) sa môže spĺňať aj ako ostrá nerovnosť. Vidíme teda, že v prípade nulovej hodnoty Lagrangeovho multiplikátora môže firma dosahovať kladný maximálny zisk na úrovni hodnoty $py_j^* - n_j(y_j^*)$.
 - b. Za predpokladu, že hodnota Lagrangeovho multiplikátora je kladná a platí $\lambda_j^* > 0$, tak z platnosti podmienky (l) vyplýva, že pre optimálny objem ponuky sú jej priemerné náklady rovné trhovej cene produkcie a platí $np_j(y_j^*) = p$, pričom podmienka (k) sa spĺňa ako rovnosť a podmienka (i) sa preformuluje takto:

$$\begin{aligned}
 y_j \left(-p + nm_j(y_j) + \frac{\lambda_j}{y_j}(nm_j(y_j) - np_j(y_j)) \right) &= \\
 = y_j \left(-p + nm_j(y_j) + \frac{\lambda_j}{y_j}(nm_j(y_j) - p) \right) &= y_j \frac{\lambda_j}{y_j} (nm_j(y_j) - p) = 0
 \end{aligned}$$

Z podmienky (i) teda vyplýva, že optimálnemu objemu výstupu y_j^* zodpovedajú marginálne náklady firmy $nm_j(y_j^*)$ na úrovni, ktorá zodpovedá trhovej cene p , t.j. platí $nm_j(y_j^*) = p$, čo

však zároveň s platnosťou podmienky (1) implikuje rovnosť marginálnych a priemerných nákladov firmy $nm_j(y_j^*) = np_j(y_j^*)$ pre optimálny objem ponuky y_j^* .

V takomto prípade je však optimálna úroveň zisku firmy nula, čomu zodpovedá hraničný prípad, kedy firma ponúka taký objem produkcie, pri ktorom sa trhovú cenu rovná marginálnym nákladom a súčasne minimálnym priemerným nákladom, dosahuje firma nulový zisk.

Záver

V príspevku sme skúmali parciálne modely optimálneho správania spotrebiteľov na trhu sieťových odvetví. Ukázali sme, ako poznatky vyplývajúce z analýzy riešení optimalizačných úloh správania spotrebiteľa na trhoch sieťových odvetví možno efektívne využiť pri interpretácii vecných vzťahov, zákonitostí a strategických rozhodnutí pri správaní sa spotrebiteľov a výrobcov na trhu sieťového odvetvia.

Porušenie podmienok rovnováhy samozrejme nemožno vylúčiť, reálny ekonomický život totiž aj predpokladá určitý vývoj a nestabilitu na každom trhu a teda aj relatívnu krátkodobosť platnosti podmienok rovnováhy, čo v konečnom dôsledku napokon ani nepredstavuje neriešiteľný problém, je však potrebné situáciu kvalifikovane identifikovať a vyhodnotiť možné reakcie na zmenu parametrov systému (Fendek, M., Fendeková, E., 2018).

Keby nenastali hore uvedené situácie, mohli by niektorí spotrebiteľia prostredníctvom výmeny zvýšiť svoju užitočnosť. V takomto prípade by totiž spotrebiteľ s vyššou hraničnou užitočnosťou a teda aj s vyššou hraničnou ochotou zaplatiť za agregovaný tovar mohol zodpovedajúci počet jednotiek produktu sieťového tovaru získať za adekvátny objem agregovaného tovaru od spotrebiteľa s nižšou marginálnou užitočnosťou, čím by si mohli v konečnom dôsledku obaja spotrebiteľia svoje pozície na trhu zlepšiť.

V príspevku sme skúmali podmienky optimálnosti pre parciálne modely optimálneho správania spotrebiteľova producentov produktov na trhu sieťových odvetví. Ukázali sme, ako poznatky vyplývajúce z analýzy podmienok optimálnosti Kuhna – Tuckera formulované relevantné úlohy matematického programovania možno efektívne využiť pri interpretácii vecných vzťahov, zákonitostí a strategických rozhodnutí pri správaní sa spotrebiteľov a výrobcov na trhu sieťového odvetvia.

Ukázali sme teda, že využitie modelových prístupov a teórie optimalizácie pri analýze podmienok rovnováhy na trhu ponuky a dopytu sieťových odvetví umožňuje efektívne skúmať podmienky vzniku rovnováhy ako i dôsledky zmien parametrov trhového prostredia, ktoré majú za následok prehodnotenie atribútov rovnovážneho stavu.

Použitá literatúra

1. CARLTON, D.W., PERLOFF, J. M. 2005. Modern Industrial Organization. Boston: Addison Wesley.
2. FENDEK, M. - FENDEKOVA, E. 2009. Application of the price regulation models in the network industries market in Slovakia. Bonn: 23rd European Conference On Operational Research.

3. FENDEK, M. - FENDEKOVA, E. 2009. Models of Equilibrium in Network Industries in the Context of the Influence of the Regulated Prices. Krakow: The 3rd Scientific Conference on Modelling and Forecasting of Socio-Economic Phenomena.
4. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. 2008. Mikroekonomická analýza. IURA Edition. Bratislava 2008. 557 strán. ISBN 80-88715-54-7.
5. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. 2010. Modely cenovej regulácie sieťových odvetví. Ekonomický časopis: časopis pre ekonomickú teóriu a hospodársku politiku, spoločensko-ekonomické prognózovanie. Bratislava: Ekonomický ústav SAV: Prognostický ústav SAV, ISSN 0013-3035, 2010, roč. 58, č. 10, pp. 1039 – 1055.
6. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. 2009. Models of regulation of network industries in Slovakia. In International journal of economics and business research. - UK: Inderscience Enterprises Ltd, ISSN 1756-9850, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 479-495.
7. FENDEK, M.; FENDEKOVÁ, E. 2012. Kuhn–Tucker optimality conditions in equilibrium models of network industry markets. In Politická ekonomie: teorie, modelování, aplikace. - Praha: Vysoká škola ekonomická, ISSN 0032-3233. - Roč. 60, č. 6 (2012), s. 801-821.
8. FENDEKOVÁ, E. - FENDEK, M. (2018). Mikroekonómia : Oligopoly a regulované monopoly. 1. vydanie. Bratislava: Wolters Kluwer, 2018. 230 s. Ekonómia. ISBN 978-80-8168-765-5.
9. JARRE, F.; STOER, J. Optimierung. Berlin: Springer Verlag. 2012. ISBN3-540-43575-1.
10. MARTIN, S. 2012. Industrial Organization: A European Perspective. Oxford: Oxford University Press, USA.
11. PFÄHLER , P. – WIESE, H. 2005. Unternehmensstrategien im Wettbewerb. Eine spieltheoretische Analyse. Berlin: Springer Verlag.
12. RODE, S. 2013. Modern Microeconomics. Ventus Publishing, 231 s. ISBN 978-87-403.
13. VIVIES, X. 2007. Oligopoly Pricing. Old Ideas and New Tools. Cambridge, New York: The MIT Presss.

Kontakt

Dr. h. c. prof. Ing. Michal Fendek, PhD.
 Katedra operačného výskumu a ekonometrie
 Fakulta hospodárskej informatiky
 Ekonomická univerzita
 Dolnozemska 1
 852 35 Bratislava
 tel: 00421 2 67295 736
 michal.fendek@euba.sk

MODELOVÁNÍ DODAVATELSKÝCH SÍTÍ S E-OBCHODEM

MODELING SUPPLY NETWORKS WITH E-COMMERCE

Petr Fiala

Abstrakt

Zachycení možností modelování e-obchodu v dodavatelských sítích znamená rozšíření klasického způsobu zásobování zákazníků materiálových kanálů od prodejců o elektronické vazby od výrobců a/nebo prodejců. E-obchod je spojen se schopností vykonávat transakce automaticky. Elektronická spojení mezi výrobcí a prodejci reprezentují složku B2B (business-to-business) a elektronická spojení mezi prodejci a zákazníky reprezentují složku B2C (business-to-consumer) e-obchodu. Článek představuje model dodavatelské sítě s e-obchodem, kde se kombinují konkurenční a kooperativní vztahy pomocí postupů matematického programování a teorie her.

***Klíčová slova:** dodavatelská síť, e-obchod, matematické programování, teorie her*

Abstract

Capturing e-commerce modeling capabilities in supply networks means extending the traditional way of supplying customers with material channels from retailers with electronic links from manufacturers and/or retailers. E-commerce is associated with the ability to perform transactions automatically. Electronic connections between manufacturers and retailers represent the B2B (business-to-business) component and electronic connections between retailers and customers represent the B2C (business-to-consumer) component of e-commerce. The paper presents a model of a supply network with e-commerce, where competitive and cooperative relationships are combined using mathematical programming and game theory approaches

***Keywords:** supply network, e-commerce, mathematical programming, game theory*

1 ÚVOD

Dodavatelské sítě jsou tvořeny vrstvami dodavatelů, výrobců, distributorů, prodejců a zákazníků. Dodavatelská síť je vícestupňový systém, od horního stupně dodavatelů ke spodnímu stupni koncových zákazníků. Mezi dvěma sousedními stupni jsou dodavatelsko-odběratelské vztahy. Mezi stupni dodavatelské sítě v obou směrech proudí materiálové, finanční, informační a rozhodovací toky. Materiálové toky zahrnují toky surovin, meziproductů a hotových produktů směrem od dodavatelů k zákazníkům a opačně orientované toky vrácení, servisu, recyklace a likvidace produktů. Finanční toky zahrnují různé druhy plateb, úvěry, toky plynoucí z vlastnických vztahů atd. Informační toky propojují systém informacemi o objednávkách, dodávkách, plánech atd. Rozhodovací toky jsou posloupností rozhodnutí účastníků, ovlivňující celkovou výkonnost řetězce.

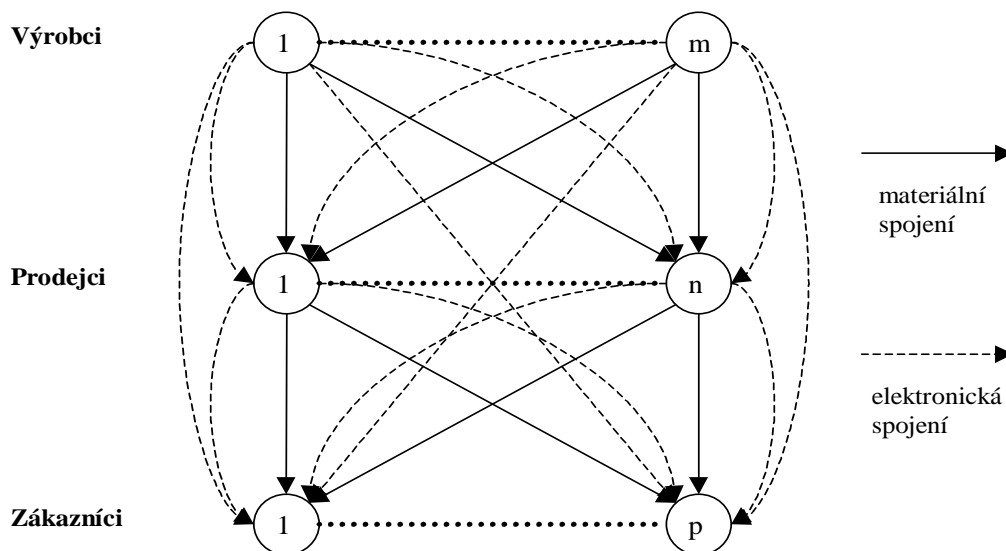
Management dodavatelských řetězců (Supply Chain Management) je bouřlivě se vyvíjející disciplína využívající koncepce, které byly vyvinuty v různých jiných disciplínách (Simchi-Levi aj., 1999). Modelování (Tayur, 1999, Fiala, 2010) je vhodný přístup pro analýzu a zlepšování dodavatelských systémů, který může ve spojení s moderní informační a komunikační technologií pomoci řešit celou řadu problémů.

V navrženém modelu jsou zahrnuty některé důležité vlastnosti síťového prostředí. Model bere v úvahu třívrstvou síťovou strukturu výrobců, prodejců a zákazníků, propojenou materiálními,

finančními a informačními toky a rovněž je uvažována možnost e-obchodu. Model dodavatelských sítí zahrnuje koordinaci toků v různých síťových strukturách a kombinaci nekooperativních a kooperativních rozhodnutí účastníků sítě.

2 MODEL DODAVATELSKÉ SÍTĚ

Model bere v úvahu třívrstvou síť m výrobců ($i = 1, 2, \dots, m$), n prodejců ($j = 1, 2, \dots, n$) a p typů zákazníků (trhů) ($k = 1, 2, \dots, p$). Výrobci prodávají homogenní produkt prodejcům pomocí materiálních a/nebo elektronických kanálů. Výrobci mohou prodávat produkt také přímo zákazníkům pomocí elektronických kanálů. Prodejci prodávají produkt zákazníkům pomocí materiálních a/nebo elektronických kanálů. Zákazníci mohou koupit produkt třemi způsoby: elektronicky od výrobců a/nebo prodejců a pomocí materiálových kanálů od prodejců. E-obchod je spojen se schopností vykonávat transakce automaticky. Elektronická spojení mezi výrobcí a prodejci reprezentují složku B2B (business-to-business) a elektronická spojení mezi prodejci a zákazníky reprezentují složku B2C (business-to-consumer) e-obchodu (Timmers, 1999).



Obr.1. Dodavatelská síť s e-obchodem

Obr. 1 zobrazuje třívrstvou dodavatelskou síť propojených výrobců, prodejců a zákazníků. Plné čáry znázorňují materiální spojení a čárkovaná spojení znázorňují elektronická spojení.

Definujme označení:

$x_{ij}^{(1)}$ = množství produktu zasláno od výrobce i prodejci j pomocí materiálních spojení,

$y_{ij}^{(1)}$ = množství produktu zasláno od výrobce i prodejci j pomocí elektronických spojení,

$x_{jk}^{(2)}$ = množství produktu zasláno od prodejce j zákazníkovi k pomocí materiálních spojení,

$y_{jk}^{(2)}$ = množství produktu zasláno od prodejce j zákazníkovi k pomocí elektronických spojení,

$y_{ik}^{(3)}$ = množství produktu zasláno od výrobce i zákazníkovi k pomocí elektronických spojení,

$x^{(1)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)}$ = množství produktu zaslaného od všech výrobců všem prodejčům pomocí materiálních spojení,

$y^{(1)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^{(1)}$ = množství produktu zaslaného od všech výrobců všem prodejčům pomocí elektronických spojení,

$x^{(2)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p x_{jk}^{(2)}$ = množství produktu zaslaného od všech prodejčů všem zákazníkům pomocí materiálních spojení,

$y^{(2)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p y_{jk}^{(2)}$ = množství produktu zaslaného od všech prodejčů všem zákazníkům pomocí elektronických spojení,

$y^{(3)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p y_{ik}^{(3)}$ = množství produktu zaslaného od všech výrobců všem zákazníkům pomocí elektronických spojení,

$p^{(1)} = p^{(1)}(x^{(1)})$ = cena produktu zaslaného pomocí materiálních spojení účtovaná výrobcí prodejčům jako funkce celkového množství $x^{(1)}$,

$p^{(2)} = p^{(2)}(x^{(2)})$ = cena produktu zaslaného pomocí materiálních spojení účtovaná prodejci zákazníkům jako funkce celkového množství $x^{(2)}$,

$q^{(1)} = q^{(1)}(y^{(1)})$ = cena produktu zaslaného pomocí elektronických spojení účtovaná výrobcí prodejčům jako funkce celkového množství $y^{(1)}$,

$q^{(2)} = q^{(2)}(y^{(2)})$ = cena produktu zaslaného pomocí elektronických spojení účtovaná prodejci zákazníkům jako funkce celkového množství $y^{(2)}$,

$q^{(3)} = q^{(3)}(y^{(3)})$ = cena produktu zaslaného pomocí elektronických spojení účtovaná výrobcí zákazníkům jako funkce celkového množství $y^{(3)}$,

$c_i^{(1)}$ = jednotkové výrobní náklady výrobce i ,

$c_j^{(2)}$ = jednotkové manipulační náklady prodejce j ,

$c_{ij}^{(1)}$ = jednotkové transakční náklady od výrobce i k prodejci j pomocí materiálních spojení,

$d_{ij}^{(1)}$ = jednotkové transakční náklady od výrobce i k prodejci j pomocí elektronických spojení,

$c_{jk}^{(2)}$ = jednotkové transakční náklady od prodejce j k zákazníkovi k pomocí materiálních spojení,

$d_{jk}^{(2)}$ = jednotkové transakční náklady od prodejce j k zákazníkovi k pomocí elektronických spojení,

$d_{ik}^{(3)}$ = jednotkové transakční náklady od výrobce i k zákazníkovi k pomocí elektronických spojení.

3 ZOBECNĚNÁ OLIGOPOLNÍ HRA

Model je zobecněnou oligopolní hrou (Kreps, 1991). Výrobci a prodejci si konkurují nekooperativním způsobem. Je použita koncepce Nashovy rovnováhy (Nash, 1950), která zajišťuje optimální zisk každému vzhledem k dané akci ostatních.

Zaslaná množství produkce jsou nezáporné proměnné, které splňují zřejmá omezení

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p x_{jk}^{(2)},$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^{(1)} \geq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p y_{jk}^{(2)}.$$

Ceny jsou nezáporné proměnné jakožto funkce množství.

Zákazníci kupují produkt pomocí tří různých kanálů: materiální spojení od prodejců, elektronická spojení od prodejců a elektronická spojení přímo od výrobců. Poptávky podle typu prodejních kanálů zákazníka (trhu) k ($k=1, 2, \dots, p$) jsou klesajícími funkcemi cen

$$D_k^{(1)} = D_k^{(1)}(p^{(2)}),$$

$$D_k^{(2)} = D_k^{(2)}(q^{(2)}),$$

$$D_k^{(3)} = D_k^{(3)}(q^{(3)}).$$

Zisk výrobce i je vyjádřen následovně:

$$z_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n p^{(1)} x_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^n q^{(1)} y_{ij}^{(1)} + \sum_{k=1}^p q^{(3)} y_{ik}^{(3)} - c_i^{(1)} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^n y_{ij}^{(1)} + \sum_{k=1}^p y_{ik}^{(3)} \right) -$$

$$- \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(1)} x_{ij}^{(1)} - \sum_{j=1}^n d_{ij}^{(1)} y_{ij}^{(1)} - \sum_{k=1}^p d_{ik}^{(3)} y_{ik}^{(3)}.$$

Podmínky rovnováhy pro výrobce ($i = 1, 2, \dots, m$) jsou dány následujícím systémem rovnic:

$$\frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial x_{ij}^{(1)}} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_{ij}^{(1)}} x_{ij}^{(1)} + p^{(1)} - c_i^{(1)} - c_{ij}^{(1)} = 0, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial y_{ij}^{(1)}} = \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y_{ij}^{(1)}} y_{ij}^{(1)} + q^{(1)} - c_i^{(1)} - d_{ij}^{(1)} = 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$$\frac{\partial z_i^{(1)}}{\partial y_{ik}^{(3)}} = \frac{\partial q^{(3)}}{\partial y_{ij}^{(3)}} y_{ij}^{(3)} + q^{(3)} - c_i^{(1)} - d_{ik}^{(3)} = 0, k = 1, 2, \dots, p.$$

Zisk prodejce j je vyjádřen následovně:

$$z_j^{(2)} = \sum_{k=1}^p p^{(2)} x_{jk}^{(2)} + \sum_{k=1}^p q^{(2)} y_{jk}^{(2)} - c_j^{(2)} \left(\sum_{k=1}^p x_{jk}^{(2)} + \sum_{j=1}^n y_{jk}^{(2)} \right) - \sum_{k=1}^p c_{jk}^{(2)} x_{jk}^{(2)} - \sum_{j=1}^n d_{jk}^{(2)} y_{jk}^{(2)}$$

Podmínky rovnováhy pro prodejce ($j = 1, 2, \dots, n$) jsou dány následujícím systémem rovnic:

$$\frac{\partial z_j^{(2)}}{\partial x_{jk}^{(2)}} = \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_{jk}^{(2)}} x_{jk}^{(2)} + p^{(2)} - c_j^{(2)} - c_{jk}^{(2)} = 0, k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\frac{\partial z_j^{(2)}}{\partial y_{jk}^{(2)}} = \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y_{jk}^{(2)}} y_{jk}^{(2)} + q^{(2)} - c_j^{(2)} - d_{jk}^{(2)} = 0, k = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Podmínky rovnováhy pro zákazníky ($k = 1, 2, \dots, p$) jsou dány následujícím systémem rovnic:

$$D_k^{(1)} = \sum_{j=1}^n x_{jk}^{(2)}$$

$$D_k^{(2)} = \sum_{j=1}^n y_{jk}^{(2)} \quad (3)$$

$$D_k^{(3)} = \sum_{i=1}^m y_{ik}^{(3)}$$

Stav rovnováhy pro dodavatelskou síť je dán množinou podmínek rovnováhy (1), (2) a (3) pro množství zasláního produktu a ceny.

4 ZÁVĚR

Článek formuluje model pro dodavatelské síť s možností e-obchodu, zahrnující elektronické vazby mezi výrobcí a prodejci reprezentují složku B2B a elektronická spojení mezi prodejci a zákazníky reprezentují složku B2C. Vrstvy výrobců a prodejců si konkurují nekooperativním způsobem, ale partneři v jednotlivých dodavatelských řetězcích mohou získat z kooperativního jednání. Kombinace nekooperativního a kooperativního jednání uživatelů síť je realističtější vyjádření vztahů v reálných dodavatelských sítích, což vede k využití koncepce ko-opetice a her ve dvojím tvaru (Fiala, 2016).

Poděkování

Výzkumný projekt je podporován grantem č. IGA F4/42/2021, Fakulty informatiky a statistiky, VŠE, Praha.

Použitá literatura

1. FIALA, P. (2010): Dynamické dodavatelské síť. Professional Publishing, Praha.
2. FIALA, P. (2016): Profit allocation games in supply chains. *Central European Journal of Operations Research* 24(4), 267–281.
3. KREPS, D. (1991): *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford University Press, Oxford.
4. NASH, J. F. (1950) The bargaining problem. *Econometrica* 18, (2), 365-366.
5. SIMCHI-LEVI, D., KAMINSKY, P., SIMCHI-LEVI, E. (1999): *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies and Case studies*. Irwin/ Mc Graw-Hill.
6. TAYUR, S., GANESHAN, R., MAGAZINE, M. (1999): *Quantitative models for supply chain management*. Kluwer, Boston.
7. TIMMERS, P. (1999): *Electronic Commerce: Strategies and Models for Business-to-Business trading*. John Wiley, Chichester.

Kontaktní údaje

Prof. RNDR. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA

Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3

Tel: (420 2) 24 095 447

email: pfiala@vse.cz

VYUŽITIE ALGORITMOV UČENIA POSILŇOVANÍM PRI OPTIMALIZÁCI ŽELEZNIČNÝCH DOPRAVNÝCH UZLOV

REINFORCEMENT LEARNING IN OPTIMIZATION OF RAILWAY NODES

Andrea Galadiková

Abstrakt

Železničná doprava predstavuje efektívny spôsob na prepravu osôb aj tovarov, je však tvorená zložitým komplexom železničných dopravných uzlov a tratí. Práve na zlepšovanie procesov v železničných uzloch je potrebné klásť v dnešnej dobe veľký dôraz. V rámci aplikácie výsledkov operačného výskumu bolo použitých viacero exaktných, ale aj heuristických prístupov. Tieto sa však nejavia ako úplne vhodné a preto tento článok pojednáva o použití algoritmov strojového učenia, konkrétne učenia posilňovaním v oblasti železničných dopravných uzlov.

Kľúčové slová: učenie posilňovaním, železničný uzol, proximal policy optimization

Abstract

Railway transport is an efficient way to transport people and goods, but it consists of a complicated complex of railway nodes and tracks. Today, great emphasis should be given to the improvement of processes in railway nodes. Within the application of the results of operational research, several exact as well as heuristic approaches were used. However, these do not seem to be entirely appropriate and therefore this article deals with the use of machine learning algorithms, in particular reinforcement learning in the field of railway nodes.

Keywords: reinforcement learning, railway node, proximal policy optimization

1 ÚVOD

Železničná doprava je považovaná za jeden z kľúčových prostriedkov na prepravu osôb aj tovaru, najmä vzhľadom na svoje ekologické vlastnosti. Železnica počas svojej dlhoročnej existencie prešla vývojom vo všetkých oblastiach svojej činnosti – technickej, prevádzkovej, personálnej i organizačnej. Napriek tomu nie sú v plnej miere využívané všetky možnosti, ktoré tento spôsob dopravy ponúka. Rovnako ako v iných oblastiach života, aj tu je potrebné zabezpečiť dostatočný stupeň informatizácie a automatizácie mnohých procesov.

Železničná doprava sa skladá zo železničných uzlov a zo železničných tratí, ktoré tieto uzly spájajú. Železničné dopravné uzly sú najmä stanice pre osobnú a nákladnú dopravu, zriaďovacie a odstavné stanice, dielne, rušňové a vozové depo. Takýto uzol sa dá chápať ako komplexný obslužný systém, kde zákazníkmi sú jednotlivé vlaky. Títo zákazníci potrebujú naplňať svoje požiadavky pomocou pridelovania zdrojov (koľaje, personál). Riadenie takého systému musí prebiehať na strategickej, taktickej aj operatívnej úrovni. Na strategickej úrovni vznikajú rozsiahle plány vo forme cestovných poriadkov, či plány pracovných smien personálu. Tieto však nemusia byť funkčné na operatívnej úrovni a to najmä vzhľadom k tomu, že nedostatočne zahŕňajú náhodné vplyvy, ktoré môžu zasiahnuť do prevádzky v železničnom uzle. Takýmto vplyvom môže byť napríklad meškanie vlaku. Ak vlak príde do uzla s meškaním,

môže sa stať, že koľaj, ktorá mu mala byť pridelená je už obsadená iným vlakom. Iný problém nastáva, ak zmeškaný vlak ovplyvní ďalšie naň naviazané vlakové spojenie. Vzhľadom na tieto popísané skutočnosti je zjavné, že je nevyhnutné zamerať pozornosť na hľadanie riešení problémov najmä na operatívnej úrovni, keďže táto úroveň je dôležitá pre efektívnosť celej dopravy. Je potrebné hľadať riešenia optimálne alebo blízke optimálnym, čo je komplikované najmä kvôli komplexnosti železničného uzla.

Operačný výskum sa preto zaoberá touto oblasťou v širokej miere.

2 SÚČASNÝ STAV PROBLEMATIKY

Úsilie o komplexné riešenie problémov sa v rámci súčasného výskumu ukazuje ako nedostatočné. Vzhľadom na komplexnosť celého systému sa výskum v tejto oblasti zameriava hlavne na riešenie čiastkových, striktno definovaných úloh. Autori [15] predpokladali, že je možné nájsť optimálne riešenia rozdelením problému na niekoľko menších čiastkových problémov na základe geografickej topológie, jednotlivých skupín vlakov a časových intervalov.

Aj keď vo väčšine prípadov ide o NP ťažké úlohy, niekoľko autorov pri hľadaní riešení použilo exaktné metódy. Výskumy [18] [12] [13] riešia problém priradenia vhodného vlakového nástupišťa v prípade meškania vlaku, tak aby sa minimalizovalo meškanie ostatných vlakov. Na tento účel boli vytvorené presné matematické modely, ktoré sa použili na riešenie problému v skutočných železničných uzloch pomocou exaktných metód.

Najmä kvôli výpočtovej a časovej neefektívnosti exaktného prístupu použili viacerí autori heuristické metódy. Aby sa minimalizovalo meškanie vlaku, hľadali autori [7] vhodnú trať pre vlak pomocou heuristiky local search a heuristiky tabu search. Autori [3] za účelom riešenia problému oneskoreného príchodu vlaku zostavili maticu 4 kritérií. Tieto kritériá boli stanovené na základe skutočných skúseností dispečerov. Následne bola tréňovaná dvojvrstvová neurónová sieť a výsledky experimentov preukázali použiteľnosť neurónovej siete pre tento typ úlohy. V roku 2019 [4] bola na základe tohto výskumu založená štúdia využívajúca multikritériálnu analýzu.

Zaujímavým prístupom k riešeniu problémov s optimalizáciou v železničnej doprave je použitie metód strojového učenia. Viacero štúdií používa práve tieto metódy, najmä algoritmy učenia posilňovaním. Autor [10] hľadal metódy na optimalizáciu rozloženia nákladných vozňov v zriaďovacej stanici. Usporiadanie a pohyb jednotlivých vagónov popisuje súčasný stav v stanici a prechody z jedného stavu do druhého boli definované na základe Markovovho rozhodovacieho procesu. Následne sa použil algoritmus Q učenia s prihliadnutím na vzdialenosť potrebnú na pohyb, ako aj na počet jednotlivých pohybov. Algoritmus učenia posilňovaním sa tiež použil na vytvorenie cestovného poriadku pre železničnú trať v článku [14], pričom každý vlak bol popísaný svojím vlastným stavovým vektorom. Na základe tohto vektora a zodpovedajúcej hodnoty Q sa vyberie príslušná akcia. V úsilí preskúmať širšie prostredie riešení zahŕňa výber vhodnej akcie určitý stupeň randomizácie. Realizovalo sa porovnanie medzi výsledkami navrhovaného algoritmu a výsledkami dvoch heuristik a ukázalo sa, že algoritmus učenia posilňovaním dosahuje lepšiu kvalitu harmonogramu, a to aj pri testovaní na skutočnej železničnej trati. Ďalším výskumom v tejto oblasti [5] sa autori snažili minimalizovať čas zotrvania každého vlaku na stanici. Za týmto účelom boli použité algoritmy učenia posilňovaním, multiagentový prístup a tri rozhodovacie metódy (FIFO, náhodný presun a Q učenie). Celkový čas zotrvania na stanici sa použil ako hodnotová funkcia pre Q učenie. Aj keď multiagentový prístup dosahuje dobré výsledky, táto štúdia potvrdila, že Q učenie nie je vhodné pre úlohy veľkého rozsahu.

Pre zefektívnenie spôsobu riadenia v železničnom dopravnom uzle sa viacerí autori zaoberali aj kombináciou simulačného modelu a optimalizácie. Vo výskume [2] boli výsledky diskkrétnej simulácie použité pre tréning neurónových sietí. Týmto spôsobom sa vyvinulo úsilie na nájdenie optimálneho súboru pravidiel pre dispečerov. Autori [11] použili kombinovaný prístup simulácie a optimalizácie na minimalizáciu meškaní pri zostavovaní cestovných poriadkov železníc. Autori [8] použili vnorenú simulačnú metódu na riešenie problému priradenia koľaje k meškajúcemu vlaku. Konfliktná situácia preruší hlavný simulačný chod a naklonuje ho. Následne je realizovaných viacero simulačných behov, z ktorých sa vyberie ten najlepší. V rámci tohto výskumu boli realizované experimenty v simulačnom nástroji Mesorail. Výsledky však ukázali, že táto metóda je ťažko aplikovateľná vzhľadom na výpočtovú náročnosť. V rámci iniciatívy Shift2rail bol realizovaný projekt OptiYard, ktorého hlavnou úlohou bolo navrhnúť systém na podporu rozhodovania pre správu terminálov zriaďovacích staníc. Simulačný softvér Villon bol v tomto projekte použitý ako simulačný nástroj pre zostavenie neoptimalizovaných modelov staníc. Pre hľadanie optimálnych riešení bol vytvorený optimalizačný modul obsahujúci heuristický algoritmus. Simulačný model bol použitý ako náhrada reality a bola zabezpečená jeho komunikácia s optimalizačným modulom. Návrh riešenia bol testovaný na dvoch reálnych systémoch (Česká Třebová– 700 vagónov za 24 hodín, Terst – 8000 vlakov ročne). Simulačný model bol však v tomto projekte použitý len na generovanie vstupnej situácie nahrádzajúcej realitu. Kľúčovým pre hľadanie riešení bol optimalizačný modul, ktorý pracoval úplne nezávisle od simulačného modelu. To znamená, že pracoval s vlastným dátovým modelom a tento bol priebežne aktualizovaný na základe situácie v simulačnom modeli. Ak v simulácii došlo ku konfliktnej situácii, bola vyslaná požiadavka optimalizačnému modulu a tento rozhodol nezávisle na simulácii. Následne bolo toto izolované riešenie poslané pomocou komunikačného servera naspäť do simulačného modelu a simulačný beh pokračoval ďalej [19].

Ako je zrejmé z vyššie uvedeného, väčšina výskumov v tejto oblasti sa uskutočňovala na vysokej miere abstrakcie z dôvodu zložitosti celého systému železničných uzlov a je potrebné sa ďalej touto oblasťou zaoberať.

3 MOTIVÁCIA

Vzhľadom na výskum uskutočnený v tejto oblasti sa považuje za vhodné sa tejto problematike venovať hlbšie, pretože podpora riadenia železničných uzlov na operatívnej úrovni je kľúčová k zabezpečeniu efektívneho fungovania železničnej dopravy. Za hlavné problémy v tejto oblasti sa považuje výpočtová zložitosť riešenia problémov, ako aj vysoký stupeň abstrakcie, pretože to spôsobuje rozdielnosť medzi modelovaným riešením a skutočným systémom a práve preto nie je možné tieto modely dobre aplikovať v praxi. V našom výskume sa zameriavame na metódy učenia posilňovaním vychádzajúc z predpokladu, že tento typ optimalizačnej metódy je dostatočne komplexný na to, aby vyriešil problémy danej veľkosti. Okrem toho je veľkou výhodou, že tieto metódy pracujú so simulátormi a v súčasnosti existujú simulačné modely železničných uzlov, ktoré majú potenciál na použitie vo výskume. Dá sa predpokladať, že navrhované riešenie poskytne podporu rozhodovania dispečerom v železničnom uzle, najmä v súvislosti s pridelením personálu k jednotlivým vlakom.

4 UČENIE POSILŇOVANÍM

Algoritmy učenia posilňovaním sa zaoberajú prístupmi umelej inteligencie, ktoré nevyžadujú vstupný dataset, ale vyžadujú kvalitné simulačné prostredie.

V oblasti učenia posilňovaním je potrebné zdefinovať niekoľko pojmov. Algoritmus, ktorý realizuje rozhodnutia, či danú akciu vykonať sa nazýva agent. Agent komunikuje s prostredím a na základe toho sa rozhoduje. Prostredie je možné definovať ako simulátor s presne stanovenými pravidlami pre ohodnotenie stavu a akcie. Stav je situácia prostredia v určitom čase. Akcia je úkon, vedúci k zmene stavu prostredia. Za jednotlivé akcie sú v tomto type algoritmov udeľované odmeny, resp. tresty. Odmeny môžu byť okamžité hneď po vykonaní akcie alebo oneskorené, ktoré agent dostane až po vykonaní budúcich akcií. Hustota výskytu odmien závisí od prostredia a typu úlohy. V prípade hustejšieho počtu odmien sa agent dokáže rýchlejšie naučiť vykonávať správne rozhodnutia. V prípade redšieho výskytu odmien je zas menšie riziko uviaznutia v lokálnom minime. Cieľom agentov je definovať najvhodnejšiu politiku, ktorá mapuje stav simulovaného prostredia do akcií. Toto pravidlo vyjadruje pravdepodobnosť, že sa v danom stave podniknú určité akcie, a môže byť formálne vyjadrené ako:

$$\pi(A_t = a | S_t = s) \\ \forall A_t \in A(s), S_t \in S$$

Základnými metódami pre hľadanie najlepšej politiky sú tzv. tabuľkové metódy, pričom najčastejšie sa používajú metódy Q učenie a SARSA. Tieto metódy aproximujú Q hodnoty, pretože nemajú prístup ku odmenám za všetky možné akcie v ľubovoľnom stave. Q učenie je algoritmom, pri ktorom sa používa stratégia pre učenie počas vykonávania akcií. Cieľom algoritmu je ohodnotiť všetky akcie v jednotlivých stavoch a tak umožniť vybrať akciu, ktorá prinesie najväčšiu odmenu. SARSA („state, action, reward, state, action“) na rozdiel od Q učenia berie do úvahy skutočne vykonanú akciu v budúcom stave a nie tú najlepšiu. V praxi sú tieto metódy málo využívané najmä kvôli pamäťovým nárokom a v praxi sú častejšie využívané metódy, ktoré namiesto tabuliek používajú prediktívne modely, väčšinou hlboké neurónové siete.

V praxi sa ukazuje, že by bolo vhodnejšie namiesto Q hodnôt predikovať pravdepodobnosti akcií, pretože toto umožňuje agentovi vykonať aj iné akcie ako tie s najlepšou Q hodnotou a to mení politiku z deterministickej na stochastickú. Týmto prístupom sa zaoberá politika gradientu. V politike gradientu agent pracuje s dátami z prejdenných trajektórií podľa aktuálnej politiky a aplikovaním gradientu vypočítaným vzhľadom na hodnotu politiky sa zvyšuje pravdepodobnosť trajektórií s vysokou odmenou a znižuje pravdepodobnosť trajektórií s nízkou odmenou. Základným algoritmom politiky gradientu je posilňujúci algoritmus, ktorý funguje na princípe návratnosti odmien a pomocou nich posilňuje, resp. zoslabuje pravdepodobnosti trajektórií. A2C [16] je algoritmom vychádzajúcim z politiky gradientu. Tento algoritmus je tvorený dvoma sieťami a to aktorom a kritikom. Aktor aproximuje politiku, to znamená, že určuje pravdepodobnosť s akou sa od určitého vstupu stane daný výstup. Kritik aproximuje hodnotovú funkciu, to znamená, že určuje ako dobrá daná akcia je.

$$V \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n P^\pi(a_i, s) * R^\pi(a_i, s) + \gamma * V^\pi(s_{i+1})$$

Nevýhodou tohto algoritmu je, že ma sklon ku oscilácii. Aby sa predišlo tejto oscilácii, bol navrhnutý PPO agent, ktorý je rozšírením agenta A2C. PPO funguje na princípe aplikácie malej vzorky skúseností na zmenu politiky a tým zabezpečuje, že sa nová politika nebude príliš líšiť od tej predchádzajúcej.

5 POUŽITIE ALGORITMU PRI OPTIMALIZÁCI V ŽELEZNIČNOM DOPRAVNOM UZLE

Myšlienka použitia algoritmov učenia posilňovaním sa opiera hlavne o realizáciu výskumu v oblasti počítačových hier [9] [17] [6], pretože je možné nájsť podobné vlastnosti medzi prostredím počítačových hier a simulačnými modelmi železničných uzlov.

Pre použitie algoritmov učenia posilňovaním je potrebné definovať jednotlivé stavy prostredia vo forme vstupného stavového vektora. V prípade železničného uzla môže stav definovať poloha jednotlivých vlakov, poloha personálu, vzdialenosti medzi nimi, zoznam prebiehajúcich obslužných činností a podobne. Okrem stavu prostredia je potrebné definovať jednotlivé akcie, ktoré povedú k zmene stavu prostredia. V prípade železničného uzla môže byť takouto činnosťou ukončenie obslužnej činnosti a prechod na inú, pridelenie vhodnej vlakovej trate, pridelenie personálu k vlaku, pridelenie obslužnej činnosti vlaku... Okrem stavov a akcií, je pre funkčnosť algoritmu agenta potrebné definovať odmeny / pokuty, ktoré sa budú udeľovať za každé uskutočnenie akcie. Účelová funkcia môže definovať tieto odmeny, kde je snahou minimalizovať / maximalizovať určitú súhrnnú hodnotu, ako napríklad celkové meškanie vlakov, celkové pracovné vyťaženie personálu, počet využitých / nevyužitých zamestnancov, počet obsluhovaných vlakov ...

Ako už bolo spomenuté vyššie, algoritmy učenia posilňovaním vyžadujú kvalitné simulátory. V súlade s tým musí byť vytvorené aj simulačné prostredie pre prostredie železničného uzla. V tejto oblasti sa ponúka viacero možností a simulačný softvér Villon sa javí ako vhodný, nakoľko poskytuje takéto simulačné modely. Tento softvér umožňuje vytváranie mikroskopických simulačných modelov v oblasti dopravy. [1] Používateľ môže použiť rôzne vstupy na vykonávanie rôznych experimentov a vo väčšine ohľadov sa tieto simulačné modely javia ako vhodné na použitie týchto simulačných modelov v spojení s učením posilňovaním.

Navrhovaný prístup bude overený na skutočnom železničnom uzle, konkrétne v údržbovom depe Val Notre Damme, ktorého rekonštrukcia je plánovaná na zlepšenie dopravy v okolí Paríža v súvislosti s olympijskými hrami 2024. V tomto depe sa na prepravu vlakov medzi jednotlivými miestami, kde prebieha údržba používajú rušňovodiči a tí sa musia presúvať medzi jednotlivými vlakmi. Práve tieto presuny znamenajú neefektívne využitie pracovného času a bolo by vhodné sústrediť sa na minimalizáciu času na tieto presuny. Na túto minimalizáciu bude použitý algoritmus PPO implementovaný v jazyku Python pomocou knižnice Pytorch a ako simulačné prostredie bude použitý simulačný model vytvorený simulačným nástrojom Villon. Tento simulačný nástroj v súčasnosti používa pri rozhodovaní metódu priority listu a dá sa predpokladať, že metóda navrhnutá v tomto článku prinesie lepšie výsledky.

6 ZÁVER

Tento článok popisuje použitie rôznych optimalizačných metód pre úlohy, ktoré je potrebné vyriešiť v železničnom dopravnom uzle, najmä na operatívnej úrovni. Železničný uzol je komplexný systém služieb a preto je v takomto systéme potrebné vziať do úvahy veľké množstvo premenných. Z dôvodu zložitosti problému sa zdá byť efektívne použitie algoritmov učenia posilňovaním, konkrétne algoritmu PPO. Tento algoritmus vyžaduje existenciu simulačného prostredia. Takéto simulačné prostredie na mikroskopickej úrovni ponúkajú simulačné modely vytvorené v simulačnom nástroji Villon. Na základe analýzy sa predpokladá, že navrhovaná metóda môže zlepšiť operatívne riadenie železničného uzla a poskytnúť tak podporu pre rozhodovanie v tomto systéme.

Použitá literatúra

1. ADAMKO, N.2013. Agentovo orientovaná simulácia zložitých obslužných systémov. In: Habilitačná práca, 2013, s. 114.
2. AZADEH, A. - NEGAHBAN, A. - MOGHADDAM, M.2012. A hybrid computer simulation-artificial neural network algorithm for optimisation of dispatching rule selection in stochastic job shop scheduling problems. In: International Journal of Production Research, roč. 50.2,2012, s. 551–566.
3. BAŽANT, M. - KAVICKA, A.2009. Artificial neural network as a support of platform track assignment within simulation models reflecting passenger railway stations. In: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, roč. 223.5, 2009, s. 505–515.
4. BAŽANT, M. a kol. 2019. Simulation-based rail traffic optimisations applying multicriterial evaluations of variants. In: Mendel, roč. 25.1, 2019, s. 139–146.
5. BRETAS, A. a kol. 2019. Modelling railway traffic management through multi-agent systems and reinforcement learning. In: International Congress on Modelling and Simulation - Supporting Evidence-Based Decision Making: The Role of Modelling and Simulation, MODSIM, roč. 23, 2019, s. 291–297.
6. CHEN, L. - LIU, T. - LIU., Y. 2020. Research on the StarCraft II Decision Method Based on Hierarchical Reinforcement Learning. In: Proceedings of the 32nd Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2020, roč. 32, 2020, s. 582–586. url: www.scopus.com.
7. CORMAN, F. a kol. 2010. A tabu search algorithm for rerouting trains during rail operations. In: Transportation Research Part B: Methodological roč. 44.1, 2010, s. 175–192.
8. DIVIŠ, R. – KAVIČKA, A.2016. The method of nested simulations supporting decision-making process within a mesoscopic railway simulator. In: European Modeling and Simulation Symposium, EMSS, roč. 28, 2016, s. 100–106.
9. FU, Y. a kol. 2020. Coordinating Multi-Agent Deep Reinforcement Learning in Wargame. In: ACM International Conference Proceeding Series. 2020. url: www.scopus.com.
10. HIRASHIMA, Y. 2011. A reinforcement learning method for train marshaling based on movements of locomotive. In: IAENG International Journal of Computer Science, roč. 38.3, 2011, s. 242–248.
11. HÖGDAHL, J. - BOHLIN, M. – FRÖIDH, O.2019. A combined simulation-optimization approach for minimizing travel time and delays in railway timetables. In: Transportation Research Part B: Methodological, roč. 126, 2019, s. 192–212.
12. JÁNOŠÍKOVÁ, L. - KAVIČKA, A. – BAŽANT, M.2014. Optimal operation scheduling and platform track assignment in a passenger railway station. In: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit roč. 228.3, 2014, s. 271–284.
13. JÁNOŠÍKOVÁ, L. – KREMPL, M.. Train platforming problem. In: Lecture Notes in Geoinformation and Cartography, 2015, s. 149.

14. KHADILKAR, H. 2019. A Scalable Reinforcement Learning Algorithm for Scheduling Railway Lines. In: IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems roč. 20.2, 2019, s. 727–736.
15. LUAN, H. a kol. 2020. Decomposition and distributed optimization of real-time traffic management for large-scale railway networks. In: Transportation Research Part B: Methodological 141 (2020), s. 72–97.
16. SCHULMAN, J. a kol. 2017. Proximal policy optimization algorithms. In: arXiv preprint arXiv:1707.06347, 2017.
17. ZHA, Z. Y. - WANG, B. – TANG, X. S. 2021. Evaluate, explain, and explore the state more exactly: an improved Actor-Critic algorithm for complex environment. English. In: Neural Computing and Applications, 2021. url: www.scopus.com.
18. ZHANG, Y. a kol. 2020. A Fast Approach for Reoptimization of Railway Train Platforming in Case of Train Delays. In: Journal of Advanced Transportation, 2020.
19. LICCIARDELLO, R. – ADAMKO, N. – DELEPLANQUE, S. a kol. 2020. Integrating yards, network and optimisation models towards real-time rail freight yard operations. In: Ingegneria Ferroviaria, roč. 75, 2020, č. 6, s 417-447

Kontaktné údaje

Ing. Andrea Galadíková

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline,

Univerzitná 8215/1, 01026 Žilina,

Slovensko

Tel: 0915 461 724

email: andrea.galadikova@fri.uniza.sk

OVERENIE ROBUSTNOSTI RIEŠENÍ PRI RIEŠENÍ ÚLOHY ROZMIESTŇOVANIA NABÍJACÍCH ÚSEKOV V DOPRAVNEJ SIETI

SOLUTIONS ROBUSTNESS VERIFICATION WHEN SOLVING THE LOCATION PROBLEM OF CHARGING ROAD SEGMENTS IN THE TRANSPORT NETWORK

Dobroslav Grygar

Abstrakt

Pri riešení úlohy návrhu minimálnej siete trolejových vedení, ktoré by boli dostatočné pre nabíjanie a prevádzku trolejbusov doplnených o batériu, ako náhradný zdroj energie vstupujú do výpočtov rôzne vstupné parametre. Od ich nastavenia závisia získané výstupné riešenia úlohy. Čo ak by ale nastala situácia, kedy by boli takéto vedenia už vybudované, a niektorá časť systému by zmenila svoje parametre? Na tento účel sme vytvorili zjednodušený postup ako overiť robustnosť už získaných riešení. V tomto článku ho predstavíme a uvedieme aj experimenty pri ktorých simulujeme zvýšenie spotreby energie v stúpaniach.

***Kľúčové slová:** Robustnosť riešení, lokačná úloha na hranách, parciálny trolejbus.*

Abstract

While solving the problem of designing a minimal network of overhead contact lines, which would be sufficient for charging and operation of battery-assisted trolleybuses, various input parameters are included in the calculations. The obtained output solutions of the problem are depending on parameter settings. But what if there was a situation where such lines were already built and some part of the system changed its parameters? For this purpose, we have created a simplified procedure for verifying the robustness of already obtained solutions. In this paper, we will introduce it and present experiments in which we simulate the increase in energy consumption in ascending parts of routes.

***Keywords:** Solution robustness, location problem on edges, battery-assisted trolleybus.*

1 ÚVOD

Téma znečistenia ovzdušia sa na celom svete stáva čoraz významnejšou. Počas parížskej konferencie, ktorá sa konala v decembri 2015, bola prijatá historická dohoda až 195 krajín na vytvorení akčného plánu, ktorého cieľom je obmedziť nárast globálneho otepľovania hlboko pod 2 stupne Celzia. Aby to bolo možné dosiahnuť, je nutné zníženie emisií oxidu uhličitého naprieč všetkými odvetvami ekonomiky [1], [2].

Zaujímavú alternatívu predstavujú parciálne trolejbusy. Jedná sa o trolejbus, ktorý je vybavený doplnkovým zdrojom energie. Ním sú v našom prípade batérie, ktoré umožňujú vozidlu prekonať aj neelektrifikované úseky. Batérie sú dobíjané počas jazdy po úsekoch, ktoré sú pokryté trolejovým vedením. Technológia parciálnych trolejbusov prepája výhody klasických trolejbusov so slobodou pohybu autobusov. Môžeme predpokladať, že záujem o nasadzovanie tejto technológie bude mať stúpajúci trend [3].

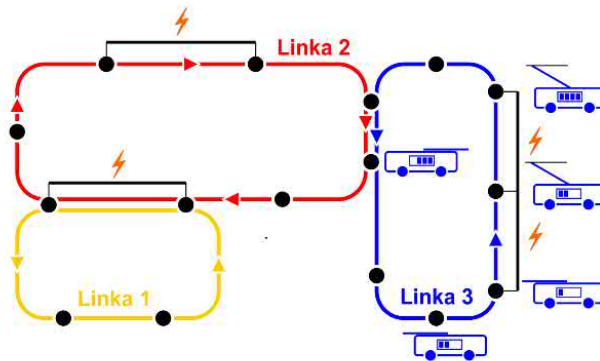
V našom predošlom výskume sme sa zamerali na návrh algoritmov na riešenie úlohy rozmiestňovania trolejových vedení. Ako vstupné parametre bola použitá priemerná spotreba a rýchlosť nabíjania takéhoto druhu vozidiel. Hodnoty boli založené na pozorovaní reálnych vozidiel v premávke [4]. Hodnoty sme testovali v troch scenároch a to jarnom, letom a zimnom.

Vo všeobecnosti sa pri overovaní robustnosti riešení vychádza z faktu, že podmienky nie sú vždy jednoznačné. V optimalizovaných systémoch vždy vzniká istý faktor neistoty. Preto je potrebné rátať s tým, že môže nastať najhorší scenár. Za robustné riešenie môže byť považované také, pri ktorom systém funguje práve v prípade, že takýto scenár nastane [5], [6].

V realnej premávke na jazdu vozidla vplyva veľa rôznych vonkajších faktorov. Môže sa jednať napríklad o zápchy, obchádzky, tiahle stúpania, či klesania. V extrémnom prípade môžu tieto faktory mať veľký vplyv na spotrebu, ktorý nie je obsiahnutý v priemerných hodnotách spotreby. Preto sme sa rozhodli navrhnúť spôsob, akým je možné získané riešenia overiť aj v prípade zvýšených nárokov na energiu.

2 POPIS ZÁKLADNÉHO PROBLÉMU A MODEL ÚLOHY

Hromadná doprava je v mestách obsluhovaná pomocou vozidiel, ktoré jazdia podľa stanovených turnusov. Zastávky, križovatky a depá, ktoré sú vozidlami hromadnej dopravy využívané, sú prepojené úsekmi ciest. Toto všetko spolu tvorí digraf cestnej siete. Na obrázku môžeme vidieť príklad takéhoto digrafu, ktorý je tvorený tromi turnusmi vozidiel. Turnusy môžu mať isté úseky cesty zdieľané a iné úseky, ktoré sú využívané iba jedným turnusom alebo časťou z nich. Nastáva otázka, ako pokryť takúto sieť trolejovým vedením tak, aby bolo možné na danom digrafe nasadiť parciálne trolejbusy [3]. Ilustrácia jednoduchej úlohy s tromi turnusmi na nachádza na obrázku 1.



Obrázok 1: Zjednodušený náčrt riešeného problému. Máme niekoľko liniek (v tomto prípade tri), ktoré majú niektoré časti trás spoločné a iné samostatné. Z týchto úsekov vyberáme tak, aby vznikla minimálna nabíjacia sieť trolejových vedení.

Úlohu návrhu infraštruktúry pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov môžeme po istej úprave prirovnať ku lokačnej úlohe. Jedná sa o lokačnú úlohu na hranách. Hrany v sieti vyberáme tak, aby sme čo najviac znížili celkové náklady na vybudovanie siete.

V lokačnom modeli sa nachádzajú nasledujúce premenné a konštanty. Nech y_i je rozhodovacia premenná o vybudovaní alebo nevybudovaní vedenia na úseku i , potom $z_{r,j+1}$ je rozhodovacia premenná o stave batérie vozidla r po prejdení úseku j . Ďalej B_{max} označuje maximálny stav batérie v kWh, respektíve B_{min} minimálny stav batérie v kWh. Následne CO je konštanta spotreby energie v kWh/m a CH je konštanta nabíjania z vedenia v kWh/m. Potom m je počet vozidiel (turnusov) a n je počet úsekov cesty, D_i je dĺžka úseku i , $a(r,j)$ je index j -teho úseku na trase vozidla r a $q(r)$ je nakoniec počet úsekov v turnuse vozidla r [3].

$$\min \sum_{i=1}^n D_i \cdot y_i. \quad (1)$$

$$z_{r,1} = Bmax - Bmin \quad \text{for } r = 1, \dots, m. \quad (2)$$

$$z_{r,j+1} - z_{r,j} \leq -CO \cdot D(a_{r,j}) \cdot (1 - y(a_{r,j})) + CH \cdot D(a_{r,j}) \cdot y(a_{r,j})$$

$$\text{for } r = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, q(r). \quad (3)$$

$$z_{r,j+1} \leq Bmax - Bmin \quad \text{for } r = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, q(r). \quad (4)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{for } i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$z_{r,j} \geq 0 \quad \text{for } r = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, q(r). \quad (6)$$

Účelová funkcia (1) zostáva stále nezmenená, teda minimalizuje náklady na vybudovanie úsekov vedenia. Podmienka (2) udáva počiatočný stav batérie na začiatku turnusu. Podmienka (3) udáva spotrebu a nabitie pri prejení daného úseku. Podmienka (4) označuje rozsah, v ktorom sa môže pohybovať stav batérie. Pod číslami (5) a (6) sa nachádzajú obligatorné podmienky.

3 DÁTA A TESTOVACIE ÚLOHY

Dáta sme získali pomocou programu OptSim. Ako geografický podklad slúžia dáta zo systému OSM. Pripravili sme 8 testovacích úloh, rôznej veľkosti. V najjednoduchšom prípade išlo o jeden turnus, potom o viaceré turnusy a nakoniec až turnusy všetkých vozidiel v meste. Parametre testovacích úloh sa nachádzajú v tabuľke 1.

Názov úlohy	Počet vozidiel (turnusov)	Počet unikátnych úsekov cesty	Priemerný počet úsekov cesty v turnuse	Celková dĺžka použitých úsekov (m)
Bus 1	1	215	426	40 809
Tbus 1	1	129	1146	17 449
Bus 5	5	486	954,2	100 041
Tbus 5	5	254	946,2	37 469
TBus ZA	30	299	1320,4	45 174
Bus ZA	30	753	764,2	209 445
ZA	60	779	1042,3	212 618

Tabuľka 1: Zvolené testovacie úlohy.

Počiatočný stav nabitia batérie počítame ako 100% kapacity, pri všetkých testovacích úlohách. Počasie ovplyvňuje kapacitu batérie vozidla. Tento vplyv je značný [7], [8], preto sme vytvorili tri scenáre (jarný, letný a zimný). Jarný scenár reprezentuje "štandardnú prevádzku vozidla" pri teplote 18 stupňov Celzia, kedy vozidlo nie je teplotou ovplyvnené. V letnom scenári predpokladáme, že je potrebné spotrebovať dodatočnú energiu na klimatizovanie vozidiel. Zimný scenár má rovnako zvýšené nároky na energiu, keďže je potrebné vykurovať priestor vozidla a zároveň zohrievať batérie. Okrem toho sa v chladnom počasí aj znižuje kapacita batérie, čo simulujeme znížením jej kapacity. Spotreba energie vozidla je odvodená z dát získaných pozorovaním už nasadených vozidiel [4]. Jednotlivé scenáre a parametre vozidiel sú v tabuľke 2.

Scenár	Min. stav batérie (kWh)	Max. stav batérie (kWh)	Nabíjanie (kWh/m)	Spotreba (kWh/m)
jar	10	40	0,0026	0,0013
leto	10	40	0,0026	0,0023
zima	10	30	0,0026	0,0023

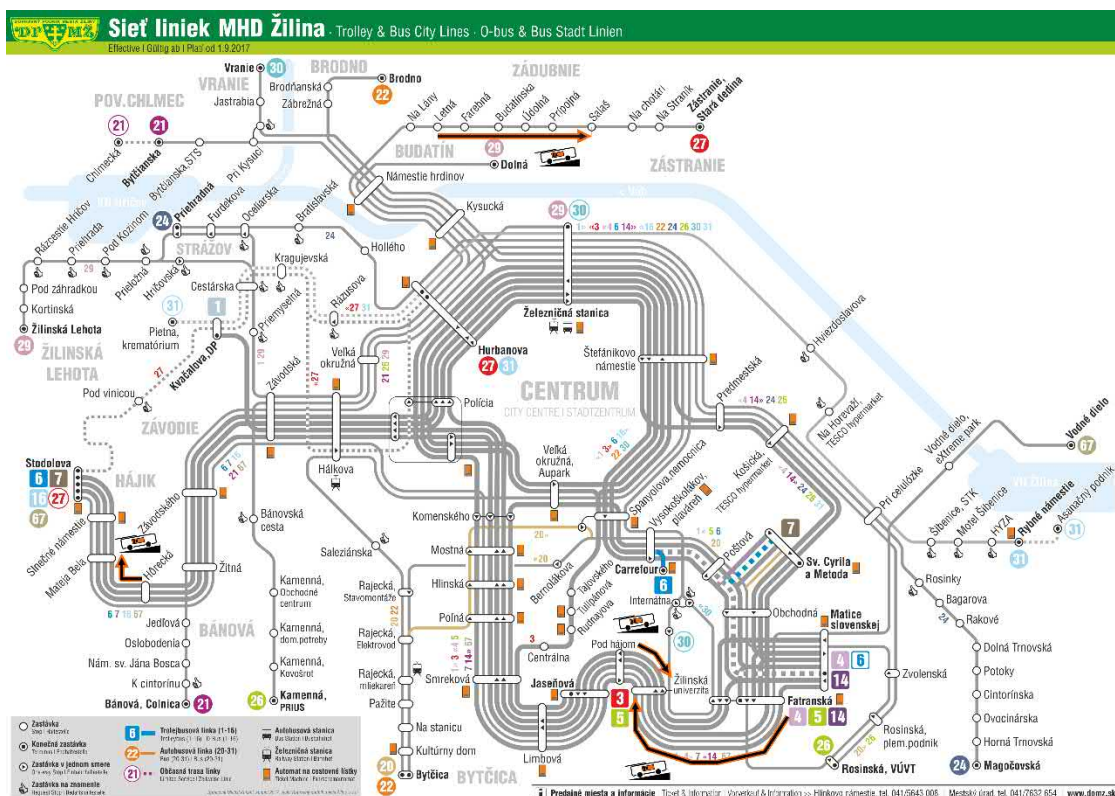
Tabuľka 2: Scenáre a parametre vozidiel.

4 OVERENIE ROBUSTNOSTI A NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Na overenie robustnosti riešenia je vo všeobecnosti možné použiť napríklad simulačný model. V našom prípade sme sa rozhodli použiť veľmi zjednodušený model, ktorý bude overovať kvalitu dosiahnutých riešení pri doplnení niektorých ďalších parametrov na cestnej sieti, ako je napríklad sklon úseku, čo môže výrazným spôsobom ovplyvniť spotrebu energie na prekonanie takéhoto úseku.

Postup overenia robustnosti zjednodušeným modelom bol taký, že sme na upravenej cestnej sieti postupne testovali jednotlivé turnusy a sledovali sme, či na niektorých úsekoch nedôjde k poklesu stavu nabitia batérie pod minimálnu prípustnú úroveň. Ak k takejto situácii došlo, daný turnus nie je prípustným. Zároveň sme vyhodnocovali aj dĺžku časti turnusu, ktorá je neprípustná. Riešenia používame tie, ktoré boli nájdené pomocou exaktného prístupu s využitím substituovaného modelu [3].

Na sieti mesta Žilina sme vybrali tie úseky, ktoré majú najvýraznejšie stúpanie. Vybrané úseky sa nachádzajú na obrázku 2. Pre tieto úseky sme testovali zvýšenie úrovne zvýšenia spotreby energie o 0,001\$ kWh/m.



Obrázok 2: Zjednodušený náčrt riešeného problému. Máme niekoľko liniek (v tomto prípade tri), ktoré majú niektoré časti trás spoločné a iné samostatné. Z týchto úsekov vyberáme tak, aby vznikla minimálna nabíjacia sieť trolejových vedení.

V tabuľkách 3, 4, a 5 sa nachádzajú výsledky experimentov s overovaním robustnosti riešení. Tabuľky začínajú stĺpcom s názvom datasetu a hodnotou účelovej funkcie, ktorú sme získali exaktným výpočtom pomocou substituovaného lokačného modelu úlohy. Ďalšie dva stĺpce tabuliek obsahujú počet prípustných respektíve neprípustných turnusov. V posledných stĺpcoch tabuliek uvádzame priemer neprípustných častí turnusov a aj maximálnu hodnotu. Tabuľky sú delené podľa troch scenárov. Ďalej delíme tabuľky aj podľa hodnoty, o ktorú bola v danom prípade zvýšená spotreba v stúpaní.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prípustné turnusy	Neprípustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	6859	0	1	27,96	27,96
Tbus 1	4911	0	1	10,08	10,08
Bus 5	15109	4	1	2,66	13,29
Tbus 5	6655	2	3	12,92	39,97
Tbus ZA	8895	15	15	9,01	54,67
Bus ZA	23198	23	7	8,70	77,79
ZA	24434	40	20	6,48	77,00

Tabuľka 3: Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m – jarný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prípustné turnusy	Neprípustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	12308	0	1	4,01	4,01
Tbus 1	7458	0	1	24,79	24,79
Bus 5	25898	4	1	1,59	7,92
Tbus 5	10669	0	5	13,21	29,9
Tbus ZA	13653	14	16	7,46	36,98
Bus ZA	42518	21	9	7,91	76,25
ZA	44471	50	10	4,85	74,26

Tabuľka 4: Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m – letný scenár.

Dataset	UF (m) Exakt.	Prípustné turnusy	Neprípustné turnusy	Priem. časť turnusu pod SOC 0 v %	Max. časť turnusu pod SOC 0 v %
Bus 1	13912	0	1	28,26	28,26
Tbus 1	7685	0	1	32,65	32,65
Bus 5	27590	4	1	1,5	7,5
Tbus 5	11184	0	5	18,86	40,08
Tbus ZA	14114	11	19	10,6	52,25
Bus ZA	46455	23	7	11,04	86,11
ZA	47760	45	15	7,86	84,54

Tabuľka 5: Test robustnosti riešení pri zvýšení spotreby v stúpaní o hodnotu 0.0013 kWh/m – zimný scenár.

5 ZÁVER

Využívanie parciálnych trolejbusov v mestách môže pomôcť pri prechode na environmentálne udržateľné spôsoby prepravy. Vytvorením minimálnej siete trolejových vedení dokážeme minimalizovať náklady na výstavbu potrebnej infraštruktúry. Takúto sieť je ale potrebné podrobiť testu robustnosti, pri ktorom hľadáme odpovede na obrázku, ako sa bude sieť správať, ak nastanú neštandardné hodnoty parametrov.

Na základe vykonaných experimentov sme zistili, že na zmenu parametrov v cestnej sieti sú viac citlivé výsledky s použitým jarným scenárom. Je to spôsobené tým, že v rámci tohto scenára je vo všeobecnosti vybudovaných menej úsekov trolejového vedenia, čo má za následok viac neprípustných scenárov pri overovaní robustnosti takýchto riešení.

V praxi by takýto prepočet mohol byť použitý, okrem stúpaní, napríklad aj pri úsekoch v cestnej sieti, na ktorých môžu vznikáť zápchy. Týmto spôsobom je možné identifikovať turnusy, v ktorých hrozí strata energie. Na tieto turnusy môžu byť nasadené vozidlá s väčšou batériou, prípadne môže byť posilnená samotná sieť trolejových vedení [3].

Podakovanie

Tento príspevok bol podporovaný grantmi VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest”.

Použitá literatúra

1. GRYGAR, Dobroslav. Exaktný prístup na návrh minimálnej siete pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov. Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XIII, Zuberec. 2019. ISBN:978-80-225-6417-1
2. XYLIA, Maria; LEDUC, Sylvain; PATRIZIO, Piera; KRAXNER, Florian; SILVEIRA, Semida. Locating charging infrastructure for electric buses in Stockholm. Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2017, roč. 78, s. 183–200.issn0968-090X. Dostupné z doi:<https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.03.005>.
3. GRYGAR, Dobroslav. Efektívne algoritmy na riešenie úlohy rozmiestnenia nabíjajúcich úsekov v dopravnej sieti. Žilina, Slovensko, 2021. Dizertačná práca. Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a infor-matiky, Katedra matematických metód.
4. BARTŁOMIEJCZYK, Mikołaj. Practical application of in motion charging: Trolleybuses service on bus lines. 2017 18th International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE). 2017, s. 1–6.
5. BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of uncertain linear programs. Operations Research Letters. 1999, roč. 25, č. 1, s. 1–13.issn0167-6377.
6. GOBERNA, M.A.; JEYAKUMAR, V.; LI, G.; VICENTE-PÉREZ, J. Robust solutions to multi-objective linear programs with uncertain data. European Journal of Operational Research. 2015, roč. 242, č. 3,s. 730–743.issn0377-2217.
7. GÖHLICH, D.; KUNITH, A.; LY, T. Technology Assessment Of An Electric Urban Bus System For Berlin.WIT Transactions on The Built Environment. 2014, roč. 138, s. 13. Dostupné zdoi:<http://dx.doi.org/10.2495/UT140121>. ISBN: 9781845647780
8. WANG, Jiang-bo; LIU, Kai; YAMAMOTO, Toshiyuki; MORIKAWA, Takayuki. Improving Estimation Accuracy for Electric Vehicle Energy Consumption Considering the Effects of Ambient Temperature. Energy Procedia. 2017, roč. 105, s. 2904–2909.issn1876-6102. 8th International Conference on Applied Energy, ICAE2016, 8-11 October 2016,Beijing, China.

Kontaktné údaje

Ing. Dobroslav Grygar
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
email: dobroslav.grygar@fri.uniza.sk

ÚLOHA LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA A PROGRAMOVACÍ JAZYK PYTHON VO VÝUČBE

LINEAR PROGRAMMING PROBLEM AND PROGRAMMING LANGUAGE PYTHON IN TEACHING

Michaela Chocholatá¹

Abstrakt

Predmetom príspevku je riešenie úlohy lineárneho programovania s využitím programovacieho jazyka Python vo výučbe s cieľom nielen nájsť optimálne riešenie úlohy, ale tiež poukázať na princíp riešenia úlohy simplexovou metódou. V príspevku je predstavený program umožňujúci nájsť všetky bázické riešenia konkrétnej úlohy lineárneho programovania, zistenie ich prípustnosti a na základe hodnôt účelovej funkcie špecifikuje optimálne riešenie. Vysoko flexibilné možnosti programovacieho jazyka Python prispievajú jednak k tvorivému prístupu študentov k riešeniu zadaných problémov a otvárajú tým tiež možnosti k lepšej adaptabilite študentov na trhu práce.

***Kľúčové slová:** lineárne programovanie, Python, simplexová metóda*

Abstract

This paper deals with the solution of the linear programming problem based on use of the Python programming language in teaching in order not only to find the optimal solution of the problem, but also to point out the principle of solving the problem by the simplex method. This paper presents a program that allows to find all the basic solutions to a specific linear programming problem, determine their feasibility and, based on the objective function's values, specify the optimal solution. The highly flexible possibilities of the Python programming language contribute on the one hand to the creative approach of students to solving of specified problems and thus also open up possibilities for better adaptability of students in the labour market.

***Keywords:** linear programming, Python, simplex method*

1 ÚVOD

Lineárne programovanie je súčasťou matematického programovania, predmetom ktorého je zobrazenie určitej ekonomickej reality s cieľom nájsť najlepšie riešenie pri určitých ohraničujúcich podmienkach. Z matematického hľadiska ide v matematickom programovaní o riešenie úloh na viazané extrémny funkcií viacerých premenných. V prípade lineárneho programovania ide o hľadanie extrémov lineárnych funkcií, pričom ohraničujúce podmienky (rovnice, nerovnice) sú takisto lineárne. Základnou náplňou lineárneho programovania sú úlohy s jednou účelovou funkciou, t.j. úlohy jednokriteriálnej, resp. skalárnej optimalizácie (Brezina, Ivaničová a Pekár, 2007; Chocholatá, 2013).

Významným medzníkom v histórii lineárneho programovania bolo objavenie a prezentovanie simplexovej metódy americkým matematikom Georgeom B. Dantzigom v roku 1947, čoho následkom sa lineárne programovanie a jeho prístupy stávajú populárnymi už nielen v oblasti

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0193/20.

vojenských aplikácií, ale aj v oblasti priemyslu, obchodu, dopravy či štátnej správy. Od objavenia simplexovej metódy sa oblasť lineárneho programovania prudko rozvíjala, boli publikované viaceré nové algoritmy, spomedzi ktorých možno spomenúť Khachiyanovu elipsoidovú metódu z roku 1979 či prevratný objav realizovaný v roku 1984 Karmarkarom týkajúci sa publikovania algoritmu vnútorného bodu (Plesník, Dupačová a Vlach, 1990; Laščiak a kol., 1990; Brezina, Pekár a Reiff, 2020; Chocholatá, 2013).

Predmetom príspevku je poukázanie na možné využitie programovacieho jazyka Python vo výučbe lineárnej optimalizácie s cieľom poukázať na nutnosť nielen vypočítať optimálne riešenie úlohy a interpretovať ho, ale pochopiť tiež princíp riešenia konkrétnej úlohy malých rozmerov pomocou simplexovej metódy. Štruktúra príspevku je nasledujúca: časť 2 je venovaná matematickej formulácii úlohy lineárneho programovania a vybraným metódam jej riešenia, časť 3 poukazuje na zvyšujúcu sa popularitu a možnosti programovacieho jazyka Python. Časť 4 predstavuje program, ktorý umožní nájdenie všetkých bazických riešení konkrétnej úlohy lineárneho programovania, zistenie ich prípustnosti a na základe hodnôt účelovej funkcie špecifikuje optimálne riešenie. Príspevok uzatvára v časti 5 záver.

2 ÚLOHA LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Matematická formulácia úlohy lineárneho programovania vo všeobecnom tvare s využitím maticového zápisu je nasledovná (Chocholatá, 2013):

$$\max(\min) f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \{\leq, \geq, =\} \mathbf{b} \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3)$$

pričom symboly vo vzťahoch (1) – (3) označujú:

$\mathbf{c}^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ – vektor koeficientov účelovej funkcie,

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – vektor rozhodovacích premenných,

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – maticu koeficientov sústavy ohraničení,

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – vektor koeficientov pravej strany.

Najpoužívanejšou metódou na riešenie úloh lineárneho programovania je už spomínaná simplexová metóda, ktorá je vďaka jednoduchosti a názornosti dobre osvedčená a aplikovaná nielen pri riešení úloh lineárneho programovania v rámci výučby lineárnej optimalizácie, ale

tiež pri riešení bežných praktických úloh. Keď Klee a Minty (1972) na konkrétnom príklade ukázali, že počet iterácií potrebný na získanie optimálneho riešenia môže v prípade simplexovej metódy exponenciálne rásť, otvorili tým priestor pre vznik polynomiálnych algoritmov (elipsoidová metóda či rôzne algoritmy založené na metóde vnútorného bodu)². V súčasnosti existuje široká paleta modifikácií metód na riešenie úloh lineárneho programovania, pričom k ich prudkému rozvoju a obľúbenosti prispievajú tiež stále sa zdokonaľujúce a dostupnejšie softvérové produkty či programátorské zručnosti.

3 PROGRAMOVACÍ JAZYK PYTHON

Úlohy lineárneho programovania možno riešiť s využitím rôznych typov softvérových produktov, resp. programovacích jazykov, ktoré sú viac alebo menej užívateľsky náročné. V súčasnosti sa v praxi veľmi do popredia dostáva programovací jazyk Python, ktorý začal vyvíjať Holanďan Guido van Rossum na konci 80-tych rokov 20. storočia. V období, keď Guido van Rossum začínal s implementáciou nového programovacieho jazyka, čítal publikované scenáre z komediálneho seriálu BBC zo 70. rokov s názvom „Monty Python’s Flying Circus“, a keďže zároveň hľadal krátky, jedinečný a mierne záhadný názov pre programovací jazyk, vybral názov „Python“ (General Python FAQ, 2021). Popularita tohto jazyka má v čase výrazne vzostupnú tendenciu – túto skutočnosť možno dokumentovať prostredníctvom hodnotení publikovaných viacerými webovými stránkami.

Index PYPL (PopularitY of Programming Language Index), udávajúci častotť vyhľadávania príručiek k rôznym programovacím jazykom v rámci Google, kategorizuje Python vo februári 2021 ako programovací jazyk číslo 1 s podielom vyše 30 %.

Worldwide, Feb 2021 compared to a year ago:				
Rank	Change	Language	Share	Trend
1		Python	30.06 %	+0.3 %
2		Java	16.88 %	-1.7 %
3		JavaScript	8.43 %	+0.4 %
4		C#	6.69 %	-0.6 %

Obr.1: PYPL index popularity programovacích jazykov. Zdroj: PYPL Index (2021)

Podľa indexu TIOBE³ bol vo februári 2021 Python tretím najpopulárnejším programovacím jazykom na svete (Obr. 2). Tabuľka na obr. 3 ilustruje enormný nárast popularity Pythonu v porovnaní s ďalšími programovacími jazykmi v 35-ročnom časovom horizonte (1986 – 2021, Obr. 3).

Feb 2021	Feb 2020	Change	Programming Language	Ratings	Change
1	2	▲	C	16.34%	-0.43%
2	1	▼	Java	11.29%	-6.07%
3	3		Python	10.86%	+1.52%
4	4		C++	6.88%	+0.71%
5	5		C#	4.44%	-1.48%

Obr. 2: TIOBE Index - február 2021. Zdroj: TIOBE (2021)

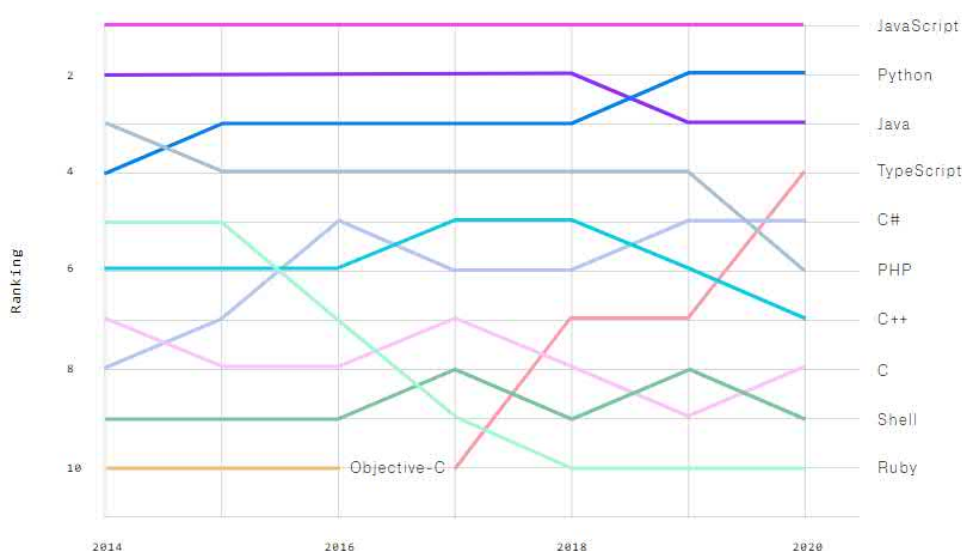
² Viac k polynomiálnym algoritmom lineárneho programovania pozri napr. Laščiak a kol. (1990).

³ Index TIOBE je aktualizovaný na mesačnej báze a udáva popularitu programovacích jazykov, pričom na výpočet hodnotení sa používajú internetové vyhľadávače ako Google, Bing, Yahoo!, Wikipedia, Amazon, YouTube a Baidu.

Programming Language	2021	2016	2011	2006	2001	1996	1991	1986
C	1	2	2	1	1	1	1	1
Java	2	1	1	2	3	28	-	-
Python	3	5	6	7	23	13	-	-
C++	4	3	3	3	2	2	2	8
C#	5	4	5	6	8	-	-	-

Obr. 3: TIOBE index popularity programovacích jazykov. Zdroj: TIOBE (2021)

Na vzrastajúcu popularitu Pythonu poukazuje tiež developerská platforma GitHub (Obr. 4) udávajúca vývoj poradia programovacích jazykov v období 2014-2020.



Obr. 4: Vývoj poradia programovacích jazykov v období 2014-2020. Zdroj: Octoverse (2021)

Python patrí medzi tzv. voľne šíriteľné (open source) programovacie jazyky a počnúc rokom 2008 sa najčastejšie používanou stala verzia 3. Aktuálne najnovšiu verziu Pythonu je možné stiahnuť a nainštalovať zo stránky Python (2020). Okrem vytvárania vlastných funkcií možno tiež v rámci Pythonu vyžívať tzv. balíky (moduly), ktoré obsahujú súhrn funkcií a možno ich nainštalovať napr. zo stránky Python Package Index (2020). Súčasťou Pythonu je vývojové prostredie IDLE (Integrated Development and Learning Environment), v ktorom je možné vytvoriť nový súbor (prípona .py) na napísanie programu. Po spustení takto napísaného programu sa výstup zobrazí v interaktívnom okne „Shell“ (Blaho, 2016).

V procese výučby pri riešení úloh lineárneho programovania je výhodné využiť dvojicu balíkov NumPy (Numerical Python) a SciPy (Scientific Python), ktoré predstavujú základné balíky pre vedecké výpočty, resp. programovanie. NumPy ponúka obrovskú škálu rýchlych a efektívnych spôsobov vytvárania polí a manipulácie s číselnými údajmi v nich (indexovanie polí, rezanie polí, aritmetické operácie, operácie s maticami či lineárnu algebru). SciPy rozširuje funkcionality poskytované v rámci NumPy, pričom z pohľadu riešenia úloh lineárneho programovania je osobitne výhodné využitie submodulu „scipy.optimize“ a

importovanie funkcie „linprog“. Funkcia „linprog“ podporuje využitie trojice metód – simplexovej metódy, metódy vnútorného bodu a revidovanej simplexovej metódy⁴.

4 RIEŠENIE ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Ako už bolo vyššie uvedené, na riešenie úlohy lineárneho programovania možno využiť rôzne metódy a tiež rôzny typ softvéru. V rámci výučby lineárnej optimalizácie predstavuje vyriešenie úlohy lineárneho programovania pomocou pomerne jednoduchého programu zaujímavú možnosť. Vo výučbe sa spravidla začína grafickým riešením úlohy s dvoma premennými. Po pochopení základných princípov riešenia úlohy lineárneho programovania na základe grafickej (geometrickej) interpretácie, nasleduje vysvetlenie princípu algebrického riešenia úlohy lineárneho programovania simplexovou metódou.

Simplexová metóda je iteračnou procedúrou, ktorá po určitom konečnom počte krokov (iterácií) umožňuje nájsť optimálne riešenie úlohy lineárneho programovania alebo prísť k záveru, že optimálne riešenie neexistuje. V každej iterácii možno získať prípustné bázické riešenie (ak prípustné bázické riešenie neexistuje, výpočet sa končí), pričom sa overuje jeho optimálnosť. Ak je aktuálne preskúmané prípustné bázické riešenie optimálne, výpočet sa končí, v opačnom prípade nasleduje prechod k ďalšiemu prípustnému bázickému riešeniu. Po konečnom počte iterácií tak dospejeme k optimálnemu riešeniu alebo zistíme, že toto neexistuje (Brezina, Pekár a Reiff, 2020).

Z teórie lineárneho programovania (Gass, 1972) je známe, že bázickým riešením sústavy ohraničujúcich podmienok (2) v tvare „ $=$ “ ($m < n$) nazývame také riešenie, ktoré získame, ak položíme $n - m$ premenných za rovnajúce sa nule a riešime ju pre zostávajúcich m premenných za podmienky, že determinant matice koeficientov týchto m premenných je rôzny od nuly. Za predpokladu, že $m < n$, počet bázických riešení nemôže byť vyšší ako $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Bázické riešenie označujeme ako bázické prípustné riešenie, ak jeho jednotlivé zložky sú nezáporné.

Hoci úlohu lineárneho programovania možno v Pythone s využitím napr. balíka SciPy vyriešiť priamo, dôležitú úlohu v procese výučby zohráva vysvetlenie princípu riešenia úlohy algebricky. Pre nasledujúcu úlohu lineárneho programovania predstavíme program, ktorý umožní nájdanie všetkých bázických riešení, zistenie ich prípustnosti a na základe hodnôt účelovej funkcie špecifikuje optimálne riešenie.

Uvažujme úlohu lineárneho programovania v tvare:

$$\begin{aligned} \max f(\mathbf{x}) &= 5x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

V prvom kroku upravíme ohraničenia tejto úlohy pomocou doplnkových premenných na rovnice, pričom takto upravená úloha bude mať potom 2 ohraničenia a 4 premenné⁵. V súlade s definíciou bázického riešenia položíme $n - m = 4 - 2 = 2$ premenných za rovnajúce sa nule a

⁴ Pre viac informácií pozri Scipy.org (2021).

⁵ Ohľadom doplnkových premenných pozri napr. Brezina, Ivaničová a Pekár (2007), Chochoatá (2013).

riešime ju pre zostávajúcich $m = 2$ premenných. Maximálny počet bázičných riešení je potom daný počtom kombinácií m -tej triedy z n prvkov, t.j. $\binom{n}{m} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Z pohľadu napísania programu v Pythone (Obr. 5 vľavo) začneme importovaním balíka NumPy. Pre výpočet bázičných riešení potrebujeme vyberať z matice \mathbf{A} vždy 2 stĺpce, pričom využijeme operáciu „rezania“ (slicing). „Automatizovaný“ výber stĺpcov vieme dosiahnuť pomocou dvoch for-cyklov umožňujúcich vybrať postupne dvojice stĺpcov 1. a 2., 1. a 3., 1. a 4., 2. a 3., 2. a 4., 3. a 4. (treba mať na pamäti, že Python indexuje počnúc od 0)⁶. Výpočet hodnôt vektora \mathbf{x} zrealizujeme zo vzťahu $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, t.j. $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, pričom ku každému riešeniu vypíšeme, ktoré stĺpce matice \mathbf{A} obsahuje (indexáciu použijeme počnúc od 0 pre prvý stĺpec). Pomocou podmieneného príkazu „if“ označíme neprípustné riešenie, t.j. také bázičné riešenie, ktoré má niektorú zo zložiek zápornú. Pre každé riešenie tiež vypíšeme vektor obsahujúci zodpovedajúce koeficienty účelovej funkcie a hodnotu účelovej funkcie.

Pridanie podmieneného príkazu „if-else“, resp. „elif“ (vnorený príkaz „if“) umožní spomedzi prípustných riešení označiť optimálne riešenie úlohy. Ešte pred využitím for-cyklu preto vytvoríme premennú s názvom „maximum“ a položíme ju rovnú veľmi malému číslu (keďže úloha, ktorú riešime je maximalizačná) a tiež nastavíme premennú „optimalna_baza“ na indexy premenných [0,0]. Za predpokladu, že práve skúmané riešenie je prípustné, pomocou príkazu „elif“ porovnáme vypočítanú hodnotu jeho účelovej funkcie s hodnotou uloženou v premennej „maximum“ – pokiaľ je hodnota účelovej funkcie tohto riešenia vyššia, uloží sa táto nová hodnota do premennej „maximum“ a zaznamenajú sa tiež indexy optimálnej bázy. Záverečný príkaz „print“ programu vypíše hodnotu účelovej funkcie optimálneho riešenia ako aj indexy optimálnej bázy.

Z výstupu v pravej časti Obr. 5 je zrejmé, že sme preskúmali všetkých 6 bázičných riešení, z ktorých dve boli neprípustné. Spomedzi štvorice bázičných prípustných riešení sa maximálna hodnota účelovej funkcie 19 dosiahla pre riešenie tvorené prvou a druhou premennou, t.j. premennými x_1 a x_2 (báza optimálneho riešenia je teda tvorená prvým a druhým stĺpcom matice \mathbf{A}). Optimálne riešenie úlohy má teda tvar $\mathbf{x}^* = (2; 1,5; 0; 0)$ s hodnotou účelovej funkcie $f(\mathbf{x}^*) = 19$.

5 ZÁVER

Z ekonomického hľadiska existuje široká škála problémov, ktoré sú formulovateľné ako úlohy lineárneho programovania, pričom medzi najznámejšie možno zaradiť úlohu o optimálnom výrobnom pláne, zmiešavací problém, rezný problém, dopravnú úlohu, priradovací problém, úlohu výberu portfólia, úlohu o rozložení rizika pôžičiek, úlohu o optimalizácii počtu súprav (kompletov), úlohu o najkratšej ceste či úlohu o kritickej ceste. V procese výučby lineárneho programovania je nevyhnutné zvládnuť jednak matematickú formuláciu konkrétneho ekonomického problému, teoreticky pochopiť princípy riešenia tejto úlohy, ale tiež zvládnuť softvérové riešenie danej úlohy. Programovací jazyk Python vrátane rôznych modulov poskytuje flexibilný priestor umožňujúci aplikáciu rôznych prístupov k riešeniu konkrétne formulovanej úlohy. Cieľom príspevku bolo ukázať konštrukciu programu umožňujúceho získať nielen výsledné optimálne riešenie zvolenej úlohy lineárneho programovania, ale tiež vysvetliť princíp algebrického riešenia úlohy simplexovou metódou.

⁶ K indexovaniu a „reznaniu“ pozri Numpy (2021).

```

explicitna enumeracia.py - F:\Python\explicitna enumeracia.py (3.8.3)
File Edit Format Run Options Window Help
import numpy as np
c=np.array([[5,6,0,0]])
A=np.array([[3,4,1,0],[3,2,0,1]])
b=np.array([12,9])
print("c =", c)
print("A =")
print(A)
print("b =",b)
maximum=-1000000000
optimalna_baza=[0,0]
for i in range(0,3):
    for j in range(i+1,4):
        print("AA=")
        print(A[:, [i,j]])
        x=np.linalg.inv(A[:, [i,j]])@b
        print("x=",x,"zahrnute stlpce:", [i,j])
        if min(x)<0:
            print("nepripustne riesenie")
        elif c[:, [i,j]]@x>maximum:
            maximum=c[:, [i,j]]@x
            optimalna_baza =[i,j]
        print("cc=",c[:, [i,j]])
        z=c[:, [i,j]]@x
        print("HUF=",z)
print("HUF OR =",maximum, "optimálna báza=",optimalna_baza)

Python 3.8.3 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13
D64) on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "li
>>>
===== RESTART: F:\Python\expl
c = [[5 6 0 0]]
A =
[[3 4 1 0]
 [3 2 0 1]]
b = [12  9]
AA=
[[3 4]
 [3 2]]
x= [2.  1.5] zahrnute stlpce: [0, 1]
cc= [[5 6]]
HUF= [19.]
AA=
[[3 1]
 [3 0]]
x= [3.  3.] zahrnute stlpce: [0, 2]
cc= [[5 0]]
HUF= [15.]
AA=
[[3 0]
 [3 1]]
x= [ 4. -3.] zahrnute stlpce: [0, 3]
nepripustne riesenie
cc= [[5 0]]
HUF= [20.]
AA=
[[4 1]
 [2 0]]
x= [ 4.5 -6. ] zahrnute stlpce: [1, 2]
nepripustne riesenie
cc= [[6 0]]
HUF= [27.]
AA=
[[4 0]
 [2 1]]
x= [3.  3.] zahrnute stlpce: [1, 3]
cc= [[6 0]]
HUF= [18.]
AA=
[[1 0]
 [0 1]]
x= [12.  9.] zahrnute stlpce: [2, 3]
cc= [[0 0]]
HUF= [0.]
HUF OR = [19.] optimálna báza= [0, 1]
>>> |

```

Obr. 5 Program na preskúmanie všetkých bázických riešení úlohy, zistenie ich prípustnosti a určenie optimálneho riešenia. Zdroj: vlastné výpočty

Použitá literatúra

1. BLAHO, A. 2016. *Programovanie v Pythone. Časť 1.* [cit. 2020.06.18]. Dostupné na internete: <https://cloud2.edupage.org/cloud/Python1.pdf?z%3AeptyuQvJmhf0yqVOgLnKDxwYB44sjoT4BKXwJpkmfcDRVi%2BgPbUTLWdD5MgmtSnBxpISFgkyFR1T%2FlsTiSC50IA%3D%3D>
2. BREZINA, I. – IVANIČOVÁ, Z. – PEKÁR, J. 2007. *Operačná analýza.* Bratislava: IURA Edition.
3. BREZINA, I. – PEKÁR, J. – REIFF, M. 2020. Alternatívne programové produkty na výučbu lineárneho programovania. *Ekonomika a Informatika*, 18(1), s. 25-38.
4. GASS, S. I. 1972. *Lineárne programovanie. Metódy a aplikácie.* Bratislava: Alfa.
5. GENERAL PYTHON FAQ. 2021. [cit. 2021.02.08]. Dostupné na internete: <https://docs.python.org/2/faq/general.html#what-is-python>

6. CHOCHOLATÁ, M. 2013. *Lineárne programovanie pre manažérov*. Bratislava: EKONÓM.
7. KLEE, V. – MINTY, G. 1972. How Good is the Simplex Algorithm? In: O. Shisha, ed., "Inequalities-III" New York: Academic Press.
8. LAŠČIAK, A. a kol. 1990. *Optimálne programovanie*. 2. upravené vydanie. Bratislava: Alfa.
9. NUMPY. 2021. NumPy: the absolute basics for beginners. [cit. 2021.02.08]. Dostupné na internete: https://numpy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html.
10. OCTOVERSE. 2021. [cit. 2021.02.08]. Dostupné na internete: <https://octoverse.github.com/>
11. PLESNÍK, J. – DUPAČOVÁ, J. – VLACH, M. 1990. *Lineárne programovanie*. Bratislava: Alfa.
12. PYPL INDEX. 2021. [cit. 2021.02.08]. Dostupné na internete: <https://pypl.github.io/PYPL.html>
13. PYTHON. 2020. [cit. 2020.09.09] Dostupné na internete: <https://www.python.org/>
14. PYTHON PACKAGE INDEX. 2020. [cit. 2020.09.09] Dostupné na internete: <https://pypi.org/>
15. SCIPY.ORG. 2021. scipy.optimize.linprog - SciPy v1.6.0 Reference Guide. [cit. 2021.02.08]. Dostupné na internete: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.linprog.html>.
16. TIOBE. 2021. [cit. 2021.02.08] Dostupné na internete: <https://www.tiobe.com/tiobe-index/>

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholátá, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 832

email: michaela.chocholata@euba.sk

MODULÁRNA KAPACITNÁ LOKAČNÁ ÚLOHA PRE UMIESTNENIE AMBULANCIÍ V MESTE

A MODULAR CAPACITATED LOCATION PROBLEM FOR AMBULANCE LOCATION IN A CITY ENVIRONMENT

Ludmila Jánošíková, Peter Jankovič

Abstrakt

Priestorové rozloženie ambulancií významne ovplyvňuje reakčný čas systému záchranej zdravotnej služby. Článok predstavuje modifikáciu modelu modulárnej kapacitnej lokačnej úlohy, ktorý možno použiť na návrh dobrej polohy ambulancií. Model rozlišuje typy ambulancií a kategórie pacientov. V zjednodušenej forme berie do úvahy čas, ktorý ambulance strávia na výjazde, a tým modeluje možnú nedostupnosť najbližšej ambulance v okamihu tiesňového volania v reálnej prevádzke. Na prípadovej štúdii mesta Prešov ukazujeme, že zmenou polohy súčasných staníc v meste sa skrátí priemerný dojazdový čas a zvýši sa dostupnosť záchranej zdravotnej služby.

KLúčové slová: *záchranná zdravotná služba, dojazdový čas, modulárna kapacitná lokačná úloha*

Abstract

The geographical distribution of ambulances has a significant impact on the responsiveness of an emergency medical service system. This paper presents a modification of the model of the modular capacitated location problem that can be used for ambulance location. The model distinguishes ambulance types and patient categories. In a simplified form it considers the time ambulances spend on trips. This way it models a possible unavailability of the closest ambulance in the moment of a call reception that may occur in a real-life operation. The case study of the city of Prešov shows that re-location of the current stations results in the reduction of the average response time and better accessibility of the emergency medical service.

Keywords: *emergency medical service, response time, modular capacitated location problem*

1 ÚVOD

Dostupnosť záchranej zdravotnej služby závisí najmä od počtu a typu ambulancií. Na Slovensku poskytujú neodkladnú zdravotnú starostlivosť dva typy pozemných ambulancií, a to ambulance rýchlej lekárskej pomoci (RLP), ktorých posádku tvorí lekár, záchranár a vodič, a ambulance rýchlej zdravotnej pomoci (RZP), ktorých posádka pozostáva z dvoch záchranárov. Rozmiestnenie ambulancií na území celej republiky je dané výnosmi Ministerstva zdravotníctva SR. Výnosy určujú mestá a obce, kde budú stanice záchranej zdravotnej služby (ZZS). V roku 2019 bolo na území Slovenska 273 staníc rozmiestnených v 211 mestách a obciach. Stanica je organizačný pojem. V legislatíve je chápaná ako sídlo jednej ambulance. Poskytovateľ ZZS, ktorý získa licenciu na prevádzkovanie stanice, si v rámci obce vyberie vhodnú budovu s garážou pre ambulanciu a miestnosťou, kde sa zdržuje posádka čakajúca na výjazd. Ak jedna spoločnosť prevádzkuje v meste viacej staníc, môžu byť tieto stanice umiestnené na rovnakej adrese, čo je aj prípad Prešova, kde Záchranná

služba Košice v roku 2019 mala 5 staníc, ktoré sídlili na dvoch adresách. Na každej adrese bola jedna ambulancia s lekárom, ostatné ambulancie boli typu RZP.

Geografická poloha ambulancií významne ovplyvňuje dojazdový čas ambulancie na miesto zásahu. Náš článok sa zaoberá situáciou, kde v meste operuje viacej ambulancií. Prinášame nový model pre ich optimálne umiestnenie a porovnávame ho so známym modelom p -medián.

Nový model je variantom modulárnej kapacitnej lokačnej úlohy (*Modular Capacitated Location Problem*, MCLP). Ide o lokačnú úlohu motivovanú strategickým plánovaním v zdravotníctve [1]. Mnohé zdravotnícke zariadenia môžu byť zostavené z modulov určitej veľkosti. Počet pacientov, ktoré môže zariadenie obslúžiť, ako aj fixné a prevádzkové náklady zariadenia, závisia od jeho veľkosti. Veľkosť zariadenia sa môže vybrať len z konečnej a diskretnej množiny hodnôt. Agregovaný zákazník (obec, komunita) môže byť obslúžený viacerými zariadeniami. Variant MCLP pre umiestnenie vozidiel záchranej zdravotnej služby bol prezentovaný v článku [3]. V pôvodnej formulácii MCLP [1], ako aj v modifikácii [3] sa minimalizujú celkové náklady, pozostávajúce z investičných a prevádzkových nákladov zariadení a nákladov na obsluhu zákazníkov. V našom príspevku predstavujeme upravený model úlohy MCLP, kde kritériom je priemerný dojazdový čas k pacientovi, pretože takéto kritérium lepšie vystihuje hlavný cieľ ZZS, a to je záchrana zdravia a života ľudí, ktorí sa ocitli v nebezpečnej situácii. Nebudeme meniť počet ani typ súčasných staníc v meste, budeme len hľadať ich lepšie umiestnenie. Počet staníc je ekvivalentom fixných a prevádzkových nákladov v pôvodnom modeli MCLP.

2 MODULÁRNA KAPACITNÁ LOKAČNÁ ÚLOHA

Pri riešení lokačnej úlohy predpokladáme, že v meste boli vytipované lokality, kde je možné otvoriť stanicu. Taktiež predpokladáme, že boli určené zóny, kde sa nachádzajú potenciálni pacienti. Obvyklým spôsobom pre definovanie zón je pokryť mesto pravouhlou mriežkou. Zákazníkmi sú potom jednotlivé bunky mriežky. Váha zákazníka (počet pacientov) je spravidla úmerná počtu obyvateľov, ktorí majú trvalé bydlisko v danej bunke [2, 7].

V nasledujúcom modeli predpokladáme, že ambulancie pracujú 24 hodín denne, 265 dní v roku, ale vykonávajú aj sekundárne výjazdy, čo sú plánované transporty pacientov alebo zdravotníckeho materiálu medzi zdravotníckymi zariadeniami. Celkový fond času, kedy je ambulancia k dispozícii na primárne výjazdy k tiesňovým volaniam, preto musíme znížiť o čas, ktorý strávi ambulancia na sekundárnych výjazdoch.

Dispečerské riadenie ambulancií závisí od stavu pacienta. Najvyššiu prioritu majú pacienti, ktorí majú jednu z diagnóz tzv. kvintetu prvej hodiny (*First Hour Quintet*, FHQ) – bolesť v hrudníku, závažná trauma, náhla cievna mozgová príhoda, závažné dýchacie ťažkosti a zastavenie obehu. U týchto pacientov je rýchle poskytnutie odbornej lekárskej pomoci kľúčové pre záchrana života. K týmto pacientom sa vždy vysiela posádka RLP. K ostatným pacientom môže ísť ľubovoľná ambulancia.

V matematickej formulácii MCLP budeme používať takéto označenie konštant, množín a indexov:

- I množina kandidátov na umiestnenie stanice
- i kandidát na umiestnenie stanice; $i \in I$
- J množina zákazníkov
- j zákazník; $i \in I$
- H množina nemocníc
- h_j najbližšia nemocnica k zóne j ; $h_j \in H$

k	typ ambulancie (1 – RLP, 2 – RZP)
l	typ pacientov (1 – FHQ, 2 – ostatní)
α_k	podiel výjazdov ambulancie typu k , pri ktorých sa vyžaduje transport pacienta do nemocnice
β_k	vyťaženie ambulancie typu k na sekundárnych výjazdoch
γ_{kl}	koeficient má hodnotu 1, ak ambulancia typu k môže obslúžiť pacienta typu l , inak má hodnotu 0
p_k	maximálny počet ambulancií typu k
b_{jl}	počet pacientov typu l v zóne j
th_{h_j}	priemerný čas odovzdania pacienta v nemocnici h_j [min]
ts_{kl}	priemerný čas na scéne pre posádku k a pacienta l [min]
t_{ij}	čas rýchlej jazdy z uzla i do uzla j (so sirénou a výstražnými svetlami) [min]
\bar{t}_{ij}	čas jazdy z uzla i do uzla j (normálnou rýchlosťou) [min]

Ďalej v modeli vystupujú tieto rozhodovacie premenné:

z_{ik}	koľko ambulancií typu k bude v stanici i
x_{ijkl}	aký podiel pacientov typu l v zóne j obslúžia vozidlá typu k zo stanice i

Matematický model úlohy možno zapísať takto:

$$\text{minimalizujte } \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^1 b_{jl} t_{ij} x_{ijkl} \quad (1)$$

$$\text{za podmienok } \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^2 x_{ijkl} = 1 \quad \text{pre } j \in J, l = 1, 2 \quad (2)$$

$$x_{ijkl} \leq \gamma_{kl} z_{ik} \quad \text{pre } i \in I, j \in J, l = 1, 2, k = 1, 2 \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} z_{ik} \leq p_k \quad \text{pre } k = 1, 2 \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l=1}^2 b_{jl} x_{ijkl} (t_{ij} + ts_{kl} + \alpha_k (t_{jh_j} + th_{h_j} + \bar{t}_{h_j i}) + (1 - \alpha_k) \bar{t}_{ji}) \leq 365 * 24 * 60 * (1 - \beta_k) z_{ik} \quad \text{pre } i \in I, k = 1, 2 \quad (5)$$

$$x_{ijkl} \geq 0 \quad \text{pre } i \in I, j \in J, l = 1, 2, k = 1, 2 \quad (6)$$

$$z_{ik} \in Z_0^+ \quad \text{pre } i \in I, k = 1, 2 \quad (7)$$

Účelová funkcia (1) minimalizuje celkový dojazdový čas ku všetkým pacientom. Priemerný dojazdový čas získame podelením celkového času počtom pacientov. Podmienky (2) zabezpečia, že všetci pacienti budú obslúžení. Podmienky (3) vyjadrujú, že k pacientovi typu l , ktorý sa nachádza v zóne j , môže ísť ambulancia typu k z miesta i len vtedy, ak je v mieste i umiestnená aspoň jedna ambulancia typu k a posádka tohto typu je kvalifikovaná na záchranu pacienta typu l . Podmienky (4) zabezpečia, že sa neumiestni viac ako je stanovený počet ambulancií daného typu. Podmienky (5) zabezpečia, že objem požiadaviek obsluhovaných ambulanciami typu k nachádzajúcimi sa v mieste i neprekročí disponibilný čas ambulancií. Podmienky (6) umožňujú, aby pacienti v zóne j boli obsluhovaní z viacerých staníc. Podmienky (7) sú celočíselné podmienky pre počet ambulancií.

3 PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA PRE MESTO PREŠOV

Priestorové rozloženie pacientov získame z databázy LandScan [6]. Údaje v databáze predstavujú ambientnú populáciu, t.j. priemerný počet ľudí na danom území v priebehu 24 hodín. Údaje sú organizované do mriežky s veľkosťou bunky 30'' × 30'' (uhlových sekúnd) v zemepisnom súradnicovom systéme WGS84. Územie Prešova je pokryté 121 bunkami s nenulovým počtom obyvateľov. Najmenší počet ľudí v jednej bunke je 1, najväčší 7 827, celkový počet ľudí je 77 744. Počet pacientov odvodíme z populácie pomocou koeficientov vypočítaných zo záznamov o výjazdoch ambulancií, ktoré nám poskytla spoločnosť Falck Záchraná a.s. Zo záznamov Falck môžeme odhadnúť, že 2.41 % obyvateľov je FHQ pacientov a 6.74 % obyvateľov je ostatných pacientov. Ostatné parametre modelu na základe konzultácie s Operačným strediskom ZZS SR a publikácie [5] nastavíme takto: $\alpha_1 = 50.96\%$, $\alpha_2 = 76.62\%$; $\beta_1 = 2.23\%$, $\beta_2 = 6.09\%$; $p_1 = 2$, $p_2 = 3$. Lokalizáciu zákazníkov vykonáme pomocou digitálnej cestnej siete získanej z databázy OpenStreetMap. Uzly cestnej siete, ktoré sú najbližšie k stredom buniek, považujeme za lokality zákazníkov a taktiež za kandidátov na umiestnenie stanice. Pri výpočte času jazdy medzi uzlami sa rešpektujú obmedzenia rýchlosti na cestných úsekoch. Pokiaľ rýchlosť nie je obmedzená, použije sa priemerná rýchlosť, ktorá závisí od kvality cesty, typu jazdy (štandardná jazda normálnou rýchlosťou, alebo rýchla jazda so zapnutou sirénou a majákom) a dopravnej špičky [4].

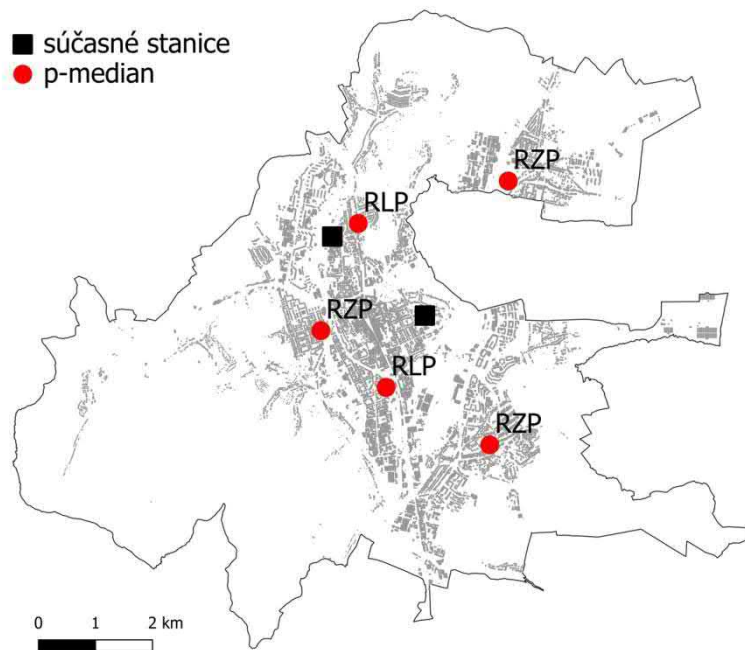
Rozmiestnenie ambulancií v meste, ktoré vypočítal model MCLP, sme porovnali s výsledkom modelu úlohy o váženom p -mediáne. Model p -medián je známy model, ktorý minimalizuje priemerný dojazdový čas k pacientovi, ale nerozlišuje typ ambulancie. Následne po optimalizácii sme prideliť dve RLP ambulancie umiestneným staniciam pomocou heuristického pravidla, ktoré rešpektuje aktuálny stav. Umiestnili sme ich do staníc, ktoré boli najbližšie súčasným staniciam. V modeli MCLP je rozhodnutie o type staníc modelované premennými. Obidva modely sme riešili exaktne pomocou komerčného solvera Xpress.

Umiestnenie staníc, ktoré navrhli spomínané modely, je na obr. 1 a 2. Vidíme, že obidva modely vypočítajú rovnakú polohu staníc, líšia sa len v distribúcii RLP ambulancií. Pomocou počítačovej simulácie sme overili, ako optimalizované umiestnenie staníc ovplyvní prevádzku systému ZZS (tab. 1). V tabuľke sú priemerné hodnoty 10 replikácií, kde jedna replikácia simulovala 90 dní prevádzky systému. Simuloval sa celý systém ZZS na Slovensku, pričom poloha ostatných staníc mimo Prešova sa nezmenila. Štatistiky v tabuľke platia pre mesto Prešov. Priemerné dojazdové časy uvádzame spolu s 95 % intervalom spoľahlivosti.

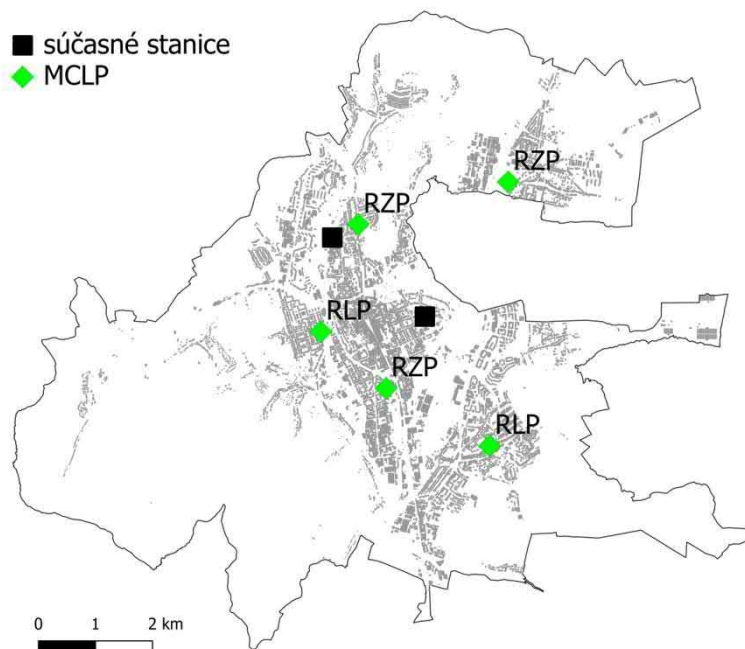
Výsledky pre umiestnenie staníc navrhnuté modelmi porovnávame s umiestnením staníc v roku 2019. Vidíme, že obidva modely významne skrátiť priemerný dojazdový čas, a to ako k pacientom s najvyššou prioritou (druhý riadok tabuľky), tak aj všeobecne k pacientom bez ohľadu na ich diagnózu (prvý riadok). Model MCLP má oproti modelu p -medián lepší dojazdový čas ku kritickým pacientom, hoci nie štatisticky významne. Oproti súčasnému stavu dosiahne vyšší podiel tiesňových volaní, ku ktorým dorazí ambulancia do 15 minút.

Tabuľka 1. Výsledok simulačného experimentu pre mesto Prešov

<i>Indikátor</i>	<i>Aktuálne stanice (2019)</i>	<i>p-medián</i>	<i>MCLP</i>
<i>Priemerný dojazdový čas [min]</i>	6.12 (6.07; 6.17)	5.34 (5.28; 5.40)	5.35 (5.24; 5.46)
<i>Priemerný dojazdový čas k pacientom s najvyššou prioritou [min]</i>	5.86 (5.78; 5.93)	4.64 (4.51; 4.76)	4.54 (4.40; 4.68)
<i>Percento pacientov s dojazdovým časom do 15 minút</i>	95.21	95.22	95.48



Obrázok 1. Umiestnenie staníc v Prešove modelom p -medián



Obrázok 2. Umiestnenie staníc v Prešove modelom MCLP

4 ZÁVER

Príspevok popisuje modifikáciu modelu modulárnej kapacitnej lokačnej úlohy pre umiestnenie staníc záchranej zdravotnej služby na území mesta. Na základe počítačovej simulácie môžeme konštatovať, že zmenou infraštruktúry sa významne zvýši dostupnosť záchranej zdravotnej služby. Za významné považujeme najmä skrátenie dojazdového času k pacientom v kritickom stave o 79 sekúnd, ktoré dosiahneme pri rozmiestnení staníc pomocou modelu MCLP. Model možno použiť pri navrhovaní dvojstupňového systému ZZS či už na území mesta, ale aj na väčšom území. Jeho nevýhodou je vysoká zložitosť, ktorá by si v prípade väčšieho počtu zákazníkov a kandidátov na stanicu vyžadovala použitie heuristickej metódy.

Tento príspevok vznikol s podporou výskumného projektu VEGA 1/0216/21 „Navrhovanie záchranných systémov s konfliktnými kritériami pomocou nástrojov umelej inteligencie“ a projektu APVV-19-0441 „Pridelovanie obmedzených zdrojov do verejných obslužných systémov s konfliktnými kritériami kvality“.

Použitá literatúra

1. CORREIA, I., CAPTIVO, M. E. (2003). A Lagrangean heuristic for a modular capacitated location problem. In: Annals of Operations Research, roč. 122, 2003, s. 141–161.
2. DÍAZ-RAMÍREZ, J., GRANDA, E., VILLARREAL, B., FRUTOS, G. (2018). A comparison of ambulance location models in two Mexican cases. In: Proceedings of the 2nd European International Conference on Industrial Engineering and Operations Management. IEOM Society, Paris, France, July 26-27, 2018.
3. HAMMAMI, S., JEBALI, A. (2019). Designing modular capacitated emergency medical service using information on ambulance trip. Operational Research, 2019.
4. JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ., KVET, M., JANKOVIČ, P., GÁBRIŠOVÁ, L. (2019). An optimization and simulation approach to emergency stations relocation. In: Central European Journal of Operations Research, roč. 27, 2019, č. 3, s. 737–758.
5. KARASŠ, J. a spol. (2017). Návrh zmien v koncepcii ZZS a DZS. Košice: Sapfo, Cassonic.
6. LandScan database. <https://landscan.ornl.gov>. Accessed 15 October 2017.
7. ZAFFAR, M. A., RAJAGOPALAN, H. K., SAYDAM, C., MAYORGA, M., SHARER, E. (2016). Coverage, survivability or response time: a comparative study of performance statistics used in ambulance location models via simulation-optimization. In: Operations Research for Health Care, roč. 11, 2016, s. 1–12.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ľudmila Jánošíková, PhD.
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
Tel: (421 41) 51 34 200
e-mail: Ludmila.Janosikova@fri.uniza.sk

Ing. Peter Jankovič, PhD.
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
Tel: (421 41) 51 34 213
e-mail: Peter.Jankovic@fri.uniza.sk

REDUKCIA VSTUPNÝCH DÁT PRE ÚLOHU NÁVRHU TURNUSOV ELEKTRICKÝCH AUTOBUSOV

INPUT DATA REDUCTION FOR SCHEDULING OF ELECTRIC BUSES

Maroš Janovec

Abstrakt

Tento článok sa zaoberá problematikou riešenia úlohy návrhu turnusov pre elektrické autobusy. Predstavujeme algoritmus na redukcii vstupných dát, ktorý redukuje množstvo spojov spájaním dvoch spojov do jedného. Takisto je popísaná aj metóda na výber možných kandidátov na spojenie a dve kritériá pre výber najvhodnejšieho kandidáta. Navrhnutý algoritmus bol otestovaný na reálnych dátach z mesta Žilina, poskytnutých prevádzkovateľom hromadnej dopravy DPMŽ. Po redukcii vstupov sa vykonal exaktný algoritmus na riešenie úlohy za účelom porovnania získaných výsledkov a výpočtového času medzi pôvodnou a redukovanou úlohou.

KLúčové slová: elektrický autobus, návrh turnusov, redukcii vstupných dát, IP solver

Abstract

In this paper, the electric bus scheduling problem and its solution method are addressed. We propose an algorithm for reduction of the input data, which reduces the number of service trips of the problem by merging two service trips into one. We have described a method for choosing possible candidates for merging as well as two criteria to select best candidates for merging. The proposed algorithm was tested on real data provided by public transport system operator DPMŽ in the city of Žilina. After the reduction of the problem the exact optimization is performed in order to compare the obtained solutions and computation time between the original and reduced problems.

Keywords: electric bus, scheduling problem, data reduction, IP solver

1 ÚVOD

Tento článok sa venuje riešeniu úlohy návrhu turnusov pre elektrické autobusy pomocou redukcii veľkosti problému a IP solvera. Úloha návrhu turnusov pre elektrické autobusy je špecifickým prípadom úlohy návrhu turnusov (VSP) [1][3] s obmedzeniami spotreby elektrickej energie a nabíjania. V tejto úlohe sú priradzované dostupné elektrické autobusy k spojom, ktoré musia byť obslužené. Elektrické autobusy majú obmedzený dojazd a nabíjanie elektrického autobusu trvá podstatne dlhší čas ako dotankovanie konvenčného autobusu, čo vytvára veľmi obmedzujúce podmienky pre jednotlivé turnusy.

Pre riešenie tohto problému bolo navrhnutých niekoľko matematických modelov od rôznych autorov. Títo autori pracujú s predpokladmi, ktoré znižujú komplexnosť úlohy. Jedným z týchto predpokladov je nabíjanie vždy do plnej kapacity [2][4], ďalším je nabíjanie iba na jednom mieste, čo je zvyčajne depo [2][4][5]. My sme sa zamerali práve na zmenu týchto predpokladov a navrhli sme lineárny matematický model v našej predchádzajúcej práci [6][7], kde sa elektrický autobus mohol nabíjať na viacerých špecifikovaných miestach v cestnej sieti a množstvo dobitej energie je stanovené počas riešenia matematického modelu.

V našej predchádzajúcej práci [6][7] sme sa snažili riešiť úlohu návrhu turnusov pre elektrické autobusy exaktne pomocou IP solvera Xpress IVE. Avšak, vďaka komplexnosti problému sme boli schopní optimálne riešiť v rozumnom čase len úlohy malého a stredného rozsahu. Najvyšší vplyv na výpočtový čas mal počet spojov. Preto sme sa rozhodli zredukovať náročnosť úlohy zmenšením počtu vstupných spojov. Na základe tejto myšlienky sme preskúmali niekoľko jednoduchých kritérií, ktoré by boli schopné zredukovať počet vstupných spojov pomocou metódy spájania dvoch spojov do jedného.

2 MATEMATICKÝ MODEL

V našom navrhnutom matematickom modeli [6][7] definujeme množinu N všetkých spojov, ďalej ranné depo D_0 a množinu večerných dep D_n , kde pridávame jedno depo pre každý spoj. Ďalej množina R reprezentuje všetky nabíjačky a množina T^r zahŕňa všetky nabíjacie udalosti na nabíjačke $r \in R$.

Pre každý spoj $i \in N$ je definovaný čas začiatku s_i , trvanie t_i a spotreba energie c_i . Konštanta t_{ij} reprezentuje čas prechodu medzi spojmi i a j . Podobne energia spotrebovaná na tento prechod je definovaná konštantou c_{ij} . Pre každý spoj sú definované aj množiny F_i a B_i , ktoré reprezentujú možné predchádzajúce respektíve nasledujúce spoje k spoju i . Podobne množiny $F_{c_{ri}}$ a $B_{c_{ri}}$ reprezentujú možné predchádzajúce a nasledujúce nabíjacie udalosti k spoju i na nabíjačke r .

Každá nabíjačka $r \in R$ je definovaná nabíjacou rýchlosťou q_r a jej umiestnením reprezentovaným konštantami t_{ir} a t_{rj} , ktoré definujú čas potrebný na prechod zo spoja k nabíjačke respektíve naopak. Energia spotrebovaná počas týchto prechodov je reprezentovaná konštantami c_{ir} a c_{rj} . Ako sme spomenuli vyššie, každá nabíjačka obsahuje množinu nabíjacích udalostí T^r , kde nabíjacia udalosť je časový interval na nabíjačke počas, ktorého sa môže elektrický autobus nabíjať. Nabíjacia udalosť t na nabíjačke r je definovaná časom jej začiatku s_{rt} odvodenom od korešpondujúceho spoja podľa vzťahu $s_{rt} = s_i + t_i + t_{ir}$. Koniec nabíjacej udalosti je definovaný začiatkom nasledujúcej nabíjacej udalosti. Preto sú všetky nabíjacie udalosti v množine T^r usporiadané podľa času začiatku. Navyše pre každú nabíjaciu udalosť definujeme množiny $F_{i_{rt}}$ a $B_{i_{rt}}$, ktoré reprezentujú možné predchádzajúce a nasledujúce spoje.

V našej úlohe uvažujeme iba homogénnu flotilu a definujeme konštanty SoC_{max} a SoC_{min} reprezentujúce hraničné hodnoty stavu nabitia batérie.

Prvou rozhodovacou premennou je x_{ij} reprezentujúca rozhodnutia, či bude spoj j obslužený hneď po spoji i . Premenné y_{irt} a z_{rtj} sa vzťahujú k prechodom zo spoja na nabíjačku a z nabíjačky na spoj. Ak bude elektrický autobus pokračovať v nabíjaní počas nasledujúcej udalosti $t + 1$ za udalosťou t tak premenná w_{rt} bude rovná 1.

Pre vedenie záznamu o stave nabitia autobusu pred každou úlohou sme zaviedli premenné e_i pre spoje a ε_{rt} pre nabíjacie udalosti.

2.1 Účelová funkcia

$$\min \sum_{j \in F_{D_0}} x_{D_0j} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in F_{c_{rD_0}}} y_{D_0rt} \quad (1)$$

Účelová funkcia (1) minimalizuje počet použitých elektrických autobusov.

2.2 Podmienky návrhu turnusov

$$\text{z. p.} \quad \sum_{i \in B_j} x_{ij} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Bc_{rj}} z_{rtj} = 1 \quad \forall j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in Bi_{rt}} y_{jrt} + w_{rt-1} \leq 1 \quad \forall r \in R, t \in T^r \quad (3)$$

$$\sum_{i \in B_j} x_{ij} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Bc_{rj}} z_{rtj} = \sum_{l \in F_j} x_{jl} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Fc_{rj}} y_{jrt} \quad \forall j \in N \quad (4)$$

$$\sum_{i \in Bi_{rt}} y_{irt} + w_{rt-1} = \sum_{j \in Fi_{rt}} z_{rtj} + w_{rt} \quad \forall r \in R, t \in T^r \quad (5)$$

Podmienky (2) zaručujú, že každý spoj bude obslužený. Obmedzenie, že v jednom čase sa môže na jednej nabíjačke nabíjať iba jeden elektrický autobus zabezpečujú podmienky(3). Podmienky (4) slúžia ako podmienky zachovania toku vozidla pre spoje a podmienky (5) pre nabíjacie udalosti

2.3 Podmienky spotreby energie

$$e_{D_0} = SoC_{max} \quad (6)$$

$$e_i \geq SoC_{min} + c_i + \sum_{j \in Fi} x_{ij} c_{ij} + \sum_{r \in R} \sum_{t \in Fc_{ri}} y_{irt} c_{ir} \quad \forall i \in N \quad (7)$$

$$e_j + c_{rj} + Mq_r(1 - z_{rtj}) \geq SoC_{min} + z_{rtj} c_{rj} \quad \forall r \in R, t \in T^r, j \in Fi_{rt} \quad (8)$$

$$e_j \leq e_i - x_{ij}(c_i + c_{ij}) + SoC_{max}(1 - x_{ij}) \quad \forall j \in N, i \in B_j \quad (9)$$

$$e_j \geq e_i - x_{ij}(c_i + c_{ij}) - SoC_{max}(1 - x_{ij}) \quad \forall j \in N, i \in B_j \quad (10)$$

$$\varepsilon_{rt} \leq e_i - y_{irt}(c_i + c_{ir}) + SoC_{max}(1 - y_{irt}) \quad \forall r \in R, t \in T^r, i \in Bi_{rt} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{rt} \geq e_i - y_{irt}(c_i + c_{ir}) - SoC_{max}(1 - y_{irt}) \quad \forall r \in R, t \in T^r, i \in Bi_{rt} \quad (12)$$

Podmienka (6) nastaví stav nabitia batérie na maximum na začiatku dňa. Aby bolo zabezpečené, že elektrický autobus bude mať dost' energie na prejedenie spoja a nasledujúci transfer slúžia podmienky (7). Podobne podmienky (8) zabezpečujú, že po nabíjaní bude dost' energie na nasledujúci prejazd. Podmienky (9) a (10) reprezentujú zachovanie energie medzi dvomi za sebou nasledujúcimi spojmi. Pre zabezpečenie zachovania energie pre prípad nabíjacej udalosti nasledujúcej za spojom slúžia podmienky (11) a (12).

2.4 Podmienky nabíjania

$$e_j + c_{rj} - \varepsilon_{rt} + SoC_{max}(1 - z_{rtj}) \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T^r, j \in Fi_{rt} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{rt+1} - \varepsilon_{rt} + SoC_{max}(1 - w_{rt}) \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T^r \quad (14)$$

$$e_j + c_{rj} - Mq_r(1 - z_{rtj}) \leq SoC_{max} \quad \forall r \in R, t \in T^r, j \in Fi_{rt} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{rt+1} - Mq_r(1 - w_{rt}) \leq SoC_{max} \quad \forall r \in R, t \in T^r \quad (16)$$

$$e_j \leq \varepsilon_{rt} + z_{rtj} \left((s_j - t_{rj} - s_{rt})q_r - c_{rj} \right) + SoC_{max}(1 - z_{rtj}) \quad \forall j \in N, r \in R, t \in Bc_{rj} \quad (17)$$

$$\varepsilon_{rt+1} \leq \varepsilon_{rt} + w_{rt}(s_{rt+1} - s_{rt})q_r + SoC_{max}(1 - w_{rt}) \quad \forall r \in R, t \in T^r \quad (18)$$

$$e_j + c_{rj} - \varepsilon_{rt} - SoC_{max}(1 - z_{rtj}) \leq (s_{rt+1} - s_{rt})q_r \quad \forall r \in R, t \in T^r, j \in Fi_{rt} \quad (19)$$

Podmienky (13) a (14) zaručujú, že dobité množstvo energie bude nezáporné a zároveň podmienky (15) a (16) zaručujú, že nebude prekročená maximálna kapacita batérie. Nabíjací čas počas nabíjacej udalosti je obmedzený nasledujúcou úlohou. Podmienky (17) obmedzujú tento čas začiatkom nasledujúceho spoja. V prípade, že po nabíjaní nasleduje spoj je ešte nutné obmedziť čas nabíjania začiatkom nasledujúcej nabíjacej udalosti, čo je reprezentované

podmienkami (19). K prípadu, keď po nabíjaní nasleduje nabíjacia udalosť, sa vzťahujú podmienky (18), ktoré obmedzujú nabíjací čas začiatkom nasledujúcej nabíjacej udalosti.

2.5 Obligatórne podmienky

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N \cup D_0 \cup D_n, j \in F_i \quad (20)$$

$$y_{irt} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N, r \in R, t \in F_{c_{ri}} \quad (21)$$

$$z_{rtj} \in \{0,1\} \quad \forall r \in R, t \in T_r, j \in F_{i_{rt}} \quad (22)$$

$$w_{rt} \in \{0,1\} \quad \forall r \in R, t \in T_r \quad (23)$$

$$e_j \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (24)$$

$$\varepsilon_{rt} \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T_r \quad (25)$$

Rozhodovacie premenné x_{ij} , y_{irt} , z_{rtj} and w_{rt} sú binárneho charakteru, čo je definované podmienkami (4.20), (4.21), (4.22) and (4.23). Prídavné rozhodovacie premenné e_i a ε_{rt} sú definované podmienkami (4.24) a (4.25) ako nezáporné.

3 REDUKCIA DÁT

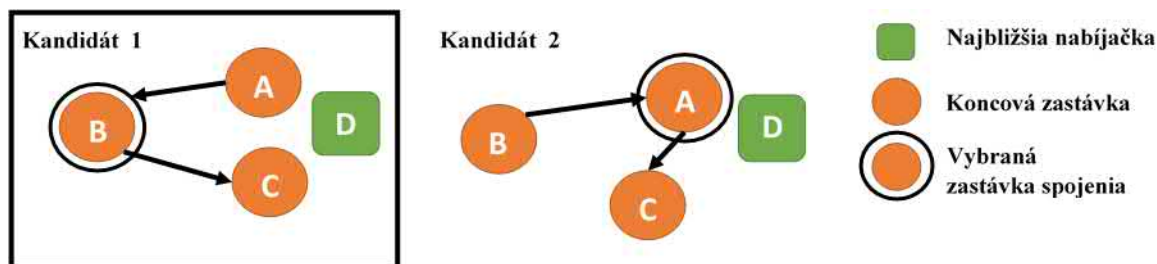
Kvôli komplexnosti matematického modelu nie je možné riešiť úlohy väčšieho rozsahu optimálne. Jednou z možností ako riešiť tento problém je redukcia vstupov, ktoré ovplyvňujú náročnosť problému najviac. Preto predstavujeme algoritmus na redukciu množstva spojov úlohy, ktorý spája dvojice spojov do jedného spoja a následnom riešení pomocou IP solvera. Prirodzene, táto metóda redukuje množstvo spojov, čo môže spôsobiť stratu optimality získaného riešenia. Avšak, týmto spôsobom sme schopný nájsť veľmi dobré riešenie blízke optimálnemu riešeniu pôvodného problému.

Základnou myšlienkou, ktorá je za algoritmom spájania spojov je fakt, že v systémoch verejnej dopravy miest sa často nachádzajú spoje, ktoré vedú do okrajových častí miest a koncové zastávky týchto spojov sú veľmi ďaleko od nabíjačiek. Zároveň predpokladáme, že nabíjačky budú najčastejšie umiestnené v centre mesta.

Navrhovaný algoritmus redukcie sa skladá z dvoch fáz. V prvej fáze sa vyberajú dvojice spojov vhodné na spojenie a v druhej fáze sa vyberajú najvhodnejšie dvojice.

Prvá fáza začína identifikáciou terminály, ktoré sa nachádzajú v okrajových častiach mesta. Za týmto účelom sme vytvorili graf spojení medzi zastávkami, kde hrana predstavuje následnosť zastávok počas nejakého spoja. V tomto grafe ďalej nájdeme zastávky, ktoré majú stupeň vrcholu rovný jednej. Len na týchto zastávkach bude možné spojenie dvoch spojov.

Ďalej sme si definovali kritérium, na základe ktorého budeme vyberať dvojice vhodné na spojenie spomedzi všetkých možných dvojíc spojov. My sme zvolili kritérium, kde dva spoje nasledujú za sebou v rámci špecifického intervalu. Zároveň musí byť splnená podmienka, že zastávka kde prvý spoj dvojice končí a druhý spoj dvojice začína je identická. Myšlienka za touto podmienkou je, že spájané spoje nasledujú krátko za sebou, pričom prvý smeruje do okrajovej časti a druhý pokračuje opačným smerom do centra mesta.



Obrázok 1. Príklad výberu kandidáta podľa kritéria BCC2

V druhej fáze algoritmu budeme z vytvorenej množiny dvojíc na spojenie vyberať tie najvhodnejšie dvojice spojov. Pre túto fázu predstavujeme dve odlišné kritériá. Prvé kritérium (označené BCC1) hovorí, že najlepší kandidát na spojenie je taký, ktorý má medzi spájanými spojmi najmenší čas čakania. Druhá kritérium (BCC2) spája najprv tie spoje, kde sa bod spojenia (zastávka) nachádza najďalej od najbližšej nabíjačky. Základná myšlienka tohto kritéria je zobrazená aj na obrázku 1. Na ňom vidíme dvoch možných kandidátov. Vidíme, že v prípade prvého kandidáta sa zastávka spojenia nachádza veľmi ďaleko od najbližšej nabíjačky druhý kandidát má miesto spojenia veľmi blízko nabíjačke, ale začiatok a koniec spojeného spoja sa od nej bude nachádzať veľmi ďaleko, čo spôsobí že v prípade nabíjania sa minie veľké množstvo energie na prejazd od spoja k nabíjačke prípadne naopak. Preto bude na základe kritéria BCC2 vybraný kandidát 1.

4 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Na otestovanie algoritmu redukcie a následného riešenia IP solverom sme vykonali niekoľko experimentov, pri ktorých sme porovnávali výsledky pre pôvodnú a redukovanú úlohu. Všetky experimenty boli spúšťané na stroji s Intel Core i5-7200U 2,5Ghz, 16GB RAM s využitím IP solvera Xpress IVE 7.3 a časový limit výpočtu bol stanovený na 16 hodín. Datasets, na ktorých sa testovalo boli vygenerované výberom z reálnych dát poskytnutých prevádzkovateľom dopravného systému DPMŽ v meste Žilina. Bolo vytvorených 10 datasetov (DS1-DS10) s rôznym počtom spojov dokumentovaných v tabuľke 1 v stĺpci *Original*.

Pre spotrebu energie bola stanovená hodnota 1,08kWh/km a maximálna kapacita batérie na hodnotu 140kWh. Zároveň boli umiestnené v cestnej sieti tri nabíjačky, kde dve sa nachádzajú v depe pre trolejbusy a jedna v centre mesta. Všetky elektrické autobusy začínajú svoju trasu v depe pre autobusy, ktoré sa nachádza asi 2 km od centra mesta.

Prvou časťou experimentov bola redukcia spojov. V tomto prípade máme definovaný jeden parameter a síce maximálny čas medzi nasledujúcimi spojmi (*MaxTime*). Pre tento parameter sa testovali dve hodnoty – 5 a 15 minút medzi spojmi. Zároveň sa testovali aj kombinácie s oboma parametrami pre výber najvhodnejšieho kandidáta – BCC1 a BCC2. Výsledky redukcie môžeme vidieť v tabuľke 1. Názov redukcie v tabuľke je odvodený od parametra *MaxTime* a kritéria výberu najvhodnejšieho kandidáta.

Tabuľka 1. Výsledky redukcie vstupov pre jednotlivé datasety

<i>Dataset</i>	<i>Redukcia vstupov</i>				<i>Original</i>
	<i>5_BCC1</i>	<i>5_BCC2</i>	<i>15_BCC1</i>	<i>15_BCC2</i>	
<i>DS1</i>	42	42	31	31	49
<i>DS2</i>	60	60	44	43	77
<i>DS3</i>	63	63	52	51	83
<i>DS4</i>	123	123	96	94	160
<i>DS5</i>	81	81	73	71	105
<i>DS6</i>	102	102	85	83	133
<i>DS7</i>	196	196	155	149	245
<i>DS8</i>	329	329	273	266	415

Môžeme si všimnúť, že počty spojov po redukcii v prípade redukcii *5_BCC1* a *5_BCC2* sú identické. Po detailnom preskúmaní spojených spojov sme zistili, že spojené spoje sú identické. Jediný rozdielom bolo ich poradie, preto sme testovanie IP solverom nevykonávali pre každú

z týchto redukcí, ale len pre jednu z nich. V prípade času 15 minút medzi spojmi si môžeme všimnúť rozdiely. Môžeme zhodnotiť, že pri čase 5 minút sa redukcia pohybovala v rozmedzí 14-24% a v prípade času 15 minút to bolo 30-42% pre kritérium BCC1 a 32-44% pre kritérium BCC2.

Druhá časť experimentov, riešenie redukovaných úloh pomocou IP solvera, je uvedená v Tabuľke 2. V tabuľke je uvedený najlepší nájdený výsledok ako aj spodná hranica problému a čas riešenia. Ako môžeme vidieť v tabuľke, tak sa spodná hranica nemenila pri žiadnej redukcii s výnimkou niekoľkých úloh redukcie 15_BCC1. Z tohto dôvodu sa kritérium BCC2 javí ako vhodnejšie. Zároveň je vidno, že každá redukcia bola schopná vyriešiť niektoré z problémov, pri ktorých nebola pôvodná úloha riešiteľná, napr. dataset DS5 a DS6. Zároveň sme po redukcii boli schopní nájsť riešenie aj v prípade úlohy DS8, kde IP solver v prípade pôvodnej úlohy nenašiel žiadne riešenie.

Z pohľadu výpočtového času je zrejmé, že redukcia úlohy zlepšila výpočtový čas úloh. Môžeme to vidieť v prípade všetkých redukcí a najmä v prípade menších datasetov. Takisto je vidno, že v prípade redukcí 15_BCC1 a 15_BCC2 sa výpočtový čas znížil niekoľkonásobne aj v porovnaní s redukciami 5_BCC1 a 5_BCC2. V prípade redukcí 5_BCC1 a 5_BCC2 sa redukcia času pohybovala v rozmedzí 50-70% a v prípade redukcí 15_BCC1 a 15_BCC2 to bolo 70-80%.

Pre porovnanie kritérií BCC1 a BCC2 sme porovnávali ich dosiahnuté výsledky ako aj výpočtový čas. V prípade kritéria BCC1 sa pri niektorých úlohách zhoršila účelová funkcia. Kritérium BCC2 však účelovú funkciu nezhoršilo. Naproti tomu sa ukazuje, že kritérium BCC2 je o niečo pomalšie ako kritérium BCC1. Celkovo však môžeme povedať, že kritérium BCC2 je vhodnejšie, keďže dosiahlo lepšie výsledky ako kritérium BCC1.

Tabuľka 2. Výsledky experimentov pre jednotlivé redukcie s najlepším nájdeným riešením a spodnou hranicou (*Rieš./BB*) a časom výpočtu (*Čas*) v sekundách

<i>Data set</i>	<i>5_BCC1/5_BCC2</i>		<i>15_BCC1</i>		<i>15_BCC2</i>		<i>Original</i>	
	<i>Rieš./BB</i>	<i>Čas (s)</i>	<i>Rieš./BB</i>	<i>Čas (s)</i>	<i>Rieš./BB</i>	<i>Čas (s)</i>	<i>Rieš./BB</i>	<i>Čas (s)</i>
<i>DS1</i>	4/4	1,5	4/4	2,2	4/4	1,7	4/4	3,6
<i>DS2</i>	4/4	10,5	5/5	4,9	4/4	4,6	4/4	117,5
<i>DS3</i>	5/5	23,7	5/5	6,9	5/5	9,7	5/5	43
<i>DS4</i>	6/6	43,2	6/6	13,5	6/6	18,5	6/6	712,2
<i>DS5</i>	8/8	85,2	8/8	49,7	8/8	53,2	9/8	57600
<i>DS6</i>	9/9	177,7	10/10	63,8	9/9	74,8	10/9	57600
<i>DS7</i>	13/13	787,9	14/14	365,8	13/13	397,4	27/13	57600
<i>DS8</i>	27/26	57600	26/26	10718	26/26	10625	-/26	57600

5 ZÁVER

Navrhli sme algoritmus na redukcii počtu vstupných spojov pre úlohu návrhu turnusov pre elektrické autobusy. Tento algoritmus redukoval počty spojov na vybraných úlohách definovaných datasetmi generovanými z reálnych dát v meste Žilina. Následne sa spustila optimalizácia týchto redukovaných úloh a získané výsledky sme porovnali s výsledkami a výpočtovým časom pre pôvodné úlohy. Navyše sme otestovali dve navrhnuté kritériá pre výber najvhodnejšieho kandidáta pre spojenie a odporúčame využiť druhé z nich - BCC2, ktoré hovorí, že najlepší kandidát je ten, ktorý má bod spojenia čo najďalej od najbližšej nabíjačky.

Experimenty ukazujú že je možné redukovať množstvo spojov o 32-44% a výpočtový čas až o 70-80% bez straty optimálneho riešenia pri nastavení 15 minút pre maximálny čas medzi spojmi pre tvorbu vhodných kandidátov a kritéria BCC2 pre výber najvhodnejšieho kandidáta. V sumári môžeme povedať, že redukcia spojov je prístup, ktorý môže zlepšiť možnosti riešiteľnosti úloh návrhu turnusov pre elektrické autobusy na úlohách veľkého rozsahu bez veľkej straty v oblasti optimálneho riešenia a môže byť implementovaná do heuristických aj exaktných algoritmov na riešenie úlohy návrhu turnusov pre elektrické autobusy.

OZNÁMENIE

Tento príspevok bol podporovaný grantmi VEGA1/0089/19 “Vývoj metodiky pre analýzu prevádzkových dát za účelom podpory rozhodovania v oblasti riadenia obslužných systémov pre elektrické vozidlá” a VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest”.

Použitá literatúra

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. Bunte S. and Klierer N. 2009. An overview on vehicle scheduling models. In: Public Transport, vol. 1, no. 4, pp. 299-317. doi:10.1007/s12469-010-0018-5
2. van Kooten Niekerk E., van den Akker J. M. and Hoogeveen J. A. 2017. Scheduling electric vehicles. In: Public Transport, vol. 9, no. 1, pp. 155-176. doi:10.1007/s12469-017-0164-0
3. Czimmermann P. 2006. On certain transport scheduling problem for heterogeneous bus fleet. In: Communications, no. 3, pp. 17-18.
4. Rogge M., van der Hurk E., Larsen A. and Sauer D. U. 2018. Electric bus eet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. In: Applied Energy, vol. 211, pp. 282-295. doi:10.1016/j.apenergy.2017.11.051
5. Sassi O. and Oulamara A. 2017. Electric vehicle scheduling and optimal charging problem: complexity, exact and heuristic approaches. In: International Journal of Production Research, vol. 55, no. 2, pp. 519-535. doi: 10.1080/00207543.2016.1192695
6. Janovec M. and Kohani M. 2019. Exact approach to the electric bus fleet scheduling. Transportation Research Procedia, Volume 40, Pages 1380-1387, ISSN 2352-1465, <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.07.191>.
7. Janovec M. and Kohani M. 2019. Battery Degradation impact on the Electric Bus Fleet Scheduling. International Conference on Information and Digital Technologies (IDT), Zilina, Slovakia, pp. 190-197. doi: <https://doi.org/10.1109/DT.2019.8813693>

Kontaktné údaje

Ing. Maroš Janovec

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

email: maros.janovec@fri.uniza.sk

OPTIMALIZAČNÉ ÚLOHY PRE EFEKTÍVNY NÁVRH NABÍJACEJ INFRAŠTRUKTÚRY PRE ELEKTRICKÉ AUTOBUSY V MESTSKEJ DOPRAVE

OPTIMISATION PROBLEMS FOR EFFECTIVE DESIGN OF CHARGING INFRASTRUCTURE FOR ELECTRIC BUSES IN URBAN TRANSPORT

Michal Koháni

Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme úlohami zaoberajúcimi sa riešením optimalizačných úloh súvisiacich s návrhom infraštruktúry a prevádzkou elektrických vozidiel vo verejnej doprave v mestách. Jedná sa o úlohy v dvoch oblastiach, ktorých riešenie by malo zabezpečiť, aby budovanie potrebnej infraštruktúry a prevádzka elektrických vozidiel boli z ekonomického pohľadu uskutočniteľné. Prvou oblasťou je efektívne budovanie potrebnej nabíjacej infraštruktúry, ako sú nabíjacie stanice, kde sa vozidlá nabíjajú počas prestávok, alebo nabíjacie úseky, kde sa vozidlá nabíjajú počas svojho pohybu po infraštruktúre. Druhou oblasťou sú úlohy súvisiace s prevádzkou elektrických vozidiel, ako sú obehové vozidlové plány a plány nabíjania, kde je nutné rešpektovať špecifické podmienky, ako napríklad dlhší čas nabíjania vozidiel a pod.

Príčné slová: *umiestňovacie úlohy, nabíjacie stanice, elektrické autobusy, mestská doprava*

Abstract

In this paper we deal with tasks dealing with the solution of optimization problems related to the design of infrastructure and operation of electric vehicles in public transport in cities. These are tasks in two areas, the solution of which should ensure that the construction of the necessary infrastructure and the operation of electric vehicles are economically feasible. The first area is the efficient construction of the necessary charging infrastructure, such as charging stations where vehicles are charged during breaks, or charging sections where vehicles are charged during their movement through the infrastructure. The second area is tasks related to the operation of electric vehicles, such as vehicle schedules and charging plans, where it is necessary to respect specific conditions, such as longer charging time of vehicles, etc.

Keywords: *location problems, charging stations, electric buses, urban transport*

1 ÚVOD

V poslednej dekáde sa celosvetovo zvyšuje tlak na znižovanie emisií skleníkových. V decembri 2015 bola prijatá Parížska dohoda, podľa ktorej by bolo potrebné udržať nárast priemernej svetovej teploty pod 2°C [1]. Jedným z hlavných producentov skleníkových plynov, najmä CO₂, sú najmä mestské regióny, pričom spotrebúvajú 78 % svetovej energie a produkujú viac ako 60 % emisií skleníkových plynov [2]. 21 % podiel na globálnych emisiách má doprava, pričom cestná osobná doprava produkuje takmer polovicu týchto emisií [3]. Zníženie emisií a zníženie súvisiacich nákladov je možné aj podporou verejnej dopravy a alternatívnych pohonov.

V posledných rokoch dochádza k výraznému nástupu elektrických autobusov. V rokoch 2012 až 2020 bolo v európskom regióne dodaných 5 087 elektronických autobusov, takmer 75% z nich bolo odovzdaných v rokoch 2019 a 2020 [4]. V tejto súvislosti dochádza k zníženiu investičných nákladov a aj k ďalším výzvam, ktoré bude treba riešiť v súvislosti s optimálnym návrhom infraštruktúry a ekonomicky efektívnou prevádzkou siete elektrických vozidiel vo verejnej doprave.

V príspevku sa zaoberáme úlohami zaoberajúcimi sa riešením optimalizačných úloh súvisiacich s návrhom infraštruktúry a prevádzkou elektrických vozidiel vo verejnej doprave v mestách. Prvou oblasťou je efektívne budovanie potrebnej nabíjacej infraštruktúry, ako sú nabíjacie stanice, kde sa vozidlá nabíjajú počas prestávok, alebo nabíjacie úseky, kde sa vozidlá nabíjajú počas svojho pohybu po infraštruktúre. Druhou oblasťou sú úlohy súvisiace s prevádzkou elektrických vozidiel, ako sú obehy vozidiel a plány nabíjania, kde je nutné rešpektovať špecifické podmienky, ako napríklad dlhší čas nabíjania vozidiel a pod. V príspevku predstavíme matematické modely a naznačíme spôsoby ich riešenia.

2 SÚČASNÝ STAV RIEŠENEJ PROBLEMATIKY

Prvou oblasťou, na ktorú je smerovaný výskum v oblasti elektrických autobusov v mestskej doprave, je výskum v oblasti modelov budovania nabíjacej infraštruktúry pre rôzne typy elektrických vozidiel vo verejnej doprave. Existuje viacero technológií nabíjania, v súčasnosti prevládajú hlavne dve z nich. Prvou technológiou je dobíjanie počas nočného pobytu v depe alebo na vybraných zastávkach. Druhou technológiou je priebežné nabíjanie počas jazdy vozidla (tzv. IMC - in-motion charging), čo využívajú hlavne tzv. parciálne trolejbusy.

Jednou z prác, ktorá sa komplexne venuje návrhu umiestnenia nabíjacej infraštruktúry, je práca [5], v ktorej vytvorili autori celočíselný model na umiestnenie nabíjacích staníc v mestskej oblasti a otestovali ho na údajoch o autobusových linkách v Štokholme. V článku [6] autori predstavujú matematický model, ktorý minimalizuje počet použitých nabíjacích staníc a simulačné overenie navrhnutého riešenia. Model otestovali na údajoch z mesta Berlín. Simulačný prístup zvolili aj autori v [7], kde porovnávali možnosti rôznych typov nabíjania v rámci priebežného nabíjania a ich ekonomický prínos. V prípade problematiky budovania nabíjacích úsekov pre priebežné nabíjanie vozidla existuje málo dostupných zdrojov. Autori v [8] a [9] publikovali zistenia z pozorovaní z prevádzky IMC vozidiel v meste Gdynia. Autori článku [10] sa venovali tejto problematike, pričom riešili úlohu optimálneho rozmiestňovania nabíjacích vedení, pričom vytvorili matematický model úlohy a riešili ho pomocou heuristických metód.

Druhou oblasťou je výskum úloh súvisiacich s prevádzkou elektrických vozidiel, ako sú obeh vozidiel a plán nabíjania, kde je nutné rešpektovať viaceré špecifické podmienky. V článku [11] autori riešia úlohu návrhu turnusov elektrických autobusov a optimalizácie rozvrhu nabíjania. V práci [12] boli prezentované dva modely na riešenie úlohy návrhu turnusov - model charakteristický spojitým modelovaním nabíjania a model popisujúci nabíjanie ako nelineárny proces pomocou diskretizácie stavu nabitia batérie. Autori článku [13] predpokladali lineárny proces nabíjania a riešili aj dopad na elektrickú sieť a jej maximálny výkon v danom čase. Okrem toho je modelovaná kombinovaná úloha s obmedzeným počtom elektrických vozidiel. Riešením úlohy návrhu turnusov elektrických autobusov sa zaoberali aj v článku [14], kde predstavili algoritmus založený na k-Greedy Algorithm. V [15] autori na postavenie modelu využívajú modelovací nástroj Equilibre Multimodal - Multimodal Equilibrium, ktorým modelovali prevádzku autobusov aj tranzitný a dopravný systém, ktorý simuloval reálne podmienky v doprave. Okrem návrhu turnusov vozidiel je nutné riešiť aj optimalizáciu nabíjania vozidiel na nabíjacej stanici. V článku [16] predstavujú autori matematický model

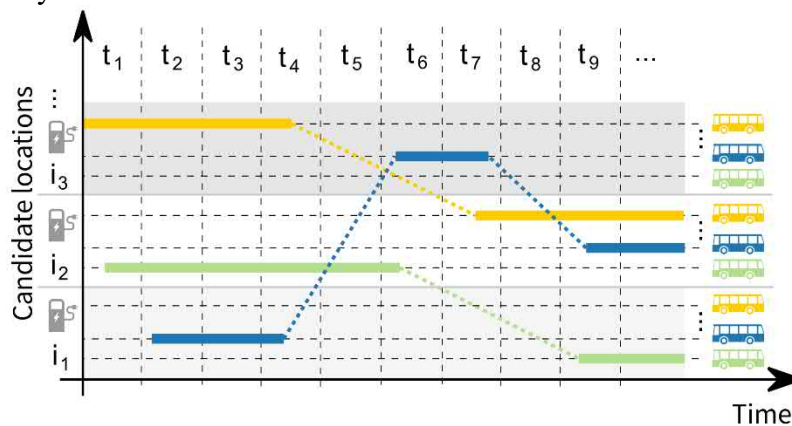
kontrolovaného nabíjania, ktorý minimalizuje celkové náklady na nabíjanie tým, že upravuje množstvo dobitej energie aj nabíjací výkon nabíjačky..

3 ÚLOHY NÁVRHU NABÍJACEJ INFRAŠTRUKTÚRY PRE ELEKTROBUSY

3.1 Úloha rozmiestnenia nabíjacích staníc pre elektrobusy

Úloha rozmiestnenia nabíjacích staníc pre elektrobusy bola bližšie popísaná napríklad v [17][18] a [19]. Pri riešení tejto úlohy predpokladáme, že sa existujúce turnusy vozidiel zostanú zachované. Cieľom je nájsť také umiestnenie nabíjacích staníc a určiť počet nabíjacích bodov na týchto staniách tak, aby bolo možné všetky vozidlá vo flotile transformovať na elektrické vozidlá. Nabíjacie stanice môžeme budovať v ktoromkoľvek mieste množiny I , čo je množina kandidátov, kde je možné umiestniť nabíjajúcu stanicu. Premenné $y_i \in \{0,1\}$ predstavujú rozhodnutie o vybudovaní nabíjacej stanice v mieste $i \in I$ a premenné $q_i \in \mathbb{Z}^+$ určujú počet počet nabíjacích bodov v mieste $i \in I$.

Okrem umiestňovacích premenných potrebujeme v modeli riešiť aj rozvrh nabíjania vozidiel. V článku [17] sme použili postup, kde sa čas diskretizoval po určitých úsekoch dňa a nabíjanie vozidiel sa riešilo v daných časových úsekoch pomocou 0-1 premenných. Popis nabíjania vozidiel je uvedený na obr.1.



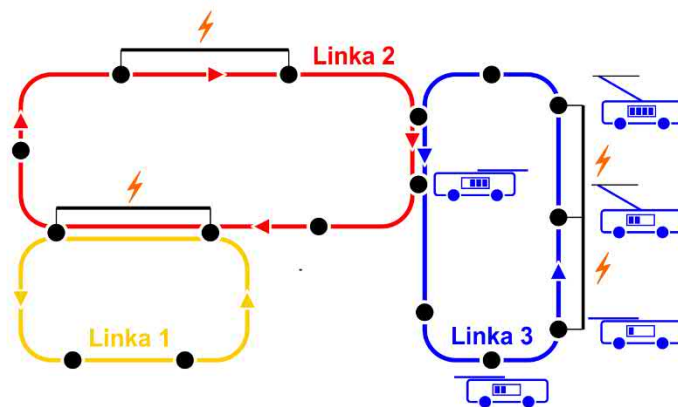
Obr. 1. Popis nabíjania vozidiel

Matematický model je bližšie popísaný v [17]. Účelová funkcia zabezpečuje, aby bol vybudovaný čo najmenší počet nabíjacích staníc. Štrukturálne podmienky v modeli je možno rozdeliť na viacero skupín, ich bližší popis je uvedený v [17]. Jedna skupina podmienok zabezpečuje, aby boli vybudované nabíjacie stanice tam, kde majú byť vybudované stojany. Ďalšie skupiny podmienok zabezpečuje kontinuitu nabíjania vozidiel, zabezpečenie neprekročenia maximálnej kapacity batérie vozidla pri nabíjaní a tak isto aj vytvorenie istého plánu nabíjania vozidiel, ktorý rešpektuje počet vybudovaných nabíjacích bodov.

Navrhnutý matematický model bol otestovaný na testovacích dátových sádach rôznej veľkosti, ktoré boli vytvorené zo siete liniek MHD Žilina. Úloha bola riešiteľná exaktne pre pomerne veľké rozsahy úloh (2 týždne prevádzky vozidiel, maximálny počet vozidiel bol 46) [17][18].

3.2 Úloha rozmiestnenia nabíjacích úsekov pre elektrobusy

Riešenie úlohy rozmiestnenia nabíjacích úsekov pre elektrické autobusy je pomerne málo preskúmaný problém. Riešená úloha je ilustrovaná na obr. 2.



Obr. 2. Úloha návrhu nabíjajúcich úsekov pre elektrické autobusy

V literatúre síce existuje niekoľko modelov, ktoré danú úlohu riešia, avšak umožňujú exaktné riešenie len pre veľmi malé úlohy [19]. Pre riešenie tejto úlohy sme navrhli model v [20], ktorý je podobný lokačnej úlohe, ale s tým rozdielom, že sa neumiestňuje v bodoch dopravnej siete, ale na úsekoch, čo si vyžiadalo istú transformáciu klasickej lokačnej úlohy. Táto zmena nám dovoľuje riešiť väčšie úlohy, spresniť vstupné dáta a zachováva energiu medzi jednotlivými jazdami v turnuse.

V lokačnom modeli sa nachádzajú nasledujúce premenné a konštanty. Premenná y_i je rozhodovacia premenná o vybudovaní alebo nevybudovaní vedenia na úseku i . Premenná x_{rj+1} je rozhodovacia premenná o stave batérie vozidla r po prejení úseku j . Ďalej B^{max} označuje maximálny stav batérie v kWh, respektíve B^{min} minimálny stav batérie v kWh. CO je konštanta spotreby energie v kWh/m a CH je konštanta nabíjania z vedenia v kWh/m. Konštanta m je počet vozidiel (turnusov) a n je počet úsekov cesty, D_i je dĺžka úseku i , $a(r, j)$ je index j -teho úseku na trase vozidla r a $q(r)$ je nakoniec počet úsekov v turnuse vozidla r .

Cieľom úlohy je vybudovať čo najlacnejší systém minimalizujúci náklady na výstavbu nabíjajúcich úsekov s trolejovým vedením. V modeli je nutné rešpektovať podmienky udávajúce počiatočný stav nabitia batérie na začiatku turnusu, podmienky zachovania energie, kedy v prípade úseku bez trolejového vedenia sa používa energia z batérií vozidla a pri pohybe na úseku s trolejovým vedením sa vozidlo môže nabíjať.

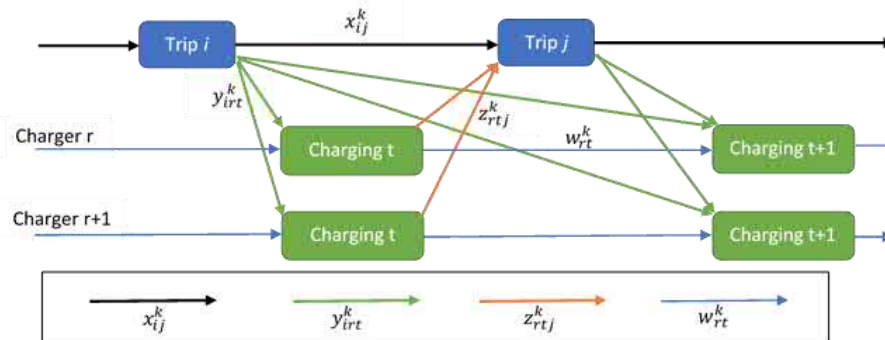
S navrhnutým modelom bolo vykonaných viacero experimentov na úlohách vytvorených z dát poskytnutých Dopravným podnikom mesta Žiliny, čo umožnilo vytvoriť viacero menších testovacích úloh a úlohu reálneho rozsahu obsahujúcu všetky spoje v MHD Žilina. Bolo vykonaných viacero úprav modelu a využitý exaktný [20] ako aj heuristický prístup [21] k riešeniu úlohy.

4 ÚLOHA TURNUSOVANIA ELEKTRICKÝCH AUTOBUSOV

Úloha turnusovania elektrobusev je bližšie popísaná v [22][23]. V tejto úlohe predpokladáme, ako už bolo spomenuté v úvode príspevku, že rozmiestnenie nabíjajúcich staníc a počet nabíjajúcich bodov je určený. Cieľom modelu je vytvoriť rozvrhy pre jednotlivé elektrobusev a zároveň aj rozvrh nabíjania na jednotlivých nabíjajúcich bodoch tak, aby boli rešpektované obmedzenia dojazdu elektrobusev a kapacity ich batérií. Je potrebné vytvoriť optimálny rozvrh elektrobusev tak, aby bol použitý čo najmenší počet vozidiel.

Základnými rozhodovacími premennými sú premenné, ktoré zabezpečujú kontinuitu vytvoreného rozvrhu. Vozidlá môžu v rozvrhu prechádzať nie len medzi spojmi, ale aj medzi nabíjajúcimi udalosťami. V prípade tohto modelu boli nabíjacie udalosti riešené iným spôsobom,

ako v úlohe rozmiestnenia nabíjajúcich staníc. Čas nebol diskretizovaný, ale nabíjacie udalosti boli naviazané na existujúcu množinu spojov N , teda dĺžka nabíjajúcich udalostí je rôzna. Ilustrácia rozhodovacích premenných je uvedená na obrázku 3.



Obr. 3. Rozhodovacie premenné pri úlohe turnusovania elektrických autobusov [22][23]

Matematický model úlohy je bližšie popísaný v [22][23]. V účelovej funkcii sa snažíme o minimalizáciu počtu použitých vozidiel, pričom vozidlá môžu začínať svoj turnus buď spojom, alebo nabíjaním. V modeli je viacero skupín štruktúrnych podmienok. Prvú skupinu tvoria podmienky turnusovania, ktoré zabezpečujú kontinuitu spojov a nabíjajúcich udalostí u každého vozidla. Druhá skupina sú podmienky spotreby energie a treťou skupinou podmienky nabíjania. Tieto podmienky zabezpečujú, aby stav nabitia batérie nepresiahol maximálnu kapacitu a neklesol pod nulovú hodnotu.

Navrhnutý matematický model bol otestovaný na testovacích dátových sadách rôznej veľkosti, ktoré boli vytvorené zo siete liniek MHD Žilina. Úloha bola riešiteľná exaktne len pre menšie testovacie úlohy, nakoľko výpočtový čas rýchlo narastal so zväčšujúcim sa rozsahom úlohy [22][23]. Pre zmenšenie veľkosti úlohy bol prezentovaný algoritmus na redukciu dát [24], ktorý bol založený na spájaní niektorých spojov obsluhovaných jedným vozidlom do skupín, v rámci ktorých nedôjde k nabíjacej udalosti. Rovnako bol navrhnutý aj postup na riešenie úlohy metódou generovania stĺpcov a niekoľko heuristických prístupov na riešenie úlohy.

5 ZÁVER

Ako bolo v príspevku predstavené, elektromobilita vo verejnej doprave si vyžaduje riešenie viacerých nových optimalizačných úloh, ktoré zahŕňajú špecifiká súvisiace s nabíjaním vozidiel a s nabíjacou infraštruktúrou. V predstavených oblastiach sme vykonali návrhy niekoľkých matematických modelov a metód na riešenie týchto modelov exaktným aj heuristickým spôsobom. V budúcnosti bude našou snahou integrovať vytvorené modely do jedného komplexného modelu, ktorý bude riešiť aj návrh rozmiestnenia infraštruktúrnych prvkov pre nabíjanie vozidiel, ako aj turnusovanie vozidiel. V aktuálnych modeloch sú tieto oblasti oddelené, pričom rozmiestnenie nabíjajúcich staníc a úsekov môže mať značný vplyv na tvorbu turnusov a naopak. V komplexný model bude v sebe zahŕňať viacero typov rozhodnutí ako sú napríklad lokačné a rozvrhové rozhodnutia, pričom takýto typ úloh nie je v literatúre veľmi bežný.

OZNÁMENIE

Tento príspevok bol podporený grantom VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusev vo verejnej doprave inteligentných miest”.

Použitá literatúra

1. European Commission – Paris Agreement, 2016, <http://ec.europa.eu>

2. <https://www.un.org/en/climatechange/climate-solutions/cities-pollution>
3. <https://ourworldindata.org/co2-emissions-from-transport>
4. <https://www.sustainable-bus.com/electric-bus/electric-bus-public-transport-main-fleets-projects-around-world/>
5. XYLIA, M., LEDUC, S., PATRIZIO, P., KRAXNER, F. AND SILVEIRA, S. 2017. Locating charging infrastructure for electric buses in Stockholm. In: *Transportation Research Part C*, **78**, Elsevier, 2017, s. 183-200.
6. KUNITH, A., MENDELEVITCH, R., GOEHLICH, D. 2017. Electrification of a city bus network—An optimization model for cost-effective placing of charging infrastructure and battery sizing of fast-charging electric bus systems. In: *International Journal of Sustainable Transportation*, 11:10, s. 707-720.
7. MOHAMED, M., FARAG, H., EL-TAWEEL, N., FERGUSON, M. 2017. Simulation of electric buses on a full transit network: Operational feasibility and grid impact analysis. In: *Electric Power Systems Research*, Volume 142, 2017, s. 163-175.
8. BARTŁOMIEJCZYK, M. 2017. Practical application of in motion charging: Trolleybuses service on bus lines. In: *18th International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE)*. 2017, s. 1–6.
9. BARTŁOMIEJCZYK, M., STÝSKALA, V., HRBAC, R., POŁOM, M. 2013. Trolleybus with traction batteries for autonomous running. In: *7th International Scientific Symposium on Electrical Power Engineering (ELEKTROENERGETIKA) Stara Lesna*, 2013, s. 1-3.
10. USHIJIMA-MWESIGWA, H., KHAN, MD Z., CHOWDHURY, M. A., SAFRO, I., 2017. Optimal Installation for Electric Vehicle Wireless Charging Lanes. Clemson University, Clemson SC, USA. 2017.
11. MATTHIAS ROGGE, M., VANDER HURK, E., LARSEN, A., SAUER, D. U., 2018. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. In: *Applied Energy*, Volume 211, 2018, s. 282-295.
12. VAN KOOTEN, N., M., AKKER, J.M., HOOGEVEEN, J.A. 2017. Scheduling electric vehicles. In: *Public Transport*. 9. s. 155-176.
13. SASSI, O., OULAMARA, A. 2014. Electric Vehicle Scheduling and Optimal Charging Problem: Complexity, Exact and Heuristic Approaches. In: *International Journal of Production Research*. 55. s. 519-535.
14. PAUL, T. YAMADA, H. 2014. Operation and charging scheduling of electric buses in a city bus route network. In: *17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, Qingdao, 2014, s. 2780-2786.
15. TEOH, L. E., KHOO, H. L., YOKE G., S., MUN CHONG, L.. 2017. Scenario-based Electric Bus Operation: A Case Study of Putrajaya, Malaysia. In: *International Journal of Transportation Science and Technology*. 7. s. 10-25.
16. Leou, R.-C., Hung, J.J. 2017. Optimal Charging Schedule Planning and Economic Analysis for Electric Bus Charging Stations. In: *Energies* 2017, 10, s.483.
17. KOHÁNI, M., VASILOVSKÝ, P. 2018. Location-scheduling approach to the electric buses charging infrastructure design in urban areas, In: *KOI 2018 conference*, Zadar, Chorvátsko
18. VASILOVSKÝ P., KOHÁNI, M. 2019. Simulation verification of location of charging stations for electric buses, In: *IDT 2019 conference*, Žilina, Slovensko
19. GRYGAR, D. 2019. Exaktný prístup na návrh minimálnej siete pre prevádzku a nabíjanie parciálnych trolejbusov. In: *Využitie kvantitatívnych metód vo vedeckovýskumnej činnosti a v praxi XIII*, Zuberec. 2019.

20. GRYGAR, D., KOHÁNI, M. 2021 Generalized Location-based Linear Model for Overhead Wires Network Planning for Battery-assisted Trolleybuses. In: INES, IEEE 25th International Conference on Intelligent Engineering Systems. 2021. V tlači.
21. GRYGAR, D., JÁNOŠÍKOVÁ, L., JANKOVIČ, P., KOHÁNI, M. 2021 Kernel Search for Overhead Wires Network Planning for Battery-assisted Trolleybuses. In: Transportation Research Procedia. 2021. TRANSCOM 2021 14th International Scientific Conference on Sustainable, Modern and Safe Transport, V tlači.
22. JANOVEC, M., KOHÁNI, M. 2019. Exact approach to the electric bus fleet scheduling, In: Transcom 2019 – konference, Starý Smokovec
23. JANOVEC, M., 2019. Exaktný prístup k turnusovaniu elektrických autobusov, In: SSOV - Quantitative Methods in Research and Practice, seminár, Zuberec.
24. Janovec M., Kohani M. 2020. Data Reduction Algorithm for the Electric Bus Scheduling Problem. In: Neufeld J.S., Buscher U., Lasch R., Möst D., Schönberger J. (eds) Operations Research Proceedings 2019. Operations Research Proceedings (GOR (Gesellschaft für Operations Research e.V.)). Springer, Cham.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michal Koháni, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 01026 Žilina

Tel: (421 41) 513 4060

email: michal.kohani@fri.uniza.sk

ANALÝZA DOPADOV MOŽNEJ REŠTRUKTURALIZÁCIE SIETE STANÍC ZZS NA PRIEMERNÚ DOSTUPNOSŤ SLUŽBY

ANALYSIS OF THE IMPACTS OF POSSIBLE EMS STATIONS RESTRUCTURING ON AVERAGE SERVICE ACCESSIBILITY

Marek Kvet

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá analýzou dostupnosti urgentnej zdravotnej starostlivosti poskytovanej záchrannou zdravotnou službou. Dostupnosť služby je vo všeobecnosti tým lepšia, čím bližšie k miestu vzniku mimoriadnej udalosti je dostupné stredisko, z ktorého je vyslaná posádka. Pri hľadaní optimálneho rozmiestnenia staníc treba brať do úvahy špecifickú skupinu život ohrozujúcich diagnóz, ktoré vyžadujú prítomnosť lekára. V príspevku analyzujeme súčasný stav rozmiestnenia staníc z pohľadu priemernej dostupnosti služby a skúmame možnosti jej zlepšenia minimálnymi úpravami štruktúry siete. Jednotlivé prístupy a matematické modely budú experimentálne porovnané na reálnych dátach v podmienkach Slovenskej republiky.

KLúčové slová: *Záchranná zdravotná služba, lokačné úlohy, analýza dostupnosti služby*

Abstract

This paper deals with the analysis of the availability of emergency health care provided by the private medical agencies. The availability of the service is generally the better the closer is the center from which the crew is sent from the place of the emergency. When searching for the optimal locations of stations, a specific group of life-threatening diagnoses that require the presence of a doctor should be taken into account. In this paper, we analyze the current state of stations deployment in terms of average service availability and explore the possibilities of improving it by minimal modifications to the network structure. Individual approaches and mathematical models will be experimentally compared on real data in the conditions of the Slovak Republic.

Keywords: *Emergency Medical System, location problems, analysis of service accessibility*

1 ÚVOD

Záchranné systémy, ktoré tvoria dominantnú aplikačnú oblasť výsledkov nami vytvorených postupov, možno na základe ich povahy a princípu fungovania zaradiť do skupiny verejných obslužných systémov [13].

Pod pojmom *obslužný systém* rozumieme sústavu na seba navzájom závislých dopravných, výrobných, manipulačných aj informačných činností slúžiacich na zabezpečenie potrieb zákazníkov v danom mieste a čase zo zdrojov, pomocou ktorých možno ich potreby uspokojiť [6]. Ako dodáva [2], *obslužným systémom* je súbor funkčne prepojených zariadení a operácií vykonávaných na nich za účelom poskytnutia služieb širokému okruhu zákazníkov.

Pojmom *zákazník* neoznačujeme len zákazníka v ekonomickom zmysle slova, ale v súlade so zvyklosťami v tejto vednej oblasti všeobecne obsluhovaný objekt, či už je to skutočný zákazník, ktorý požaduje dodávku tovaru, či pacient, ktorý potrebuje ošetrovanie, alebo počítač,

ktorý treba opraviť. *Potreba* zákazníka môže mať tiež niekoľko podôb, napríklad požiadavku na dodanie istého druhu tovaru v istom časovom rozmedzí alebo poskytnutie nejakej služby.

Obslužný systém je definovaný jednak množinou obsluhovaných objektov, t.j. zákazníkov s ich špecifickými potrebami, a jednak vlastným poskytovateľom služby, ktorým môže byť súkromný, ale aj verejný subjekt ako firma, štát a podobne. Zákazníci daného systému sú zväčša rozptýlení v určitej geografickej oblasti, pričom *zdroje*, z ktorých sú uspokojované ich potreby, sú obyčajne sústredené do jedného alebo niekoľkých miest, ktoré sa môžu nachádzať nielen na obsluhovanom území, ale aj mimo neho [6]. Je tomu tak preto, že spomínaný zdroj, či ide o sklad, vozidlo záchranej služby alebo iný objekt, je buď čiastočne alebo úplne nedeliteľný a svojou kapacitou dokáže uspokojiť požiadavky viacerých zákazníkov, ktorí sa líšia svojou polohou v danej oblasti [4]. Pretože nie vždy je možné uspokojovať potreby zákazníkov priamo zo zdrojov, treba možnosť poskytovania služby z technických alebo ekonomických dôvodov preniesť do miest, ktoré budeme nazývať *obslužnými strediskami*. Príkladmi obslužných stredísk sú továrne, sklady, nemocnice, školy, úrady a podobne. Vzhľadom na to, že zákazníci sa v obsluhovanej oblasti nachádzajú síce v konečnom, ale zvyčajne veľkom počte umiestnení ako sú mestá a obce SR, vybudovanie obslužného strediska v mieste každého zákazníka neprichádza do úvahy. Práve naopak, poskytovanie služby je potrebné koncentrovať do malého počtu miest, pričom z každého vybudovaného strediska bude uspokojený istý zhluk zákazníkov v danej časti obsluhovaného územia.

Spôsob, akým je zo strediska poskytovaná služba zákazníkom, môže mať dvojaký charakter. Buď treba službu „dopraviť“ k zákazníkovi prostriedkami obslužného systému alebo si zákazník príde po službu do obslužného strediska sám. Príkladom systému, v ktorom zákazník prichádza k zdroju poskytovanej služby, je sieť hypermarketov alebo systém úradov štátnej správy [9]. Naopak, systémom, kde služba „cestuje“ za zákazníkom, je distribučný systém [7], v ktorom firma dodáva tovar priamo zákazníkovi. Ďalším príkladom môže byť systém záchranej služby [5, 8], kde je k pacientovi vyslaná najbližšia voľná posádka.

Obslužné systémy možno podľa [2] rozdeliť do niekoľkých skupín: Jednak sú to *distribučné systémy* zabezpečujúce zásobovanie obyvateľov určitej geografickej oblasti požadovanými komoditami ako sú výrobky bežnej spotreby, elektrická energia, plyn a podobne. Druhú skupinu tvoria tzv. *zvozné systémy*, kam patrí napríklad zvoz komunálneho odpadu či evakuácia obyvateľstva z ohrozenej oblasti [14, 15]. Posledná skupina zahŕňa *prepravné systémy* ako je systém osobnej alebo nákladnej železničnej dopravy.

Úloha návrhu obslužného systému spočíva v nájdení vhodného riešenia pre funkčnú a organizačnú štruktúru daného systému, ktorá čo najlepšie zodpovedá požiadavkám kladeným na systém zo strany jeho prevádzkovateľa alebo zákazníkov. *Štruktúra obslužného systému* je potom určená okrem špecifikácie zdrojov a množiny zákazníkov aj množinou umiestnených stredísk, prípadne aj priradením zákazníkov k týmto strediskám.

Podľa účelu, pre ktorý sa takéto systémy navrhujú, rozlišujeme *súkromné* a *verejné* obslužné systémy. Súkromný obslužný systém je obyčajne súčasťou nejakej firmy a účelom jeho existencie je napomáhať takým cieľom, ktoré vedú k maximalizácii krátkodobého alebo dlhodobého zisku. Tento účel má vplyv na kritériá, ktoré sa používajú pri vlastnom návrhu štruktúry daného systému. Konkrétne kritériá potom môžu mať špecifický tvar ako napríklad minimalizácia celkových nákladov na zabezpečenie požiadaviek zákazníkov v systéme, maximalizácia počtu obsluhovaných zákazníkov, či maximalizácia rozdielu medzi príjmom plynúcim z obsluhy zákazníkov a nákladmi na ich obsluhu [4]. Z uvedeného je zrejmé, že súkromný obslužný systém nepovažuje za potrebné obslúžiť všetkých zákazníkov v danej oblasti, ale pripúšťa vynechanie nevýhodne položených zákazníkov [6].

Verejné obslužné systémy (VOS) sú o niečo zložitejšie. K týmto systémom väčšinou neexistuje žiadna alternatíva, a preto sa pri návrhu požaduje obsluha všetkých zákazníkov danej oblasti [6, 10], čo môže byť veľmi problematické vzhľadom na možné umiestnenia obslužných stredísk. Nutnosť obsluhy každého zákazníka vychádza z toho, že zákazník je zároveň „majiteľom“ systému. Verejný obslužný systém, ktorý má občanovi poskytovať službu, je totiž čiastočne alebo úplne financovaný z jeho daní. Navyše, zákazníkom nemusí byť jeden objekt (osoba), ale môže sa skladať z viacerých jedincov, ktorí majú na základe občianskej rovnoprávnosti nárok na rovnosť prístupu k službe. Z geografického hľadiska ale nie je možné takúto rovnosť dosiahnuť.

Štandardné kritériá kvality používané pri návrhu VOS teda najčastejšie zohľadňujú požiadavku rovnosti prístupu zákazníkov k službe. Okrem toho môžu zahŕňať aj požiadavky na priemernú časovú dostupnosť služby všetkým zákazníkom. Časová dostupnosť môže byť chápaná ako priemerná doba potrebná na dosiahnutie zákazníka, ale rovnako to môže byť maximálna doba, ktorá je potrebná na dosiahnutie najhoršie položeného zákazníka. Časová dostupnosť môže byť formulovaná aj ako podmienka, aby bol každý potenciálny zákazník dosiahnuteľný v určitom časovom limite (napríklad 15 minút) od najbližšieho vybudovaného obslužného strediska [5]. V prípade, že je požiadavka časovej dostupnosti formulovaná ako podmienka, je možné pri návrhu systému uplatniť iné kritérium, napríklad minimálny počet umiestnených zdrojov či náklady na vybudovanie a prevádzku systému za určité časové obdobie. Prostriedky, z ktorých je obslužný systém budovaný, nie sú neobmedzené a obvykle tak limitujú maximálny počet stredísk, ktoré je možné vybudovať.

V nasledujúcich podkapitolách ukážeme niekoľko príkladov modelovania úloh spojených s návrhom štruktúry záchranných systémov, ktoré sú založené na tzv. *lokačno-alokačnom* a *pokrývacom* prístupe.

2 ZÁCHRANNÁ ZDRAVOTNÁ SLUŽBA NA SLOVENSKU

Záchranná zdravotná služba (ZZS) predstavuje prednemocničnú časť poskytovania neodkladnej starostlivosti, ktorá je súčasťou najvyššieho stupňa diferencovanej starostlivosti o pacienta – resuscitačnej a intenzívnej. ZZS možno definovať aj ako poskytovanie neodkladnej zdravotnej starostlivosti osobe v stave, pri ktorom je bezprostredne ohrozený jej život alebo zdravie a osoba je odkázaná na poskytnutie pomoci [11]. Obvykle je táto služba poskytovaná v teréne na mieste náhleho stavu. Záchranná zdravotná služba je súčasťou Integrovaného záchranného systému Slovenskej republiky.

Integrovaný záchranný systém (IZS) je systém pozostávajúci zo záchranných zložiek, ktoré v prípade ohrozenia života, zdravia, majetku alebo životného prostredia zabezpečia rýchlu informovanosť, aktivizáciu a efektívne využívanie a koordináciu síl a prostriedkov záchranných subjektov pri poskytovaní nevyhnutnej pomoci. Hlavnou úlohou IZS je poskytnúť postihnutému subjektu nevyhnutnú pomoc neodkladne a bez omeškania. Pomoc poskytujú rôzne záchranné zložky. Medzi základné zložky IZS patria:

- Hasičský a záchranný zbor (HaZZ),
- poskytovatelia záchrannej zdravotnej služby (ZZS),
- kontrolné chemické laboratória civilnej ochrany,
- Horská záchranná služba,
- Banská záchranná služba.

Tieto zložky poskytujú odbornú, zdravotnú, technickú a ďalšiu potrebnú pomoc v tiesni na základe pokynu koordinačného strediska alebo svojho operačného strediska (OS) tiesňového volania. Vykonávajú tiež organizačné, technické a ďalšie opatrenia na poskytovanie pomoci v tiesni a na ten účel sa vybavujú technickými a vecnými prostriedkami. Každá základná záchranná zložka vykonáva svoju činnosť spravidla vo svojom zásahovom obvode.

3 SIEŤ A POČET STANÍC ZZS

V dnešnej podobe má pozemný záchranný systém ZZS na Slovensku 274 staníc, ktoré podľa typu posádky rozdeľujeme na:

- stanice Rýchlej lekárskej pomoci (RLP), ktorých je 86,
- stanice Rýchlej zdravotnej pomoci (RZP), ktorých je 188.

Okrem toho prevádzkuje súkromná spoločnosť Air - Transport Europe, spol. s r. o. 7 staníc Virtuálnej záchranej zdravotnej služby (VZZS). Časť ambulancií RLP je rozhodnutím Ministerstva zdravotníctva SR na základe odporúčania Operačného strediska ZZS vybavená mobilnou intenzívnou jednotkou (MIJ) na transport kriticky chorých pacientov. V auguste 2014 bol počet staníc RLP-MIJ stanovený na 5. Iné typy posádok, ako fungujú napríklad v okolitých krajinách, slovenská legislatíva nepozná [11].

Jedna posádka RLP poskytuje v súčasnosti neodkladnú starostlivosť priemerne pre 55 000 obyvateľov. Jedna posádka RZP poskytuje neodkladnú starostlivosť v priemere pre 29 000 obyvateľov. Vzhľadom na vysoký podiel sekundárnych zásahov posádok RZP (sekundárnym zásahom rozumieme najčastejšie prevoz pacienta medzi zdravotníckymi zariadeniami) možno ale predpokladať oveľa nižšiu dostupnosť posádok pre vykonanie primárnych výjazdov v zásahovom území [11]. Na celé územie SR pripadá približne 20 000 obyvateľov na jednu ambulanciu ZZS bez rozdielu typu posádky.

4 ANALÝZA DOSTUPNOSTI SLUŽBY PRE SÚČASNÝ STAV

Ako bolo popísané v predchádzajúcich častiach príspevku, dostupnosť záchranej zdravotnej služby je vo všeobecnosti tým lepšia, čím bližšie je umiestnené stredisko k miestu vzniku mimoriadnej udalosti, ktorá si vyžaduje výjazd posádky či už v zložení niekoľkých záchranárov (RZP) alebo výjazd posádky s lekárom (RLP). Z pohľadu analýzy dostupnosti služby je potrebné rozlišovať dva prístupy:

- Brať do úvahy vzdialenosť (geografickú alebo časovú) pacienta od najbližšej stanice ZZS bez ohľadu na jej typ, čím získame priemernú dostupnosť služby (urgentnej prednemocničnej zdravotnej starostlivosti). V prípade vybraných špecifických diagnóz nemusí byť táto charakteristika práve najvhodnejšia.
- Analyzovať vzdialenosť iba k najbližšej stanici RLP, ktorá je kľúčová najmä pri diagnózach kvintetu prvej hodiny, kedy musí situáciu riešiť lekár. Medzi takéto život ohrozujúce stavy patria napríklad akútne infarkt myokardu, náhla cievna mozgová príhoda a podobne. Táto hodnota dostupnosti bude v porovnaní s predchádzajúcim prístupom logicky vyššia, no v uvedených prípadoch je tento čas rozhodujúci.

V nasledujúcej tabuľke preto udávame základné výkonnostné charakteristiky systému nielen pre celý systém ZZS (stanice RZP aj RLP dokopy), ale aj samostatne pre stanice typu RLP. Pacienti, ktorých je potrebné uspokojiť v prípade akútneho ohrozenia života a zdravia, sú koncentrovaní v 2934 obciach, pričom požiadavka obce je rovná počtu volaní na tiesňovú

linku, teda tento počet nemusí byť priamo úmerný počtu obyvateľov danej obce. Počet volaní sme získali z Operačného strediska ZZS.

Základnými numerickými charakteristikami, ktoré vyjadrujú dostupnosť služby, sú: celková vzdialenosť (*minSum*) všetkých obcí k ich najbližšiemu stredisku ZZS, pričom váhou obce je počet volaní z danej obce na tiesňovú linku. Ďalším ukazovateľom je priemerný čas dojazdu posádky do obce a napokon počítame aj maximálnu vzdialenosť, ktorú musí posádka prejsť, aby sa dostala k najvzdialenejšiemu pacientovi. Posledným merateľným ukazovateľom je percento volaní, ktoré sú obslužené do 15 minút (časová vzdialenosť obce od najbližšieho umiestneného strediska nepresiahne tento limit). Tabuľka 1 ukazuje vyhodnotenie dostupnosti ZZS pre všetky stanice bez ohľadu na ich typ. V tabuľke 2 je analyzovaná dostupnosť služby poskytovanej výlučne stanicami RLP.

Pre úplnosť dodajme, že celkový počet staníc ZZS na území Slovenskej republiky je 274, pričom tieto stanice sú rozmiestnené v 207 rôznych obciach. Samozrejme, že v niektorých obciach môže byť viac staníc vzhľadom na počet obyvateľov, resp. veľkosť obce. Celkový počet obcí, v ktorých je umiestnená stanica RLP, je 166. Počet obcí so stanicou RLP je 80.

Tabuľka 1 Vyhodnotenie dostupnosti služby pre všetky stanice ZZS

Ukazovateľ	Hodnota
<i>minSum</i> :	2146096,1
Maximálna časová vzdialenosť [min]:	31,5
Priemerná časová vzdialenosť [min]:	5,67
Percento volaní obslužených do 15 minút:	98,91

Tabuľka 2 Vyhodnotenie dostupnosti služby pre stanice RLP

Ukazovateľ	Hodnota
<i>minSum</i> :	3071417,9
Maximálna časová vzdialenosť [min]:	38,1
Priemerná časová vzdialenosť [min]:	8,12
Percento volaní obslužených do 15 minút:	88,01

Analýza dostupnosti záchranej zdravotnej služby zhrnutá v tabuľkách 1 a 2 ukazuje, že napriek tomu, že dostupnosť ZZS je dobrá a takmer 100 percent požiadaviek dokáže byť vybavených do 15 minút, dostupnosť rýchlej lekárskej pomoci (staníc RLP) by si zaslúžila zlepšenie. V tomto príspevku ukážeme dva prístupy, ktorých dopady preskúmame analyticky.

5 NÁVRH ZMIEN V SIETI STANÍC ZZS

Cieľom reštrukturalizácie siete staníc ZZS je v prvom rade zvýšenie dostupnosti posádok RLP pri čo najmenších úpravách existujúcej siete.

5.1 Rozšírenie siete staníc RLP transformáciou vybraných staníc RZP na RLP

Prvé opatrenie, ktorého dopady budeme analyzovať, sa týka transformácie vybraných staníc RZP na RLP, pričom zachováme ich súčasné umiestnenia. Dostupnosť záchranej služby (pozri tabuľku 1) sa teda nezmení, pretože všetky stanice zostanú tam, kde aktuálne sú, ale k existujúcim stanicám RLP pridáme niekoľko ďalších, ktoré vyberieme zo zoznamu súčasných staníc RZP. Zmeníme tak iba typ niektorých staníc. V závislosti od počtu nových RLP staníc možno očakávať postupné mierne zlepšenie dostupnosti rýchlej lekárskej pomoci. Otázkou zostáva, ktoré stanice RZP transformovať na RLP?

Uvedený problém budeme riešiť pomocou matematického modelu, ktorý je postavený na úlohe o váženom p -mediáne. Na jeho efektívne riešenie využijeme radiálnu formuláciu, ktorá umožňuje nájdanie optimálneho riešenia vo veľmi krátkom čase aj pri rozsiahlejších úlohách [1, 3, 12]. Kandidátmi na umiestnenie stanice RLP budú všetky obce, v ktorých je aktuálne stanica RZP a súčasne tam nie je stanica RLP (v niektorých obciach môžu byť viaceré stanice rôznych typov). Takýchto obcí je 127. Obsluhovanými objektami budú všetky obce, ktorých je 2934. Úlohou bude vybrať presne p umiestnení, pomocou ktorých dosiahneme optimálnu dostupnosť staníc RLP (existujúcich aj transformovaných). Pri návrhu modelu teda musíme brať do úvahy aj existujúcu sieť staníc RLP.

Matematický model možno formulovať pomocou nasledujúcich označení: Nech n je počet obcí, teda $n = 2934$. Indexy obsluhovaných obcí budú tvoriť množinu J , teda $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Požiadavka obce $j \in J$, teda počet volaní na tiesňovú linku za určité obdobie, bude označená konštantou b_j . Analogicky, označme počet kandidátov na umiestnenie (transformáciu) stanice symbolom m , teda $m = 127$. Indexy kandidátov budú tvoriť množinu I , teda $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Symbol p bude reprezentovať počet súčasných staníc RZP, ktoré chceme transformovať na RLP. Celkový počet staníc ZZS zostane nezmenený. Vzdialenosť (časovú alebo geografickú) medzi obcami $i \in I$ a $j \in J$ označíme d_{ij} . Navyše budeme potrebovať zoznam súčasných staníc RLP a ich vzdialenosti k obciam. Nech z udáva počet obcí, v ktorých sa nachádza aspoň jedna stanica RLP. V našom prípade $z = 80$. V niektorých väčších obciach je totiž viac staníc RLP (spolu ich je 86). Podobne ako v predchádzajúcich definíciách, označme množinu príslušných indexov symbolom Z , teda definujme $Z = \{1, 2, \dots, z\}$. Okrem toho zavedme označenie t_{zj} pre vzdialenosť medzi stanicami RLP a obcami, kde $z \in Z$ a $j \in J$. Teraz máme definované všetky vstupné údaje matematického modelu.

Rozhodnutie o transformácii stanice RZP na RLP budeme modelovať bivalentnou premennou y_i pre $i \in I$. Ak na mieste $i \in I$ zmeníme typ stanice na RLP, príslušná premenná y_i nadobudne hodnotu 1, inak bude nulová. Ak chceme minimalizovať celkovú časovú alebo geografickú vzdialenosť obcí od ich najbližšej stanice RLP, potrebujeme definovať pomocné premenné x_{js} . Tieto pomocné premenné budú slúžiť na identifikáciu faktu, či sa v určitom okruhu nachádza aspoň jedna stanica RLP (pôvodná alebo transformovaná). Indexy s môžeme určiť takto: Nech $v = \max\{t_{zj} : z \in Z \text{ a } j \in J\}$. Potom indexy s v pomocných premenných x_{js} môžeme voliť podľa presnosti používaných matic. V našom prípade sú hodnoty v v maticiach s presnosťou na jedno desatinné miesto, a tak indexy s volíme z množiny $S = \{0, 0,1, 0,2, \dots, v\}$.

Na základe všetkých uvedených skutočností môžeme matematický model pre túto úlohu formulovať takto:

$$\text{Minimalizujte} \quad \sum_{j \in J} b_j \sum_{s \in S} 0,1x_{js} \quad (1)$$

$$\text{Za podmienok:} \quad x_{js} + \sum_{i \in I | d_{ij} \leq s} y_i + \sum_{z \in Z | t_{zj} \leq s} 1 \geq 1 \quad \forall j \in J, s \in S \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (3)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (4)$$

$$x_{js} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, s \in S \quad (5)$$

Účelová funkcia daná výrazom (1) minimalizuje vzdialenosť obcí od ich najbližšej stanice RLP. Keďže pri optimalizácii treba brať do úvahy nielen stanice, ktoré sa transformujú z RZP

na RLP, ale všetky RLP stanice, väzobné podmienky (2) musia mať mierne komplikovanejšiu štruktúru. Výraz (6), ktorý tvorí časť podmienky (2), pre danú hodnotu indexu s udáva počet staníc RZP, ktoré sa majú transformovať na RLP a sú v okruhu s od obce j . Analogicky, výraz (7) udáva počet pôvodných staníc RLP, ktoré sú v okruhu s od obce j .

$$\sum_{i \in I | d_{ij} \leq s} y_i \quad (6)$$

$$\sum_{z \in Z | t_{zj} \leq s} 1 \quad (7)$$

Spojením čiastkových výrazov (6) a (7) do štruktúrálnej podmienky (2) môžeme vysvetliť princíp, že pomocná premenná x_{js} môže nadobúdať hodnotu 0 iba vtedy, ak sa v okruhu s od obce j nachádza aspoň jedna stanica RLP (transformovaná z RZP alebo pôvodná). Inak musí byť premenná rovná 1, aby bola splnená podmienka nerovnosti. Pomocou premenných x_{js} a konštanty 0,1 v účelovej funkcii (1) dokážeme vyjadriť akúkoľvek vzdialenosť medzi obcou a jej najbližšou stanicou RLP. Podmienka (3) nedovolí presiahnuť počet transformovaných RZP staníc na stanice typu RLP a podmienky (4) a (5) udávajú definičný obor premenných.

Riešením modelu (1)-(5) dostaneme zoznam staníc, ktoré máme zmeniť z pôvodného typu RZP na RLP. Keďže rozmiestnenie staníc nemeníme, dostupnosť služby nezhoršíme. Na druhej strane, výrazne môžeme prispieť k skráteniu času, ktorý je nevyhnutný na presun posádky RLP na miesto vzniku mimoriadnej udalosti. Konkrétne dopady tejto transformácie ukážeme na vykonaných experimentoch, ktoré sú zhrnuté v tabuľke 3 pre rôzne hodnoty p .

Tabuľka 3 Výsledky numerických experimentov pre transformáciu vybraných staníc RZP na RLP

p	Čas výpočtu [s]	$minSum$	$MaxVzd$ [min]	$AvgVzd$ [min]	Percento dosahu do 15 minút
2	2,55	3018654,0	38,1	7,98	88,95
4	2,50	2969145,3	38,1	7,85	89,96
6	2,54	2927520,5	38,1	7,74	90,73
8	2,52	2886709,9	38,1	7,63	91,42
10	2,58	2849465,2	38,1	7,53	91,80
12	2,75	2815741,1	38,1	7,45	92,37
14	2,81	2785898,6	38,1	7,37	92,71
16	2,92	2758864,9	38,1	7,29	92,98
18	2,82	2732649,0	38,1	7,23	93,32
20	2,85	2708122,8	38,1	7,16	93,79

Analýza dosiahnutých výsledkov ukazuje, že iba zmenou typu stanice z RZP na RLP možno dosiahnuť zlepšenie priemernej dostupnosti služby pre pacientov až o jednu minútu. Uvedená zmena zároveň nezaťažuje prevádzkovateľov služby s výnimkou personálneho zabezpečenia. Sídla staníc sa nezmenili, preto by navrhnuté zmeny mohli byť a verejnosťou akceptované. Čo sa týka výpočtových charakteristík, môžeme pozorovať veľmi malé výpočtové časy, ktoré možno vysvetliť jednak malým rozsahom úlohy, jej dobrou štruktúrou, ale aj radiálnou formuláciou, ktorá naplno využíva výhodné vlastnosti pokrývacích úloh. So zvyšujúcim sa počtom staníc RLP klesá priemerná časová vzdialenosť obcí od ich najbližšieho strediska a zlepšuje sa tak dostupnosť rýchlej lekárskej pomoci. Už 6 existujúcich staníc RZP a ich transformácia na RLP stačia na to, aby bolo viac ako 90 percent pacientov obslužených do 15 minút. Pri súčasnom rozmiestnení staníc RZP a RLP je toto percento pokrytia do 15 minút na úrovni približne 88 percent. Cieľ optimalizácie (dosiahnuť percento nad 90) sa dá naplniť relatívne malou zmenou v sieti staníc.

5.2 Zmena typu existujúcich staníc ZZS bez zmeny ich umiestnenia

Druhý prístup k optimalizácii siete staníc ZZS, ktorý budeme v tomto príspevku analyzovať, spočíva v tom, že počet ani rozmiestnenie súčasných staníc sa nezmení. Výskumnú otázku tak možno formulovať takto: Je možné dosiahnuť zlepšenie dostupnosti ZZS len zmenou typu existujúcich staníc? Teda tak, aby sa počet staníc RZP a RLP nezmenil? Zároveň nedovolíme žiadne presuny staníc v rámci siete.

Na uvedený problém sa pozrieme z pohľadu matematického modelovania: Opäť budeme riešiť úlohu váženého p -mediánu, pričom kandidátmi na umiestnenie stanice RLP budú tie obce, v ktorých je aktuálne umiestnená aspoň jedna stanica bez ohľadu na jej typ. Takýchto obcí je 207. Úlohou je vybrať $p = 80$ obcí tak, aby sme maximalizovali dostupnosť najbližšej stanice RLP, teda minimalizovali celkovú časovú vzdialenosť medzi obcami a ich najbližšou stanicou. Pri zachovaní zavedených označení možno matematický model tejto úlohy zapísať v tvare (8)-(12). Pre úplnosť je potrebné poznamenať, že indexy s v pomocných premenných x_{js} budú nadobúdať hodnoty $0, 0,1, \dots, v$, kde hodnotu v určíme takto: $v = \max\{d_{ij}: i \in I \text{ a } j \in J\}$.

$$\text{Minimalizujte} \quad \sum_{j \in J} b_j \sum_{s \in S} 0,1x_{js} \quad (8)$$

$$\text{Za podmienok:} \quad x_{js} + \sum_{i \in I, d_{ij} \leq s} y_i \geq 1 \quad \forall j \in J, s \in S \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (10)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad (11)$$

$$x_{js} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, s \in S \quad (12)$$

Účelová funkcia (8) minimalizuje vzdialenosť obcí od ich najbližšej stanice RLP. Podmienky (9) hovoria, že pomocná premenná x_{js} môže nadobúdať hodnotu 0 iba vtedy, ak sa v okruhu s od obce j nachádza aspoň jedna stanica RLP, inak musí byť premenná rovná 1, aby bola splnená podmienka nerovnosti. Podmienka (10) nedovolí prekročiť maximálny počet obcí, kde má byť aspoň jedna stanica RLP. Obligatórne podmienky (11) a (12) udávajú definičný obor premenných.

Podobne ako v predchádzajúcej analýze popísanej v podkapitole 5.1, ani teraz sa priemerná dostupnosť záchranej služby nezmení, pretože rozmiestnenie staníc zostáva zachované. Čo sa však zlepšuje, je dostupnosť rýchlej lekárskej pomoci. V nasledujúcej tabuľke 4

Tabuľka 4 Vyhodnotenie dostupnosti služby pre stanice RLP po optimalizácii

Ukazovateľ	Hodnota
Celkový výpočtový čas [s]:	29.95
<i>minSum</i> :	2933542.9
Maximálna časová vzdialenosť [min]:	38.1
Priemerná časová vzdialenosť [min]:	7.76
Percento volaní obslužených do 15 minút:	90.39

Ako vidíme v tabuľke 4, na dosiahnutie pokrytia viac ako 90 percent požiadaviek do 15 minút postačia súčasné stanice aj pri ich súčasnom rozmiestnení. Len zmenou typu staníc sa podaril dosiahnuť želaný efekt.

6 ZÁVER

V príspevku sme sa zaoberali analýzou dopadov vybraných zmien v usporiadaní siete staníc Záchranej zdravotnej služby na území Slovenskej republiky na jej dostupnosť, pričom sme sledovali iba niektoré základné merateľné ukazovatele.

V prvej kapitole sme systém záchranej služby zasadili do skupiny verejných obslužných systémov. Skúmaný systém sme v druhej kapitole popísali a analyzovali sme súčasný stav rozmiestnenia staníc. Na základe hodnôt vybraných merateľných ukazovateľov sme navrhli zmeny, ktorými by sa mohla dostupnosť zlepšiť. Hlavný dôraz sme kládli na minimálne úpravy existujúcej siete tak, aby boli navrhnuté zmeny akceptovateľné. Jednotlivé prístupy a matematické modely sme experimentálne porovnali na reálnych dátach v podmienkach Slovenskej republiky. Dosiahnuté výsledky potvrdzujú, že i malými úpravami štruktúry siete staníc možno dosiahnuť pozoruhodné zlepšenie dostupnosti služby a to najmä posádok s lekárom, na ktorý sme sa zamerali.

Pri návrhu a formulácií matematických modelov nemožno zabúdať na fakt, že deterministické modely nereflektujú stochastický charakter reálneho systému v dostatočnej miere. Náhodnosť výskytu požiadaviek sa nedá zohľadniť buď vôbec, alebo iba čiastočne. Riešenia získané optimalizáciou preto si vyžadujú dôslednú verifikáciu, ideálne prostredníctvom počítačovej simulácie. Navyše, prezentované matematické modely nebrali do úvahy skutočnosť, že ak nie je dostupná najbližšia stanica záchranej služby, môže byť požiadavka priradená inému stredisku, ktoré má aktuálne voľnú kapacitu. Ďalšou nemenej dôležitou výzvou by mohlo byť sledovanie viacerých výkonnostných charakteristík systému. Tieto a ďalšie výzvy budú súčasťou budúceho výskumu v tejto oblasti.

POĎAKOVANIE

Tento príspevok bol podporovaný grantmi VEGA 1/0689/19 “Optimálny návrh a ekonomicky efektívna prevádzka infraštruktúry elektrobusov vo verejnej doprave inteligentných miest, VEGA 1/0216/21 „Navrhovanie záchranných systémov s konfliktnými kritériami pomocou nástrojov umelej inteligencie“. Táto práca bola podporená Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. APVV-19-0441“.

Použitá literatúra

1. AVELLA, P., SASSANO, A., VASSIL'EV, I. (2007). Computational study of large scale p-median problems. In *Mathematical Programming* 109, 2007, pp. 89-114
2. BUZNA, Ľ. (2010). Informatické nástroje pre návrh obslužných systémov na priestorovo rozľahlých sieťach: habilitačná práca, Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, 2010, 91 s.
3. GARCIA, S., LABBÉ, M., MARÍN, A. (2011). Solving large p-median problems with a radius formulation. In *INFORMS Journal on Computing* 23 (4), 2011, pp. 546-556
4. JANÁČEK, J. (2008). Alokační a pokrývací modely návrhu veřejného obslužného systému. In *Sborník příspěvků „Úlohy diskretní optimalizace v dopravní praxi: Metody návrhu veřejných obslužných systémů“*, Pardubice: Univerzita Pardubice, Dopravní fakulta Jana Pernera, 2008, ISBN 978-80-7395-076-7, str. 13-25
5. JANÁČEK, J. (2007). Kritéria kvality systému stanic záchranné služby. In *Sborník příspěvků Infotrans 2007: 25.-26.9. 2007*, Pardubice: Univerzita Pardubice, 2007, ISBN 978-80-7194-989-3, str. 125-130
6. JANÁČEK, J. a kol. (2010). *Navrhovanie územne rozľahlých obslužných systémov*, Žilina: EDIS – vydavateľstvo ŽU, 2010, ISBN 978-80-554-0219-2, 404 s.

7. JANÁČEK J., BUZNA Ľ. (2007). Facility location in distribution systems. Žilina: EDIS Publisher, 2007, ISBN 978-80-8070-649-4, 142 p.
8. JANÁČEK, J., JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. (2008). Computability of the emergency service system design problem. In Communications - Scientific Letters of the University of Žilina, 2008, Vol. 10, No. 2, ISSN 1335-4205, pp. 5-9
9. JANÁČEK, J., LINDA, B., RITSCHELOVÁ, I. (2010). Optimization of Municipalities with Extended Competence Selection. In Prager Economic Papers – Quarterly Journal of Economic Theory and Policy, Vol. 19, No 1, 2010, pp. 21-34
10. JÁNOŠÍKOVÁ, Ľ. (2007). Emergency Medical Service Planning. In Communications Scientific Letters of the University of Žilina, Vol. 9, No 2, Žilina: EDIS – University publisher, 2007, ISSN 1335-4205, pp. 64-68
11. KARAŠ, J. a kol. (2017). Návrh zmien v koncepcii ZZS a DZS, moderný a efektívny systém pre rok 2020, SAPFO, Casoonic s.r.o., 2017, ISBN 978-80-89811-02-1, 203 s.
12. KVET, M. (2018). Advanced radial approach to resource location problems. In: Developments and advances in intelligent systems and applications. Cham: Springer International Publishing, 2018, Studies in computational intelligence, 718, ISSN 1860-949X, ISBN 978-3-319-58963-3, pp. 29-48
13. MARIANOV, V., SERRA, D. (2004). Location problems in the public sector. In Drezner, Z., Hamacher, H. W. (editors) Facility Location: Applications and Theory, 1st ed. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2004, ISBN 3-540-21345-7
14. TEICHMANN, D. (2009). Príspevek k problematice evakuace obyvatelstva a možnosti využití matematického programování při jejím plánování. In Krízový management, Fakulta špeciálneho inžinierstva, Žilinská univerzita v Žiline, Vol. 8, No. 1, pp. 91-94
15. TOMAN, Ľ. (2013). Sofistikované nástroje na podporu rozhodovania v podmienkach neistoty pri návrhu verejných obslužných systémov evakuačného typu: dizertačná práca, Žilina: Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, 2013

Kontaktné údaje

doc. Ing. Marek Kvet, PhD.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina

Tel: (421 41) 513 4024

email: marek.kvet@fri.uniza.sk

CVAR OPTIMALIZÁCIA A VYUŽITIE PROCEDÚRY PREVZORKOVANIA

CVAR OPTIMIZATION AND USE OF THE PROCEDURE OF RESAMPLING

Mário Pčolár

Abstrakt

Článok sa zaoberá aplikáciou procedúry prevzorkovania (resampling) v rámci procesu optimalizácie modelov výberu portfólia. Cieľom procedúry prevzorkovania je dosiahnutie portfólií, ktoré poskytujú lepšiu kvalitu výsledkov na dátach mimo výberového súboru v porovnaní s tradičným prístupom založenom na optimalizácii za využitia odhadov z historických dát. V príspevku sa zaoberáme aplikáciou procedúry prevzorkovania na denných dátach o 30 akciách v rámci modelu výberu portfólia v priestore očakávaný výnos a CVaR (Conditional Value at Risk). V príspevku sa zaoberáme aplikáciou dvoch prístupov, prístupe založenom na predpoklade normálneho rozdelenia dát využívajúcim generovanie dát za využitia viacrozmerného normálneho rozdelenia a procedúrou využívajúcou generovanie dát z viacrozmerného zovšeobecneného lambda rozdelenia.

***Kľúčové slová:** viacrozmerné rozdelenie dát, prevzorkovanie, CVaR optimalizácia*

Abstract

The article deals with the application of the resampling procedure within the process of optimizing portfolio selection model. The aim of the resampling procedure is to achieve portfolios that provide better performance results on out-of-sample data compared to the traditional approach based on historical data. In this paper, we deal with the application of the resampling procedure on daily data of 30 shares within the model of portfolio selection in the space of expected return and CVaR (Conditional Value at Risk). In this paper we deal with the application of two approaches, an approach based on the assumption of normal distribution using data generation from multivariate normal distribution and a procedure using data generation from multivariate generalized lambda distribution.

***Keywords:** multivariate distribution, resampling, CVaR optimization*

1 ÚVOD

Aplikáciou procedúry prevzorkovania sa v minulosti zaoberalo viacero autorov, pričom väčšina z nich sa zaoberala aplikáciou v rámci Markowitzovho modelu na mesačných, prípadne týždenných dátach [2],[5]. Len malé množstvo príspevkov sa zaoberalo aplikáciou na iných modeloch výberu portfólia, prípadne na aplikácii v prípade využitia denných dát. Cieľom tohto príspevku je aplikácia procedúry prevzorkovania v rámci modelu výberu portfólia v priestore očakávaný výnos a CVaR za využitia denných dát. Príspevok sa taktiež zaoberá aplikáciou dvoch modifikácií tejto procedúry a to procedúry s využitím viacrozmerného normálneho rozdelenia a procedúry s využitím viacrozmerného zovšeobecneného lambda rozdelenia (GLD). V rámci príspevku využívame modifikáciu CVaR modelu na úlohu lineárneho programovania, pôvodne predstavenú v [8]. V rámci výpočtových experimentov využívame

FKML parametrizáciu GLD rozdelenia, detailný prehľad problematikou ohľadne GLD rozdelenia ako aj formuláciu kvantilovej funkcie možno nájsť napríklad v [1].

2 PROCEDÚRA PREVZORKOVANIA

Procedúra je vo všeobecnosti založená na využití generovania dát z viacrozmerného rozdelenia a metódy Monte Carlo, pričom na každú takúto simuláciu dát sa aplikuje vybraný optimalizačný model výberu portfólia. Výsledkom týchto krokov je množina efektívnych hraníc (efficient frontier) kvantifikovaných z jednotlivých náhodných realizácií dát, pričom výslednú efektívnu hranicu získame spriemerovaním váh jednotlivých štatisticky ekvivalentných portfólií.

Generovanie dát z viacrozmerného normálneho rozdelenia je pomerne známa procedúra, ktorá je v súčasnosti naprogramovaná vo väčšine štatistických softvérov. V rámci nášho príspevku využívame funkciu `rmvnorm()`, obsiahnutú v balíčku `Mvtnorm` [3]. V prípade generovania dát z viacrozmerného zovšeobecneného lambda rozdelenia je to o niečo zložitejšie. V rámci nášho príspevku budeme uplatňovať procedúru generovanie dát z viacrozmerného nie-normálneho rozdelenia uvedenú v [4]. Aplikácia tejto procedúry si vyžaduje, aby rozdelenia jednotlivých komponentov náhodnej premennej \mathbf{X} boli známe v podobe kvantilových funkcií a korelácia je dostupná ako korelačná matica R_X využívajúca kvantifikovanie korelácie pomocou poradia (napríklad Spearmanov korelačný koeficient). Následne procedúra pozostáva z nasledujúcich krokov:

1. Transformácia matice R_X na maticu C_Z aplikovaním výrazu:

$$C_Z = 2 \sin \left[\frac{\pi}{6} R_X \right]$$

2. Vytvorenie dátových vzoriek m – rozmernej normálnej premennej s korelačnou maticou C_Z
3. Transformácia normálnych komponentov na komponenty rovnomerného rozdelenia aplikovaním distribučnej funkcie (CDF) normalizovaného normálneho rozdelenia $U_i = \Phi(Z_i)$ také, že $U_i \sim U(0,1)$
4. Kvantifikujeme hodnoty X_i pomocou danej kvantilovej funkcie jednotlivých komponentov, $X_i = Q_{X_i}(U_i)$

Výhodou takejto procedúry je značná flexibilita vo výbere predpokladaného rozdelenia do bodu, že pre vybrané rozdelenie musí byť známa kvantilová funkcia.

Procedúru prevzorkovania v rámci modelov výberu portfólia ako prvý krát predstavil [7]. Môžeme ju zaradiť do kategórie heuristik na riešenie problému výberu portfólia [9]. Takáto procedúra redukuje problém maximalizácie chyby odhadu (error maximization), pre detailnejší popis tohto problému odporúčame príspevok [6]. Výsledné portfólia tejto procedúry sú výraznejšie diverzifikované v porovnaní s tradičným prístupom. Procedúra prevzorkovania pozostáva z nasledujúcich krokov:

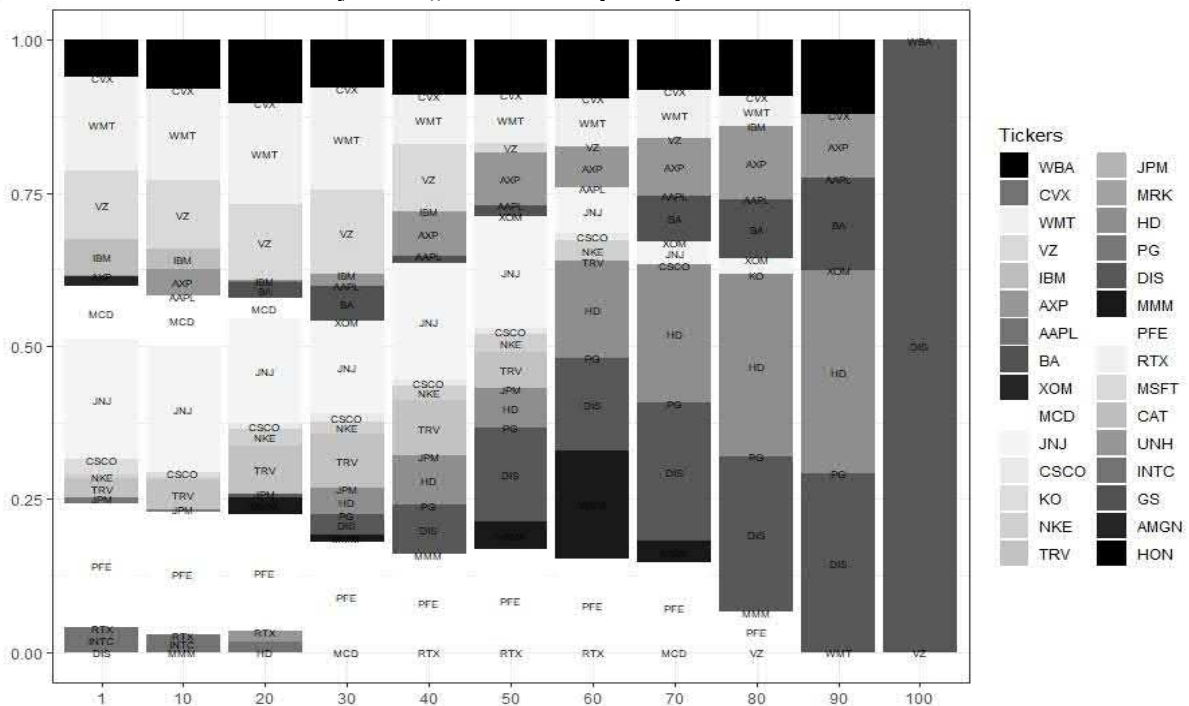
- Odhadneme parametre predpokladaného pravdepodobnostného rozdelenia z historických dát a odhadneme kovariačnú maticu.
- Generujeme vektor náhodných realizácií z viacrozmerného marginálneho pravdepodobnostného rozdelenia, za využitia odhadnutej kovariačnej matice. Dĺžka generovaného intervalu je tradične totožná s počtom pozorovaní historických dát, ktoré sme využili v predchádzajúcom kroku.

- Vygenerovanú vzorku dát, následne využijeme ako vstupné dáta modelu výberu portfólia, pričom odhadneme efektívnu hranicu a uchováme si hodnoty váh pre M rovnomerne rozdelených portfólií na efektívnej hranici.
- Opakujeme predošlé 2 kroky veľa krát, následne spriemerujeme váhy portfólií, ktoré zdieľajú rovnakú pozíciu v rámci jednotlivých simulácií.

3 VÝSLEDKY EXPERIMENTU

Výpočtové experimenty realizujeme na denných dátach o uzatváracích cenách o 30 aktívach od 01.01.2012 do 31.12.2020. Aktíva tvorili komponenty DJIA. Denné výnosy sme kvantifikovali ako tzv. logaritmický výnos, teda prvú diferenciu prirodzeného logaritmu jednotlivých pozorovaní pre jednotlivé aktíva. Rady denných výnosov využívame pri odhadnutí parametrov normálneho rozdelenia a parametrov zovšeobecneného lambda rozdelenia, ktoré budeme využívať následne v rámci procedúry prevzorkovania. Na odhad parametrov rozdelenia sme použili metódu maximálnej vierohodnosti, kde pri odhade parametrov uvažujeme s dátovou vzorkou za obdobie dvoch rokov od 01.01.2012 do 31.12.2013. Pri simulácií Monte Carlo sme realizovali 500 simulácií a pri optimalizácii portfólia modelom využívajúcim mieru rizika CVaR sme generovali 100 rovnomerne rozdelených portfólií na efektívnej hranici.

Obrázok 1: Rozdelenie aktív v rámci vybraných portfólií na efektívnej hranici kvantifikovaných pomocou CVaR modelu a využitia „klasického“ prístupu.

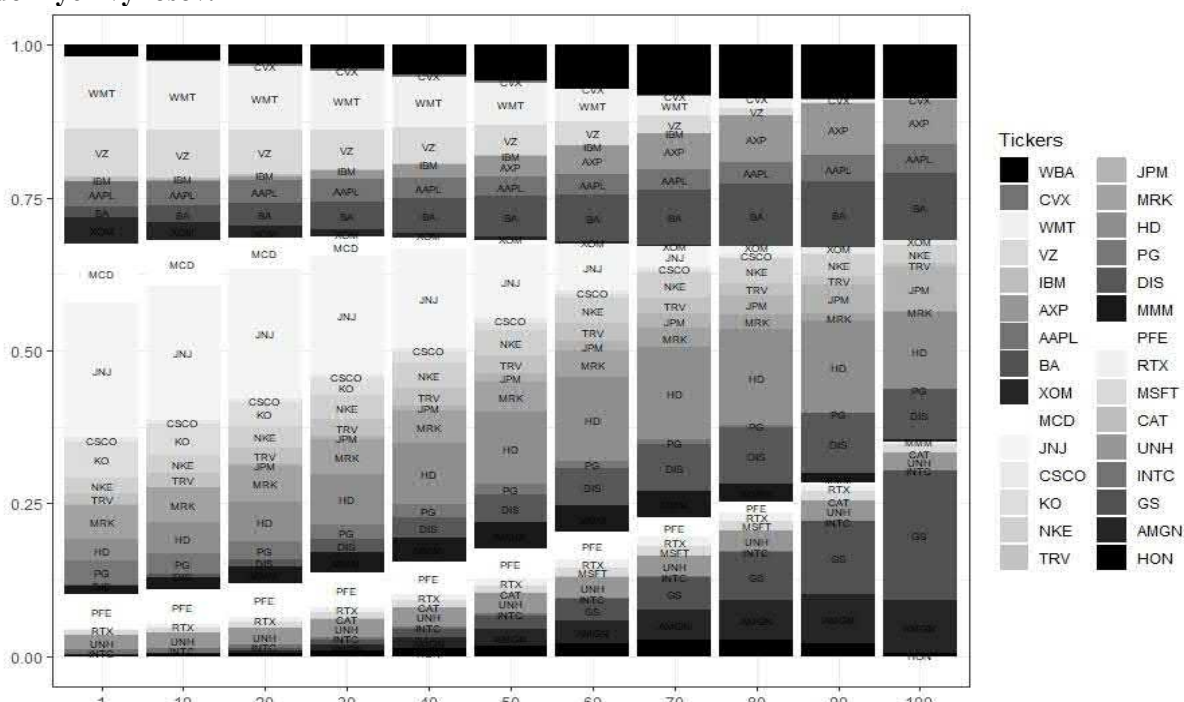


Zdroj: vlastné spracovanie

V rámci výpočtového experimentu porovnávame portfólia kvantifikované využitím „klasického“ prístupu využívajúceho odhady z historických dát v porovnaní s dvoma procedúrami prevzorkovania, kde v jednom prípade uvažujeme s generovaním dát z viacrozmerného normálneho rozdelenia (Norm_mult) a v druhom prípade uvažujeme s generovaním dát z viacrozmerného zovšeobecneného lambda rozdelenia (Gld_mult). Výkon portfólií porovnávame na dátovej vzorke mimo výberový súbor, ktorý využívame pri odhade parametrov jednotlivých modelov. Konkrétne sa jedná o dátovú vzorku od 01.01.2014 do

31.12.2020. V rámci výpočtového experimentu uvažujeme so scenárom investora, ktorý investuje svoje prostriedky do jednotlivých aktív v súlade vybranými výsledkami jednotlivých modelov. Existujú tri scenáre investovania, jednoročný investičný horizont, trojročný investičných horizont a šesť ročný investičný horizont. Investor po dobu dĺžky investičného horizontu nemôže predávať aktíva do ktorých investoval. Aktíva môže predat' až v priebehu nasledujúceho roka po investičnom horizonte, najdlhšie však po dobu jedného roka. Konkrétne teda v roku 2015, 2017, 2020. V experimente abstrahujeme od burzových poplatkov a dodatočných nákladov spojených s predajom a kúpou aktív. Pri porovnávaní uvažujeme so štyrmi reprezentatívnymi portfóliami z každého modelu, pre porovnanie sme vybrali štyri portfólia z každého modelu s tým, že zdieľajú rovnaký požadovaný výnos investorom. Na porovnanie výkonnosti jednotlivých reprezentatívnych portfólií kvantifikujeme priemerné štatistiky za obdobie jedného roka po investičnom horizonte, menovite priemerný výnos (mean), priemernú absolútnu odchýlku (MAD) a z mier výkonnosti modifikovaný Sharpeho pomer, kde ako mieru rizika uvažujeme priemernú absolútnu odchýlku. Takáto miera sa zvykne označovať aj ako pomer priemernej absolútnej odchýlky (mean absolute deviation ratio). Absolútnu odchýlku sme zvolili ako mieru rizika (aj v prípade miery výkonnosti, nakoľko v porovnaní s tradičnejšie využívanou štandardnou odchýlkou a Sharpeho pomerom nás neohraničujú o predpoklad normálneho rozdelenie výnosov investícií.

Obrázok 2: Rozdelenie aktív v rámci vybraných portfólií na efektívnej hranici kvantifikovaných pomocou CVaR modelu a procedúry prevzorkovania s využitím GLD rozdelenia ako modelu denných výnosov.



Zdroj: vlastné spracovanie

Obrázok 1 a Obrázok 2 predstavujú zložené stĺpcové grafy kde jeden stĺpec je zložený z menších častí (rôzneho odtieņu sivej), ktoré reprezentujú veľkosť váh jednotlivých aktív v portfóliu. Vodorovná os zachytáva poradie jednotlivých portfólií, kde prvé portfólio je portfólio s minimálnym rizikom a posledné portfólio je portfólio s maximálnym výnosom. Zvislá os zachytáva kumulovaný súčet váh v portfóliu. Aktíva sú pre každý stĺpec zobrazené v rovnakom poradí, najvyššie v stĺpci sa vždy nachádza váha aktíva WBA následne poradie pokračuje v súlade so zoznamom vedľa grafu (CVX, WMT, ...) najnižšie sa vždy nachádza

váha aktíva HON. Z grafického porovnanie štruktúry vybraných portfóliach je zjavné, že portfólia získane procedúrov prevzorkovania sú výraznejšie diverzifikované v porovnaní s klasickým prístupom. O to výraznejšie v prípade portfólií s vyšším požadovaným výnosom nachádzajúcich sa v pravej polovici jednotlivých obrázkov.

Tabuľka 1 zachytáva kvantifikované priemerné štatistiky jednotlivých vybraných portfólií s rovnakým požadovaným výnosom v rámci jednotlivých investičných horizontov. Portfólia s rovnakým požadovaným výnosom pre jednotlivé modely sú označené rovnakou farbou. Najlepšie hodnoty z pohľadu portfólií s rovnakým požadovaným výnosom a v jednotlivých investičných horizontoch sú zvýraznené boldom. Z dát vyplýva, že portfólia kvantifikované pomocou procedúry prevzorkovania dosahujú v priemere lepšie hodnoty. Len v prípade portfólií s najvyšším požadovaným výnosom dosahuje „klasický“ prístup v prvých dvoch investičných horizontoch lepšie hodnoty. Portfólia kvantifikované pomocou procedúry prevzorkovania a GLD rozdelenia sa v priemere vyznačujú nižším rizikom, čo môže zvýhodňovať takéto portfólia v prípade investícií z dlhodobejším horizontom.

Tabuľka 1: Kvantifikované priemerné štatistiky vybraných reprezentatívnych portfólií v jednotlivých investičných horizontoch a kvantifikovaných modeloch

Model	Požadovaný výnos	Jednoroční investiční horizont			Trojroční investiční horizont			Šestřiroční investiční horizont		
		Mean	MAD	Sharpe_Ratio (MAD)	Mean	MAD	Sharpe_Ratio (MAD)	Mean	MAD	Sharpe_Ratio (MAD)
„Klasický“	0,069%	0,001%	0,839%	0,00073	0,073%	0,431%	0,1693	0,044%	0,572%	0,0776
„Klasický“	0,083%	0,002%	0,815%	0,00283	0,077%	0,410%	0,1880	0,037%	0,544%	0,0689
„Klasický“	0,118%	0,013%	0,884%	0,01498	0,090%	0,401%	0,2256	0,047%	0,661%	0,0716
„Klasický“	0,127%	0,032%	0,906%	0,03551	0,099%	0,417%	0,2364	0,068%	0,670%	0,1021
Norm_mult	0,069%	0,003%	0,823%	0,00363	0,095%	0,356%	0,2668	0,072%	0,462%	0,1553
Norm_mult	0,083%	0,004%	0,813%	0,00485	0,096%	0,370%	0,2583	0,071%	0,454%	0,1557
Norm_mult	0,118%	0,027%	0,863%	0,03182	0,094%	0,382%	0,2460	0,082%	0,658%	0,1253
Norm_mult	0,127%	0,027%	0,924%	0,02953	0,087%	0,449%	0,1945	0,098%	0,696%	0,1404
Gld_mult	0,069%	0,006%	0,790%	0,00715	0,087%	0,356%	0,2448	0,072%	0,448%	0,1598
Gld_mult	0,083%	0,010%	0,788%	0,01213	0,091%	0,365%	0,2496	0,072%	0,455%	0,1578
Gld_mult	0,118%	0,026%	0,867%	0,03054	0,098%	0,382%	0,2557	0,083%	0,611%	0,1363
Gld_mult	0,127%	0,023%	0,918%	0,02472	0,094%	0,458%	0,2058	0,099%	0,665%	0,1486

Zdroj: vlastné spracovanie

ZÁVER

Príspevok sa zaoberá aplikáciou procedúry prevzorkovania v rámci procesu výberu portfólia v priestore očakávaný výnos a CVaR za využitia generovania dát z viacrozmernej náhodnej premennej. Príspevok prispieva do empirického výskumu analýzou tejto procedúry na denných dátach a modely CVaR, ktorým sa doteraz nezaoberalo veľa príspevkov. Príspevok taktiež, popisuje procedúru využívajúcu generovanie dát z viacrozmerného GLD rozdelenia, pričom väčšina doterajšieho empirického výskumu sa zaoberala najmä viacrozmerným normálnym rozdelením. V príspevku sa zaoberáme aplikáciou dvoch variantov takejto procedúry a to s využitím viacrozmerného normálneho rozdelenia a viacrozmerného zovšeobecného lambda rozdelenia. Realizované výpočtové experimenty potvrdzujú skutočnosť, že portfólia generované procedúrou prevzorkovania sú výraznejšie diverzifikované v porovnaní s „klasickým“ prístupom. Z porovnania výkonnosti jednotlivých portfólií v rámci jednotlivých

investičných horizontov vyplýva, že v priemere portfólia kvantifikované procedúrou prevzorkovania dosahujú lepšie hodnoty v porovnaní s „klasickým“ prístupom. Portfólia kvantifikované za využitia GLD rozdelenia sa v priemere vyznačujú nižšou mierou rizika. Vyvodenie silnejších záverov si bude vyžadovať vykonanie rozsiahlejšej analýzy na druhej strane dosiahnuté výsledky podnecujú náš záujem pre ďalší budúci výskum v tejto oblasti.

POĎAKOVANIE

Táto práca bola podporovaná Vedeckou grantovou agentúrou Slovenskej Republiky - VEGA grant no. 1/0339/20 „Hidden Markov Model Utilization in Financial Modeling“.

POUŽITÁ LITERATÚRA

1. Dean, B. 2013. Improved estimation and regression techniques with the generalized lambda distribution. PhD thesis. The University of Newcastle, Australia, Faculty of Science and Information Technology
2. Delcourt, F. and Petitjean, M. 2011. To What Extent is Resampling Useful in Portfolio Management?. In: Applied Economics Letters, 18, 2011
3. Genz, A., Bretz, F., Miwa, T. and Mi, X. 2020. Package ‘mvtnorm’. [online] [22.05.2021] Dostupné na: <<https://cran.r-project.org/web/packages/mvtnorm/mvtnorm.pdf>>
4. Lange, A., Sohrmann, C., Jancke, R., Haase, J., Cheng, B., Kovac, U. and Asenov, A. 2011. A general approach for multivariate statistical MOSFET compact modeling preserving correlations. In: Proceedings of the European Solid-State Device Research Conference 2011, Helsinki: Institute of Electrical and Electronics Engineers, s. 163-166.
5. Markowitz, M. H. and Nilufer, U. 2003. Resampled Frontiers vs Diffuse Bayes: An Experiment, In: The Journal of Investment Management, roč. 1, 2003, č. 4, s. 9-25.
6. Michaud, O. R. 1989. The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?. In: SSRN Electronic Journal, roč. 45, 1989, č. 1, s. 31-42.
7. Michaud, O. R. and Michud, O. R. 1998. Efficient Asset Management. Boston, MA: Harvard Business School Press
8. Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. 2000. Optimization of Conditional Value-at-Risk. In: Journal of Risk, roč. 2, 2000, č. 3, s. 21-42.
9. Scherer, B. 2002. Portfolio Resampling: Review and Critique. In: Financial Analyst Journal, roč. 58, 2002, s. 98-109.

Kontaktné údaje

Ing. Mário Pčolár

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: mario.pcolar@euba.sk

INVESTOVANIE DO OPTIMÁLNEHO PORTFÓLIA A AKCIOVÉHO INDEXU POČAS KRÍZY

INVESTING IN AN OPTIMAL PORTFOLIO AND EQUITY DURING THE CRISIS

Juraj Pekár, Ivan Brezina, Adriana Nguyenová

Abstrakt

Investovanie do akcií, prípadne akciových indexov je hlavne v období krízy zložitý proces. Dôvodom sú predovšetkým výrazné zmeny cien akcií v krátkom čase. Stav akejkoľvek krízy komplikuje rozhodovanie investorov, pričom na zmiernenie rizika možných vysokých strát sa javí ako vhodné použiť nástroje teórie portfólia. V príspevku sú analyzované možnosti využitia modelov výberu portfólia na báze mier výkonnosti DrawDown v období súčasnej krízy. Okrem vyhodnotenia vhodnosti jednotlivých mier výkonnosti (Calmar ratio, Sterling ratio, Burke ratio, Pain ratio a Martin ratio) boli výsledky porovnané tiež s investovaním do vybraného akciového indexu. Analýza bola realizovaná na akciovom indexe Dow Jones Industrial Average, pričom vstupnými dátami boli ceny jednotlivých akcií a indexu v roku 2020.

Kľúčové slová: miera výkonnosti portfólia, DrawDown

Abstract

Investing in stocks or stock indices is a difficult process, especially in times of crisis. The main reason is significant changes in stock prices in a short time. The state of any crisis complicates investors' decisions, and it seems appropriate to use portfolio theory tools to mitigate the risk of possible high losses. The paper analyzes the possibilities of using portfolio selection models based on DrawDown performance measures in the current crisis. In addition to evaluating the suitability of individual performance measures (Calmar ratio, Sterling ratio, Burke ratio, Pain ratio and Martin ratio), the results were also compared with investing in a selected stock index. The analysis was performed on the Dow Jones Industrial Average stock index, with the input data being the prices of individual shares and the index in 2020.

Keywords: Portfolio Performance Measure, DrawDown

ÚVOD

Pretože investor potrebuje pri svojom rozhodovaní efektívne vyhodnotiť výkonnosť jednotlivých fondov a manažér potrebuje pre riziko zvoliť správnu možnosť na alokáciu kapitálu, v praxi sa čoraz častejšie používa koncept založený na meraní výkonnosti portfólia. Uvažované miery výkonnosti možno vo všeobecnosti využiť pri rozhodovaní o výbere portfólia, pričom v príspevku využívame miery výkonnosti založené na báze DrawDown (Calmar ratio, Sterling ratio, Burke ratio, Pain ratio a Martin ratio). V súčasnosti je zaujímavou problematikou možnosť využitia modelov výberu portfólia v čase krízy. V príspevku autori porovnávajú vhodnosť aplikácie modelov výberu portfólia a investičnej stratégie zameranej na investovanie do akciového fondu v čase súčasnej krízy. V prvej časti príspevku je uvedený opis mier výkonnosti na báze DrawDown, ktoré sú následne použité na konštrukciu modelov výberu portfólia. Vyhodnotenie vhodnosti využitia skonštruovaných modelov resp. investície do akciového indexu je uvedené v poslednej časti.

1. MIERY VÝKONNOSTI DRAWDOWN

Ako bolo uvedené v úvode, príspevok poukazuje na vhodnosť využitia mier výkonnosti založených na báze DrawDown. V tejto časti uvedieme jednotlivé miery, ktoré sú východiskom pri konštrukcii modelov výberu portfólia. Budeme využívať nasledujúce miery výkonnosti: Calmar ratio, Sterling ratio, Burke ratio, Pain ratio a Martin ratio.

DrawDown (DD) sa najčastejšie používa pri určení rizikovosti portfólia, resp. ho možno vnímať ako index na určenie kvality manažovania portfólia. DD predstavuje označenie pre pokles hodnoty aktíva od dosiahnutého maxima po jeho aktuálne minimum na konci sledovaného obdobia. DD teda reprezentuje percentuálny rozdiel od najvyššej dosiahnutej hodnoty aktíva po hodnotu aktíva na konci sledovaného obdobia (Brezina a kol. 2018). Odvozené miery rizika, ktoré sú použité pri výpočte jednotlivých mier výkonnosti (maximálny DrawDown (max DD), priemerný DrawDown (AvDD), podmienený DrawDown (CDaR)) boli popísané v (Brezina a kol. 2018).

Calmar ratio (Calmarov pomer)

Calmarov pomer bol predstavený v roku 1991 Terryom W. Youngom. Tento pomer by mal poskytovať aktuálnejšiu výkonnosť fondov ako Sharpeov pomer (Sharpe 1964). Vďaka jeho mesačnej aktualizácii je plynulejší ako Sterlingov pomer (Kestner, 1996), ktorý je v literatúre charakterizovaný ako „príliš citlivý pomer“ (Young, 1991). Calmarov pomer $C_p(\mathbf{r})$ pre vektor výnosov \mathbf{r} definovaný v čase $t = 1, 2, \dots, T$ možno vypočítať (Young, 1991, Bacon 2012):

$$C_p(\mathbf{r}) = \frac{E(\mathbf{r}) - r_f}{\max_{t=1,2,\dots,T} DD(t)} \quad (1)$$

kde $E(\mathbf{r})$ očakávaný výnos aktíva
 r_f bezriziková úroková miera
 $\max DD(t)$ maximálny DrawDown.

Sterling ratio (Sterlingov pomer)

Pri Sterlingovom pomere nahradíme maximálny DrawDown v pomere priemerným DrawDown. Sterlingov pomer bol formulovaný v roku 1981 a na finančný trh ho uviedol Dean Sterling. Vyššie hodnoty tohto pomeru sú považované za lepšie, rovnako ako aj pri Sharpeovom pomere.

Sterlingov pomer $S_p(\mathbf{r})$ možno vypočítať (Kestner, 1996, Bacon 2012):

$$S_p(\mathbf{r}) = \frac{E(\mathbf{r}) - r_f}{AvDD} \quad (2)$$

kde $AvDD$ priemerný DrawDown.

Burke ratio (Burkeov pomer)

Podobne ako predchádzajúce miery výkonnosti aj Burkeov pomer je svojou podstatou podobný Sharpeovmu pomeru, teda meria výkonnosť upravenú o riziko. Rozdiel je v tom, že v menovateli používame ako mieru rizika namiesto štandardnej odchýlky odmocninu súčtu štvorcov hodnôt DrawDown. Často sa používa na hodnotenie výkonnosti hedžových fondov,

ktoré majú investorovi zaručiť, že tieto fondy budú generovať kladné absolútne výnosy. Pre hedžové fondy je pritom kontrola poklesu rizika veľmi dôležitá.

Prvýkrát tento pomer predstavil Burke v roku 1994 vo svojej práci „A sharper Sharpe ratio“, pričom ho možno vypočítať (Burke, 1994, Bacon 2012):

$$B_p(r) = \frac{E(r) - r_f}{\sqrt{\sum_{t=1}^T DD_t^2}} \quad (3)$$

kde DD_t DrawDown v čase t .

Pain ratio („pomer bolesti“)

Pain ratio (pomer bolesti) je definovaný ako pomer dodatočného výnosu voči stratám, ktoré boli „utrpené“ na získanie výnosu. Tento pomer je taktiež podobný Sharpeovmu pomeru a líši sa len pri vyjadrení rizika, kde pri pomere bolesti vyjadříme riziko prostredníctvom indexu bolesti. Pri oboch pomeroch však platí, že čím je vyššia výsledná hodnota, tým sú pomery lepšie.

Pri tomto pomere môžeme získať aj záporné hodnoty, ktorých dôsledkom je analýza v čase tzv. medvedieho trhu, keď na finančnom trhu prevláda klesajúci trend, a teda ceny akcií majú tendenciu klesať. Na finančnom trhu panuje pritom pochmúrna nálada a investor očakáva straty.

Pre lepšie pochopenie tohto pomeru neexistuje univerzálna hodnota, ktorú by sme mohli označiť za „typickú“, pretože výsledok tohto pomeru je ovplyvnený viacerými faktormi (napr. časovým obdobím). V 80. a 90. rokoch mal tento pomer pomerne vysoké hodnoty, pretože výnosy boli vysoké a straty naopak nízke. V roku 2000 boli zas výnosy nižšie a straty vyššie, a teda pomer bol oveľa nižší. Pain Ratio $P_p(\mathbf{r})$ vypočítame na základe vzťahu (Plastira, 2014, Bacon 2012):

$$P_p(\mathbf{r}) = \frac{E(\mathbf{r}) - r_f}{CDaR} \quad (4)$$

kde $CDaR$ podmienený DrawDown.

Martin ratio (Martinov Pomer)

Martinov pomer alebo inak nazývaný aj ako *Ulcer Performance Index* je ukazovateľ, ktorý meria riziko z hľadiska hĺbky a trvania cenových poklesov. V prípade, že ceny akcií klesajú, na trhu sa vytvára nové maximum, ktoré je spôsobené zvyšovaním cien. Ukazovateľ sa zvyčajne počíta v intervale 14 dní a ukazuje percentuálny DrawDown, ktorý môže investor očakávať od dosiahnutého maxima na finančnom trhu za dané obdobie. Čím je hodnota vyššia, tým dlhšie trvá, kým sa akcia vráti na svoju pôvodnú hodnotu. Pomer navrhli Peter Marin a Byron McCann v roku 1987 a bol určený na analýzu podielových fondov. Martinov pomer $M_p(\mathbf{r})$ vypočítame (Plastira, 2014, Bacon 2012):

$$M_p(\mathbf{r}) = \frac{E(\mathbf{r}) - r_f}{\sqrt{CDaR}} \quad (5)$$

kde $CDaR$ podmienený DrawDown.

2. KONŠTRUKCIA MODELOV VÝBERU PORTFÓLIA V JAZYKU R

Úlohy výberu portfólia (Pekár 2015) pomocou mier výkonnosti DrawDown sme riešili pomocou programovacieho jazyka R, kde sme použili ako alternatívu evolučné algoritmy, vďaka ktorým sme boli schopní dosiahnuť suboptimálne riešenia v pomerne krátkom čase. Princíp konštrukcie modelov v jazyku R je uvedený v (Brezina, Pekár 2020). Na rozdiel od uvedeného príspevku sme využili príkazy v jazyku R na výpočet jednotlivých mier výkonnosti: CalmarRatio, SterlingRatio, BurkeRatio, PainRatio a MartinRatio.

Analýzu sme realizovali na akciách indexu Dow Jones Industrial Average (DJIA), ktorý patrí medzi hlavné indexy na trhu a zároveň ide o najznámejší ukazovateľ na americkom trhu. Na analýzu sme použili týždenné dáta od 1.januára 2020 do 31.decembra 2020.

V jazyku R boli využité knižnice: DEoptim (Ardia a kol. 2011, Storn a Price 1997) na riešenie úloh pomocou diferenciálnej evolúcie, quantmod na sťahovanie finančných informácií z finance.yahoo.com, PerformanceAnalytics na výpočet finančných ukazovateľov.

Tabuľka 1: Rozloženie investície v optimálnom portfólia

Spoločnosti	Calmar ratio	Sterling ratio	Burke ratio	Pain ratio	Martin ratio
AMERICAN	0,10%	0,01%	0,00%	0,01%	0,01%
AMGEN	0,32%	0,06%	0,02%	0,00%	0,46%
APPLE	0,01%	73,50%	34,70%	16,83%	15,08%
BOEING	0,05%	0,01%	0,01%	0,03%	0,02%
CATERPILLAR	0,20%	0,04%	0,03%	0,89%	0,17%
CISCO	0,12%	0,01%	0,06%	0,01%	0,07%
COCACOLA	0,28%	0,09%	0,00%	0,06%	0,00%
DISNEY	0,08%	0,03%	0,23%	0,18%	0,15%
DUPONT	0,18%	0,17%	0,04%	0,02%	0,03%
GOLDMAN	0,17%	0,05%	0,01%	0,02%	0,03%
HOMEDEPOT	0,10%	0,05%	0,02%	0,13%	0,10%
HONEYWELL	0,11%	0,04%	0,12%	0,14%	0,34%
CHEVRON	0,11%	0,06%	0,02%	0,01%	0,04%
IBM	0,10%	0,09%	0,00%	0,06%	0,12%
INTELCORPORATION	1,63%	0,05%	0,07%	0,32%	0,06%
JOHNSON&JOHNSON	0,33%	0,11%	0,08%	0,02%	0,03%
JPMORGAN	0,14%	0,07%	0,03%	0,02%	0,02%
MCDONALD	0,17%	0,05%	0,08%	0,02%	0,17%
MERCK	0,25%	0,15%	0,16%	0,15%	0,07%
MICROSOFT	0,16%	0,12%	0,04%	0,29%	0,09%
MMM	1,53%	0,28%	0,03%	0,07%	0,11%
NIKE	0,00%	0,03%	31,57%	22,41%	13,20%
PROCTER	0,20%	0,84%	0,18%	0,22%	0,05%
SALESFORCE	0,16%	0,23%	0,16%	0,00%	0,05%
TRAVELERS	0,02%	0,11%	0,02%	0,02%	0,06%
UNITEDHEALTH	0,08%	0,04%	0,06%	0,62%	0,28%
VERIZON	1,27%	0,15%	0,00%	0,18%	0,24%
VISA	0,05%	0,49%	0,09%	0,05%	0,13%
WALGREENS	92,01%	0,00%	0,02%	0,01%	0,11%
WALMART	0,08%	23,05%	32,16%	57,21%	68,72%
Očakávaný výnos	0,07%	0,89%	0,78%	0,66%	0,62%

Zdroj: Vlastné spracovanie

3. SIMULÁCIA INVESTOVANIA V OBDOBÍ PANDÉMIE

V tejto podkapitole uvidíme situáciu, v rámci ktorej budeme uvažovať, že investor investuje do každého portfólia, ktoré boli stanovené na základe modelov výberu portfólia pre jednotlivé miery výkonnosti pri použití vstupných dát z roku 2020 (od 1.1.2020 do 31.12.2020).

V tabuľke 1 sú uvedené jednotlivé portfóliá, kde sú uvedené optimálne váhy akcií, ktoré sme získali pomocou modelov výberu portfólia na báze mier výkonnosti DrawDown. Uvažujeme, že investor má na začiatku obdobia vymedzenú určitú výšku kapitálu, ktorú sa rozhodne investovať na 2 mesiace (1.1.2021 – 28.2.2021), teda pôjde o krátkodobú investíciu. Investor teda investuje do portfólií, ktoré sú uvedené v Tabuľke 1. Výsledok uvedený v tabuľke 2 reprezentuje jednotlivé výnosy portfólií po skončení horizontu investovania pri použití modelov výberu portfólia na základe príslušnej miery výkonnosti.

Tabuľka 2: Reálny výnos portfólií za investičné obdobie od 1.1.2021 do 28.2.2021

Model na báze miere výkonnosti	Calmar ratio	Sterling ratio	Burke ratio	Pain ratio	Martin ratio
Výnos	-10,38 %	6,21%	7,41 %	9,28 %	10,27 %

Zdroj: Vlastné spracovanie

ZÁVER

Výber portfólia bol realizovaný na báze modelu, v ktorom ako cieľ bola stanovená maximálna hodnota miery výkonnosti. Už z výsledkov, ktoré sme dosiahli v Tabuľke 1, portfólio skonštruované na základe Calmarovho pomeru a vstupných údajov za rok 2020 vyšlo spomedzi všetkých najhoršie, čo sa týka hodnoty očakávaných výnosov. V tabuľke 1 je uvedené rozloženie váh investície, pričom v portfóliu navrhnutom týmto pomerom nám vyšlo až deväť akcií stratových, čo sa odzrkadlilo aj na výnose portfólia, ktoré je taktiež stratové.

Najvyšší výnos portfólia je uvedený pri portfóliu, ktoré je navrhnuté Martinovým pomerom, kde najvyššou výnosnosťou disponuje akcia spoločnosti WALMART (WALMART dosahuje najvyšší podiel v uvedenom portfóliu – 68,72%). Investorovi by predaj tohto portfólia 28.2.2021 zabezpečil výnos vo výške 10,27% (na základe hodnôt z tabuľky 2 a údajov z finance.yahoo.com).

V prípade, že by sme uvažovali so situáciou, že investor má záujem rozložiť svoju investíciu podľa váh indexu DJIA, tak jeho predaj k 28.2.2021 by investorovi priniesol výnos 3,78% (údaje z finance.yahoo.com). Z uvedeného vyplýva, že investorovi sa krátkodobá investícia stále najviac oplatí na základe portfólia navrhnutého Martinovým pomerom, ktoré mu zabezpečí najvyšší výnos.

Na overenie vhodnosti použitia jednotlivých mier výkonnosti na výber portfólia by však bolo potrebné realizovať množstvo experimentov a štatistických vyhodnocovaní. Príspevok zobrazuje iba vybranú situáciu počas obdobia krízy a teda predstavuje analýzu, kde ako najvhodnejší nástroj sa javí realizovať výber portfólia na základe modelu s cieľom maximalizovať Martinov pomer.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0339/20 „ Hidden Markov Model Utilization in Financial Modeling “.

Použitá literatúra:

ARDIA, D. – BOUDT, K. – CARL, P. – MULLEN, K. M. – PETERSON, B. G.: Differential Evolution with DEoptim. *The R Journal*, , 27-34, 2011.

BACON, C.: *Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution*, Second Edition. Wiley, 2012.

BREZINA, I. - PEKÁR, J.: Optimalizácia portfólia s využitím evolučného algoritmu v jazyku R. In *AIESA 2020*. Bratislava : Letra Edu, 2020.

BREZINA, I. - PEKÁR, J. - BREZINA, I. ml.: Manažment portfólia na základe miery výkonnosti DrawDown. In *Competition*. 2018, Jihlava : College of Polytechnics Jihlava, 2018.

BURKE, G.: A Sharper Sharpe Ratio. *Futures* 23(3), 56, 1994.

KESTNER, L. N.: Getting a Handle on True Performance. *Futures* 25(1), 44–47, 1996.

PEKÁR, J. *Modely matematického programovania na výber portfólia*. Ekonóm. 2015.

PLASTIRA, S.: Performance evaluation of size, book-to-market and momentum portfolios. *Procedia Economics and Finance*, 14, 481-490, 2014.

STORN, R. – PRICE, K.: Differential Evolution – A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11, 341– 359, 1997.

YOUNG, T.W.: Calmar Ratio: A Smoother Tool. *Futures Magazine*. 1991.

Kontaktné údaje

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD., prof. Ing. Ivan Brezina, CSc, Ing. Adriana Nguyenová

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 827

email: juraj.pekar@euba.sk, ivan.brezina@euba.sk, nguyenovaadriana@gmail.com

REDUKCIA TROJINDEXOVÝCH MIP ÚLOH NA DVOJINDEXOVÉ V OKRUŽNÝCH ÚLOHÁCH

REDUCTION OF THREE INDEX MILP PROBLEMS TO TWO INDEX ONES IN ROUTING PROBLEMS

Štefan Peško, Zuzana Borčinová

Abstrakt

V tomto príspevku by sme sa chceli podeliť o možnosť redukcie niektorých MIP modelov dopravnej logistiky. Jedná sa o okružné problémy, v ktorých sa obsluha realizuje z rôznych zdrojov. Najjednoduchším prístupom je totiž rozlišovať zdroje pomocou nezávislého, v našom prípade tretieho, indexu modelu. Naš prístup demonštrujeme na troch úlohách. V úlohe U1 sa minimalizujú celkové dopravné náklady vozidiel z viacerých dep, v úlohe U2 sa minimalizujú celkové prestavovacie časy kaliacich strojov. V poslednej úlohe U3 sa minimalizujú celkové prejazdy autobusov v rozvrhu turnusov autobusov z viacerých dep s požiadavkou návratnosti do domovského depa.

KLúčové slová: MIP, dvojindexový model, okružné úlohy

Abstract

In this paper, we would like to share the possibility of reducing some of the MIP models of transport logistics. These are routing problems in which the operation is implemented from various sources. The simplest approach is to differentiate resources using an independent, in our case, third index. We demonstrate our approach on three issues. In the U1, we minimize the total transport costs of vehicles from several depots, and in the U2 it minimizes the total adjustment times of hardening machines. In the last U3, we minimize the total bus passes in the bus schedule from multiple depots with the requirement of return to the home depot.

Keywords: MIP, two index model, routing problems

1 ÚVOD

V tomto príspevku by sme sa chceli podeliť o jednu netriviálnu možnosť redukcie niektorých trojindexových okružných modelov na dvojindexové modely. Z hľadiska výpočtového času tu asi nikoho neprekvapí úspora doby výpočtu pomocou dostupných optimalizačných softvérov pre riešenie úloh MIP. Otázkou však je, ako takú redukciu rozhodovacích premenných realizovať.

2 OKRUŽNÁ DOPRAVNÁ ÚLOHA S VIACERÝMI DEPAMI

Začneme modelom úlohy U1 (Multi-Depot Vehicle Routing Problem) [1],[2], ktorá je asi z prezentovaných úloh najjednoduchšia. Je daná množina n zákazníkov s istými požiadavkami,

m dep, z ktorých sa robí ich obsluha p vozidlami s kapacitou Q v každom depe. Cieľom je určiť také trasy vozidiel, ktoré obslúžia všetkých zákazníkov, aby boli splnené tieto podmienky:

1. Trasa každého vozidla musí začínať a končiť v tom istom depe.
2. Každý zákazník bude obslúžený jediným vozidlom.
3. Na žiadnej trase nebude prekročená kapacita vozidla.
4. Celkové dopravné náklady budú minimálne.

Zvolíme grafovú reprezentáciu modelu. Nech $G = (V, H, c)$ je digraf, pričom

- V je množina vrcholov, $V = Z \cup D$, $Z \cap D = \emptyset$,
- Z je množina zákazníkov,
- D je množina dep,
- H je množina hrán, $H = \{(i, j) : i \in V, j \in V : i \neq j\} - D \times D$,
- K je množina vozidiel
- c_{ij} je cena prepravy z vrcholu i do vrcholu j ,
- d_i je požiadavka zákazníka i ,
- Q je kapacita vozidiel.

Najskôr sformulujeme trojindexový model. Rozhodovacia premenná x_{ijk} nadobúda hodnotu 1, ak je do trasy vozidla k vybraná hrana $(i, j) \in H$ a ináč 0. Premenná y_{ik} udáva náklad vozidla k keď odchádza od zákazníka i . Teraz môžeme formulovať nasledujúcu úlohu zmiešaného lineárneho programovania (3U1):

$$\sum_{(i,j) \in \vec{H}} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk} \rightarrow \text{minimum}, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq j} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in Z, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in Z} \sum_{k \in K} x_{ijk} \geq 1, \quad \forall i \in D, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq j} x_{ijk} - \sum_{i \in V, i \neq j} x_{jik} = 0, \quad \forall k \in K; j \in Z, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in Z, i \neq j} x_{ijk} \leq 1, \quad \forall k \in K, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in D} \sum_{j \in Z, i \neq j} x_{jik} \leq 1, \quad \forall k \in K, \quad (6)$$

$$y_{ik} + d_j - y_{jk} \leq (1 - x_{ijk}) Q, \quad \forall i \in Z; j \in Z, i \neq j; k \in K, \quad (7)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \vec{H}; k \in K, \quad (8)$$

$$d_i \leq y_{ik} \leq Q, \quad \forall i \in Z; k \in K. \quad (9)$$

Podrobný výklad modelu možno nájsť v [1]. Z praktického hľadiska je však model sotva použiteľný. Už pri úlohách $n=25$, $m=3$, $v=3$, $Q=160$ sa nám v Gurobi nepodarilo v reálnom čase dopočítať riešenie.

V nasledujúcom dvojindexovom modeli odstránime index k v rozhodovacej premennej, čo vedie k rozhodovacej premennej x_{ij} ktorá nadobúda hodnotu 1, ak je do trasy niektorého vozidla vybraná hrana $(i,j) \in H$ a inak 0. O tom, ktoré vozidlo bude obsluhovať zákazníka i rozhodne premenná z_i , ktorá udáva príslušné depo vozidla. Potom nám nová podmienka

$$M(x_{ij} - 1) \leq z_i - z_j \leq M(1 - x_{ij}), \quad \forall (i,j) \in \vec{H},$$

zabezpečí, že pre vybranú hranu $(i,j) \in H$ s $x_{ij}=1$ je priradené to isté depo $z_i=z_j$, a tak ju môže zabezpečiť rovnaké vozidlo. V prípade $x_{ij}=0$ je táto podmienka, pre dostatočne veľké M , vždy splnená.

Pri premennej y opäť môžeme odstrániť index k , potom y_i udáva náklad niektorého vozidla keď odchádza od zákazníka i . Teraz už môžeme formulovať takto modifikovanú úlohu zmiešaného lineárneho programovania (2U1):

$$\sum_{(i,j) \in \vec{H}} c_{ij} x_{ij} \quad , \quad (10)$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in \vec{H}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in Z, \quad (11)$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in \vec{H}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in Z, \quad (12)$$

$$\sum_{i \in Z} x_{ij} \leq v, \quad \forall j \in D, \quad (13)$$

$$M(x_{ij} - 1) \leq z_i - z_j \leq M(1 - x_{ij}), \quad \forall (i,j) \in \vec{H}, \quad (14)$$

$$y_i + d_j x_{ij} - y_j \leq (1 - x_{ij}) Q, \quad \forall i \in Z, j \in Z, i \neq j \quad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in \vec{H}, \quad (16)$$

$$d_i \leq y_i \leq Q, \quad \forall i \in Z, \quad (17)$$

$$z_i = i, \quad \forall i \in D, \quad (18)$$

$$\min(D) \leq z_i \leq \max(D), \quad \forall i \in Z. \quad (19)$$

Cieľovú funkciu (10) sme dostali prirodzene z (1). Podobne ostatné obmedzujúce podmienky s výnimkou (14). Model bol prezentovaný na katedrovom seminári KMMOA [2], jeho podrobný výklad bude prezentovaný na konferencii MME2021 [1].

Výsledky počítačových experimentov na 19-tich benchmarkových inštanciách splnili naše očakávania. Časový limit bol 10 hodín. V nasledujúcej tabuľke sa trojindexovému modelu nepodarilo nájsť optimálne riešenie v 4 prípadoch.

Inštancia	n	m	v	Q	Čas výpočtu (s)	
					Trojindexový	Dvojindexový
1.	20	2	1	160	6,73	1,62
2.	20	2	2	80	970,15	106,28
3.	20	2	3	80	3 279,06	25,47
4.	20	3	1	100	954,08	184,33
5.	20	3	2	80	101,68	6,54
6.	20	3	3	80	460,61	3,37
7.	20	4	1	80	1 508,49	313,83
8.	20	4	2	80	360,81	9,34
9.	20	4	3	80	325,54	3,95
10.	25	2	1	240	2 325,33	5,35
11.	25	2	2	160	26 456,81	199,33
12.	25	3	1	160	5 906,80	11,53
13.	25	3	2	80		813,99
14.	25	3	3	80		1 198,31
15.	25	4	1	100	9 871,87	26,96
16.	25	4	2	80	23 030,76	59,04
18.	25	4	3	50		2 023,23
19.	25	1	4	160		2 323,73

n – počet zákazníkov, m – počet dep, v – počet vozidiel v depe, Q – kapacita vozidla

3 OPTIMALIZÁCIA PORADIA ZÁKAZIEK NA KALIACICH STROJOCH

Tento model úlohy U2 vznikol ako jeden z poznatkov úvodnej štúdie [2] pre možnosť spolupráce s firmou KAMAX a neskôr slúžil ako inšpirácia pri tvorbe modelov U2 a U3.

Je daná množina strojov S a množina zákaziek Z , ktorú treba spracovať na týchto strojoch kalením. Pre každú zákazku je daný interval, v ktorom má byť vykonaná daná operácia. V základnom modeli sa kladú na túto operáciu tieto požiadavky:

1. Každá zákazka musí byť spracovaná bez prerušenia práve na jednom stroji.
2. Je nutné dodržať všetky plánované doby operácií na zákazke.
3. Cieľom je minimalizovať celkovú prestavovaciu dobu práce strojov.

Riešenie je tu reprezentované prípustnými cyklami C_k v digrafe $G = (V, H, c)$, kde

- V je množina vrcholov, $V = Z \cup S$, $Z \cap S = \emptyset$,
- každý cyklus C_k , $k \in S$, obsahuje práve jeden stroj k ,

- H je množina hrán tvorená dvojicami (stroj, zákazka), (zákazka, zákazka), (zákazka, stroj)
- T_i je doba potrebná na spracovanie zákazky $i \in Z$,
- d_i je čas najskôr možného spracovania zákazky $i \in Z$,
- h_i je čas najneskôr prípustného konca spracovania zákazky $i \in Z$,
- τ_{ij} je čas potrebný k nastaveniu kaliecej teploty zákazky j po zákazke i , pre stroje $i \in S$ alebo $j \in S$ kladieme $\tau_{ij} = 0$.

Ďalej sa obmedzíme len na dvojindexový model. Rozhodovacia premená x_{ij} , $(i,j) \in H$ tu nadobúda hodnotu 1, ak v niektorom cykle C_k po vrchole i nasleduje vrchol j , ináč 0. Premenná $z_i \in S$ udáva index stroja zákazky $i \in Z$ a pre $i \in S$ je $z_i = i$. Konečne premenná t_i udáva čas začiatku spracovania zákazky.

Dostávame nasledujúcu úlohu zmiešaného lineárneho programovanie (2U2):

$$\sum_{(i,j) \in Z \times Z \cap \vec{H}} \tau_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (20)$$

$$\sum_{i \in Z: (i,j) \in \vec{H}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in S \quad (21)$$

$$\sum_{i \in V: (i,j) \in \vec{H}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in Z \quad (22)$$

$$\sum_{j \in V: (i,j) \in \vec{H}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in Z \quad (23)$$

$$M(x_{ij} - 1) \leq z_i - z_j \leq M(1 - x_{ij}) \quad \forall (i,j) \in \vec{H} \quad (24)$$

$$t_i + T_i + \tau_{ij} \leq t_j + M(1 - x_{ij}) \quad \forall (i,j) \in \vec{H} : i \notin S \wedge j \notin S \quad (25)$$

$$d_i \leq t_i \leq h_i + T_i \quad \forall i \in Z \quad (26)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in \vec{H} \quad (27)$$

$$z_i = i \quad \forall i \in S, \quad \min(S) \leq z_i \leq \max(S) \quad \forall i \in Z \quad (28)$$

$$z_i \geq 0 \quad \forall i \in Z \quad (29)$$

V nasledujúcej tabuľke máme prvé výsledky počítačových experimentov. Neobsahujú ešte výsledky reálnych inšancií z firmy KAMAX. Ukázalo sa totiž, že v prípade týždenných rozvrhov so 6 kaliami linkami a 136 zákazkami dokážeme nájsť prípustné riešenia len za cenu prakticky neakceptovateľných posunov termínov spracovania zákazok. To viedlo k príslubu zadávateľa k ich prehodnoteniu. Aktualizované dáta však ešte nemáme k dispozícii.

Inšancia	n	m	Čas výpočtu (s)	
			Trojindexový	Dvojindexový
1.	50	4	123,67	1,76
2.	75	5	2153,81	5,44
3.	80	2	438,23	31,68
4.	100	2	21 613,10	174,58
5.	100	3	16 645,75	93,35
6.	100	4	NA	100,83
7.	160	4	NA	292,66
8.	240	6	NA	775,24

n – počet zákaziek, m – počet strojov, NA – nedopočítal

4 VIACDEPOVÉ OBEHY AUTOBUSOV S NÁVRATNOSŤOU

Jeden z problémov, ktorý autori heuristicky riešili v systéme KASOR [5] bola taká tvorba obehových rozvrhov MHD, v ktorých niektorí vodiči začínali svoj turnus a na záver sa vracali so svojím autobusom do miesta bydliska tzv. nocovní.

Tu sa obmedzíme na prípad, keď okrem vodičov z nocovní ostatní vodiči začínajú a končia svoj turnus v centrálnom depe, garáže autobusov. V základnom viacdeповom obehovom rozvrhu autobusov sa rieši také priradenie q autobusov k spojom, že

1. Každý spoj je priradený práve jednému autobusu.
2. Každý autobus musí začínať a končiť svoj turnus v tom istom depe (v centrálnej garáži alebo nocovní).
3. V každej z h nocovní je disponibilný jeden autobus ostatných q garážuje v centrálnom depe.
4. Celková doba neproduktívnych prejazdov autobusov, ktorá obsahuje prístavné a odstavné jazdy, jazdy medzi konečnými spojmi, je minimálna.

Daná množina spojov S je tvorená štvoricami $S_i = (m_i^d, t_i^d, m_i^a, t_i^a)$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ kde

- m_i^d je miesto (zastávka) odchodu spoja,
- t_i^d je čas odchodu spoja,
- m_i^a je miesto (zastávka) príchodu spoja,
- t_i^a je čas príchodu spoja.

Sú dané doby prejazdov medzi uzlami autobusovej siete $\tau(A, B)$, kde sú A, B buď zastávky spojov alebo depa. To umožňuje definovať turnus autobusu z depa d ako sled

$$d < S_{i1} < \dots < S_u < S_v < \dots < S_{im} < d,$$

kde značíme

- $S_u < S_v$ ak autobus po spoji S_u pokračuje spojom S_v ,
- $d < S_{i1}$ prístavná jazda z depa

- $S_{im} < d$ odstavná jazda do depa

Teraz môžeme definovať sieť rozvrhu autobusov v tvare digrafu $G=(V,A)$, kde

- $V = \{-h, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ je množina vrcholov, pričom kladné čísla zodpovedajú indexom spojov, 0 je centrálna garáž a záporné indexy označujú indexy nocovní; $K = \{0, 1, \dots, h\}$,
- $H = \{(i,j): S_i < S_j\} \cup \{(i,j), (j,i): i \in S, j \in N\}$,
- c_{ij} doba prejazdu na $(i,j) \in H$.

Rozhodovacia premená x_{ij} , $(i,j) \in H$ tu nadobúda hodnotu 1, ak je hrana (i,j) vybraná do turnusu niektorého vozidla, ináč 0. Premenná $z_i \in S$ udáva index domovského depa autobusu, pričom $z_i = i$ pre $i \in S$.

Dostávame tak nasledujúcu úlohu zmiešaného lineárneho programovanie (2U3):

□

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (30)$$

s.t.

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji} = 0 \quad \forall i \in V, \quad (31)$$

$$\sum_{(-k,j) \in A} x_{-kj} = 1, \quad \forall k \in K - \{0\}, \quad (32)$$

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0j} = q, \quad (33)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V : i > 0, \quad (34)$$

$$h(x_{ij} - 1) \leq z_i - z_j \leq h(1 - x_{ij}) \quad \forall (i,j) \in A, \quad (35)$$

$$z_{-k} = k \quad \forall k \in K, \quad (36)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A, \quad (37)$$

$$z_k \geq 0, \quad \forall k \in V. \quad (38)$$

Kriteriálnou funkciou (30) je tu celková doba neproduktívnych prejazdov. Toková podmienka má tvar (31). Podmienka (32) zabezpečuje existenciu h turnusov z nocovní a podmienka (33) zase q turnusov v censtrálnom depe. Podmienka (34) hovorí, že z každého spoja vychádza práve jeden autobus. Podmienka (35) priraduje príslušné depo k spoju. Podmienka (36) určuje, že depo má pevne daný index. Ostatné podmienky sú obligatórne.

Pre verifikáciu modelu sme použili historické dáta spojov MHD Martin z roku 2006 so 726 spojmi. Do modelu sme postupne zadávali fiktívne nocovne z nasledujúcimi výsledkami. V tabuľke 1 máme výsledky pre trojindexový model a v tabuľke 2 výsledky pre dvojindexový model.

5 ZÁVER

Počítačové experimenty ukázali životaschopnosť prezentovaných dvojindexových modelov. Neočakávali sme až takú veľkú úsporu doby výpočtu v porovnaní s trojindexovými alternatívami. Pochopiteľne sa tým nerieši aplikovateľnosť takéhoto prístupu na reálnych inštanciách. Vytvorila sa ale možnosť heuristických modifikácií modelov založených na exaktnom riešení redukovaných inštancií v MIP modeloch napr. typu metód kernel search.

Použitá literatúra

- [1] BORČINOVÁ, Z., PEŠKO, Š. 2021 An original two index model of the multidepot vehicle routing problem In. MME 2021. Mathematical Methods in Economy, Praha, 6 pages, preprint
- [2] BORČINOVÁ, Z., PEŠKO, Š. 2021 Nová podmienka v okružných dopravných úlohách, Katedrový seminár KMMOA, 15.4.2014
- [3] PEŠKO, Š., PALÚCH, S., MAJER T. 2021 New models for a return bus scheduling problem, In. MME 2021. Mathematical Methods in Economy, Praha, 6 pages, preprint
- [4] PEŠKO, Š., TEICHMANN, D., MOCKOVÁ, D., BORČINOVÁ, Z.. 2021 Weekly scheduling of machines with specific needs, Neural Network World, Praha, in preparation
- [5] PALÚCH, S., MAJER, T. 2017 A vehicle and crew scheduling system for regular bus passenger transport, Transport Problems 12(1), pp.103-110.

Kontaktné údaje

Doc. RNDr. Šefan Peško, CSc.
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
Tel: 421-41-513 4061
email: stefan.pesko@fri.uniza.sk

RNDr. Zuzana Borčinová, Phd.
Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
Tel: 421-41-513 4275
email: zuzana.borcinova@fri.uniza.sk

VPLYV PANDÉMIE COVID-19 NA AKCIOVÝ INDEX SDAX

THE IMPACT OF THE COVID-19 PANDEMIC ON THE INDEX SDAX

Marian Reiff

Abstrakt

V príspevku aplikujeme Markov model prepínania režimov na finančnom časovacom rade zatváracieho kurzu nemeckého akciového indexu SDAX. Model je odhadnutý pomocou softvéru EViews. Odhadnuté skryté stavy, ako býčí a medvedí trh modelovaného trhu počas Covid pandémie 2020-2021, ich historický vývoj, pravdepodobnosti prechodov a popisné štatistiky pre zatvárací kurz SDAX môžu slúžiť ako podporný nástroj pri rozhodovaní investora na finančnom trhu.

***Kľúčové slová:** Markov model prepínania režimov, Finančné časové rady, Pandemická kríza*

Abstract

This paper applies the Markov switching model on the financial time series analysis of the closing price of the German stock index SDAX. The model is estimated using EViews software. Estimated hidden states, such as bull and bear market of the analyzed market during Covid pandemic 2020-2021, their historical development, probability of transitions, and descriptive statistics for the closing SDAX price, can serve as a support tool in investor decisions making on the financial market

***Keywords:** Markov Switching Model, Financial Time Series, Pandemic Crisis*

1 ÚVOD

Pandémia COVID-19 je v Nemecku a iných európskych krajinách súčasťou prebiehajúcej celosvetovej pandémie koronavírusového ochorenia (COVID-19). Prvý pacient s COVID-19 v Európe bol diagnostikovaný 24. januára 2020 (Lescure et al., 2020) a v Nemecku bol prvý prípad potvrdený dňa 27. januára 2020 (Pabbati, Fathima, Garcia, & Kondakindi, 2021). Ekonomické otrasy spojené s pandemiou COVID-19 majú rozsiahle a vážne dopady na finančné trhy vrátane trhov s akciami, dlhopismi a komoditami. Akciové trhy sú vzájomne prepojené a vzájomne závislé. Podľa Morales a Callaghan (Morales & Andreosso-O'Callaghan, 2012) sa globálne akciové trhy stali viac vzájomne závislé a kríza v jednej krajine sa čoskoro rozšíri do druhej. Pohyby na akciovom trhu sa čoraz viac korelujú. Krach akciového trhu v roku 2020 bol veľkým a náhlym krachom globálneho akciového trhu, ktorý sa začal 20. februára 2020 a skončil 7. apríla. Napríklad 24. februára 2020, Dow Jones Industrial Average a FTSE 100 klesli o viac ako 3 %, keďže sa šírenie koronavírusu sa výrazne rozšírilo mimo územia Číny. Následne s postupom pandémie hodnoty globálnych akciových trhov klesali, napríklad hodnota Dow Jones Industrial Average poklesla o 37 % v období medzi 12. februárom a 23. marcom. V apríli sa trh začal zotavovať, aj napriek faktu, že ekonomické ukazovatele sa stále zhoršovali s postupne sa uzatvárajúcimi ekonomikami a faktu, že v tom čase ešte nebola žiadna vakcína v dohľade. Ukončenie prepadu podporili opatrenia v Federal Reserve Bank of New York a Európskej centrálnej banky ako napríklad zníženie úrokového sadzby a spustenie fiškálnych záchranných balíkov.

2 MARKOV MODEL PREPÍNANIA REŽIMOV INDEXU SDAX S DVOMA STAVMI (REŽIMAMI)

V príspevku analyzujeme dynamické správanie nemeckého akciového indexu SDAX pomocou ukazovateľov „zatvárací kurz“, umelej premennej s názvom dummy1, zachytávajúci krach akciového trhu v 2020 a druhej umelej premennej s názvom dummy2, modelujúcej podporné opatrenia v čase pandémie a ukazovateľa šírenia sa pandémie, počet nových potvrdených PCR denných prírastkov Covid 19 prípadov. Časové rady denných údajov sú spracované za obdobie od 19.11.2019 do 30.11.2021. Zdroj údajov je databáza Yahoo.Finance (2021), kde je akciový index vedený pod označením SDAX a databáza Worldometer (2021), pre informácie o nových prírastkoch Covid 19 prípadov.

SDAX je nemecký akciový index zložený zo 70 malých a stredných spoločností v Nemecku, ktoré sú na 91. – 160. mieste medzi najväčšími verejne obchodovanými spoločnosťami v Nemecku. Z hľadiska obchodovaného objemu a trhovej kapitalizácie sa zaraďujú priamo za akciami zahrnutými v indexe MDAX. MDAX je akciový index zložený z 50 spoločností, ktoré sú pod hodnotou trhovej kapitalizácie 40 spoločností zahrnutých v indexe DAX. Na porovnanie index DAX je akciový index pozostávajúci z 40 najväčších nemeckých blue chip spoločností obchodujúcich na Frankfurtskej burze cenných papierov. DAX je ekvivalentom britského FTSE 100 a amerického indexu Dow Jones Industrial Average. Avšak z dôvodu výberu malého množstva spoločností v indexe DAX nemusí index nevyhnutne predstavovať vitalitu nemeckej ekonomiky ako celku (Freihube & Theissen, 2001).

Všetky odhady boli vykonané pomocou softvéru EViews 9 (EViews ,2015). Výsledný model s dvoma stavmi (režimami) sme pre ďalšiu analýzu zvolili na základe porovnania rôznych odhadnutých modelov s rôznymi vysvetľujúcimi premennými to na základe porovnania štatistickej významnosti odhadnutých parametrov a výberu modelu s minimálnou hodnotou Akaikeho informačného kritéria.

Obr. 1: Výsledný odhadnutý model.

Dependent Variable: SDAX_CHANGE
Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)
Date: 01/12/21 Time: 19:07

Sample (adjusted): 1700 2218
Included observations: 519 after adjustments
Number of states: 2
Initial probabilities obtained from ergodic solution
Standard errors & covariance computed using observed Hessian
Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=1699508371)
Convergence achieved after 13 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				
LOG(SIGMA)	5.435623	0.069161	78.59386	0.0000
Regime 2				
LOG(SIGMA)	4.746219	0.063033	75.29678	0.0000
Common				
DUMMY1	-239.3269	51.77280	-4.622638	0.0000

DUMMY2	25.11011	7.220350	3.477687	0.0005
Transition Matrix Parameters				
P11-C	2.599214	0.445972	5.828195	0.0000
P21-C	-3.124647	0.464685	-6.724227	0.0000
Mean dependent var	7.923027	S.D. dependent var	175.5085	
S.E. of regression	168.3034	Sum squared resid	14587915	
Durbin-Watson stat	2.099518	Log likelihood	-3367.028	
Akaike info criterion	12.99818	Schwarz criterion	13.04733	
Hannan-Quinn criter.	13.01744			

Zdroj: vlastné spracovanie

Pre výsledný model prezentujeme nasledovné výsledky:

- maticu pravdepodobností prechodov medzi skrytými stavmi systému a priemernú dĺžku zotrvania v príslušnom stave: medvedí a býčí trh (obrázok č. 2),
- postupnosť pravdepodobností skončenia v skrytých stavoch systému.

Obr. 2: Pravdepodobnosti prechodu medzi dvoma skrytými stavmi (medvedí a býčí trh) a priemernú dĺžku zotrvania v príslušnom stave.

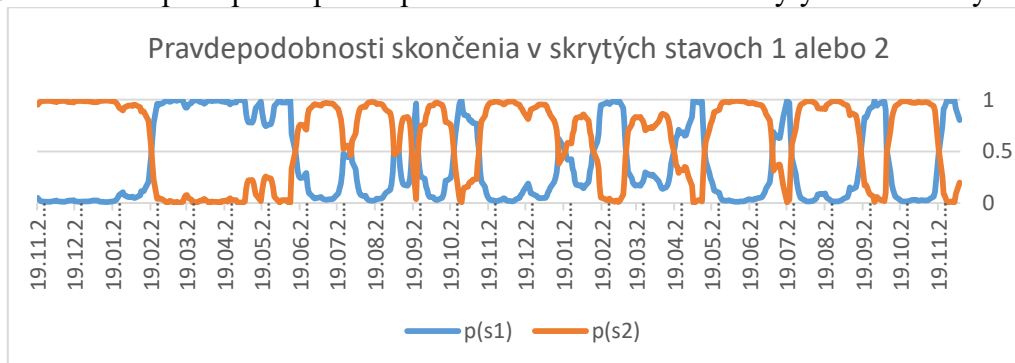
Constant transition probabilities:		
$P(i, k) = P(s(t) = k s(t-1) = i)$		
(row = i / column = j)		
	1	2
1	0.930811	0.069189
2	0.042102	0.957898

Constant expected durations:		
	1	2
	14.45316	23.75186

Zdroj: vlastné spracovanie

V ďalšom časti môžeme popísať postupnosť odhadnutých pravdepodobností pre dané poradie pozorovaní emisií zatváracieho kurzu SDAX. Na obrázku č. 3 sú tieto pravdepodobnosti vizualizované. Skryté stavy v tomto prípade interpretujeme ako režim (náladu na trhu), býčí alebo medvedí trh. Pre každý režim sú odhadnuté stredné hodnoty a rozptyl zmeny zatváracieho kurzu oproti predchádzajúcemu dňu.

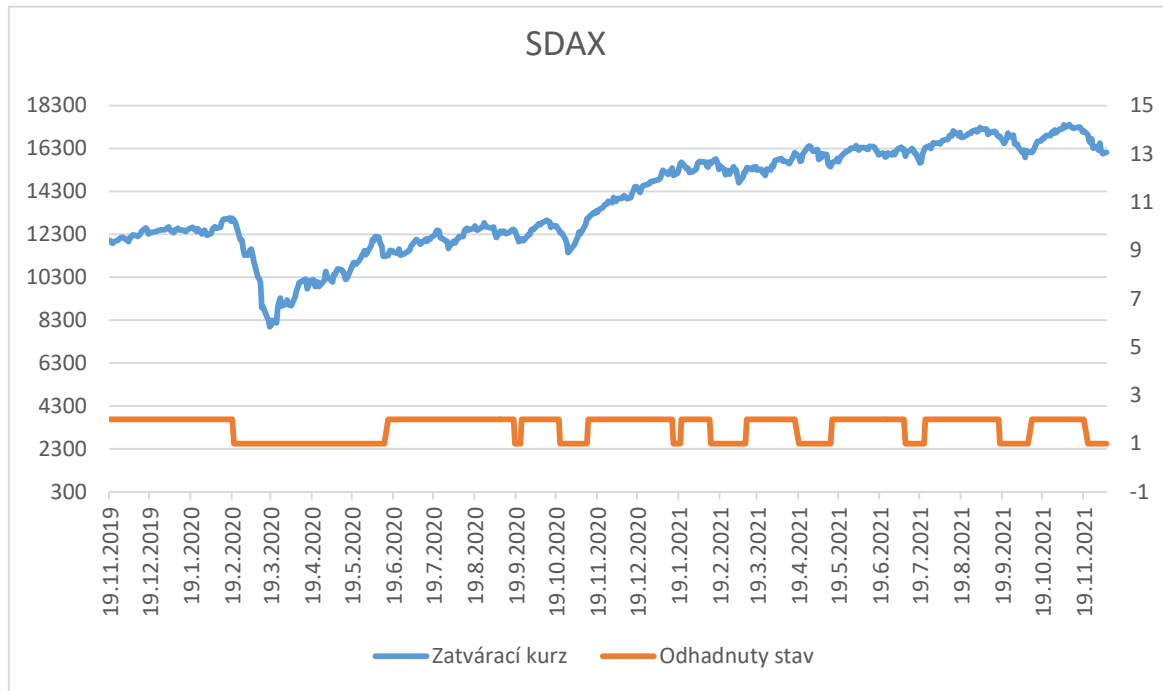
Obr. 3: Odhadnutá postupnosť pravdepodobností skončenia v 2 skrytých stavoch systému.



Zdroj: vlastné spracovanie.

Na obrázku č. 4 je v hornej časti zobrazený vývoj zatváracieho kurzu indexu SDAX za obdobie od 19.11.2019 do 30.11.2021, ktorý predstavuje pozorovateľný stav systému a v dolnej časti sú zobrazené príslušné odhadnuté skryté stavy, v ktorých sa nachádzal systém modelovaný pomocou Markovovho modelu prepínania režimov s dvoma stavmi. Napríklad interpretovanie oranžovej čiary je nasledovné: modelovaný systém začína 19.11.2019 v stave 2 a 19.2.2020 sa prepína do stavu 1, atď.

Obr. 4: Markovov model prepínania režimov s dvoma stavmi a hodnota zatváracieho kurzu indexu SDAX za obdobie od 19.11.2019 do 30.11.2021.



Zdroj: vlastné spracovanie.

Na záver ešte uvádzame model s vysvetľujúcou premennou počet nových potvrdených denných prípadov Covid (na obrázku č. 5). Pri verifikácii sa táto premenná nepotvrdila ako štatisticky významná. Výsledok uvádzame aj napriek vyššie uvedenému fakt, pretože premenná predstavuje negatívnu informáciu o vývoji pandémie. Toto zistenie, že počet prípadov Covid 19 štatisticky významne neovplyvňuje na vývoj indexu na rozdiel od štatisticky významnej umelej premennej predstavujúcej podporné opatrenia v čase pandémie považujeme za zaujímavé zistenie.

Obr. 5: Odhadnutý model.

Dependent Variable: SDAX_CHANGE
 Method: Markov Switching Regression (BFGS / Marquardt steps)
 Date: 01/12/21 Time: 19:16
 Sample (adjusted): 1700 2218
 Included observations: 519 after adjustments
 Number of states: 2
 Initial probabilities obtained from ergodic solution
 Standard errors & covariance computed using observed Hessian
 Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=1699508371)
 Convergence achieved after 26 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Regime 1				

LOG(SIGMA)	5.429957	0.070070	77.49361	0.0000
Regime 2				
LOG(SIGMA)	4.740529	0.066058	71.76318	0.0000
Common				
DUMMY1	-239.3834	51.61159	-4.638171	0.0000
DUMMY2	28.40898	9.693630	2.930685	0.0034
NEW_CASES	-0.000291	0.000569	-0.512260	0.6085
Transition Matrix Parameters				
P11-C	2.582144	0.448378	5.758860	0.0000
P21-C	-3.078748	0.474609	-6.486922	0.0000
Mean dependent var	7.923027	S.D. dependent var	175.5085	
S.E. of regression	168.3146	Sum squared resid	14561516	
Durbin-Watson stat	2.102249	Log likelihood	-3366.895	
Akaike info criterion	13.00152	Schwarz criterion	13.05887	
Hannan-Quinn criter.	13.02399			

Zdroj: vlastné spracovanie

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0339/20 „Hidden Markov Model Utilization in Financial Modeling“ Projekt Vedeckej grantovej agentúry MŠ SR a SAV.

Použitá literatúra

- Freihube, T., & Theissen, E. (2001). An Index Is an Index Is an Index? *Schmalenbach Business Review*, 53(4), 295-320. doi:10.1007/BF03396640
- Lescure, F. X., Bouadma, L., Nguyen, D., Parisey, M., Wicky, P. H., Behillil, S., . . . Enouf, V. (2020). Clinical and Virological Data of the First Cases of COVID-19 in Europe: A Case Series. *The Lancet Infectious Diseases*, 20(6), 697-706. doi:10.1016/s1473-3099(20)30200-0
- Morales, L., & Andreosso-O'Callaghan, B. (2012). The current global financial crisis: Do Asian stock markets show contagion or interdependence effects? *Journal of Asian Economics*, 23(6), 616-626. doi:<https://doi.org/10.1016/j.asieco.2012.09.002>
- Pabbati, R., Fathima, A., Garcia, J. H. F., & Kondakindi, V. R. (2021). Epidemiology of COVID-19: Special Emphasis on Nanoscience and Its Implications. In *Nanotechnology for Advances in Medical Microbiology* (pp. 139-163): Springer.
- Finance.yahoo (2021) <https://finance.yahoo.com/> navštívené 30.11. 2021
- Worldometer (2021): Number of Covid Cases as of 30. 11. 2021. <https://www.worldometers.info/coronavirus/#countries>. navštívené 30.11. 2021

Kontaktné údaje

Ing. Marian Reiff, PhD.
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 823 email: marian.reiff@euba.sk