

SLOVENSKÁ SPOLOČNOSŤ PRE OPERAČNÝ VÝSKUM

SSOR



SLOVAK SOCIETY FOR
OPERATIONS RESEARCH

**ZBORNÍK ZO SEMINÁRA
VYUŽITIE KVANTITATÍVNYCH METÓD
VO VEDECKOVÝSKUMNEJ ČINNOSTI A V PRAXI XV**

24. – 26. mája 2023
Púchov

Programový výbor:

Michaela Chocholatá, Ekonomická univerzita, Bratislava (predseda)
Ivan Brezina, Ekonomická univerzita, Bratislava
Martin Lukáčik, Ekonomická univerzita, Bratislava
Juraj Pekár, Ekonomická univerzita, Bratislava
Josef Jablonský, Vysoká škola ekonomická, Praha
Petr Fiala, Vysoká škola ekonomická, Praha
Jana Hančlová, Vysoká škola báňská, Ostrava
Marek Kvet, Žilinská univerzita, Žilina

Recenzenti:

Ivan Brezina Jr., Paneurópska vysoká škola, Bratislava
Gabriela Dováľová, Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied
Michal Fendek, Ekonomická univerzita, Bratislava
Marian Goga, Ekonomická univerzita, Bratislava
Eduard Hozlár, Univerzita Komenského, Bratislava
Zlatica Ivaničová, Ekonomická univerzita, Bratislava
Ladislav Kovaľ, Ekonomická univerzita, Bratislava
Marek Luboš, Vysoká škola ekonomická v Praze, Praha
Vladimír Mlynarovič, Univerzita Komenského, Bratislava
Filip Ostrihoň, Ekonomický ústav Slovenskej akadémie vied
Stanislav Palúch, Žilinská univerzita, Žilina
Štefan Peško, Žilinská univerzita, Žilina

Organizačný výbor:

Andrea Furková, Ekonomická univerzita, Bratislava
Brian König, Ekonomická univerzita, Bratislava
Adriana Lukáčiková, Ekonomická univerzita, Bratislava
Marian Reiff, Ekonomická univerzita, Bratislava

Zborník neprešiel jazykovou úpravou.

AH 5,95
Náklad: 50 ks

Kontakt: ssov@euba.sk
Zostavovateľ: Marian Reiff
Web Editor: Martin Lukáčik

Slovenská spoločnosť pre operačný výskum, Dolnozemska cesta 1, 852 35
Bratislava

Publisher: Letra Edu, s. r. o.
ISBN: 978-80-69021-02-0 (print)
ISBN: 978-80-69021-03-7 (online)

Obsah

Ivan Brezina, Juraj Pekár, Marian Reiff	Environmentálne investovanie	5
Zuzana Čičková, Martin Karas, Rudolf Kucharčík	Hra väžňova dilema a medzinárodné vzťahy	12
Petr Fiala	Dynamické víckriteriální lineární programování de novo s rovnováhou zdrojů	17
Andrea Furková, Peter Knížat	Aplikácia metód viackriteriálneho vyhodnocovania alternatív v prostredí R	23
Pavel Gežík	Environmentálne modely, ich stručný prehľad, druhy týchto modelov a ich rozdelenie do skupín	32
Michaela Chocholatá	Vykurovanie bytov plynom a tuhým palivom – priestorová analýza pre okresy Slovenska	40
Jaroslav Janáček, Marek Kvet	Heuristické metody minimalizace NDSS-area u dvoukriteriálních umisťovacích úloh	46
Miroslava Jánošová	Problémy dnešného sveta v kontexte teórie hier	53
Brian König	Trendy v empirických štúdiách vojnových konfliktov založených na ekonometrických prístupoch	58
Allan Jose Sequeira Lopez	Možnosť aplikovania priestorového modelu na zníženie nezamestnanosti	63
Veronika Miřková	Liberal migration policy effects: a literature review	68
Petr Pokorný	The capacitated lot sizing problem (CLSP) Using the GAMS software	72
Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková	Slovenská ekonomika a šoky celkovej produktivity faktorov - jednoduchý DSGE model	78
Tatiana Šoltésová, Erik Šoltés	Využitie metód nelineárnej regresie na modelovanie úmrtnosti populácie	83

ENVIRONMENTÁLNE INVESTOVANIE

ENVIRONMENTAL INVESTING

Ivan Brezina, Juraj Pekár, Marian Reiff

Abstrakt

Investovanie do zelených akcií znamená umiestňovať finančné prostriedky na akciový trh nákupom akcií takých spoločností so silnými environmentálnymi záväzkami. Základné druhy environmentálneho investovania predstavujú zelené akcie, zelené dlhopisy a zelené fondy. Environmentálne investovanie dáva investorom príležitosť získať finančné prostriedky na investovanie do environmentálnych projektov. Pri umiestnení finančných prostriedkov formou environmentálnych investícií by mal investor rešpektovať určité princípy tak, aby sa uistil, že jeho investície sú v súlade s hodnotami environmentálnych cieľov spoločnosti, ako aj základné princípy investovania do takého portfólia akcií, ktoré rešpektujú požadovanú mieru rizika a výnosu portfólia..

Kľúčové slová: environmentálne investovanie, portfólio

Abstract

Investing in green stocks means setting funds in the stock market by buying shares of companies with firm environmental commitments. The basic types of environmental investment are green stocks, bonds and funds. Environmental investing allows investors to raise funds to invest in environmental projects. When placing funds in the form of environmental investments, the investor should respect certain principles in order to make sure that investments are in line with the values of the society's environmental goals, as well as the basic principles of investing in such a portfolio of shares that respect the required level of risk and return of the portfolio.

Keywords: environmental investing, portfolio

1 ÚVOD

Investovanie do environmentálnych (zelených, ekologických) firiem je už od 90-tych rokov jedným z nástrojov udržateľného rozvoja spoločnosti. Environmentálne investovanie vo všeobecnosti predstavuje vyhľadávanie takých investičných príležitostí, ktoré prospievajú životnému prostrediu. Cieľom environmentálneho investovania je podpora obchodných aktivít, ktoré majú priaznivý vplyv na prírodné prostredie. Environmentálne investovanie sa zameriava predovšetkým na investičné činnosti zosúladené s obchodnými postupmi šetrnými k životnému prostrediu a ochranou prírodných zdrojov. Reprezentujú ho predovšetkým sociálne zodpovedné investovanie (SRI - *socially responsible investment*)¹ alebo environmentálne, sociálne a riadiace kritériá (ESG - *environmental, social and corporate governance*)².

¹ Spoločensky zodpovedné investovanie (SRI) je investícia, ktorá sa považuje za spoločensky zodpovednú z dôvodu povahy podnikania, ktoré spoločnosť vykonáva.

² Environmentálne kritériá zohľadňujú spôsob, akým spoločnosť chráni životné prostredie, vrátane podnikových politík. Sociálne kritériá skúmajú, ako spoločnosť riadi vzťahy so zamestnancami, dodávateľmi, zákazníkmi a komunitami, v ktorých pôsobí. Riadenie sa zaoberá vedením spoločnosti, odmeňovaním vedúcich pracovníkov, auditmi, vnútornými kontrolami a právami akcionárov.

Environmentálne (zelené, ekologické) investície predstavujú tie investície, pri ktorých väčšina alebo všetky príjmy a zisky pochádzajú z ekologických podnikateľských činností. Jedným z jeho hlavných cieľov sú technológie obnoviteľnej energie, ako je veterná, solárna a vodná energia. Ďalšími environmentálnymi aktivitami sú ekologická doprava, ktorá znižuje spotrebu fosílnych palív predovšetkým prostredníctvom elektrických vozidiel, kontroly znečistenia ovzdušia a vodných zdrojov, znižovanie odpadu a udržateľné poľnohospodárstvo sú alternatívnymi cestami k ochrane životného prostredia. Environmentálne investície môžu byť vo forme cenných papierov, elektronicky obchodovaných fondov, podielových fondov a dlhopisov. Napríklad zelený dlhopis vydaný spoločnosťou Apple v hodnote 1,5 miliardy dolárov bol vôbec prvým zeleným dlhopisom, ktorý vydala technologická spoločnosť. Dlhopis dokonca získal ocenenie od Environmental Finance v roku 2016.

2 ENVIRONMENTÁLNE INVESTOVANIE

Environmentálne investície zahŕňajú cenné papiere, elektronicky obchodované fondy, podielové fondy a dlhopisy, v ktorých je emitent zapojený do operácií, ktorých konečným cieľom je zlepšenie životného prostredia. Emitentom môže byť akákoľvek spoločnosť, či už sa podieľa na vývoji alternatívnych energetických technológií, alebo spoločnosť, ktorá má najlepšie environmentálne postupy atď. Environmentálne investičné produkty predstavujú investičné nástroje, ktoré majú pozitívny vplyv na životné prostredie.

Základnými typmi environmentálneho investovania sú:

- Zelené akcie (nákup akcií v spoločnostiach so silnými environmentálnymi záväzkami).
- Zelené dlhopisy (tiež klimatické dlhopisy, sú to úvery, ktoré pomáhajú bankám, spoločnostiam a vládnym orgánom financovať projekty s pozitívnym vplyvom na životné prostredie).
- Zelené fondy (investovanie do zelených podielových fondov obchodovaných na burze (ETF), čo investorom umožňuje rozložiť svoje peniaze na diverzifikovanú škálu environmentálnych projektov namiesto jednej akcie alebo dlhopisu).

Investovanie do zelených akcií znamená umiestňovať finančné prostriedky na akciový trh nákupom akcií spoločností, ktoré sa zameriavajú na udržanie bezpečnosti životného prostredia. Existuje aj množstvo zelených podielových fondov, ktoré sa zameriavajú na udržateľnú alebo ekologickú investičnú stratégiu, ktorú možno nájsť napríklad prostredníctvom ratingov Morningstar Inc.³

Najjednoduchšou formou environmentálneho investovania je nákup akcií spoločností so silnými environmentálnymi záväzkami (zelených akcií). Mnoho spoločností sa snaží vyvíjať alternatívne energie a materiály, investujú do nízkouhlíkovej budúcnosti. Niektoré spoločnosti, ako napríklad Tesla (TSLA), dokázali dosiahnuť ocenenie v hodnote niekoľkých miliárd dolárov zameraním sa na ekologicky uvedomelých spotrebiteľov.¹

Iným prístupom je investovanie do zelených (niekedy aj klimatických) dlhopisov. Tento typ cenných papierov s pevným výnosom predstavujú úvery, ktoré pomáhajú bankám, spoločnostiam a vládnym orgánom financovať projekty s pozitívnym dopadom na životné prostredie. Podľa iniciatívy Climate Bonds Initiative boli v roku 2021 vydané nové zelené

³ <https://www.morningstar.com/topics/sustainable-investing>.

dlhopisy v hodnote približne 1,1 bilióna USD. Tieto dlhopisy môžu byť spojené s rôznymi daňovými stimulmi, čo z nich robí atraktívnejšiu investíciu ako tradičné dlhopisy⁴.

Ďalším spôsobom environmentálneho investovania je investovanie do akcií podielového fondu, ETF alebo indexového fondu. Tieto zelené fondy (uzavreté, ale častejšie otvorené) investujú do investičného koša cenných papierov spoločností, ktoré podporujú ochranu životného prostredia, čo investorom umožňuje rozložiť svoje peniaze na diverzifikovanú škálu environmentálnych projektov namiesto jednej akcie alebo dlhopisu (investičný kôš pritom nemôžu tvoriť akcie zbrojárskeho koncernu, tabakového priemyslu, resp. spoločností s neekologickou výrobou).

Ako príklad zelených podielových fondov možno uviesť TIAA-CREF Social Choice Equity Fund (TICRX)⁵, Trillium ESG Global Equity Fund (PORTX)⁶, resp. Green Century Balanced Fund (GCBLX)⁷. Niektoré zelené indexy monitorujú aj spoločnosti s environmentálnou produkciou, teda aj do spoločností, ktoré vyrábajú energiu z obnoviteľných zdrojov. Ako príklad možno uviesť First Trust NASDAQ Clean Edge Green Energy Index Fund (QCLN)⁸ a MAC Global Solar Energy Index T (^SUNIDX)⁹, investície do takýchto zelených fondov umožňujú investorom podporovať nové technológie a zároveň dosahovať potenciálny zisk.

Výhody environmentálnych investícií

Environmentálne investície poskytujú príležitosť investorom, ako aj spoločnostiam, ktoré prostredníctvom týchto investícií získavajú finančné prostriedky na investovanie do environmentálnych projektov. Ako príklad výhod takéhoto investovania možno uviesť:

- Jednou z hlavných výhod environmentálnych investícií pre spoločnosti, ktoré získavajú finančné prostriedky prostredníctvom ekologických investícií, je skutočnosť, že spoločnosť môže prostredníctvom týchto investícií získať ďalšie finančné prostriedky. Tieto finančné prostriedky sú potrebné pre projekty súvisiace s udržateľnosťou, pretože zapojenie akýchkoľvek spoločností (výrobných, prepravných, energetických a pod.) do čistejšej budúcnosti si môže vyžadovať počiatočné investície v značnej výške. Na tento účel sú teda environmentálne investície pre spoločnosti veľmi užitočné.
- Verejnosť si v súčasnosti čoraz viac uvedomuje požiadavku ochrany životného prostredia. Preto emitovanie zeleného dlhopisu zvyčajne vyvoláva veľký ohlas verejnosti, čo uľahčuje spoločnostiam získavanie finančných prostriedkov. Spoločnosti tiež získavajú uznanie širokej verejnosti za svoj inovatívny prístup k udržateľnosti, čo je opäť výhodné len pre spoločnosť.
- Z pohľadu investora sú environmentálne investície prospešné, pretože mnohé z ekologických investičných nástrojov sú oslobodené od dane, ako sú napríklad zelené dlhopisy.

⁴ <https://www.msci.com/our-solutions/climate-investing/>.

⁵ <https://finance.yahoo.com/quote/TICRX/>.

⁶ <https://finance.yahoo.com/quote/PORTX/>.

⁷ <https://finance.yahoo.com/quote/GCBLX/>.

⁸ <https://finance.yahoo.com/quote/QCLN/>.

⁹ <https://finance.yahoo.com/quote/%5ESUNIDX/>.

Nevýhody environmentálnych investícií

S environmentálnymi investíciami sú však spojené aj niektoré obmedzenia a nevýhody, ako napríklad:

- Z pohľadu investorov nemusí byť investovanie peňazí do environmentálnych spoločností adekvátne investovaniu do iného typu akcií, mnohé spoločnosti environmentálne investovanie chápu ako riskantnejšie.
- Pretože je zatiaľ trh s environmentálnymi investíciami relatívne malý, vstup a výstup z tohto druhu investícií nie je jednoduchý v porovnaní s populárnejšími druhmi investíciami. Z tohto dôvodu je v environmentálnych investíciách nedostatok likvidity a investori nemôžu podľa potreby získať svoje finančné prostriedky a tiež nie je ľahké tieto akcie predať, a preto ich investori musia držať až do splatnosti.
- Mnohokrát chýba jasná charakteristika účelu, na ktorý emitent investičného nástroja použije finančné prostriedky, preto niekedy investori nemusia presne vedieť, v ktorej oblasti sa ich finančné prostriedky použijú.

Environmentálne investície sa môžu vzťahovať aj na spoločnosti, ktoré majú iné oblasti podnikania ako sú priame environmentálne aktivity, ale pritom sa zameriavajú na ekologické iniciatívy. Niektoré ekologické spoločnosti sa pritom zaoberajú výskumom obnoviteľnej energie alebo vývojom ekologických alternatív k neekologickým materiálom, iné sa môžu snažiť znížiť znečistenie alebo iné vplyvy svojich výrobných procesov na životné prostredie. Aj keď zisk nie je jediným motívom environmentálneho investovania, môže environmentálne investovanie zodpovedať, resp. prekonávať výnosy tradičnejších aktív.

Greenwashing

Ďalším dôležitým aspektom environmentálneho investovania je tzv. greenwashing. Zjednodušene možno povedať, že greenwashing je navrhnutý tak, aby ľudia verili, že spoločnosť robí pre ochranu životného prostredia viac, ako to v skutočnosti je. Je to teda marketingová technika zameraná na vytvorenie ilúzie ekologickej zodpovednosti. Ekologická prezentácia nemusí vždy znamenať, že spoločnosť je skutočne zodpovedná k životnému prostrediu. To je dôvod, prečo mimovládne organizácie často používajú koncept greenwashingu na identifikáciu a odsudzovanie spoločností, ktoré tvrdia, že sa týkajú životného prostredia, zatiaľ čo ich aktivity a praktiky dokazujú opak. Niektoré spoločnosti napríklad nadhodnocujú opätovné používanie recyklovaných materiálov, čo vedie spotrebiteľov k mylnému presvedčeniu, že ich výrobky sú udržateľnejšie.

Environmentálne investície

Pri umiestnení svojich finančných prostriedkov formou environmentálnych investícií by mal investor rešpektovať určité princípy tak, aby sa uistil, že jeho investície sú v súlade s hodnotami environmentálnych cieľov spoločnosti:

- Treba vyhľadať spoločnosti, ktoré boli certifikované ako šetrné k životnému prostrediu alebo udržateľné. Tieto environmentálne certifikácie ponúka mnoho organizácií, pričom ich

počet neustále rastie. Ako príklad možno uviesť Carbon Disclosure Project (CDP)¹⁰, Forest Stewardship Council (FSC)¹¹ a Rainforest Alliance¹², ale existujú aj ďalšie¹³.

- Negatívny skrining umožňuje priamo vylúčiť odvetvia považované za nežiaduce a tradične sa zameriava na odvetvia, ako sú hazardné hry, tabak a výrobcovia zbraní. Impact investing kladie dôraz na investovanie s cieľom vytvárať pozitívne dopady na životné prostredie a spoločnosť spolu s vytváraním výnosov.
- V súčasnosti sú pre environmentálne investovanie mimoriadne atraktívne akcie spoločností vyrábajúcich energiu z obnoviteľných zdrojov. Energia z obnoviteľných zdrojov je jednou z najdôležitejších oblastí udržateľnosti, takže investovanie do týchto spoločností môže byť dobrým spôsobom, ako podporiť posun smerom k ekologickejšim postupom
- V prípade záujmu o dlhopisy, ktoré sú v súčasnosti pravdepodobne najpoužívanejším investičným nástrojom na svete s relatívne predvídateľným výnosom, vysokou likviditou a obvykle aj s nižším kolísaním ceny ako pri akciách, treba vyhľadať tzv. zelené dlhopisy. Zelené dlhopisy sú typom zabezpečenia, ktoré sa používa na financovanie projektov šetrných k životnému prostrediu.
- Ak má investor záujem investovať do investičných fondov, ktoré predstavujú košíky rôznych investičných nástrojov a produktov, treba sa orientovať na udržateľné zelené podielové fondy a ETF. Tieto fondy investujú do spoločností, ktoré majú pozitívnu environmentálnu a sociálnu politiku.
- Mnoho investorov sa orientuje aj na investovanie do špecializovaných ESG fondov (*environment, social, governance*), ktorých popularita kontinuálne rastie aj medzi drobnými investormi, ktorí majú záujem o spoločensky zodpovedné investovanie a dôležitým ukazovateľom pre nich nie je výhradne samotná výnosnosť investícií. ESG fondy dividendových akcií investujú do akcií spoločensky zodpovedných firiem na celom svete. Zameriavajú sa na menej kolísavé akcie veľkých spoločností, ktoré svojim klientom vyplácajú atraktívne výnosy. Do takéhoto fondu sú vyberané akcie spoločností, ktoré podporujú alebo propagujú úsilie o ochranu životného prostredia, projekty v oblasti alternatívnej energie, čistého ovzdušia a vody a iné environmentálne zodpovedné obchodné rozhodnutia, teda dbajú na životné prostredie, sociálnu a ekonomickú udržateľnosť.

Obavy z environmentálnych zmien vytvárajú príležitosti pre rast spoločností zameraných na trvalú udržateľnosť, pričom takéto „zelené“ spoločnosti získavajú značnú politickú podporu, ako aj podporu verejnosti. Ich rozvoj prináša nové investičné príležitosti. Podľa spoločnosti Bloomberg Intelligence (BI)¹⁴, ktorá poskytuje interaktívne údaje a prieskum naprieč odvetviami a globálnymi trhmi, do roku 2025 bude až tretina všetkých peňazí investorov v správcovských spoločnostiach práve v ESG fondoch. Špecializácia fondov na rôzne oblasti, nielen ekológiu, je len pridanou hodnotou pre investorov. Keď majú možnosť podporiť odvetvie, ktoré im je osobne blízke, mnohí tak radi urobia práve prostredníctvom fondov.

Pri investovaní zelených fondov treba určiť, či je príslušný zelený fond dostatočne udržateľný. Preto by mali potenciálni investori preskúmať cenné papiere kótované v aktívach fondu, na čo sú vhodné nezávislé hodnotenia, ako napríklad hodnotenie udržateľnosti spoločnosti Morningstar Inc.¹⁵ alebo R-Factor spoločnosti State Street¹⁶.

¹⁰ <https://www.cdp.net/en>.

¹¹ <https://fsc.org/en>.

¹² <https://www.rainforest-alliance.org/>.

¹³ <https://uwaterloo.ca/environment/25-environmental-certifications-you-need-know>.

¹⁴ <https://www.bloomberg.com/professional/product/bloomberg-intelligence/>.

¹⁵ <https://www.morningstar.com/topics/sustainable-investing>.

¹⁶ <https://statestreet.com/>.

Diverzifikácia aktív

Na diverzifikáciu aktív s cieľom minimalizácie rizika a maximalizácie výnosu vo všeobecnosti slúžia modely výberu portfólia, ktoré vyjadrujú ciele maximalizovať očakávaný výnos a minimalizovať krátkodobé straty pomocou vybranej miery rizika

Výsledkom riešenia modelu zostaveného pri stanovených cieľoch a pri určených parametroch modelu je množina efektívnych riešení odzrkadľujúcich rôzne kombinácie stanovených hodnôt očakávaných výnosov a rizík (Pekár 2015).

Výnosy investície vyjadrujú pre očakávaný investičný zámer priemerný očakávaný výnos z nej. Výpočet miery výnosu pre jedno obdobie je založený na relatívnej miere výnosu pre dané časové obdobie (Pekár 2015). Svetovo najrozšírenejší spôsob výpočtu výnosu a trhovým štandardom je časovo vážený výnos (Time Weighted Return), ale často sa používa aj peňažne vážený výnos (Money Weighted Return), v rámci ktorého sa rozlišujú jednoduchý výnos a vnútorná miera výnosnosti (Internal Rate of Return).

Markowitz (Markowitz 1952) ako prvý prispel do teórie finančných trhov teóriou rozhodovania o výbere portfólia za podmienok neistoty. Riešený problém výberu portfólia redukoval na vzťah iba medzi dvoma prvkami: medzi očakávaným výnosom a rozptylom výnosov portfólia. V roku 1959 Markowitz (Markowitz 1959) navrhol mieru dolného parciálneho rizika, ktorá meria riziko pod očakávaným výnosom (semi-variácia). Ďalšie miery dolného parciálneho rizika sú dolná semi-variácia, dolná semi-absolútna odchýlka, Value at Risk (VaR) a Conditional value at risk (CVaR). Výhoda mier dolného parciálneho rizika je tá, že sú vhodné, ak rozdelenie výnosov je asymetrické (Konno a Yamazaki 1991), (Pekár 2015).

Tendencia investorov porovnávať súčasnú hodnotu rizika s najlepšou hodnotou z minulosti viedla k formulovaniu inej triedy mier rizika založených na tzv. drawdown (Cheklov a kol. 2003), ktorú predstavuje funkcia drawdown ako rozdiel medzi maximálnym výnosom portfólia do času T a hodnoty portfólia v čase T . Príkladmi Drawdown mier rizika sú absolútny Drawdown (AD), maximálny Drawdown (MDD), priemerný Drawdown (AVDD), Drawdown v riziku (DAR) a podmienený Drawdown v riziku (CDaR). Aj napriek ich výpočtovej jednoduchosti, Drawdown miery nepopisujú skutočnú situáciu na trhu, a preto by mali byť použité v kombinácii s ďalšími mierami.

3 ZÁVER

Environmentálne investovanie sa v minulosti nepovažovalo za špecializované odvetvie. Po niekoľkých prírodných katastrofách, ktoré upriamili pozornosť na blížiacu sa klimatickú krízu, sa význam environmentálneho investovania podstatne zvýšil a upriamujú naň pozornosť predovšetkým mladí ľudia, ktorým záleží na budúcnosti planéty. Množstvo nových finančných prostriedkov vo fondoch ESG dosiahlo v roku 2021 viac ako 70 miliárd dolárov, čo je takmer tretina nárastu oproti predchádzajúcemu roku.

Vo všeobecnosti môže byť investovanie do ekologických spoločností rizikovejšie ako iné investičné stratégie. Ak je však pre investorov dôležitá podpora environmentálnych spoločností, potom environmentálne investovanie môže byť atraktívnym spôsobom, ako umiestniť svoje finančné prostriedky na finančnom trhu.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia výskumného projektu VEGA – 1/0120/23 „Environmentálne modely ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí“.

Použitá literatúra

- [1] Azhgaliyeva, D., Kapsalyamova, Z., & Low, L. (2019). Implications of Fiscal and Financial Policies on Unlocking Green Finance and Green Investment. Handbook of Green Finance. Sustainable Development. Springer, Singapore.
https://doi.org/10.1007/978-981-10-8710-3_32-1
- [2] Eyraud, L., Clements, B., & Wane, A. (2013). Green investment: Trends and determinants. Energy Policy (60), 852-865. <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2013.04.039>
- [3] KONNO, H. – YAMAZAKI, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. In Management science. 37.
- [4] MARKOWITZ, H. M. (1952). Portfolio selection. In Journal of Finance. 7.
- [5] MARKOWITZ, H. M. (1959) Portfolio selection: Efficient Diversification of Investment. New York: John Wiley & Sons.
- [6] Pekár, J. (2015). Modely matematického programovania na výber portfólia. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.
- [7] Pekár, J., Brezina, I., Brezina, I. Jr. (2018). Portfolio Selection Model Based on CVAR Performance Measure. In Reiff, M., Gežík, P. (ed.), 19th International Scientific Conference on Quantitative Methods in Economics - Multiple Criteria Decision Making. Trenčianske Teplice: LetraEdu, 266-271.
- [8] Pekár, J., Brezina, I., & Reiff, M. (2022a). Modely výberu portfólia. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM.

Kontaktné údaje

prof. Ing. Ivan Brezina, CSc.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
email: ivan.brezina@euba.sk

prof. Mgr. Juraj Pekár, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
email: juraj.pekar@euba.sk

doc. Ing. Marian Reiff, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
email: marian.reiff@euba.sk

HRA VÄZŇOVA DILEMA A MEDZINÁRODNÉ VZŤAHY¹

THE PRISONER'S DILEMMA GAME AND INTERNATIONAL RELATIONS

Zuzana Čičková, Martin Karas, Rudolf Kucharčík

Abstrakt

Hra väžňova dilema je fenoménom teórie hier. Používa sa ako model na skúmanie rozhodovania a strategického správania v situáciách, kde každý hráč má možnosť voľby medzi spoluprácou a zradou. Modeluje rozhodovacie situácie, v ktorých by dva subjekty mohli získať dôležité výhody zo spolupráce, ale zvyčajne tak neurobia a tak sa práve táto hra stala jedným z nástrojov modelovania konfliktov v rámci medzinárodných vzťahov. V príspevku sa budeme venovať vysvetleniu tejto hry a aj niektorým typom stratégií v prípade opakovaného sa konfliktu, ktoré budeme simulovať v systéme MatLab.

KLúčové slová: *väžňova dilema, teória hier, medzinárodné vzťahy*

Abstract

The Prisoner's Dilemma game is a game theory phenomenon. It is used as a model to investigate decision-making and strategic behavior in situations where each player has a choice between cooperation and betrayal. It models decision-making situations in which two entities could gain important benefits from cooperation, but usually do not, and thus this game has become one of the tools for modeling conflicts in international relations. In the post, we will focus on the explanation of this game and some types of strategies in the case of repeated conflict, which we will simulate in the MatLab system.

Keywords: *Prisoner's Dilemma, Game Theory, International Relations*

1 ÚVOD

Teória hier skúma interakcie medzi jednotlivcami alebo skupinami jedincov v rôznych situáciách. Rozhodovacia situáciu nazývame hrou a účastníkov tejto situácie nazývame hráči. V hre väžňova dilema sú dvaja hráči postavení pred rozhodnutie, či spolupracovať alebo zradiť svojho protihráča. Táto hra bola prvýkrát predstavená v experimentálnej forme v roku 1950 M. Dresherom a M. Floodom (Flood, 1952), spopularizovaná bola A. W. Tuckerom (1950). Podľa M. Petersona (2015) sa predpokladá aj spojitosť s prácou J. F. Nasha (1951). Názov tejto hry pochádza z formulácie, keď dvaja väzni sú obvinení z trestného činu a nachádzajú sa vo väzbe. Ak spolupracujú a držia sa svojich verzií, obaja budú mať menší trest. Ak jeden zradí svojho spoluväzňa, zradca bude mať menší trest a väzeň, ktorý nezradil, dostane vyšší trest. Ak obaja zradia, obaja budú mať trest v strednej výške. Hra bola neskôr použitá na vysvetlenie rôznych fenoménov v ľudskom správaní, ako je napríklad kooperácia v obchodných vzťahoch, v medzinárodných vzťahoch alebo dokonca evolúcia biologických druhov a bola študovaná mnohými vedcami z rôznych oblastí, ako sú ekonómia, psychológia, biológia, politológia,

¹ Tento príspevok bol spracovaný s podporou grantu VEGA 1/0115/23 Aplikácia kooperatívnych modelov teorie hier v ekonómii a v medzinárodných vzťahoch .

medzinárodné vzťahy a podobne. Ďalej uvedieme niektoré oblasti, v ktorých býva táto hra aplikovaná:

- **Ekonomia:** hra väžňova dilema sa používa na modelovanie napríklad obchodných vzťahov medzi firmami, pri ich rozhodovaní o cenách a strategickom správaní sa na trhu. Hra pomáha analyzovať, ako jednotlivé firmy môžu spolupracovať a dosiahnuť lepšie výsledky, alebo ako môžu využiť zradu, aby získali výhodu.
- **Biológia:** hra sa používa napríklad v biologických štúdiách pre modelovanie interakcií medzi jednotlivcami v rôznych druhoch. Tento model pomáha vysvetliť, ako môžu rôzne druhy spolupracovať alebo súťažiť o zdroje.
- **Politológia a medzinárodné vzťahy:** hra je využívaná napríklad na modelovanie medzinárodných vzťahov a strategických rozhodnutí štátov a pomáha analyzovať, ako jednotlivé štáty môžu spolupracovať alebo ako môžu využiť zradu s očakávaním výhody.
- **Psychológia:** hra sa používa napríklad na skúmanie rozhodovacích procesov a správania jednotlivcov v rôznych situáciách a pomáha vysvetliť, ako jednotlivci môžu spolupracovať alebo súťažiť s ostatnými a aké faktory ovplyvňujú ich rozhodnutie.
- **Sociológia:** Hra sa používa napríklad na skúmanie interakcií medzi jednotlivcami a skupinami v rôznych sociálnych situáciách a pomáha vysvetliť, ako sa jednotlivci správajú v rôznych skupinových prostrediach a ako sa môžu rôzne faktory, ako je napríklad kultúra a normy správania, odrážať na ich rozhodnutiach.

Teória hier sa na analýzu medzinárodných vzťahov používa už viac ako 50 rokov, pozri napríklad (Kavka, 1985), (Woodward 1989), (Dresher, 1981), (Schelling, 1960, 1966), (Howard, 2003), pričom mnoho úvah vychádza práve z hry väžňova dilema. Opakovaná väžňova dilema je rozšírením klasickej hry s tým rozdielom, že hráči hrajú viac kôl ako jedno a môžu v priebehu hry uplatňovať rôzne stratégie. V opakovanej väžňovej dileme hráči teda hrajú hru viackrát a môžu sa navzájom sledovať a pamätať si predchádzajúce ťahy. Práve tento koncept hrá významnú rolu aj v teórii medzinárodných vzťahov (Axelrod – Keohane, 1985). Príkladmi modelovaných situácií sú:

- súťaženie medzi štátmi o zdroje, trhy a vplyv v medzinárodnom prostredí
- diplomatické vyjednávanie a rozhodovanie o medzinárodných dohodách
- rozhodovanie o využití vojenskej sily a strategického správania v medzinárodných konfliktoch
- spolupráca na globálnych otázkach, ako je zmena klímy, terorizmus a bezpečnosť

Opakovaná väžňova dilema v medzinárodných vzťahoch tiež umožňuje skúmať, ako sa môžu aktéri naučiť spolupracovať a dosahovať výhody pre obe strany, aj v situáciách, keď je na prvý pohľad výhodnejšie konať vlastným záujmom. Jedným z príkladov úspešnej spolupráce na báze opakovanej väžňovej dilemy je Európska únia, ktorá vytvára spoločný trh a spolupracuje v mnohých oblastiach, aby dosiahla výhody pre všetky členské štáty.

2 HRA VÄŽŇOVA DILEMA

Ďalej uvedieme formuláciu tejto hry, ktorá sa používa najmä v oblasti analýzy medzinárodných vzťahov. Hra modeluje konflikt dvoch hráčov súperiacich o zdroj. Hráči si môžu vybrať medzi dvoma stratégiami (*zradiť* a *nezradiť*). Nech *cena*, ($cena > 0$) je hodnota sporného zdroja a *náklady* ($náklady > 0$) predstavujú cenu eskalovaného boja a nech hodnota zdroja je vyššia ako cena boja, t.j. $náklady < cena$. Ak si obaja hráči zvolia stratégiu *zradiť*, nasleduje boj,

ktorého výsledkom je $((cena - náklady)/2)$ pre oboch hráčov. Ak by však obaja zaujali stratégiu *nezradiť*, každý z nich by získal polovicu zdroja $(cena)/2$. Ak jeden z nich zaujme stratégiu *zradiť* a druhý *nezradiť*, ten ktorý „nezradí“ bude mať 0 a ten, ktorý „zradí“, získa hodnotu zdroja. Hru možno potom charakterizovať takouto bimaticou:

	<i>zradiť</i>	<i>nezradiť</i>
<i>zradiť</i>	$(cena - náklady)/2, (cena - náklady)/2$	$cena, 0$
<i>nezradiť</i>	$0, cena$	$cena /2, cena /2$

Všeobecne možno túto hru charakterizovať akoukoľvek bimaticou s výplatami s výplatami A, B, C, D , kde platí: $C > D > A > B$

	<i>zradiť</i>	<i>nezradiť</i>
<i>zradiť</i>	$(A), (A)$	$(C), B$
<i>nezradiť</i>	$B, (C)$	D, D

Nashovo equilibrium vedie k stratégii *zradiť*, *zradiť* (vyznačené), čo však vedie k najhoršiemu možnému výsledku hry. Touto hrou sa zvyčajne poukazuje na fakt, že dvaja jednotlivci, ktorí sledujú svoj vlastný záujem, nedosiahnu najlepší možný výsledok, v porovnaní so stratégiami *nezradiť-nezradiť*. Hrou sa potvrdzuje to, že v oblasti medzinárodných vzťahoch budú všetky štáty (bez ohľadu na ich vnútornú politiku alebo vyznávanú ideológiu) konať vo svojom racionálnom vlastnom záujme a aj keď najlepším možným výsledkom by bolo spolupráca, je racionálne zaujať stratégiu *zradiť*. Riešením je vynútiť vzájomnú spoluprácu záväznými zmluvami, ktorých dodržiavanie je vynútiteľné. Hra však poukazuje aj na fakt, že dohody medzi mocnosťami majú tendenciu byť porušované, pretože hráč za účelov zvýšenia svojho zisku má tendenciu „podraziť“ súpera

3 OPAKOVANÁ VÄZŇOVA DILEMA

V oblasti skúmania medzinárodných vzťahov sa veľká pozornosť venuje opakovanému typu hry väzňova dilema, pretože opakovanie hry ovplyvňuje správanie sa hráčov (za zradu môžeme byť v budúcnosti potrestaní). Ak je v prípade opakovaného konfliktu tohto typu hry známy časový horizont (počet opakovaní sa konfliktu), zvyčajne dochádza k zmene správania sa hráčov ku koncu hry. Hráči majú tendenciu spolupracovať až do doby, kde hra takmer končí a potom a potom majú tendenciu spoluprácu porušiť, ak im už nehrozí trest za porušenie spolupráce. V prípade, ak nevieme vopred určiť časový horizont konfliktu (nekonečné hry), hráči môžu uplatňovať rôzne stratégie, pričom naznámejšie sú:

- vždy podvádajte (Always Defect)
- vždy spolupracujte (Always Cooperate)
- Grim Trigger: spolupracujeme v prvom kole a tak dlho, kým spolupracujú všetci hráči
- oko za oko (Tit-for-Tat): Stratégia odporúča sa spolupráca v prvom kole a potom opakovať stratégie protihráča
- náhodné rozhodovanie: Táto stratégia spočíva v tom, že hráči sa rozhodujú náhodne, bez ohľadu na to, čo robí druhý hráč. Obvykle sa vyskytuje, keď hráči neveria svojmu protihráčovi, alebo nemajú k dispozícii žiadnu inú stratégiu.

Ďalej budeme kalkulovať priemerné hodnoty hry v prípade týchto stratégií pomocou systému MatLab, pričom budeme uvažovať s počtom opakovaní konfliktu 2000.

Predpokladajme hru s takouto maticou platieb:

	<i>zradiť</i>	<i>nezradiť</i>
<i>zradiť</i>	(3), (3)	(5), 0
<i>nezradiť</i>	0, (5)	1, 1

Tabuľka 1: Priemerné hodnoty platieb

Hráč 1		Hráč 2	
<i>Použitá stratégia</i>	<i>Priemerné hodnoty</i>	<i>Použitá stratégia</i>	<i>Priemerné hodnoty</i>
Vždy spolupracovať	1,5120	Náhodné stratégie	4,1044
Vždy zradiť	3,1048	Náhodné stratégie	0,4978
Oko za oko	2,2445	Náhodné stratégie	2,2874
Grim Trigger	2,9681	Náhodné stratégie	0,6210

Z tabuľky 1 možno vyvodiť úspešnosť stratégií. Ako najvýhodnejšia sa javí stratégia vždy zradiť, nasleduje stratégia Grim Trigger, potom stratégia oko za oko a ako najmenej výhodná sa javí stratégia vždy spolupracovať.

4 ZÁVER

Vážnova dilema je jednou z najznámejších typov hier a ukazuje, ako sledovanie individuálneho záujmu môže byť nevýhodné oproti možnostiam spolupráce. Používa sa na vysvetlenie mnohých situácií reálneho sveta a je jednou z hier aplikovanou na vysvetlenie množstva konfliktov v oblasti medzinárodných vzťahov. V príspevku sme sa venovali vysvetleniu tejto hry ako jednokolovej hry a aj ako opakovanej hry. V prípade opakovanej hry sme prezentovali priemerné hodnoty niektorých známych stratégií realizovaných pomocou systému MatLab. Diskusia ohľadom interpretácie vážnovej dilemy, vrátane verzie s opakovaním, síce dodnes nebola uzavretá, napriek tomu jasne ukazuje ako môže vývoj v oblasti teórie hier ovplyvniť diskusiu na úrovni teórie medzinárodných vzťahov.

Použitá literatúra

1. AXELROD, R., KEOHANE, R. O. 1985. Achieving cooperation under anarchy: Strategies and institutions. *World Politics*, 38(1), 226–254.
2. DRESHER, M. 1981. *The mathematics of games of strategy: Theory and applications*. Dover.
3. FLOOD, M. M. 1952. *Some experimental games*. Research Memorandum RM-789-1. Santa Monica, CA: Rand.
4. HOWARD, N. 2003. *Paradoxes of rationality: Theory of metagames and political behavior*. The MIT Press Classics.
5. KAVKA, G. S. 1985. Space War Ethics. *Ethics*, 95(3), 673–691.
6. NASH, J. 1951. Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
7. PETERSON M. 2015. *The Prisoner's Dilemma*. Cambridge University Press.
8. SCHELLING, T. 1960. *The strategy of Conflict*. Harvard University Press.
9. SCHELLING, T. C. 1966. *Arms and influence*. Yale Univ Press VIII.

10. TUCKER A. W. 1950. A two-person dilemma (unpublished notes). Rasmusen E. B., ed. in *Readings in Games and Information* (1989), 7-8. Blackwell Publishers: Oxford.
11. WOODWARD, P. A. (1989). The "game" of nuclear strategy: Kavka on strategic defense. *Ethics*, 99(3), 563–571.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Zuzana Čičková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: zuzana.cickova@euba.sk

Mgr. Martin Karas, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta medzinárodných vzťahov

Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

e-mail: martin.karas@euba.sk

doc. PhDr. Rudolf Kucharčík, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta medzinárodných vzťahov

Dolnozemska cesta 1, 852 35 Bratislava

e-mail: rudolf.kucharcik@euba.sk

DYNAMICKÉ VÍCEKRITERIÁLNÍ LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ DE NOVO S ROVNOVÁHOU ZDROJŮ

DYNAMIC MULTIOBJECTIVE DE NOVO LINEAR PROGRAMMING WITH RESOURCE BALANCE

Petr Fiala

Abstrakt

Vícekriteriální lineární programování se stalo mocným nástrojem, který pomáhá při hledání rozhodnutí, jež nejlépe uspokojí více cílů. V problémech vícekriteriálního lineárního programování je obvykle nemožné optimalizovat všechny cíle v daném systému. Vícekriteriální lineární programování De Novo je nástroj pro návrh optimálního systému pomocí reformulace množiny přípustných řešení. Článek představuje dynamické zobecnění, kde je systém vyvažován nákupem a prodejem zdrojů a technologickými inovacemi.

Klíčová slova: dynamika, více kritérií, De Novo, rovnováha zdrojů, technologické investice

Abstract

Multiobjective linear programming has emerged as a powerful tool to assist in the process of searching for decisions which best satisfy multiple objectives. In multiobjective linear programming problems it is usually impossible to optimize all objectives in a given system. Multiobjective De Novo linear programming is problem for designing optimal system by reshaping the feasible set. The paper presents a dynamic generalization where the system is balanced by buying and selling resources and by technological investments.

Keywords: dynamics, multiple criteria, De Novo, resource balance, technological investments

1 ÚVOD

Tradiční koncepty optimality se zaměřují na oceňování již daných systémů. Je aplikován nový koncept návrhu optimálních systémů (Zeleny, 1990). Multi-objective linear programming (MOLP) je model optimalizace daného systému pomocí více cílů. V problémech MOLP je obvykle nemožné optimalizovat všechny cíle společně v daném systému. Kompromis znamená, že nelze zvýšit úroveň uspokojení pro cíl, aniž by se snížila pro jiný cíl. Kompromisy jsou vlastnosti neadekvátně navrženého systému a lze je tedy eliminovat navržením lepšího. Účelem není měřit a vyhodnocovat kompromisy, ale minimalizovat je nebo dokonce eliminovat. Optimální systém by měl být bez kompromisů. Jako metodologii optimálního návrhu systému lze použít programování De Novo pro reformulaci přípustných množin v lineárních systémech. Koncept De Novo zavedl Milan Zelený (1990). Jsou shrnuty základní koncepty optimalizace de novo. Článek představuje přístupy k řešení problému Vícekriteriálního lineárního programování de novo (MODNLP), možná rozšíření, metodologické a reálné aplikace a názorný příklad. Přístup je založen na přeformulování problému MOLP danými cenami zdrojů a daným rozpočtem. Používá se hledání metaoptima s minimálním rozpočtem. Pro dosažení nejlepšího výkonu pro daný rozpočet se používá nástroj poměru optimálních cest. Proces reformulace je dynamický proces, ve kterém se mění parametry systému Hledání lepšího portfolia zdrojů vede k neustálé rekonfiguraci a přetváření hranic systémů. Inovace přinášejí

postupné zlepšení požadovaných cílů a lepší využití dostupných zdrojů. V článku je navržen dynamický postup s rovnováhou zdrojů.

2 VÍCEKRITERIÁLNÍ LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ DE NOVO

Pro vícekriteriální optimalizaci mohou být použity dva modely. Vícekriteriální lineární programování (MOLP) je model optimalizace daného systému podle více kritérií. Vícekriteriální lineární programování De Novo (MODNLP) je model navrhování optimálního systému změnou přípustné množiny.

Vícekriteriální lineární programování (MOLP)

Úloha vícekriteriálního lineárního programování (MOLP) může být formulována následovně

$$\begin{array}{l} \text{při omezeních} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{"max"} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (1)$$

kde \mathbf{C} je (k, n) -matice koeficientů kriteriálních funkcí, \mathbf{A} je (m, n) -matice strukturálních koeficientů, \mathbf{b} je m -vektor známých omezení zdrojů, \mathbf{x} je n -vektor rozhodovacích proměnných. V problémech MOLP je obvykle nemožné optimalizovat všechna kritéria v daném systému.

Vícekriteriální lineární programování De Novo (MODNLP)

MODNLP je problém pro navrhování optimálních systémů pomocí reformulace množiny přípustných řešení. Při zadaných cenách a zadaném rozpočtu je problém MOLP (1) reformulován na problém MODNLP (2)

$$\begin{array}{l} \text{při omezeních} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{"max"} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{p}\mathbf{b} \leq B \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (2)$$

kde \mathbf{b} je m -vektor neznámých omezení zdrojů, \mathbf{p} je m -vektor cen zdrojů, a B je celkový disponibilní rozpočet.

Z modelu (2) plyne

$$\mathbf{p}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{p}\mathbf{b} \leq B. \quad (3)$$

Definováním n -vektoru jednotkových nákladů $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{A}$ je možno přepsat problém (2) do tvaru

$$\begin{array}{l} \text{při omezeních} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow \text{"max"} \\ \mathbf{v}\mathbf{x} \leq B \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (4)$$

Řešením jednokriteriálních úloh

$$\begin{array}{l} \text{při omezeních} \\ z^i = \mathbf{c}^i \mathbf{x} \rightarrow \max \\ \mathbf{v}\mathbf{x} \leq B \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k \quad (5)$$

dostáváme \mathbf{z}^* , což je k -vektor kriteriálních hodnot pro ideální systém s ohledem na rozpočet B .

Úlohy (5) jsou spojité tzv. problémy batohu, jejichž řešení jsou

$$x_j^i = \begin{cases} 0, & j \neq j_i \\ B/v_{j_i}, & j = j_i \end{cases} \quad (6)$$

kde

$$j_i \in \{j \in (1, \dots, n) \mid \max_j (c_j^i / v_j)\}$$

Problém meta-optima je možno formulovat následovně

$$f = \mathbf{v}\mathbf{x} \rightarrow \min \quad (7)$$

při omezeních

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^*$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Problém (7) poskytuje řešení:

$$\mathbf{x}^*, B^* = \mathbf{v}\mathbf{x}^*, \mathbf{b}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^*. \quad (8)$$

Hodnota B^* určuje minimální rozpočet pro dosažení ideálních hodnot \mathbf{z}^* pomocí řešení \mathbf{x}^* a \mathbf{b}^* .

Poměr optimální cesty

Pro danou úroveň rozpočtu většinou platí $B \leq B^*$. Poměr optimální cesty pro dosažení nejlepších výsledků pro daný rozpočet B je definován následovně

$$r_1 = \frac{B}{B^*}. \quad (9)$$

Poměr optimální cesty poskytuje efektivní a rychlý nástroj pro optimální návrh velkých lineárních systémů (Shi, 1995). Návrh optimálních systémů pro rozpočet B je určen následovně:

$$\mathbf{x} = r_1 \mathbf{x}^*, \mathbf{b} = r_1 \mathbf{b}^*, z = r_1 z^* \quad (10)$$

3 DYNAMIZACE MODNLP

Současnost je charakterizována změnami v parametrech rozhodovacích problémů. Rovněž u postupů vícekritériálního lineárního programování De Novo (MODNLP) je možno přejít k jejich dynamizaci. Obecný model MODNLP je možno přepsat do obecného dynamického modelu, kde všechny parametry je možno brát dynamicky v časových periodách $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Pro $t = 0$ dostáváme počáteční sledovaný stav a pro $t = T$ dostáváme stav v časovém horizontu. Změna stavů popisuje dynamický proces rekonfigurace.

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \rightarrow \text{"max"} \quad t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (11)$$

při omezeních

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t) \leq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}(t)\mathbf{b}(t) \leq B(t)$$

$$\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$$

Dynamický model (11) je obecně složitý pro současnou změnu všech parametrů v čase. Proto se zaměříme na dvě dílčí dynamické změny jen některých parametrů:

- 1) Dynamické portfolio zdrojů

2) Technologické inovace

Dynamické portfolio zdrojů reprezentuje postupné změny kapacit zdrojů a tím reformulaci množiny přípustných řešení v obdobích, $t = 0, 1, 2, \dots, T$, a hledání lepšího využití portfolia zdrojů. Tyto změny mohou být vyvolány řadou faktorů, např. růst rozpočtu v čase $B(t)$, změnou cen v čase $\mathbf{p}(t)$, rozlišením nákupních a prodejních cen, změny kapacit zdrojů $\mathbf{b}(t)$ v čase. Model dynamického portfolia má následující tvar

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \rightarrow \text{"max"} & t = 0, 1, 2, \dots, T & (13) \\ \text{při omezeních} & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{p}(t)\mathbf{b}(t) \leq B(t) \\ & \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Technologické inovace přináší zlepšení požadovaných cílů a lepší využití dostupných zdrojů. Prvky ve strukturní matici \mathbf{A} by měly být redukovány technologickým pokrokem. Technologické inovace můžeme modelovat pomocí technologické inovační matice $\mathbf{S} = (s_{ij})$, kde její prvky ukazují snížení spotřeby zdrojů, $0 \leq s_{ij} \leq 1$. Dynamická matice $\mathbf{S}(t)$ ukazuje vývoj snižování zdrojů v obdobích $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Matice $\mathbf{S}(t)$ je stále zkoumána a aktualizována. Model zachycující technologické inovace má tvar

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \rightarrow \text{"max"} & t = 0, 1, 2, \dots, T & (12) \\ \text{při omezeních} & \mathbf{S}(t)\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{p}\mathbf{b}(t) \leq B \\ & \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Model s rovnováhou zdrojů předpokládá stálý rozpočet, stálé ceny, nákupní a prodejní ceny jsou stálé. Za rozpočet se nakupují potřebné zdroje a prodávají nadbytečné. Současné zachycení technologických inovací snižuje spotřebu zdrojů a uvolňuje prostředky pro nákup dalších zdrojů. Formálně je možno vyjádřit pomocí modelu (12). Řešení modelu je ilustrováno na jednoduchém numerickém příkladu.

4 ILUSTRACNÍ PŘÍKLAD

Je formulována úloha MOLP

$$\begin{aligned} \text{Max } z_1 &= x_1 + x_2 \\ \text{Max } z_2 &= x_1 + 4x_2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 60, \\ & x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Jedno z nedominovaných řešení je $\mathbf{x}(0) = (12, 6)$ a $\mathbf{z}(0) = (18, 36)$, viz Obr. 1. Počáteční zásoba zdrojů $\mathbf{b}(0) = (60, 30)$. Jsou zadány konstantní ceny zdrojů $\mathbf{p} = (5, 4)$ a určen konstantní rozpočet $B = \mathbf{p}\mathbf{b}(0) = 420$ a jednotkové náklady $\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{A} = (19, 32)$.

Jsou určeny optimální hodnoty pro jednokriteriální úlohy:

$$\begin{aligned} \text{Max } z^i &= \mathbf{c}^i \mathbf{x} \quad i = 1, 2, \dots, k & z_1^* &= 22.11, \quad z_2^* = 52.50, \\ \text{s.t. } & \mathbf{v}\mathbf{x} \leq B \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & f = \mathbf{v}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} & \mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{z}^* \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
x_1^* = 11.98, \quad x_2^* = 10.13 \\
B^* = \mathbf{v}\mathbf{x}^* = 551.7 \\
\mathbf{b}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* \quad b_1^* = 76.48, \quad b_2^* = 42.39
\end{array}$$

$$r_1 = \frac{B}{B^*} = 0.761$$

Je navržen optimální systém pro rozpočet B : $\mathbf{x}(1) = r_1 \mathbf{x}^*$, $\mathbf{b}(1) = r_1 \mathbf{b}^*$, $\mathbf{z}(1) = r_1 \mathbf{z}^*$,

$$x_1 = 9.12, \quad x_2 = 7.71, \quad b_1 = 58.23, \quad b_2 = 32.25, \quad z_1 = 16.83, \quad z_2 = 39.96.$$

Je definován model MODNLP s technologickou inovací zadanou technologickou maticí

$$\mathbf{S}(1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix},$$

Nové jednotkové náklady $\mathbf{v}(1) = \mathbf{p}\mathbf{S}(1)\mathbf{A} = (14.8; 24.4)$,

$$z(1)_1^* = 28.38, \quad z(1)_2^* = 68.85,$$

$$x(1)_1^* = 14.89, \quad x(1)_2^* = 13.49,$$

$$B^* = \mathbf{v}\mathbf{x}(1)^* = 549.5.$$

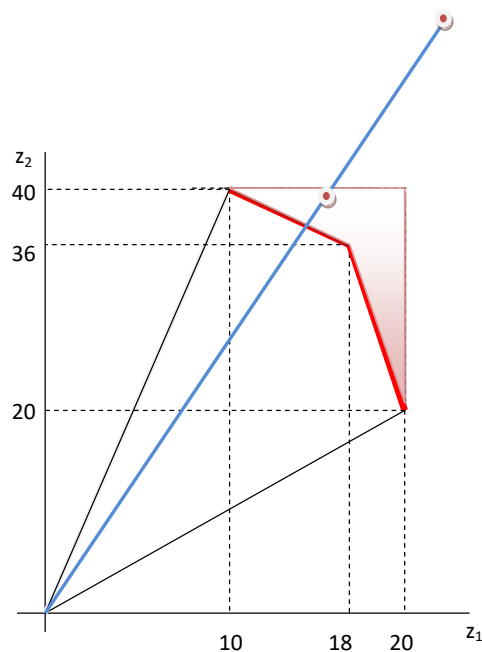
Po redukci vzhledem ke konstantnímu rozpočtu $B = 420$ dostáváme hodnoty

$$r_1 = 0.764,$$

$$x(2)_1 = 11.38, \quad x(2)_2 = 10.31,$$

$$z(2)_1 = 21.69, \quad z(2)_2 = 52.62.$$

Dynamické řešení v časech je znázorněno na Obr. 1, kde je zachycena množina nedominovaných řešení vzhledem k původním omezením zdrojů a řešení v kroku 1 po optimalizaci zdrojů a v kroku 2 po technologické inovaci.



Obr. 1. Dynamické řešení

5 ZÁVĚR

De Novo optimalizace se používá jako metodika návrhu optimálního systému pro reformulaci přípustných množin v lineárních systémech. Problém MOLP je přeformulován pomocí daných cen zdrojů a daného rozpočtu. Hledání lepšího portfolia zdrojů vede k průběžné rekonfiguraci a přetváření hranic systémů. De Novo optimalizace byla aplikována v několika oblastech, např. v plánování výroby (Babic a Pavic, 1996), plánování systémů vodních zdrojů (Zhang a dal., 2009) a byla navržena zobecnění jako je např. použití fuzzy přístupů (Li a Lee, 1990).

Príspevek je zaměřen na dynamizaci vícekritériálního lineárního programování De Novo (MODNLP). Obecný dynamický model je složitý, proto se zaměřujeme na dynamické portfolio zdrojů a technologické inovace. Inovace přináší zlepšení požadovaných cílů a lepší využití dostupných zdrojů. Model s rovnováho zdrojů pracuje s konstantním rozpočtem, který je balancován prodejem nepotřebných zdrojů a nákupem požadovaných zdrojů. Dynamický přístup de Novo programování je otevřený pro další rozšíření a aplikace.

Poděkování

Výzkumný projekt je podporován grantem č. IGA F4/42/2021, Fakulty informatiky a statistiky, VŠE, Praha.

Použitá literatura

1. BABIC, Z., PAVIC, I. (1996): Multicriterial production planning by De Novo programming approach. [International Journal of Production Economics](#) 43, 59-66.
2. FIALA, P. (2008): Modely a metody rozhodování. *Economia*, Praha.
3. LI, R. J., LEE, E. S. (1990): Fuzzy Approaches to Multicriteria De Novo Programs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 153, 13-20.
4. SHI, Y. (1995): Studies on Optimum-Path Ratios in De Novo Programming Problems. *Computers and Mathematics with Applications* 29, 43 –50.
5. ZELENÝ, M. (1990): De Novo Programming. *Ekonomicko-matematický obzor* 26, 406 - 413.
6. ZELENY, M. (2010): *Multiobjective Optimization, Systems Design and De Novo Programming*. In: [Zopounidis, C., Pardalos, P. M.](#) (ed.): [Handbook of Multicriteria Analysis](#). Springer, Berlin.
7. ZELENY, M. (1990): Optimal Given System vs. Designing Optimal System: The De Novo Programming Approach. *International Journal of General System* 17, 295 - 307.
8. ZHANG, Y. M., HUANG, G. H., ZHANG, X. D. (2009): Inexact de Novo programming for water resources systems planning. [European Journal of Operational Research](#) 199, 531 – 541.

Kontaktní údaje

Prof. RNDR. Ing. Petr Fiala, CSc., MBA
Vysoká škola ekonomická, Fakulta informatiky a statistiky
nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3
Tel: (420 2) 24 095 447
email: pfiala@vse.cz

APLIKÁCIA METÓD VIACKRITERIÁLNEHO VYHODNOCOVANIA ALTERNATÍV V PROSTREDÍ R

APPLICATION OF MULTIPLE ATTRIBUTE DECISION MAKING METHODS IN R

Andrea Furková, Peter Knížat¹

Abstrakt

Hlavným zámerom príspevku je poukázať na špecifiká a možnosti aplikácie vybraných metód viackriteriálneho vyhodnocovania alternatív v prostredí R. Prezentované sú známe metódy WSA, TOPSIS a metódy triedy PROMETHEE, pričom na ilustráciu týchto metód sme využili údaje z prípadovej štúdie zameranej na hodnotenie výkonnosti krajín OECD s ohľadom na sociálne a environmentálne aspekty.

Kľúčové slová: *viackriteriálne vyhodnocovanie alternatív, metóda WSA, metóda TOPSIS, metódy PROMETHEE*

Abstract

The main purpose of the paper is to point out the specifics and the possibilities of applying selected methods of multi-criteria evaluation of alternatives in the R environment. The well-known methods of WSA, TOPSIS and methods of the PROMETHEE class are presented and, for the purpose of the illustration, we use data from a case study aimed at evaluating the performance of OECD countries with respect to the consideration of social and environmental aspects.

Keywords: *Multiple Attribute Decision Making, WSA method, TOPSIS method, PROMETHEE methods*

1. ÚVOD

Spoločnosť a ekonomické subjekty, ale aj človek ako jednotlivec, rieša širokú paletu problémov. V mnohých prípadoch sú často vo svojich rozhodnutiach iba čiastočne racionálni. Takéto čiastočne (i)racionálne správanie vychádza z obmedzenia ľudského myslenia v prípade, ak je výber alternatív spojený s viacerými kritériami. Viackriteriálne rozhodovanie ponúka podporné rozhodovacie nástroje pre rozhodovateľov pre rôzne rozhodovacie situácie. Viackriteriálne vyhodnocovanie alternatív (Multiple Attribute Decision Making – MADM), ktoré je súčasťou viackriteriálneho rozhodovania, predstavuje podporný nástroj v zložitých rozhodovacích situáciách. V tomto prípade môže byť rozhodovací problém opísaný množinou alternatív, množinou rozhodovacích kritérií a väzbami medzi kritériami a alternatívami. Metódy MADM sú zvyčajne rozdeľované na metódy založené na teórii užitočnosti (Multiple Attribute Utility Theory – MAUT) a zoraďovacie metódy (Outranking Methods – OM). Trieda metód MAUT vychádza z teórie užitočnosti a rozhodovateľove preferencie sú zvyčajne

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantovej úlohy VEGA 1/0047/23 a VEGA 1/0211/21.

reprezentované ako hierarchická štruktúra za pomoci vhodnej funkcie užitočnosti. Na základe funkcie užitočnosti môže rozhodovateľ určiť najlepšiu alternatívu, t. j. alternatívu s najvyššou hodnotou užitočnosti. V prácach mnohých autorov môžeme nájsť návrhy vhodnej funkcie užitočnosti pre MAUT metódy. Do tejto triedy metód patrí napr. metóda váženého súčtu – WSA (Weighted Sum Approach) alebo metóda SMART (Simple Multi – Attribute Rating Technique).

Trieda metód OM vychádza buď z párového porovnávania alternatív alebo je založená na minimalizácii vzdialenosti od ideálnej alternatívy. Napríklad metódy triedy ELECTRE ako aj metódy triedy PROMETHEE vychádzajú z porovnania preferenčných relácií medzi alternatívami. Dalším princípom, ktorý je využívaný pri zoradovacích metódach OM, je princíp minimalizácie vzdialenosti od ideálnej alternatívy. Na takomto princípe je založená napr. metóda TOPSIS.

S cieľom aplikácie metód MADM v reálnych rozhodovacích situáciách bola vyvinutá pomerne široká škála softvérových nástrojov ako napr. tzv. toolbox nástroje alebo tzv. open source programy. Avšak väčšina týchto nástrojov je zameraná na použitie jedného, či malého počtu algoritmov. V tomto príspevku sa zameriame na možnosti aplikácie vybraných metód MADM v prostredí R. Využijeme knižnicu *mada* (Bigaret a kol., 2017; Meyer a kol. 2023), ktorá ponúka širokú paletu algoritmov viacriteriálneho rozhodovania.

Štruktúra tohto príspevku je nasledovná: empirickú časť príspevku spolu so získanými výsledkami obsahuje druhá kapitola a príspevok je ukončený záverom a zoznamom literatúry.

2. HODNOTENIE VÝKONNOSTI KRAJÍN OECD

Cieľom príspevku je poukázať na možnosti aplikácie metód MADM v prostredí R. Z tejto triedy metód využijeme známe metódy WSA, TOPSIS a metódy triedy PROMETHEE. Tieto metódy vychádzajú z odlišných výpočtových princípov, ich výpočtové princípy ako aj formuláciu úlohy MADM podrobne nájdeme napr. v Pekár a Furková (2014) alebo Furková a Ivaničová (2017). Na ilustráciu týchto metód využijeme prípadovú štúdiu, ktorá bude zameraná na hodnotenie výkonnosti krajín OECD s ohľadom na sociálne a environmentálne aspekty. Na hodnotenie krajín OECD použijeme 8 najčastejšie uvažovaných kritérií vychádzajúcich z predchádzajúcich štúdií, a to konkrétne štyri sociálne a štyri environmentálne kritériá. Definície týkajúce sa týchto ukazovateľov a indexov sú nasledujúce (prípadová štúdia vychádza z údajov uvedených v Arsu a Aycin, 2021):

- *Index sociálneho pokroku (SPI)*: index vypočítaný pomocou základných ukazovateľov (prístup k jedlu, osobná bezpečnosť atď.), ukazovateľov blahobytu (prístup k informáciám, práva na zdravie atď.) a ukazovateľov príležitostí (osobné slobody, ľudské práva, atď.) (hodnoty indexu 0 – 100).
- *Gini koeficient (GINI)*: koeficient vyjadruje mieru, do akej sa rozdelenie príjmov odchyľuje od rovnomerného rozdelenia medzi jednotlivcov alebo domácností v ekonomike. Hodnota koeficientu rovná 0 predstavuje dokonalú rovnosť, zatiaľ čo hodnota 1 označuje dokonalú nerovnosť (hodnoty koeficientu 0 – 1).
- *Index ľudského rozvoja (HDI)*: tento index každoročne zverejňuje Rozvojový program OSN a zahŕňa ukazovatele súvisiace s príjmom, očakávanou dĺžkou života a možnosťami vzdelávania (hodnoty indexu 0 – 1).
- *Index životnej spokojnosti (LSI)*: index je založený na výsledkoch prieskumu, ktorý meria, ako ľudia hodnotia svoj život ako celok a nie svoje aktuálne emócie (hodnoty indexu 0 – 10).

- *Podiel obnoviteľnej energie na hrubej konečnej spotrebe energie (SRE):* podiel obnoviteľnej energie na celkovej spotrebe energie v krajine (v %).
- *Emisie CO₂ na obyvateľa (CO₂):* príspevok občanov krajiny k emisiám CO₂ vypočítané ako podiel celkových emisií danej krajiny k celkovému počtu obyvateľov (v tonách).
- *Index environmentálnej výkonnosti (EPI):* index vyjadruje ako blízko sú krajiny k stanoveniu cieľov environmentálnej politiky (hodnoty indexu 0 – 100).
- *Ekologická stopa na obyvateľa (EF):* podiel celkovej ekologickej stopy národa na jedného obyvateľa (v hektároch).

Tabuľka 1 Alternatívy a ich kritériálne hodnoty

	Sociálne kritériá				Environmentálne kritériá			
	<i>SPI</i>	<i>GINI</i>	<i>HDI</i>	<i>LSI</i>	<i>SRE</i>	<i>CO₂</i>	<i>EPI</i>	<i>EF</i>
	max	min	max	max	max	max	min	min
USA	85,7	0,39	0,92	6,9	8,72	16,2	69,3	8
Nemecko	90,5	0,28	0,93	7	14,21	9,6	77,2	4,7
Austrália	91,2	0,32	0,93	7,3	9,18	16,9	74,9	7,3
Rakúsko	89,5	0,27	0,91	7,1	34,39	7,9	79,6	6
Belgicko	89,4	0,26	0,91	6,9	9,2	8,5	73,3	6,6
Česká republika	86,6	0,24	0,89	6,7	14,83	9,9	71	5,5
Dánsko	92,1	0,26	0,93	7,6	33,17	6	82,5	6,9
Fínsko	91,8	0,26	0,92	7,6	43,24	8,1	78,9	5,8
Francúzsko	88,7	0,29	0,89	6,5	13,5	5,3	80	4,6
Južná Kórea	89	0,35	0,9	5,9	2,71	12,5	66,5	6,2
Holland	91	0,28	0,93	7,4	5,89	9,6	75,3	5
Anglicko	88,5	0,36	0,92	6,8	8,71	5,8	81,3	4,2
Írsko	90,3	0,29	0,94	7	9,08	8,1	72,8	5
Izrael	83,6	0,34	0,9	7,2	3,71	7,8	65,8	5,5
Švédsko	91,6	0,27	0,93	7,3	53,25	4,2	78,7	6,1
Švajčiarsko	91,4	0,29	0,94	7,5	25,29	4,5	81,5	4,5
Japonsko	90,1	0,33	0,91	5,9	6,3	9,3	75,1	4,7
Kanada	91,4	0,31	0,92	7,4	22,03	15,5	71	8,1
Luxembursko	89,5	0,32	0,9	6,9	9,03	15,6	82,3	12,8
Nórsko	92,7	0,26	0,95	7,6	57,77	8,2	77,7	5,8
Estónsko	87,2	0,3	0,88	5,7	27,48	14,1	65,3	7,2
Španielsko	88,7	0,33	0,89	6,3	16,25	5,8	74,3	4
Taliansko	87,3	0,33	0,88	6	16,52	5,7	71	4,4
Kolumbia	74	0,5	0,76	6,3	23,56	1,9	52,9	1,9
Lotyšsko	83,1	0,35	0,85	5,9	38,1	3,7	61,6	6,1
Litva	83,9	0,37	0,86	5,9	28,96	4,7	62,9	5,9
Maďarsko	81	0,28	0,84	5,6	15,56	5,1	63,7	3,7
Poľsko	84,3	0,27	0,87	6,1	11,91	8,8	60,9	4,7
Portugalsko	87,7	0,32	0,85	5,4	27,16	5,3	67	4,4
Slovensko	83,1	0,22	0,85	6,2	13,41	6,6	68,3	4,4
Slovinsko	87,7	0,24	0,9	5,9	20,88	6,8	72	4,9
Čile	83,3	0,46	0,84	6,5	24,88	4,5	55,3	4,3
Turecko	68,2	0,4	0,8	5,5	13,37	5,2	42,6	3,5
Grécko	85,7	0,31	0,87	5,4	17,17	7	69,1	4,1

Sledované krajiny v tejto štúdií budú predstavovať alternatívy (34 alternatív) a sledované indikátory uvedené vyššie budú predstavovať sledované kritériá (8 kritérií). Alternatívy a ich kritériálne hodnoty, t. j. kritériálna matica je uvedená v Tabuľke 1. V tejto tabuľke sú uvedené

aj typy kritérií (max/min). Na obrázkoch 2 až 5 uvádzame kód, popis kódu a získané výsledky aplikáciou metód WSA, TOPSIS a PROMETHEE I a II. Využívaná knižnica *mcd*a (<https://CRAN.R-project.org/package=MCDA>) ako obvykle musí byť nainštalovaná príkazom “`install.packages(mcd`a) a potom musí byť načítaná príkazom `library(mcd`a). Údaje – kritériálnu maticu z Tabuľky 1 môžeme importovať viacerými známymi spôsobmi (napr. z excelu) a v našich príkladoch bude táto matica označená ako matica *performanceTable*. Vo všetkých výpočtoch sme uvažovali rovnakú významnosť všetkých kritérií. Hoci iba metóda WSA (aplikácia funkcie *weightedSum*) vyžaduje transformovať kritériá minimalizačného charakteru na kritériá maximalizačné, pre prehľadnosť sme s takto modifikovanými kritériami pracovali aj pri ostatných metódach. Aplikácia funkcie *weightedSum* – výpočet celkových užitočností alternatív vyžaduje zadať normalizovanú kritériálnu maticu a vektor váh. Údaje sú normalizované metódou min-max („*rescaling*“). Na Obrázku 2 vidíme aj celkové poradie krajín získané podľa klesajúcich hodnôt celkových užitočností alternatív. Výsledky sú taktiež prezentované prostredníctvom stĺpcového grafu kde vidíme aj čiastkové užitočností jednotlivých kritérií.

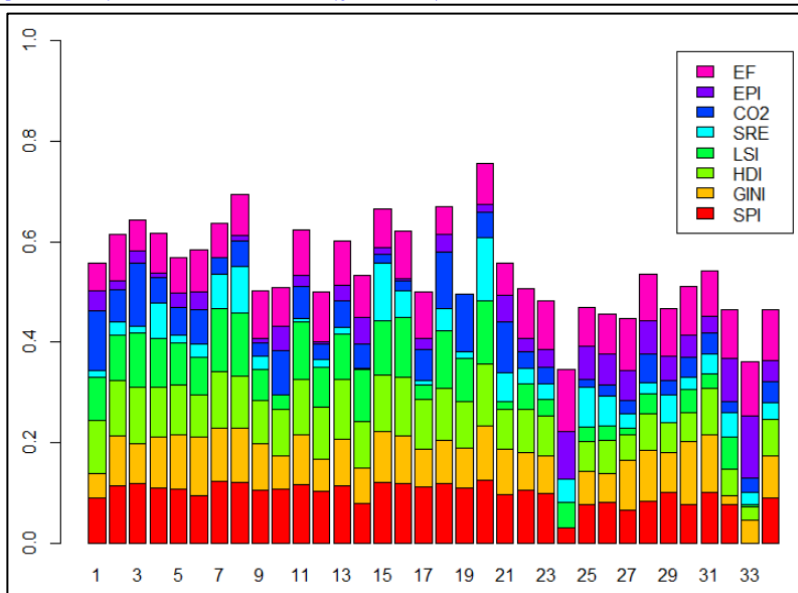
Metóda TOPSIS vychádza z princípu minimalizácie vzdialenosti, t.j. hľadá alternatívu, ktorá je geometricky najbližšie k tzv. ideálnej alternatívy a súčasne najďalej od tzv. bazálnej alternatívy (bližšie pozri napr. Pekár a Furková, 2014). Nájdenie výsledného usporiadania krajín získame aplikáciou funkcie *topsis* (pozri Obrázok 3), ktorá vyžaduje zadať kritériálnu maticu, vektor váh a vektor definujúci typ kritérií. Hoci aplikácia metódy TOPSIS vychádza z normalizovaných údajov („*scaleToUnitLength*“), tento krok funkcia *topsis* z knižnice *mcd*a realizuje automaticky. Na Obrázku 3 opäť vidíme aj výsledné zoradenie krajín podľa klesajúcich hodnôt ukazovateľa vyjadrujúceho relatívnu vzdialenosť alternatívy od bazálnej alternatívy.

Obrázok 2 WSA metóda

```

R 4.2.2 · D:/VR v R/
> row.names(performanceTable)<-row_names # označenie riadkov kritériálnej matice
> colnames(performanceTable)<-c("SPI", "GINI", "HDI", "LSI",
+ "SRE", "CO2", "EPI", "EF") # označenie stĺpcov kritériálnej matice
>
> performanceTable[,c(2,7,8)]<-c(max(performanceTable[,2])-performanceTable[,2], # zmena typu kritériá 2,7,8 z "min" na "max"
+ max(performanceTable[,7])-performanceTable[,7],
+ max(performanceTable[,8])-performanceTable[,8])
>
> library(MCDA)
> normalizationTypes <- c("rescaling","rescaling","rescaling","rescaling", # výber normalizačnej metódy pre kritériá
+ "rescaling","rescaling","rescaling","rescaling")
> normalizedPerformanceTable <- normalizePerformanceTable(performanceTable, # normalizovaná kritériálna matica
+ normalizationTypes)
>
> criteriaWeights<-c(1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8) # definovanie váh kritérií
>
> utility<-weightedSum(normalizedPerformanceTable,criteriaWeights) # aplikovanie funkcie weightedSum
>
> w<-(replicate(34,criteriaWeights)) # stĺpcový graf užitočnosti
> w<-t(replicate(34,criteriaWeights))
> score<-normalizedPerformanceTable*w
> legend<-c("SPI", "GINI", "HDI", "LSI", "SRE", "CO2", "EPI", "EF")
> barplot(t(score),
+ legend=legend,
+ names.arg = c(1:34),col=rainbow(ncol(score)),ylim = c(0,1))

```



```

> normalizedPerformanceTable <- cbind(normalizedPerformanceTable, utility) # pridanie užitočnosti do normalizovanej krit. matice
> finalOrder<-sort(normalizedPerformanceTable[,9],decreasing = TRUE) # výsledné zoradenie podľa klesajúcich hodnôt užitočnosti
> finalOrder

```

Nórsko	Fínsko	Kanada	Svédsko	Austrália	Dánsko
0.7549557	0.6930475	0.6692095	0.6645077	0.6440722	0.6369028
Holland	Svajčiarsko	Rakúsko	Nemecko	Irsko	Česká republika
0.6234113	0.6211018	0.6156156	0.6145095	0.6018014	0.5832642
Belgicko	Estónsko	USA	Slovinsko	Poľsko	Izrael
0.5688745	0.5582230	0.5580934	0.5416504	0.5359080	0.5318488
Slovensko	Južná Kórea	Španielsko	Francúzsko	Japonsko	Anglicko
0.5099603	0.5077478	0.5069932	0.5010663	0.5006106	0.4993848
Luxembursko	Taliansko	Lotyšsko	Portugalsko	Čile	Grécko
0.4955044	0.4817568	0.4682595	0.4677876	0.4647178	0.4635540
Litva	Maďarsko	Turecko	Kolumbia		
0.4557957	0.4466101	0.3599927	0.3457948		

Zdroj: vlastné výpočty v Rstudio

Obrázok 3 TOPSIS metóda

```

R 4.2.2 · D:\VR v R\
> row.names(performanceTable)<-row_names # označenie riadkov kritériálnej matice
> colnames(performanceTable)<-c("SPI", "GINI", "HDI", "LSI",
+ "SRE", "CO2", "EPI", "EF") # označenie stĺpcov kritériálnej matice
+ # kritériálna matica
>
> performanceTable[,c(2,7,8)]<-c(max(performanceTable[,2])-performanceTable[,2], # zmena typu kritériá 2,7,8 z "min" na "max"
+ max(performanceTable[,7])-performanceTable[,7],
+ max(performanceTable[,8])-performanceTable[,8])
>
> library(MCDA)
> normalizationTypes <- c("scaleToUnitLength", "scaleToUnitLength", # výber normalizačnej metódy pre kritériá
+ "scaleToUnitLength", "scaleToUnitLength",
+ "scaleToUnitLength", "scaleToUnitLength",
+ "scaleToUnitLength", "scaleToUnitLength")
> normalizedPerformanceTable <- normalizePerformanceTable(performanceTable, # normalizovaná kritériálna matica
+ normalizationTypes)
>
> criteriaWeights<-c(1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8) # definovanie váh kritérií
>
> criteriaMinMax <- c("max", "max", "max", "max", # definovanie typu kritérií pre aplikáciu funkcie TOPSIS
+ "max", "max", "max", "max")
>
> overall<- TOPSIS(performanceTable, criteriaWeights, criteriaMinMax) # aplikovanie TOPSIS funkcie
>
> overallScore<-sort(overall, decreasing = TRUE) # výsledné zoradenie podľa klesajúcich hodnôt vzdialeností
> overallScore
  Turecko Estónsko Nórsko Lotyšsko Čile Kolumbia Poľsko
0.5504910 0.5269618 0.5262768 0.5063680 0.4891437 0.4885821 0.4827488
  Švédsko Fínsko Kanada Litva Portugalsko Maďarsko Slovensko
0.4764652 0.4693233 0.4640620 0.4576650 0.4516627 0.4498158 0.4358410
  Česká republika Slovinsko Rakúsko Grécko Austrália USA Južná Kórea
0.4315289 0.4263881 0.4224892 0.4137089 0.4121744 0.4098827 0.4013222
  Dánsko Nemecko Izrael Taliansko Irsko Belgicko Holandsko
0.3889770 0.3818605 0.3798257 0.3771377 0.3726791 0.3690460 0.3673441
  Švajčiarsko Španielsko Japonsko Luxembursko Francúzsko Anglicko
0.3635209 0.3603448 0.3454963 0.3329178 0.3287129 0.2905969

```

Zdroj: vlastné výpočty v Rstudio

Posledný výpočtový princíp, z ktorého metódy MADM môžu vychádzať, je princíp konštrukcie preferenčnej relácie (P – preferencia, I – indiferencia, R – neporovnateľnosť) medzi dvojicou alternatív vzhľadom na jednotlivé kritériá. Pričom prostredníctvom agregačných procedúr sa získavajú párové relácie medzi dvojicami alternatív z hľadiska všetkých uvažovaných kritérií. Celkovú párovú reláciu výrazne ovplyvňujú aj tzv. prahové hodnoty, ktorých zmenou získavame rôzne párové relácie. Na rozdiel od vyššie uvedených metód, tieto metódy nevyžadujú normalizovať kritériálnu maticu. Na obrázkoch 4 a 5 prezentujeme výpočet metódami PROMETHEE I a II. Aplikácia funkcie *prometheeI* a funkcie *prometheeII* vyžaduje zadať kritériálnu maticu, vektory obsahujúce informácie o zvolených typoch preferenčných funkcií a ich parametroch, vektor váh a vektor definujúci typ kritérií. Výstupom *prometheeI* sú tri samostatné matice obsahujúce informácie o preferencii, indierencii a neporovnateľnosti medzi každou dvojicou alternatív. Z priestorových dôvodov uvádzame iba časť výstupov funkcie *prometheeI* (relácia preferencie P – vid’ Obrázok 4) a čiastočný výstup výsledkov funkcie *prometheeII*. Knižnica *mcda* ponúka aj ďalšie funkcie (v súvislosti s metódami PROMETHEE), ktoré umožňujú získanie matice indexov viackritériálnej preferencie, či vstupné a výstupné toky alternatív (pozri Obrázok 5).

Obrázok 4 Metódy triedy PROMETHEE

```

R 4.2.2 · D:/VR v R/ ↗
> row.names(performanceTable)<-row_names # označenie riadkov kritériálnej matice
+ colnames(performanceTable)<-c("SPI", "GNI", "HDI", "LSI", # označenie stĺpcov kritériálnej matice
+ "SRE", "CO2", "EPI", "EF")
> performanceTable[,c(2,7,8)]<-c(max(performanceTable[,2])-performanceTable[,2], # zmena typu kritériá 2,7,8 z "min" na "max"
+ max(performanceTable[,7])-performanceTable[,7],
+ max(performanceTable[,8])-performanceTable[,8])
> preferenceFunction<-c("U-shape", "V-shape", "Usual", "Level", # preferenčné funkcie pre kritériá
+ "V-shape-Indiff", "V-shape", "U-shape", "U-shape")
> preferenceThreshold<-c(0,0,1,0,2,10,3,0,0) # prahy preferenčných hodnôt
+ names(preferenceThreshold)<-colnames(performanceTable)
> indifferenceThreshold<-c(5,0,0,1,5,0,7,2) # prahy indiferenčných hodnôt
+ names(indifferenceThreshold)<-colnames(performanceTable)
> gaussParameter<-c(0,0,0,0,0,0,0) # hodnoty gaussovho parametra
+ names(gaussParameter)<-colnames(performanceTable)
> criteriaWeights<-c(1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8) # definovanie váh kritérii
+ names(criteriaWeights)<-colnames(performanceTable)
> criteriaMinMax<-c("max", "max", "max", "max", "max", "max", "max", "max") # definovanie typu kritérii
+ names(criteriaMinMax)<-colnames(performanceTable)
> library(MCDA)
> PROMETHEEI(performanceTable, preferenceFunction,preferenceThreshold, # aplikácia metóda PROMETHEE I
+ indifferenceThreshold,gaussParameter,criteriaWeights,criteriaMinMax)
$P
      USA Nemecko Austrália Rakúsko Belgicko Česká republika Dánsko Fínsko Francúzsko Južná Kórea
USA      0      0      0      0      1      1      0      0      1      1
Nemecko  0      0      0      0      1      1      0      0      1      1
Austrália 1      1      0      1      1      1      0      1      1      1
Rakúsko  0      1      0      0      1      1      0      0      1      1
Belgicko  0      0      0      0      0      1      0      0      1      0
Česká republika 0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
Dánsko  1      1      0      1      1      1      1      0      1      1
Fínsko   0      1      0      1      1      1      1      0      1      1
Francúzsko 0      0      0      0      0      0      0      0      0      0
Južná Kórea 0      0      0      0      0      1      0      0      0      0
Holland  0      0      0      0      1      1      0      0      1      1
Anglicko  0      0      0      0      1      1      0      0      1      0
Írsko    0      0      0      0      1      1      0      0      1      0
Izrael   0      0      0      0      0      0      0      0      0      0

```

```

> PROMETHEEII(performanceTable, preferenceFunction,preferenceThreshold, # aplikácia metóda PROMETHEE II
+ indifferenceThreshold,gaussParameter,criteriaWeights,
+ criteriaMinMax)
[[1]]
[1] "Nórsko"

[[2]]
[1] "Kanada"

[[3]]
[1] "Austrália"

[[4]]
[1] "Luxembursko"

[[5]]
[1] "Dánsko"

[[6]]
[1] "Fínsko"

[[7]]
[1] "USA"

```

Zdroj: vlastné výpočty v Rstudio

Obrázok 5 Metódy triedy PROMETHEE

```

> preferenceIndices<-PROMETHEEPreferenceIndices(performanceTable, preferenceFunction,
+ preferenceThreshold,indifferenceThreshold,
+ gaussParameter,criteriaWeights,
+ criteriaMinMax) # výpočet indexov viakrit. preferencie
>
> outrankingFlows<-PROMETHEEOutrankingFlows(performanceTable, preferenceFunction,
+ preferenceThreshold,indifferenceThreshold,
+ gaussParameter,criteriaWeights,
+ criteriaMinMax) # výpočet výstupných a vstupných tokov
> outrankingFlows
SoutrankingFlowsPos
  USA Nemecko Austrália Rakúsko Belgicko Česká republika Dánsko
0.40087255 0.29845833 0.41527451 0.34964216 0.24912745 0.18764461 0.43148039
  Fínsko Francúzsko Južná Kórea Holand Anglicko Írsko Izrael
0.40048284 0.18181373 0.27794118 0.29105392 0.27303922 0.26647549 0.19693627
  Švédsko Svajčiarsko Japonsko Kanada Luxembursko Nórsko Estónsko
0.36372549 0.35538725 0.25796569 0.45141422 0.44618137 0.44705882 0.32479167
  Španielsko Taliansko Kolumbia Lotyšsko Litva Maďarsko Poľsko
0.19512010 0.15835784 0.19030882 0.20672059 0.21378186 0.06424265 0.12367402
  Portugalsko Slovensko Slovinsko Čile Turecko Grécko
0.15813725 0.07916422 0.17514951 0.21410784 0.11780147 0.14879412

SoutrankingFlowsNeg
  USA Nemecko Austrália Rakúsko Belgicko Česká republika Dánsko
0.16719608 0.14461275 0.10070588 0.14437500 0.20637745 0.26383333 0.14203431
  Fínsko Francúzsko Južná Kórea Holand Anglicko Írsko Izrael
0.13639706 0.25079167 0.25406373 0.17528922 0.19089216 0.16622059 0.31961520
  Švédsko Svajčiarsko Japonsko Kanada Luxembursko Nórsko Estónsko
0.15073529 0.16652941 0.21113235 0.11410049 0.13678431 0.09877451 0.23316176
  Španielsko Taliansko Kolumbia Lotyšsko Litva Maďarsko Poľsko
0.24749510 0.27758333 0.61777696 0.38637745 0.35887500 0.50895098 0.38938480
  Portugalsko Slovensko Slovinsko Čile Turecko Grécko
0.32493137 0.43401225 0.26737255 0.41750000 0.57365441 0.33459069

> outrankingFlowsNet<-outrankingFlows[["outrankingFlowsPos"]]-outrankingFlows[["outrankingFlowsNeg"]] # výpočet celkových tokov
> overallScore<-sort(outrankingFlowsNet, decreasing = TRUE) # výsledné zoradenie podľa klesajúcich hodnôt celkových tokov
> overallScore
  Nórsko Kanada Austrália Luxembursko Dánsko Fínsko USA
0.34828431 0.33731373 0.31456863 0.30939706 0.28944608 0.26408578 0.2367647
  Švédsko Rakúsko Svajčiarsko Nemecko Holand Írsko Estónsko
0.21299020 0.20526716 0.18885784 0.15384559 0.11576471 0.10025490 0.09162990
  Anglicko Japonsko Belgicko Južná Kórea Španielsko Francúzsko Česká republika
0.08214706 0.04683333 0.04275000 0.02387745 -0.05237500 -0.06897794 -0.07618873
  Slovinsko Taliansko Izrael Litva Portugalsko Lotyšsko Grécko
-0.09222304 -0.11922549 -0.12267892 -0.14509314 -0.16679412 -0.17965686 -0.18579657
  Čile Poľsko Slovensko Kolumbia Maďarsko Turecko
-0.20339216 -0.26571078 -0.35484804 -0.42746814 -0.44470833 -0.45585294

```

Zdroj: vlastné výpočty v Rstudio

3. ZÁVER

V príspevku sme sa zamerali na možnosti aplikácie metód MADM v prostredí R s využitím knižnice *mcd*. Prezentovali sme známe metódy WSA, TOPSIS a metódy triedy PROMETHEE, ktoré vychádzajú z odlišných výpočtových princípov. Na ilustráciu týchto metód sme využili prípadovú štúdiu zameranú na hodnotenie výkonnosti krajín OECD s ohľadom na sociálne a environmentálne aspekty. Pozornosť sme však nesústredili na získané výsledky, zoradenie a vyhodnotenie krajín, ale zámerom bolo poukázať na špecifiká a možnosti aplikácie vybraných metód MADM v prostredí R.

Použitá literatúra

1. ARSU, T., AYCIN, E. 2021. Evaluation of OECD Countries with Multi-Criteria Decision-Making Methods in terms of Economic, Social and Environmental Aspects. *Operational Research in Engineering Sciences: Theory and Applications*. 4(55).
2. BIGARET, S., HODGETT, R.E., MEYER, P., MIRONOVA, T., OLTEANU, A.L. 2017. Supporting the Multi-Criteria Decision Aiding process: R and the MCDA package. *EURO Journal on Decision Processes*, 5(1-4), s. 169-194.
3. FURKOVÁ, A., IVANIČOVÁ, Z. (2017) *Viackriteriálne vyhodnocovanie alternatív*. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm.
4. MEYER, P., BIGARET, S., HODGETT, R. OLTEANU, A.L. 2023. *Support for the Multicriteria Decision Aiding Process*. Dostupné na <https://cran.r-project.org/web/packages/MCDA/MCDA.pdf> [17.04.2023].
5. PEKÁR J., FURKOVÁ, A. 2014. *Prípadové štúdie z viackriteriálneho rozhodovania*. Bratislava: Ekonóm, 168 s.

6. <https://CRAN.R-project.org/package=MCDA> [17.04.2023]

Kontaktné údaje

doc. Ing. Andrea Furková, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 831

Email: andrea.furkova@euba.sk

Peter Knížat, MSc.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421) 910412189

Email: peter.knizat@euba.sk

ENVIRONMENTÁLNE MODELY, ICH STRUČNÝ PREHĽAD, DRUHY TÝCHTO MODELOV A ICH ROZDELENIE DO SKUPÍN

ENVIRONMENTAL MODELS, THEIR BRIEF OVERVIEW, THE TYPES OF THESE MODELS AND THEIR DIVISION INTO GROUPS

Pavel Gežík

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá environmentálnym modelovaním v ekonomike a jeho významom v súčasnej dobe. Environmentálne modelovanie sa snaží integrovať environmentálne aspekty do ekonomických modelov a analyzovať ich vzájomné interakcie. Existuje viacero prístupov k environmentálnemu modelovaniu, vrátane ECO-ECO modelov, ktoré zahŕňajú nielen ekonomické, ale aj ekologické ciele. Tieto modely majú významný vplyv na politiky ochrany životného prostredia a udržateľného rozvoja. Modely trvalo udržateľného rozvoja sa zameriavajú na integrovanie environmentálnej udržateľnosti do ekonomických politík, zatiaľ čo modely kruhového hospodárstva sa zaoberajú obnoviteľnosťou a znovupoužívaním zdrojov. Existuje aj skupina modelov spojených s ochranou prírody. Tento príspevok tiež rozdeľuje environmentálne modely do skupín na základe ich oblasti využitia a jednoznačnosti environmentálneho aspektu.

Kľúčové slová: *Environmentálne modelovanie, Eco-Eco model, Kruhové hospodárstvo, Reverzná logistika, Ochrana prírody*

Abstract

The paper deals with environmental modeling in the economy and its importance in the present time. Environmental modeling tries to integrate environmental aspects into economic models and analyze their mutual interactions. There are several approaches to environmental modeling, including ECO-ECO models, which include not only economic but also ecological objectives. These models have a significant impact on environmental protection and sustainable development policies. Sustainable development models focus on integrating environmental sustainability into economic policies, while circular economy models deal with the renewability and reuse of resources. There is also a group of models associated with nature conservation. This paper also divides environmental models into groups based on their area of use and the clarity of the environmental aspect.

Keywords: *Environmental modeling, Eco-Eco model, Circular economy, Reverse logistics, Nature protection*

1 ÚVOD

Environmentálne modely, resp. environmentálne modelovanie v ekonomike je tak široký pojem, že v princípe pokrýva akýkoľvek proces tvorby modelu, ktorý zohľadňuje environmentálny aspekt a to priamo, alebo nepriamo. Napr. aj minimalizácia prejazdených km neobsahuje priamo environmentálny aspekt ale „menej km = menej emisií“ alebo minimalizácia odpadu pri výrobe je hlavne ekonomická úloha, ktorej cieľom je znížiť náklady na výrobu a eliminovať tak materiálne zdroje, ktoré by skončili ako odpad.

Model je podľa mnohých definícií len zjednodušenie obrazu reality (Fábry, 2011) a aj keď je vždy nutné stanoviť pri modelovaní cieľ, resp. predovšetkým vymedzenie hlavných aspektov a vzťahov daného procesu (Brezina, Pekár, 2018), nie je to vždy možné. Tvorca modelu si nie vždy musí uvedomiť všetky aspekty.

Práve uvedená skutočnosť značne komplikuje vymedzenie pojmu environmentálne modelovanie a faktom ostáva, že skoro akékoľvek modelovanie ekonomickej situácie možno skúmať aj z environmentálneho pohľadu. Práve toto je dôvod, prečo sa v ostatnej dobe začal používať pojem ECO-ECO modelovanie. Pojem ECO-ECO vychádza z modelového prístupu „Eco-Eco Models“, teda z anglického označenia eco(nomy)-eco(logy), teda ekonomicko-ekologický model (Lifset and Lombardi, 1997). Jedná sa o modely ekonomických situácií, ktoré riešia nie len ekonomické, ale aj ekologické ciele. Práve ekologický aspekt týchto modelov je často podmienený legislatívou, ktorú musia subjekty trhu spĺňať alebo spoločenské nároky, ktoré sú vyžadované v dnešnej dobe.

2 ENVIRONMENTÁLNE EKONOMICKÉ MODELY

ECO-ECO modely sa snažia zachytiť komplexné vzťahy medzi ekonomikou a životným prostredím a skúmať ich vzájomné interakcie. V článku Lifset a Lombardi argumentujú, že tradičné ekonomické modely a prístupy často nezohľadňujú dostatočne environmentálne faktory a ich dopad na ekonomiku a spoločnosť. Eco-Eco Models sa snažia vyplniť túto medzeru tým, že integrujú environmentálne premenné a dôsledky do ekonomických modelov a analýz. Je kladený dôraz na dôležitosť integrovaného prístupu k analýze a riadeniu environmentálnych a ekonomických problémov, čo je základným aspektom Eco-Eco Models. Týmto spôsobom poskytujú tieto modely rámec a základ pre budúce výskumy v oblasti environmentálneho modelovania a jeho využitia v politikách ochrany životného prostredia a udržateľného rozvoja.

Z uvedeného je teda zrejme, že aj keď mnohé ekonomické modely obsahujú svoje „skryté“ environmentálny aspekt, tak je to nepostačujúce a treba ho tam vždy ozrejmiť a najmä zohľadniť v rozhodovaní.

Práve v súvislosti vzniká pojem kruhové, alebo cirkulárne hospodárstvo (Stahel, 2016). Aj keď, ako bolo uvedené, aj modelovanie z oblasti klasickej ekonomickej teórie, teda modelovanie, ktoré sa zakladá na princípoch trhovej ekonomiky a predpokladá, že trh je schopný nájsť rovnováhu medzi ponukou a dopytom môže byť samo o sebe aj s ohľadom na environmentálny aspekt, nemusí tomu tak byť vždy. Faktom ostáva, že stále je tu „neviditeľná ruka trhu“ Adama Smitha, ktorá s uvedomelosťou na environmentálny aspekt na strane dopytu môže veľa zmeniť, realita je taká, že to nie vždy funguje a musí do toho vstúpiť štát.

Z toho dôvodu na zavedenie práve ekologického prístupu do modelovania ekonomických procesov slúži istý spoločenský tlak na ekologické uvažovanie pri optimalizácii procesov. Uvedený spoločenský tlak je obsiahnutý v legislatíve, ktorá upravuje množstvo skutočností spojených s optimalizáciou a teda s využívaním ECO-ECO prístupu. Práve legislatíva Európskej únie (EÚ) je často spomínaná základný rámec pri tvorbe ECO-ECO modelov a preto predstavuje základ pre zavádzanie ekologických cieľov do ekonomicky orientovaných procesov.

Tento prístup je pomerne častý pri modeloch transportu, resp. pri modeloch, ktoré riešia najkratšie cesty sa jedná najmä o legislatívu spojenú s ochranou ovzdušia a emisiami. Alebo pri modeloch, ktoré riešia materiálovú náročnosť, kedy je preferované riešenie využívajúce recykláciu materiálov a produktov.

A práve týchto oblastiach je najviac citelné a najčastejšie využívané environmentálnemu modelovanie, zoskupené pod pojmom reverzná logistika (Dekker, 1997). Na začiatku tieto modely riešili problematiku riadenia výroby a zásob s ohľadom na recykláciu a opätovné využitie produktov. Použitie termínu "reverzná logistika" v tomto kontexte sa týkalo riadenia toku materiálov a produktov späť v reťazci dodávateľa po ich spotrebe alebo použití a tak sa k tomu pridali aj úlohy transportu. Reverzná logistika definovaná ako súbor činností, ktoré sú spojené s riadením a optimalizáciou toku materiálov, informácií a finančných prostriedkov od koncových miest použitia späť k miestam ich pôvodného vzniku s cieľom dosiahnuť znovupoužitie, recykláciu alebo správne nakladanie s odpadom. Modelovanie v reverznej logistike je vždy spájané s environmentálnym aspektom, a teda eliminuje problém, ktorý bol spomenutý vyššie (Fleischmann, 2001) a často aj reprezentovaný kvantitatívnymi modelmi, ktoré podporujú rozhodovanie v reverznej logistike (Dekker and Fleischmann, 2004)

Asi najsilnejšie sa environmentálny aspekt v ostatnej dobe dostal do modelov trvalo udržateľného rozvoja (Karl-Henrik, 2002). Tie sa zameriavajú na integrovanie environmentálnej udržateľnosti do ekonomických politík a rozhodovania. Ich cieľom je dosiahnuť rovnováhu medzi ekonomickým rastom, sociálnym rozvojom a ochranou životného prostredia. Tieto modely zohľadňujú negatívne environmentálne dôsledky ľudskej činnosti a snažia sa minimalizovať degradáciu ekosystémov, stratu biodiverzity, znečistenie vzduchu a vody, zmenu klímy a vyčerpanie prírodných zdrojov. V rámci týchto modelov sa hodnotia environmentálne náklady a prínosy, presadzujú sa environmentálne politiky a vytvárajú sa ekonomické stimuly na ochranu životného prostredia. Okrem toho sa vyvíjajú ekonomické nástroje, ako sú ekologické dane, obchodovanie s emisiami a dotácie, ktoré podporujú udržateľné správanie podnikov a jednotlivcov.

Spomenuté modely sa odlišujú od tradičných modelov tým, že sa zameriavajú na obnoviteľnosť, znovupoužívanie a recykláciu zdrojov s cieľom znížiť spotrebu a produkciu odpadu. Tieto modely sa sústreďujú na efektívny návrh výrobkov, ich opravu, predĺženie životnosti a hľadanie nových možností využitia. Zaoberajú sa aj recykláciou a obnoviteľnými zdrojmi, pričom sa snažia znovu využiť materiály a zdroje z odpadu. Modely kruhového hospodárstva tiež podporujú zdieľanie dopravných prostriedkov, rekonštrukciu výrobkov, návrh pre recykláciu, obchodovanie s odpadom a rozšírenú zodpovednosť výrobcov.

Oba tieto prístupy majú spoločný cieľ dosiahnuť udržateľný rozvoj a minimalizovať negatívne environmentálne vplyvy hospodárskej činnosti. Modely trvalo udržateľného rozvoja sa sústreďujú na integrovanie environmentálnej udržateľnosti do ekonomických politík a rozhodovania, zatiaľ čo modely kruhového hospodárstva sa zameriavajú na obnoviteľnosť, znovupoužívanie.

3 PREHĽAD ENVIRONMENTÁLNYCH MODELOV A ICH ZÁKLADNE ROZDELENIE DO SKUPÍN

Prelínanie sa rôznych aspektov ekonomickom modelovaní spôsobuje problém nájdenia jednoznačnosti správneho rozdelenia environmentálnych modelov do skupín. Hlavné členenie ale vychádza z oblasti využitia a najmä z jednoznačnosti environmentálneho aspektu pri tvorbe modelu. Prvá skupina je tvorená modelmi trvalo udržateľného rozvoja, ktoré vzhľadom na aktuálnu spoločenskú situáciu sú jednoznačne najviac diskutovanou témou. Druhá skupina je tvorená modelmi kruhového hospodárstva a reverznej logistiky. Táto skupina ma rovnako jednoznačnú prítomnosť environmentálneho aspektu, avšak jedná sa často o klasické modely, ktoré vznikali najmä na základe ekonomického aspektu. Tretia skupina, modely spojené s ochranou prírody predstavuje skupinu modelov, ktoré vznikajú hlavne na základe zohľadnenia environmentálne aspektu modelovania nielen ekonomických procesov.

3.1 Modely trvalo udržateľného rozvoja

Environmentálny aspekt v modeloch trvalo udržateľného rozvoja sa zaoberá zachovaním a ochranou životného prostredia v súvislosti s ekonomickým rastom a sociálnym rozvojom. Tieto modely sa snažia integrovať environmentálnu udržateľnosť do ekonomických politík a rozhodovania s cieľom dosiahnuť dlhodobú prosperitu a životaschopnosť planéty.

Takéto modely zohľadňujú vplyvy ľudskej činnosti na prírodu, ako je degradácia ekosystémov, strata biodiverzity, znečistenie vzduchu a vody, zmenu klímy a vyčerpanie prírodných zdrojov. Snažia sa identifikovať spôsoby, ako minimalizovať negatívne environmentálne dôsledky hospodárskej činnosti a podporovať udržateľné riešenia.

Modely trvalo udržateľného rozvoja v oblasti ekonómie a životného prostredia sa zameriavajú na hodnotenie environmentálnych nákladov a prínosov, presadzovanie environmentálnych politík, vytváranie ekonomických stimulov na ochranu životného prostredia a podporu ekologicky šetrných technológií a inovácií. Taktiež sa snažia vytvoriť ekonomické nástroje, ako sú ekologické dane, obchodovanie s emisiami a dotácie, ktoré podporujú udržateľné správanie podnikov a jednotlivcov.

Cieľom týchto modelov je dosiahnuť rovnováhu medzi ekonomickým rastom, sociálnym rozvojom a ochranou životného prostredia. Sú navrhnuté s ohľadom na udržateľné využívanie prírodných zdrojov, minimalizáciu environmentálneho znečistenia a dosiahnutie dlhodošej životaschopnosti planéty pre súčasné a budúce generácie.

Modely trvalo udržateľného rozvoja je hlavná skupina modelov, ktorá sa zameriava na hľadanie rovnováhy medzi ekonomickým rastom a ochranou životného prostredia. Analyzuje náklady a prínosy environmentálnych rozhodnutí a slúži ako nástroj pre efektívne riadenie prírodných zdrojov a udržateľný rozvoj. Tu sa najčastejšie jedná o pôvodné modely, ktoré sú doplnené o nové aspekty.

Modely environmentálnej účinnosti a environmentálneho efektu priamo nadväzujú na predchádzajúcu skupinu, resp. často sú to len rozvinuté predchádzajúce modely. Táto skupina modelov sa snaží merať a hodnotiť, ako efektívne ekonomika využíva zdroje a produkty s minimálnym environmentálnym dosahom.

Modely vyhodnocovania environmentálnej efektívnosti využívania zdrojov skúmajú, ako dosiahnuť rovnováhu medzi ekonomickým rastom a environmentálnou udržateľnosťou prostredníctvom zvyšovania efektívnosti využitia zdrojov a minimalizácie environmentálnych vplyvov. Tieto modely sú zväčša doplnené, resp. majú veľa spoločného s modelmi v oblasti kruhového hospodárstva.

Modely udržateľnej spotreby sa zaoberajú hodnotením a riadením spotreby takým spôsobom, aby bola udržateľná pre životné prostredie. Analyzuje vzťah medzi spotrebou, ekonomikou a životným prostredím a identifikuje spôsoby, ako pozitívne motivovať spotrebiteľov s v snahe minimalizovať negatívny vplyv spotreby na prírodné zdroje.

Modely preferovania obnoviteľných zdrojov analyzujú použitie obnoviteľných zdrojov a sleduje, ako efektívne a udržateľne sú tieto zdroje využívané v ekonomike. Tieto modely sú často spájané s modelmi vyhodnocovania účinnosti využívania zdrojov.

Modely ekologického zlomu sa snažia určiť bod, kedy ekonomika prestupuje z intenzívneho vyťažovania prírodných zdrojov a poškodzovania životného prostredia na udržateľnejší a menej závislý od týchto zdrojov spôsob hospodárenia.

Modely ekologického stropu zaoberajú určovaním hraníc a obmedzením environmentálnych záťaží, ktoré môže ekonomika znášať, ako napríklad maximálna emisná úroveň či obmedzenie vyčerpania prírodných zdrojov.

Modely prechodu na obnoviteľné zdroje energie (Renewable Energy Transition Model) - Tento model podporuje presun od fosílnych palív k obnoviteľným zdrojom energie, čím sa minimalizuje environmentálny vplyv a zvyšuje udržateľnosť energetického systému.

Modely environmentálnej externalizácie sa zameriavajú na kvantifikáciu a zahrnutie environmentálnych nákladov a výhod do ekonomických analýz a rozhodovacích procesov.

Modely efektívnosti spotreby ekologicky navrhnutých produktov riešia efektívnosť návrhov a vývoja ekologicky šetrných výrobkov, systémov a infraštruktúry s cieľom minimalizovať ich environmentálny odtlačok.

Modely ekologických inovácií sa zaoberá rozvojom nových technológií, produktov a služieb, ktoré majú nižší environmentálny odtlačok a prispievajú k udržateľnosti. Opäť sa jedná o skupinu modelov, ktorá je častejšie v kruhovom hospodárstve, v tejto časti sa jedná skôr o modely, ktoré sú riešené na makroekonomickej úrovni a hlavne vo vzťahu k rozhodnutiam štátu.

Modely environmentálnej správy, environmentálneho manažmentu a auditu skúmajú rôzne spôsoby riadenia a regulácie environmentálnych otázok, vrátane politík, právnych predpisov a inštitucionálnych rámcov. Pomáhajú firmám monitorovať a zlepšovať svoj environmentálny výkon, zvyšovať informovanosť o životnom prostredí a zabezpečovať súlad s environmentálnymi normami a predpismi.

Modely ekologických a zelených daní sa zameriavajú na využitie daňovej politiky štátu na stimuláciu environmentálne zodpovedného správania a internalizáciu environmentálnych nákladov do ekonomiky. Často posudzujú zavedenie environmentálne zameraných daní a poplatkov v ekonomických procesoch a zaoberajú sa aj stimulovaním podnikov a jednotlivcov tým, že vyhodnocujú náklady na environmentálne škody.

3.2 Modely kruhového hospodárstva a reverznej logistiky

Modely kruhového hospodárstva a reverznej logistiky sú prístupy, ktoré menia bežné modely hospodárska, ktoré vychádzajú z faktu, že po spotrebe prichádza tvorba odpadu a namiesto toho uplatňujú princípy obnoviteľnosti, znovupoužitia a recyklácie zdrojov. Tieto modely sú podobné ako modely predchádzajúce modely a majú rovnaké ciele a princípy.

Modely kruhového hospodárstva sa ale hlavne zameriavajú na zníženie spotreby a produkcie odpadu prostredníctvom efektívneho návrhu výrobkov, predĺženia ich životnosti, opravy a či hľadáním nového použitia. Zároveň sa ale venujú možnostiam, ak už nie je možná oprava a teda sa venujú recyklácii a obnoviteľným zdrojom. Tieto modely riešia získavanie a recykláciu materiálov a zdrojov z odpadu s cieľom znovu ich použiť v nových produktoch alebo procesoch. Zameriavajú sa aj na podporu obnoviteľných zdrojov energie.

Kruhové hospodárstvo je ale aj spojené so snahou o zmenu bežného hospodárstva a obsahuje modely, ktoré sa sústreďujú na poskytovanie služieb a výkonu produktov namiesto ich vlastníctva. Namiesto kúpy výrobku si spotrebiteľ zaplatí za využívanie služby, čo podporuje dlhšiu životnosť a lepšie využitie zdrojov. S uvedenou snahou o zmenu súvisia aj inovácie vo výrobe, dizajne a materiáloch, s cieľom vytvoriť produkty navrhnuté s ohľadom na ich budúce použitie, recykláciu a znovupoužitie.

Modely environmentálnej a zdieľanej dopravy podporujú používanie environmentálnej dopravy a zdieľanie dopravných prostriedkov v snahe o minimalizáciu efektu dopravy, či množstva vozidiel na cestách.

Modely obnovy, prerobenia a opätovného použitia riešia procesy na využívanie použitých výrobkov vo výrobe, a to či už ich prerobením, opravou alebo ak sa použité výrobky rekonštruované tak, aby boli opäť použiteľné.

Modely efektu recyklácie výrobkov a efektu recyklácie zdrojov riešia procesy tvorby výrobkov ohľadom na ich neskoršiu recykláciu a opätovné využitie materiálov.

Modely obchodovania s odpadom sú klasické modely, ktoré riešia obchodovanie so surovinami avšak prioritne zamerané na použité suroviny a odpad. Odpad z jednej firmy sa môže stať surovinou pre inú firmu, čím sa minimalizuje množstvo vytváraného odpadu.

Modely rozšírenej zodpovednosti výrobcu zavádzajú zodpovednosť výrobcov za výrobky počas celého ich životného cyklu, vrátane zberu, recyklácie a správy odpadu.

Modely náhradných dielov vyhodnocujú efektívnosť využívania a poskytovania náhradných dielov a opráv výrobkov s cieľom predĺžiť ich životnosť a minimalizovať potrebu nových výrobkov.

Modely zavádzania ekologických inovácií vo výrobe súvisia rozvojom nových technológií, produktov a služieb, ktoré majú nižší environmentálny odtlačok a prispievajú k udržateľnosti.

Modely ekologického návrhu/dizajnu sa zaoberajú tvorbou návrhov a vývojom ekologicky šetrných výrobkov, systémov a infraštruktúry s cieľom minimalizovať ich environmentálny odtlačok.

Modely zdieľanej ekonomiky riešia problematiku zdieľania a využívania zdrojov medzi rôznymi používateľmi s cieľom maximalizovať ich využitie a minimalizovať potrebu nových výrobkov.

Modely servisných služieb výrobky posudzujú procesy, kedy sú výrobky ponúkané ako služby, čo znamená, že zákazníci nekupujú samotný výrobok, ale využívajú ho na základe prenájmu, údržby a aktualizácií.

Modely digitálneho hospodárstva predstavujú podklad na využívanie digitálnych technológií na optimalizáciu výrobných procesov, minimalizáciu odpadu a zlepšenie efektívnosti spotreby zdrojov.

3.3 Modely spojené s ochranou prírody

Tieto modely ochrany prírody predstavujú rôzne prístupy a nástroje, ktoré sa používajú na ochranu a udržateľné riadenie prírodných oblastí a biodiverzity. Sú to rôzne nástroje a stratégie, ktoré sa používajú na ochranu prírody, prírodných zdrojov a na riadenie prírodných oblastí a biodiverzity.

Medzi tieto modely patria národné parky, ktoré zabezpečujú dlhodobú ochranu rozsiahlych prírodných oblastí a ich biodiverzity. Chránené krajinné oblasti kombinujú ochranu prírodných hodnôt s udržateľným využívaním krajiny. Biosférické rezervácie slúžia ako miesta pre skúmanie a testovanie udržateľného rozvoja. Prírodné rezervácie chránia jedinečné ekosystémy a vzácne druhy. Morské chránené oblasti zameriavajú sa na ochranu morských ekosystémov. Rezervácie biosféry UNESCO kombinujú ochranu prírody s udržateľným rozvojom. Pestovateľské rezervácie zachovávajú biodiverzitu a tradičné poľnohospodárske metódy.

Medzinárodné dohody a legislatíva zavádzajú opatrenia na ochranu konkrétnych oblastí alebo druhov na medzinárodnej úrovni. Tieto modely poskytujú rámcové nástroje a politiky na zachovanie prírodného dedičstva a udržateľný rozvoj v prospech budúcich generácií.

Klimatické modely slúžia na predpovedanie budúcich vývojov klímy a hodnotenie rôznych politík a opatrení týkajúcich sa zmiernovania klimatických zmien. Tieto modely integrujú informácie o ekonomických, energetických a environmentálnych aspektoch, aby poskytli komplexný pohľad na problematiku klímy.

Modely ochrany chránených krajinných oblastí sú stratégie a opatrenia, ktoré sa používajú na ochranu prírodných, ekologicky cenných a zraniteľných oblastí v krajinách. Tieto modely zahŕňajú vytvorenie národných parkov, prírodných rezervácií, chránených krajinných oblastí a podobne. Ich cieľom je zachovať biodiverzitu, ekosystémové služby a kultúrne dedičstvo týchto oblastí, a zabezpečiť udržateľné využívanie zdrojov a riadenie ľudských aktivít, aby sa minimalizoval negatívny vplyv na prírodu. Modely ochrany chránených krajinných oblastí zahŕňajú pravidlá a obmedzenia, monitorovanie a riadenie, edukáciu verejnosti a spoluprácu s miestnymi komunitami a zainteresovanými stranami.

Modely ochrany ovzdušia sú súborom opatrení, technológií a predpisov navrhnutých na minimalizáciu znečistenia vzduchu a zlepšenie jeho kvality. Tieto modely sa zameriavajú na obmedzenie emisií znečisťujúcich látok, monitorovanie a hodnotenie kvality ovzdušia, edukáciu verejnosti a medzinárodnú spoluprácu. Ich cieľom je zabezpečiť čistý a zdravý vzduch pre obyvateľov a ochranu životného prostredia.

Modely ochrany vodných zdrojov sa zaoberajú hodnotením a riadením vodných zdrojov s cieľom zachovať ich kvalitu a dostupnosť pre súčasné aj budúce generácie. Modely analyzujú vplyv environmentálnych faktorov a ľudských aktivít na vodné zdroje a navrhuje opatrenia na ich ochranu.

Modely ochrany pôdy pred znečistením a stratou kvality riešia minimalizáciu a prevenciu znečistenia pôdy. Tieto modely zahŕňajú monitorovanie kvality pôdy, kontrolu používania chemických látok v poľnohospodárstve a priemysle, správu odpadov, úpravu využívania pôdy a podporu udržateľných poľnohospodárskych a lesných praktík. Ich cieľom je ochrániť pôdu pred toxickými chemikáliami, ťažkými kovmi a inými znečisťujúcimi látkami a zachovať jej živiny, štruktúru a biodiverzitu.

Modely ochrany biodiverzity majú za cieľ posúdiť hodnotu biodiverzity a predpovedať jej vývoj. Zohľadňujú environmentálne, ekonomické a sociálne faktory, aby navrhol opatrenia na ochranu biodiverzity a udržateľné využívanie biologických zdrojov.

Modely hospodárenia ekosystémov sa zaoberajú hodnotením a správou ekosystémov a ich služieb pre ľudskú spoločnosť. Skúma vzťah medzi biodiverzitou, ekosystémami a ekonomikou, aby lepšie porozumel vzájomným vzťahom a prínosom, ktoré ekosystémy poskytujú.

4 ZÁVER

Environmentálne modelovanie a jeho integrácia do ekonomických procesov sú v súčasnej dobe veľmi dôležité a aktuálne témy. Modely, ktoré zohľadňujú environmentálny aspekt, poskytujú možnosť lepšieho porozumenia vzťahu medzi ekonomikou a životným prostredím a skúmania ich vzájomných interakcií. Tieto modely sa snažia integrovať environmentálne premenné a dôsledky do ekonomických analýz a poskytujú základ pre výskum v oblasti environmentálneho modelovania a politík ochrany životného prostredia. Kruhové hospodárstvo a reverzná logistika sú príkladmi oblastí, kde je environmentálny aspekt neoddeliteľnou súčasťou modelovania.

Modelovanie trvalo udržateľného rozvoja, ktoré sa zameriava na integrovanie environmentálnej udržateľnosti do ekonomických politík a rozhodovania, s cieľom minimalizovať degradáciu ekosystémov, znečistenie vzduchu a vody, stratu biodiverzity, zmenu klímy a vyčerpanie prírodných zdrojov, je nie len súčasťou problematikou, ale v budúcnosti stane hlavnou problematikou v ekonomickom rozhodovaní. S narastajúcim povedomím o environmentálnych problémoch a potrebou udržateľného rozvoja sa očakáva, že modely s environmentálnym aspektom budú ešte dôležitejšie.

Snaha minimalizovať negatívne environmentálne vplyvy a dosiahnuť rovnováhu medzi ekonomickým rastom, sociálnym rozvojom a ochranou životného prostredia, bude hlavným pilierom moderných trendov v oblasti modelovania ekonomických procesov. Z toho dôvodu sa začnú využívať ekonomické nástroje, ako sú ekologické dane a dotácie, na podporu udržateľného správania. Už existujúce legislatívy budú ešte viac dbať na neustále zaradovanie environmentálneho aspektu do rozhodovania. A v neposlednom rade sa zmení aj marketing spojený so spoločenským aspektom rozhodovania. Je dôležité riešiť environmentálnu problematiku a integrovať aj do politík štátov a firiem, ako hlavných subjektov trhu. Súčasná spoločenská situácia, legislatíva a potreba dosiahnuť udržateľný rozvoj vytvárajú tlak na zohľadnenie environmentálnych faktorov vo všetkých oblastiach. Environmentálne modelovanie poskytuje rámec a nástroje pre výskum a rozhodovanie s cieľom minimalizovať negatívne vplyvy na životné prostredie a dosiahnuť udržateľnosť.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia výskumného projektu VEGA – 1/0120/23 „Environmentálne modely ako nástroj ekologicko-ekonomických rozhodnutí“.

Použitá literatúra

1. FÁBRY, J. 2011. Matematické modelování. Praha: Professional Publishing, 2011, 165 s.
2. BREZINA, I., PEKÁR, 2018. J. ÚVOD DO OPERAČNÉHO VÝSKUMU I., 2018, 134 s.
3. DEKKER, R. et al. 2004. Reverse Logistics. Berlin : Springer-Verlag, 2004. 436 s.
4. FLEISCHMANN, M. 2001. Quantitative models for reverse logistics. Rotterdam: Softcover, 2001. 181 s.
5. KARL-HENRIK, R. A framework for strategic sustainable development 2002. Journal of Cleaner Production, Volume 140, Part 1, 2017, 17-31 s.
6. LIFSET, R. a LOMBARDI, D. R. 1997. Who Should Pay? And Why? Some Thoughts on the Conceptual Foundations for the Assignment of Extended Producer Responsibility. Príspevok prezentovaný na OECD EPR Workshop, december 1997, Ottawa.
7. STAHEL, W. The circular economy. Nature 531, 435–438 (2016).

Kontaktné údaje

Ing. Pavel GEŽÍK, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

Tel: (421 2) 67 295 820

email: pavel.gezik@euba.sk

VYKUROVANIE BYTOV PLYNOM A TUHÝM PALIVOM – PRIESTOROVÁ ANALÝZA PRE OKRESY SLOVENSKA

HEATING OF DWELLINGS WITH GAS AND SOLID FUELS – SPATIAL ANALYSIS FOR THE SLOVAK DISTRICTS

Michaela Chocholatá¹

Abstrakt

Príspevok sa zaoberá priestorovou analýzou vykurovania bytov v okresoch Slovenska s dôrazom na najviac využívané zdroje vykurovania – plyn a pevné palivá. Je zrejmé, že využívanie „zelenších“ zdrojov vykurovania bytov na Slovensku je jednou z výziev pri uplatňovaní priority „nízkouhlíková a ekologickejšia Európa“. Analýza v príspevku vychádza z dát získaných na základe Sčítania obyvateľov, domov a bytov 2021, a to konkrétne z dát vypovedajúcich o štruktúre bytov podľa zdroja energie (plyn a pevné palivá) využívaného na vykurovanie v SR k 1. 1. 2021. Výsledky analýzy preukázali štatisticky významný vplyv polohy regiónu (okresu) v priestore na úroveň analyzovaného ukazovateľa a umožňujú tiež identifikáciu regiónov so štatisticky významným podobným, resp. odlišným profilom ako ich susedné regióny.

***Kľúčové slová:** nízkouhlíková a ekologickejšia Európa, okres, Slovensko, Sčítanie obyvateľov, domov a bytov 2021*

Abstract

The paper deals with the spatial analysis of heating of dwellings in the districts of Slovakia with an emphasis on the most used heating sources – gas and solid fuels. It is obvious that the use of "greener" sources of heating dwellings in Slovakia is one of the challenges in implementing the "low-carbon and greener Europe" priority. The analysis in the paper is based on data obtained on the basis of the 2021 Census of Population, Houses and Dwellings, specifically from data indicating the structure of dwellings according to the energy source (gas and solid fuels) used for heating in the Slovak Republic as of 1 January 2021. The results of the analysis showed statistically significant influence of the location of the region (district) in space on the level of the analysed indicator and also enable the identification of regions with statistically significant similar or a different profile than their neighbouring regions.

***Keywords:** low-carbon and greener Europe, district, Slovakia, 2021 Census of Population, Houses and Dwellings*

1 ÚVOD

Strategický dokument Európa 2020 (European Commission, 2012) obsahoval ako jednu zo základných priorít prioritu zameranú na životné prostredie. Táto priorita bola zameraná na udržateľný rast, podporu efektívnejšieho využívania zdrojov s cieľom dosiahnuť

¹ Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia grantových úloh VEGA 1/0047/23 „Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelenšia a bezuhlíková Európa“ a VEGA 1/0211/21 „Ekonometrická analýza makroekonomických dopadov vplyvu pandémie vo svete s dôrazom na vývoj ekonomík EÚ a zvlášť ekonomiky Slovenska“.

ekologickejšie a konkurencieschopnejšie hospodárstva. Aspekt ekológie (tzv. „zelený“ aspekt) zohľadňuje aj aktuálny rámec kohéznej politiky EÚ pre obdobie 2021-2027, ktorá je zameraná na päť investičných priorít – inteligentnejšia Európa, nízkouhlíková a ekologickejšia Európa, prepojenejšia Európa, sociálnejšia Európa a Európa bližšie k občanom (Euractiv, 2020). Vzhľadom na zameranie príspevku zameriame pozornosť na prioritu nízkouhlíková a ekologickejšia Európa.

Je zrejmé, že výrazným príspevkom k zlepšeniu kvality ovzdušia, vody či celkovo životného prostredia je zvýšenie energetickej efektívnosti a podpory obnoviteľných zdrojov energie (Euractiv, 2020). „Na národnej a medzinárodnej úrovni sú preto stanovené ambiciózne ciele zamerané na zníženie emisií CO₂ a na prechod od používania fosílnych palív k využívaniu obnoviteľných zdrojov energie. ... Ak chceme spomaliť zmenu klímy, musíme značne znížiť emisie CO₂.“ (Vejborg 2017, s. 2). „Dekarbonizácia a s ňou spojené znižovanie emisií skleníkových plynov je výzvou aj pre vykurovanie.“ (Energieportal, 2021). Významnú úlohu tu zohráva tiež priestorové hľadisko. Predpokladáme totiž, že čím bližšie sú regióny z hľadiska geografickej vzdialenosti, tým je pravdepodobnejšie, že sa navzájom budú ovplyvňovať aj v oblasti kvality životného prostredia.

Predmetom príspevku je priestorová analýza vychádzajúca z dát získaných na základe Sčítania obyvateľov, domov a bytov (SODB) 2021 (Sčítanie obyvateľov, domov a bytov, 2021a), a to konkrétne pozornosť sústredíme na dáta vypovedajúce o štruktúre bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie v SR k 1. 1. 2021 (Sčítanie obyvateľov, domov a bytov, 2021b). Po uvedení do problematiky, aké zdroje energie boli využívané na vykurovanie v jednotlivých krajoch SR, bude priestorová analýza zameraná na dva na Slovensku najviac využívané zdroje vykurovania – plyn a pevné palivá.

Štruktúra príspevku je nasledujúca: po úvode do problematiky v prvej časti, nasleduje časť venovaná metodológii týkajúcej sa analýzy priestorových dát (ESDA - Exploratory Spatial Data Analysis), v tretej časti sú popísané analyzované dáta a tiež empirické výsledky ESDA a príspevok uzatvára záver.

2 ANALÝZA PRIESTOROVÝCH DÁT

Prvým krokom analýzy priestorových dát je obvykle tzv. exploratórna analýza priestorových dát (ESDA), ktorá zvyčajne začína vizualizáciou analyzovaných dát pomocou rôznych grafov a máp. Nasleduje analýza priestorovej autokorelácie, ktorá odráža prepojenosť medzi regiónmi. V prípade prítomnosti priestorovej autokorelácie je potrebné túto skutočnosť zohľadniť. Priestorovú autokoreláciu možno vo všeobecnosti charakterizovať ako koreláciu premennej so sebou samou cez priestor, t.j. dáta z jedného regiónu môžu ovplyvňovať dáta z iného regiónu prostredníctvom efektov priestorového prelievania. Na zohľadnenie takýchto priestorových interakcií medzi regiónmi je potrebné špecifikovať maticu váh W (pre viac informácií pozri napr. Getis, 2010). Z pohľadu testov priestorovej autokorelácie hovoríme o globálnych a lokálnych štatistikách. Globálna štatistika nám poskytuje meranie globálnej priestorovej autokorelácie – je teda vyjadrená jedinou hodnotou, ktorá platí pre celý súbor dát, nedokáže však zachytiť lokálny priestorový vzor. Lokálne štatistiky zvyčajne posudzujú priestorovú autokoreláciu pre jednu konkrétnu priestorovú jednotku.

Najčastejšie používanou štatistikou na globálnej a lokálnej úrovni je globálna a lokálna Moranova I -štatistika (Furková, 2013). Veľmi populárnym je grafické znázornenie Moranovho rozptylového diagramu, ktorý obsahuje okrem hodnoty globálnej štatistiky aj hodnoty lokálnych štatistik a pozostáva zo štyroch kvadrantov, z ktorých dva zodpovedajú pozitívnej priestorovej autokorelácii (pravý vrchný a ľavý spodný) a dva zodpovedajú negatívnej priestorovej autokorelácii (pravý spodný a ľavý vrchný). Potvrdenie prítomnosti

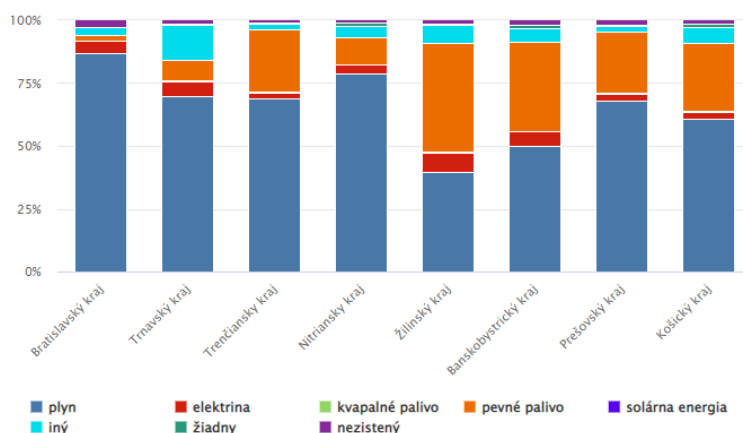
pozitívnej priestorovej autokorelácie v prípade konkrétneho regiónu znamená, že ide o „podobný“ región ako sú jeho susedné regióny. Analogicky, potvrdenie prítomnosti negatívnej priestorovej autokorelácie znamená, že daný región je „odlišný“ od svojich susedov. Na podrobnejšiu identifikáciu (v zmysle vizualizácie konkrétnych okresov) štatisticky významnej priestorovej autokorelácie a tiež na identifikáciu priestorových zhlukov možno využiť zhlukové mapy LISA (Local Indicators of Spatial Association).

3 DÁTA A EMPIRICKÉ VÝSLEDKY ANALÝZY

Predmetom príspevku je priestorová analýza dát o štruktúre bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie v SR k 1. 1. 2021 v okresoch SR s dôrazom na plyn a pevné palivá. Údaje boli získané z internetových stránok (Sčítanie obyvateľov, domov a bytov, 2021b) a na analýzu priestorových dát bol využitý voľne dostupný softvér GeoDa.

Výsledky SODB 2021 publikované Štatistickým úradom SR poukazujú na skutočnosť, že na Slovensku je plynom vykurovaných až 66,22 % bytov, nasleduje vykurovanie pevným palivom (21,32 % bytov), iný zdroj vykurovania používa 5,42 % bytov, elektrinou kúri 4,48 % bytov, pričom ďalšie zdroje vykurovania (kvapalné palivo, solárna energia, vrátane žiadnych a nezistených) sú jednotlivo zastúpené menším podielom ako 1,5 % bytov (Sčítanie obyvateľov, domov a bytov, 2021a).

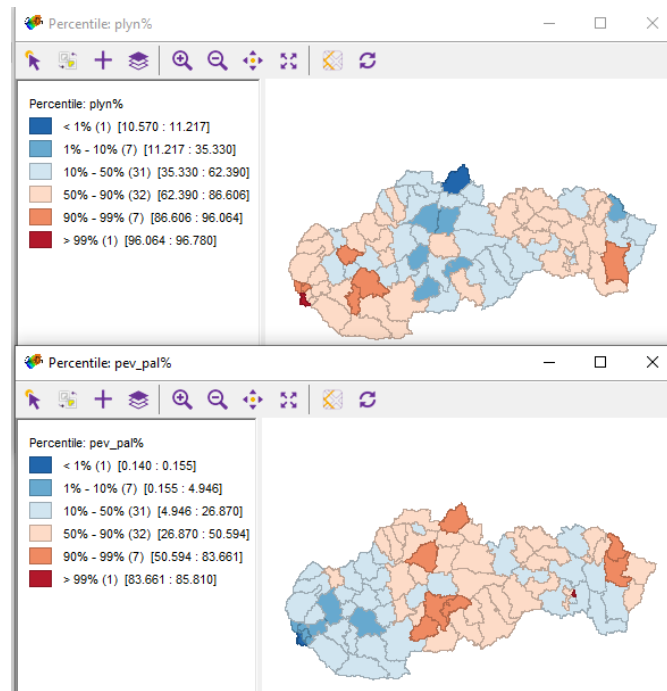
Pred analýzou na úrovni okresov ponúkame grafický pohľad na štruktúru bytov podľa zdroja energie na úrovni krajov (Obr.1). Je zrejmé, že najviac je využívané vykurovanie plynom v Bratislavskom kraji (86,91 %) a najmenej v Žilinskom kraji (39,67 %), kde prevláda vykurovanie pevnými palivami (43,36 %) a najvyšší je tiež podiel bytov vykurovaných elektrinou (7,46 %).



Obr.1: Štruktúra bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie vo všetkých krajoch SR k 1.1.2021. Zdroj: prevzaté z Sčítanie obyvateľov, domov a bytov (2021c)

Ďalej sa sústredíme na analýzu na úrovni okresov. Grafické znázornenie hodnôt analyzovaných ukazovateľov pomocou percentilových máp je na Obr.2, z ktorého sú zrejme značné disproporcie medzi jednotlivými okresmi SR.

Kým plynom sú vykurované byty predovšetkým v západnej a východnej časti Slovenska, vykurovanie plynom v okresoch stredného Slovenska je značne menšie (aj v dôsledku nižšej plynofikácie územia). Z hľadiska vykurovania pevným palivom majú najnižšie zastúpenie okresy v západnej časti Slovenska a čiastočne vo východnej časti Slovenska, hoci okres s najvyšším zastúpením vykurovania pevným palivom je okres Košice III. Okresy stredného Slovenska patria medzi okresy s vysokým podielom pevného paliva pri vykurovaní.

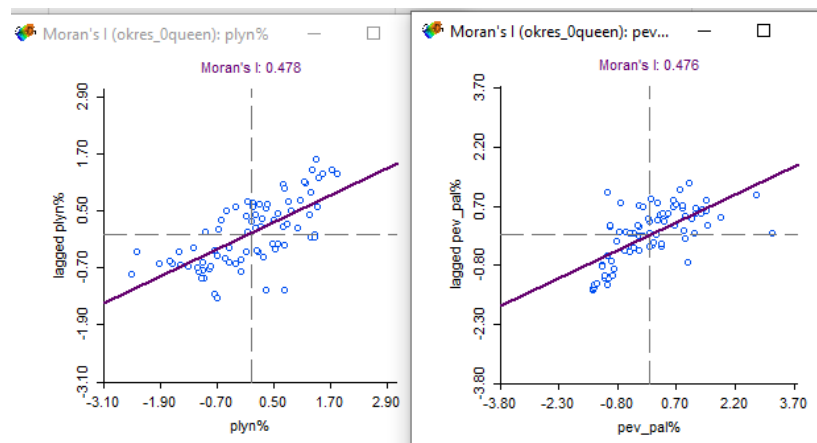


Obr.2: Percentilové mapy pre štruktúru bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie (plyn a pevné palivo, v %) pre okresy SR. Zdroj: vlastný výpočet v GeoDa

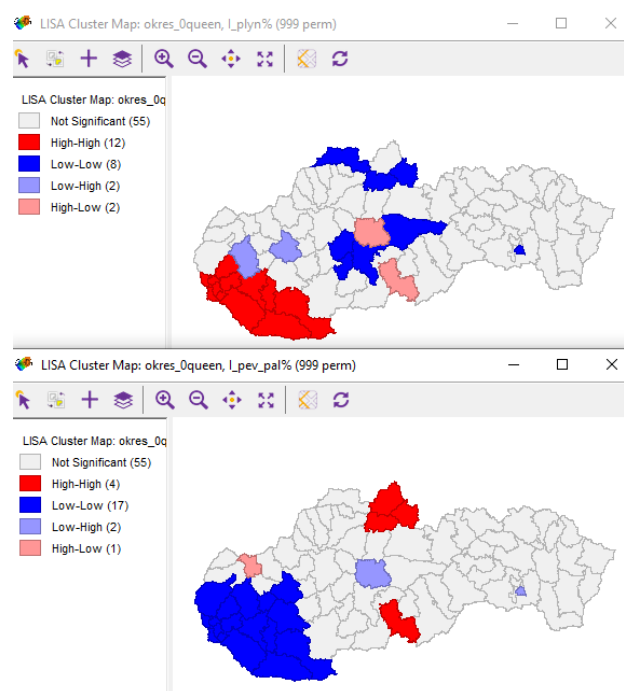
Na zohľadnenie priestorových interakcií medzi regiónmi budeme v tomto príspevku uvažovať s binárnou maticou váh W typu „kráľovná“, čo znamená, že za susedné budú považované tie regióny, ktoré majú aspoň jeden spoločný bod hranice. Hoci už na základe percentilových máp na Obr.2 je možné identifikovať tak priestorové zhluky, ako aj extrémne hodnoty (odľahlé hodnoty), tieto mapy však neposkytujú žiadne informácie o štatistickej významnosti zhlukov. Hodnoty globálnych Moranových I -štatistík vo výške 0,478 (vykurovanie plynom) a 0,486 (vykurovanie pevným palivom) na Obr.3 poukazujú na prítomnosť globálnej pozitívnej priestorovej autokorelácie. Grafické znázornenie hodnôt lokálnych Moranových I -štatistík vo vyššie spomenutých rozptylových diagramoch (Obr.3) poukazuje vo väčšine okresov na prítomnosť pozitívnej priestorovej autokorelácie typu „vysoká – vysoká“, resp. „nízka – nízka“, a teda na podobnosť navzájom susedných regiónov.

Ďalšie cenné informácie o type priestorovej asociácie medzi jednotlivými okresmi poskytujú zhlukové mapy LISA (Obr.4). Štatisticky významná pozitívna priestorová autokorelácia typu „vysoká – vysoká“ bola v prípade analýzy percentuálneho zastúpenia bytov vykurovaných plynom potvrdená pre 12 okresov lokalizovaných v južnej časti západného Slovenska a typu „nízka – nízka“ pre 8 okresov lokalizovaných väčšinou v strednej časti Slovenska (7 okresov), resp. v prípade jedného okresu na východnom Slovensku. Ako štatisticky významné okresy vykazujúce negatívnu priestorovú autokoreláciu boli identifikované 4 okresy, a to po dva z každého typu negatívnej priestorovej autokorelácie („nízka – vysoká“, resp. „vysoká – nízka“). Vzhľadom na to, že plyn a pevné palivo predstavujú dva najviac zastúpené zdroje energie využívané na vykurovanie bytov na Slovensku, je zrejmé, že okresy s vysokými percentuálnymi podielmi bytov vykurovanými plynom sú zároveň okresmi s nižšími percentuálnymi podielmi bytov vykurovanými pevným palivom (ako je zrejmé napr. aj z percentilových máp na Obr. 2). Výsledky získané analýzou percentuálneho zastúpenia bytov vykurovaných pevným palivom potvrdzujú pre 17 okresov lokalizovaných v južnej časti západného Slovenska prítomnosť štatisticky významnej pozitívnej priestorovej autokorelácie typu „nízka – nízka“. Štatisticky významná pozitívna priestorová autokorelácia typu „vysoká – vysoká“ bola potvrdená pre 4 okresy na severe, resp. juhu stredného Slovenska. Zhluková

mapa umožňuje tiež identifikovať 3 okresy so štatisticky významnou negatívnou priestorovou autokoreláciou obidvoch typov.



Obr.3: Moranove rozptylové diagramy pre štruktúru bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie (plyn a pevné palivo) pre okresy SR. Zdroj: vlastný výpočet v GeoDa



Obr.4: Zhlukové mapy LISA pre štruktúru bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie (plyn a pevné palivo) pre okresy SR. Zdroj: vlastný výpočet v GeoDa

4 ZÁVER

V príspevku sme sa venovali priestorovej analýze vybraných ukazovateľov SODB 2021 v SR, a to analýze štruktúry bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie. Na základe výsledkov SODB 2021 je zrejmé, že najčastejšími zdrojmi energie využívanými pri vykurovaní sú na Slovensku plyn a pevné palivo. Pre dáta vypovedajúce o vykurovaní bytov plynom a pevným palivom na úrovni okresov SR sme zrealizovali priestorovú analýzu vychádzajúcu z percentilových máp poukazujúcu na oblasti Slovenska, kde sa byty vykurojú prevažne plynom, resp. pevným palivom. Na báze hodnôt globálnych i lokálnych Moranových *I*-štatistík bolo možné prijať záver nielen o prítomnosti globálnej pozitívnej

priestorovej autokorelácie, s využitím rozptylového diagramu a zhlukových máp LISA bolo možné tiež preskúmať previazanosť geograficky blízkych regiónov (priestorovú autokoreláciu) pre obidve analyzované premenné a konkrétne špecifikovať regióny so štatisticky významnou pozitívnou či negatívnou priestorovou autokoreláciou. Získané výsledky jednoznačne potvrdzujú štatisticky významný vplyv polohy regiónu v priestore na úroveň analyzovaného ukazovateľa, pričom upriamujú pozornosť na regióny, ktoré majú podobný profil ako ich susedné regióny. Z pohľadu znižovania emisií CO₂ zostáva pre Slovensko výzvou podpora, resp. dostupnosť alternatívnych zdrojov vykurovania bytov.

Použitá literatúra

1. ENERGIEPORTAL. 2021. *Pomôžu plynové kotly znížiť emisie CO₂? Vodík môže byť výhodné riešenie pre vykurovanie.* [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://www.energie-portal.sk/Dokument/pomozu-plynove-kotly-znizit-emisie-co2-vodik-moze-byt-vyhodne-riesenie-pre-vykurovanie-107032.aspx>
2. EURACTIV. 2020. [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://euractiv.sk/section/ekonomika-a-euro/video/%F0%9F%94%B4-nazivo-kohezna-politika-2021-az-2027/>
3. EUROPEAN COMMISSION. 2012. Consolidated versions of the Treaty on European Union and the Treaty on the Functioning of the European Union. *Official Journal of the European Union* 55, pp 1-390. [cit. 2015-02-15] Dostupné na internete: <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:C:2012:326:FULL:EN:PDF>
4. FURKOVÁ, A. 2013. Spatial dependence econometric models. *Ekonomika a informatika* 11(2), s. 41-52.
5. GETIS, A. 2010. *Spatial autocorrelation.* In: FISCHER, M.M. - GETIS, A. 2010. *Handbook of Applied Spatial Analysis. Software Tools, Methods and Applications.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
6. SČÍTANIE OBYVATEĽOV, DOMOV A BYTOV. 2021a. *Byty – Základné výsledky.* [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://www.scitanie.sk/byty/zakladne-vysledky/pocet-bytov-podla-zdroju-energie-vyuzivaneho-na-vykurovanie/SR/SK0/SR>
7. SČÍTANIE OBYVATEĽOV, DOMOV A BYTOV. 2021b. *Počet bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie vo všetkých okresoch SR k 1. 1. 2021.* [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://www.scitanie.sk/byty/zakladne-vysledky/pocet-bytov-podla-zdroju-energie-vyuzivaneho-na-vykurovanie/SR/SK0/OK>
8. SČÍTANIE OBYVATEĽOV, DOMOV A BYTOV. 2021c. *Počet bytov podľa zdroja energie využívaného na vykurovanie vo všetkých krajoch SR k 1. 1. 2021.* [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://www.scitanie.sk/byty/zakladne-vysledky/pocet-bytov-podla-zdroju-energie-vyuzivaneho-na-vykurovanie/SR/SK0/KR>
9. VEJBORG, C. 2017. *Energetické riešenia s využitím obnoviteľných zdrojov energie použiteľné v cirkevných a iných budovách.* [cit. 2023.04.30]. Dostupné na internete: <https://ec.europa.eu/programmes/erasmus-plus/project-result-content/5b1c12c6-c8c2-4a56-a90b-c3b1b0eb476e/U%C4%8Debница%20Energetick%C3%A9%20rie%C5%A1enia%20s%20vyu%C5%BEit%C3%ADm%20OZE.pdf>

Kontaktné údaje

doc. Ing. Michaela Chocholatá, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 832
email: michaela.chocholata@euba.sk

HEURISTICKÉ METODY MINIMALIZACE NDSS-AREA U DVOUKRITERIÁLNÍCH UMISŤOVACÍCH ÚLOH

HEURISTIC METHODS OF NDSS-AREA MINIMIZATION FOR BI- CRITERIA LOCATION PROBLEMS

Jaroslav Janáček, Marek Kvet

Abstrakt

Príspevek uvádí soubor heuristických metod založených na přímé minimalizaci plochy určené množinou nedominovaných řešení pro aproximaci Paretoovy fronty řešení dvou-kriteriální umisťovací úlohy.

KLúčové slová: p-lokační úloha, dvou-kriteriální umisťovací úloha, Paretova fronta, aproximace Paretovy fronty

Abstract

The contribution introduces a family of heuristic methods based on direct minimization of an area determined by a set of non-dominated solutions for approximation of Pareto front of bi-criteria location problem.

Keywords: p-location problem, bi-criteria location problem, Pareto front, approximation of Pareto front

1 ÚVOD

Vícekriteriální úlohy, zvláště úlohy s konfliktními kritérii, nemají žádné řešení, které by bylo možné označit jako optimální, protože zlepšení jednoho kritéria je zapláceno zhoršením jiného. Za použitelné řešení vícekriteriální úlohy můžeme považovat úplnou množinu nedominovaných řešení, kde za nedominované řešení označíme takové, ke kterému neexistuje jiné řešení lepší alespoň v jednom z kritérií a minimálně stejně dobré ve všech ostatních kritériích. Paretova fronta řešení úlohy tak může být východiskem pro další výběr konečného řešení zadavatelem úlohy. V tomto příspěvku se zabýváme třídou diskrétních umisťovacích úloh na množině uzlů dopravní sítě, kde řešení úlohy je určeno rozmístěním daného počtu náležitostí do některých z možných umístění. Uvažujeme zde, že počet možných umístění je konečný, a tak množina přípustných řešení umisťovací úlohy je také konečná a z toho plyne i konečnost Paretoovy fronty. Konečnost množiny přípustných řešení však zdaleka nezaručuje ani snadnou řešitelnost optimalizační umisťovací úlohy s jedním kritériem [1, 2, 5, 6, 7, 16, 20] natož pak výpočetně snadné nalezení celé Paretoovy fronty [9, 10, 11]. Z tohoto důvodu je velká pozornost věnovaná heuristickým přístupům, které jsou schopny v akceptovatelném výpočtovém čase poskytnout dobrou aproximaci Paretoovy fronty ve formě konečné množiny vzájemně nedominovaných řešení (NDSS) [8, 12]. V posledním období byla vyvinuta celá řada heuristických přístupů k určení aproximace Paretoovy fronty založených na skutečnosti, že je poměrně snadné rozhodnout o tom, zda dané řešení je dominováno některým z řešení obsaženým v současné NDSS a nebo, zda může tuto množinu nedominovaných řešení rozšířit. Využití tohoto aktualizacího procesu spolu s použitím algoritmu produkujícího řešení z okolí zvoleného zpracovávaného řešení umisťovací úlohy vedlo k postupu nazývanému postupné zjemňování aproximace Paretoovy fronty [13, 17, 18, 19]. Předchozí výzkum ukázal, že pro úspěšnost aktualizacího procesu v případě uvedené umisťovací úlohy s pevně určeným

počtem umístovaných náležitostí postačuje algoritmus zpracovávající okolí definované 1 – 1 výměnnou operací, kdy je prvek okolí definován pouze změnou umístění jediné náležitosti. Jádrem výzkumu v této oblasti dvou-kriteriálních umístovacích úloh se stalo určení lokálního kritéria, podle kterého se uskuteční aktualizace současného řešení přechodem k řešení z jeho okolí. Dosud byly porovnávány hodnoty lineární kombinace obou kritérií a přechod byl uskutečněn k tomu řešení, které vykazovalo menší hodnotu lineární kombinace obou kritérií [17].

V tomto příspěvku se budeme věnovat algoritmům prohledávajícím okolí, kde přechod k novému řešení bude podmíněn zlepšením kritéria blízkosti současné množiny nedominovaných řešení k exaktní Paretově frontě.

2 DOMINANCE ŘEŠENÍ DVOUKRITERIÁLNÍ UMISŤOVACÍ ÚLOHY

Obecnou dvou kriteriální umístovací úlohu s p náležitostmi na množině možných umístění indexovaných čísly $1, \dots, m$ je možno formulovat jako úlohu nalezení podmnožiny \mathbf{y} množiny $\{1, \dots, m\}$, která minimalizuje účelové funkce f_1 a f_2 . Množina všech přípustných řešení \mathbf{Y} je specifikovaná definicí (1).

$$\mathbf{Y} = \{ \mathbf{y} \subset \{1, \dots, m\}, |\mathbf{y}| = p \} \quad (1)$$

O řešení \mathbf{x} prohlásíme, že je dominováno řešením \mathbf{y} , pokud platí jednak $f_1(\mathbf{x}) \geq f_1(\mathbf{y})$ a současně $f_2(\mathbf{x}) \geq f_2(\mathbf{y})$ a dále $f_1(\mathbf{x}) \neq f_1(\mathbf{y})$ a nebo $f_2(\mathbf{x}) \neq f_2(\mathbf{y})$.

Paretova fronta PF pro dvou kriteriální umístovací úlohu s konfliktními kritérii f_1 a f_2 je množina řešení specifikovaná zápisem (2), kde \mathbf{Y} je množina všech unikátních řešení, tj. řešení pro která platí buď $f_1(\mathbf{x}) \neq f_1(\mathbf{y})$ a nebo $f_2(\mathbf{x}) \neq f_2(\mathbf{y})$.

$$PF = \{ \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{Y})(f_1(\mathbf{y}) < f_1(\mathbf{x}) \text{ nebo } f_2(\mathbf{y}) < f_2(\mathbf{x})) \} \quad (2)$$

Protože \mathbf{Y} je konečná množina, uvažovaná Paretova fronta bude též konečná množina vzájemně nedominovaných řešení, a proto každé unikátní řešení z \mathbf{Y} bude dominované alespoň jedním prvkem z PF .

Aproximace Paretovy fronty, kterou budeme označovat jako $NDSS$, bude množina vzájemně nedominovaných řešení $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{noNDSS}$ uspořádaných vzestupně podle hodnot f_2 , kde \mathbf{y}^1 je prvkem exaktní Paretovy fronty s nejmenší hodnotou f_2 a \mathbf{y}^{noNDSS} je také prvkem exaktní Paretovy fronty, ale s největší hodnotou f_2 , resp. s nejmenší hodnotou f_1 .

Blížkost aproximace Paretovy fronty a její aproximace může být měřena rozdílem ploch $NDSS_Area$ a PF_Area , kde podle [14], $NDSS_Area$ je plocha pod schodovitou klesající funkcí, jejíž hodnoty v bodech $f_2(\mathbf{y}^1), \dots, f_2(\mathbf{y}^{noNDSS-1})$ jsou postupně $f_1(\mathbf{y}^1), \dots, f_1(\mathbf{y}^{noNDSS-1})$ a kde plocha může být vyčíslena podle vztahu (3).

$$NDSS_Area = \sum_{k=1}^{noNDSS-1} (f_1(\mathbf{y}^k) - f_1(\mathbf{y}^{noNDSS})) (f_2(\mathbf{y}^{k+1}) - f_2(\mathbf{y}^k)) \quad (3)$$

Pokud je současná $NDSS$ udržovaná ve výše uvedeném tvaru, tak následující jednopřechodový algoritmus je pro libovolné přípustné řešení $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}$ schopen rozhodnout, zda řešení je dominováno některým z prvků současného $NDSS$ a nebo jestli je to řešení, které zlepší (zmenší) hodnotu $NDSS_Area$. Příslušný algoritmus $Update(NDSS, \mathbf{x})$ pracuje takto:

Urči maximální $k < noNDSS$ pro které platí $f_2(\mathbf{x}) \geq f_2(\mathbf{y}^k)$. Pokud $f_2(\mathbf{x}) \geq f_2(\mathbf{y}^{noNDSS})$, potom je \mathbf{x} dominováno řešením \mathbf{y}^{noNDSS} a je vyloučeno z aktualizace.

Jinak algoritmus pokračuje ověřením zda $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{y}^k)$. Pokud to platí, tak je \mathbf{x} dominováno řešením \mathbf{y}^k a je rovněž vyloučeno z dalšího zpracování. Pokud $f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{y}^k)$, tak je řešení \mathbf{x} vsunuto jako $k+1$ vé řešení do *NDSS*. Nakonec jsou probírána řešení $\mathbf{y}^{k+1}, \dots, \mathbf{y}^{noNDSS}$ a pokud $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{y}^i)$, tak je řešení \mathbf{y}^i vyloučeno z množiny *NDSS* a počet jejích prvků *noNDSS* je aktualizován.

3 METODA POSTUPNÉHO ZJEMŇOVÁNÍ

Základní postup podle metody postupného zjemňování [11, 16, 18] začíná s dvouprvkovou množinou *NDSS* obsahující pouze hraniční řešení z Paretoovy fronty. Dále jsou pro $k = 1, \dots, noNDSS-1$ probírány a zpracovávány dvojice $\mathbf{y}^k, \mathbf{y}^{k+1}$ za neustálé aktualizace množiny nedominovaných řešení *NDSS*. Pokud po zpracování dvojice $\mathbf{y}^k, \mathbf{y}^{k+1}$ zůstane \mathbf{y}^k nezměněné, posune se zpracovávaná dvojice o jedno umístění v současné *NDSS* k vyššímu indexu. Základní cyklus tohoto schématu skončí zpracováním dvojice $\mathbf{y}^{noNDSS-1}, \mathbf{y}^{noNDSS}$. Základní postup je opakován pro získanou *NDSS* od dvojice $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2$ dokud není vyčerpán výpočetní čas určený pro běh algoritmu. Vlastní zpracování dvojice $\mathbf{y}^k, \mathbf{y}^{k+1}$ může být realizováno více způsoby založenými na prozkoumávání okolí řešení \mathbf{y}^k .

Úplné zpracování okolí daného řešení včetně určení toho řešení z okolí, ke kterému algoritmus přejde v dalším kroku, je možno provést následujícím výměnným algoritmem, v kterém je vstupní řešení zpracovávané řešení \mathbf{y} reprezentované seznamem *sY* umístěných středisek daného řešení a dále komplementárním seznamem *sC* těch umístění, které nejsou prvky řešení \mathbf{y} . Tedy v poli *sY* na pozicích $0, \dots, p-1$ jsou indexy $i \in \mathbf{y}$ a v poli *sC* na pozicích $0, \dots, m-p-1$ jsou indexy z množiny $\{1, \dots, m\} - \mathbf{y}$.

Algoritmus zpracování vstupního řešení \mathbf{y}

0. Vyčísli hodnotu porovnávacího kritéria $K(\mathbf{y})$ spojeného s \mathbf{y} , vytvoř z \mathbf{y} seznamy *sY* a *sC*, inicializuj $i^b=-1$ a $t^b=-1$.

1. Pro $i = 0, \dots, p-1$ prováděj krok 2 a po zpracování všech hodnot jdi na krok 4.

2. Pro $t = 0, \dots, m-p-1$ prováděj krok 3.

3. V seznamech *sY* a *sC* vyměň prvky $sY(i)$ a $sC(t)$, konstruuji pracovní řešení \mathbf{y}^w . Proveď *Update(NDSS, \mathbf{y}^w)*. Dále vyčísli hodnotu porovnávacího kritéria $K(\mathbf{y}^w)$ spojeného s \mathbf{y}^w .

Pokud $K(\mathbf{y}^w)$ vyhovuje akceptačnímu pravidlu, tak aktualizuj $i^b=i$ a $t^b=t$.

Proveď zpětnou výměnu $sY(i)$ a $sC(t)$.

4. Přejdi k řešení \mathbf{y} určenému seznamy *sY* a *sC* po výměně prvků $sY(i^b)$ a $sC(t^b)$ a pokračuj krokem 0.

V tomto příspěvku se budeme věnovat přístupům, kde porovnávací kritérium i akceptační pravidlo bude založeno na hodnotě *NDSS_Area*.

4 METAHEURISTIKY S AKCEPTAČNÍM PRAVIDLEM ZALOŽENÝM NA *NDSS-AREA*

V tomto příspěvku se zaměříme na dvě metaheuristiky použité pro zpracování vstupního řešení \mathbf{y} ve výše uvedené metodě postupného zjemňování. První z nich je přístup, který využívá prvku z metody „simulated annealing“, kde akceptuje přechod k dalšímu řešení nejen při zlepšení *NDSS_Area* o více než je prahová hodnota *MinDecrement*, ale i tehdy, když je zlepšení menší, ovšem za předpokladu, že náhodný pokus s pravděpodobností $P(\mathbf{y}^w, \mathbf{y})$ dopadne ve prospěch

přechodu. Pravděpodobnost přechodu je vyjádřena vztahem (4), kde $Decrement(\mathbf{y}^w, \mathbf{y})$ označuje pokles $NDSS_Area$ přechodem od řešení \mathbf{y} k řešení \mathbf{y}^w .

$$P(\mathbf{y}^w, \mathbf{y}) = e^{-(MinDecrement - Decrement(\mathbf{y}^w, \mathbf{y}))/T} \quad (4)$$

Navíc je tento přístup vybaven stavem s a doplněn adaptivní metodou pro dynamické úpravy parametru $MinDecrement$, který je snižován resp. zvyšován o hodnotu Inc opět v závislosti na výsledku náhodného pokusu, jehož pravděpodobnost zvýšení $P_{inc}(s)$ je určena podle následujících pravidel.

$$P_{inc}(s) = 1, \text{ pokud } s > 1.$$

$$P_{inc}(s) = 0, \text{ pokud } s < -1.$$

$$P_{inc}(s) = (s+1)/2, \text{ pokud } s \in [-1, 1].$$

Stav procesu s sobě zahrnuje informaci o minulých úspěších resp. neúspěších zlepšování $NDSS_Area$ a je aktualizován po každém přechodu k novému řešení podle vztahu (5), kde α a β jsou parametry adaptivního procesu a kde $Decrement$ je snížení $NDSS_Area$ při současné hodnotě parametru $MinDecrement$. $Decrement0$ je předchozí snížení při parametru $MinDecrement0$.

$$s = \alpha \cdot s + \beta \cdot \text{sign}((Decrement - Decrement0) \cdot (MinDecrement - MinDecrement0)) \quad (5)$$

Druhý přístup (hyperheuristika), který rovněž využívá princip učení, se opírá o systém *noR* procedur (jednoduchých výměnných heuristik) lišících se hodnotou parametrů v akceptačním kritériu. Akceptační kritérium je kombinace dvou pravidel, kde první podmiňuje přechod tím, že úbytek plochy $NDSS_Area$ musí být menší než prahová hodnota $MinDecrement$ a druhé pravidlo přikazuje vybrat pro přechod řešení s největším poklesem $NDSS_Area$ z *MaxNo* prvních řešení, kterým odpovídá pokles plochy větší než $MinDecrement$.

Každá procedura r má v hyperheuristice své skóre $Score(r)$, které je zpočátku inicializované hodnotou 1 a dále je po provedení procedury r zvýšené o hodnotu přímo úměrnou poklesu plochy $NDSS_Area$ způsobenému touto procedurou. Výběr aktuální procedury, která bude použita pro zpracování vstupního řešení \mathbf{y} , se provádí systémem „Roulette wheel selection“, v kterém je každé proceduře r přiřazena pravděpodobnost $P(r)$ určená vztahem (6).

$$P(r) = \frac{Score(r)}{\sum_{k=1}^{noR} Score(k)} \quad (6)$$

5 NUMERICKÉ EXPERIMENTY

Pro porovnání obou přístupů z hlediska kvalit získané aproximace Paretoovy fronty jsme provedli experimenty na úlohách návrhu veřejného obslužného systému se systémovým a férovým kritériem pro jednotlivé samosprávné kraje Slovenské republiky. Výsledky pro jednotlivé kraje jsou označeny zkratkou sídelního města příslušného kraje: BA (Bratislava), BB (Banská Bystrica), KE (Košice), NR (Nitra), PO (Prešov), TN (Trenčín), TT (Trnava) a ZA (Žilina). Každý kraj je charakterizovaný počtem n obcí považovaných za agregované uživatele s požadavky b_j , které odpovídají velikosti populace udávané v stovkách obyvatel a o kterých se předpokládá, že jsou úměrné průměrným počtům požadavků na obsluhu. Počet možných umístění m je dán opět počtem obcí kraje.

Uvažované systémové kritérium (7) vyjadřuje průměrnou dobu, za kterou k uživateli dorazí služba z nejbližšího volného střediska. Zde je zohledněno to, že se jedná o distribuovaný systém

hromadné obsluhy s p linkami obsluhy, které v okamžiku vzniku požadavku nemusí být volné. Tato vlastnost systému hromadné obsluhy je modelovaná pravděpodobnostmi q_1, \dots, q_r , kde q_k je hodnota pravděpodobnosti, že k -té časově nejbližší středisko obsluhy bude nejbližší volné. S využitím předpokladu, že pravděpodobnosti q_1, \dots, q_r jsou v celém regionu přibližně stejné, můžeme systémovou účelovou funkci definovat výrazem (7), kde symbol $\min_k\{a_1, \dots, a_m\}$ označuje k -tou nejmenší hodnotu z hodnot a_1, \dots, a_m .

$$f_1(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=1}^r q_k \cdot \min_k \{t_{ij} : i \in \mathbf{y}\} \quad (7)$$

Hodnoty koeficientů q_k byly převzaty z [15] v tvaru $q_1 = 77.063$, $q_2 = 16.476$, $q_3 = 4.254$, $q_4 = 1.593$, $q_5 = 0.47$.

Férové kritérium (8) bylo formulované jako počet požadavků na službu za hranicí T od nejbližšího umístěného střediska [3, 4].

$$f_2(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n b_j \cdot \max \left\{ 0, \text{sign} \left(\min \{t_{ij} : i \in \mathbf{y}\} - T \right) \right\} \quad (8)$$

Exaktní Paretoovy fronty pro jednotlivé kraje byly převzaty z [9, 10] a příslušná plocha PF_Area a počet členů $noPF$ Paretoovy fronty je spolu s parametry p a m jednotlivých úloh uvedena v tabulce 1.

Tabulka 1. Popis benchmarků

Kraj	m	p	$noPF$	PF_Area
BA	87	14	34	569039
BB	515	36	229	1002681
KE	460	32	262	1295594
NR	350	27	106	736846
PO	664	32	271	956103
TN	276	21	98	829155
TT	249	18	64	814351
ZA	315	29	97	407293

Výsledky numerických experimentů pro přístup využívající prvky „simulated annealing“ spolu s adaptivním nastavováním parametru $MinDecrement$ a přístup Hyperheuristika jsou uvedeny v tabulkách 2 a 3. V nich místo velikosti plochy $NDSS_Area$ výsledné aproximace jsou uvedeny relativní rozdíly (gap) plochy $NDSS_Area$ a plochy PF_Area exaktní Paretoovy fronty.

$$gap = 100 * \frac{|NDSS_Area - PF_Area|}{PF_Area} \quad (9)$$

Řešení každé úlohy bylo opakováno desetkrát a v tabulkách 2 a 3 jsou uvedeny průměrné hodnoty. Přístupy byly implementovány v jazyku Java a testovány na osobních počítačích s 11th Gen Intel® Core™ i7 11700KF procesor s parametry: 3,6 GHz a 16 GB RAM.

Tabulka 2. Výsledky pro adaptivní proces s parametry $\alpha = 0.3$ a $\beta = 0.7$.

Kraj:	BA	BB	KE	NR	PO	TN	TT	ZA
$noNDSS$	31.00	213.70	245.90	94.50	264.50	92.50	62.30	92.40
gap	1.94	1.46	2.01	1.82	1.29	1.44	0.31	0.29

Tabulka 3. Výsledky pro hyperheuristiku s 25 procedurami postupně pro všechny kombinace hodnot parametrů $MaxNo = 1, 2, 4, 8$ a 16 a $MinDecrement = 0.01, 0.02, 0.04, 0.08$ a 0.16 , kde hodnoty $MinDecrement$ jsou udávány v procentech plochy $NDSS_Area$ pro počáteční aproximaci $NDSS$.

Kraj:	BA	BB	KE	NR	PO	TN	TT	ZA
$noNDSS$	33	209.2	247.8	100.9	269	92	62	93.8
gap [%]	1.47	0.97	2.86	0.88	2.88	1.45	0.37	0.17

6 ZÁVĚR

Výpočetní experimenty prokázaly velkou úspěšnost schématu postupného zjemňování kombinovaného jak s metaheuristikou typu simulated annealing s adaptivním nastavováním parametru, tak i s hyperheuristikou. Oba přístupy našly takové aproximace Paretoovy fronty, že se svoji plochou až na výjimky lišily nejvýše o 2% od exaktní Paretoovy fronty. Další výzkum v této oblasti bude zaměřen na studium dalších strategií prohledávání.

OZNÁMENÍ

Tento příspěvek byl podporován výzkumnými granty VEGA 1/0216/21 “Design of emergency systems with conflicting criteria using artificial intelligence tools”, VEGA 1/0077/22 „Innovative prediction methods for optimization of public service systems“ a VEGA 1/0654/22 „Cost-effective design of combined charging infrastructure and efficient operation of electric vehicles in public transport in sustainable cities and regions “. Rovněž jsme získali podporu agentury „Slovak Research and Development Agency“ v rámci projektu č. APVV-19-0441.

Použitá literatura

1. Aringhieri, R., Bruni, M. E., Khodaparasti, S. and van Essen, J. T. (2017). Emergency medical services and beyond: Addressing new challenges through a wide literature review. *Computers & Operations Research*, 78, pp. 349-368.
2. Avella, P., Sassano, A. and Vasil'ev, I. (2007). Computational study of large scale p-median problems. *Mathematical Programming*, 109, pp. 89-114.
3. Bertsimas, D., Farias, V. F. and Trichakis, N. (2011). The Price of Fairness. In: *Operations Research*, 59, pp. 17-31.
4. Buzna, Ľ., Koháni, M. and Janáček, J. (2013). Proportionally Fairer Public Service Systems Design. *Communications - Scientific Letters of the University of Žilina*, 15(1), pp. 14-18.
5. Current, J., Daskin, M. and Schilling, D. (2002). Discrete network location models, Drezner Z. et al. (ed) *Facility location: Applications and theory*, Springer, pp. 81-118.
6. Czimmermann, P. (2016). Location problems in transportation networks. *Communications – Scientific Letters of the University of Žilina*, 18(3), pp. 50-53.
7. García, S., Labbé, M. and Marín, A. (2011). Solving large p-median problems with a radius formulation. *INFORMS Journal on Computing*, 23(4), pp. 546-556.
8. Gendreau, M. and Potvin, J. (2010). *Handbook of Metaheuristics*, Springer Science & Business Media.
9. Grygar, D. and Fabricius, R. (2019). An efficient adjustment of genetic algorithm for Pareto front determination. In: *TRANSCOM 2019: conference proceedings*, Amsterdam: Elsevier Science, pp. 1335-1342.

10. Janáček, J. and Fabricius, R. (2021). Public service system design with conflicting criteria. *IEEE Access: practical innovations, open solutions*, 9, pp. 130665-130679.
11. Janáček, J. and Kvet, M. (2021a). Emergency Medical System under Conflicting Criteria. In: *SOR 2021 Proceedings*, pp. 629-635.
12. Janáček, J. and Kvet, M. (2021b). Swap Heuristics for Emergency System Design with Multiple Facility Location. In: *Proceedings of the 39th International Conference on Mathematical Methods in Economics, 2021*, pp. 226-231.
13. Janáček, J. and Kvet, M. (2021c). Repeated Refinement Approach to Bi-objective p-Location Problems. In: *INES 2022: 26th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems 2022*, pp. 41-45.
14. Janáček, J. and Kvet, M. (2022). Quality Measure of Pareto Front Approximation. In: *Proceedings of the International Scientific Conference QUANTITATIVE METHODS IN ECONOMICS: Multiple Criteria Decision Making XXI, Bratislava: Letra Edu, 2022*, pp. 95-103.
15. Jankovič, P. (2016). Calculating Reduction Coefficients for Optimization of Emergency Service System Using Microscopic Simulation Model. In: *17th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics*, pp. 163-167.
16. Kvet, M. (2014). Computational Study of Radial Approach to Public Service System Design with Generalized Utility. In: *Proceedings of International Conference DT 2014, Žilina, Slovakia*, pp. 198-208.
17. Kvet, M. and Janáček, J. (2022a). Directed Search for Pareto Front Approximation with Path-relinking Method. In: *Mathematical Methods in Economics 2022, Jihlava*. pp. 212-217.
18. Kvet, M. and Janáček, J. (2022b). Evaluation of dynamics of heuristics used for pareto front approximation. In: *Proceedings of the International Scientific Conference QUANTITATIVE METHODS IN ECONOMICS: Multiple Criteria Decision Making XXI, Bratislava: Letra Edu, 2022*, pp. 132-140.
19. Kvet, M. and Janáček, J. (2022c). Non-dominated Set of Public Service System Designs using Simulated Annealing Approach. In: *INES 2022: 26th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems 2022*, pp. 59-63.
20. Marianov, V. and Serra, D. (2002). Location problems in the public sector, Drezner Z. et al. (ed) *Facility location - Applications and theory*, Berlin, Springer, pp. 119-150.

Kontaktné údaje

prof. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.

Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky

Univerzitná 1, 010 26 Žilina

Tel: +421 (0)41 513 4204

email: jaroslav.janacek@fri.uniza.sk

PROBLÉMY DNEŠNÉHO SVETA V KONTEXTE TEÓRIE HIER

NOWADAY'S WORLD PROBLEMS IN THE CONTEXT OF GAME THEORY

Miroslava Jánošová

Abstrakt

Teória hier sa v súčasnosti stáva čoraz dôležitejšou vednou disciplínou pre riešenie mnohých globálnych problémov. Koncept teórie hier je založený na rozhodovaní v interaktívnom svete a hľadaní najlepšieho rozhodnutia pre každého s rozhodovacou právomocou. Tieto rozhodnutia však závisia od rozhodnutia iných. V tomto príspevku prinášame prehľad publikácií autorov, ktorí sa venujú aplikáciám teórie hier na riešenie problémov, ktoré patria medzi globálne problémy 21. storočia.

Kľúčové slová: Teória hier, Globálne problémy, Optimálna stratégia

Abstract

Nowadays, game theory has become very important for solving many global problems. The concept of game theory is based on decision making in an interactive world and finding the best decision for each decision maker. However, such a decision depends on the decision of others. In this article, we provide a detailed overview of the authors' work with a focus on the application of game theory in solving problems that are among the global problems of the 21st century.

Keywords: Game theory, Global problems, Optimal strategy

1 ÚVOD

Svet čelí novodobým problémom, ktoré narastajú do čoraz väčších rozmerov. Výber tých najväčších a najzásadnejších je do značnej miery ovplyvnený subjektívnym vnímaním. V predkladanom príspevku sa zameriame na tie, ktoré sa zaraďujú medzi globálne problémy negatívne ovplyvňujúce veľkú časť svetovej populácie a to ekologické problémy. Tieto problémy a ich dopady možno ako jednotlivci aktuálne nevnímame, avšak dotýkajú sa celého ľudstva, každého národa naprieč celým svetom, pričom ich odstránenie resp. zmiernenie ich dopadov je rovnako možné len vyvinutím spoločného úsilia a vzájomnou spoluprácou všetkých krajín sveta. Tieto problémy je možné skúmať a hľadať ich riešenia v kontexte rôznych vedných disciplín. V príspevku sa však zameriame na vytvorenie prehľadu publikácií, ktoré sa na tieto problémy pozerajú v kontexte teórie hier. Voľba teórie hier je z dôvodu jej aktuálnosti a adekvátnosti použitia ako nástroja, ktorý zachytáva vzájomné pôsobenie viacerých aktérov.

1.1 Východiskové pojmy

Konkurencia a kooperácia je konceptom teórie hier založenom na matematickom štúdiu vzájomných vzťahov medzi hráčmi. Zobrazuje strategické vzájomné pôsobenie medzi hráčmi, ktoré vedie k celkovým výsledkom s ohľadom na preferencie týchto hráčov. Hry sú definované ako matematické modely, ktoré sú tvorené množinou hráčov, množinou stratégií a špecifických výplat pre týchto hráčov pre každú kombináciu týchto stratégií. Úplnú

protichodnosť záujmov hráčov vieme identifikovať, keď súčet výhier je rovný nule alebo konštante. Avšak pri hrách kde nie je nenulový súčet alebo konštanta, vzniká priestor na možný vznik spolupráce. Nekooperatívna teória hier je spôsob modelovania a analyzovania situácie, v ktorej zúčastnení hráči realizujú rozhodnutia nezávisle od ostatných. Teória kooperatívnych hier sa riadi v princípe rovnakým konceptom avšak rozhodnutia hráčov sú závislé od rozhodnutí ostatných zúčastnených hráčov.

Teória hier sa javí ako vhodný nástroj na predpovedanie toho, ako sa ľudia správajú pri rôznych konfliktoch, na analýzu hráčov rozhodovacou právomocou s cieľom maximalizovať vlastné výnosy predvídaním rozhodnutí druhého hráča. Koncept teórie hier bol prvý krát popísaný v knihe „Teória hier a ekonomické správanie“ v roku 1944 autormi VON NEUMANN, J. - MORGENSTERN, O. (1944).

2 PREHĽAD VEDECKÝCH PRÁC

V nasledujúcej časti príspevku uvádzame výber vedeckých prác, ktoré popisujú metodiku založenú na princípoch teórie hier na riešenie ekologických problémov v globálnom meradle. Práve tieto ekologické problémy vnímame ako jedny z najväčších problémov 21. storočia. Ekologické problémy zahŕňajú niekoľko bližšie špecifikovaných tém, ktoré sa budeme snažiť sledovať pri výbere popisovaných vedeckých prác a to problematiku znečisťovania ovzdušia, skleníkový efekt, znečisťovanie vôd, ohrozenie biodiverzity, zväčšovanie objemu odpadov a problémy spojené s jeho odstraňovaním. Hrozba ekologických problémov je rôzne vnímaná a to, čo príde jednotlivcovi ako výhodné môže ľudstvu ako celku škodiť. Aj jednotlivé krajiny môžu byť v postavení jednotlivca, ktorý sledovaním vlastných záujmov môže svojim pôsobením problémy prehľbovať a nevidí prínos v spolupráci s ostatnými krajinami.

Autor YAZAN, D. et al. (2020) prezentoval nekooperatívny herný model založený na hľadaní Nashovej rovnováhy, ktorý použil na analýzu správania prevádzkovateľov zariadení pri snahe znižovať náklady na vypúšťanie odpadu. Rovnako nekooperatívny herný model vyvinuli aj GONZALEZ-RAMIREZ, M. et al. (2021), ktorí poukázali, že v priemyselnom sektore je prijímanie rozhodnutí zameraných na udržateľnosť komplikované vzhľadom na sledovanie ekonomického prospechu a akékoľvek podniknuté kroky ovplyvňujú sociálny a environmentálny sektor. Autori uvádzajú, že aj napriek v súčasnosti vyvíjanej snahe zohľadňovať environmentálne a sociálne aspekty, reakcie racionálnych subjektov sú značne individualistické, sledujúce ich maximalizáciu úžitku. V rámci tejto vedeckej práce navrhujú prípadovú štúdiu rozhodovania pri inštalácii zariadenia na výrobu kyseliny octovej ako nekooperatívnej hry, kde vystupujú traja hráči a to spoločnosť, ktorá sa snaží o svoj ekonomický prospech, vláda, ktorá prihliada na blaho svojich obyvateľov a mimovládna organizácia, ktorá prihliada na blaho životného prostredia. V takto modelovanej hre hľadali Nashovu rovnováhu, ktorá však ako racionálny výsledok nebola zároveň aj globálnym optimom. Aj iní autori použili model z teórie hier na analýzu spolupráce medzi spoločnosťami pri rozhodovaní o ich udržateľných stratégiách MEIBNER, N. (2013) alebo UŞAR, D. (2019).

Ďalším zaujímavým modelom je model, ktorý porovnáva efekt znižovania emisií a sociálny blahobyt v kooperatívnej ako aj nekooperatívnej hre a bol použitý autormi YANG, T., LIAO, H. a YUNFEI, D. (2023), ktorí uvádzajú, že zmierňovanie regionálneho znečistenia ovzdušia zahŕňa mnohostranné tak dlhodobé ako aj krátkodobé kompromisy medzi rôznymi regiónmi. Využitie metód založených na teórii hier považujú za efektívne z hľadiska jej schopnosti preskúmať dynamický postup znižovania emisií každého regiónu a vzhľadom na rôznorodosť úrovni regionálneho ekonomického rozvoja ako aj kapacít pre environmentálnu správu. Model dynamického herného mechanizmu začlenili do systému environmentálnej ekonomiky, tak, aby bola nájdená Nashova rovnováha v dynamických podmienkach a boli preskúmané

stratégie každého regiónu. Výsledky, ktoré dosiahli poukazujú na to, že pre znižovanie emisií a maximalizáciu sociálneho blahobytu je nevyhnutná kooperatívna politika a je nutné posilnenie regionálnej spolupráce pri zmiernovaní regionálneho znečistenia.

Tak isto dynamický avšak trojstranný herný model regionálneho kooperatívneho riadenia znečistenia ovzdušia v Číne predstavili ZHANG, M., et al. (2019). Analýzou zmiešanej stratégie Nashovej rovnováhy skúmali mechanizmy a podmienky pre vytvorenie kooperatívneho modelu ako aj hľadali efektívne spôsoby zlepšenia administratívy. Dosiahnuté výsledky poukazujú na nemožnosť vytvorenia stabilného modelu spolupráce medzi miestnymi samosprávami a je potrebný dohľad zo strany vlády a prostredníctvom jej zásahov vynucovať spoluprácu. Problematikou znečisťovania ovzdušia sa zaoberal aj autor KUTASI, G. (2012), ktorý sa venoval modelom zahŕňajúcich hráčov na medzinárodnej úrovni a sledoval ich reakcie na situácie súvisiace so zmiernovaním klimatických zmien, či adaptáciou na následky týchto zmien. Rovnako sa zamerával aj na skúmanie informačnej asymetrie, morálneho hazardu, ktorý vnímal ako negatívnu externalitu. Modely, ktoré použil vychádzali z konceptu typickej vážňovej dilemy ako hry dvoch hráčov (krajín), ale aj hre dvoch hráčov, kde jeden hráč bol reprezentovaný súkromným sektorom a druhý hráč tvorca verejnej politiky.

Problém dosiahnutia globálnej spolupráce pri znižovaní emisií skleníkových plynov prezentoval WOOD, P. (2011). Vychádzal z teórie nekooperatívnej hry ako aj teórie kooperatívnej hry. Skúmal prístupy týchto hier k vytváraniu koalícií s cieľom preskúmať ich správanie pri spolupráci v oblasti klimatických zmien. Ním prezentovaný mechanizmus, bol založený na podmienených záväzkoch a politických dôsledkoch tak, aby sa zvyšovala pravdepodobnosť spolupráce pri zmiernovaní klimatických zmien. Autor HSU, S. (2013) hodnotil zostavením extenzívnej hry dvoch hráčov ich správanie pri simultánnom rozhodovaní o prijatých opatreniach pre zníženie skleníkových plynov. Autor NEWKIRK, R. (2016) rovnako modelom hry vážňova dilema potvrdil, že hráči vzhľadom na vysoké náklady radšej volia nespuprácu aj za ceny ohrozenia celého ekosystému avšak uviedol, že v prípade preformulovania tejto hry na typ lov na jeleňa, by bolo možné zabezpečiť spoluprácu hráčov a tým aj zníženie emisií.

Príspevok autorov CHEW, I. M. L. et al. (2009) rieši otázku ochrany vody a poukazuje na to, že odpadová voda z jednotlivých závodov môže byť opätovne použitá medzi rozličnými závodmi prostredníctvom schémy integrácie vody. Pričom uvádza, že práve vďaka premyslenej kooperácii medzi závodmi je možné dosiahnutie väčších úspor vody ako v prípade, že závody budú šetrenie vody realizovať samostatne. Aj tu však spoluprácu komplikuje to, že každý zúčastnený závod sa snaží maximalizovať svoje vlastné výhody a spoluprácu je problematické dosiahnuť pri absencii centralizovaného orgánu, ktorý by diktoval podmienky schém integrácie vody. Klimatické zmeny a rastúci dopyt po vode v dôsledku rastu populácie, priemyselného ako aj poľnohospodárskeho vývoja, ktoré spôsobujú nedostatok vody sa prostredníctvom modelu teórie hier pokúsili vysvetliť aj autori HEMATI, H. a ABRISHAMCHI, A. (2021), ktorí využili model kooperatívnej vyjednávacej hry na efektívne prerozdelenie vody. Uvádzajú, že teória hier je vhodnou metódou práve na zníženie nedostatku vody, čo potvrdzuje aj práca autora LOÁICIGA, H. (2004) ale aj ďalšie vedecké práce autorov CARRARO, C. - MARCHIORI, C. - SGOBBI, A. (2005), DINAR, A. - RATNER, A. - YARON, D. (1992). Teóriu hier na analýzu manažmentu vodných zdrojov využili aj autori OSÉS-ERASO, N. - VILADRICH-GRAU, M. (2007), NAMANY, S. et al. (2018) ako aj na manažment riek RAHMOUN, T. et al. (2019).

Problematike likvidácie odpadu, konkrétne elektronického odpadu s využitím konceptu teórie hier z hľadiska kooperatívneho ako aj nekooperatívneho konania hráčov, sa venovali autori KAUSHAL, R. K. - NEMA, A. K. (2013) v ich vedeckom príspevku popisujú modely, ktoré

zobrazujú rozhodnutia hráčov, ktorými boli vláda, výrobca, spotrebiteľ a subjekt zodpovedný za recykláciu počas celej doby životnosti likvidovaného zariadenia.

3 ZÁVER

Teória hier je vedná oblasť, ktorá nám môže pomôcť pochopiť strategické správanie hráčov (jednotlivcov, krajín, zoskupení, ľudstva), ktoré ovplyvňuje riešenie jedného z najväčších problémov 21. storočia, ktorému čelíme v podobe ekologických problémov. Jedným z možných dôvodov, prečo dosiahnutie medzinárodnej spolupráce pri riešení ekologických problémov je ťažké, je silný sklon k parazitovaniu. Tento sklon je podnietený tým, že riešenie ekologických problémov v podobe napríklad klimatických zmien je vnímané ako globálny verejný statok a každý čaká, že bremeno riešenia tohto problému prevezme niekto iný. Rovnako prekážkou v dosahovaní spolupráce je aj racionalita hráčov, ktorá pramení v ich snahe o maximalizáciu osobného úžitku. Tento príspevok má za cieľ uviesť niekoľko príspevkov, ktoré využívajú modely teórie hier na popisanie problematiky ekologických problémov a hľadajú možnosti riešenia týchto problémov využitím kooperatívnych a nekooperatívnych hier.

Použitá literatúra

(podľa normy STN ISO 690 / ČSN ISO 690)

1. CHEW, Irene Mei Leng, et al. 2009. Game theory approach to the analysis of inter-plant water integration in an eco-industrial park. *Journal of cleaner production*, 2009, 17.18: 1611-1619.
2. UŞAR, Damla Durak; DENIZEL, Meltem; SOYTAŞ, Mehmet Ali. 2019. Corporate sustainability interactions: A game theoretical approach to sustainability actions. *International Journal of Production Economics*, 2019, 218: 196-211.
3. WOOD, Peter John. 2011. Climate change and game theory. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 2011, 1219.1: 153-170.
4. BARRETT, Scott. 1994. Self-enforcing international environmental agreements. *Oxford economic papers*, 1994, 46. Supplement 1: 878-894.
5. CARRARO, Carlo; MARCHIORI, Carmen; SGOBBI, Alessandra. 2005. Applications of negotiation theory to water issues. *World Bank Publications*, 2005.
6. DINAR, Ariel; RATNER, Aharon; YARON, Dan. 1992. Evaluating cooperative game theory in water resources. *Theory and decision*, 1992, 32: 1-20.
7. GONZALEZ-RAMIREZ, Mayra G.; RODRIGUEZ-GONZALEZ, Pablo T. 2021. Game theory in sustainable decision-making: A new acetic acid plant as a case study. *Journal of Cleaner Production*, 2021, 321: 128962.
8. HEMATI, Hasti; ABRISHAMCHI, Ahmad. 2021. Water allocation using game theory under climate change impact (case study: Zarinehrood). *Journal of Water and Climate Change*, 2021, 12.3: 759-771
9. HSU, Shi-Ling. 2011. A game-theoretic model of International Climate Change Negotiations. *NYU Env'tl. LJ*, 2011, 19: 14.
10. KAUSHAL, Rajendra Kumar; NEMA, Arvind K. 2013. Game theory-based multistakeholder planning for electronic waste management. *Journal of Hazardous, Toxic, and Radioactive Waste*, 2013, 17.1: 21-30.
11. KUTASI, Gábor. 2012. Climate change in game theory context. *Interdisciplinary Environmental Review*, 2012, 13.1: 42-63.

12. LOÁICIGA, Hugo A. 2004. Analytic game—theoretic approach to ground-water extraction. *Journal of Hydrology*, 2004, 297.1-4: 22-33.
13. MEIBNER, Nathalie. 2013. The incentives of private companies to invest in protected area certificates: How coalitions can improve ecosystem sustainability. *Ecological Economics*, 2013, 95: 148-158.
14. NAMANY, Sarah; AL-ANSARI, Tareq; GOVINDAN, Rajesh. 2018. Integrated techno-economic optimization for the design and operations of energy, water and food nexus systems constrained as non-cooperative games. In: *Computer aided chemical engineering*. Elsevier, 2018. p. 1003-1008.
15. NEWKIRK, Vann R. 2016. Is Climate Change a Prisoner's Dilemma or a Stag Hunt? *The Atlantic* [online]. [S. l]: The Atlantic Monthly Group, 2016
16. OSÉS-ERASO, Nuria; VILADRICH-GRAU, Montserrat. 2007. On the sustainability of common property resources. *Journal of Environmental Economics and Management*, 2007, 53.3: 393-410.
17. RAHMOUN, Tarek, et al. 2019. A step towards building environmental protection strategy: game theory framework for Al-Abrash River Basin management. *Int J Environ Sci, Dev*, 2019, 10
18. YANG, Tingru; LIAO, Hua; YUNFEI, Du. 2023. A dynamic game modelling on air pollution mitigation with regional cooperation and non-cooperation. *Integrated Environmental Assessment and Management*, 2023.
19. YAZAN, Devrim Murat; YAZDANPANAHAH, Vahid; FRACCASCIA, Luca. 2020. Learning strategic cooperative behavior in industrial symbiosis: A game-theoretic approach integrated with agent-based simulation. *Business strategy and the environment*, 2020, 29.5: 2078-2091.
20. ZHANG, Ming, et al. 2019. Using three-sided dynamic game model to study regional cooperative governance of haze pollution in China from a government heterogeneity perspective. *Science of the Total Environment*, 2019, 694: 133559.

Tento príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 1/0115/23 „Aplikácie kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a medzinárodných vzťahoch“

Kontaktné údaje

Ing. Miroslava Jánošová, PhD.
 Fakulta sociálnych a ekonomických vied UK
 Mlynské luhy 4
 821 05 Bratislava 7
 email: miroslava.janosova@fsev.uniba.sk

TRENDY V EMPIRICKÝCH ŠTÚDIÁCH VOJNOVÝCH KONFLIKTOV ZALOŽENÝCH NA EKONOMETRICKÝCH PRÍSTUPOCH

TRENDS IN EMPIRICAL STUDIES OF WAR CONFLICTS BASED ON ECONOMETRIC APPROACHES

Brian König

Abstrakt

Článok sa zaoberá prehľadom empirických prác skúmajúcich vojnové konflikty využitím ekonometrických nástrojov v dvoch základných oblastiach: (i) články skúmajúce determinanty vzniku vojnového konfliktu a (ii) práce zaoberajúce sa determinantmi obchodných tokov so zbraňami ako formy podpory jednej zo strán vojnového konfliktu. Z článku možno konštatovať, že pre prvú oblasť (i) sa používajú najmä metódy odhadu s binárnou závislou premennou ako probit, panelový probit a probit s inštrumentálnymi premennými. Druhá oblasť empirických prác (ii) využíva zvyčajne gravitačné modely odhadované rôznymi metódami odhadu (narp. tobit, viacstupňové metódy odhadu).

Kľúčové slová: *vojnové konflikty, obchodné toky zbraní, gravitačné modely*

Abstract

The article deals with an overview of empirical works investigating war conflicts using econometric tools in two basic areas: (i) articles investigating the determinants of the emergence of a war conflict and (ii) works dealing with the determinants of trade flows of arms as a form of support of the war conflict parties. Based on the reviewed articles, it can be concluded that for the first area (i), estimation methods with a binary dependent variable such as probit, panel probit and probit with instrumental variables are mainly used. The second area of empirical works (ii) usually uses gravity models estimated by various estimation methods (e.g. tobit, two-stage estimation methods).

Keywords: *war conflicts, trade flows of arms, gravity models*

1 ÚVOD

Vojnové konflikty sprevádzajú ľudstvo od nepamäti, pričom dôvody ich vzniku a pohľady na faktory, ktoré ich priebeh ovplyvňujú sa rôznia. Výraznejšia pozornosť ekonómov skúmať vojnové konflikty sa pripisuje rozvoju teórie hier dielom autorov Von Neumann a Morgenstern (1944). Prelomovým dielom v teórii konfliktov bola práca autora Tullock (1980), ktorý predstavil koncept hľadania zisku (rent-seeking concept) vychádzajúci z princípu snahy súťažiaceho získať dodatočné bohatstvo, pričom jeho šanca na výhru je spojená z jeho investíciou relatívne voči investícii všetkých hráčov. Prehľad hlavných konfliktných a vojnových teórií založených na ekonomických modeloch zhrnuli Kimbrough, Laughren a Sheremeta (2020). Zhrnuli poznatky z vybraných súťažných modelov teórie hier, dynamických konfliktných modelov, Colonel Blottovej hry, priestorových konfliktných modelov a skupiny modelov, ktoré poukazujú na neefektívnosť konfliktu a vzájomne konfrontujú výstup najlepší pre spoločnosť v porovnaní s prospechom dosiahnutým ak hráč jedná individuálne vo vlastnom záujme (conflict avoidance concepts). Okrem teoretických prístupov autori spracovali aj časť empirickej literatúry zaoberajúcej sa príčinami

prirodených konfliktov ako napr.: súboj vlády a drogových kartelov v Mexiku (Dell, 2015); dopadmi propagandy na občianske nepokoje v Rwande (Yanagizawa-Drott, 2014); dopadmi prehry domáceho futbalového tímu na počet hlásení domáceho násilia (Card a Dahl, 2011) a dopadmi zahraničnej pomoci na občianske nepokoje (Crost, Felter a Johnson, 2014; Nunn a Qian, 2014). V oblasti empirických dôsledkov konfliktov sa autori Kimbrough, Laughren a Sheremeta zamerali najmä na dopady občianskych vojen, etnických konfliktov, výskytu násilných foriem antisemitizmu, dopadmi konfliktu na preferencie obyvateľstva a skúmanie ekonomických dopadov zahraničného konfliktu (napr. na cenu akcií). Avšak prehľad empirických prác vojnových konfliktov založených na ekonometrických prístupoch v práci chýba.

V rámci tohto príspevku sa budeme zaoberať prehľadom empirických prác, ktoré využitím ekonometrických modelov skúmajú determinanty vzniku vojenského konfliktu a determinanty miery vojenskej podpory jednej zo strán konfliktu vo forme obchodu so zbraňami. Článok je štruktúrovaný nasledovne: v druhej kapitole sa nachádza prehľad empirických prác využívajúcich ekonometrické modely pri odhadoch determinantov vojnových konfliktov a determinantov obchodných tokov so zbraňami; tretia kapitola poskytuje prehľad základných databáz, ktoré poskytujú dáta k ekonometrickým odhadom parametrov modelov vojnových konfliktov. Zámerom článku je zorientovať čitateľa v empirických štúdiách vojnových konfliktov založených na ekonometrických modeloch a poskytnúť náhľad na aktuálne metodologické prístupy využívané pri analýze determinantov vojnových konfliktov a determinantov obchodných tokov so zbraňami.

2 PREHĽAD LITERATÚRY

2.1 Determinanty vzniku vojnového konfliktu

Odhadom predikcie občianskych vojnových konfliktov na vzorke 161 krajín sa zaoberali Elbadawi a Sambanis (2001). Autori odhadli pravdepodobnosť výskytu konfliktu na panelovom probite s náhodnými efektami na intervale rokov 1960 – 1999, pričom používali 5-ročné intervaly. Dospeli k záveru, že politické faktory zohrávajú kľúčovú úlohu pri výskyte občianskej vojny, pričom výrazné zníženie pravdepodobnosti občianskych nepokojov možno dosiahnuť kombináciou politických reforiem, ekonomickou diverzifikáciou krajiny a znižovaním príjmových nerovností.

Hegre (2008) skúmal vplyv faktorov ovplyvňujúcich existenciu medzinárodného konfliktu, pričom za kľúčové považuje zahrnutie vzdialenosti a veľkosti strán konfliktu. Ako závislú premennú zvolil podiel pravdepodobnosti konfliktu počítanú na dátach z databázy *Correlates of War's*, pričom parametre gravitačného modelu boli odhadnuté za obdobie rokov 1885-2001. Autor dospel k záveru, že do ozbrojených konfliktov sa často zapájajú krajiny s väčšou populáciou a väčšou vojenskou vybavenosťou. Faktory determinujúce veľkosť krajiny výrazne zvyšujú pravdepodobnosť ozbrojeného konfliktu.

Skúmaním faktorov determinujúcich etnické vojny sa zaoberali Neudorfer a Theuerkauf (2014). Autori skúmali efekt korupcie na pravdepodobnosť vzniku etnických konfliktov na dátach v intervale 1984 – 2007, pomocou štandardného probit modelu a probitu s inštrumentálnymi premennými. Autori dospeli k záveru, že korupcia zvyšuje riziko etnického konfliktu, pretože má tendenciu fungovať etnicky vylučujúcim spôsobom, čo môže viesť k prehĺbeniu politickej a ekonomickej nerovnosti medzi etnickými skupinami. Korupcia má tendenciu viesť k tomu, že niektoré etnické skupiny majú väčší vplyv na proces politického rozhodovania ako iné, čo môže viesť k nepokojom zo strany znevýhodnených skupín.

2.2 Determinanty obchodných tokov so zbraňami

Akerman and Seim (2014) skúmali vplyv úrovne demokracie v gravitačnom modeli na pravdepodobnosť obchodu zbraňami. K tomuto účelu použili lineárny pravdepodobnostný model za intervale rokov 1962 – 2000. Za účelom skúmania vzťahu týchto dvoch premenných bola okrem pravdepodobnostného modelu zostrojená globálna sieť obchodu so zbraňami, ktorej vývoj skúmali v čase. Autori zistili, že existuje negatívny vzťah medzi pravdepodobnosťou obchodu so zbraňami a rozdielmi v zriadení (úrovne demokracie) počas studenej vojny, avšak po jej skončení sa stáva tento efekt nevýznamný. Nedostatkom tohto prístupu bol relatívne nízky počet krajín použitých v odhade (34 krajín) ako aj použitie lineárneho pravdepodobnostného modelu, ktorý má viaceré limitácie (problém s normalitou rezíduí a možnou prítomnosťou heteroskedasticity).

Comola (2012) sa zaoberala vplyvom demokratického zriadenia a politickej orientácie exekutívnej moci v krajine na objem exportu zbraňami v horizonte rokov 1975 – 2004. K odhadu parametrov v gravitačnom modeli obchodu zbraňami bol použitý tobit model. Autori dospeli k záveru, že pravicovo orientované vlády majú tendenciu podporovať priemysel a jeho export. Tiež zistili, že zriadenia s vysokou koncentráciou moci (autokracie) majú tendenciu menej exportovať zbrane. Podobne aj výkonná moc, ktorá je blízko pred voľbami a má ambíciu na znovuzvolenie, tiež znižuje export zbraňami.

Determinanty medzinárodného obchodu so zbraňami pomocou gravitačného modelu skúmali aj autori Martínez-Zarzoso a Johannsen (2019) na intervale rokov 1950 - 2007. Autori vo svojom koncepte odhadu rozlišovali medzi rozhodnutím exportovať zbrane (extensive margin) a hodnotou exportu (intensive margin), pričom uvažovali aj o vzájomnej závislosti týchto dvoch rozhodnutí. K odhadu parametrov bola použita dvojstupňová metóda odhadu navrhnutá autormi Helpman, Melitz, and Rubinstein (2008). V prvom kroku autori odhadli probit model pravdepodobnosti vzájomného obchodovania so zbraňami a v druhom kroku bola odhadnutá podoba gravitačného modelu, rozšírená o dva členy: prvým boli vyrovnané hodnoty závislej premennej z probitu prevážené štandardnými odchýlkami náhodnej zložky a druhý člen reprezentoval inverznú hodnotu Millovho podielu (Inverse Mill's ratio).¹ Táto úprava koriguje skreslenie generované nepozorovanou heterogenitou firiem ako aj možné skreslenie v dôsledku nenáhodného výberu súboru (kvôli existencii veľkého počtu núl závislej premennej). Autori dospeli k záveru, že úroveň demokracie a politická orientácia dodávateľských a prijímajúcich krajín, ako aj rozdiely medzi nimi, sú dôležitými determinantmi pravdepodobnosti obchodovania so zbraňami. Zatiaľ čo dodávateľia s vyššou úrovňou demokracie majú vyššiu pravdepodobnosť prevodu zbraňami, opak platí pre dovozné krajiny.

Faktory ovplyvňujúce obchod s ľahkými zbraňami na horizonte rokov 1990 – 2017 skúmali autori Baronchelli, Caruso a Ricciuti (2022). Vo svojom výskume použili gravitačný model, v ktorom boli skúmané efekty ekonomických, kultúrnych a politických faktorov na objemy obchodu s ľahkými zbraňami. Multilaterálne rezistencie navrhnuté v štruktúrnom gravitačnom modeli Andersonom a Van Wincoopom (2003) boli odhadnuté využitím Taylorovho rozvoja spôsobom navrhnutým Baierom a Bergstrandom (2009). Kľúčovou premennou, ktorej vplyv bol v práci skúmaný, bolo zavedenie embarga na jednotlivé krajiny. Z výsledkov práce vyplýva, že embargo redukuje dovozy ľahkých zbraňami pre sankcionované krajiny zhruba o jednu tretinu, pričom embargo zavedené Európskou úniou má výraznejší vplyv, v porovnaní s embargom zavedeným USA, ktorého efekt sa javí byť nevýznamný.

¹ Inverzný Millov podiel (inverse Mill's ratio) je definovaný ako podiel funkcie hustoty pravdepodobnostného rozdelenia a jeho kumulatívnej distribučnej funkcie (pozri Heckman, 1979).

3 DATABÁZY

V tejto časti spomenie niektoré databázy, ktoré sa zvyknú využívať pri čerpaní dát slúžiacich k odhadu parametrov vojnových modelov.

SIPRI – Štokholmský medzinárodný mierový výskumný inštitút je nezávislý medzinárodný inštitút (<https://www.sipri.org/>), ktorý sa venuje výskumu konfliktov, zbrojenia, kontroly zbrojenia a odzbrojovania a zároveň poskytuje viaceré databázy v oblasti transferov zbraní, týkajúce sa informácií o vojenskej spolupráci, zbrojárskych firmách, mierových operáciách, vojenských výdavkoch krajín a iné.

Correlates of War – je projekt (<https://correlatesofwar.org/>), v rámci ktorého sú poskytované údaje týkajúce sa medzinárodných vzťahov. Zdieľa databázy v oblastiach ako: štátne systémy, typy a prehľad vojenských a ozbrojených konfliktov, náboženské príslušnosti krajín a rôzne ďalšie.

CEPII - francúzske centrum pre výskum a expertízy o svetovej ekonomike CEPII, ktoré poskytuje rôzne databázy (okrem iného aj databázy slúžiace k tvorbe gravitačných modelov). Databáza „Gravity“ obsahuje informácie za obdobie rokov 1948 – 2020, pričom poskytuje zhruba 70 premenných za 224 krajín.

4 ZÁVER

Príspevok sa zaoberá prehľadom trendov a aktuálnych metodologických prístupov používaných pri empirických analýzach vojnových konfliktov zameraných na ekonometrických odhadoch, pričom kladie dôraz na dve hlavné oblasti: (i) odhady determinantov vzniku rôznych typov vojnových konfliktov a (ii) determinanty obchodných tokov zbraní. S článku vyplýva, že za účelom modelovania obchodných tokov zbraní a ich determinantov sa využívajú prevažne gravitačné modely pomocou rôznych metód odhadu (napr. tobit, viacstupňové metódy odhadu) a k odhadu determinantom vzniku vojnových konfliktov sa využívajú rôzne formy modelov s binárnou závislou premennou (probit, panelový probit, probit s inštrumentálnymi premennými).

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu VEGA 1/0115/23 „Aplikácie kooperatívnych modelov teórie hier v ekonómii a medzinárodných vzťahoch“.

Použitá literatúra

1. Akerman, A., and A. L. Seim. 2014. “The Global Arms Trade Network 1950–2007.” *Journal of Comparative Economics* 42 (3): 535–551.
2. Anderson, J. E., & Van Wincoop, E. (2003). Gravity with gravitas: A solution to the border puzzle. *American Economic Review*, 93(1), 170–192.
3. Baier, S. L., & Bergstrand, J. H. (2009). Bonus vetus OLS: A simple method for approximating international trade-cost effects using the gravity equation. *Journal of International Economics*, 77(1), 77–85.
4. Baronchelli, A., Caruso, R., & Ricciuti, R. (2022). Trade in small arms and light weapons: Are embargoes effective?. *The World Economy*, 45(5), 1336-1361.
5. Card, D., Dahl, G.B., 2011. Family violence and football: the effect of unexpected emotional cues on violent behavior. *Q. J. Econ.* 126 (1), 103.
6. Comola, M. 2012. “Democracies, Politics and Arms Supply: A Bilateral Trade Equation.” *Review of International Economics* 20 (1): 150–163.
7. Crost, B., Felter, J., Johnston, P., 2014. Aid under fire: development projects and civil conflict. *Am. Econ. Rev.* 104 (6), 1833–1856.

8. Dell, M., 2015. Trafficking networks and the Mexican drug war. *Am. Econ. Rev.* 105 (6), 1738–1779.
9. Elbadawi, I., & Sambanis, N. (2001). How much war will we see? Estimating the incidence of civil war in 161 countries.
10. Heckman, J. J. (1979). Sample selection bias as a specification error. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 153-161.
11. Hegre, H. (2008). Gravitating toward war: Preponderance may pacify, but power kills. *Journal of Conflict Resolution*, 52(4), 566-589.
12. Helpman, E., Melitz, M., & Rubinstein, Y. (2008). Estimating trade flows: Trading partners and trading volumes. *The quarterly journal of economics*, 123(2), 441-487.
13. Kimbrough, E. O., Laughren, K., & Sheremeta, R. (2020). War and conflict in economics: Theories, applications, and recent trends. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 178, 998-1013.
14. Martínez-Zarzoso, I., & Johannsen, F. (2019). The gravity of arms. *Defence and peace economics*, 30(1), 2-26.
15. Neudorfer, N. S., & Theuerkauf, U. G. (2014). Buying war not peace: The influence of corruption on the risk of ethnic war. *Comparative Political Studies*, 47(13), 1856-1886.
16. Nunn, N., Qian, N., 2014. Us food aid and civil conflict. *Am. Econ. Rev.* 104 (6), 1630–1666.
17. Tullock, G. (1980) Efficient Rent Seeking. In: Buchanan, J., Tollison, R. and Tullock, G., Eds., *Toward a Theory of Rent Seeking Society*, Texas A and M University Press, College Station, 97-112.
18. von Neumann, J., Morgenstern, O., 1944. *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
19. Yanagizawa-Drott, D., 2014. Propaganda and conflict: evidence from the rwandan genocide. *Q. J. Econ.* 129 (4), 1947–1994.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Brian König, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky, Katedra operačného výskumu a ekonometrie

Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava

email: brian.konig@euba.sk

MOŽNOSŤ APLIKOVANIA PRIESTOROVÉHO MODELU NA ZNÍŽENIE NEZAMESTNANOSTI¹

THE POSSIBILITY OF APPLY A SPATIAL MODEL TO REDUCE THE UNEMPLOYMENT

Allan Jose Sequeira Lopez

Abstrakt

Existujú rôzne modely a stratégie, ktoré možno použiť na zníženie nezamestnanosti prostredníctvom priestorových hier. Jedným z možných prístupov je zamerať sa na stratégie regionálneho rozvoja, ktorých cieľom je podporiť hospodársky rast a vytváranie pracovných miest v konkrétnych geografických oblastiach. V tomto článku, za predpokladu existencie regulátora, analyzujeme možnosť aplikácie priestorového modelu v regiónoch s najvyššou mierou nezamestnanosti na Slovensku.

Kľúčové slová: regulátor, priestorový model, teória hier, nezamestnanosť

Abstract

There are various models and strategies that can be used to reduce unemployment through spatial games. One possible approach is to focus on regional development strategies that aim to promote economic growth and job creation in specific geographic areas. In this article, assuming the existence of a regulator, we analyse the possibility of applying a spatial model in regions with the highest levels of unemployment in Slovakia.

Keywords: regulator, spatial model, game theory, unemployment

1 INTRODUCTION

Nezamestnanosť je významný sociálno-ekonomický problém, ktorému čelí mnoho krajín po celom svete. Má vplyv na blahobyt jednotlivcov a širšie dôsledky pre celú ekonomiku. Tradičný prístup k riešeniu nezamestnanosti zahŕňa implementáciu politík, ako je zvyšovanie verejných výdavkov alebo zníženie úrokových sadzieb. Účinnosť takýchto politík sa však líši v závislosti od konkrétnych ekonomických podmienok a regionálneho rozloženia nezamestnanosti. V posledných rokoch rastie záujem o použitie priestorových modelov a teórie hier na riešenie problému nezamestnanosti. Analyzovaním priestorového rozloženia nezamestnanosti a interakcií medzi rôznymi regiónmi môžu politici vypracovať ciele a efektívne riešenia na zníženie nezamestnanosti. V tomto kontexte môže aplikácia priestorových modelov a teórie hier pomôcť identifikovať najvhodnejšie politické zásahy na zníženie nezamestnanosti a podporu udržateľného hospodárskeho rastu.

1.1 PROBLÉM NEZAMESTNANOSTI NA SLOVENSKU

Podľa Štatistického úradu Slovenskej republiky dosahuje miera nezamestnanosti na Slovensku v prvom štvrtroku 2023 približne 6,5 %. Pandémia COVID-19 výrazne ovplyvnila pracovný trh na Slovensku a spôsobila dočasný nárast miery nezamestnanosti. Vláda však

¹ Tento príspevok bol spracovaný s podporou grantu VEGA 1/0115/23 Aplikácia kooperatívnych modelov teorie hier v ekonómii a v medzinárodných vzťahoch .

zavedla rôzne opatrenia na podporu zamestnanosti a stimuláciu hospodárskej aktivity, vrátane programov na ochranu pracovných miest, investičných stimuly a projektov rozvoja infraštruktúry. Napriek týmto úsiliam je miera nezamestnanosti na Slovensku vyššia ako pred pandémiou a môžu byť potrebné ďalšie kroky na riešenie problému nezamestnanosti a podporu inkluzívneho hospodárskeho rastu.

Najviac postihnuté regióny na Slovensku v súvislosti s nezamestnanosťou sa menia v čase a závisia od rôznych faktorov, vrátane ekonomických trendov a regionálnych rozdielov. Avšak historicky, východné regióny Slovenska, ako sú Prešov a Košice, mali vyššie miery nezamestnanosti ako zvyšok krajiny. Región Banská Bystrica v strednom Slovensku mal historicky jednu z najvyšších mier nezamestnanosti v krajine a podľa najnovších dostupných údajov, v prvom štvrtroku roku 2023 bola miera nezamestnanosti v tomto regióne 9,8 %, čo je vyššie ako národný priemer 6,5 %. Je však dôležité poznamenať, že miera nezamestnanosti v regióne sa postupne znížila v priebehu rokov a v regióne sa uskutočnili rôzne iniciatívy zamerané na podporu hospodárskeho rastu a tvorbu pracovných miest (Ústredie práce, 2023). Tieto regióny sa tiež stretávajú s výzvami spojenými s depopuláciou a obmedzenými hospodárskymi príležitosťami, ktoré prispeli k pretrvávajúco vysokým úrovňam nezamestnanosti. Napriek tomu sa vynakladajú úsilie na podporu regionálneho rozvoja a vytváranie nových pracovných príležitostí v týchto oblastiach prostredníctvom opatrení, ako sú investičné stimuly, rozvoj infraštruktúry a podpora malých a stredných podnikov..

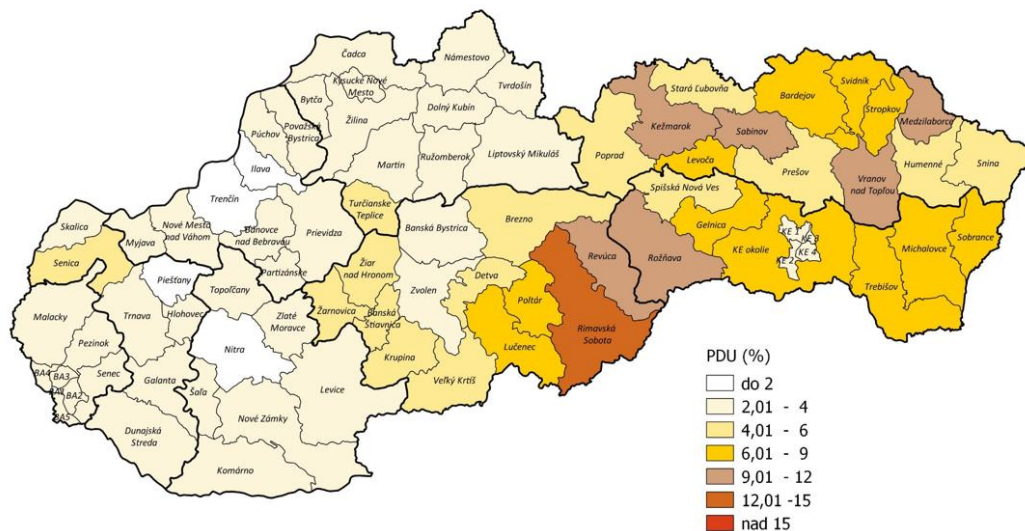


Figure 1 Map of Unemployment for region in 2022

(Ústredie práce, 2023)

V tomto mape môžeme vidieť rozloženie nezamestnanosti vo všetkých regiónoch Slovenska. Môžeme si všimnúť, že najviac postihnutým regiónom nezamestnanosťou je južný región Banská Bystrica. Jedným z faktorov ovplyvňujúcich tento región je dlhodobá nezamestnanosť, ktorá podľa môjho názoru môže byť spôsobená tým, že firmy v regióne nie sú dostatočne umiestnené v blízkosti uzlov (mestá) s najvyšším počtom nezamestnaných. Cestovanie niekoľko kilometrov denne do práce spôsobuje, že práca samotná sa stáva nevyhľadnou pre pracovníka.

Ďalej, na základe modelu v (Lopez, 2019), v ktorom sa uskutočnil podobný experiment v hlavnom meste Slovenska (Bratislava), táto publikácia sa odvoláva na publikáciu Lopez a Čičková (Lopez a Čičková, 2019), obidve založené na základnej myšlienke Hostellingu (Hostelling, 1929) o priestorovej konkurencii.

Z pohľadu teórie hier a priestorovej konkurencie môžeme povedať, že spoločnosť umiestnená bližšie k oblasti s najvyšším počtom nezamestnaných by mala mať výhodu oproti inej, ktorá je ďalej, pretože by si mohla vybrať nezamestnaných zamestnancov, ktorých potrebuje.

1.2 MODEL

Pomyslime si, že existujú dve spoločnosti, ktoré chcú investovať do oblasti s najvyššou nezamestnanosťou na Slovensku, ktorou je Banská Bystrica. Obe spoločnosti ponúkajú podobné alebo homogénne pracovné miesta s manuálnou prácou v továrňach, ktoré vyžadujú, aby zamestnanci boli každý deň prítomní v spoločnosti. V tomto type práce nie je možné pracovať na diaľku.

Myslime aj na to, že zamestnanci majú záujem optimalizovať svoj príjem a znížiť počet prejdenej kilometrov z mesta do mesta.

Nakoniec uvažujme, že regulátor preferuje niektoré mestá, a to mestá s najvyšším počtom nezamestnaných.

Uvažujme teraz s maximálnym rozdielom nákladov, ktoré je spotrebiteľ ochotný vynaložiť na nákup v preferovanej lokalite (Sequeira Lopez a Čičková, 2019). Takúto maximálnu výšku nákladov označme ako $\check{T}MAX$. Potom sa dopyt delí medzi preferovaný a nepreferovaný uzol na základe maximálneho rozdielu nákladov a aj uvedomelý spotrebiteľ bude zamestnavať sa v nepreferovanom uzle, ak by tento rozdiel prevýšil $\check{T}MAX$.

Zavedieme parameter $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$, ktorý predstavuje povedomie spoločnosti. To znamená, že λ % časť spoločnosti bude povedomá a bude nasledovať preferencie regulátora (t. j. bude zamestnávať sa na preferovaných miestach) bez ohľadu na vlastné náklady. Označme množinu preferovaných miest ako $PREF \subseteq V$. Potom môžeme definovať ďalšiu skupinu nezamestnaní ako $1 - \lambda$. To znamená tí čo aj tak by sa nechceli zamestnávať

Potom je možné definovať prvky maticového platu hráča 1 (A) vo forme nasledujúceho pseudokódu:

PROCEDURE

SET $n \in N, V = \{1,2, \dots, n\}, PREF \subseteq V, D = (d_{ij}), \mathbf{p}^{(1)} = (p_i^{(1)}), \mathbf{p}^{(2)} = (p_i^{(2)}), i, j \in V,$

$\lambda \in R, \lambda \in \langle 0,1 \rangle, t \in R^+$

DECLARE $\mathbf{N}^{(1)} = (n_{ij}^{(1)}), \mathbf{N}^{(2)} = (n_{ij}^{(2)}), \mathbf{A} = (a_{ij}), i, j \in V;$

LOOP ($i, j \in V$) **DO**

$n_{ij}^{(1)} = t * d_{ij} + p_i^{(1)};$

$n_{ij}^{(2)} = t * d_{ij} + p_i^{(2)};$

$a_{ij} = 0;$

LOOP ($k, i, j \in V$) **DO**

```

IF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $i \in PREF$  and  $j \in PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 1$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $i \notin PREF$  and  $j \in PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + (1 - \lambda)$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $i \in PREF$  and  $j \notin PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 1$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $i \notin PREF$  and  $j \notin PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 1$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} > n_{kj}^{(2)}$  and  $i \in PREF$  and  $j \notin PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + \lambda$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} = n_{kj}^{(2)}$  and  $i \in PREF$  and  $j \in PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 0.5$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} = n_{kj}^{(2)}$  and  $i \notin PREF$  and  $j \in PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 0.5(1 - \lambda)$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $i \in PREF$  and  $j \notin PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + \lambda + 0.5(1 - \lambda)$ ;
ELSEIF  $n_{ki}^{(1)} < n_{kj}^{(2)}$  and  $i \notin PREF$  and  $j \notin PREF$  DO  $a_{ij} = a_{ij} + 0.5$ ;
ENDIF
END

```

Je zrejmé, že za daných predpokladov je možné formulovať hru s konštantným súčtom, kde konštanta hry $c = n$ (pretože hráči zdieľajú neustály dopyt po uzloch) a prvky matrice \mathbf{B} možno vypočítať ako $\mathbf{B}_{n \times n} = \mathbf{C}_{n \times n} - \mathbf{A}_{n \times n}^T$, kde $\mathbf{C}_{n \times n} = \{c\}$.

1.3 ILUSTRÁČNÝ PRÍKLAD

Uvažujme s grafom s piatimi uzlami ($N=\{1,2,\dots,5\}$), pričom každý z nich je súčasne sídlom pracovnú silu. Hráčov predstavujú dve firmy (hráčov 1 a 2), každá má možnosť vybudovať si pobočku v jednom z uzlov. Firmy ponúkajú homogénny pracovne príležitosti.

Je známa matica najkratších vzdialeností $\mathbf{D}=\{d_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 5$ medzi všetkými uzlami:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Použitím vyššie uvedeného kódu hľadáme riešenie hry v zmiešaných stratégiách (solver IBM ILOG CPLEX 25.1.3). Rovnovážna stratégia hráča 1 je tak reprezentovaná vektorom $\mathbf{x}(0)=(0.185,0,0.538,0,0.277)T$, teda hráč 1 by mal investovať približne 54 % prostriedkov v uzle 3, približne 28 % prostriedkov v uzle 5 a približne 18 % v uzle 1. Zmiešaná rovnovážna stratégia hráča 2 je reprezentovaná vektorom $\mathbf{y}(0)=(0.6,0,0,0,0.4)T$, teda hráč 2 by mal investovať 60 % prostriedkov v uzle 1 a 40 % prostriedkov v uzle 2. Stredná hodnota hry je 3.8 pre hráča 1 (ponuka takmer 4 uzlov) a stredná hodnota hra pre hráča 2 je $c - 3,8 = 5 - 3,8 = 1,2$ t.j. ponuka z viac ako jedného uzla.

ZÁVER

Na základe výsledkov riešenia hry v zmiešaných stratégiách pomocou solvera IBM ILOG CPLEX 25.1.3 sme zistili, že optimálna stratégia hráča 1 by mala zahŕňať investíciu 54 % prostriedkov v uzle 3, 28 % v uzle 5 a 18 % v uzle 1. Optimálna stratégia hráča 2 by mala zahŕňať investíciu 60 % prostriedkov v uzle 1 a 40 % v uzle 2. Stredná hodnota hry pre hráča 1 je 3,8, čo znamená, že hráč dopytuje takmer 4 uzly. Stredná hodnota hry pre hráča 2 je 1,2, teda hráč dopytuje z viac ako jedného uzla. Tieto výsledky naznačujú, že použitím nášho modelu by bolo možné dosiahnuť vyvážený výsledok pre obe strany v rámci investovania v regióne s vysokou mierou nezamestnanosti v Slovensku.

Použitá literatúra

1. SEQUEIRA LOPEZ, Allan Jose a Zuzana ČIČKOVÁ. Spatial Competition With Regulatory Intervention. LOGIC 2019: Proceedings of the 4th Logistics International Conference, 23-25 May 2019, (Belgrade, Serbia). Belgrade: University of Belgrade, Faculty of Transport and Traffic Engineering, 2019, , 92-99. ISBN 978-86-7395-402-8.
2. SEQUEIRA LOPEZ, Allan Jose. Spatial Competition with Considering the Weight of the Nodes: Case Study: Priestorová konkurencia so zohľadnením váhy uzlov: prípadová štúdia. Ekonomické rozhľady: vedecký časopis Ekonomickej univerzity v Bratislave. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, 2019, 48(4), 463-476. ISSN 0323-262X.
3. HOTELLING, H. 1929. Stability in Competition. s.l.: The Economic Journal, 1929.

Kontaktné údaje

Ing. Allan Jose Sequeira Lopez, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta aplikovaných jazykov
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421) 918528099
email: allan.lopez@euba.sk

LIBERAL MIGRATION POLICY EFFECTS: A LITERATURE REVIEW

Veronika Miřková

Abstrakt

V článku predstavujeme prehľad literatúry, ktorá sa zameriava na účinky liberálnej migračnej politiky vo viacerých krajinách. Hlavný dôraz kladieme na analýzu vplyvu na mzdy, príjmy, remitencie a blahobyť.

Kľúčové slová: migračná politika, liberalizácia, prehľad

Abstract

The article presents an inspection of the literature review that focusses on the effects of liberal migration policy in several countries. The main attention lies on effect on wages, income, remittances, and welfare analysis.

Keywords: migration policy, liberalization, review

1 INTRODUCTION

Migration has become a topic of increasing importance, attracting attention from diverse segments of society globally. However, there is a notable dearth of scientific research exploring the economic consequences of migration. Much of the existing literature tends to be politically driven and suffers from predetermined biases, often produced by think tanks. Consequently, there is a need for robust academic research that can offer politically unbiased and scientifically rigorous results. The objective of this paper is to provide a comprehensive overview of the existing literature and research conducted thus far.

2 LITERATURE REVIEW

According to the standard economic paradigm, an increase in labor supply leads to a decline in wages. Pouliakas (2012) states that if wages are inflexible, an excess labor supply, particularly if immigrants and native labor are substitutes in production, should result in an increase in the unemployment rate. Dustman, Fabbri, and Preston (2005), however, argue that the impact of migration on native workers in terms of unemployment is minimal, while its impact on wages is evident and measurable. Several studies have examined the relationship between rising migrant numbers and wage levels. Friedberg and Hunt (1995) found that a 10% increase in labor supply in the US and other advanced Western economies resulted in less than a 1% decline in wages. Similarly, Longhi, Nijkamp, and Poot (2005) concluded that a 1% increase in the migrant share of the labor force led to a 0.119% reduction in wages.

Research conducted by Drinkwater, Levine, Lotti, and Pearlman (2003) reviews both theoretical and empirical studies examining the economic effects of labor mobility within Europe. The study focuses on three main areas: the impact of migration on the host country's labor market, on endogenous growth, and on overall economic growth. The authors explore various theoretical models that consider different aspects of the immigration process, with a particular emphasis on the influence of immigration on growth rates. Generally, these models suggest that migration, especially when composed of highly skilled workers, is likely to

contribute positively to both short-term and endogenous growth. However, while the departure of skilled workers from sending countries may have adverse effects, some authors argue that the migration of highly skilled workers can actually foster human capital formation in the source country. Nonetheless, reliable econometric estimates of how migration affects growth rates remain limited.

The number of doctoral degrees awarded to foreign students in the United States increased from 11.3% to 24.4% between 1976 and 2000. As over half of these students chose to remain in the United States, they made a substantial impact on the labor market and the well-being of domestic high-skilled workers. Borjas (2005) addresses the issue of increasing international student numbers, examining the benefits and costs associated with such programs. The high demand for jobs in specific fields often motivates students to pursue programs that offer broad future applicability. However, a sudden increase in the supply of skilled labor in a particular field is challenging to adapt to, especially for professionals such as doctors who are less likely to switch fields easily. In the healthcare sector, for example, a large influx of qualified students may lead to wage reductions, negatively affecting domestic skilled workers. Borjas concludes that a 10% increase in the supply of a narrowly defined highly skilled group due to migration results in a 3% wage reduction for that group, treating foreign workers as complete substitutes for domestic skilled workers. Consequently, domestic students may be compelled to change fields, which would ultimately lead to a decrease in wages across the entire high-skilled sector, including occupations less commonly pursued by immigrants.

Cortes (2008) investigates the impact of migration on price levels and purchasing power. The findings indicate that the migration wave in the 1990s increased the purchasing power of high-skilled natives by 0.65% but led to a 2.66% decrease in the purchasing power of low-skilled natives (those with incomplete secondary education). A 10% increase in the share of unskilled migrants in the labor force resulted in a 1.3% reduction in the price of services (e.g., cleaning, gardening) that do not require specific qualifications, and a 0.2% decrease in the price of non-tradable goods.

Opinions diverge on how migration affects economic growth and GDP. According to the House of Lords (2008), net migration (immigration minus emigration) has a minimal impact on GDP. The size of the economy is not a reliable indicator of migration's impact; instead, the focus should be on "income per capita." The House of Lords report further states that claims asserting net immigration is necessary to address labor and skills shortages lack analytical strength and fail to provide sufficient justification for supporting net immigration. Job vacancies, to some extent, indicate a healthy economy.

Marjit and Mandal (2016) incorporate informal economic activities into a model that considers trade, migration, and unemployment. Their general equilibrium framework explores the effects of a tariff cut, which increases wages and decreases unemployment when capital is a mobile factor across sectors such as agriculture, informal urban, and formal urban. The authors demonstrate that the existence of the informal sector reduces the cost of migration and encourages outmigration from the agricultural sector.

Wamasley, Aguiar, and Ahmed (2017) focus on labor migration management strategies as a means of addressing labor shortages and population growth in several East Asia-Pacific countries. Their global dynamic approach shows that countries in the region would benefit in terms of real incomes and real GDP by responding to major demographic changes over a 50-year period. Depending on their migration policies, some countries may transition from being net recipients to net senders of labor.

Valverde and Latorre (2020) investigate the economic effects of various immigration restrictions in the United Kingdom following Brexit. Their simulations consider reductions in

both net inflows and the stock of EU migrants over a five-year period (reducing net migrants by 87,000 workers). While migration is found to be compatible with wage increases, it exerts downward pressure on GDP per capita. The study concludes that migration restrictions would not offset the overall contraction in GDP per capita resulting from a hard Brexit. Previous work by Valverde and Lattore (2019) estimated GDP increases forgone in the UK ranging from 0.08% to 0.17%.

Baas and Brucker (2010) examine the effects of Eastern enlargement in trade and factor flows on Germany and the United Kingdom using a computable general equilibrium model that considers wage rigidities. Their findings indicate substantially larger effects than previous studies, with Eastern enlargement positively impacting real GDP, wages, and employment in both economies. This topic is further explored by Baas, Brucker, and Hauptmann (2010), employing two general equilibrium models that assume capital stocks adjust to labor supply shocks. The first model, incorporating a nested production function, examines the impact of migration on wages and unemployment across various labor market segments. The second model considers sector restructuring and the interaction of migration with trade and capital movements. The study assumes that the composition of the migrant workforce aligns with the receiving country's structure, resulting in only minor distributional effects across different labor market groups. To study migration aspects in the sending country, a detailed computable general equilibrium model is applied to the Moroccan economy by Karam and Decaluwe (2010), who demonstrate that international migration can reduce the unemployment rate and increase the wage rate.

3 CONCLUSION

This literature review highlights the limited research available on the economic implications of migration. While existing studies explore various aspects, including the impact on labor markets, growth rates, wages, and purchasing power, the scarcity of reliable econometric estimates hampers our understanding of the precise effects. It is crucial to undertake rigorous academic research that provides politically independent and scientifically robust findings to address the distorted perspectives often found in politically biased studies. Future research should aim to further investigate the economic consequences of migration and contribute to the development of evidence-based policies in this area.

Bibliography

1. BAAS, T., & BRUCKER, H. (2010). Macroeconomic Impact of Eastern Enlargement on Germany and UK: Evidence from a CGE Model. *Applied Economic Letters*, 17(2), 125-128. doi:10.1080/13504850701720098
2. BAAS, T., BRUCKER, H., & HAUPTMANN, A. (2010). Labor Mobility in the Enlarged EU: Who Wins, Who Loses? In M. Kahanec, & K. Zimmermann, *EU Labor Markets after Post-Enlargement Migration* (pp. 47-70). doi:10.1007/978-3-642-02242-5_2
3. BORJAS, G. J. (2005). The Labor-Market Impact of High-Skill Immigration. *The American Economic Review*, 95(2), 56-60.
4. CORTES, P. (2008). The Effect of Low-Skilled Immigration on US Prices: Evidence from CPI Data. *Journal of Political Economy*, 116(3), 381-422. doi:org/10.1086/589756

5. DRINKWATER, S., LEVINE, P., LOTTI, E., & PEARLMAN, J. (2003). *The Economic Impact of Migration: A Survey 5*. University of Surrey: School of Economics Discussion Papers 0103.
6. DUSTMAN, C., FABBRI, F., & PRESTON, I. (2005). The impact of immigration on the British labour market. *Economic Journal*, 115, 324-341.
7. FRIEDBERG, R., & HUNT, J. (1995). The Impact of Immigration on Host Country Wages, Employment and Growth. *Journal of Economic Perspectives*, 9(2), 23-44. doi:10.1257/jep.9.2.23
8. HOUSE OF LORDS, S. (2008). *The Economic Impact of Immigration: 1st Report of Session 2007-08 (Zv. 82)*. The Stationery Office.
9. KARAM, F., & DECALUWE, B. (2010). Is International Migration a Cure for Moroccan Unemployment? *Journal of North African Studies*, 15(4), 497-520. doi:10.1080/13629381003603006
10. LONGHI, S., NIJKAMP, P., & POOT J. (2005). A Meta-Analytical Assessment of the Effect of Immigration on Wages. *Journal of Economic Surveys*, 19(3), 451-477.
11. MARJIT, S., & MANDAL, B. (2016). International Trade and Unemployment - The Role of Informal Sector. *Economics & Politics*, 28(1), 8-22. doi:10.1111/ecpo.12069
12. POULIAKAS, K. (2012). The skill mismatch challenge in Europe. In *Employment and social developments in Europe* (s. 351-394).
13. VALVERDE, G., & LATORRE, M. (2020). A Computable General Equilibrium Analysis of Brexit: Barriers to Trade and Immigration Restrictions. *World Economy*, 43(3), 705-728. doi:10.1111/twec.12881
14. VALVERDE, G., & LATTORE, M. (2019). The Economic Impact of Potential Migration Policies in the UK after Brexit. *Contemporary Social Science*, 14(2), 208-225. doi:10.1080/21582041.2018.1558278
15. WAMASLEY, T., AGUIAR, A., & AHMED, S. A. (2017). Labour Migration and Economic Growth in East and South-East Asia. 40(1). doi:10.1111/TWEC.12334

Contact

Ing. Veronika Mitkova, PhD.

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta sociálnych a ekonomických vied

Mlynské luhy 4, 821 05 Bratislava, Slovakia

Tel: (421 2) 2066 9863

email: veronika.mitkova@fses.uniba.sk

Acknowledgements

This project was supported by APVV-22-0526 The Economic and Fiscal Effects of Migration in Slovakia: An Integrated Modeling Approach and VEGA 1/0668/22 Migration and Silver Economy: The Economic, Politic and Legislative Consequences of the Aging and Migration in the EU Countries.

THE CAPACITATED LOT SIZING PROBLEM (CLSP) USING THE GAMS SOFTWARE

Petr Pokorný

Abstract

The Capacitated Lot Sizing Model (CLSP) is a widely used concept to address the complex nature of production planning processes in different companies. The traditional inventory models (the EEQ - Economic Order Quantity model) are static. They assume constant demand and capacity over the planning horizon and therefore do not perform well in real life applications. When dealing with uncertain seasonal demand and various changing capacities, we have to choose other modelling tools to deal with these issues. In this paper we will focus on the CLSP concept and then extend its basic form to meet the real business needs. We will deal with a multi-machine (resource), multi-period and multi-item (product) CLSP. To support our assumptions, we will use GAMS (General Algebra Modelling Software) in our practical experiment.

Keywords: Lot Sizing, Capacity, GAMS

1 CAPACITATED LOT SIZING MODEL

Tying up free cash in inventory prevents a company from spending it on other assets or reducing its liabilities. Inventory carrying costs are part of the total supply chain costs that impact a company's operating profit through operating expenses. Cyclical inventory is managed to take advantage of economies of scale. Instead of following the sales/production strategy, known as the LOT-for-LOT strategy, it is advantageous to take advantage of ordering a quantity that will cover consumption over a certain planning horizon. Order size determination is very often a trade-off between inventory carrying costs and order placement costs, such as the Economic Order Quantity (EOQ) model. When faced with seasonally fluctuating demand and inconsistent capacity over the planning horizon, we must abandon the traditional assumptions of the Economic Order Quantity (EOQ) model and formulate a more general model known as the Capacitated Lot Sizing Problem (CLSP). When dealing with supply chain management problems, CLSPs are mostly used to optimize flows and stock levels within networks. (Fiala, 2005).

1.1 Literature Review

Finding the optimal balance between setting up a production line, ordering materials, incurring logistics and administrative costs, and deliberately holding inventory to minimise total costs has been a focus in almost all industries for many decades. This review is not intended to cover the vast literature available on the subject. We simply offer some milestone references published on CLSP. The lot-sizing problem has been studied and solution methods have been improved since the time of the famous work of (Wagner & Whitin, 1958) who proposed the algorithm for the dynamic lot-sizing problem. (Aggarwal & Park, 1993) focused on speeding up the algorithm for these problems, which has often posed challenges in real-world applications. To solve these complex problems, researchers often come up with heuristics that often outperform the traditional mixed linear optimization problems (Jones & Qian, 1997). Besides the heuristic approach, a branch of research has focused on so-called decomposition

methods. In (Chen & Chu, 2003), the authors deal with the Lagrangian relaxation combined with the local search method. (Degraeve & Jans, 2007) propose a new Dantzig-Wolfe decomposition and compare it with the traditional branch-and-bound method widely used in optimisation software packages. (Gupta & Magnusson, 2005) analyze a CLSP with sequence dependent setup costs. (Guner Goren, 2014) presents an interesting extension of the CLSC model where the setup costs of a product can be split from one planning period to the next. Another extension of the Wagner-Whitin (1958) algorithm that reduces the computational time by 50% is presented in (Chowdhury et al., 2018). Since the CLSP is practically motivated by the needs of the industry, (Ramya et al., 2019) investigates this model in process industries and provides a variety of mathematical models.

1.2 Inventory and Cost

Inventory costs can be further broken down into the following sub-categories.

- Storage cost is simply the unit cost of storage multiplied by the quantity of material stored. The storage cost per unit of material is a function of the total capacity of the warehouse, its technological equipment, the number of staff and technical expertise required, etc.
- Service costs include, for example, insurance and taxes. An average inventory value over time may also be subject to taxation.
- Risk costs relate to the potential risk of the stored material becoming obsolete or damaged.
- Disguised costs are well known in the literature as a way of preventing operational problems in the supply chain by holding higher levels of inventory. The Just-In-Time (JIT) methodology is based on unmasking inventories and exposing the real weak links in the supply chain.

We also assume that no shortages are allowed, so that demand must be met at the end of each planning period, and that a certain level of safety stock is maintained as a minimum. The safety stock represents an additional layer of inventory held to hedge against downstream demand uncertainty and potentially upstream lead time variance.

2 CLSP MATHEMATICAL FORMULATION

Let us therefore assume a portfolio consisting of N products or product groups ($i=1, 2, \dots, N$). The planning horizon spans T planning periods ($t=1, 2, \dots, T$). A demand forecast D_{it} is provided for each product ($i=1, 2, \dots, N$) in each period ($t=1, 2, \dots, T$). The number of resources available is M ($m=1, 2, \dots, M$) with finite capacities R_{mt} in each period ($t=1, 2, \dots, T$). The number of units of a resource r_m needed to produce a unit of a product i is denoted as r_{mi} .

The decision variables are:

x_{it} ... the quantity of a product i ($i=1, 2, \dots, N$) produced at time t ($t=1, 2, \dots, T$).

z_{it} ... the zero-one variable indicating a production of a product i ($i=1, 2, \dots, N$) at time t ($t=1, 2, \dots, T$).

I_{it} ... Inventory of a product i ($i=1, 2, \dots, N$) at the end of a period t ($t=1, 2, \dots, T$).

The parameters of the model are:

c_i ... Unit costs of holding a unit of inventory of a product i ($i=1, 2, \dots, N$).

s_i ... Setup or/and production costs of a product i ($i=1, 2, \dots, N$).

The above described model could be formulated as a *Mixed Integer Linear Programming Problem* (Fiala, 2002) :

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (c_i I_{it} + s_i z_{it}) \rightarrow \min$$

Subject to

$$x_{it} + I_{i,t-1} - I_{i,t} = D_{it} \quad t = 1, 2, \dots, T, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N (r_{im} x_{it} + r'_{im} z_{it}) \leq R_{mt} \quad t = 1, 2, \dots, T, m = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

$$x_{it} \leq K z_{it} \quad t = 1, 2, \dots, T, i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$x_{it} \geq 0; I_{it} \geq I^*_{it} \quad t = 1, 2, \dots, T, i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

$$z_{it} \in \{0,1\} \forall i, t \quad (5)$$

The aim is to minimize the total cost, which is the sum of holding and production costs. Obviously, more frequent setups will result in low inventory costs, whereas infrequent setups will increase the inventory value. The first constraint (1) is called the inventory balance constraint and assumes that no backlogs are allowed. This means that demand must be met in every period. The second constraint (2) ensures that there is no capacity overflow on any resource in any period. If K is a sufficiently small number, the third constraint (3) will force the system to create more setups. This is often referred to as the 'setup forcing constraint'. The remaining constraints ensure that the inventory never falls below the safety level. This means that no just-in-time approach is used. The quantities produced must be positive and the final integrality constraint is that z is a binary zero-one variable.

The model described above gives a basic idea of production planning problems in short and medium term planning horizons. The periods are usually weekly time buckets and the scheduling part is deliberately omitted as the complexity is a result of the MILP formulation. A GAMS representation is shown in the Appendix. The MILP requires a branch and bound to find an exact solution, and as the number of planning horizons or the size of the portfolio increases, the time required to solve the problem increases exponentially. This qualifies the CLSP as an NP-hard problem. There are numerous examples in the literature that show that the scheduling part (including dependent setup times and costs) can be reduced to a single machine problem. Since we are dealing with a multi-machine (resource) problem in a MILP formulation, we will omit the scheduling part. The goal is to obtain a production plan that makes the detailed scheduling problem feasible.

3 CONCLUSION

In this paper, we have discussed and analyzed the capacitated lot sizing model to meet the real business needs. We found the following characteristics:

- The model in MILP representation is very complex even in the small cases. It requires a large number of binary decision variables.
- We deliberately omitted the scheduling part, which would make the model extremely complicated and possibly infeasible.

- In modelling, we focused mainly on inventory policy and holding costs.
- Our main finding is that the overall level of stock is as important as the structure of the stock held in terms of different holding costs.
- The opportunity to use the GAMS software provided a nice and flexible environment for modelling and solving.
- The trial version of GAMS has limitations on the total number of variables (300), constraints (300) and binary variables (50). We used 48 binary variables in our model. The solver attempted to eliminate some of the constraints, mainly in the capacity section, by aggregation, first solving the MIP and fixing the binary variables, and then solving the remaining LP problem.
- The GAMS software is an excellent tool for modelling various problems ranging from simple LP to mixed integer nonlinear problems and many others. It can be easily extended by adding new solvers with new algorithms.
- One of the pitfalls of GAMS is data handling. Each table of data or parameters has to be inserted as text. There is no way to integrate the data input process with other software packages.

Literature:

1. AGGARWAL, A., PARK, J. (1993). Improved Algorithms for Economic Lot Size Problems. *Operations Research*, 41, 549–571.
2. CHEN, H., CHENGBIN, CH. 2003. (2003). Supply chain planning with order/setup costs and capacity constraints—A new Lagrangian relaxation approach. In: *Journal of Systems Science and Systems Engineering—J SYST SCI SYST ENG* (Vol. 12, p. 1748 vol.2).
3. CHOWDHURY, N., BAKI, M., AZAB, A. (2018). Dynamic Economic Lot-Sizing Problem: A new O(T) Algorithm for the Wagner-Whitin Model. In: *Computers & Industrial Engineering*, 117, 6–18.
4. DEGRAEVE, Z., JANS, R. (2007). A New Dantzig-Wolfe Reformulation and Branch-and-Price Algorithm for the Capacitated Lot Sizing Problem with Set Up Times. In: *Operations Research*, 55, 909–920.
5. FIALA, P. (2002). *Modelování a analýza produkčních systémů* (1. vyd.). Professional Publishing.
6. FIALA, P. (2005). *Modelování Dodavatelských Řetězců*. Professional Publishing.
7. GUNER G, H. (2014). The capacitated lot sizing problem with setup carryover and splitting. 2441–2451. In: [proceedings of IWLS 2014 - International Workshop on Lot Sizing](#)
8. GUPTA, D., MANGNUSON, T. (2005). The capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times. In: *Computers & Operations Research*, 32, 727–747.
9. JONES, P., QIAN, T. (1997). Efficient and Stable Heuristics For Lot Sizing Problems With Variable Unit Costs. Available at : researchgate.net
10. RAMYA, R., RAJENDRAN, C., ZIEGLER, H., MOHAPATRA, S., GANESH, K. (2019). Capacitated Lot Sizing Problems in Process Industries. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-01222-9>
11. WAGNER, H., WHITIN, T. (1958). Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. In: *Management Science*, 50, 1770–1774.
12. The GAMS – user’s manual, a download of a trial version of GAMS available on www.gams.com.

Appendix: The General CSLP Model - GAMS representation

```
$Title  Capacitated Lot Sizing Problem
$inlinecom { }
$Ontext
```

A multi-product , multi-machine and multi-period
Capacitated Lot sizing problem in MILP formulation.

```
$Offtext
```

```
Sets n "products" / MLB, PTB, PTC, PTH /
     t "periods" /1*8/
     m "machine" /FFKSBOX20, FFKSBOX20PIN, LTKSBOX20/;
```

table d(n,t) demand for product per period (mio)

	1	2	3	4	5	6	7	8
MLB	20	20	20	20	20	20	20	20
PTB	20	20	20	20	20	20	20	20
PTC	5	5	5	5	5	5	5	5
PTH	2	2	2	2	2	2	2	2

table SSt(n,t) Safety stock for product per period (mio)

	1	2	3	4	5	6	7	8
MLB	2	2	2	2	2	2	2	2
PTB	3	3	3	3	3	3	3	3
PTC	1	1	1	1	1	1	1	1
PTH	1	1	1	1	1	1	1	1

Table Param(n,*) holding and setup costs plus max & min production lot upper bound

	holding	setup	Max_Lot	Min_Lot
MLB	.2	20	60	4
PTB	.3	30	60	4
PTC	.4	40	40	4
PTH	.15	15	50	4

Table Cap(m,t) capacity per machine

	1	2	3	4	5	6	7	8
FFKSBOX20	60	60	60	60	60	60	60	60
FFKSBOX20PIN	30	30	30	40	50	30	0	30
LTKSBOX20	10	15	15	30	0	15	0	30

Table MPr(m,n) Machine product relationship

	MLB	PTB	PTC	PTH
FFKSBOX20	1	0	0	0
FFKSBOX20PIN	0	1	0	0
LTKSBOX20	0	0	1	1

Variables

cost

x(n,t)

z(n,t)

I(n,t);

positive variables x,I;

```

binary variables z;

{ # --> initial inventories assigned to the following values:}
I.l('MLB','1') = 50 ;
I.l('PTB','1') = 60 ;
I.l('PTC','1') = 40 ;
I.l('PTH','1') = 10 ;

Equations      invb(n,t) 'Inventory balance'
                Capb(m,t) 'Capacity balance'
                Max_lot_bound(n,t) 'Maximal production lot'
                Min_lot_bound(n,t) 'Minimal production lot'
                Min_Stock(n,t) 'Stock > Safety stock'
                Total_Costs 'Holding + Inventory ' ;

invb(n,t)..    I(n,t) =e= I(n,t-1) + x(n,t) - d(n,t);

Capb(m,t)..    sum( n, MPr(m,n)*x(n,t))=l=Cap(m,t);

Max_lot_bound(n,t).. x(n,t)=l=param(n,'Max_Lot')*z(n,t);

Min_lot_bound(n,t).. x(n,t)=g=param(n,'Min_Lot')*z(n,t);

Min_Stock(n,t)..    I(n,t)=g=SSt(n,t);

Total_Costs..    cost =e= sum((n,t),param(n,'holding')*I(n,t)
+param(n,'setup')*z(n,t)) ;

```

Kontaktné údaje

Ing. Petr Pokorný

Prague University of Economics and Business,

Faculty of Informatics and Statistics, Department of Econometrics,

W. Churchill Sq. 1938/4, 130 67 Praha 3,

Tel: 724 778 759

email: pokornyp@vse.cz

SLOVENSKÁ EKONOMIKA A ŠOKY CELKOVEJ PRODUKTIVITY FAKTOROV - JEDNODUCHÝ DSGE MODEL¹

SLOVAK ECONOMY AND THE TOTAL FACTOR PRODUCTIVITY SHOCKS - A SIMPLE DSGE MODEL

Karol Szomolányi, Martin Lukáčik, Adriana Lukáčiková

Abstrakt

V príspevku porovnávame cyklické vlastnosti údajov generovaných jednoduchým dynamickým stochastickým modelom všeobecnej rovnováhy so šokmi celkovej produktivity a cyklickými vlastnosťami vybraných slovenských makroekonomických údajov. Zameriavame sa na volatilitu, sériovú koreláciu a krížovú koreláciu. DSGE model je riešený pomocou log-linearizačných techník.

Kľúčové slová: DSGE model, log-linearizácia, celková produktivita faktorov, slovenská ekonomika

Abstract

This paper compares the cyclical properties of data generated by a simple dynamic stochastic general equilibrium model with total productivity shocks and the cyclical properties of selected Slovak macroeconomic data. It focuses on volatility, serial correlation, and cross-correlation. The model is solved using linearization techniques.

Keywords: DSGE model, log-linearization, total factor productivity, Slovak economy

1 ÚVOD

Torres (2016) uvažuje, že základným cieľom ekonomickej analýzy je pochopiť, ako funguje ekonomika a uskutočňovať experimenty na štúdium účinkov konkrétnej zmeny alebo šoku na ekonomiku. Tento druh analýzy predstavuje obrovské ťažkosti v dôsledku zložitosti javov, ktoré chceme vysvetliť. Cieľ – vybudovanie modelu reálneho sveta, pomocou ktorého sa dá vykonať množstvo experimentov a vopred spoznať účinky šokov alebo zmien v hospodárskej politike na makroekonomickej úrovni – umožňujú v najväčšej miere dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy. DSGE modely sú vytvorené z mikroekonomických východísk, teda vychádzajú z maximalizácie užitočnosti domácností, maximalizácie zisku firiem a podmienok rovnováhy trhov, tak aby boli všetky trhy súčasne v rovnováhe. Predpokladajú racionálne správanie sa všetkých ekonomických agentov.

Základná štruktúra uvažovaného DSGE modelu je jednoduchá. Popisuje správanie dvoch agentov v zatvorenej ekonomike bez vlády – spotrebiteľov resp. domácností na jednej strane a firiem na druhej. V príspevku porovnávame cyklické vlastnosti údajov generovaných jednoduchým dynamickým stochastickým modelom všeobecnej rovnováhy so šokmi celkovej produktivity a cyklickými vlastnosťami vybraných slovenských makroekonomických údajov. Zameriavame sa na volatilitu, sériovú koreláciu a krížovú koreláciu. Pri kalibrovaní

¹ Príspevok vznikol s podporou projektov VEGA 1/0211/21 "Ekonometrická analýza makroekonomických dopadov vplyvu pandémie vo svete s dôrazom na vývoj ekonomík EÚ a zvlášť ekonomiky Slovenska" a VEGA 1/0047/23 "Význam priestorových spillover efektov v kontexte priority EÚ zelensia a bezuhlíková Európa".

parametrov modelu zvolíme hodnoty, ktoré vyplývajú zo skutočných pozorovaní o slovenskej ekonomike a ktoré čo najviac zodpovedajú danému porovnaniu.

2 JEDNODUCHÝ DSGE MODEL

Predpokladajme jednoduchý DSGE model, kde správanie spotrebiteľa je popísané funkciou:

$$V(k_t, z_t) = \max_{k_{t+1}} \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \beta V(k_{t+1}, z_{t+1}) \quad (1)$$

s rozpočtovým ohraničením:

$$c_t = w_t + (1 + r_t - \delta)k_t - k_{t+1} \quad (2)$$

kde k_t je stav kapitálu v čase t , z_t je percentuálna odchýlka technológie od jej dlhodobej hodnoty v čase t , r_t je sadzba za prenájom kapitálu v čase t , w_t je mzdová sadzba v čase t a c_t reprezentuje súkromnú spotrebu v čase t . Okrem týchto premenných uvažujeme vo vzťahoch (1) a (2) parameter γ , ktorý predstavuje parameter relatívnej averzie k riziku, parameter β označujúci diskontný faktor a parameter δ , ktorým je miera znehodnotenia kapitálu. Kombináciou podmienky prvého rádu:

$$c_t^{-\gamma} = \beta V_k(k_{t+1}, z_{t+1}) \quad (3)$$

a podmienky riešenia:

$$\beta V_k(k_t, z_t) = c_t^{-\gamma} (1 + r_t - \delta) \quad (4)$$

získame Eulerovu rovnicu v tvare:

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma} (1 + r_{t+1} - \delta) \quad (5)$$

Správanie firmy popisujú vzťahy:

$$y_t = k_t^\alpha e^{(1-\alpha)z_t} \quad (6)$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t} \quad (7)$$

$$w_t = (1 - \alpha) y_t \quad (8)$$

kde parameter α predstavuje podiel kapitálu na produkcii.

Nakoniec do modelu doplníme predpoklad o dynamike vývoja percentuálnej odchýlky technológie od jej dlhodobej hodnoty z_t podľa vzťahu:

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (9)$$

kde ε_t predstavuje náhodnú zložku z_t s rozptylom σ^2 a ρ je autokorelačný koeficient z_t .

3 RIEŠENIE MODELU

Najskôr definujeme y_t , r_t , w_t , c_t , i_t a u_t ako funkcie stavu (k_t, z_t) pomocou rozpočtového ohraničenia a podmienok vyplývajúcich z úlohy firmy, kde i_t označuje investície:

$$y_t = k_t^\alpha e^{(1-\alpha)z_t}$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_t}$$

$$w_t = (1 - \alpha) y_t$$

$$c_t = w_t + (1 + r_t - \delta) k_t - k_{t+1}$$

$$i_t = y_t - c_t$$

$$u_t = \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

Všeobecne, zapíšme funkciu $\Gamma(X_{t+1}, X_t, X_{t-1}, Y_{t+1}, Y_t, Z_{t+1}, Z_t) = 0$ vytvorenú na základe Eulerovej rovnice, kde množinu našich endogénnych stavových premenných tvoria $X_t = k_{t+1}$, a $Z_t = z_t$. Funkcia Gama bude mať tvar Eulerovej funkcie:

$$\Gamma = c_t^{-\gamma} - \beta c_{t+1}^{-\gamma} (1 + r_{t+1} - \delta)$$

Po nastavení hodnôt parametrov α , β , γ , δ , σ a ρ hľadáme rovnovážne riešenie pre všetky premenné y_t , r_t , w_t , c_t , i_t a u_t .

Ďalším krokom je nájsť derivácie funkcie Gama a použiť ich na riešenie parametrov funkcie politiky. Log-linearizáciou $\Gamma(X_{t+1}, X_t, X_{t-1}, Z_{t+1}, Z_t) = 0$ okolo rovnovážneho stavu dostaneme aproximáciu (Klein, 2000):

$$A\tilde{X}_t + B\tilde{X}_{t-1} + C\tilde{Y}_t + D\tilde{Z}_t = 0$$

$$E_t \{ F\tilde{X}_{t+1} + G\tilde{X}_t + H\tilde{X}_{t-1} + J\tilde{Y}_{t+1} + K\tilde{Y}_t + L\tilde{Z}_{t+1} + M\tilde{Z}_t \} = 0$$

Prvá z týchto rovníc aproximuje rovnice definujúce akékoľvek skokové premenné, zatiaľ čo druhá rovnica aproximuje rovnice definujúce endogénnu stavovú premennú. Keďže neuvažujeme žiadne skokové premenné, prvú rovnicu nemusíme uvažovať. Potom pre druhú rovnicu platí:

$$E_t \{ F\tilde{X}_{t+1} + G\tilde{X}_t + H\tilde{X}_{t-1} + L\tilde{Z}_{t+1} + M\tilde{Z}_t \} = 0$$

Linearizované funkcie politiky a skoku majú tvar:

$$\tilde{X}_t = P\tilde{X}_{t-1} + Q\tilde{Z}_t \quad \tilde{Y}_t = R\tilde{X}_{t-1} + S\tilde{Z}_t$$

kde $\tilde{X}_t = X_t - \bar{X}$, $\tilde{Y}_t = Y_t - \bar{Y}$ a $\tilde{Z}_t = Z_t - \bar{Z}$ v prípade obyčajnej linearizácie

a $\tilde{X}_t = \frac{X_t - X_t - \bar{X}}{X_t - \bar{X}}$, $\tilde{Y}_t = \frac{Y_t - Y_t - \bar{Y}}{Y_t - \bar{Y}}$ a $\tilde{Z}_t = \frac{Z_t - Z_t - \bar{Z}}{Z_t - \bar{Z}}$ v prípade log-linearizácie.

Nakoniec simulujeme celý model a generujeme historický priebeh všetkých premenných.

4 POROVNANIE CYKlickÝCH VLASTNOSTÍ ÚDAJOV GENEROVANÝCH MODELOM A SLOVENSKEJ EKONOMIKY

Pre výpočty v metodologickej časti sme využili algoritmy Phillipa (2018).

Údaje reálneho HDP, reálnej spotreby a reálnych investícií sme získali z databázy EUROSTAT [2]. Aplikovaním frekvenčného filtra Baxterovej a Kinga (1999) s voľbou štandardne využívaných parametrov zodpovedajúcich veľkosti typického hospodárskeho cyklu od 4 do 32 štvrtrokov a 12 štvrtrokov pre kľzavý priemer, sme vytvorili ich cyklické zložky. Momenty cyklických zložiek sú v tabuľke 1.

	<i>y</i>	<i>c</i>	<i>i</i>
standard deviations	0,0209	0,0179	0,0937
standard deviations relative to GDP	1,0000	0,8559	4,4836
correlations with GDP	1,0000	0,6190	0,7356
autocorrelations	0,9109	0,9273	0,8812

Tabuľka 1: Momenty cyklických zložiek

Na simuláciu modelu (1-9) sme využili hodnoty parametrov podielu kapitálu na HDP a miery znehodnotenia kapitálu tak, aby zodpovedali priemerným hodnotám z tabuliek Penn World Tables [3]: $\alpha = 0,5$; $\delta = 0,05$. Hodnoty ostatných parametrov – štandardnej odchýlky celkovej produktivity faktorov σ , miery autokorelácie celkovej produktivity faktorov ρ , a miery rizikovej averzie spotrebiteľa γ – sme prispôbili tak, aby momenty časových radov simulovaných modelom čo najviac zodpovedali momentom v tabuľke 1.

Simuláciu modelu sme aplikovali v nasledovných krokoch: vypočítali sme hodnoty premenných v ustálenom stave, generovali sme časový rad celkovej produktivity faktorov (9), dosadením hodnôt v ustálenom stave za štartovacie hodnoty časových radov sme vypočítali ich hodnoty v nasledovných obdobiach. Rozsah simulovaných časových radov bol 100 000, aby sme získali presné výpočty momentov.

Proces sme opakovali pre rôzne kombinácie hodnôt σ , ρ , a γ , aby sa modelové momenty priblížili pozorovaným v tabuľke 1. Dosadením za parametre hodnoty: $\sigma = 0,018$; $\rho = 0,8$ a $\gamma = 1$ možno získať porovnanie skutočných a modelových momentov v tabuľke 2.

<i>Skutočnosť</i>	<i>y</i>	<i>c</i>	<i>i</i>
standard deviations	0,0209	0,0179	0,0937
standard deviations relative to GDP	1,0000	0,8559	4,4836
correlations with GDP	1,0000	0,6190	0,7356
autocorrelations	0,9109	0,9273	0,8812
<i>Model</i>	<i>y</i>	<i>c</i>	<i>i</i>
standard deviations	0,0204	0,0184	0,0481
standard deviations relative to GDP	1,0000	0,9034	2,3595
correlations with GDP	1,0000	0,8328	0,7511
autocorrelations	0,8965	0,5794	0,7860

Tabuľka 2: Porovnanie skutočných a modelových momentov

Uspokojivšie výsledky získame, ak v pozorovaniach zmeníme definíciu výstupu $y = c + i$. Abstrahujeme tak od priamych vplyvov obchodných šokov a fiškálnej politiky na výstup. V tabuľke 3 v spodnom paneli sú zodpovedajúce momenty pozorovaných cyklických zložiek. Modelové hodnoty momentov v hornom paneli sme získali kombináciou $\sigma = 0,031$; $\rho = 0,8$ a $\gamma = 1$.

<i>Skutočnosť</i>	<i>y</i>	<i>c</i>	<i>i</i>
standard deviations	0.0351	0.0179	0.0937
standard deviations relative to GDP	1.0000	0.5102	2.6724
correlations with GDP	1.0000	0.7355	0.9433
autocorrelations	0.8929	0.9273	0.8812
<i>Model</i>	<i>y</i>	<i>c</i>	<i>i</i>
standard deviations	0.0346	0.0315	0.0823
standard deviations relative to GDP	1.0000	0.9083	2.3743
correlations with GDP	1.0000	0.8313	0.7459
autocorrelations	0.8936	0.5709	0.7797

Tabuľka 3: Porovnanie skutočných a modelových momentov so zmeneným výstupom

5 ZÁVER

Podľa výsledkov nášho výskumu, cyklickú charakteristiku slovenskej ekonomiky nemožno vysvetliť iba náhodnými zmenami celkovej produktivity faktorov (tabuľka 2). Podľa volatility a autokorelácie reálneho HDP možno nastaviť volatilitu a mieru autokorelácie celkovej produktivity faktorov σ , ρ . Tieto hodnoty nezodpovedajú volatilitu investícií. Ak by sme znižovali hodnotu ρ , aby sme zvyšovali volatilitu investícií, nedokázali by sme vysvetliť mieru autokorelácie HDP. Nastavovaním miery averzie rizika γ nemožno získať hodnoty volatility spotreby a investícií a ich korelácie s HDP. Znižovaním hodnoty je spotreba menej procyklická, ale volatilnejšia.

Ak sme vypočítali momenty pozorovaných cyklických zložiek s výstupom $y = c + i$, priblížili sme modelovú hodnotu volatility investícií skutočnej (tabuľka 3). Možno preto usudzovať, že priame vplyvy obchodných šokov a fiškálnej politiky na hospodársky cyklus sú významné. Volatilitu spotreby a investícií a ich koreláciu s HDP možno ďalej upraviť rozšírením modelu o prispôsobovacie náklady kapitálu a finančné nedokonalosti.

Použitá literatúra

1. BAXTER, M., KING, R. G. 1999. Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. In: *The Review of Economics and Statistics*, roč. 81, č. 4, s. 575-593.
2. EUROSTAT Database. 2023. Available at: <https://ec.europa.eu/eurostat/web/main/data/database> (Accessed: 24 March 2023).
3. FEENSTRA, R., C., INKLAAR, R., TIMMER, M. P. 2015. The Next Generation of the Penn World Table. In: *American Economic Review*, roč. 105, č. 10, s. 3150-3182.
4. KLEIN, P. 2000. Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. In: *Journal of Economic Dynamics and Control*, roč. 24, č. 10, s. 1405-1423.
5. PHILLIPS, K. L. 2018. *Solving and Simulating a DSGE Model using the LinApp Package in Python*. In: QuantEcon Notes, July 2018. Available at: https://github.com/kerkphil/Jupyter_Notebooks (Accessed: 24 March 2023).
6. TORRES, J. L. 2016. *Introduction to Dynamic Macroeconomic General Equilibrium Models*, 2nd edition. Vernon Press.

Kontaktné údaje

doc. Ing. Karol Szomolányi, PhD., prof. Ing. Martin Lukáčik, PhD., Ing. Adriana Lukáčiková, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
Tel: (421 2) 67 295 822, (421 2) 67 295 829
email: karol.szomolan@euba.sk, martin.lukacik@euba.sk, adriana.lukacikova@euba.sk

VYUŽITIE METÓD NELINEÁRNEJ REGRESIE NA MODELOVANIE ÚMRTNOSTI POPULÁCIE

USE OF NONLINEAR REGRESSION METHODS FOR THE MODELING OF THE POPULATION MORTALITY

Tatiana Šoltésová, Erik Šoltés

Abstrakt

Cieľom článku je poukázať na využitie regresnej analýzy na odhad parametrov vybraných parametrických modelov úmrtnosti, známych ako zákony úmrtnosti. Na modely úmrtnosti nazeráme ako na štatistické (stochastické) modely, pre ktoré na základe empirických údajov o pravdepodobnosti úmrtia v rôznom veku osôb je potrebné odhadnúť parametre regresnej funkcie. Parametre vybraných modelov úmrtnosti budeme odhadovať iteračnými metódami nelineárnej regresnej analýzy v softvéri SAS, resp. prostredníctvom jeho aplikácie SAS Enterprise Guide.

Kľúčové slová: *nelineárna regresia, iteračná metóda, zákony úmrtnosti, SAS Enterprise Guide*

Abstract

The aim of the article is to refer the use of regression analysis to estimate the parameters of selected parametric mortality models, known as mortality laws. We are looking at mortality models as statistical (stochastic) models for which it is necessary to estimate the parameters of regression function based on empirical data of age specific mortality rates. The parameters of selected mortality models will be estimated by iterative methods of nonlinear regression analysis in the SAS software, through its application SAS Enterprise Guide.

Keywords: *nonlinear regression, iterative method, mortality laws, SAS Enterprise Guide*

1 ÚMRTNOSTNÉ SPRÁVANIE POPULÁCIE A JEHO VPLYV NA ŽIVOTNÉ POISTENIE

Všetky zmeny prebiehajúce v spoločnosti, teda aj demografické, sa priamo odrážajú v poisťovacích činnostiach. Z demografických ukazovateľov je práve pre životné poistenie dôležité sledovať v rámci populácie hlavne úmrtnosť. V súčasnosti, keď v celej Európe už niekoľko desiatok rokov prebieha starnutie populácie, je problematika sledovania vplyvu očakávanej dĺžky života populácie na dôchodkový systém často diskutovanou témou. Nepriaznivý demografický vývoj, ktorý zasahuje aj Slovensko, je charakterizovaný nízkou pôrodnosťou a predlžovaním strednej dĺžky života. Tieto dva demografické javy (pôrodnosť a úmrtnosť), ktoré významne menia štruktúru populácie, majú v súčasnosti za následok starnutie populácie. Hlavnými príčinami starnutia populácie je teda znižovanie úmrtnosti (zlepšujúce sa životné podmienky a zdravotná starostlivosť), pokles pôrodnosti a v niektorých regiónoch je to aj emigrácia obyvateľstva v produktívnom, resp. reprodukčnom veku.

Priemerná dĺžka života za posledné desaťročia výrazne vzrástla a stále sa mení, čoho dôsledkom je dlhšia doba vyplácania predovšetkým doživotných poistných dôchodkov (napríklad z nasporenej sumy v II. pilieri pri odchode do dôchodku) ako aj ich zvýšená

očakávaná súčasná hodnota. Oceňovanie produktov životného poistenia prebieha na základe súčasných očakávaní o budúcom vývoji úmrtnosti. Zmenou očakávanej úmrtnosti sa poisťovne vystavujú riziku, že ich záväzky z poisťných produktov môžu výrazne prekročiť očakávanú hodnotu. Toto riziko vzniká pri poklese úmrtnosti v prípade dôchodkových produktov alebo pri zvýšení úmrtnosti v prípade produktov kryjúcich riziko smrti, a preto problematika vekového modelovania a analýzy úmrtnosti je a vždy bude dôležitou súčasťou práce v poisťnej praxi.

1.1 Parametrické modely úmrtnosti

Parametrické modely úmrtnosti (Tab. 1) sa pokúšajú zachytiť úmrtnostné správanie pomocou matematického modelu s istým počtom parametrov (A, B, C, D, G, H, K , atď.). Tab. 1 obsahuje vybrané modely (zákony úmrtnosti) spolu s menom autora a rokom vzniku (pokiaľ je známy). Prvé pokusy o modelovanie úmrtnosti boli založené na deterministických scenároch. To viedlo k vytvoreniu zákonov úmrtnosti, ktoré opisujú úmrtnosť v pevnom časovom okamihu, a tým podceňujú zlepšenie úmrtnosti, pretože skutočná úmrtnosť je stochastická. Najčastejšie sú tieto modely vyjadrené ako funkcie úmrtnosti, ktorými sú miera úmrtnosti q_x (pravdepodobnosť, že osoba vo veku x sa nedožije nasledujúceho roka), intenzita úmrtnosti μ_x (je analogickým vyjadrením miery úmrtnosti pomocou spojitaj náhodnej veličiny, predstavuje pravdepodobnosť ukončenia života v časovom intervale $(t, t + dt)$, pričom $dt \rightarrow 0$) a centrálna miera úmrtnosti m_x (podáva informáciu o počte zomretých osôb pripadajúcich na 1 000 obyvateľov stredného stavu vo vybranom kalendárnom roku).

Tab. 1 Vybrané parametrické modely úmrtnosti (zákony úmrtnosti)

Autor	Rok	Model
<i>Gompertz</i>	1825	$\mu_x = Bc^x$
<i>Makeham</i>	1867	$\mu_x = A + Bc^x$
<i>Perks</i>	1932	$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1} + Dc^x$
<i>Weibull</i>	1951	$\mu_x = kx^n$
<i>Van der Maen</i>	1943	$\mu_x = A + Bx + Cx^2 + \frac{I}{N - x}$
<i>Beard-Makeham</i>	1971	$\mu_x = \frac{KAe^{Bx}}{1 + Ae^{Bx}} + C$
<i>Gamma-Gompertz</i>	1979	$\mu_x = \frac{AG}{1 + \frac{AG}{B}(e^{Bx} - 1)}$
<i>Heligman-Pollard</i>	1980	$q(x) = A(x+B)^C + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1 + KGH^x}$
<i>Kannisto</i>	1994	$\mu_x = \frac{B \cdot e^{\alpha x}}{1 + B \cdot e^{\alpha x}}$
<i>Coale-Kisker</i>	–	$m_x = e^{Ax^2 + Bx + C}$

Zdroj: vlastné spracovanie

Údaje o vekovej úmrtnosti populácie potrebné na výpočty v životnom poistení sú uvedené v úmrtnostných tabuľkách, ktoré si môže poisťovňa vytvárať sama na základe svojich skúseností o úmrtnosti vo svojom poisťnom portfóliu alebo môže použiť informácie o úmrtnostnom správaní populácie v danej krajine. Tieto informácie sa nachádzajú na webovej stránke Štatistického úradu Slovenskej republiky (ďalej „ŠÚ SR“) v časti s názvom Tabuľky

života a sú členené nielen podľa pohlavia, ale aj podľa regionálneho členenia (kraje, okresy, mestá a iné obce).

Zákony úmrtnosti, resp. parametrické modely úmrtnosti patria k deterministickým modelom. Predpokladáme pri nich, že hodnoty (napr. vekové miery úmrtnosti, intenzity úmrtnosti) pozorované v danom roku môžu byť preložené nejakým trendom, teda pomocou nejakej matematickej funkcie a môžeme tak predpokladať, že tento trend bude pokračovať aj v najbližších rokoch. Parametrické modely úmrtnosti sú použiteľné v populačných projekciách vďaka analýze historických trendov vývoja uvažovaných parametrov modelov. Podľa Gavrilovovej a Gavrilova (2011) predstavujú parametrické modely úmrtnosti užitočný nástroj v demografických i aktuárskych prognózach úmrtnosti.

2 ITERAČNÉ METÓDY ODHADU PARAMETROV NELINEÁRNYCH REGRESNÝCH MODELOV

Zákony úmrtnosti sú vyjadrené nelineárnymi funkciami, ktoré obyčajne nie sú linearizovateľné (nedajú sa jednoduchými matematickými transformáciami previesť do lineárneho tvaru) a na odhad parametrov týchto funkcií využívame nelineárnu regresnú analýzu. Nelineárna regresná analýza na rozdiel od lineárnej regresnej analýzy nevyužíva metódu najmenších štvorcov, ale iteračné metódy.

Medzi iteračné metódy používané na odhad parametrov nelineárnych regresných modelov patria:

- Gaussova-Newtonova metóda,
- gradientná metóda,
- Levenbergova-Marquardtova metóda.

Regresná funkcia je matematická funkcia, ktorá je daná príslušným predpisom v zákone úmrtnosti, a jej parametre sú neznáme. Vo všetkých troch metódach sa uvažuje o nelineárnej regresnej funkcii s vektorom parametrov $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p)$. Cieľom je získať také odhady parametrov regresnej funkcie, pre ktoré je súčet štvorcov odchýlok regresnej funkcie od hodnôt vysvetľovanej premennej čo najmenší, čo zapíšeme takto:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})]^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$

Všetky metódy podľa [10] vychádzajú z počiatočných (vstupných) odhadov parametrov $\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \dots \ \theta_p^0)$, ktoré sa v jednotlivých iteráciách vylepšujú. V -te vylepšené odhady získané vo v -tej iterácii, pričom $v = 0, 1, 2, \dots$, sa označujú takto $\boldsymbol{\theta}^v = (\theta_1^v \ \theta_2^v \ \dots \ \theta_p^v)$. V každej iterácii sa počíta hodnota funkcie $S(\boldsymbol{\theta}^v)$, pričom by malo platiť $S(\boldsymbol{\theta}^{v+1}) \leq S(\boldsymbol{\theta}^v)$, čo znamená, že regresná funkcia s parametrami odhadnutými v iterácii $(v+1)$ lepšie opisuje cieľovú premennú (vysvetľovanú premennú) ako regresná funkcia s parametrami odhadnutými vo v -tej iterácii.

Gaussova-Newtonova metóda (metóda linearizácie) využíva vo v -tej iterácii linearizáciu prostredníctvom Taylorovho rozvoja 1. rádu v bode $\boldsymbol{\theta}^v$:

$$f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) \doteq f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}^v) + \sum_{j=1}^p \left\{ \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^v} \cdot (\theta_j - \theta_j^v) \right\} \quad (2)$$

V každej iterácii ($v = 0, 1, 2, \dots$) sa urobia substitúcie:

$$f_i^v = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}^v) \quad \beta_j^v = \theta_j - \theta_j^v \quad z_{ij}^v = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right]_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^v} \quad (3)$$

čím sa získa lineárny regresný model:

$$\underbrace{y_i - f_i^v}_{y_i^v} = \sum_{j=1}^p \beta_j^v z_{ij}^v + \varepsilon_i \quad \text{resp.} \quad \mathbf{y}^v = \mathbf{Z}^v \cdot \boldsymbol{\beta}^v + \boldsymbol{\varepsilon}^v \quad (4)$$

Vektor parametrov $\boldsymbol{\beta}^v$ tohto regresného modelu sa odhadne metódou najmenších štvorcov a z jeho odhadu \mathbf{b}^v sa vypočíta vektor vylepšených odhadov pre iteráciu ($v + 1$) takto:

$$\boldsymbol{\theta}^{v+1} = \boldsymbol{\theta}^v + \mathbf{b}^v \quad (5)$$

Celý proces pokračuje až do iterácie, v ktorej je splnené konvergenčné kritérium (bližšie pozri [8]). Nevýhodou tejto metódy je, že niekedy konverguje veľmi pomaly, čo vedie k veľkému počtu iterácií. V určitých prípadoch môže dokonca oscilovať. Vtedy sa rast a pokles súčtu štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$ opakuje až pokiaľ sa hodnota nestabilizuje.

Základná stratégia *gradientnej metódy* (*metódy najstrmšieho zostupu*) spočíva v iteračnom spôsobe hľadania globálneho minima funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$. Začína sa v začiatočných odhadoch $\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \dots \ \theta_p^0)$, pre ktoré sa vypočíta súčet štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$. Hodnota parametra sa zvýši o malú hodnotu. Ak súčet štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$ poklesne, pokračuje sa vo zvyšovaní hodnoty parametra. Ak však hodnota $S(\boldsymbol{\theta})$ vzrastie, hodnota parametra sa vráti na pôvodnú úroveň a následne sa zníži. Tento postup sa opakuje veľakrát, pričom každý krok by mal viesť k zníženiu hodnoty súčtu štvorcov $S(\boldsymbol{\theta})$. Ak hodnota $S(\boldsymbol{\theta})$ namiesto toho vzrastie, tak krok bol veľký a preskočilo sa minimum funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$. V takomto prípade sa veľkosť kroku zmenší a pokračuje sa uvedeným algoritmom. Proces sa končí, ak sa nájde bod, ktorý je podľa konvergenčného kritéria dostatočne blízky globálnemu minimu funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$.

V porovnaní s Gaussovou-Newtonovou metódou gradientná metóda pracuje:

- lepšie v prvých iteráciách (zo zlých počiatkových odhadov dokáže efektívnejšie nájsť vhodný smer k minimu funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$),
- horšie v posledných iteráciách (v oblasti okolo minima funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$ často konverguje pomaly alebo osciluje).

Levenbergova-Marquardtova metóda sa niekedy označuje ako *Marquardtov kompromis*, čo vystihuje jej snahu spojiť prednosti oboch predchádzajúcich metód. V začiatočných iteráciách využíva gradientnú metódu a s približovaním sa k oblasti minima funkcie $S(\boldsymbol{\theta})$ postupne prepína na Gaussovu-Newtonovu metódu.

Podrobnosti o matematickom aparáte iteračných metód určených na odhad nelineárnych regresných modelov záujemcovia nájdu napríklad v [2, 4, 6, 7]. V týchto prácach sú uvedené aj možnosti aplikácie nelineárnej regresie v rôznych komerčných alebo open-source softvéroch. V príspevku budú na odhad nelineárnych regresných modelov aplikované všetky tri uvedené iteračné metódy, a to prostredníctvom procedúry nelineárnej regresie (*PROC NLIN*) v aplikácii Enterprise Guide štatisticko-analytického softvéru SAS.

3 ODHAD PARAMETROV MODELU V SAS ENTERPRISE GUIDE

SAS (Statistical Analysis Software) je štatistický softvér vyvinutý SAS Inštitútom za účelom dátového manažmentu, pokročilých analýz, prediktívnych analýz, viacrozmerných analýz, business intelligence, atď. Vývoj tohto softvéru trval 10 rokov, od roku 1966 do roku 1976, kedy bol založený Inštitút SAS. SAS poskytuje aj grafické používateľské rozhranie typu point-and-click pre netechnických používateľov a iné možnosti prostredníctvom jazyka SAS. Má viac ako 200 modulov s veľmi širokým rozsahom použitia a jednoduchým používaním, medzi ktoré patria napríklad tieto:

- Base SAS - Základné procedúry a správa údajov
- SAS/STAT - Štatistická analýza
- SAS/GRAF - Grafika a prezentácie
- SAS/ETS - Ekonometria a analýza časových radov
- SAS/QC - Kontrola kvality
- Enterprise Miner - Dolovanie dát
- Enterprise Guide - Grafické používateľské rozhranie
- SAS EBI - Business Intelligence.

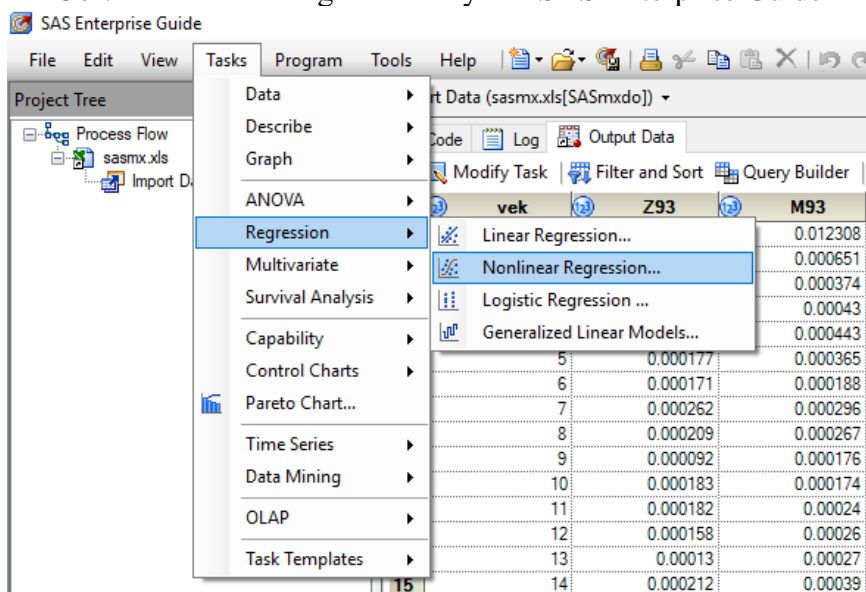
Viac informácií o softvéri SAS a jeho moduloch nájdete na webovej stránke www.sas.com, ktorá okrem iného obsahuje informácie o produktoch, konferenciách organizovaných používateľskými skupinami, ale aj programy poskytované ich tvorcami.

Jedným zo samostatných nástrojov je už spomínaný SAS Enterprise Guide (SAS EG). Ide o grafické používateľské rozhranie, ktoré nachádza uplatnenie v oblasti marketingu, telekomunikácii, poisťovníctva, ale aj v iných oblastiach, v ktorých sa pracuje s väčším množstvom údajov. Výhodou tohto prostredia je rozhranie point-and-click, ktoré zabezpečuje, že používateľ pri práci s dátami nepotrebuje nutne poznať programovací jazyk SAS, ale postačuje mu znalosť základných nástrojov. SAS EG umožňuje okrem iného:

- spracovanie a analýzu dát (štatistická, ekonometrická, matematická) – poskytuje rôzne úlohy, ktoré môžeme vykonávať na dátach (okrem iného analýza rozptylu, regresia, analýza časových radov, popisná štatistika),
- transformácia, triedenie, kombinovanie súborov údajov,
- grafická konštrukcia SQL dotazov (spolu s generovaním SQL) pomocou sprievodcu,
- vytváranie grafov a grafických reportov,
- vytváranie procesov a úloh vo forme projektu,
- zdieľanie výsledkov a analýz, export výsledkov do aplikácií Adobe Acrobat, Microsoft Excel, Microsoft Access, Microsoft Word, Microsoft PowerPoint, automatické odosielanie e-mailov so správami a výsledkami,
- prístup k štruktúram SAS OLAP cez SAS OLAP Server alebo iné štruktúry dodávateľov a vizualizácia OLAP dát vo forme diagramov.

SAS EG je bezpečné pracovné prostredie umožňujúce prístup viacerých používateľov k rovnakým údajom. Jednoduché používateľské rozhranie a kompatibilita s inými databázami zabezpečuje intuitívnu prácu s údajmi a komplexnú analýzu prostredníctvom iba jedného nástroja.

Obr. 1 Nelineárna regresná analýza v SAS Enterprise Guide



Zdroj: vlastné spracovanie, softvér SAS Enterprise Guide

Súčasťou používateľského rozhrania SAS Enterprise Guide je aj nelineárna regresia. Na Obr. 1 môžeme vidieť jej zaradenie v softvérovom prostredí. Pri odhade parametrov regresného modelu si môžeme vybrať jednu z troch metód opísaných v kapitole 2 - Gaussova-Newtonova metóda, Gradientná metóda, Levenbergova-Marquardtova metóda.

Procedúra nelineárnej regresie v SAS EG poskytuje širokú ponuku možností nastavenia výstupu. Za jej hlavnú nevýhodu považujeme malý výber predvolených tvarov nelineárnych modelov, ktoré nezodpovedajú vzťahom deterministických modelov úmrtnosti (zákonom úmrtnosti). To však nie je problém, pretože v prostredí SAS EG sa dajú upravovať, ale aj písať vlastné programy pomocou programovacieho jazyka SAS.

Na naprogramovanie vlastného kódu nelineárnej regresnej analýzy sa predpokladá znalosť štyroch procedúr PROC SQL, PROC NLIN, prípadne PROC SORT a PROC GPLOT. Procedúra PROC GPLOT slúži na tvorbu grafických výstupov. V prípade nelineárnej regresie ide konkrétne o grafy predikovaných hodnôt, rezíduí, a iné. PROC SORT nachádza využitie pri usporiadaní pozorovaných údajov podľa hodnôt jednej alebo viacerých premenných. Tieto procedúry nie sú bezpodmienečne nevyhnutné pre vytvorenie programu nelineárnej regresie, ale napomáhajú k hlbšej analýze. PROC SQL patrí k východiskovým procedúram, ktoré obsahuje každý program a používa sa na vytváranie, udržiavanie, získavanie a aktualizáciu údajov. Najpodstatnejšou procedúrou vytvorenou priamo pre nelineárnu regresnú analýzu je PROC NLIN. Obsahuje množstvo príkazov, ktorých prehľad nájdeme v (SAS Institute Inc, 2013). Za najdôležitejšie príkazy považujeme tieto:

- **METHOD** (= *MARQUARDT*, *NEWTON*, *GRADIENT*) – slúži na špecifikáciu iteračnej metódy, ktorá má byť použitá na odhad parametrov nelineárneho regresného modelu.
- **MAXITER** (= *n*) – pomocou príkazu definujeme maximálny počet iterácií optimalizačného algoritmu. Predvolená hodnota je $n = 100$.
- **CONVERGE** (= *c*) – používa sa na stanovenie konvergenčného kritéria pre procedúru. Prednastavená hodnota konvergenčného kritéria je 10^{-5} .
- **MODEL** – pomocou príkazu vymedzíme požadovaný tvar regresného modelu.
- **PARMS** – dáva priestor pre bližšiu špecifikáciu parametrov a nastavenie ich počiatočných hodnôt. Počiatočné hodnoty sú prednastavené na 0.001.

Obr. 2 Fázy iteračného postupu

Nonlinear Regression
Results
The NLIN Procedure
Dependent Variable 2020
Method: Marquardt

Iterative Phase				
Iter	a	b	c	Sum of Squares
0	0.000190	0.000018	1.1135	1.486E-6
1	0.000187	0.000014	1.1192	1.358E-6
2	0.000203	0.000012	1.1232	1.29E-6
3	0.000214	0.000011	1.1258	1.27E-6
4	0.000224	9.856E-6	1.1283	1.265E-6
5	0.000227	9.64E-6	1.1290	1.262E-6
6	0.000227	9.6E-6	1.1291	1.262E-6
7	0.000227	9.594E-6	1.1291	1.262E-6
8	0.000227	9.593E-6	1.1291	1.262E-6

NOTE: Convergence criterion met.

Zdroj: výstup zo softvéru SAS EG

V tejto časti predstavíme ukážku výstupu procedúry nelineárnej regresie pre Gompertzov-
Makehamov model úmrtnosti použitý pre údaje o úmrtnosti populácie Slovenska v roku 2020
bez zohľadnenia pohlavia. Súčasťou výstupu výslednej procedúry nelineárnej regresnej
analýzy sú jednotlivé fázy iteračnej metódy (Obr. 2), ktoré obsahujú aj súčet štvorcov rezíduí.
Ďalej vo výstupe nájdeme sumár procesu odhadovania premenných (Obr. 3), kde je
definovaná použitá metóda, počet iterácií na dosiahnutie konvergenčného kritéria, počet
pozorovaní a iné charakteristiky.

Obr. 3 Sumár procesu odhadu parametrov

Estimation Summary	
Method	Marquardt
Iterations	8
Subiterations	8
Average Subiterations	1
R	7.754E-6
PPC(b)	0.000014
RPC(b)	0.000093
Object	1.673E-9
Objective	1.262E-6
Observations Read	50
Observations Used	50
Observations Missing	0

Zdroj: výstup zo softvéru SAS EG

Výstup zahŕňa aj analýzu najmenších štvorcov (Obr. 4), v ktorej sa nachádzajú charakteristiky
pre model a reziduálnu zložku ako počet stupňov voľnosti, súčet štvorcov, priemerný súčet
štvorcov. Pomocou nich sa navyše dopracujeme k F štatistike a jej p -hodnote, na základe
ktorých sme schopní otestovať štatistickú významnosť nelineárneho regresného modelu.

Obr. 4 Analýza najmenších štvorcov

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Approx Pr > F
Model	2	0.000054	0.000027	1002.43	<.0001
Error	47	1.262E-6	2.685E-8		
Corrected Total	49	0.000055			

Zdroj: výstup zo softvéru SAS EG

Obr. 5 Odhad parametrov

Parameter	Estimate	Approx Std Error	Approximate 95% Confidence Limits		Skewness
a	0.000227	0.000039	0.000150	0.000305	-0.0750
b	9.593E-6	2.825E-6	3.909E-6	0.000015	0.7694
c	1.1291	0.00686	1.1153	1.1429	0.1294

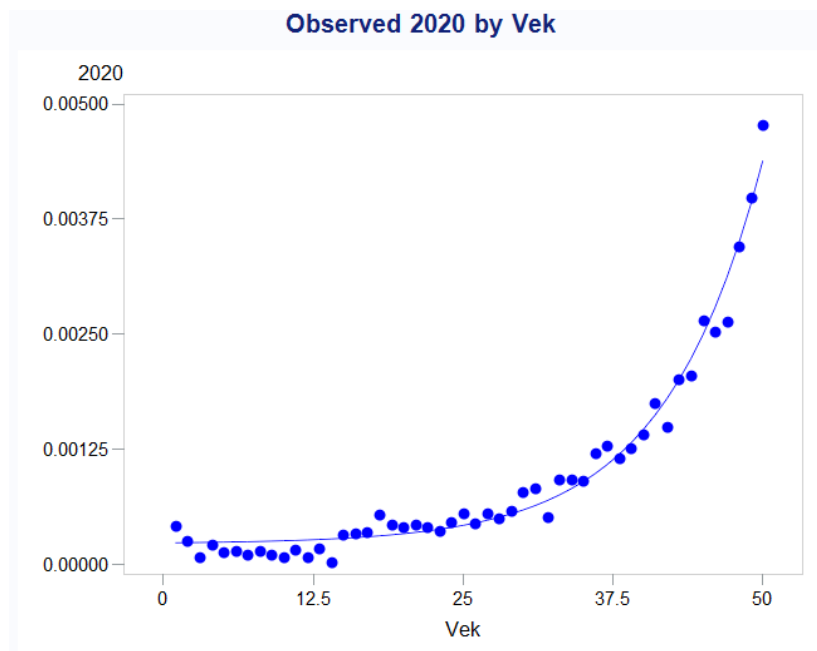
Zdroj: výstup zo softvéru SAS EG

Obr. 6 Korelačná matica

Approximate Correlation Matrix			
	a	b	c
a	1.0000000	-0.1391414	-0.1261535
b	-0.1391414	1.0000000	0.1266709
c	-0.1261535	0.1266709	1.0000000

Zdroj: výstup zo softvéru SAS EG

Obr. 7 Graf závislosti miery úmrtnosti od veku



Zdroj: výstup zo softvéru SAS EG

Dôležitým výstupom sú aj odhady parametrov spolu s ich štandardnými odchýlkami a s intervalmi spoľahlivosti odhadu parametrov (Obr. 5). Okrem toho výstup obsahuje aj korelačnú maticu parametrov (Obr. 6) a nakoniec graf pozorovaných hodnôt miery úmrtnosti v závislosti od veku (Obr. 7).

4 ZÁVER

Úmrtnosť obyvateľstva sa neustále vyvíja. Kvalita života sa každým rokom zvyšuje, čo sa samozrejme odráža na vývoji úmrtnosti, ktorá sa za posledné desaťročia výrazne zlepšila. Parametrické modely úmrtnosti sa pokúšajú toto úmrtnostné správanie zachytiť pomocou matematického modelu s vymedzeným počtom parametrov. To viedlo k vytvoreniu zákonov úmrtnosti, ktoré opisujú úmrtnosť v pevnom časovom okamihu, a tým podceňujú zlepšenie úmrtnosti, pretože skutočná úmrtnosť je stochastická.

Výhodou využitia nelineárnej regresnej analýzy pri odhade parametrov zákonov úmrtnosti je aj skutočnosť, že okrem bodových odhadov parametrov modelu získame štandardné chyby odhadov, ktoré umožňujú testovať štatistickú významnosť odhadnutých parametrov a konštruovať intervalové odhady pre parametre. Nelineárna regresná analýza navyše poskytuje možnosť realizovať intervalové odhady predikovaných hodnôt cieľovej premennej, ktoré prislúchajú konkrétnym hodnotám vysvetľujúcich premenných.

Metódy nelineárnej regresie sme aplikovali v softvéri SAS Enterprise Guide. V SAS Enterprise Guide sú v ponuke len niektoré nelineárne funkcie, preto sme museli urobiť zásah do programovacieho kódu, kde sme požadované nelineárne funkcie zapísali v rámci procedúry nelineárnej regresie (*PROC NLIN*) v príkaze *MODEL*. Zároveň bolo potrebné zadefinovať parametre funkcie a zadať vstupné odhady parametrov, čo sme realizovali vďaka príkazu *PARMS*. Naším cieľom bolo porovnať aj výsledky jednotlivých iteračných metód, a preto sme nevyužili len štandardne nastavenú Gaussovu-Newtonovu metódu, ale prostredníctvom príkazu *METHOD* sme aplikovali aj gradientnú metódu a Levenbergovu-Marquardtovu metódu.

Parametrické modely (zákony úmrtnosti) môžu byť užitočné aj v súvislosti s prognózovaním úmrtnosti populácie na základe analýzy historických trendov vývoja uvažovaných parametrov modelov. Istým obmedzením týchto modelov je však ich závislosť od konkrétneho matematického vzťahu, čo znemožňuje, aby model reagoval na možné zmeny vo vývoji úmrtnosti v budúcnosti.

Tento príspevok vznikol s podporou grantového projektu VEGA1/0410/22: Analýza poistných rizík vo vzťahu k hospodáreniu životnej poisťovne.

Použitá literatúra

1. FORFAR, David O. Mortality laws. *Encyclopedia of actuarial science*, 2006, 2.
2. GAVIN, Henri P. The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems. *Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University*, 2019, 19.
3. GAVRILOVA, Natalia S.; GAVRILOV, Leonid A. Stárnutí a dlouhověkost: zákony a prognózy úmrtnosti pro stárnoucí populace. *Demografie*, 2011, 53.2: 109.
4. GOULD, N. I. M.; REES, T.; SCOTT, J. A. A higher order method for solving nonlinear least-squares problems. *RAL Preprint RAL-P-2017-010, STFC Rutherford Appleton Laboratory*, 2017.
5. MARQUARDT, Donald W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 1963, 11.2: 431-441.
6. MONDRAGON, Paul Fredrick; BORCHERS, Brian. A comparison of nonlinear regression codes. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 2005, 4.1: 31.
7. PANIK, Michael. *Regression modeling: Methods, theory, and computation with SAS*. CRC press, 2009.

8. SAS Institute Inc.: The NLIN Procedure. In: SAS/STAT 13.1[®] User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc., 2013.
9. SLUD, Eric V. *Actuarial mathematics and life-table statistics*. 2001.
10. ŠOLTÉS, E. Regresná a korelačná analýza: s aplikáciami v softvéri SAS. *Bratislava: Letra Edu*, 2019.
11. ŠOLTÉSOVÁ, T. Aktuárske modelovanie v životnom poistení. *Bratislava: Letra Edu*, 2019.
12. DATAcube, Štatistický úrad SR [online] [cit. 11. 3. 2023]. Dostupné na: https://slovak.statistics.sk/wps/portal/ext/themes/demography/population/indicators/lut/p/z1/jdBBDolwEAXQs3iCTkFpWRYMpWkDtFDAbgwr00TRhfH8GnRrYXaTvD-ZfOTQiNw8vfxlevr7PF0-8kl5141NMswg9rgAjSArCTthM4JGhagifgCmvURCFIZLLXm0hLktuRzzso9UQBU8QMIVlqT6jgGFm_Lw59hsC0fAC58fkBuIaEGFIC0TcTSPc-Ppi5AdHIEW5VEwJMVAPgHQiWtvfm4WWtH8MKz3Ru7ePyp/dz/d5/L2dJQSEvUUt3QS80TmxFL1o2X1E3SThCQjFBMDhCVjIwSTdOUjFLUVFHSTky/
13. ZHU, Zhiwei, et al. Logistic regression for insured mortality experience studies. *North American Actuarial Journal*, 2015, 19.4: 241-255.

Kontaktné údaje

doc. Mgr. Tatiana Šoltésová, PhD.
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 816
 email: tatiana.soltesova@euba.sk

prof. Mgr. Erik Šoltés, PhD.
 Ekonomická univerzita v Bratislave, Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska 1/b, 852 35 Bratislava
 Tel: (421 2) 67 295 717
 email: erik.soltes@euba.sk