Fakulta hospodárskej informatiky EU Bratislava
Katedra štatistiky

Eva Rublíková

Inauguračná prednáška

Dynamické regresné modelovanie makroekonomických premenných

Študijný odbor: 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

Bratislava 28.1.2010

Tézy prednášky

- Autoregresné modely
- Stacionárne a nestacionárne procesy
- Model transferovej funkcie
- Dynamický regresný model s jednou vysvetľujúcou premennou
- Lineárny regresný model s korelovanými rezíduami
- Všeobecný dynamický regresný model

Autoregresný model rozložených časových oneskorení

ADL(p, k, τ) – *Autoregressive distributed lag*

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{\tau} \beta_{j,i} x_{j,t-i} + \varepsilon_t$$

kde
$t = 1, 2, ..., T$
ε_t je biely šum,
$\left| \sum_{i=1}^{p} \phi_i \right| < 1$ t.j. y_t je stacionárny časový rad,
$x_{j,t-i}$ je hodnota nestochastickej premennej X_j v oneskorení $t-i$; alebo premenná X_j je stochastická pre ktorú platí $E(\varepsilon_t, x_{j,t-i}) = 0$ pre všetky t, $i = 1, 2, ..., \tau$ a $j = 1, 2, ..., k$,
p je počet oneskorení stochastickej premennej Y,
k je počet vysvetľujúcich premenných v modeli,
τ je maximálny počet oneskorení i v premennej X_j
α_0 konštanta modelu
ϕ_i pre $i = 1, 2, ..., p$ autoregresné koeficienty
$\beta_{j,i}$ parciálne regresné koeficienty resp. krátkodobé multiplikátory pri $X_{j,t-i}$

Časový rad ako stochastický proces

Časový rad $y_1, y_2, ..., y_T$ chápeme ako jeden výsledok (realizáciu) stochastického procesu.

Stochastickým procesom rozumieme v čase usporiadanú postupnosť T náhodných premenných $Y_1, Y_2, ..., Y_T$, ktoré majú združené rozdelenie pravdepodobnosti.

Stochastické procesy

- stacionárne
- nestacionárne

Nestacionárne procesy **v strednej hodnote**

- s deterministickým trendom
- so stochastickým trendom

Nestacionárne procesy **v rozptyle**

Stacionárne procesy

Striktná stacionarita

Pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektora $(y_t, y_{t+1}, \cdots, y_{t+k})$ je rovnaké ako pravdepodobnostné rozdelenie vektora $(y_{t+m}, y_{t+1+m}, \cdots, y_{t+k+m})$, t.j. ich združené distribučné funkcie sa rovnajú

$$F(y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+k}) = F(y_{t+m}, y_{t+m+1}, ..., y_{t+m+k})$$

Slabá stacionarita

$\{y_t, t \in T\}$ má vlastnosti:

- stredná hodnota $\mu_t = E(y_t) = \mu$
- rozptyl $\sigma_{y,t}^2 = D(y_t) = E(y_t - \mu_t)^2 = \sigma_y{}^2$
- autokovariančná funkcia medzi y_t a y_{t-k}
  $\gamma_k = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)$
- autokorelačná funkcia y_t a y_{t-k}

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma_{y,t}.\sigma_{y,t-k}} = \frac{\gamma_k}{\sigma_y{}^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Proces bieleho šumu

ε_t nekorelované náhodné premenné s rovnakým rozdelením pravdepodobnosti pre t = 1, 2,..., T, ak pre všetky t platí

- $E(\varepsilon_t) = 0$
- $D(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^{\,2}) = \sigma_\varepsilon^2 = konšt.$
- $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, \;\; k \neq 0$
- $\rho_k = 1$ pre k = 0 a $\rho_k = 0$ pre $k \neq 0$
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^{\,2})$

ε_t pre t = 1, 2,..., T je stacionárny proces,

ε_t je gaussovský proces, ak jeho združené rozdelenie pravdepodobnosti je normálne

Lineárny proces

Wold (1938)

$$y_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \,, \; \psi_0 = 1$$

Vlastnosti

$$E(y_t) = \mu \quad \text{a} \quad D(y_t) = \sigma_\varepsilon^{\,2} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{\,2} \,, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{\,2} < \infty$$

Nestacionárne procesy

Proces náhodnej prechádzky (RW)

RW ~ AR (1) ak $\phi_1 = 1$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ak začiatok procesu je v čase t = 0 a deterministická začiatočná podmienka je y_0= 0

$$y_t = y_0 + \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$$

Vlastnosti RW

$E(y_t) = y_0 = 0$ nezávisí od času,

$D(y_t) = t\sigma_\varepsilon^2$ rozptyl závisí na čase,

$\text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E(y_t - y_0)(y_{t-k} - y_0) = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$ závisí od $(t - k)$,

$\rho_k = \dfrac{t-k}{\sqrt{(t-k)t}} = \dfrac{\sqrt{t-k}}{\sqrt{t}} = \sqrt{1-\dfrac{t}{k}}$, závisí od času t, a pri $t \to \infty$ $\rho_k \to 1$

RW - nestacionárny proces, zdrojom nestacionarity je stochastický trend $\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j$.

$E(y_{t+k} | y_t) = y_t$

Proces náhodnej prechádzky s posunom (RW with drift)

$$y_t = \alpha\, t + y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_{t-i}$$

Vlastnosti RW s posunom

Ak $y_0 = 0$

$E(y_t) = \alpha\, t$ závisí na čase

$D(y_t) = t\sigma_\varepsilon^2$ rozptyl závisí na čase

$\rho_k = \dfrac{t-k}{\sqrt{(t-k)t}} = \dfrac{\sqrt{t-k}}{\sqrt{t}} = \sqrt{1-\dfrac{t}{k}}$ závisí na čase

$E(y_{t+k} | y_t) = \alpha\, k + y_t$

Transformácia nestacionárneho procesu na stacionárny

Transformácia nestacionárneho procesu s deterministickým trendom na stacionárny

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon{}^2)$ je stacionárny proces

$y_t - \alpha_0 - \alpha_1 t = \varepsilon_t$ je stacionárny

y_t je **trendovo stacionárny**

Transformácia nestacionárneho procesu so stochastickým trendom na stacionárny

RW

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(1-B)y_t = \varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{1}{1-B}\varepsilon_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

$E(y_t) = 0$

$D(y_t) = \sigma_\varepsilon{}^2 + \sigma_\varepsilon{}^2 + \sigma_\varepsilon{}^2 + \ldots = \infty$

y_t je nestacionárny v rozptyle, stacionárny v strednej hodnote

$y_t \sim \mathrm{I}(1)$

RW s posunom $$y_t = \phi_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (1-B)y_t = \phi_0 + \varepsilon_t$$

Označenie

$$\Delta y_t \sim \mathrm{I}(0)$$

$$y_t \sim \mathrm{I}(1)$$

Integrované procesy

$y_t \sim$ I(d) pre $d = 0, 1, 2$ $\quad z_t = (1 - B)^d y_t$

$z_t \sim$ AR(p) t.j. $\quad \phi_p(B) z_t = \varepsilon_t$

$y_t \sim$ ARI(p, d) t.j. $\quad \phi_p(B)(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t$

Testovanie stacionarity testom jednotkového koreňa

Random Walk versus AR(1)

RW~ $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ proti AR(1)~ $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\phi_1| < 1$

$$H_0 : \phi_1 = 1 \text{ proti } H_1 : \phi_1 < 1$$

$$\Delta y_t = (\phi_1 - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Označme $\beta_c = \phi_1 - 1$

$$\Delta y_t = \beta_c y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \beta_c = 0 \text{ proti } H_1 : \beta_c < 0$$

Ak y_t~ RW $\rightarrow \phi_1 = 1 \rightarrow \beta_c = 0$ a $\Delta y_t = \varepsilon_t$ ~I(0) stac.

Dickey a Fuller (1979)

$\Delta y_t = \beta_c y_{t-1} + \varepsilon_t$ **~** RW

$\Delta y_t = c_1 + \beta_c y_{t-1} + \varepsilon_t$ **~** RW s posunom c_1 a trendom

$\Delta y_t = c_1 + c_2 t + \beta_c y_{t-1} + \varepsilon_t$**~** RW s posunom a det.trend

Testovacia štatistika $DF = \dfrac{\hat{\beta}_c}{s_{\hat{\beta}_c}}$

Dickey a Fuller tabelovali kritické hodnoty, závisiace od typu modelu a dĺžky časového radu T

Kritické hodnoty označili DF_{RW} alebo DF_{c_1} alebo DF_{c_1,c_2}

Kritický odbor na α

ak $DF <$ ako príslušná kritická hodnota

H_o zamietame, t.j. y_t je stacionárny proces

Rozšírený Dickeyho-Fullerov (ADF) test
Random Walk versus AR(*p*)

$$\text{RW}\sim y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \text{ proti}$$

$$\text{AR(p)}\sim y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$$

$$\Delta y_t = \beta_c y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = c_1 + \beta_c y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = c_1 + c_2 t + \beta_c y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$$H_0 : \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1 \text{ proti } H_1 : \sum_{i=1}^{p} \phi_i < 1$$

$$\Delta y_t = c_1 + \beta_c y_{t-1} + c_2 t + \sum_{i=2}^{p} \phi_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

$$\text{kde}\, \beta_i = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \text{ a } \beta_c = \left(\sum_{i=1}^{p} \phi_i \right) - 1$$

$$\text{Ak } \sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1 \text{ a } \beta_c = 0 \text{ proces má jednotkový koreň}$$

Identifikácia krátkodobej dynamiky autoregresných procesov

Autokorelačná funkcia (TACF) stacionárneho procesu y_t

$$\rho_k = \frac{E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)}{E(y_t - \mu)^2}$$

Vlastnosti

- $\rho_0 = 1$,
- $|\gamma_k| \leq \gamma_0 = \sigma_y{}^2$ a $|\rho_k| \leq 1$,
- $\gamma_k = \gamma_{-k}$ a $\rho_k = \rho_{-k}$ symetria okolo $k = 0$, pretože časová vzdialenosť medzi dvojicami premenných y_t, y_{t+k} a y_{t-k}, y_t je rovnaká.

Empirická ACF

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2} = \hat{\rho}_k \text{ pre } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Bartlettov test (1946)

$$H_0\colon \rho_k = 0 \text{ proti } H_1\colon \rho_k \neq 0$$

ak $\rho_k = 0$ pre $k > q$ a za predpokladu asymptotickej normality

$$r_k \sim N\{0,\ \frac{1}{T}(1 + 2\sum_{j=1}^{q} r_j^{\,2})\}$$

Kritický odbor pre α = 0,05

$$|r_k| > \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{T}(1 + 2\sum_{j=1}^{q} r_j^{\,2}}}$$

Parciálna autokorelačná funkcia (TPACF)

ρ_{kk} miera závislosti y_t a y_{t-k}, ak $y_{t-k+1,}y_{t+k+2}, ..., y_{t-1}$ sa nemenia.

Empirická PACF (Darbin 1960)

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j} = \hat{\rho}_{kk}$$

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,k-j} \quad \text{pre } j = 1,2, ..., k-1$$

Queunouille 1949

H_0: $\rho_{k,k} = 0$ proti H_1: $\rho_{k,k} \neq 0$

$$r_{kk} \sim N(0, \frac{1}{T})$$

Kritický odbor pre $\alpha = 0{,}05$ $\quad |r_k| > \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{T}}}$

Autoregresné modely
Modely ADL(p, 0, 0) = AR(p)

Autoregresný proces AR(1)

$$E(y_t) = \mu \neq 0 \qquad y_t{*} = y_t - \mu \qquad E(y_t{*}) = 0$$

$$y_t{*} = \phi_1 y_{t-1}{*} + \varepsilon_t$$

$$(1-\phi_1 B) y_t{*} = \varepsilon_t$$

$$y_t{*} = \frac{1}{(1-\phi_1 B)} \varepsilon_t = \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1{}^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

Pre $|\phi_1| < 1$

$$y_t{*} = (1 + \phi_1 B + \phi_1{}^2 B^2 + \phi_1{}^3 B^3 + \ldots)\varepsilon_t = \frac{1}{1-\phi_1 B} \varepsilon_t$$

Vlastnosti AR(1)

Podmienka stacionarity: $|\phi_1| < 1$

Stredná hodnota: $\mu = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1}$

Rozptyl procesu: $\sigma_y^{\,2} = \dfrac{\sigma_\varepsilon^{\,2}}{1-\phi_1^{\,2}}$

TACF: $\rho_k = \phi_1^{\,k}$,

- pre $k \geq 0$ exponenciálne klesá k nule,
- ak $\phi_1 > 0$, indukuje zotrvačnosť v znamienku susedných hodnôt, ACF klesá v kladných hodnotách,
- ak $\phi_1 < 0$, treba očakávať časté zmeny v znamienkach susedných hodnôt časového radu, ACF klesá s alternujúcimi znamienkami, začínajúc so záporným znamienkom.

TPACF

$\rho_{11} = \phi_1$ a pre $k > 1$ sú $\rho_{kk} = 0$, bod zlomu v $k_0 = 1$.

Autoregresný proces AR(2)

$$E(y_t*) = 0$$

$$y_t* = \phi_1 y_{t-1}* + \phi_2 y_{t-2}* + \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) y_t* = \varepsilon_t$$

$$y_t* = \frac{1}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)} \varepsilon_t$$

Vlastnosti AR(2)

Podmienky stacionarity: $\phi_1 + \phi_2 < 1,\ -\phi_1 + \phi_2 < 1,$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

Stredná hodnota: $\mu = \dfrac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$

Rozptyl procesu: $\sigma_y{}^2 = \dfrac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2}$

TACF: $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}$, pre k = 1, 2, ...

má tvar lineárnej kombinácie dvoch exponenciálne klesajúcich postupností, alebo tvar sínusoidy s exponenciálne klesajúcou amplitúdou.

TPACF: $\rho_{11} = \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2},\ \rho_{22} = \phi_2,$

$\rho_{kk} = 0$ pre k = 3, 4,.... $k_0 = 2$ je bod zlomu.

Prítomnosť cyklu

Ak $\phi_2 < 0,\ \ \phi_1^{\,2} + 4\phi_2 < 0$

dĺžka cyklu v nesezónnej časti radu

$$p^* = \frac{360^o}{\cos^{-1}\left[\phi_1 / 2(-\phi_2)^{1/2}\right]}, \text{ mesiacov (štvrťrokov)}$$

Ak $\Phi_{1,s}^{\ 2} + 4\Phi_{2,s} < 0,$

dĺžka cyklu v sezónnej časti

$$p^* = \frac{360^o}{\cos^{-1}\left[\Phi_{1,s} / 2(-\Phi_{2,s})^{1/2}\right]}, \text{ roky } (s.p^*)$$

Autoregresný proces AR(*p*)

$$E(y_t *) = 0$$
$$y_t * = \phi_1 y_{t-1} * + \ldots + \phi_p y_{t-p} * + \varepsilon_t ,$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p\right) y_t * = \varepsilon_t$$

Podmienky stacionarity

$$\phi_p(B) = \left(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p\right) = 0$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p\right) = (1 - \phi_1 B)(1 - \phi_2 B)\ldots(1 - \phi_p B) = 0$$

$$|B| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\phi_i}\right| > 1 \Rightarrow |\phi_i| < 1 \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, p$$

Vlastnosti AR(*p*)

Podmienka stacionarity: $|\phi_1| < 1, ..., |\phi_p| < 1$

Stredná hodnota: $\mu = \dfrac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2-...-\phi_p}$

Rozptyl procesu: $\sigma_y^{\ 2} = \dfrac{\sigma_a^2}{1-\phi_1\rho_1-...-\phi_p\rho_p}$

TACF: $\rho_k = \phi_1\rho_{k-1}+...+\phi_p\rho_{k-p}$, pre k = 1, 2,...

Ak sú korene rovnice $\phi_p(B)=0$ reálne, ACF exponenciálne klesá k nule.
Ak sú korene rovnice $\phi_p(B)=0$ komplexné, ACF exponenciálne klesá k nule v sínusových vlnách.

TPACF: $\rho_{kk} \neq 0$ je v oneskoreniach k = 1, 2,..., p
$\rho_{kk} = 0$ $\qquad k > p$

Odhad a verifikácia modelu

Test normality náhodných porúch

$H_0 : \varepsilon_t$ má normálne rozdelenie
$H_1 : \varepsilon_t$ nemá normálne rozdelenie

Jarque-Bera test (1987)

$\gamma_1(\hat{\varepsilon}_t)$ koeficient šikmosti rezíduí
$\gamma_2(\hat{\varepsilon}_t)$ koeficient špicatosti rezíduí

$$W = T\left(\frac{\gamma_1^2}{6} + \frac{\gamma_2^2}{24}\right) \approx \chi^2(2)$$

Kritický odbor pre α $W \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)$

Opatrenia pri zamietnutí H_0 o normalite náhodných porúch

- Transformovať asymetriu rozdelenia Boxovou-Coxovou (1964) transformáciou
  - log , ak sú dáta zošikmené vpravo
  - $\sqrt{\ }$, ak dáta sú dané ako počet napr. osôb a pod.
- Prijať H_1 a doplniť AR model modelom ARCH, GARCH pre rezíduá.
- Modelovať odľahlé pozorovania pomocou umelých premenných.
- Použiť robustné metódy odhadu.

Test neautokorelovanosti náhodných porúch pomocou ACF

$$H_0 : \rho_k(\varepsilon) = 0 \text{ proti } H_1 : \rho_k(\varepsilon) \neq 0$$

$$z = r_k(\hat{\varepsilon})\sqrt{T} \sim N(0,1)$$

$$r_k(\hat{\varepsilon}) = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} \hat{\varepsilon}_t . \hat{\varepsilon}_{t-k}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t}$$

Kritický odbor pre $\alpha = 0,05$ $\quad \left| r_k(\hat{\varepsilon}) \right| > 2\sqrt{T}$

Boxov-Pierceov Q – test (1970) a Ljungov-Boxov Q * – test (1978)

$$H_0 : \rho_1(\varepsilon) = \rho_2(\varepsilon) = \ldots = \rho_m(\varepsilon) = 0 \qquad H_1 : non\ H_0$$

$$Q_m = T \sum_{k=1}^{m} (r_k(\hat{\varepsilon}))^2 \sim \chi^2(m-p)$$

$$Q_m{*} = T(T+2) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{T-k} (r_k(\hat{\varepsilon}))^2 \sim \chi^2(m-p)$$

Kritický odbor pre α $\qquad Q_m \ alebo\ Q_m{*} \geq \chi_{1-\alpha}{}^2(m-p)$

Breuschov-Godfreyov všeobecný test autokorelácie (1978)

$$y_t = \alpha_0 + \beta_{1,0} x_{1,t} + \beta_{2,0} x_{2,t} + \ldots + \beta_{k,0} x_{k,t} + \varepsilon_t, \; t = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$$

$$\varepsilon_t \sim AR(p) \qquad \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^{\;2}) \qquad\qquad p \approx s \text{ (počet sezón)}$$

$$H_0 : \phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_p = 0 \text{ proti } H_1 : \phi_i \neq 0 \text{ aspoň jeden}$$

Odhadneme LRM model

Vytvoríme pomocnú rovnicu rezíduí a vysvetľujúcich premenných

$$\hat{\varepsilon}_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1,t} + \ldots + \gamma_{k,t} x_{k,t} + \phi_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \ldots + \phi_p \hat{\varepsilon}_{t-p} + u_t$$

pre $t = p + 1, p + 2, \ldots, \mathrm{T}$, získame R^2

Kritický odbor pre α $\qquad (T - p)R^2 \geq \chi_{1-\alpha}^{\;2}(p)$

Príčiny autokorelácie náhodných porúch

- zotrvačnosť vo vývoji radu
- zlá špecifikácia modelu
- výber počtu posunov
- výber premenných

Dôsledky autokorelácie rezíduí

- Odhad modelu MNŠ neskreslený, konzistentný, ale nie je výdatný.
- Štandardné odchýlky odhadnutých parametrov podhodnotené $\rightarrow$ parametre významné, *t*-test a *F*- test nevhodný.
- Štandardná odchýlka rezíduí podhodnotená $\rightarrow$ R^2 nadhodnotený.

Dynamické modely s jednou vysvetľujúcou premennou

ADL(0, 1, ∞) = DL(1, ∞) model s nekonečným rozloženým oneskorením

Koyckov prístup k modelu s ∞ rozloženým oneskorením (1976)

ADL(1, 1, 0) model s adaptívnym očakávaním

ADL(0, 1, ∞) = DL(1, ∞)
Model s nekonečným rozloženým oneskorením

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + ... + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_{t-i} + \varepsilon_t$$

kde
ε_t biely šum,
α_0 je regulačná konštanta,
β_i multiplikátory

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + ... + \varepsilon_t$$

β_o krátkodobý multiplikátor,

$\beta(\tau) = \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i$ kumulovaný (priebežný) multiplikátor τ-teho obdobia,

$\beta = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i$ dlhodobý multiplikátor, odráža vplyv vysvetľujúcej premennej X po jej prechode do rovnovážneho stavu t.j. ak sa hodnota x_t nemení dlhší čas, potom rovnovážna hodnota $\bar{y} = \alpha_0 + \bar{x}\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i$,

štandardizované koeficienty $\beta_i * = \dfrac{\beta_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i}$,

t.j. koľko percent z celkového vplyvu jednotkovej zmeny X sa premietlo do priemernej zmeny Y za obdobie t, $t - 1$, $t - 2$, ..., $t - \tau$.

Koyckov prístup k modelu s ∞ rozloženým oneskorením (1976)

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

$$\beta_i = \beta_0 \lambda^i > 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad 0 < \lambda < 1$$

λ miera poklesu (rate of decline)

$1-\lambda$ rýchlosť prispôsobovania sa

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i = \beta_0 (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots) = \beta_0 \frac{1}{1-\lambda}$$

Koyckova transformácia

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_0 \lambda x_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha_0 (1 - \lambda) + \beta_o x_t + (\varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1})$$

$$y_t = \alpha_0 (1 - \lambda) + \beta_o x_t + \lambda \; y_{t-1} + u_t$$

kde $u_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1} \sim \mathrm{MA}(1)$, pretože $\lambda < 1$.

Dôsledky Koyckovej transformácie

- zníženie počtu parametrov v DL
- vylúčenie možného problému multikolinearity
- z modelu ADL $(0,1,\infty)$ = DL $(1,\infty)$ sme získali model ADL$(1,1,0)$
- prítomnosť časovo oneskorenej vysvetľovanej premennej ako vysvetľujúcej stochastickej premennej porušuje predpoklad týkajúci sa požiadavky nekorelovanosti s u_t
- vznikol problém autokorelácie, u_t sú autokorelované
- treba preskúmať platnosť $E(y_{t-1}, u_t) = 0$, Durbin h test

Durbin *h* test pre model typu Koycka ADL(1, 1, 0)

$$y_t = \alpha_0(1-\lambda) + \beta_o x_t + \lambda\, y_{t-1} + u_t \ ,$$

$$H_0 : \rho_1(u_t) = 0 \text{ proti } H_1 : \rho_1(u_t) \neq 0$$

$$h = \hat{\rho}_1(u_t)\sqrt{\frac{T}{1 - T.\mathrm{var}(\hat{\lambda})}} \quad \sim \mathrm{N}(0,\ 1)$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t . \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^{\ 2}} \approx 1 - \frac{DW}{2}$$

kde

$\mathrm{var}(\hat{\lambda})$ rozptyl odhadnutého parametra λ,

T dĺžka časového radu.

DW je Darbinova a Watsonova štatistika rezíduí $\hat{u}_t$

Kritický odbor pre α $\quad |h| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

ADL(1, 1, 0) model s adaptívnym očakávaním

$$y_t = \alpha_0 + \beta_1 x_t * + \varepsilon_t \text{ , } t = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$$

Y dopyt po peniazoch,
$X*$ očakávaná dlhodobá úroková miera,
ε náhodná zložka.

Cagan, P. (1956) a Friedman, M. (1957) - Hypotéza adaptívnych očakávaní

$$x_t * - x_{t-1} * = \gamma (x_t - x_{t-1} *)$$

γ koeficient očakávania, $0 \le \gamma \le 1$.

$$x_t * = \gamma\, x_t + (1 - \gamma) x_{t-1} *$$

Ak $\gamma = 1 \rightarrow x_t * = x_t$ okamžitá realizácia
Ak $\gamma = 0 \rightarrow x_t * = x_{t-1} *$ statické očakávania t. j. $x_t * = x_t$

$$y_t = \gamma \alpha_0 + \gamma \beta_1 x_t + (1 - \gamma) y_{t-1} + u_t, \qquad u_t = \varepsilon_t - (1 - \gamma) \varepsilon_{t-1}.$$

Porovnanie modelov

Koyckov model

$$y_t = \alpha_0(1-\lambda) + \beta_o x_t + \lambda\, y_{t-1} + u_t \qquad u_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$$

Model s adaptívnym očakávaním

$$y_t = \gamma\alpha_0 + \gamma\beta_1 x_t + (1-\gamma) y_{t-1} + u_t \qquad u_t = \varepsilon_t - (1-\gamma)\varepsilon_{t-1}$$

- Formálna podobnosť modelov ale odlišná interpretácia.
- λ nemá ekonomickú interpretáciu, naopak γ je koeficient očakávania.
- Modely sú typu ADL.
- Náhodné poruchy sú autokorelované.

Viacnásobný statický LRM s autokorelovanými rezíduami ADL(0, *k*, 0)

ADL(0, *k*, 0) viacnásobný statický LRM

$$y_t = \alpha_0 + \beta_{1,0} x_{1,t} + \beta_{2,0} x_{2,t} + \ldots + \beta_{k,0} x_{k,t} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$$

$$y_t = \alpha_0 x_{1,t}{}^{\beta_{1,0}} x_{2,t}{}^{\beta_{2,0}} \ldots x_{k,t}{}^{\beta_{k,0}} e^{\varepsilon_t}, \quad t = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$$

$$\ln y_t = \ln \alpha_0 + \beta_{1,0} \ln x_{1,t} + \beta_{2,0} \ln x_{2,t} + \ldots + \beta_{k,0} \ln x_{k,t} + \ln \varepsilon_t$$

$\beta_{j,0}$ - parciálne regresné koeficienty

- marginálne efekty, reakcia na zmenu v X_j pre $j = 1, 2, \ldots, k$ sa uskutoční priamo, v tom istom časovom období t

- marginálne elasticity

Dynamický LRM - SLRM s korelovanými náhodnými poruchami

$$y_t = \alpha_0 + \beta_{1,0} x_{1,t} + \beta_{2,0} x_{2,t} + \ldots + \beta_{k,0} x_{k,t} + \varepsilon_t,$$

AR(1) $\quad \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + u_t$

AR(p) $\quad \varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$

MA(*q*) $\quad \varepsilon_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \ldots - \theta_q u_{t-q}$

ARMA(*p, q*)

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \phi_p \varepsilon_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \ldots - \theta_q u_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p)\varepsilon_t = (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q) u_t$$

$$\varepsilon_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} u_t$$

Simultánny odhad: LRM a $\varepsilon_t = \dfrac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} u_t$

nový model LRM+AR(1)

$$y_t = \alpha_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + u_t$$

alebo

model LRM+ARMA(p, q)=MARMA(p, q)

$$y_t = \alpha_0 + \beta_0 x_t + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} u_t$$

Problém falošnej regresie

Granger, C. W. J. a Newbold, P. (1974)

- generovali dvojice nezávislých premenných

  X ~ RW a Y ~ RW
- metódou Monte Carlo zistili: 75 % výsledkov potvrdilo lineárnu závislosť X, Y (prijali nesprávnu hypotézu)
- Formulovali pravidlo:

Ak $R^2 > D-W$ **ide o falošnú regresiu**

Autoregresný model rozložených časových oneskorení

ADL(p, k, τ) – *Autoregressive distributed lag*

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{\tau} \beta_{j,i} x_{j,t-i} + \varepsilon_t$$

kde
$t = 1, 2, ..., T$
ε_t je biely šum,
$\left| \sum_{i=1}^{p} \phi_i \right| < 1$ t.j. y_t je stacionárny časový rad,
$x_{j,t-i}$ je hodnota nestochastickej premennej X_j v oneskorení $t-i$; alebo premenná X_j je stochastická pre ktorú platí $E(\varepsilon_t, x_{j,t-i}) = 0$ pre všetky t, $i = 1, 2, ..., \tau$ a $j = 1, 2, ..., k$,
p je počet oneskorení stochastickej premennej Y,
k je počet vysvetľujúcich premenných v modeli,
τ je maximálny počet oneskorení i v premennej X_j
α_0 konštanta modelu
ϕ_i pre $i = 1, 2, ..., p$ autoregresné koeficienty
$\beta_{j,i}$ parciálne regresné koeficienty resp. krátkodobé multiplikátory pri $X_{j,t-i}$

LITERATÚRA

1. ARLT, J.: Moderní metody modelování ekonomických časových řad. Praha: Grada Publishing, 1999.
2. BOX, G. E. P., JENKINS, G. M.: Time Series Analysis: Forecasting and Control. New Jersey: Prentice Hall International, Inc. 1994.
3. CIPRA, T. : Finanční ekonometrie, Ekopress, Praha.
4. GUJARATI, D. N.: Basic Econometrics: McGraw-Hill International Editions, New York. 1995.
5. HAMILTON, J. D.: Time Series Analysis. New Jersey: Princeton University Press, 1994.
6. HARVEY, A. C.: The Econometric Analysis of Time Series. 2nd Edition. London: Philip Allan, 1990.
7. HATRÁK, M. : Ekonometria. Bratislava. Iura Edition, 2007.
8. MILLS, T. C.: Time series techniques for economists. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
9. PANKRATZ, A.: Forecasting with Dynamic Regression Models. Willey and Sons. Inc., New York.
10. RUBLÍKOVÁ, E., PRÍHODOVÁ, I.: Analýza vybraných časových radov-ARIMA modely. Bratislava: Vydavateľstvo Ekonóm, 2008. s214.

11.RUBLÍKOVÁ, E., HANČLOVÁ, J.: Short–run Dynamics In: Monetary Model of Exchange Rate. In: Ekonomika a Informatika, č. 1. 2006, roč, IV. s. 150 – 156.
12.RUBLÍKOVÁ, E.: Analýza časových radov. Bratislava: Iura Edition, 2007.
13.RUBLÍKOVÁ, E.: ARCH and GARCH Models for Daily Exchange Rate of SKK/USD. In: Ekonomické rozhľady roč. XXXIII, č.3, (2004), s. 314 – 323.
14.RUBLÍKOVÁ, E., RUTKOWSKA, M.: Determinants of Exchange Rates for Slovakia, the Czech Republic and Poland. In: ECON´5 (Selected Research Papers). Technical University of Ostrava, Faculty of Economics, Volume 12, 2005, s. 308 – 316.
15.RUBLÍKOVÁ, E., IVANIČOVÁ, Z.: Modelling Conditional Variance of Monthly Rates SKK/USD. In: ECON'02 Ostrava. (Selected Research Papers). Research Work Proceedings, s. 174 – 179.
16.RUBLÍKOVÁ, E., RUTKOWSKA, M.: Estimating Cyclical Component in CPI of Slovakia and Poland. In: Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wroclawiu: Inwesycje finansowe i ubezpeczenia – tendencje swiatowe a polski rynek. Nr. 1133, (2006), s. 438 – 446.
17. RUBLÍKOVÁ, E., MAGALHAES-HILL, M.: A Non-linear Approach to Modelling Asymmetry in a Time Series. In: Temas em Métodos Quantitativos. No. 4, s. 51 – 59 Lisboa, 2004.
18.VINCÚR, P.: Makroekonomická analýza a prognóza. Bratislava: Sprint, 2000.
19.RUBLÍKOVÁ, E., MAREK, L. Linear transfer function model for outflow rates. Ekonomické rozhľady. Bratislava: Ekonomická univerzita v Bratislave, roč. 30, č. 4., s. 457-466.

Ďakujem za pozornosť