Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky

5. vedecký seminár doktorandov

v študijnom odbore 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

APLIKÁCIE KVANTITATÍVNYCH METÓD V EKONÓMII

3. jún 2015

Vydavateľstvo EKONÓM
2015

5. vedecký seminár doktorandov
v študijnom odbore 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

APLIKÁCIE KVANTITATÍVNYCH METÓD V EKONÓMII

Fakulta hospodárskej informatiky
Ekonomická univerzita v Bratislave
Dolnozemská cesta 1/b
852 35 Bratislava

Cieľ seminára
Prezentácia nových poznatkov doktorandov v oblasti spracovávaných tém dizertačných prác. Rokovanie seminára je súčasťou atestácie doktorandov v akademickom roku 2014/2015.

Program seminára

14:15 registrácia účastníkov
14:30 otvorenie seminára
14:45 prezentácie príspevkov
18:00 záver

Programový výbor
prof. Ing. Milan Terek, PhD.
(*Katedra štatistiky, FHI EU*)
doc. RNDr. Mária Bilíková, PhD.
(*Katedra matematiky a aktuárstva, FHI EU*)
prof. RNDr. Eva Rublíková, PhD.
(*Katedra štatistiky, FHI EU*)

Organizačný výbor
prof. Ing. Milan Terek, PhD.
(*Katedra štatistiky, FHI EU*)
Ing. Katarína Sušienková
(*Katedra štatistiky, FHI EU*)
Ing. Ondrej Dúžik
(*Katedra štatistiky, FHI EU*)

Recenzenti

prof. Ing. Milan Terek, PhD.	Katedra štatistiky, FHI EU v Bratislave
doc. RNDr. Mária Bilíková, PhD.	Katedra matematika a aktuárstva, FHI EU v Bratislave
prof. RNDr. Eva Rublíková, PhD.	Katedra štatistiky, FHI EU v Bratislave

Katedra štatistiky a Katedra matematiky a aktuárstva, FHI EU
Zostavenie zborníka a grafická úprava: Ing. Ondrej Dúžik

Bratislava, Vydavateľstvo EKONÓM 2015
ISBN 978-80-225-4197-8

O B S A H

ISBN 978-80-225-4197-8

PREDHOVOR

Vedecký seminár doktorandov „Aplikácie kvantitatívnych metód" je už v poradí piatym vedeckým seminárom, ktorý pravidelne usporadúva Katedra štatistiky a Katedra matematiky Ekonomickej univerzity v Bratislave. Seminár sa konal dňa 3. 6. 2015 v miestnosti A7.12 na Fakulte hospodárskej informatiky. Zúčastnili sa ho traja pedagogickí pracovníci z Katedry štatistiky a Katedry matematiky a akutuárstva a šiesti doktorandi študijného programu tretieho stupňa Kvantitatívne metódy v ekonómii, študijného odboru 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii.

Na vedeckom seminári odznelo spolu 6 príspevkov zúčastnených doktorandov, ktoré sa týkali tém ich dizertačných prác. Všetky príspevky boli veľmi zaujímavé a vyvolali bohatú diskusiu.

Cieľom vedeckého seminára bolo prezentovať a prediskutovať postup prác a čiastočné výsledky dizertačných prác zúčastnených doktorandov.

V diskusiách odzneli niektoré zaujímavé námety ktoré môžu v konečnom dôsledku viesť k dosiahnutiu lepších výsledkov a k celkovému skvalitneniu dizertačných prác. Tým bol základný cieľ vedeckého seminára splnený.

prof. Ing. Milan Terek, PhD.

Legislatívne zmeny v dôchodkoch vyplácaných z II. piliera
Legislative changes to the pensions paid from Pillar II

Jana MIHALECHOVÁ

Abstrakt: Systém dôchodkového zabezpečenia na Slovensku prešiel mnohými zmenami. Poslednou výraznou zmenou bola anuitná novela z roku 2014, ktorá upravuje vyplácanie dôchodkov z tohto piliera. Cieľom tohto príspevku je odvodiť vzťahy potrebné na výpočet doživotných starobných dôchodkov z II. piliera a porovnať výšky týchto dôchodkov upravených anuitnou novelou s dôchodkami, ktoré by boli vyplácané z tohto piliera v prípade, že by novela prijatá nebola.

Kľúčové slová: II. pilier, dôchodky, anuitná novela

Abstract: The Slovak pension system has undergone many changes. The last major change was the annuity amendment of 2014, which governs the payment of pensions from this pillar. The objective of this paper is to devise the formulas needed to calculate life annuities from Pillar II and compare the level of the annuities in accordance with the annuity amendment with those that would be paid if the amendment had not been made.

Key words: Pillar II, annuities, annuity amendments.

JEL classification: C02, G22

1. Úvod

Dôchodkový systém predstavuje hlavnú súčasť sociálneho zabezpečenia občanov, ktorý určuje životnú úroveň určitej časti populácie a má významný dopad na hospodárstvo celého štátu. Systém dôchodkového zabezpečenia na Slovensku prešiel mnohými zmenami. Jednou z najdôležitejších bola dôchodková reforma z roku 2004, kedy bol prijatý Zákon o starobnom dôchodkovom sporení č. 43/2004 Z. z.. Práve vďaka tejto reforme, s platnosťou od 1. 1. 2005, je dôchodkový systém na Slovensku založený na troch pilieroch, pričom I. pilier je priebežný, II. pilier kapitalizačný a III. pilier doplnkový.

V príspevku sa zameriame na II. pilier dôchodkového zabezpečenia, ktorý prešiel v minulom roku výraznou zmenou (zákon schválený 5. 6. 2014) zameranou najmä na výplaty dôchodkov z tohto piliera. Odvodíme vzťahy potrebné na výpočet takýchto dôchodkov a porovnáme ich s dôchodkami, ktoré by boli vyplácané v prípade, že by anuitná novela prijatá nebola.

2. II. pilier dôchodkového zabezpečenia na Slovensku

II. pilierom dôchodkového zabezpečenia na Slovensku je starobné dôchodkové sporenie, ktoré vykonávajú jednotlivé dôchodkové správcovské spoločnosti. Tento typ sporenia je príspevkovo definovaný, teda výška dôchodku je určená sumou zaplatených príspevkov a príslušného výnosu z investovania. Fyzická osoba, ktorá sa stáva poistencom v systéme sociálneho zabezpečenia, sa môže počas 6 mesiacov rozhodnúť, či zostane výlučne v I. pilieri, teda odvodové zaťaženie bude platiť iba Sociálnej poisťovni, alebo sa zapojí do II. piliera. V prípade, že sa táto osoba rozhodne vstúpiť do systému dôchodkového sporenia, odvodové zaťaženie vo výške 18% z vymeriavacieho základu sa rozloží medzi I. a II. pilier. Od 1. 9. 2012, podľa zákona č. 252/2012 Z. z., sa odvod do sociálnej poisťovne zvýšil z pôvodných 9 % na 14 % a výška príspevku na osobný dôchodkový účet vo vybranej dôchodkovej správcovskej spoločnosti sa znížila z pôvodných 9 % na 4 %. Je dôležité poznamenať, že je naplánované postupné zvyšovanie pomeru odvodov od roku 2017, a to v prospech II. piliera každoročne o 0,25 %, až do roku 2024, kedy dosiahne výšku 6 % na ktorej sa zvyšovanie ustáli. Účasť v II. pilieri teda predstavuje dôchodkové zabezpečenie zložené zo štátu (časť dôchodku vyplácaná z I. piliera) a súkromných dôchodkových správcovských spoločností, pričom na rozdiel od I. piliera, kde bude občan poberať dôchodok na základe jeho príjmov a odpracovaných rokov, dôchodok z II. piliera závisí aj od investícií a zhodnotenia na finančných trhoch.

2.1. Anuitná novela

Vládny návrh zákona, ktorý mení a dopĺňa zákon č. 43/2004 Z. z., o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov, ktorým sa menia a dopĺňajú niektoré zákony, bol 5. 6. 2014 schválený Národnou radou Slovenskej republiky, s účinnosťou od 1. 7. 2014, v prípade niektorých paragrafov s účinnosťou od 1. 1. 2015, čím sa zrodila anuitná novela (Zákon č. 183/2014 Z. z.), od ktorej sa očakáva, že bude prinášať zodpovedné riešenia pre sporiteľov. Táto novela upravuje viacero podrobností týkajúcich sa II. piliera, v príspevku uvedieme najmä tie, ktoré súvisia s výplatou dôchodkov z tohto piliera.

Podľa anuitnej novely by sa mal starobný dôchodok z II. piliera vyplácať rovnako ako v I. pilieri. Vyplácanie dôchodku už nebude podmienené zachovaním minimálneho obdobia sporenia najmenej 10 rokov, ale bude vyplácaný dovŕšením dôchodkového veku.

Novela taktiež upravuje vyplácanie starobných dôchodkov a predčasných starobných dôchodkov, a to formou doživotného dôchodku, dočasného dôchodku a programového výberu. Dobu vyplácania dočasného starobného dôchodku a dočasného predčasného starobného dôchodku určí sporiteľ v zmluve, a to na päť rokov, sedem rokov alebo desať rokov. Podmienkou pri vyplácaní týchto dôchodkov je výška potenciálne vyplácaného celého dôchodku, ktorá musí byť vyššia ako štvornásobok sumy životného minima pre jednu plnoletú fyzickú osobu.

V prípade, že by chcel sporiteľ začať poberať predčasný starobný dôchodok, musí byť súčet súm predčasného starobného dôchodku, na ktorého výplatu vznikol nárok (z I. piliera) a doživotného predčasného starobného dôchodku (z II. piliera) vyšší ako 1,2 násobok sumy životného minima. Cieľom je, aby úhrn súm predčasných starobných dôchodkov z oboch pilierov bol v dostatočnej výške, a tým minimalizoval možnosť vzniku nároku na dávku v hmotnej núdzi.

Anuitná novela upravuje spôsob vyplatenia nasporenej sumy v prípade smrti poisteného tak, že nasporená suma sa stáva predmetom dedičského konania, teda nebude vyplatená iba manželovi, resp. manželke, ale budú mať na vyplatenie svojho podielu právo aj deti zomretého, prípadne ďalšie osoby v rámci prvej dedičskej skupiny.

Ďalšou zmenou, ktorú prináša novela, je, že starobný dôchodok, predčasný starobný dôchodok a pozostalostný dôchodok sa budú vyplácať mesačne pozadu, pričom túto vyplácanú sumu môže dôchodková správcovská spoločnosť alebo poistiteľ znížiť o oprávnene vynaložené náklady na výplatu dôchodku v hotovosti.

S platnosťou od 1. 1. 2015, ak sporiteľ požiada o vyplácanie starobného alebo predčasného starobného dôchodku, dôchodková správcovská spoločnosť alebo Sociálna poisťovňa zadá cez ponukový systém pokyn na vydanie certifikátu. Certifikátom je elektronické potvrdenie o sume zodpovedajúcej aktuálnej hodnote osobného dôchodkového účtu sporiteľa.

Poistiteľ[1] vyhotoví sporiteľovi v deň vydania certifikátu cez ponukový systém ponuku doživotného starobného alebo predčasného starobného dôchodku:

1. bez zvyšovania dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov,
2. so zvyšovaním dôchodku a bez pozostalostných dôchodkov,
3. bez zvyšovania dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty 1 rok,
4. bez zvyšovania dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty 2 roky,
5. so zvyšovaním dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty 1 rok,
6. so zvyšovaním dôchodku a s pozostalostnými dôchodkami s obdobím výplaty 2 roky.

Podľa § 32 anuitnej novely zákona je umožnené dedenie aj vo fáze výplaty doživotného dôchodku, ak poberateľ zomrie skôr, ako mu bolo vyplatených 84 mesačných dôchodkov. V tomto prípade ide o sumu, zodpovedajúcu rozdielu medzi hodnotou 84 mesačných dôchodkov a už vyplatenými dávkami. V prípade dočasného dôchodku takáto garancia neplatí, a teda ak poberateľ dočasného dôchodku zomrie skôr, ako mu má byť dôchodok dovyplácaný, suma nevyplatených dávok sa nededí.

3. Životné poistenie

V tejto kapitole príspevku oboznámime čitateľa s použitými dôchodkovými poisteniami a poisteniami na úmrtie, ktoré sa vyskytujú v 4. kapitole pri odvodzovaní vzťahov na výpočet modelových dôchodkov vyplácaných z II. piliera.

3.1 Dôchodkové poistenia

Dôchodky z II. piliera sú vyplácané mesačne pozadu, preto z tohto dôvodu uvedieme najprv polehotný ročne vyplácaný jednotkový dôchodok, z ktorého pomocou lineárnej aproximácie odvodíme dôchodok potrebný pre výpočty v 4. kapitole (podľa [1], str. 45).

Súčasnú hodnotu polehotného jednotkového dôchodku vyplácaného ročne označujeme aktuárskym symbolom a_x. Pomocou komutačných čísel ju vyjadríme vzťahom:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{1}$$

kde:

$D_x = l_x \cdot v^x$ – komutačné číslo počtu žijúcich osôb vo veku x,

$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$ – komutačné číslo počtu žijúcich druhého rádu.

Komutačným číslam používaným pri výpočtoch súčasných hodnôt poistení sa v príspevku venovať nebudeme, viac sa o nich môže čitateľ dočítať napr. v [1]. Vzhľadom na to, že dôchodky z II. piliera budú vyplácané mesačne, je potrebné uviesť področný polehotný doživotný dôchodok, kedy na konci každého mesiaca v roku vyplatí poisťovňa $\frac{1}{12}$ p.j. vo forme

[1] Ide o životnú poisťovňu, ktorá má licenciu na výplaty dôchodkov z II. piliera od Národnej banky Slovenska. V súčasnosti to sú poisťovne AEGON d.s.s., a.s., Allianz – Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť, a.s., AXA d.s.s., a.s., DSS Poštovej banky, d.s.s., a.s., NN dôchodková správcovská spoločnosť, a.s., VÚB Generali dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.

dôchodku. Takýto dôchodok označujeme symbolom $a_x^{(12)}$. Aproximovaním vzťahu (1) dostaneme (podľa [2], str. 32)[2]:

$$a_x^{(12)} \cong \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{11}{24} \tag{2}$$

Ďalší typ dôchodku, ktorý je nevyhnutný pre naše výpočty, označujeme ${}_{1|}(Ia)_x^{(12)}$. Ide o súčasnú hodnotu jeden rok odloženého polehotného lineárne rastúceho mesačne vyplácaného dôchodku, kde počiatočná vyplatená výška dôchodku predstavuje $\frac{1}{12}$ p.j. a potom rastie vždy ročne o 1 p.j. V práci použijeme ${}_{1|}(Ia)_x^{(12)}$ na výpočet každoročného rastu, a to začatím od druhého roku od vzniku povinnosti poistiteľa platiť dôchodok. Z toho dôvodu je tento typ dôchodku jeden rok odložený. Keďže lineárne rastúci dôchodok môžeme vyjadriť ako súčet odložených dôchodkov, platí:

$${}_{1|}(Ia)_x^{(12)} = {}_{1|}a_x^{(12)} + {}_{2|}a_x^{(12)} + {}_{3|}a_x^{(12)} + \cdots \tag{3}$$

Odložené mesačné dôchodky môžeme upraviť opäť použitím lineárnej aproximácie (k je doba odkladu), kde dostávame vzorec:

$${}_{k|}a_x^{(12)} \cong \frac{N_{x+k+1}}{D_x} + \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \tag{4}$$

čo dosadením do vzťahu (3) upravíme na tvar:

$${}_{1|}(Ia)_x^{(12)} \cong \left(\frac{N_{x+2}}{D_x} + \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}\right) + \left(\frac{N_{x+3}}{D_x} + \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{x+2}}{D_x}\right) + \left(\frac{N_{x+4}}{D_x} + \frac{11}{24} \cdot \frac{D_{x+3}}{D_x}\right) \ldots \tag{5}$$

Na záver využijeme aktuársky symbol ${}_{1|}(Ia)_x$ vyjadrujúci súčasnú hodnotu jeden rok odloženého polehotného jednotkového lineárne rastúceho dôchodku, určeného vzťahom:

$${}_{1|}(Ia)_x = \frac{N_{x+2}}{D_x} + \frac{N_{x+3}}{D_x} + \frac{N_{x+4}}{D_x} + \cdots = \frac{S_{x+2}}{D_x} \tag{6}$$

kde:

$S_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} N_{x+k}$ - je komutačné číslo tretieho rádu.

Nakoniec, na základe uvedených vzťahov (4), (5) a (6) možno ${}_{1|}(Ia)_x^{(12)}$ vyjadriť v tvare:

$${}_{1|}(Ia)_x^{(12)} = {}_{1|}(Ia)_x + \frac{11}{24} \cdot a_x \tag{7}$$

3.2 Poistenie na úmrtie

Napriek tomu, že podstatnú časť príspevku tvorí práve dôchodkové poistenie, je potrebné definovať aj poistenie na úmrtie, keďže anuitná novela ustanovila podmienku dedenia pre prípad, že poistená osoba zomrie v priebehu prvých siedmych rokov od začatia poberania takéhoto dôchodku. Z tohto dôvodu uvedieme dočasné poistenie na úmrtie.

Súčasnú hodnotu jednotkového dočasného (n-rokov trvajúceho) poistenia na úmrtie, označovaného aktuárskym symbolom $A_{x,\bar{n}|}^1$, môžeme prostredníctvom pravdepodobností nastania poistného plnenia vyjadriť vzorcom (podľa [1], str. 56):

[2] Pre $m = 12$.

$$A^{1}_{x,\bar{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}p_{x} \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1} \tag{8}$$

kde:

$v = (1+i)^{-1}$ – odúročiteľ, vyjadrený pomocou technickej úrokovej miery i,

q_{x+t} – ročná mieru úmrtnosti, ktorá predstavuje pravdepodobnosť toho, že osoba vo veku $x + t$ rokov sa nedožije veku $x + t + 1$,

${}_{t}p_{x}$ – miera dožitia, ktorá predstavuje pravdepodobnosť, že osoba vo veku x rokov sa dožije veku $x + t$.

V ďalšej kapitole odvodíme vzťahy na výpočet štyroch vybraných typov dôchodkov.

4. Modelové typy dôchodkov

Uvažujeme štyri typy dôchodkov. Pre prehľadnejšie porovnanie sme zvolili tieto typy:

1. doživotný dôchodok bez zvyšovania dôchodku,
2. doživotný dôchodok so zvyšovaním dôchodku ,
3. doživotný dôchodok bez zvyšovania dôchodku, s garanciou vyplatenej sumy v prípade smrti[3] poisteného,
4. doživotný dôchodok so zvyšovaním dôchodku, s garanciou vyplatenej sumy v prípade smrti poisteného.

Všetky typy dôchodkov uvažujeme bez pozostalostných dôchodkov. Prvý typ by vyhovoval podmienkam[4] vyplácania starobných dôchodkov pred anuitnou novelou z roku 2014, pričom tretí a štvrtý typ spĺňajú požiadavky tejto novely na výpočet doživotných dôchodkov z II. piliera[5]. Druhý typ dôchodku slúži pre porovnanie k štvrtému typu, teda budeme ho považovať za dôchodok, ktorý by bol vyplácaný z tohto piliera, v prípade, že by anuitná novela nebola schválená.

Pri odvodzovaní v tejto kapitole budeme vychádzať z princípu ekvivalencie[6] a princípu fiktívneho súboru[7]. Predpokladajme, že poistiteľ má štyri druhy nákladov (označíme α; β; δ; γ), spojených so spravovaním dôchodkového poistenia. Prvé náklady α, jednorazové začiatočné náklady, budú určené percentom z nasporenej sumy. Druhé náklady β pokrývajú bežné správne náklady poisťovne a budú určené v percentách z ročnej výplaty dôchodku. Tretie náklady δ sú spojené s doživotným vyplácaním dôchodkov a určíme ich ako pevnú mesačnú

[3] Podľa § 32 anuitnej novely zákona. Tento paragraf umožňuje dedenie aj vo fáze výplaty doživotného dôchodku, ak poberateľ zomrie skôr, ako mu bolo vyplatených 84 mesačných dôchodkov. V tomto prípade ide o sumu, zodpovedajúcu rozdielu medzi hodnotou 84 mesačných dôchodkov a už vyplatenými dávkami. [5]

[4] Podľa § 29 zákona č. 28/2012 Z. z., ktorý dopĺňa zákon č. 43/2004 Z. z. [4], bolo vyplácanie starobných dôchodkov z II. piliera stanovené vo forme doživotného dôchodku alebo programového výberu s doživotným dôchodkom.

[5] Predstavujú 1. a 2. typ ponuky doživotného starobného dôchodku.

[6] Princíp ekvivalencie vychádza z predpokladu, že ak príjmy a výdavky poisťovne diskontujeme k rovnakému časovému bodu pri poistných zmluvách toho istého typu, musia byť v rovnováhe.

[7] Princíp fiktívneho súboru predstavuje počet osôb vo veku x uzatvárajúcich poistnú zmluvu rovnakého typu sa rovná počtu osôb dožívajúcich sa veku x v poistnom kmeni, teda l_x zo zvolenej úmrtnostnej tabuľky.

sumu spojenú s doživotnou výplatou dôchodku. Štvrté náklady[8] γ pokrývajú náklady spojené s výplatou sumy pri úmrtí poistenej osoby. Taktiež budú vyjadrené ako pevná suma spojená s výplatou pri úmrtí.

V nasledujúcich podkapitolách odvodíme vzťahy na výpočet mesačnej výšky našich modelových dôchodkov.

4.1 Doživotný dôchodok bez zvyšovania dôchodku

Označíme Q_1 výšku mesačného dôchodku, ktorú bude poistiteľ vyplácať vždy na konci mesiaca za predpokladu, že dôchodca je nažive. Súčasnú hodnotu takto vyplácaných dôchodkov určíme ako vzťah:

$$SH(D) = 12Q_1 \cdot a_x^{(12)} \tag{9}$$

Pre náklady $\alpha;\ \beta;\ \delta$ vieme súčasnú hodnotu nákladov zapísať v tvare:

$$SH(N) = \alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12Q_1 \cdot a_x^{(12)} + \delta \cdot 12a_x^{(12)} \tag{10}$$

Súčasnú hodnotu zaplateného poistného tvorí jednorazové poistné (nasporená suma), ktoré označíme π a vyjadríme ho ako:

$$\pi = 12Q_1 \cdot a_x^{(12)} + \alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12Q_1 \cdot a_x^{(12)} + \delta \cdot 12a_x^{(12)} \tag{11}$$

Upravením (11) môžeme zapísať vzťah pre výpočet mesačnej výšky doživotného starobného dôchodku Q_1:

$$Q_1 = \frac{\pi(1-\alpha) - \delta \cdot 12a_x^{(12)}}{(1+\beta) \cdot 12a_x^{(12)}} \tag{12}$$

4.2 Doživotný starobný dôchodok so zvyšovaním dôchodku

Podľa § 42 zákona ([5]) sa zvyšovanie doživotného dôchodku vykonáva každoročne k výročiu vzniku povinnosti poistiteľa platiť dôchodok, a to o zvolené percento (desatinné číslo označíme r) platné ku dňu predloženia ponuky.

Mesačný starobný dôchodok so zvyšovaním bude mať svoju počiatočnú výšku, ktorú označíme Q_2, potom bude každoročne rásť o percento, určené hodnotou r. Súčasnú hodnotu takto vyplácaných dávok určíme vzťahom:

$$SH(D) = 12Q_2 \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] \tag{13}$$

Pred určením vzťahu na výpočet mesačnej výšky takto vyplácaného dôchodku, je potrebné uviesť ešte súčasnú hodnotu nákladov (taktiež pre náklady $\alpha;\ \beta;\ \delta$), ktorá je v tvare:

$$SH(N) = \alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12Q_2 \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + \delta \cdot 12\left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] \tag{14}$$

Opäť vypočítame nasporenú sumu π spočítaním $SH(D)$ a $SH(N)$:

$$\begin{gathered}\pi = 12Q_2 \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + \\ +\alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12Q_2 \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + \delta \cdot 12\left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right]\end{gathered} \tag{15}$$

Nakoniec môžeme vyjadriť počiatočnú výšku dôchodku Q_2, teda doživotného dôchodku s každoročným zvyšovaním. Vyjadríme ho v tvare:

[8] S týmto druhom nákladov počítame samozrejme iba pri 3. a 4. type modelových dôchodkov.

$$Q_2 = \frac{\pi(1-\alpha) - 12\delta\left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right]}{12 \cdot (1+\beta) \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right]} \tag{16}$$

4.3 Doživotný dôchodok bez zvyšovania dôchodku, s garanciu vyplatenej sumy v prípade smrti poisteného

Označíme $\tilde{Q}_1$ výšku mesačného dôchodku, ktorú bude poistiteľ vyplácať vždy na konci mesiaca v prípade, že dôchodca je nažive a s ohľadom na možnosť dedenia počas prvých siedmych rokov, kedy poistiteľ vyplatí pozostalým sumu zodpovedajúcu rozdielu medzi hodnotou 84 mesačných dávok a už vyplatenými dávkami.

Na začiatku, ešte predtým ako uvedieme súčasnú hodnotu dávok tohto dôchodku, je potrebné odvodiť vzťah, ktorý bude vyjadrovať takto definovanú možnosť dedenia. Ide o dočasné poistenie na úmrtie s každomesačne sa znižujúcou vyplatenou dávkou pozostalým, v prípade úmrtia poistenej osoby počas prvých 7 rokov. Označme súčasnú hodnotu tohto poistenia ako $SH(CHVP$[9]$)$. Pri jeho odvodzovaní budeme vychádzať z jednotkového dočasného (n-rokov trvajúceho) poistenia na úmrtie, pričom mieru úmrtnosti a mieru dožitia vypočítame lineárnou interpoláciou. Takéto dočasné poistenie na úmrtie označíme symbolom ${}^{(12)}A^1_{x,\bar{n}|}$. Týmto si poistená osoba zabezpečí, že v prípade jej smrti počas prvých n rokov dostanú pozostalí na konci mesiaca, v ktorom úmrtie nastalo, 1 p.j. Môžeme ho vyjadriť v tvare:

$${}^{(12)}A^1_{x,\bar{n}|} = \sum_{s=0}^{12n-1} {}_{\frac{s}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{s}{12}} \cdot v^{\frac{s+1}{12}} \tag{17}$$

Ďalším krokom je zavedenie každomesačne sa znižujúcej vyplatenej dávky pozostalým do vzťahu (17), pričom dostávame:

$$\sum_{s=0}^{12n-1} {}_{\frac{s}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{s}{12}} \cdot v^{\frac{s+1}{12}} \cdot (12n-s) \tag{18}$$

Keďže garancia trvá sedem rokov, vo vzťahu (18) dosadíme $n = 7$. Touto úpravou sme dostali poistenie, ktoré označíme $SH(VP)$:

$$SH(VP) = \sum_{s=0}^{83} {}_{\frac{s}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{s}{12}} \cdot v^{\frac{s+1}{12}} \cdot (84-s) \tag{19}$$

Rozšírením (19) o $\tilde{Q}_1$ dostávame poistenie, ktoré sme označili ako $SH(CHVP)$, dané vzťahom:

$$SH(CHVP) = \sum_{s=0}^{83} {}_{\frac{s}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{s}{12}} \cdot v^{\frac{s+1}{12}} \cdot (84-s)\tilde{Q}_1 \tag{20}$$

Vzhľadom na to, že $\tilde{Q}_1$ môžeme zo vzťahu (20) vyňať pred sumu, zapíšeme súčasnú hodnotu tohto poistenia ako:

$$SH(CHVP) = \tilde{Q}_1 \cdot SH(VP) \tag{21}$$

Pre súčasnú hodnotu dávok mesačného dôchodku $\tilde{Q}_1$ teda platí:

$$SH(D) = 12\tilde{Q}_1 \cdot a_x^{(12)} + SH(CHVP) \tag{22}$$

[9] $CHVP$ skrátene z výrazu „celková hodnota výplaty pozostalým“.

Na rozdiel od predchádzajúcich dvoch typov dôchodkov, pri tomto type pribúdajú náklady spojené s výplatou sumy pri úmrtí poistenej osoby γ. Súčasnú hodnotu nákladov zapíšeme v tvare:

$$SH(N) = \alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12\tilde{Q}_1 \cdot a_x^{(12)} + \delta \cdot 12a_x^{(12)} + \gamma \cdot {}^{(12)}A_{x,\bar{n}|}^{1} \tag{23}$$

Na základe vzťahov (22) a (23) vypočítame nasporenú sumu π:

$$\pi = 12\tilde{Q}_1 \cdot a_x^{(12)} + SH(CHVP) + \alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12\tilde{Q}_1 \cdot a_x^{(12)} + \\ + \delta \cdot 12a_x^{(12)} + \gamma \cdot {}^{(12)}A_{x,\bar{n}|}^{1} \tag{24}$$

kde po úprave vyjadríme výšku mesačného dôchodku $\tilde{Q}_1$:

$$\tilde{Q}_1 = \frac{\pi(1-\alpha) - \delta \cdot 12a_x^{(12)} - \gamma \cdot {}^{(12)}A_{x,\bar{n}|}^{1}}{(1+\beta) \cdot 12a_x^{(12)} + SH(VP)} \tag{25}$$

4.4 Doživotný dôchodok so zvyšovaním dôchodku, s garanciou vyplatenej sumy v prípade smrti poisteného

Posledným typom dôchodku, ktorý v práci počítame, je doživotný dôchodok každoročne rastúci o percento, určené hodnotou r, rovnako ako v prípade druhého typu dôchodku (kapitola 4.2), s tým rozdielom, že v tomto prípade musíme počítať s podmienkou vyplatenej sumy v prípade smrti poisteného v priebehu prvých siedmych rokov, podobne ako pri dôchodku tretieho typu (kapitola 4.3). Počiatočnú výšku takéhoto dôchodku označíme $\tilde{Q}_2$.

Ešte predtým, ako určíme súčasnú hodnotu dávok, musíme vyjadriť súčasnú hodnotu dočasného (7 rokov trvajúceho) poistenia na úmrtie, s každomesačne znižovanou sumou vyplatenou v prípade úmrtia poistenej osoby, pričom jeho hodnota bude každoročne rásť o percento, určené hodnotou r. Musíme teda rozšíriť vzťah (19) o každoročný nárast. Označili sme tento typ poistenia na úmrtie symbolom $SH(rCHVP)$. Jeho súčasnú hodnotu vyjadríme vzťahom:

$$SH(rCHVP) = \left[c_1 \cdot \tilde{Q}_2 + c_2 \cdot (1+r)\tilde{Q}_2 + c_3 \cdot (1+r)^2\tilde{Q}_2 + \cdots + c_7 \cdot (1+r)^6\tilde{Q}_2\right] \tag{26}$$

kde jednotlivé symboly c_i pre $i = 1,2, \ldots, 6$ vieme zapísať ako:

$$c_i = \sum_{s=i-1}^{12i-1} {}_{\frac{s}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{s}{12}} \cdot v^{\frac{s+1}{12}} \cdot (84 - s) \tag{27}$$

Analogicky ako pri vzťahu (20), vyberieme $\tilde{Q}_2$ pred zátvorku a $SH(rCHVP)$ upravíme do tvaru:

$$SH(rCHVP) = \tilde{Q}_2 \cdot [c_1 + c_2 \cdot (1+r) + c_3 \cdot (1+r)^2 + \cdots + c_7 \cdot (1+r)^6] \tag{28}$$

Vzťah (28) prepíšeme ako:

$$SH(rCHVP) = \tilde{Q}_2 \cdot SH(rVP) \tag{29}$$

kde:

$$SH(rVP) = [c_1 + c_2 \cdot (1+r) + c_3 \cdot (1+r)^2 + \cdots + c_7 \cdot (1+r)^6] \tag{30}$$

Súčasnú hodnotu dávok štvrtého typu poistenia môžeme zapísať nasledovne:

$$SH(D) = 12\tilde{Q} \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + SH(rCHVP) \tag{31}$$

Ďalším krokom je určenie súčasnej hodnoty nákladov, kde vychádzame z nákladov $\alpha;\ \beta;\ \delta;\ \gamma$, popísaných na začiatku kapitoly 4. Keďže náklady γ pokrývajú náklady spojené s výplatou sumy pri úmrtí poistenej osoby, kde pozostalí dostanú na konci mesiaca, v ktorom poistená osoba zomrela 1 p.j., pričom táto suma rastie každoročne o výšku stanovenú hodnotou r, označíme súčasnú hodnotu takéhoto poistenia ako $SH(rVN)$ a vyjadríme ju vzťahom:

$$SH(rVN) = [b_1 + b_2 \cdot (1+r) + b_3 \cdot (1+r)^2 + \cdots + b_7 \cdot (1+r)^6] \tag{32}$$

kde jednotlivé symboly b_i pre $i = 1,2,\dots,6$ vieme vyjadriť vzťahom:

$$b_i = \sum_{s=i-1}^{12i-1} {}_{\frac{s}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{s}{12}} \cdot v^{\frac{s+1}{12}} \tag{33}$$

Súčasnú hodnotu nákladov dostávame v tvare:

$$SH(N) = \alpha \cdot \pi + \beta \cdot 12\tilde{Q}_2 \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + \\ +\delta \cdot 12\left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + \gamma \cdot SH(rVN) \tag{34}$$

Na základe vzťahov (31) a (34) vypočítame nasporenú sumu π:

$$\pi = 12\tilde{Q} \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + SH(rVP) + \alpha \cdot \pi + \gamma \cdot SH(rVN) + \\ +\beta \cdot 12\tilde{Q}_2 \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + \delta \cdot 12\left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] \tag{35}$$

Počiatočnú výšku dôchodku $\tilde{Q}_2$, teda doživotného starobného dôchodku so zvyšovaním dôchodku a s garanciou vyplatenia sumy v prípade úmrtia[10], vyjadríme ako:

$$\tilde{Q}_2 = \frac{\pi(1-\alpha) - 12\delta\left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] - \gamma \cdot SH(rVN)}{12 \cdot (1+\beta) \cdot \left[a_x^{(12)} + r \cdot {}_{1|}(Ia)_x^{(12)}\right] + SH(rVP)} \tag{36}$$

5. Určovanie hodnoty osobného dôchodkového účtu sporiteľa

Po určení vzťahov na výpočet mesačnej výšky jednotlivých typov dôchodkov vyplácaných z II. piliera, uvedených v kapitole 4, môžeme v tejto časti príspevku vypočítať výšku namodelovaných mesačných dôchodkov so zvolenými konkrétnymi predpokladmi. Tie uvádzame v Tabuľke 1 a v texte pod ňou ich výšku zdôvodníme.

Tabuľka 1: Predpoklady modelových doživotných dôchodkov

Symbol:	*Charakteristika:*	*Hodnota:*
x	vek osoby pri odchode do dôchodku	62 rokov
π	nasporená suma (jednorazové poistné)	8 000 €
i	technická úroková miera	1,5 %
α	začiatočné náklady (z π)	5 %
β	správne náklady (z ročnej výplaty dôchodku)	3 %
δ	náklady na výplatu mesačnej výšky doživotného dôchodku	1 €
γ	náklady na výplatu pri úmrtí	5 €
r	ročný nárast 2. a 4. typu dôchodku	2 %

[10] Podľa § 32 anuitnej novely zákona [5].

Výšku nasporenej sumy π sme odhadli z priemerného hrubého platu 820 € mesačne a s 10 ročným šetrením na osobnom dôchodkovom účte. Technickú úrokovú mieru sme zvolili na základe predpokladov stanovených v prepočtoch IFP[11], kde pri výpočtoch dôchodkov z II. piliera predpokladali technickú úrokovú mieru práve v takejto výške, teda 1,5 %. Pri počítaní dôchodku sme použili zmiešané úmrtnostné tabuľky (unisex – nezávislé na pohlaví), ktoré používa nemenovaná poisťovňa pôsobiaca na slovenskom poistnom trhu. Z nich sme zostavili tabuľku komutačných čísel a následne, na základe odvodených vzorcov (12), (16), (25) resp. (36), určili výšku dôchodku.

Doživotný starobný dôchodok bez jeho zvyšovania a bez garancie, ktorý bude poberať osoba z II. piliera, má za daných predpokladov mesačnú výšku:

$$Q_1 = 48{,}05\ €$$

Doživotný starobný dôchodok s dvojpercentným ročným nárastom a bez garancie, ktorý bude poberať osoba vo veku 62 rokov z II. piliera, bude mať počiatočný dôchodok samozrejme nižší, a to:

$$Q_2 = 40{,}99\ €$$

Priebeh výšky mesačného dôchodku s dvojpercentným nárastom v jednotlivých rokoch možno vyjadriť Tabuľkou 2. Od 10. roku poberania dôchodku bude jeho hodnota vyššia v porovnaní s tým, ak by sa tejto osobe vyplácal dôchodok 1. typu, čiže bez zvyšovania.

Tabuľka 2: Výška mesačného dôchodku s dvojpercentným ročným nárastom

Rok výplaty:	1.	2.	3.	...	5.	...	10.	...	20.	...	30.
Výška mesačného dôchodku v €:	40,99	41,81	42,65		44,37		48,99		59,71		72,79

Doživotný starobný dôchodok bez jeho zvyšovania, s garanciou vyplatenia sumy v prípade úmrtia počas prvých siedmych rokov, ktorý bude poberať osoba z II. piliera, má za predpokladov stanovených v Tabuľke 1 mesačnú výšku:

$$\tilde{Q}_1 = 45{,}48\ €$$

Doživotný starobný dôchodok s dvojpercentným ročným nárastom, s garanciou vyplatenia sumy v prípade úmrtia počas prvých siedmych rokov, ktorý bude poberať 62 ročná osoba z II. piliera, bude mať počiatočný dôchodok vo výške:

$$\tilde{Q}_2 = 39{,}03\ €$$

Priebeh výšky tohto dôchodku vyjadríme v Tabuľke 3. Od 9. roka poberania dôchodku bude jeho veľkosť vyššia v porovnaní s tým, ak by sa tejto osobe vyplácal doživotný dôchodok s garanciou, ale bez zvyšovania.

Tabuľka 3: Výška mesačného dôchodku s dvojpercentným ročným nárastom s garanciou

Rok výplaty:	1.	2.	3.	...	5.	...	10.	...	20.	...	30.
Výška mesačného dôchodku v €:	39,03	39,81	40,61		42,25		46,64		56,16		69,31

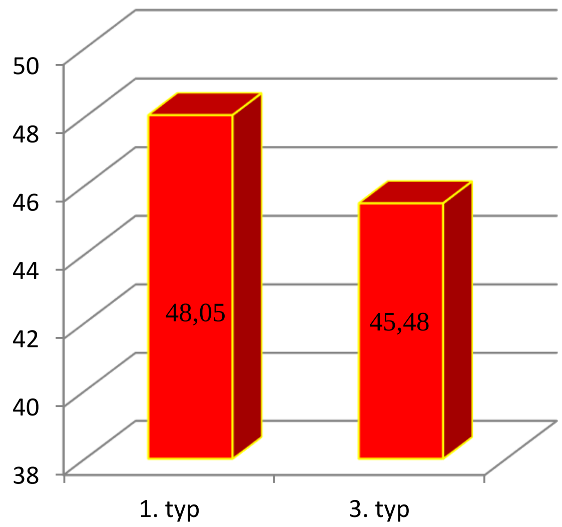
6. Porovnanie modelových typov dôchodkov

[11] IFP - Inštitút finančnej politiky ministerstva financií.

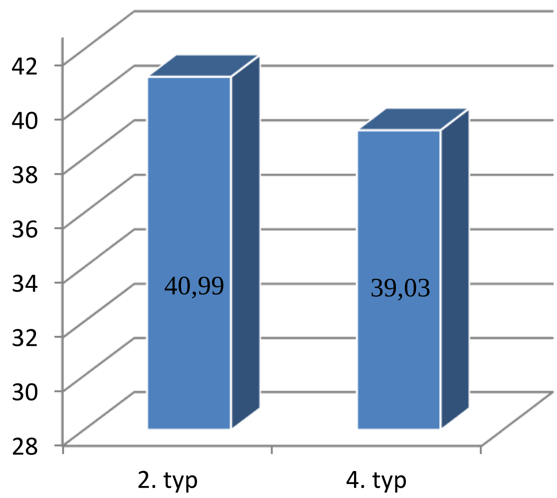
V tejto kapitole príspevku navzájom porovnáme dôchodky bez zvyšovanie, teda 1. a 3. typ a následne aj 2. a 4. typ, čo sú dôchodky so zvyšovaním.

Graf 1 znázorňuje mesačnú výšku dôchodkov bez zvyšovania. 1. typ reprezentuje dôchodok, ktorý by bol vyplácaný za vyššie stanovených predpokladov v prípade, že by anuitná novela prijatá nebola a vyplácalo by sa podľa zákona č. 28/2012 Z. z., ktorý dopĺňa zákon č. 43/2004 Z. z. Oproti tomu 3. typ modelového dôchodku vyhovuje podmienkam anuitnej novely, a to najmä tým, že zahŕňa garanciu v prípade smrti poisteného. Rozdiel v mesačnej výške týchto dvoch dôchodkov predstavuje iba 2,75 €, čo je spôsobené garanciou pri úmrtí.

Na Grafe 2 porovnávame počiatočné výšky mesačných dôchodkov 2. a 4. typu, a teda dôchodky so zvyšovaním. Opäť 2. typ považujeme za dôchodok, ktorý by bol vyplácaný osobe z II. piliera, pokiaľ by nebola prijatá anuitná novela a 4. typ podmienkam tejto novely vyhovuje. V tomto prípade, rozdiel medzi počiatočnými výškami týchto dvoch typov dôchodkov je menší, a to iba 1,96 €. Aj pri dôchodkoch so zvyšovaním je tento rozdiel spôsobený garantovanou výplatou sumy pri úmrtí.

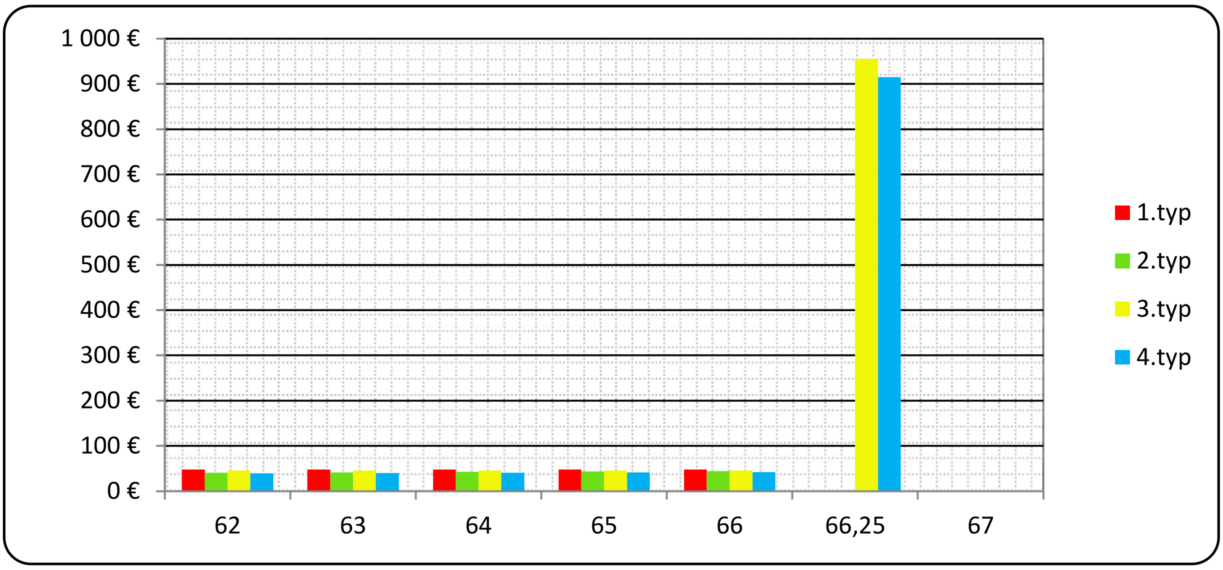


Graf 1: Dôchodky bez zvyšovania



Graf 2: Dôchodky so zvyšovaním

Uvažujeme, že osoba s takto kalkulovanými výškami mesačných dôchodkov zomrie po piatich rokoch a 75 dňoch od začatia poberania dôchodku. Na Grafe 3 môžeme zobraziť výšku dovtedy vyplatených dôchodkov vrátane výplaty garantovanej sumy pri jej úmrtí.



Graf 3: Výška mesačných dôchodkov s úmrtím osoby po 5 rokoch a 75 dňoch

Pri treťom type dôchodku bude výška vyplatená pozostalým na konci mesiaca, v ktorom osoba zomrela, predstavovať 21 ešte nevyplatených dôchodkov, teda sumu 955,11 € a pri štvrtom type dôchodku bude suma určená pozostalým zložená z 9 mesačných dôchodkov vyplácaných v 6. roku poberania dôchodku a 12 mesačných dôchodkov, ktoré by boli vyplatené v 7. roku poberania dôchodku. Dostávame sumu, ktorá by bola vyplatená pozostalým vo výške 915,26 €. Je samozrejmé, že pri prvom a druhom type dôchodku v prípade smrti poisteného, sa dedičom nevyplatí nič.

Výška samotného dôchodku sa odvíja od presného nastavenia parametrov poistiteľa. Keďže v príspevku sme parametre odhadovali, v bežnom živote budú konečné výšky vyplácaných dôchodkov z II. piliera mierne odlišné.

7. Záver

V príspevku sme sa zamerali na II. pilier dôchodkového zabezpečenia s rozobratím anuitnej novely a jej aplikovaním na výpočet starobných dôchodkov z tohto piliera. Odvodili sme vzťahy pre štyri typy dôchodkov, pričom dva z nich by boli vyplácané v prípade, že by anuitná novela prijatá nebola a zvyšné dva vyhovovali podmienkam tejto novely. Po stanovení predpokladov sme vypočítali mesačné výšky týchto anuít. Na základe porovnania dôchodkov pred novelou a po nej, môžeme povedať, že anuitná novela zmenila k lepšiemu sociálnu stránku vo forme garancie v prípade smrti poisteného, pričom výšku samotného dôchodku ovplyvnila iba o pár eur.

Literatúra

BILÍKOVÁ, M. – SEKEROVÁ, V. 2007. *Poistná matematika*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2007. 180 s. ISBN 978-80-225-2301-2.

BILÍKOVÁ, M. 2002. *Spojité metódy v poistnej matematike. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2003. 96 s. ISBN 80-225-1698-8.*

CIPRA, T. 1999. *Pojistná matematika*. Praha: EKOPRESS, s.r.o., 1999. 398 s. ISBN 80-86119-17-3.

Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov.

Zákon č. 183/2014 Z. z., ktorým sa mení a dopĺňa zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov a ktorým sa menia a dopĺňajú niektoré zákony.

Kontakt autora:

Jana Mihalechová, Ing. (2. ročník, 3. stupeň)
Katedra matematiky a aktuárstva, FHI, EU BA
jmihalechova@gmail.com

Príspevok vznikol v rámci projektu:
VEGA č. 1/0542/13 *Riadenie rizík a aktuárska funkcia v životnom poistení*.

Úvod do štúdia analýzy kovariancie (ANCOVA) a jej využitie pri analýze sociálnej situácie slovenských domácností
Introduction to the Study of Analysis of Covariance (ANCOVA) and its application in analysis of social situation of Slovak households

Ondrej DÚŽIK

Abstract: Analysis of Covariance – ANCOVA, belongs to a relatively large set of so-called General Linear Models. These models facilitate the analysis of the relationship between one or more explained variables that stand on one side of the model and explanatory and accompanying variables that stand on the other side of the General Linear Model. Moreover, these models facilitate the analysis of different types of variables (quantitative continuous, categorical plural or alternative). Therefore they are also suitable for identification and quantification of relevant factors that significantly affect the risk of poverty and social exclusion to the population.

Abstrakt: Analýza kovariancie - ANCOVA patrí do pomerne veľkej množiny, tzv. všeobecných lineárnych modelov. Tieto modely umožňujú analyzovať vzťahy medzi jednou alebo viacerými vysvetľovanými premennými, ktoré stoja na jednej strane modelu a vysvetľujúcimi a sprievodnými premennými, ktoré stoja na druhej strane všeobecného lineárneho modelu. Navyše tieto modely umožňujú analyzovať rôzne typy premenných (kvantitatívne spojité, kategoriálne množné alebo alternatívne). Sú teda vhodné aj na identifikáciu a kvantifikáciu relevantných faktorov, ktoré významne ovplyvňujú riziko ohrozenia obyvateľstva chudobou a sociálnym vylúčením.

Key words: analysis of variance – ANOVA, regression analysis, analysis of covariance - ANCOVA.

Kľúčové slová: analýza rozptylu – ANOVA, regresná analýza, analýza kovariancie – ANCOVA, .

JEL classification: C31

1. Úvod

Aktuálne problémy, ktoré trápia celú Európu – nevynímajúc Slovenskú republiku spôsobili, že životná úroveň obyvateľstva sa stala ostro sledovaným faktorom pri snahách o prebudenie ekonomík európskeho priestoru, keďže pravdivo vyjadruje účinnosť oživujúcich opatrení. Reálne čísla, ktoré agreguje Štatistický úrad Slovenskej republiky, harmonizovane s členskými štátmi Európskej únie od roku 2005 najmä v rámci zisťovania o príjmoch a životných podmienkach domácností EU SILC, odzrkadľujú, či mali vykonané opatrenia na obyvateľstvo skôr pozitívny, alebo naopak negatívny dopad.

Keďže databáza EU SILC zahŕňa množstvo socioekonomických ukazovateľov, ktoré ovplyvňujú príjmy a životné podmienky domácností, je pri analyzovaní materiálnej chudoby a pri analyzovaní sociálneho vylúčenia efektívne využiť pokročilé matematicko-štatistické metódy, ktoré dokážu analyzovať pomerne zložité vzťahy medzi viacerými štatistickými premennými. V tejto oblasti je vhodné aplikovať regresné modely, modely ANOVA, ANCOVA a mnohé ďalšie zo všeobecných lineárnych modelov. Prostredníctvom nich je možné identifikovať ukazovatele, ktoré signifikantne ovplyvňujú riziko domácnosti dostať sa do skupiny domácností ohrozených chudobou alebo sociálnym vylúčením a zároveň kvantifikovať ako tieto ukazovatele determinujú toto riziko. V tomto príspevku sme svoju pozornosť upriamili na teoretický úvod metódy analýzy kovariancie.

2. Analýza kovariancie

Analýza kovariancie[1], skr. ANCOVA (angl. *Analysis of Covariances*), môže byť popísaná ako metóda, ktorá je kombináciou metód regresnej analýzy a analýzy rozptylu. Základnou myšlienkou kavariančnej analýzy je rozšírenie (resp. modifikácia) modelu analýzy rozptylu s jedným alebo viacerými kategoriálnymi faktormi na model, ktorý navyše obsahuje kontrolovateľné (ideálne kvantitatívne spojité, ale môžu byť aj ďalšie kategoriálne) premenné, ktoré majú taktiež vplyv na hodnoty vysvetľovanej premennej, resp. vysvetľujúcich premenných.

Pôvodným cieľom analýzy kovariancie je očistenie skúmanej závislosti vysvetľovaných premenných na zvolených faktoroch od zavádzajúceho (klamlivého) pôsobenia sprievodných vplyvov – označovaných pojmom kovariáty (angl. *covariates*). Pôsobenie sprievodných premenných na vysvetľované premenné je síce podstatné, ale nie je v danej úlohe priamym predmetom záujmu. [Hebák, P. – Hustopecký, J. – Malá, I., 2005, s. 174]

ANCOVA, t. j. jednorozmerná analýza kovariancie s jednou vysvetľovanou premennou, ale najmä jej rozšírenie (zovšeobecnenie) na viacrozmernú analýzu kovariancie, skr. MANCOVA (angl. *Multivariate Analysis of Covariance*), s aspoň dvoma vysvetľovanými premennými a aspoň jednou sprievodnou premennou, sú ideálne pre použitie pre skúmanie rôznych socio-ekonomických vplyvov na vybrané indikátory, ako je tomu aj v našom prípade. Analýzu kovariancie môžeme využiť v prípadoch, keď budeme chcieť vplyv rôznych faktorov na sledované indikátory (miery chudoby, miery materiálnej deprivácie a miery nízkej pracovnej intenzity) očistiť od vplyvu známych sprievodných premenných, a tým spresniť vplyv jednotlivých kvalitatívnych faktorov.

3. Typy premenných v analýze kovariancie

Až poznanie základov analýzy rozptylu a regresnej analýzy nám dovoľuje, aby sme sa zaoberali problematikou analýzy kovariancie, ktorú je možné považovať nielen za spojenie, ale aj za rozšírenie oboch uvedených metód. Ide o skúmanie závislostí v pomerne zložitom súbore premenných. Uplatňujú sa v ňom:

- jedna alebo niekoľko vysvetľujúcich premenných – faktorov $A_1, A_2, ..., A_s$, pričom rovnako ako v analýze rozptylu ide obvykle o nominálne alebo alternatívne premenné, ale môžu to byť aj iné kategoriálne premenné;
- jedna alebo viac vysvetľovaných premenných $Y_1, Y_2, ..., Y_p$, na ktoré je pri analýze sústredená pozornosť v tom zmysle, že chceme preukázať ich závislosť na faktore či faktoroch;
- jedna alebo viac sprievodných premenných - kovariátov (tiež kontrolovaných premenných – *covariates*) $X_1, X_2, ..., X_q$, ktoré zahŕňame do modelu a počítame s nimi spravidla preto, aby sme závislosť vysvetľovaných premenných na faktoroch očistili od ich vplyvu.

V nasledujúcej časti popíšeme princíp vylúčenia vplyvu sprievodných premenných. Úlohu s faktorom A, vysvetľovanou premennou Y a so sprievodnou premennou X vyjadruje model

[1] Spracované podľa: Hebák, P. – Hustopecký, J. – Malá, I., 2005, s. 174 – 195.

$$y_{hi} = \mu + \alpha_h + \beta(x_{hi} - \bar{x}) + \varepsilon_{hi}, \qquad h = 1, 2, \dots, \mathrm{H}, \qquad i = 1, 2, \dots, n_h \tag{1}$$

$$\varepsilon_{hi} \sim N(0, \sigma^2), \qquad \sum_{h=1}^{\mathrm{H}} n_h \alpha_h = 0$$

kde:

y_{hi} i-tá hodnota vysvetľovanej premennej pre h-tú úroveň faktora A,

μ stredná hodnota,

α_h efekt h-tej úrovne faktora A na vysvetľovanú premennú,

β regresný koeficient, ktorý vyjadruje sklon regresnej priamky závislosti Y na sprievodnej premennej (kovariáte) X,

x_{hi} i-tá hodnota sprievodnej premennej (kovariátu) pre h-tú úroveň faktora A,

$\bar{x}$ priemer kovariátu,

ε_{hi} i-tá hodnota náhodnej chyby pre h-tú úroveň faktora A.

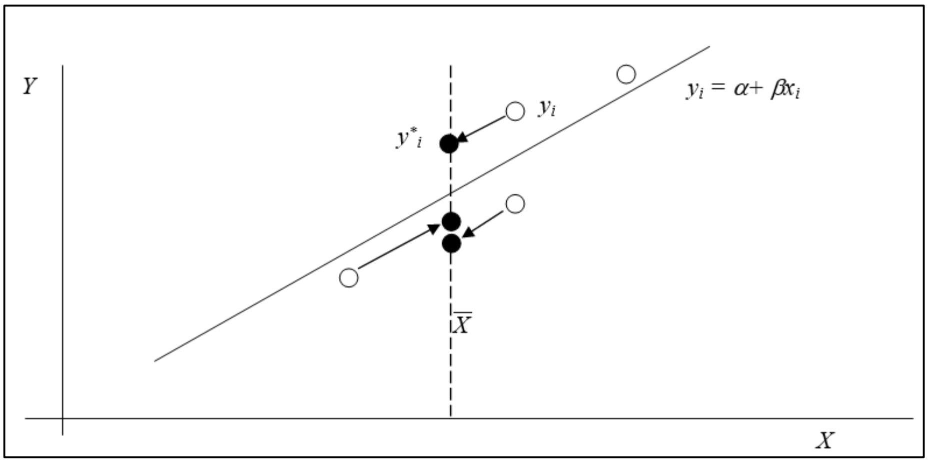
V modeli (1) člen α_h vyjadruje analýzu rozptylu, člen $\beta(x_{hi} - \bar{x})$ vyjadruje regresnú časť modelu. Pri znalosti regresného koeficienta β máme možnosť pri analýze namiesto pôvodných hodnôt y_{hi} používať hodnoty opravené y^*_{hi}, v zmysle ich očistenia od vplyvu sprievodnej premennej X

$$y^*_{hi} = y_{hi} - \beta(x_{hi} - \bar{x}) \tag{2}$$

čo je jedna zo základných myšlienok kovariačnej analýzy. Táto oprava (modifikácia) dovoľuje vyjadriť rovnicu v modeli ako

$$y^*_{hi} = \mu + \alpha_h + \varepsilon_{hi} \tag{3}$$

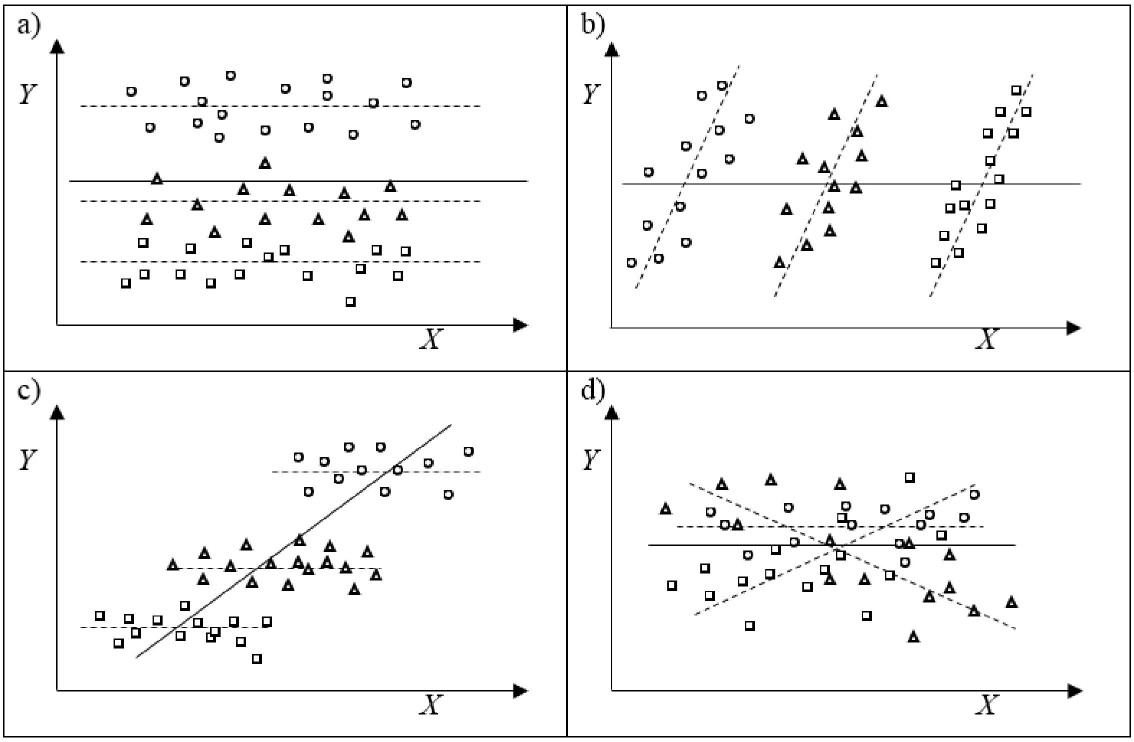
z čoho je zreteľné, že analýza kovariancie v podstate splýva s analýzou rozptylu pre opravené hodnoty vysvetľovanej premennej Y. Z toho taktiež vyplýva podobnosť príslušných algoritmov. Opravená hodnota je meraná hodnota y_i prepočítaná na priemernú hodnotu kovariátu $\bar{x}$, ako je schematicky znázornené na obr. 1. Biele body predstavujú pôvodne namerané hodnoty y_i, plná priamka je regresná priamka závislosti Y na kovariáte X, prerušovaná priamka predstavuje priemernú hodnotu kovariátu, čiernymi bodmi sú naznačené opravené hodnoty y^*_i. Podstatou analýzy kovariancie je to, že pôvodné hodnoty (resp. pôvodné výberové priemery pre jednotlivé úrovne faktora A) pomocou regresného vzťahu medzi Y a X štandardizujeme na úroveň priemernej hodnoty sprievodnej premennej X. [Drápela, K. 2015, s. 3]



Zdroj: Drápela, K. 2015, s. 3

Obr. 1: Niektoré extrémne situácie v analýze kovariancie

Úlohu sprievodných premenných v analýze a zmysel očisťovania závislosti vysvetľujúcich a vysvetľovaných premenných od ich vplyvu je možné ilustrovať na extrémnych prípadoch znázornených na obr. 2. Grafy sa týkajú opäť jednoduchej situácie v analýze kovariancie, v ktorej je jedna vysvetľovaná premenná *Y*, jedna sprievodná premenná *X* a jediný faktor *A* s troma úrovňami.



Zdroj: Hebák, P. – Hustopecký, J. – Malá, I. 2005, s. 178

Obr. 2: Niektoré extrémne situácie v analýze kovariancie

V pravouhlej súradnicovej sústave pre uvažované kvantitatívne premenné *X*, *Y*, je zakreslená množina značiek, zodpovedajúcich jednotlivým objektom a tvarovo rozlíšených podľa príslušnosti ku skupinám – úrovniam faktora *A*. Pri porovnávaní oboch metód si uvedomíme, že zatiaľ čo pri analýze rozptylu uvažujeme v jednotlivých skupinách s kolísaním okolo priemeru, pri analýze kovariancie uvažujeme s kolísaním okolo regresnej priamky. V grafe je regresná priamka vyjadrujúca všeobecnú regresiu *Y* od *X* naznačená plnou čiarou a regresné priamky vyjadrujúce vnútroskupinovú regresiu *Y* od *X* prerušovanou priamkou.

Popíšeme, čo v jednotlivých zobrazených situáciách hovorí o závislosti *Y* od *A* analýza rozptylu, a aký prínos bude mať zahrnutie *X* do komplexu uvažovaných premenných, t. j. aplikácia analýzy kovariancie.

a) Analýza rozptylu preukáže rozdiel v úrovni *Y* v jednotlivých skupinách vzniknutých triedením podľa *A*, t. j. závislosť *Y* od *A*. Zahrnutie *X* do analýzy nemôže tento záver nijako ovplyvniť, pretože *Y* zrejme s *X* nesúvisí, analýza kovariancie je zbytočná.
b) Analýza rozptylu zrejme nepreukáže závislosť *Y* od *A*. Očistenie od *X*, teda prechod na y^*, povedie ku preukázaniu závislosti. Rozpor je spôsobený interakciou *A* a *X*, teda nerovnomerným obsadením skupín podľa úrovne *X*.
c) Analýza rozptylu preukáže závislosť *Y* od *A*, zatiaľ čo analýza kovariancie nie. Ide o opačný prípad ako je uvedený v bode b) a rozpor je opäť dôsledkom interakcie *A* a *X*.
d) Analýza rozptylu nepreukáže závislosť *Y* od *A*. Analýza kovariancie je v štandardnej podobe nemožná pre nezhodu regresií v jednotlivých skupinách (pozri časť *Predpoklady analýzy kovariancie*).

Na obr. 1 sme uviedli niekoľko teoretických situácií. Pozornosť vyvolávajú isté rozpory medzi výsledkami analýzy rozptylu a analýzy kovariancie v bode b) a c). V takto extrémnej podobe sa s nimi v reálnych situáciách nestretneme. V experimentálnych úlohách môžeme interakciou *A* a *X* zabrániť náhodným priradením objektov do skupín, avšak pri výberových zisťovaniach musíme často prítomnosť interakcie pripustiť, čo má vplyv na zhoršenie možnosti interpretácie výsledkov.

Tieto dve situácie okrem toho navodzujú problém posúdenia závislosti dvoch kvantitatívnych premenných (tu *Y* a *X*) očistených od vplyvu kvalitatívnej premennej (tu *A*). Býva to niekedy považované za súčasť širšie poňatej analýzy kovariancie. Príslušné metódy vedú ku skúmaniu (priemernej) vnútroskupinovej regresie a korelácie. Je možné ich teda uplatniť súbežne s riešením hlavnej úlohy analýzy kovariancie, ktorou je posúdenie závislosti *Y* od *A*, očistenej od vplyvu *X*.

4. Predpoklady analýzy kovariancie

Zvyčajné algoritmy v analýze kovariancie je možné uplatniť pri splnení viacerých podmienok, z ktorých sú niektoré rovnaké ako v analýze rozptylu:

I. Náhodnosť výberu. Údaje ideálne z pripravených experimentov, ale môžu byť tiež získané pozorovaním alebo zisťovaním.
II. Nezávislosť výberu (skupín), do ktorých sa výberový súbor rozkladá. Všeobecne sa nezávislé výbery väčšinou týkajú rôznych skupín (účelovo definovaných častí) sledovanej populácie, ale tiež to môžu byť výbery z rôznych porovnávaných (nezávislých) populácií.
III. Normálne rozdelenie *Y*, prípadne viacrozmerné normálne rozdelenie **y**, vo všetkých populáciách, resp. skupinách populácií (medzi najpoužívanejšie testy na overenie normality patria: *Pearsonov* χ^2*-test dobrej zhody, Shapirov-Wilkov test, Komogorovov-Smirnovov test, Kuiperov test, Cramérov-von Misesov test, Andersonov-Darlingov test, Jarque-Bera test normality*).
IV. Homoskedasticita, teda zhodné rozptyly, prípadne zhodné kovariančné matice, vo všetkých populáciách, resp. skupinách populácií (nešpecifické testy: *Goldfeldov-Quandtov test,*

Bartlettov test, modifikovaným Bartlettovým testom, Cochranovým testom, Leveneovým testom, Brownov-Forsytheovým testom, O´Brienovým testom, Hartleyho testom; špecifické testy – vychádzajú z určitého očakávaného typu heteroskedastického modelu: *Glejserov test* a *Beuschov-Paganov test*).

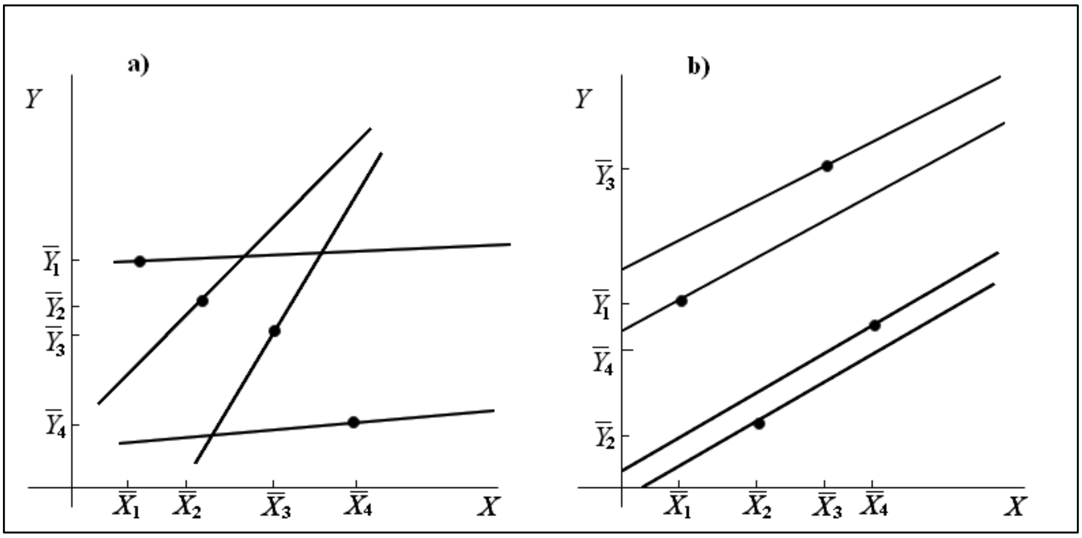
V. Lineárna závislosť Y od X, poprípade $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ od $X_1, X_2, ..., X_q$ vo všetkých populáciách (skupinách populácií).

VI. Zhoda regresných koeficientov, resp. rovnobežnosť regresných priamok, poprípade rovín alebo nadrovín, vo všetkých populáciách (skupinách populácií).

Náhodnosť a nezávislosť výberu sa zabezpečuje vhodnou metódou ich získania, zatiaľ čo ostatné podmienky vyplývajú z povahy zistených údajov a ich splnenie môže byť posúdené podľa výsledkov príslušných testov. Overovanie dvoch posledných podmienok však býva často považované za súčasť analýzy kovariancie.

Ako ďalšie podmienky sa niekedy uvádzajú *nenáhodný charakter sprievodnej premennej X*, poprípade sprievodných veličín $X_1, X_2, ..., X_q$, a *neprítomnosť interakcie medzi sprievodnou premennou X a faktorom A*, poprípade medzi q sprievodnými premennými a viacerými faktormi. Tieto požiadavky je možné však ťažko striktne dodržať, a spravidla pre údaje získané (výberovým) zisťovaním musíme počítať s ich porušením a prispôsobiť tomu interpretáciu výsledkov.

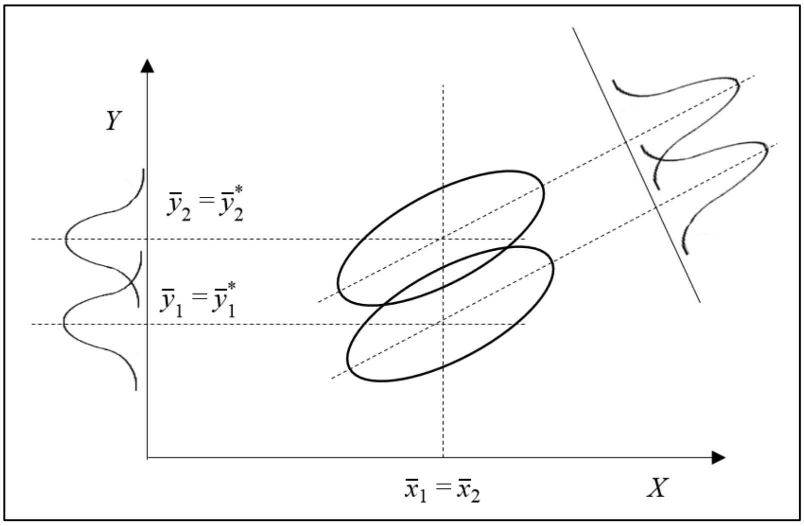
Na obr. 3 sú znázornené možné varianty regresných modelov pre 4 úrovne faktora A. Obrázok a) zobrazuje nezhodné modely (pre každú úroveň faktora A platí iný model, čo je spôsobené interakciou medzi kovariátom a jednotlivými úrovňami faktora A), obrázok b) ukazuje rovnobežné regresné modely, teda prípad, ktorý je vhodný na analyzovanie pomocou analýzy kovariancie (jedná sa o rovnaký model, iba systematicky posunutý). V prípade a) je v každom prípade vzťah medzi Y a X iný, nie je možné preto pomocou jedného modelu na základe znalosti X odvodiť hodnotu Y (existujú aj postupy, ako riešiť takéto situácie – napr. *Wilcoxova modifikácia Johnsonovho-Neymanovho postupu*, ktorá testuje rozsah kovariátu, pre ktorú sú výberové priemery rozdielne, bližšie v Quinn, G. P. - Keough, M. J. 2002).



Zdroj: Sokal, R. R. – Rohlf, F. J. 1995

Obr. 3: Znázornenie rôznobežných a rovnobežných modelov závislosti medzi Y a X pre štyri rôzne úrovne faktora A

Situácia pre H = 2 skupiny, v ktorých sú podmienky ideálne splnené, je znázornená na obr. 4. Normalitu a homoskedasticitu v oboch skupinách na obr. 4 určujeme podľa elíps koncentrácie a tvaru rozdelení Y, oba nenulové jednoduché regresné koeficienty sú zhodné a teda platí $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, čo svedčí o neprítomnosti interakcie medzi A a X. Je taktiež zreteľné, ako úprava o vplyv sprievodnej premennej X zlepšuje možnosti na preukázanie závislosti premennej Y od faktoru A.



Zdroj: Hebák, P. – Hustopecký, J. – Malá, I. 2005, s. 181

Obr. 4: Ideálne splnené podmienky analýzy kovariancie pre H = 2

Vzhľadom ku zhode úrovne X v oboch skupinách platí $\bar{y}_1 = \bar{y}_1^*$, $\bar{y}_2 = \bar{y}_2^*$, takže aj rozdiely medzi skupinovými priemermi Y pred očistením od vplyvu X aj po ňom zostávajú rovnaké. Významnosť tohto rozdielu sa však zrejme zvýši pri znížení reziduálnej (vnútroskupinovej) variability, dosiahnutej prechodom zo zvislej osi na novú os, kolmú na regresné priamky.

Zdokonalenie metódy posudzovania rozdielu v úrovni premennej Y v jednotlivých skupinách je často samo o sebe dôvodom ku použitiu analýzy kovariancie. Dosahujeme tak zjemnenie analýzy kovariancie. Údaje s ktorými pracujeme, majú byť heterogénne z hľadiska premenných, o ktoré sa zaujímame, ale súčasne čo najhomogénnejšie zo všetkých ostatných hľadísk.

5. Záver

V príspevku sme priblížili princípy analýzy kovariancie ANCOVA, ktorá patrí do pomerne veľkej množiny, tzv. všeobecných lineárnych modelov. Tieto modely umožňujú analyzovať vzťahy medzi jednou alebo viacerými vysvetľovanými premennými, ktoré stoja na jednej strane modelu a vysvetľujúcimi a sprievodnými premennými, ktoré stoja na druhej strane všeobecného lineárneho modelu. Navyše tieto modely umožňujú analyzovať rôzne typy premenných (kvantitatívne spojité, kategoriálne množné alebo alternatívne).

Cieľom ďalšieho skúmania bude skombinovať uvedené metódy tak, aby sme z množiny ukazovateľov sledovaných v rámci zisťovania EU SILC identifikovali relevantné faktory, teda faktory, ktoré významne ovplyvňujú agregovaný indikátor chudoby alebo sociálneho vylúčenia, resp. jeho čiastkové miery. Hlavným cieľom je kvantifikovať ako tieto ukazovatele determinujú riziko ohrozenia chudobou a sociálnym vylúčením.

Literatúra

DRÁPELA, K. 2015. *Analýza kovariance (ANCOVA) – její předpoklady a využití.* [online] Mendelova zemědělská a lesnická univerzita, fakulta lesnická a dřevařská, ústav hospodářské úpravylesů. Dostupné na internete: [https://www.google.sk/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjdvM7lp7jJAhUCDiwKHTvLCQIQFggeMAA&url=http%3A%2F%2Fuser.mendelu.cz%2Fdrapela%2FStatisticke_metody%2FTutorialy%2FAnalyza_kovariance.doc&usg=AFQjCNHQKjt47M-HHZu_FCOfPZioGwCHNw&sig2=j7wl0rPKXVN5R64-p_duYw&bvm=bv.108194040,d.bGg]

HEBÁK, P. - HUSTOPECKÝ, J. - MALÁ, I. 2005. *Vícerozměrné statistické metody* (2). Informatorium, Praha. 240 s., ISBN 80-7333-036-9

QUINN, G. P. - KEOUGH, M. J. 2002. *Experimental Design and Data Analysis for Biologist*. University Press,Cambridge. 537 s.,ISBN 0-521-00976-6

SAS Support, 2015. *The GLM Procedure. Example 42.4 Analysis of Covariance*. [online]. Copyright © 2015 SAS Institute Inc. Dostupné na internete: [http://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/66103/HTML/default/viewer.htm#statug_glm_examples04.htm]

SOKAL, R. R. - ROHLF, F. J. 1995. *Biometry*. 3th ed. Freeman Co., New York, 850 s., ISBN 0-7167-2411-1

Kontakt autora:

Ondrej Dúžik, Ing. (2. ročník, 3. stupeň)
Katedra štatistiky, FHI, EU BA
duzik.euba@gmail.com

Sekuritizácia a zaistenie – komplementy či substitúty?
Securitization and Reinsurance – Complements or Substitutes?

Daniel KOMADEL

Abstract: This paper examines securitization and reinsurance as the insurer`s options to transfer part of its risk to another subject. Two convex optimization models are employed to determine the function of ceded insurer`s risk such that the total risk of insurer is minimized. While optimal reinsurance model cedes the risk from insurer to reinsurer, the optimal securitization model cedes the insurer`s risk to the capital market by means of a catastrophe bond.

Abstrakt: Príspevok sa zameriava na zaistenie a sekuritizáciu ako možnosti prenosu časti poisťovateľovho rizika na ďalší subjekt. Pracuje s dvoma modelmi konvexnej optimalizácie, ktoré stanovujú funkciu prenosu časti poisťovateľovho rizika tak, aby minimalizovali celkovú stratu poisťovateľa. Model optimálneho zaistenia prenáša riziko z poisťovateľa na zaisťovateľa, zatiaľ čo model optimálnej sekuritizácie prenáša riziko z poisťovateľa na kapitálový trh prostredníctvom katastrofického dlhopisu.

Key words: Securitization, Reinsurance, Risk, Catastrophe bond.

Kľúčové slová: sekuritizácia, zaistenie, riziko, katastrofický dlhopis.

JEL classification: G22

1. Úvod

Poisťovateľ čelí riziku, že bude musieť v priebehu krátkeho časového intervalu vyplatiť veľké škodové plnenie. Toto riziko pramení z vzájomnej korelácie rizika prameniaceho z jednotlivých poistných zmlúv. V ideálnom prípade je strata poistenca nezávislá na stratách ostatných poistencov. Straty poistencov pritom pochádzajú z rovnakého pravdepodobnostného rozdelenia. V praxi tieto predpoklady nie sú splnené. Zatiaľ čo rozdelenia straty jednotlivých poistencov sú často dostatočne podobné na to, aby sa táto premisa dala považovať za splnenú, nezávislosť jednotlivých strát sa dosahuje oveľa zložitejšie. Dôvodom je predovšetkým ich priestorová previazanosť. Straty jednotlivých poistencov sú závislé na udalostiach odohrávajúcich sa v okolí objektov ich poistných zmlúv. Subjekty poistných zmlúv jedného poisťovateľa sú štandardne od seba nedostatočne vzdialené, čím vzniká prienik medzi udalosťami, ktoré na nich vplývajú a teda aj vzájomná korelácia strát.

Riziko spojené s pravdepodobnostným rozdelením straty poisťovateľa je v tomto prípade nediverzifikovateľné. Pri zhode okolností sa môže stať insolventným. V záujme zníženia rizika nastania tohto scenáru má poisťovateľ záujem o prenesenie časti svojho rizika na ďalší subjekt. Tradičným produktom tohto konceptu je zaistenie, t. j. sekundárne poistenie. Zaisťovateľ, ktorý preberá časť rizika od poisťovateľa, zvyčajne pôsobí na väčšom území než poisťovateľ. Preto je schopný diverzifikovať aj riziko, ktoré je pre poisťovateľa nediverzifikovateľné. Kompenzuje ho totiž rizikom, ktoré na neho preniesli iní poisťovatelia, pričom straty v ideálnom prípade nie sú korelované. Prax ani v tomto prípade nenapĺňa teoretický predpoklad, čo má v niektorých prípadoch za následok nezaistiteľnosť rizika. Aby poisťovateľ udržal riziko insolventnosti v prijateľnej medzi, môže časť rizika prebraného od poistencov sekuritizovať, čiže ho preniesť na kapitálový trh prostredníctvom cenných papierov, ktorých výplata je korelovaná so stratou poisťovateľa.

Tento príspevok je zameraný na porovnanie potenciálu zaistenia a sekuritizácie prenášať časť poisťovateľovho rizika na ďalší subjekt. Riešením problému konvexnej optimalizácie je stanovená časť poisťovateľovho rizika určená na prenos na ďalší subjekt tak, aby bola strata poisťovateľa minimálna. V modeloch je využitá miera rizika vo forme CVaR. Použitie modelu je ukázané na prípade katastrofického dlhopisu.

2. Formulácia problému

Nech celková strata poisťovateľa za príslušné obdobie je definovaná náhodnou premennou X. Poisťovateľ časť rizika vyplývajúceho z pravdepodobnostného rozdelenia straty prenáša na ďalší subjekt. Funkcie určujúce podiel nositeľov rizika na celkovej strate označíme $r(X)$ a $c(X)$, pričom prvá funkcia definuje podiel poisťovateľa na krytí vlastnej straty a druhá funkcia definuje podiel stratu subjektu, ktorý prevzal časť poisťovateľovho rizika. Pre tieto funkcie platia ohraničenia

$$\begin{aligned} 0 \leq r(X) \leq X, \\ 0 \leq c(X) \leq X, \end{aligned} \tag{1}$$

pričom pre ich súčet platí

$$X = r(X) + c(X). \tag{2}$$

Subjekt preberajúci riziko od poisťovateľa požaduje za túto službu poplatok vo výške $\Pi[c(X)] \geq 0$. Stratu poisťovateľa po prenesení $c(X)$ na iný subjekt popisuje funkcia $T_c(X)$, ktorá je definovaná ako

$$T_c(X) = r(X) + \Pi[c(X)]. \tag{3}$$

Strata poisťovateľa teda pozostáva z ponechaného podielu na vlastnej strate a poplatku za pozbavenie sa zvyšku vlastnej straty. Poisťovateľ má záujem definovať $c(X)$ tak, aby bola jeho strata $T_c(X)$ minimálna. Zároveň má obmedzený rozpočet na poplatok za prenos rizika. Nech je veľkosť straty určená metrikou $\rho[T_c(X)]$ a poplatok za prenos rizika je ohraničený hodnotou π. Vychádzajúc zo vzťahov (1) až (3), môžeme záujem poisťovateľa definovať minimalizačnou úlohou

$$\begin{cases} \min\limits_{c(X)} & \rho\{X - c(X) + \Pi[c(X)]\} \\ & 0 \leq c(X) \leq X \\ & 0 \leq \Pi[c(X)] \leq \pi \end{cases} \tag{4}$$

Value-at-Risk (VaR) je všeobecne používanou mierou rizika. Horáková a Poljovka (2010) ju popisujú ako maximálnu možnú škodu pri konkrétnej pravdepodobnosti. Pre funkciu $T_c(X)$ pravdepodobnosť $\alpha \in \langle 0\,;\, 1\rangle$ je VaR definovaná predpisom

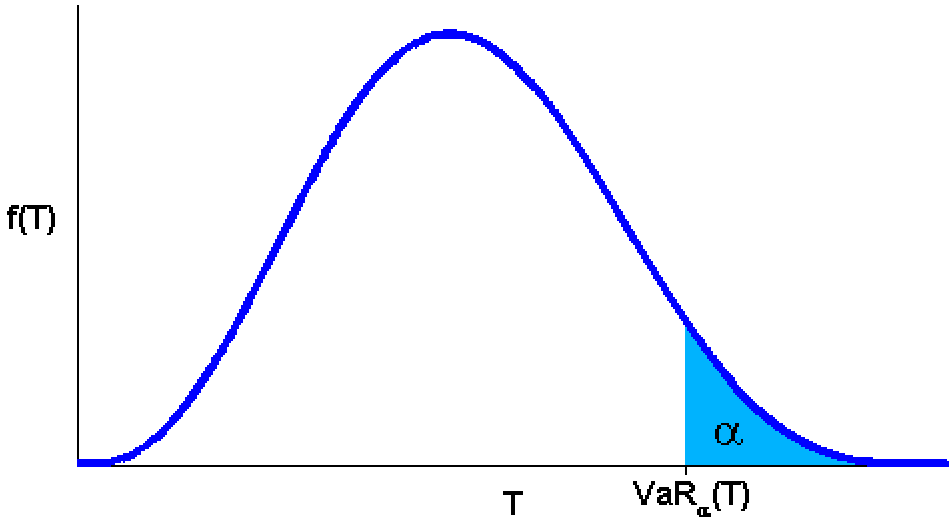
$$VaR_\alpha[T_c(X)] = inf\{z\epsilon\mathbb{R}: P[T_c(X) > z] \leq \alpha\}. \tag{5}$$

Conditional Value-at-Risk ($CVaR$) je strednou hodnotou škôd, ktoré presiahnu VaR pri konkrétnej pravdepodobnosti. Pre funkciu $T_c(X)$ a pravdepodobnosť $\alpha \in \langle 0\,;\, 1\rangle$ je VaR definovaná predpisom

$$CVaR_\alpha[T_c(X)] = E\{T_c(X) \mid T_c(X) \geq VaR_\alpha[T_c(X)]\}. \tag{6}$$

Obrázok 1 znázorňuje geometrickú interpretáciu VaR pomocou funkcie hustoty všeobecnej náhodnej premennej T. Krivka je grafom funkcie hustoty náhodnej premennej T, pričom

$VaR_\alpha(T)$ je dolné ohraničenie hodnoty T, pri ktorom $P[T > VaR_\alpha(T)]$ nie je väčšia od α. Modrá plocha má veľkosť α, zatiaľ čo plocha pod krivkou má z definície hustoty rozdelenia náhodnej premennej veľkosť 1.



Obr. 2: Geometrická interpretácia VaR pomocou funkcie hustoty

V príspevku je použitá miera $CVaR$, ktorú Tan, Wheng a Zhang (2009) považujú v porovnaní s VaR za výhodnejšiu, lebo je subaditívna.

3. Zaistenie

Uvažujme situáciu, že poisťovateľ rozdeľuje svoju budúcu stratu medzi seba a zaisťovateľa, čiže subjekt poistného trhu preberajúci časť poisťovateľovho rizika. Extrémnym prípadom takéhoto zdieľania straty je absolútny podiel poisťovateľa, resp. absolútny podiel zaisťovateľa. Prostredníctvom vzťahu (1) sú tieto extrémy vyjadrené ako

$$\begin{aligned} r(X) &= X, \\ c(X) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

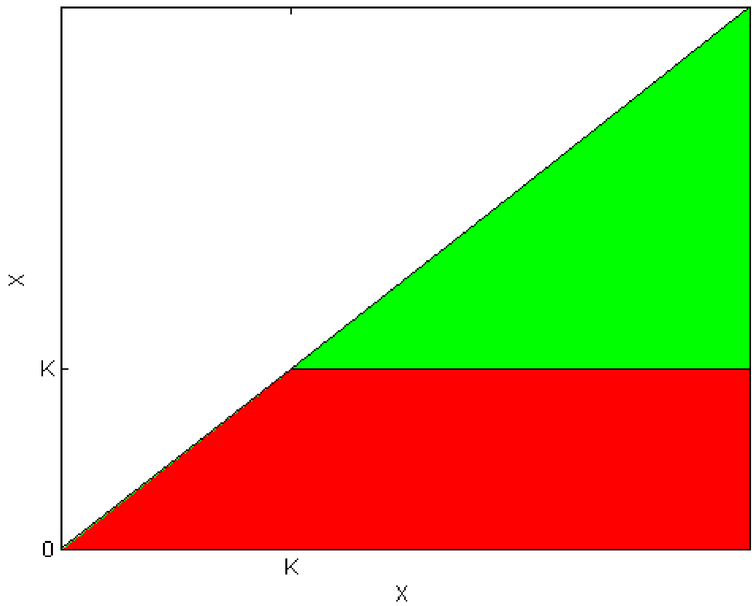
resp.

$$\begin{aligned} r(X) &= 0, \\ c(X) &= X. \end{aligned} \tag{8}$$

Všeobecnejším prípadom je delenie straty po vrstvách. Kde stratu do výšky $K \in \langle 0\,;\, X\rangle$ kryje poisťovateľ a strata prevyšujúca hodnotu K je prenesená na zaisťovateľa. Vzťah (1) je v tomto prípade modifikovaný na

$$\begin{aligned} r(X) &= \begin{cases} X & pre\ \ X \le K \\ K & pre\ \ X > K \end{cases}, \\ c(X) &= \begin{cases} 0 & pre\ \ X \le K \\ X - K & pre\ \ X > K \end{cases}. \end{aligned} \tag{9}$$

Vzťahy (9) spĺňajú rovnicu (2). Vzťah (7) je špecifickým prípadom vzťahu (9) pre $K = X$, zatiaľ čo vzťah (8) je špecifickým prípadom vzťahu (9) pre $K = 0$. Obrázok 2 ilustruje rozdelenie straty podľa vzťahu (9). Horizontálna os zobrazuje celkovú stratu poisťovateľa. Vertikálna os zobrazuje rozdelenie celkovej straty poisťovateľa na $r(X)$ a $c(X)$. Strata do veľkosti K je plne krytá poisťovateľom (červená farba). V prípade straty väčšej než K poisťovateľ kryje výšku K, zatiaľ čo zvyšok je krytú zaisťovateľom (zelená farba).



Obr. 2: Strata poisťovateľa rozvrstvená medzi dva subjekty

Poisťovateľ sa v rámci riešenia úlohy (4) rozhoduje o veľkosti parametra K, čiže o maximálnej výške škody, ktorú bude kryť. Pri známej hustote rozdelenia svojej straty a pri pevnom ohraničení poistného hľadá takú hodnotu K, aby $CVaR$ jeho straty po prenose časti rizika na zaisťovateľa bola minimálna.

4. Sekuritizácia

V tejto časti uvažujeme situáciu, že poisťovateľ prenáša časť svojho rizika na subjekt kapitálového trhu, teda na investora kupujúceho jeho cenné papiere. Poisťovateľ pri predaji cenných papierov dostane od investora vyplatenú nákupnú cenu cenného papiera, čím sa zaviaže k jeho výplate hodnoty na konci poistného obdobia. Aby táto operácia napĺňala účel kompenzácie straty poisťovateľa, musí byť výplata cenného papiera korelovaná so stratou poisťovateľa: vysokú stratu vyváži nízka výplata a naopak.

Nech nominálna hodnota cenného papiera je F a jeho výplata závislá od straty poisťovateľa je $V(X)$. Riziko prenesené z poisťovateľa na investora je

$$c(X) = F - V(X). \tag{10}$$

Nech r je bezriziková úroková sadzba a $E[V(X)]$ je stredná hodnota výplaty. Analógiou k zaistnému, ktoré platí poisťovateľ ako poplatok za prenos rizika, je vzťah

$$\Pi[c(X)] = F - \frac{E[V(X)]}{1+r} \tag{11}$$

a celková strata poisťovateľa po prenesení $c(X)$ na investora je podľa vzťahu (3) definovaná ako

$$T_c(X) = X + V(X) - \frac{E[V(X)]}{1+r}\,. \tag{12}$$

Tento príspevok uvažuje cenný papier vo forme ročného bezkupónového katastrofického dlhopisu. Jeho výplatná funkcia je závislá na strate poisťovateľa nasledovným spôsobom

$$\mathrm{V(X)}\begin{cases} F & pre\ X \leq K \\ A(X)\cdot F & pre\ X > K \end{cases}, \tag{13}$$

kde $A(X)$ je klesajúca funkcia.

5. Riešená úloha

Pre ilustráciu uvedenej problematiky uvádzam numerické riešenie minimalizačnej zaisťovacej úlohy. Uvažujme škodovú náhodnú premennú $X\epsilon\langle 0\,;1\rangle$, z ktorej $r(X)$ je kryté poisťovateľom a $c(X)$ je kryté zaisťovateľom prostredníctvom zaistnej zmluvy, pričom platí vzťah (2). Nemáme k dispozícii hustotu rozdelenia straty X, no poznáme historické stratové údaje za predchádzajúcich n poistných období. Poistné je dané predpisom

$$\Pi[c(X)] = 1{,}18 \cdot E[c(X)]\,, \tag{14}$$

je teda lineárnou funkciou strednej hodnoty prenesenej straty. Úloha bude riešená pre tri rozpočtové ohraničenia: $\pi_1 = 0{,}05, \pi_2 = 0{,}10$ a $\pi_3 = 0{,}15$. Pri hladine významnosti $\alpha = 0{,}05$ má minimalizačná úloha (4) tvar

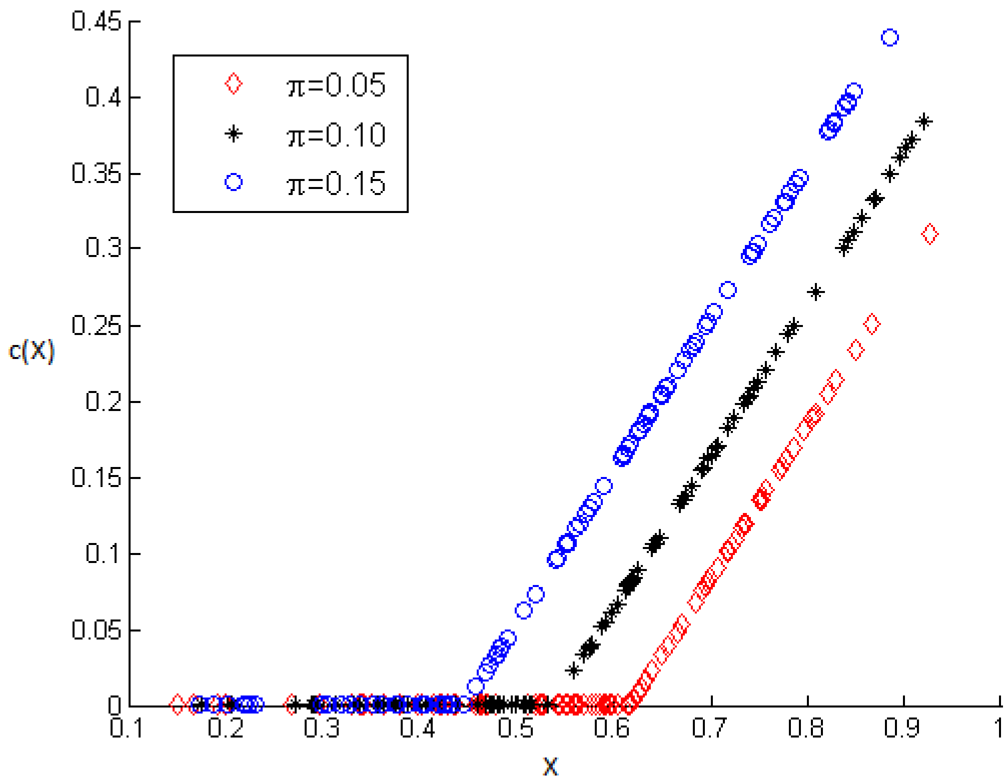
$$\begin{cases} \min\limits_{c(X)} & \widehat{CVaR}_{0,05}\{X - c(X) + 1{,}18 \cdot E[c(X)]\} \\ & 0 \leq \widehat{c(X)} \leq X \\ & 0 \leq 1{,}18 \cdot E\left[\widehat{c(X)}\right] \leq \pi_i\,,\ i \in \{1;2;3\} \end{cases}, \tag{15}$$

kde $\widehat{c(X)}$ je odhad hustoty funkcie $c(X)$ a $\widehat{CVaR}_{0,05}\{X - c(X) + 1{,}18 \cdot E[c(X)]\}$ je odhad metriky $CVaR$ pre príslušnú funkciu a hladinu významnosti. V prípade konečného časového radu historických údajov je to úloha lineárneho programovania s kužeľovitým ohraničením druhého rádu (Weng, 2009), ktorú som riešil prostredníctvom programu CVX od Granta a Boyda (2015).

Obrázok 3 zobrazuje na grafe riešenie minimalizačnej úlohy (15). Jednotlivé body reprezentujú odhady funkcie $c(X)$. Pre ohraničenie π_1 je celková strata poisťovateľa minimalizovaná pre $K = 0{,}62$. Pre ohraničenie π_2 je ideálna voľba $K = 0{,}53$. Pre ohraničenie π_3 je ideálna voľba $K = 0{,}46$.

6. Záver

Tradičné zaistenie neuspokojuje požiadavky poisťovateľa na prenos katastrofického rizika. Dopyt po takomto produkte je pohonom hľadania alternatívnych foriem prenosu rizika. Popri otázke, či je v tom-ktorom prípade výhodnejšie zaistenie alebo sekuritizácia, sa vynára otázka ako tieto dva nástroje manipulácie s rizikom vhodne skombinovať pre naplnenie požiadaviek poisťovateľa.



Obr. 3: Grafické znázornenie riešenia minimalizačnej úlohy (15)

Literatúra

GRANT, M. C. – BOYD, S. P. 2015. The CVX Users` Guide. Release 2.1. CVX Research, Inc.

HORÁKOVÁ, G. – POLJOVKA, J. 2010. Optimálne zaistenie stanovené hodnotou VaR resp. CVaR. In: *Řízení a modelování finančních rizik. Sborník příspěvků z 5. mezinárodní vědecké konference*, 8.-9. septembra 2010, Ostrava. Ostrava: Vysoká škola báňská, Technická univerzita.

TAN, K. – WENG, C. – ZHANG, Y. 2009. VaR and CTE criteria for optimal quota-share and stop-loss reinsurance. In: *North American Actuarial Journal*, Volume 13, Number 4

WENG, C. 2009. Optimal reinsurance designs: from an insurer's perspective. Ph.D. Thesis. University of Waterloo.

Kontakt autora:

Daniel Komadel, Mgr. (2. ročník, 3. stupeň)
Katedra matematiky a aktuárstva, FHI, EU BA
dkomadel@gmail.com

Bonus – malus systém
Bonus – malus system

Martin PINDA

Abstract: Motor insurance is one of the most important areas of the insurance market. It is important for insurers to set conditions so that they can compete in the insurance market, and to maintain the solvency of insurance companies. Bonus means a contract offered a discount for the basic premium and favorable claims record malus is the exact opposite of a bonus that means a premium on the basic premium if they do not meet the conditions of insurance. Together they form a bonus - malus system and is used mainly in motor insurance. This type of insurance has an important position among other types of insurance and because records high loss ratio and high frequency of claims and also a number of vehicles is rapidly increasing. This type of insurance in all insurance forms a very large portfolio, which on one hand is a high premium income but also on the other hand, high levels of payment of insurance claims. We will focus on the analysis of specific bonus - malus system and sets the average premium which the insurance company receives from its clients.

Abstrakt: Poistenie motorových vozidiel je jednou z najdôležitejších oblastí na poistnom trhu. Pre poisťovňu je dôležité nastaviť podmienky tak, aby mohli konkurovať na poistnom trhu, a aby zachovali solventnosť poisťovne. Bonus znamená zmluvne poskytnutá zľava základného poistného za priaznivý škodový priebeh a malus znamená presný opak ako bonus, teda znamená prirážku k základnému poistnému, ak sa nesplnia určené podmienky poistenia. Spolu tvoria bonus – malus systém a prevažne sa využíva v poistení motorových vozidiel. Poistenie tohto druhu ma významné postavenie medzi ostatnými druhmi poistenia a to preto, lebo zaznamenáva vysokú škodovosť a vysokú frekvenciu škôd a tiež množstvo motorových vozidiel sa rapídne zvyšuje. Tento typ poistenia tvorí u všetkých poisťovní veľmi veľký poistný kmeň, čo na jednej strane znamená vysoký príjem poistného, ale aj na druhej strane vysoké množstvo vyplácania poistných plnení. Zameriame sa na analýzu konkrétneho bonus – malus systému a stanovíme priemerné poistné, ktoré poisťovňa získa od svojich poistencov.

Key words: bonus, malus, insurance, the qualifying period, class room, stationary insurance, transition matrix, matrix transfer

Kľúčové slová: bonus, malus, poistenie, rozhodná doba, poistná trieda, stacionárne poistné, matica prechodu, matica prestupu

JEL classification: C02

1. Úvod

Bonus - malus systém sa väčšinou využíva v poistení motorových vozidiel. Poistenie tohto druhu ma významné postavenie medzi inými druhmi poistenia a to preto, lebo zaznamenáva vysokú škodovosť a vysokú frekvenciu škôd. Poistenie motorových vozidiel tvorí na rozdiel od iných poistných produktov u všetkých poisťovní veľký poistný kmeň, čo na jednej strane znamená vysoký príjem poisťovne vo forme poistného, ale aj na druhej strane vysoké množstvo vyplácania poistných plnení. Najdôležitejším poistením motorových vozidiel je povinné zmluvne poistenie, ktoré je zákonom dané vo väčšine krajín na svete t. j. zo zákona vyplýva, že každý majiteľ motorového vozidla musí mať uzatvorené povinné zmluvné poistenie. Tento systém odmeňuje vodiča motorového vozidla, ktorý nespôsobuje škodové udalosti, resp. ich spôsobuje v menšej miere, vo forme výhodnejšieho poistného (bonus). Na druhej strane postihuje vodiča, ktorý spôsobuje viac nehôd a to vo forme prirážky (malus) k základnému poistnému. Tieto systémy vedú vodičov viesť motorové vozidlo opatrnejšie, zodpovednejšie a tiež umožňujú lepšie oceniť individuálne riziko jednotlivých poistencov. Takto ohodnotenému riziku poisťovňa stanoví spravodlivé poistné a poisťovňa si zachová finančnú solventnosť a nestane sa, že poisťovňa vyplatí viac poistných plnení, ako prijme vo forme poistného.

2. Bonus – malus systém

Pri realizácií systému bonus – malus je potrebné definovať triedy tohto systému, pravidlá zaradenia nového rizika do triedy, pravidlá prechodu z jednej triedy do druhej podľa minulého škodového priebehu a pravidlá, podľa ktorých sú určené zrážky a prirážky rizika k danej triede systému bonus – malus.

Označme M systém bonus – malus. Tak definícia tohto systému M je popísaná nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Každé poisťované riziko na začiatku obdobia poistenia sa zaradí do určitej bonus – malus triedy, podľa pravidiel zaradenia rizika do systému.
2. $H, H = 1,2,3, \dots$ je počet tried systému bonus – malus.
3. Poistné π na poistné obdobie je funkciou triedy systému bonus – malus: $\pi = \pi(j), j = 1,2, \dots, H$, pričom $\pi(j) \leq \pi(j+1), j = 1,2, \dots, H-1$.
4. Pri uzatvorení poistnej zmluvy budú všetky riziká zaradené do triedy a, pričom platí $a \epsilon \{1,2, \dots, H\}$.
5. Priradenie rizík k jednotlivým triedam systému bonus – malus závisí od presne stanovených pravidiel prestupu R.

Na začiatku každého nového poistného obdobia sa zaradí poistenec do určitej bonus – malus triedy, ktorá sa stanoví v závislosti od počtu nahlásených poistných udalostí z predchádzajúceho obdobia a od príslušnosti k triede v predchádzajúcom období.

Pravidlá, podľa ktorých poistenec môže prejsť z triedy i do triedy j sú opísané v matici prestupu $R = (N_{ij})$ typu $H \times H$. Tieto pravidlá nazveme pravidlá prestupu. Prvky N_{ij} matice prestupu sú množiny s týmito vlastnosťami:

- $N_{ij} \subset \{0,1,2,3, \dots\}, i, j = 1,2,3, \dots, H$,
- $\bigcup_{j=1}^{H} N_{ij} = \{0,1,2,3, \dots\},\ i, j = 1,2,3, \dots, H$,
- $N_{ij} \cap N_{ik} = \emptyset$, a platí pre každé $j \neq k, i, j, k = 1,2,3, \dots, H$,

kde N_{ij} je množina, ktorej každý prvok určuje počet poistných udalostí v priebehu predchádzajúceho poistného obdobia. Poistenec, ktorý sa nachádza v triede i prejde do triedy j práve vtedy, ak v predchádzajúcom období je počet nahlásených škodových udalostí rovný niektorému prvku množiny N_{ij}. Ak $N_{ij} = \emptyset$, tak prechod poistenca z triedy i do triedy j je nemožný. Takýto prípad označíme v matici prestupu bodkou.

Pre i-tu triedu systému bonus – malus, kde $i = 1,2,3, \dots, H$, výška poistného $P(i)$ je daná v percentách zo základného poistného a platí $P(i) \leq P_j$ pre $i < j$ a z toho vyplýva, že trieda i je vyššie ako trieda j, čiže trieda i je pre poistenca výhodnejšia. Pravidlá prestupu z jednej triedy do druhej sú vyjadrené rôzne. Napr. ak poistenec v priebehu roka nenahlásil žiadnu poistnú udalosť, tak postúpi o jednu bonus – malus triedu vyššie, t. j. zvýhodní sa mu poistné. Ak sa poistenec nachádza v najvyššej triede (s najvyšším bonusom), tak v tejto triede aj zostane. Poistenec za každú nahlásenú škodovú udalosť, poklesne o tri bonus – malus triedy.

Každá poisťovňa má všetky bonus - malus triedy, výšky poistného pre každú triedu, pravidlá prechodu medzi jednotlivými triedami a ostatné informácie vo svojich všeobecných zmluvných podmienkach.

Teraz uplatníme poznatky na konkrétnom bonus – malus systéme poisťovne AXA, a.s. Vo všeobecných podmienkach tejto poisťovne možno nájsť všetky základné informácie na formuláciu tohto systému a tiež na jeho následnú analýzu. Rozhodná doba vo všeobecnosti vyjadruje dobu nepretržitého trvania poistenia, ktorá sa počíta v celých ukončených mesiacoch, pričom je znížená za každú poistnú udalosť. Vstupná trieda je trieda 9 (B0) so základným poistným 100 %. Bonusových tried v tomto systéme je 8 a malusové triedy sú 3. Po každom bezškodovom roku poistenec postúpi o jednu triedu vyššie maximálne však do najvyššej bonusovej triedy, t. j. triedy 1. Každá nahlásená škodová udalosť má za následok pokles poistenca o 2 triedy, t. j. rozhodná doba (doba škodového priebehu) sa zníži o 24 mesiacov. Poistenec maximálne môže klesnúť až do 12. triedy (M3) s poistným 250 %, čiže s malusom 150 %. Výška poistného v jednotlivých bonus – malus triedach v tejto poisťovni je zobrazená v ***Tab. 1.***

Tab. 2: Výška poistného v jednotlivých bonus – malus triedach v poisťovni AXA, a.s.

Číslo bonus – malus triedy	Stupeň bonusov a malusov	Výška poistného v % zo základného poistenia
1	B8	50 %
2	B7	55 %
3	B6	60 %
4	B5	65 %
5	B4	70 %
6	B3	75 %
7	B2	80 %
8	B1	90 %
9	B0	100 %
10	M1	130 %
11	M2	190 %
12	M3	250 %

Zodpovedajúca matica prestupu k systému bonus – malus poisťovni AXA, a.s. je znázornená v ***Tab. 2***.

Tab. 2: Matica prestupu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	{0}	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5}	{6, 7, ...}
2	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5, 6, ...}
3	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	{5, 6, ...}
4	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4, 5, ...}
5	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	{4, 5, ...}
6	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3, 4, ...}
7	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	{3, 4, ...}
8	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2, 3, ...}
9	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	{2, 3, ...}
10	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1, 2, ...}
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	{1, 2, ...}
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	{1, 2, ...}

Predpokladajme, že sa poistenec nachádza napr. v 7. bonus – malus triede. V prípade, že nenahlási v priebehu roku žiadnu poistnú udalosť, tak v nasledujúcom roku postúpi o jednu triedu vyššie, t.j. do 6. triedy. V prípade nahlásenia 1 poistnej udalosti, poistenec postúpi o 2 triedy nižšie a to do 9. triedy. Ak poistenec nahlási 2 poistné udalosti, poistenec klesne o 4 triedy t. j. do 11. triedy. V prípade nahlásenia viac ako dvoch poistných udalostí, poistenec prejde do poslednej 12. triedy, kde by platil najvyššie poistné.

Prvky matice prechodu definujeme ako pravdepodobnosť

$$p_{ij}^{\vartheta} = P^{\vartheta}(Z_t = j / Z_{t-1} = i), \tag{1}$$

kde ϑ predstavuje škodovosť, alebo škodovú frekvenciu daného rizika. Z_t a Z_{t-1} sú náhodné premenné, ktoré vyjadrujú príslušnosť rizika k bonus – malus triede v časovom období t a $t-1$.

Predpokladáme konštantnú dĺžku časového intervalu, t. j. 1 rok a tiež predpokladáme, že pravdepodobnosti $p_{ij}^{\vartheta}(t)$ nezávisia od časového obdobia t. Potom platí rovnosť

$$p_{ij}^{\vartheta}(t) = p_{ij}^{\vartheta}.$$

Matica prechodu pre riziká so škodovosťou ϑ je

$$\boldsymbol{P}^{\vartheta} = \left(\boldsymbol{p}_{ij}^{\vartheta}\right)_{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{H}}, \tag{2}$$

kde prvok p_{ij}^{ϑ} vyjadruje pravdepodobnosť, že poistenec so škodovosťou ϑ, ktorý sa nachádza v i-tej bonus – malus triede v nasledujúcom roku prestúpi do j-tej bonus – malus triedy. Keďže poistenec vždy prejde práve do jednej triedy, tak sa musí súčet každého riadku matice $\boldsymbol{P}^{\vartheta} = \left(p_{ij}^{\vartheta}\right)_H^H$ rovnať práve 1.

Pre poistencov so škodovosťou ϑ v jednotlivých rokoch platí pre relatívnu početnosť ich očakávaného rozloženia rekurentný vzťah

$$X^{\vartheta}(k+1) = X^{\vartheta}(k)\boldsymbol{P}^{\vartheta}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

kde $X^{\vartheta}(0) = (0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ a $(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ je jednotkový vektor. Jednotka je vždy práve na a-tom mieste a to vtedy, ak sú vstupné riziká do systému zaraďované práve do a-tej bonus – malus triedy. Pre všetky zložky vektorov $X^{\vartheta}(k+1)$ platí, že sa ich súčet rovná 1.

Pre všetky systémy bonus – malus, ktoré možno opísať Markovovými reťazcami, existuje vektor stacionárnych pravdepodobností. Tento vektor predstavuje pravdepodobnosť s akou sa bude riziko po neobmedzenej dlhej dobe vyskytovať v určitej bonus – malus triede. Toto tvrdenie vyplýva z nasledujúcich troch vlastností, ktoré systémy bonus – malus spĺňajú:

1. Množina stavov Markovovho reťazca je konečná. Ide o konečný Markovov reťazec t. j. množina $\{1,2,\dots,H\}$ je konečná.
2. Markovov reťazec je ireducibilný. To znamená, že každá možná bonus – malus trieda je dosiahnuteľná z inej ľubovoľnej bonus – malus triedy.
3. Stavy Markovovho reťazca sú aperiodické. V každom systéme bonus – malus existuje najvýhodnejšia trieda, ktorú keď poistenec dosiahne, a naďalej nenahlási škodovú udalosť, tak v tejto triede ostáva.

Vektor stacionárnych pravdepodobností X je určený

$$X^{\vartheta} = \lim_{n\to\infty} X^{\vartheta}(k), \tag{3}$$

alebo z rovnice

$$X^{\vartheta} = X^{\vartheta}\boldsymbol{P}^{\vartheta} \tag{4}$$

za predpokladu, že platí podmienka

$$x_1^{\vartheta} + x_2^{\vartheta} + \cdots + x_n^{\vartheta} = 1,$$

kde platí

$$X^{\vartheta} = \left(x_1^{\vartheta} + x_2^{\vartheta} + \cdots + x_n^{\vartheta}\right).$$

Základné poistné $\pi = \pi_a$, kde a je vstupná trieda do systému bonus – malus. Poistné π_i je poistné, ktoré prislúcha i-tej bonus – malus triede. Potom priemerné poistné pre poistencov so škodovosťou ϑ je vyjadrené

$$\bar{\pi} = \sum_{i=1}^{H} x_i^{\vartheta}\pi_i = \sum_{i=1}^{H} x_i^{\vartheta}\frac{P(i)}{100}\pi. \tag{5}$$

Budeme predpokladať, že škodová frekvencia ϑ je 0,1, t.j. priemerný slovenský vodič nahlási škodovú udalosť raz za desať rokov. Ďalej predpokladajme, že výskyt poistencov v jednotlivých bonus – malus triedach sa riadi Poissonovým rozdelením a parameter tohto rozdelenia bude $\vartheta = 0{,}1$. Toto rozdelenie použijeme pri vytvorení matice prechodu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s. a to s použitím vzťahu pre pravdepodobnostnú funkciu Poissonovho rozdelenia

$$P(N=k) = \frac{\vartheta^n}{k!}e^{-\vartheta}, \quad k = 0,1,2,\dots;\vartheta > 0. \tag{6}$$

Pre pravdepodobnosť, že poistenec nenahlási žiadnu poistnú udalosť platí

$$P(N=0) = \frac{e^{-\vartheta}\vartheta^0}{0!} = \frac{e^{-0,1}0{,}1^0}{1} \doteq 0{,}9048,$$

že poistenec nahlási práve jednu poistnú udalosť platí

$$P(N=1) = \frac{e^{-\vartheta}\vartheta^1}{1!} = \frac{e^{-0,1}0{,}1^1}{1} \doteq 0{,}0905,$$

že poistenec nahlási práve dve poistné udalosti platí

$$P(N=2) = \frac{e^{-\vartheta}\vartheta^2}{2!} = \frac{e^{-0,1}0{,}1^2}{2} \doteq 0{,}0045,$$

atď.

Maticu prechodu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s., kde sú zobrazené príslušné pravdepodobnosti prechodu je zobrazená v

Tab. 3: Matica prechodu systému bonus – malus v poisťovni AXA, a.s.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,9048	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06	0	7,5E-08	1,3E-09
2	0,9048	0	0	0,0905	0	0,005	0	0,0002	0	4E-06	0	7,7E-08
3	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,00015	0	3,8E-06	7,7E-08
4	0	0	0,9048	0	0	0,09	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06
5	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,00452	0	0,00015	3,8E-06
6	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,00015
7	0	0	0	0	0	0,905	0	0	0,09048	0	0,00452	0,00015
8	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,00468
9	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,09048	0,00468
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,90484	0	0	0,09516
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0,09516
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,90484	0,09516

Vektor začiatočných pravdepodobnosti $X^{\vartheta}(0)$ v poisťovni AXA, a.s. má tvar

$$X^{\vartheta}(0) = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0).$$

Znamená to, že prví poistenci, ktorí vstúpia do systému budú zaradený do 9. bonus – malus triedy. Podľa vzťahu (3) alebo (4) určíme vektor stacionárnych pravdepodobností X^{ϑ}. Tento vektor v poisťovni AXA, a.s. je určený zložkami:

(0,77899461; 0,08192758; 0,09054398; 0,02216711; 0,01630569; 0,0050712; 0,00297819; 0,00107829; 0,00056009; 0,00022131; 0,00010736; 0,00004459).

Tento vektor predstavuje, v akom pomere sa nachádzajú poistenci v danom systéme, za predpokladu, že systém je ustálený (systém sa nemení v závislosti od počtu rokov). Najviac poistencov by sa v tomto prípade nachádzalo v prvej bonus – malus triede s najvyšším bonusom a to 50 % zo základného poistného.

Podľa vzťahu (5) vypočítame priemerné stacionárne poistné $\bar{\pi}$.

$$\bar{\pi} = 0{,}77899461 \cdot 50 + 0{,}08192758 \cdot 55 + 0{,}09054398 \cdot 60 + 0{,}02216711 \cdot 65 + 0{,}01630569 \cdot 70 + 0{,}0050712 \cdot 75 + 0{,}00297819 \cdot 80 + 0{,}00107829 \cdot 90 + 0{,}00056009 \cdot 100 + 0{,}00022131 \cdot 130 + 0{,}00010736 \cdot 190 + 0{,}00004459 \cdot 250 \doteq 52{,}30261$$

Za predpokladu, že systém poisťovne AXA, a.s. je v ustálenom stave, tak priemerné poistné od každého poistenca tohto systému by bolo približne 52,30261 % zo základného poistného, t.j. poistného, ktoré poistenec platí v základnej triede (9. trieda).

Pre porovnanie výsledkov podobné úvahy uplatníme na bonus – malus systéme poisťovne Astra, a.s. Vo všeobecných podmienkach tejto poisťovne možno taktiež nájsť všetky základné informácie na formuláciu tohto systému. Vstupná trieda je trieda 8 (Z) so základným poistným 100 %. Bonusových tried v tomto systéme je 7 a malusových tried je 5. Po každom bezškodovom roku poistenec postúpi o jednu triedu vyššie maximálne však do najvyššej bonusovej triedy, t. j. triedy 1. Každá nahlásená škodová udalosť má za následok pokles poistenca o 2 triedy, t.j. rozhodná doba (doba škodového priebehu) sa zníži o 24 mesiacov. Poistenec maximálne môže klesnúť až do 13. triedy (M5) s poistným 300 % t. j. s poistným 3 krát vyšším ako je základné poistné. Výška poistného v jednotlivých bonus – malus triedach v tejto poisťovni je zobrazená v ***Tab. 4.***

Tab. 4: Výška poistného v jednotlivých bonus – malus triedach v poisťovni Astra, a.s.

Číslo bonus – malus triedy	Stupeň bonusov a malusov	Výška poistného v % zo základného poistenia
1	B7	40 %
2	B6	50 %
3	B5	60 %
4	B4	70 %
5	B3	80 %
6	B2	90 %
7	B1	95 %
8	Z	100 %
9	M1	130 %
10	M2	150 %
11	M3	180 %
12	M4	220 %
13	M5	300 %

Zodpovedajúca matica prestupu k systému bonus – malus poisťovni Astra, a.s. je znázornená v ***Tab. 5***.

Tab. 5: Matica prestupu systému bonus – malus v poisťovni Astra, a.s.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	{0}	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5}	.	{6, 7, ...}
2	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5}	{6, 7, ...}
3	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	.	{5, 6, ...}
4	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4}	{5, 6, ...}
5	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	.	{4, 5, ...}
6	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3}	{3, 4, ...}
7	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	.	{3, 4, ...}
8	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2}	{2, 3, ...}
9	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	.	{2, 3, ...}
10	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1}	{2, 3, ...}
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	.	{1, 2, ...}
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	.	{1, 2, ...}
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	{0}	{1, 2, ...}

Analogicky, ako v predchádzajúcej poisťovni podľa vzťahu (6) jednotlivé pravdepodobnosti matice prechodu systému v poistovni Astra, a.s. sú zobrazené v ***Tab. 6***.

Tab. 6: Matica prechodu systému bonus – malus v poisťovni Astra, a.s.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,905	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	4E-06	0	7,5E-08	0	1E-09
2	0,905	0	0	0,0905	0	0,005	0	0,0002	0	4E-06	0	8E-08	1E-09
3	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,0002	0	3,8E-06	0	8E-08
4	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	2E-04	0	4E-06	8E-08
5	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,0045	0	0,00015	0	4E-06
6	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,0905	0	0,005	0	2E-04	4E-06
7	0	0	0	0	0	0,905	0	0	0,0905	0	0,00452	0	0,0002
8	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,09	0	0,005	0,0002
9	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,09048	0	0,0047
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9048	0	0	0,09	0,0047
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,905	0	0	0,0952
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,90484	0	0,0952
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,905	0,0952

Vektor začiatočných pravdepodobnosti $X^{\vartheta}(0)$ v poisťovni Astra, a.s. má tvar

$$X^{\vartheta}(0) = (0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0).$$

Tento vektor predstavuje, že prvý poistenci, ktorí vstúpia do systému budú zaradený do 8. bonus – malus triedy. Podľa vzťahu (3) alebo (4) určíme analogicky ako pri predchádzajúcej poisťovni vektor stacionárnych pravdepodobností X^{ϑ}. Tento vektor je určený zložkami:

(0,7789784; 0,08192587; 0,09054209; 0,02216665; 0,01630535; 0,00507109; 0,00297813; 0,00107829; 0,00056008; 0,0002213 0,00010736; 0,00004459; 0,00002082)

Podľa vzťahu (5) priemerné stacionárne poistné $\bar{\pi}$ je

$$\bar{\pi} = 0{,}7789784 \cdot 40 + 0{,}08192587 \cdot 50 + 0{,}09054209 \cdot 60 + 0{,}02216665 \cdot 70 + 0{,}01630535 \cdot 80 + 0{,}00507109 \cdot 90 + 0{,}00297813 \cdot 95 + 0{,}00107829 \cdot 100 + 0{,}00056008 \cdot 130 + 0{,}0002213 \cdot 150 + 0{,}00010736 \cdot 180 + 0{,}00004459 \cdot 220 + 0{,}00002082 \cdot 300 = 44{,}53258.$$

Za predpokladu, že systém poisťovne Astra, a.s. je v ustálenom stave, tak priemerné poistné od každého poistenca tohto systému by bolo približne 44,53258 % zo základného poistného, t.j. poistného, ktoré poistenec platí v základnej triede (8. trieda).

3. Záver

Povinné zmluvné poistenie predstavuje stále väčší význam na poistnom trhu. Zo zákona vyplýva, že každý majiteľ motorového vozidla musí uzavrieť povinné zmluvné poistenie a to vo väčšine krajinách sveta. Z tohto dôsledku vzniká veľká konkurencia na poistnom trhu a poisťovne sa predbiehajú, aby získali priazeň klienta. Jeden z nástrojov ako zaujať klientov je ponúkať bonusové zľavy za bezškodové vedenie vozidla. Naopak poisťovne postihujú vo forme malusu klientov s vyššou nehodovosťou. Pre poisťovňu je potrebné poznať výšku poistného, ktoré inkasuje od svojich poistencov, aby zachovala do budúcna svoju solventnosť. Ukázali sme možný spôsob stanovenia priemerného poistného v poisťovniach AXA, a.s. a Astra, a.s. Z dosiahnutých výsledkov vyplýva, že pri rovnakom stanovení poistnej sumy v základnej bonus – malus triede, poisťovňa Astra, a.s. inkasuje celkovo menej, ako poisťovňa AXA, a.s.

Literatúra

LEMAIRE, J.1995. *Bonus – malus systems in automobile insurance*. USA: Kluwer Academic Publishers Group

LEMAIRE, J. 1996. *Automobile Insurance Acturial Models.* USA: Kluwer Nijhoff Publisher

BOOS, A. 1991. *Effizienz von Bonus – Malus – Systemen (Eine Vergleich der Tariffe der Kraftfahrzeug – Haftpflichtversicherung einiger europäischer Länder)*. Gabler, Wiesbaden

HOSSACK. I. B. – POLLARD. J. H. – ZEHNWIRTH. B. 1983 *Introductory statistics with applications in general insurance*. Cambridge University Press

FECENKO, J. 2012. *Neživotné poistenie*. Vydavateľstvo EKONÓM, ISBN 978-80-225-3400-0

PACÁKOVÁ, V. 2014 *Aplikovaná poistná štatistika*. IURA EDITION, ISBN 80-8078-004-8

FECENKO. J. 2011 *Hlad po bonuse a jeho počítačová realizácia v open source systéme maxima*. In: *Analýza a modelovanie rizík v zmysle kvantitatívnych štúdií QIS projektu Solvency II.*

Kontakt autora:

Martin Pinda, Ing. (1. ročník, 3. stupeň)
Katedra matematika a aktuárstva, FHI, EU BA
martin.pinda@gmail.com

Modelovanie inkrementálnej odozvy v priamom marketingu
Uplift modeling in direct marketing

Andrej MIŠOVIČ

Abstract: In this paper author discuss reasons why it is not good to rely just on campaign's response figures. He introduces also nowadays still new but well-known incremental responses as other important campaigns KPI. He compares pros and cons of "traditional" propensity to buy modelling approach vs. up-lift modelling. Later he introduces possible models for incremental response. Also he adds real-life applications in direct marketing.

Abstrakt: Autor v článku predstavuje dôvody, prečo je v priamom marketingu dôležité zamýšľať
sa nielen nad samotnou odozvou kampane ale tiež nad inkrementálnou odozvou. Porovnáva výhody a nevýhody tradičného prístupu modelovania pravdepodobnosti, resp. propenzity sledovanej udalosti (napr. nákupu, alebo odchodu zákazníka) a modelovania inkrementálnej odozvy takejto udalosti. V ďalšej časti približuje možné prístupy a postupy pri modelovaní inkrementálnej odozvy a tiež aplikáciu tejto problematiky v praxi pri riešení problémov s odozvou v priamom marketingu.

Key words: up-lift modelling, incremental response, incremental sales, propensity to buy, propensity to churn, direct marketing.

Kľúčové slová: inkrementálna odozva, pravdepodobnosť nákupu, pravdepodobnosť odchodu, uplift modelovanie, priamy marketing.

JEL classification: C31, C38, M31

1. Úvod

V priamom marketingu môžeme použiť niekoľko vhodných kľúčových ukazovateľov na posúdenie úspešnosti konkrétnej kampane. Najčastejšie je to odozva zákazníkov na ponuku, očistená o vplyv prirodzeného záujmu zákazníkov pomocou kontrolnej skupiny.

Z pohľadu cielenia zákazníkov, ktorí by mohli byť vhodní na oslovenie, využívame pravdepodobnostné, resp. propenzitné modely (v skratke PTB modely). V prípade konštrukcie týchto modelov najčastejšie sledujeme nastanie udalosti (resp. určujeme ako cieľovú/závislú premennú), napr. zakúpenie určitého produktu, odchod zákazníka.

V prípade finančného vyhodnotenia kampaní ale môžeme dospieť k výsledku, kedy síce odozva kampane bola pozitívna, no finančne kampaň nenaplnila očakávania, či už z pohľadu investovaných nákladov, alebo samotného predaja, resp. záchrany zákazníkov.

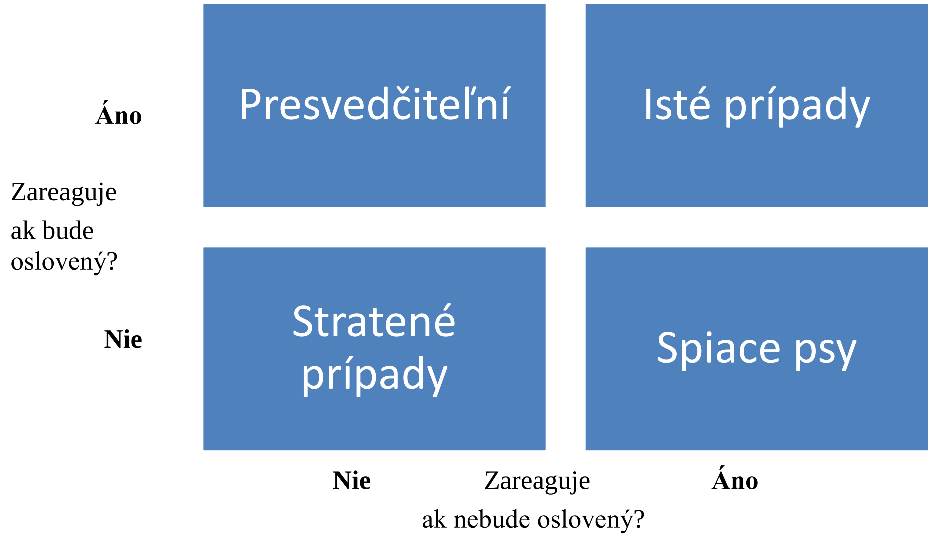
Tu sa dostávame k podstate problému. V takýchto prípadoch sledovanie samotného nastatia určitej udalosti nemusí postačovať. Jedným s riešení takéhoto problému môže byť zameranie sa na odhadovanie inkrementálnej odozvy – tzv. uplift modeling, namiesto odozvy ako takej.

Aby sme vedeli zmerať základnú odozvu kampane, stačí nám rozlíšiť zákazníkov, ktorí reagovali na ponuku v pomere k celkovej oslovenej skupine. V prípade, že chceme odizolovať efekt prirodzeného nákupu/odchodu, je nevyhnutné použiť kontrolnú skupinu, ktorá nebude oslovená a bude vybraná vhodným spôsobom a tiež vo vhodnej veľkosti.

2. Podstata modelovania inkrementálnej odozvy

Zjednodušene, podstatou uplift modelovania, resp. modelovania inkrementálnej odozvy, je hľadanie takých zákazníkov, ktorých po oslovení určitou marketingovou ponukou dokážeme presvedčiť k nákupu (resp. zamedziť ich odchodu), pričom sa snažíme eliminovať tých zákazníkov, ktorí by nakúpili aj bez oslovenia, alebo marketingovej ponuky.

Keďže každý zákazník môže reagovať na ponuku, alebo komunikáciu individuálne, musíme túto vec zobrať na vedomie. Vzhľadom na to, ako zákazník reaguje na určitú marketingovú komunikáciu, alebo benefit (ďalej pre zjednodušenie uvádzame ako „kampaň“) môžeme zákazníkov rozdeliť nasledovne (obr. 1):



Obr. 1: rozdelenie zákazníkov do skupín podľa reakcie na kampaň, zdroj [1]

- **Presvedčiteľní**
  sú takí zákazníci, ktorí by bez kampane (oslovenia/benefitu) nereagovali, resp. nenakúpili, preto sú veľmi vhodní pre oslovenie marketingovou kampaňou,
- **Isté prípady**
  sú zákazníci, ktorí by uskutočnili nákup bez ohľadu na to, či ich oslovíme, alebo nie, preto je vhodné týchto zákazníkov nezaradiť do komunikácie, resp. „neponúknuť im zbytočne benefit“,
- **Stratené prípady**
  sú zákazníci, ktorí by nereagovali bez ohľadu na to, či ich oslovíme kampaňou, alebo nie,
- **Spiace psy**
  sú zákazníci, ktorí by na oslovenie reagovali negatívnym spôsobom (napr. v prípade vyhodnotenia rizika odchodu takéhoto zákazníka a jeho následného oslovenia marketingovou aktivitou sa tento zákazník rozhodne na základe „pripomenutia“ kampaňou odísť), preto ich z komunikácie chceme ideálne vylúčiť.

Cieľom uplift modelovania je zlepšiť odozvu kampane v target skupine cez maximalizáciu rozdielu odozvy medzi r_{target} skupinou a $r_{control}$ skupinou, resp. identifikovať práve tých zákazníkov, ktorí budú vďaka kampani reagovať pozitívne, teda odozvou na danú ponuku.

Inkrementálnu response teda môžeme vyjadriť ako $\boldsymbol{max(r_{target} - r_{control})}$ (1)

Bežný PTB model neodpovedá na to, ktorý ďalší zákazník prispeje k zvýšeniu odozvy, ale len na pravdepodobnosť nastatia nákupu. V prípade uplift modelovania sa snažíme zachytiť práve tých, ktorí po oslovení ponukou zrealizujú nákup a zároveň identifikovať tých zákazníkov, ktorí tento nákup uskutočnia aj bez ponuky.

3. Prístupy a metódy k odhadu inkrementálneho skóre

V prípade konštrukcie pravdepodobnostných modelov zameraných na uplift môžeme použiť obdobné metódy ako pri konštrukcii „klasických" PTB modelov:

- Logistická regresia,
- Rozhodovacie stromy,
- Machine learning algoritmy (KNN,..).

Rozdiel bude v prístupe, ktorý pri identifikácii zákazníkov uplatníme:

- použitie jedného modelu,
- použitie dvoch modelov.

Použitie jedného modelu – logistická regresia

V tomto prípade skonštruujeme jeden model s efektom ponúknutia benefitu, pričom budeme sledovať rozdiel individuálneho skóre, keď zákazníkovi ponúkneme benefit a keď benefit neponúkneme:[1]

$$Logit(P(r|X)) = \alpha + \beta * X + \lambda * treatment + \lambda * treatment * X \qquad (2)$$

kde

- X je vektor vysvetľujúcich premenných,
- *treatment* predstavuje efekt ponúknutia benefitu
- λ predstavuje vplyv ponúknutia benefitu na vysvetľujúce premenné.

Rozdiel skóre potom vypočítame nasledovne:

$$P_{final} = P(r|X, treatment = 1) - P(r|X, treatment = 0) \qquad (3)$$

Tento prístup je vhodnejší oproti použitiu dvoch modelov, nakoľko priamo zachytáva vplyv benefitu. Na druhej strane sa pri jeho konštrukcii môžeme stretnúť s problém štatistickej významnosti jednotlivých parametrov, kde pri ich odhade a „znulovanej" časti rovnice (*treatment=0*) môžu byť následne niektoré parametre nevýznamné.

[1] Zdroj: [2]

Použitie dvoch modelov – logistická regresia

V prípade použitia dvoch modelov skonštruujeme jeden model s efektom ponúknutia benefitu a druhý model bez tohto efektu:[2]

1. $Logit(P_{target}(r|X,treatment=1)) = \alpha + \beta{*}X + \lambda{*}treatment$ (4)
2. $Logit(P_{control}(r|X,treatment=0)) = \alpha + \beta{*}X$

kde

- X je vektor vysvetľujúcich premenných
- *treatment* predstavuje efekt ponúknutia benefitu (0/1)
- λ predstavuje vplyv ponúknutia benefitu na vysvetľujúce premenné

Následne vypočítame „uplift“ skóre ako rozdiel dvoch skóre medzi cieľovou skupinou v prípade ponúknutia benefitu a kontrolnou skupinou:

$$P_{final} = P_{target}(r|X,treatment=1) - P_{control}(r|X,treatment=0) \qquad (5)$$

Pri tomto postupe získavame výhodu použitia dvoch jednoduchých modelov. Na druhej strane, náhodná zložka je použitím dvoch modelov vo finálnom skóre prítomná vo väčšej miere, ako by bolo v prípade len jedného modelu.

4. Uplift prístup v praxi

Postup modelovania

V prípade použitia tohto prístupu v praxi by postup výpočtu skóre s cieľom identifikovať inkrementálnych zákazníkov s pravdepodobnosťou nákupu mohol vyzerať nasledovne:

1. vytvorenie dátového setu s vhodnými vysvetľujúcimi premennými,
2. vytvorenie základného PTB modelu, identifikovanie dôležitých vysvetľujúcich premenných,
3. pilotná kampaň na identifikovaných zákazníkoch, s vhodne zvolenou kontrolnou skupinou,
4. vytvorenie nového datasetu, ktorý bude obsahovať:
   - pôvodné vysvetľujúce premenné identifikované PTB modelom
   - + (nové vysvetľujúce premenné vychádzajúce z PTB modelu) prenásobené hodnotou control_target 0/1,
5. odhadnutie modelu na novom datasete, keď response = 0,
6. odhadnutie modelu na novom datasete, keď response = 1,
7. finálne skóre získame rozdielom skóre pre response = 1 a response = 0,
8. pilotná kampaň zameraná na uplift model, následne porovnanie oproti amotnému PTB modelu a zhodnotenie prínosu.

[2] Zdroj: [2]

5. Záver

V tomto stručnom úvode autor priblížil problematiku klasickej odozvy a inkrementálnej odozvy v priamych marketingových kampaniach a možné riešenie tohto problému. V ďalšej časti uviedol príklad postupu riešenia pomocou jedného, resp. dvoch modelov s využitím logistickej regresie. Nakoľko táto oblasť vyžaduje ďalšie poznanie, či už samotnej problematiky, ale tiež viacrozmerných štatistických metód, môžeme tento príspevok považovať naozaj len za stručný prehľad v danej problematike.

Literatúra

[1] Nicholas Radclife, Generating Incremental Sales, Stochastic Solution Limited, 2008

[2] Andy Littleton, Driving business decision for maximal impact through uplift modeling, SAS Forum Moscow, 2011

[3] Sołtys M., Jaroszewicz S., Rzepakowski P., Ensemble methods for uplift modeling, Springer, 2014

.

Kontakt autora:

Andrej Mišovič, Ing. (4. ročník, 3. stupeň)
Katedra štatistiky, FHI, EU BA
andrej.misovic@gmail.com

ZÁVER

5. vedecký seminár doktorandov
v študijnom odbore 3.3.24 Kvantitatívne metódy v ekonómii

APLIKÁCIE KVANTITATÍVNYCH METÓD V EKONÓMII

Zborník neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.
Za jazykovú a obsahovú úpravu sú zodpovední jednotliví autori príspevkov.

Fakulta hospodárskej informatiky
Ekonomická univerzita v Bratislave
Dolnozemská cesta 1/b
852 35 Bratislava

ISBN
978-80-225-4197-8