Katedra štatistiky,
Fakulta hospodárskej informatiky,
Ekonomická univerzita v Bratislave

Pravdepodobnostné modelovanie inverznými distribučnými funkciami: Modifikačné pravidlá pre kvantilové funkcie

Ľubica SIPKOVÁ

Máj 2009

4. z cyklu prezentácií

Dva prístupy ku kvantilovému modelovaniu

1. Aplikovať „odskúšané“ komplexné elastické tvary

– **použiť známe zovšeobecnené tvary**

2. Kombinovať jednoduché kvantilové tvary pomocou matematického aparátu a dať im príslušnú váhu v častiach rozdelenia

– **skladaním kvantilového tvaru „na mieru“**

Modelovanie skladaním kvantilových tvarov

- **rozdelenia v základnom tvare** známeho jednoduchého kvantilového rozdelenia

- bez parametrov polohy a stupnice (rozloženia)

potrebné **identifikovať tvar** zvlášť pre časti rozdelenia na základe empirického rozdelenia (dolného a horného konca)

- možno modifikovať kvantilové funkcie pomocou matematických operácií (**základné pravidlá modifikácie kvantilových funkcií**, str. 53 citovanej monografie)

- zvoliť **vhodné váhy** týmto tvarom

Jednoduchý kvantilový model

$$F^{-1}(p) = Q(p) = \lambda + \eta \boxed{S(p),} \qquad 0 \le p \le 1$$

všeobecný kvantilový tvar

- môže ľahko meniť polohu a variabilitu

parameter polohy (stredového umiestnenia)

parameter škály, stupnice, rozloženia (variability)

základný (normovaný) kvantilový tvar - zahŕňa len vlastné parametre tvaru

JQM môže byť lineárnym alebo semilineárnym

dvoj a viac-parametrickým

Zložený kvantilový model

$$Q(p) = \lambda + \eta\left[S_1(p) + S_2(p)\right],\ 0 \le p \le 1$$

všeobecný kvantilový tvar

- môže ľahko meniť polohu a variabilitu

parameter polohy (stredového umiestnenia)

parameter škály, stupnice, rozloženia (variability)

I. základný kvantilový tvar (má vlastné parametre tvaru)

II. základný kvantilový tvar- (má vlastné parametre tvaru)

ZQM môže byť lineárnym alebo semilineárnym dvoj a viac-parametrickým

Základné pravidlá modifikácie Q-funkcií

1. pravidlo normovania
2. pravidlo reflexie
3. pravidlo sčítania
4. pravidlo stredového umiestnenia
5. pravidlo o násobení
6. pravidlo o reciprocite
7. pravidlo Q-transformácie
8. U-transformačné pravidlo
9. *p* -transformačné pravidlo

1. Pravidlo normovania

$$Q(p) = \lambda + \eta S(p), \quad 0 \le p \le 1$$

Ak *S*(*p*) je **normovaný tvar** kvantilového rozdelenia:

- má nulovú strednú hodnotu (medián) a jednotkovú variabilitu (meranú lineárnou mierou)
- $\boldsymbol{\lambda}$ je miera stredového umiestnenia - jeho stredná hodnota (medián)
- $\boldsymbol{\eta}$ je lineárna miera jeho variability (napr. kvartilové rozpätie)

Symetrické logistické rozdelenie

- **normovaný tvar** kvantilovej funkcie :

$\boldsymbol{S(p) = \ln (p/(1 - p))/(2 \ln 3)}$, kde $\boldsymbol{0 < p < 1}$

- **základný tvar** kvantilovej funkcie :

$\boldsymbol{S(p) = \ln (p/(1 - p)), 0 < p < 1}$

- **všeobecný tvar** kvantilovej funkcie:

$\boldsymbol{Q(p) = \lambda + \eta \ln(p/(1 - p)), 0 < p < 1}$

2. Pravidlo reflexie

Nová kvantilová funkcia, k pôvodnej $Q(p)$ súmerná podľa stredu $[p = 0{,}5\ ; x = 0]$

má tvar $-\boldsymbol{Q(1-p)}$ a nazýva sa jej reflexiou.

$Q(p)$ a $-Q(1-p)$ **sú vzájomné reflexie**

Znamená to, že ak pôvodné rozdelenie bolo kladne zošikmené s predĺženým koncom doprava, rozdelenie získané podľa pravidla reflexie bude záporne asymetrické s predĺženým koncom na ľavej strane

(funkcie hustôt reflexných rozdelení sú zrkadlovo symetrické, bodovo súmerné)

Exponenciálne rozdelenie

- **základný tvar exponenciálneho rozdelenia (Exp):**

$$S_1(p) = -\ln(1-p),\ 0 \leq p < 1$$

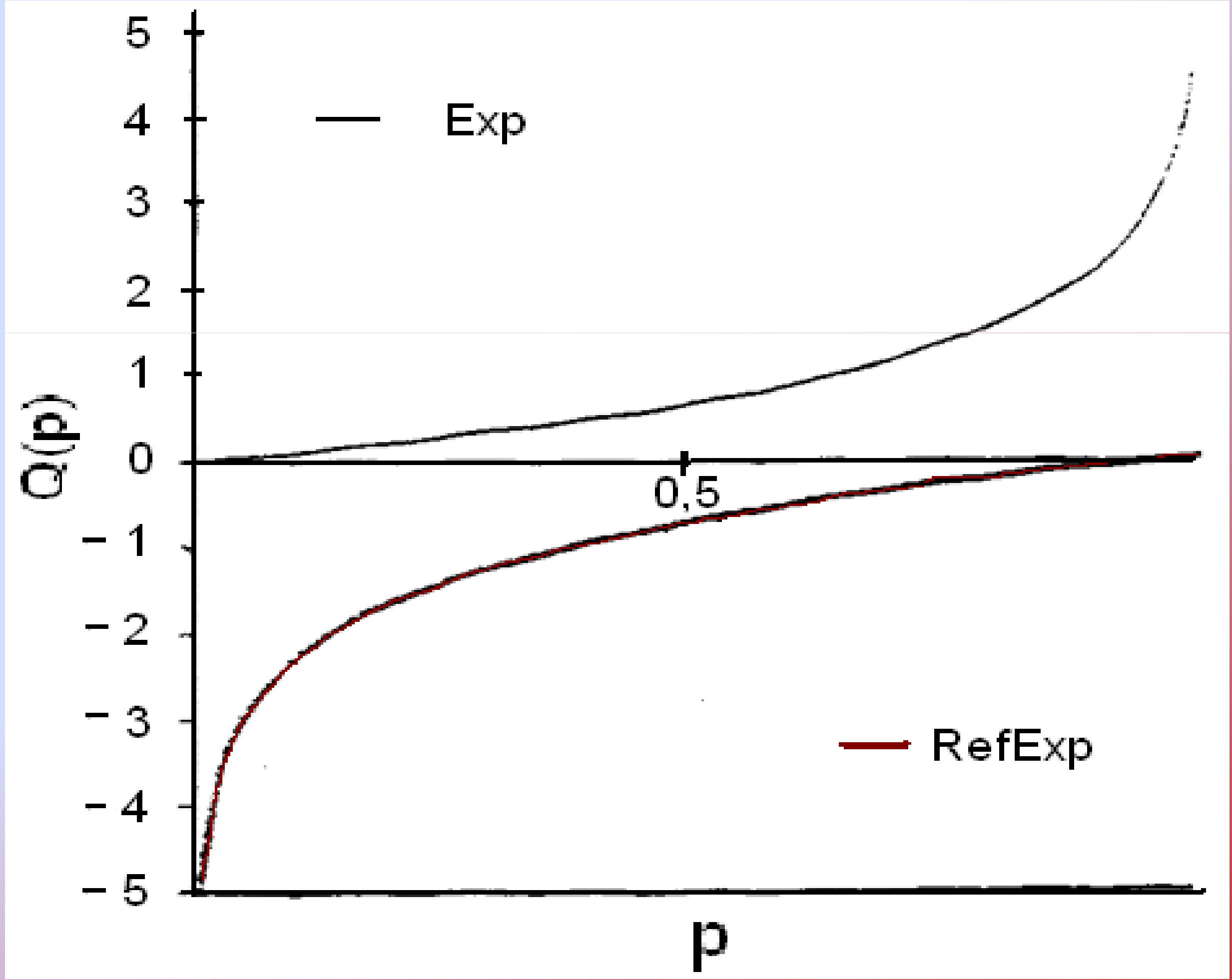
- **tvar reflexie (RefExp):**

$$S_2(p) = \ln(p),\ 0 < p \leq 1$$

$$-\ln(1-p) \quad \text{a} \quad \ln(p), \qquad 0 < p < 1$$

sú vzájomné reflexie

Kvantilová funkcia exponenciálneho (Exp) a reflexne-exponenciálneho rozdelenia (RefExp)



3. Pravidlo sčítania

súčtom dvoch neklesajúcich kvantilových funkcií je znovu neklesajúca kvantilová funkcia

$$Q(p) = Q_1(p) + Q_2(p)$$

platnosť tiež pre základné tvary:

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p)$$

$S_1(p)$ a $S_2(p)$ **môžu byť vzájomnou reflexiou**

Súčet Exp a RefExp je logistické rozdelenie

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p)$$

$$S_1(p) = -\ln(1-p),\ 0 \le p < 1$$
$$S_2(p) = \ln(p),\ 0 < p \le 1$$

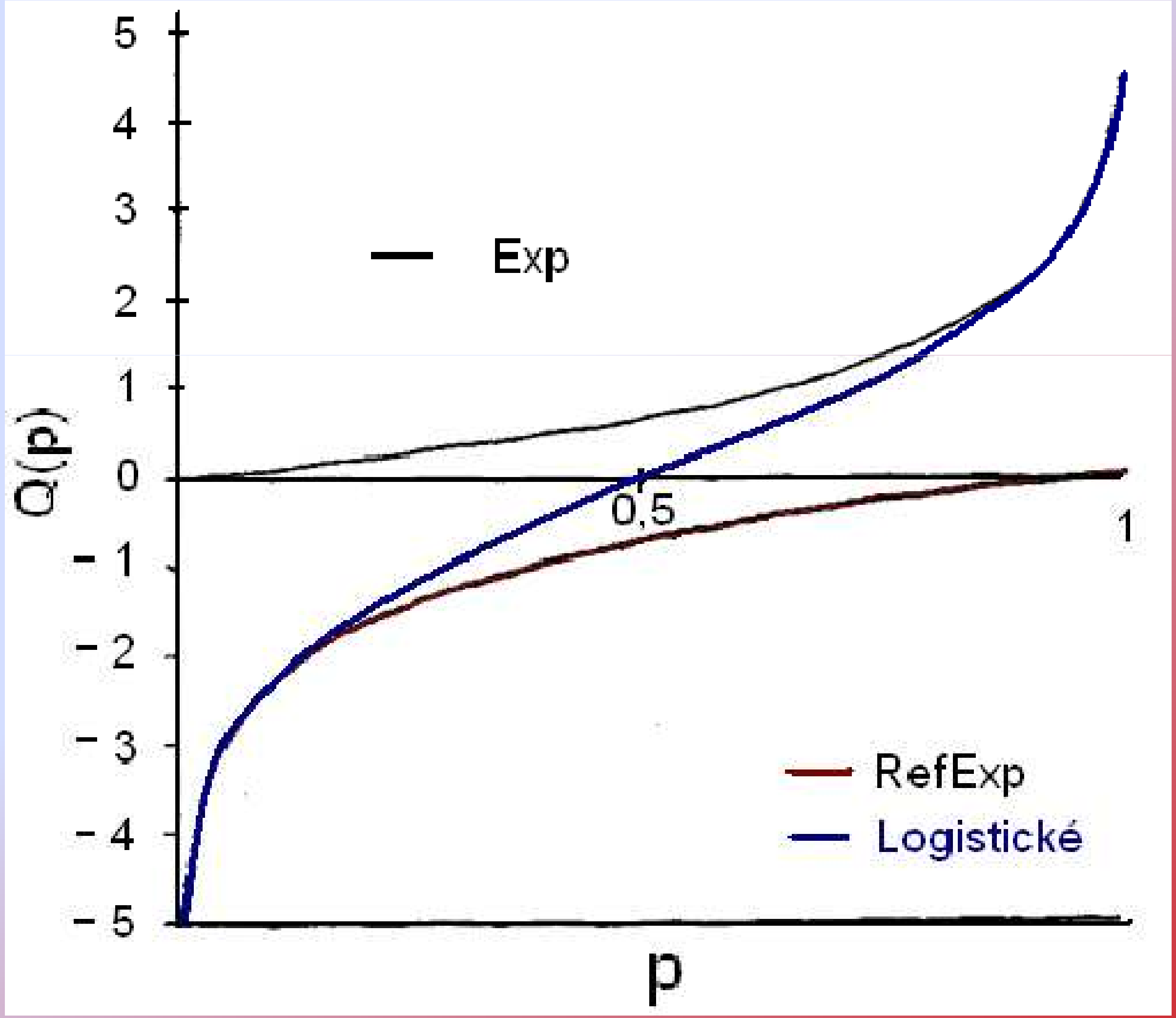
Ich súčet:

$$S(p) = -\ln(1-p) + \ln(p),\ 0 < p < 1$$

Po úprave je logistické rozdelenie (logistic):

$$S(p) = \ln[p/(1-p)],\ 0 < p < 1$$

Súčet exponenciálneho a reflexne-exponenciálneho rozdelenia, t.j. kvantilová funkcia logistického rozdelenia



4. Pravidlo stredového umiestnenia I.

Kvantilová funkcia rozdelenia, ktoré vzniklo súčtom dvoch reflexných kvantilových funkcií leží medzi reflexnými rozdeleniami a prechádza bodom ich súmernosti

Ak $Q(p) = Q_1(p) + Q_2(p)$

pričom $Q_1(p)$ a $Q_2(p)$ sú vzájomné reflexie

a zároveň $Q_1(p) < Q_2(p)$

podľa pravidla platí: $Q_1(p) \leq Q(p) \leq Q_2(p)$

$0 \leq p \leq 1$

Stredové umiestnenie logistického rozdelenia

- symetrické logistické rozdelenie v základnom tvare:

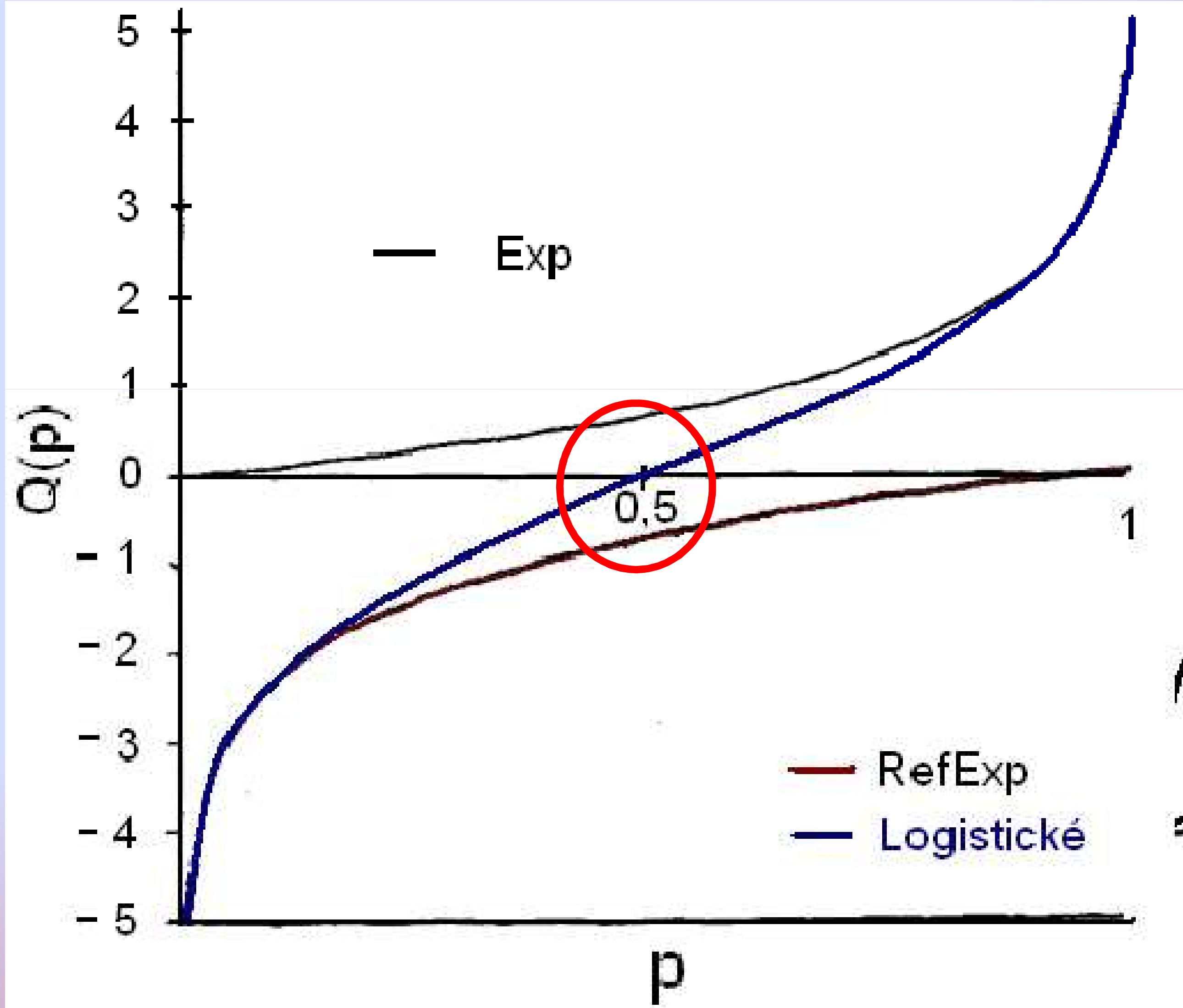
$$S(p) = \qquad S_1(p) \quad + \quad S_2(p)$$

$$S(p) = -\ln(1-p) \; + \quad \ln(p)\ ,\ 0 < p < 1$$

$S_1(p)$, $S_2(p)$ sú vzájomné reflexie a $S_1(p) < S_2(p)$

- Kantilová funkcia logistického rozdelenia leží medzi Exp a RefExp rozdeleniami a prechádza bodom ich súmernosti

Logistické rozdelenie leží medzi Exp a RefExp a prechádza bodom ich súmernosti



4. Pravidlo stredového umiestnenia II.

Kvantilová funkcia rozdelenia, ktoré vzniklo súčtom dvoch reflexných kvantilových funkcií, leží medzi reflexnými rozdeleniami.

Ak dáme sčítancom rôznu váhu ω a $(1-\omega)$, tvarujeme výsledné rozdelenie v prospech niektorého z rozdelení.

Vznikne **asymetrické rozdelenie**, ktorého kvantilová funkcia leží medzi reflexnými rozdeleniami (neprechádza bodom ich súmernosti).

Ak $$Q(p) = \omega\, Q_1(p) + (1-\omega)\, Q_2(p),$$

$Q_1(p)$ a $Q_2(p)$ sú reflexie a $Q_1(p) < Q_2(p)$

podľa pravidla platí:

$$Q_1(p) \leq Q(p) \leq Q_2(p)$$

kde $0 \leq \omega \leq 1,\ 0 \leq p \leq 1$

Voľba váh ω a $(1 - \omega)$

$Q_1(p)$ a $Q_2(p)$ môžu mať ľubovolný tvar kvantilového rozdelenia s ich základnými tvarmi $S_1(p)$ a $S_2(p)$.

Pre ich vážený súčet platí:

$$S(p) = \omega\, S_1(p) + (1 - \omega)\, S_2(p),$$ kde $0 \le \omega \le 1$

rozdelenie je tvarom zošikmeného rozdelenia.

Váhu ω možno vyjadriť vo výhodnom tvare pomocou parametra δ, $(-1 \le \delta \le 1)$: $\omega = (1 + \delta)/2$

s podobnou interpretovanosťou ako koeficient šikmosti.

Dostaneme:

$$S(p) = (1 + \delta)/2\; S_1(p) + (1 - \delta)/2\; S_2(p),$$

kde $-1 \le \delta \le 1$, $0 \le p \le 1$

Váhy asymetrického logistického rozdelenia

- asymetrické logistické rozdelenie v základnom tvare:

$$S(p) = \omega \; S_1(p) + (1 - \omega) \; S_2(p)$$

$$S(p) = \omega \, [- \ln (1 - p)] + (1 - \omega) \ln(p) \,, \; 0 < p < 1$$

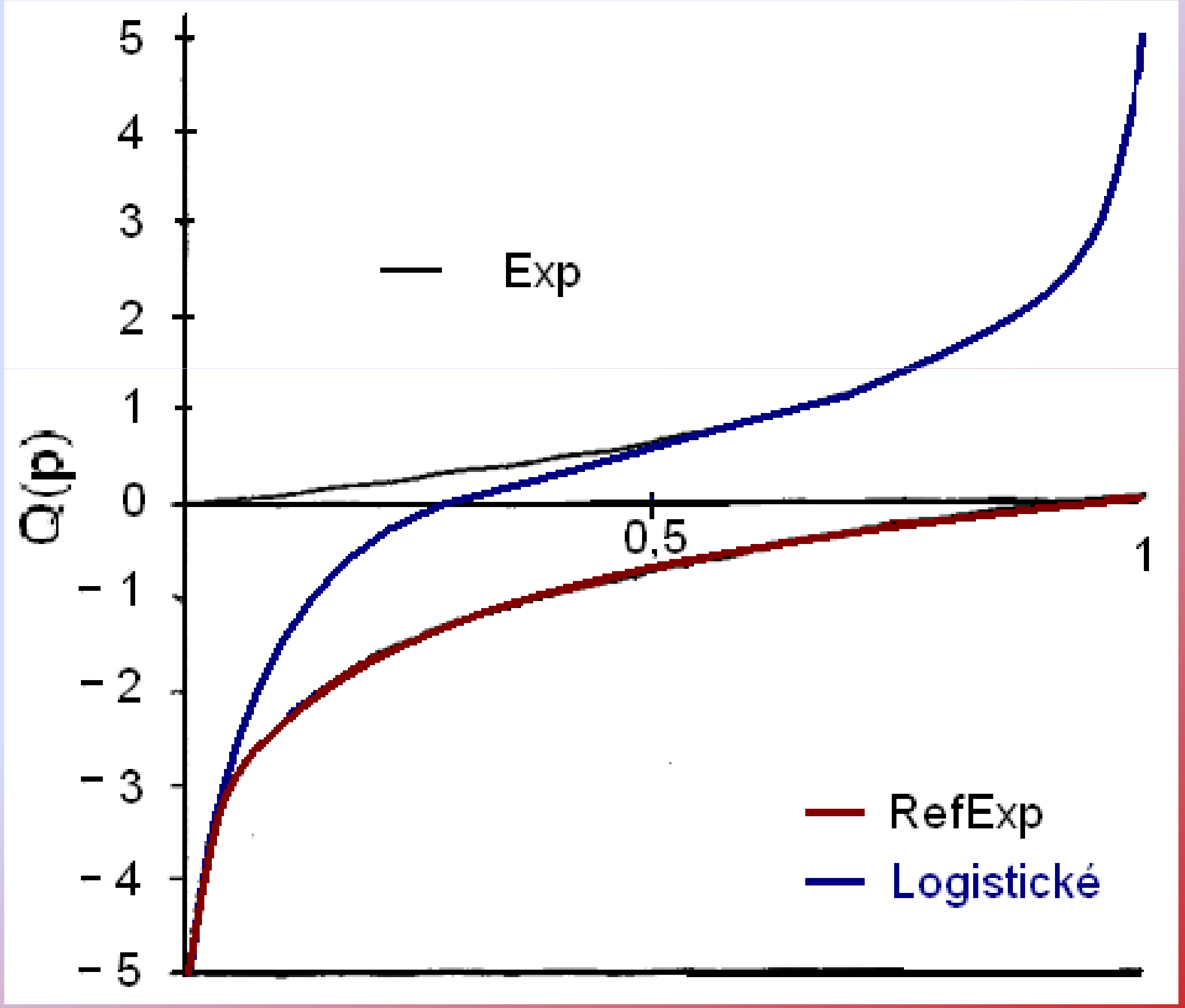
$$S(p) = [(1 + \delta)/2][- \ln (1 - p)] + [(1 - \delta)/2][\ln (p)]$$

kde $-1 \leq \delta \leq 1, \; 0 \leq p \leq 1$

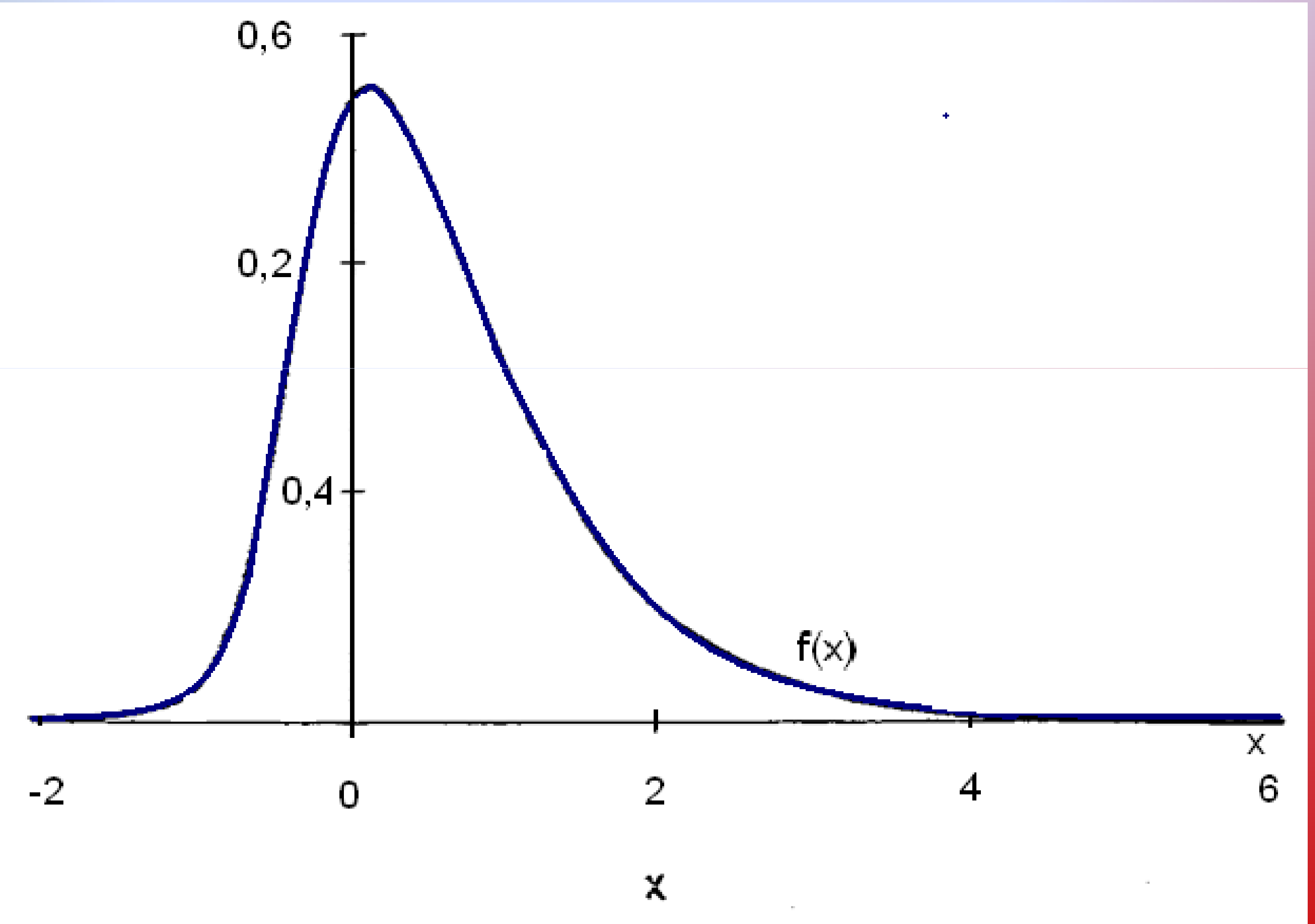
Kvantilová funkcia asymetrického logistického rozdelenia leží medzi Exp a RefExp rozdeleniami.

- **Tvar a veľkosť jej asymetrie závisí od parametra δ.**
- **Ak $\delta = 0$ ide o symetrické normované logistické rozdelenie.**
- **Logistické rozdelenie, nemá explicitnú formu vyjadrenia DF a funkcie hustoty.**

Kvantilová funkcia asymetrického logistického rozdelenia leží medzi Exp a RefExp



Funkcia hustoty
Zošikmeného logistického rozdelenia



5. Pravidlo o násobení

Násobením dvoch kladných kvantilových funkcií získeme opäť kvantilovú funkciu

$$Q(p) = Q_1(p) \times Q_2(p)$$

pre základné tvary:

$$S(p) = S_1(p) \times S_2(p)$$

kde $0 \leq p \leq 1$

Súčinové mocninovo-Paretove rozdelenie

$$\mathrm{Po}(\alpha)\times\mathrm{Pa}(\beta)$$

- **základný tvar mocninového (power) rozdelenia** $\mathrm{Po}(\alpha)$:

$$S_1(p) = p^\alpha, \text{ kde } \alpha > 0,\ 0 \le p \le 1$$

- **základný tvar Paretovho rozdelenia** $\mathrm{Pa}(\beta)$:

$$S_2(p) = 1/(1-p)^\beta, \text{ kde } \beta > 0,\ 0 \le p < 1$$

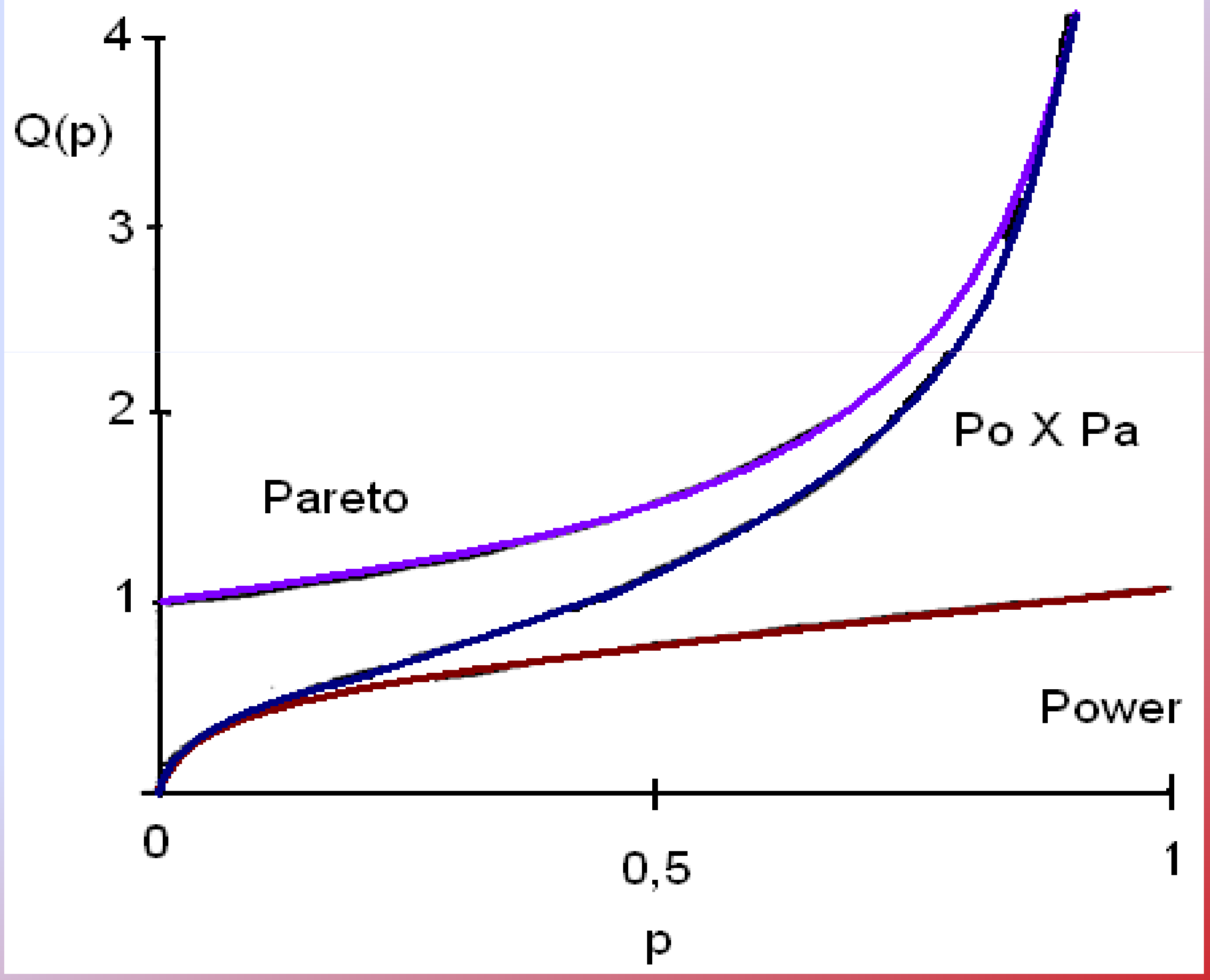
- **súčinom mocninovo-Paretove rozdelenie :**

$$S(p) = p^\alpha/(1-p)^\beta, \text{ kde } \beta > 0,\ \alpha > 0,\ 0 \le p < 1$$

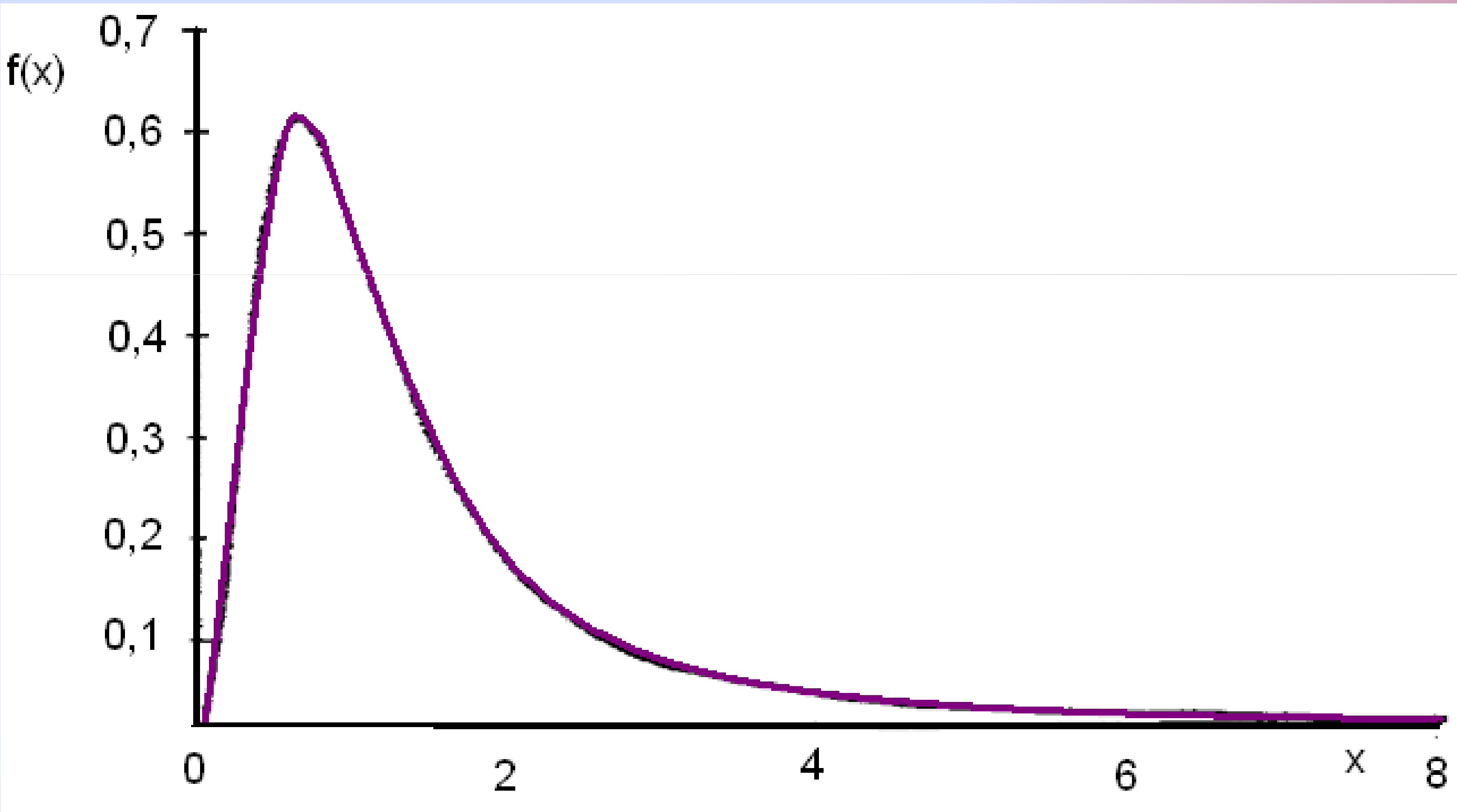
$\mathrm{Po}(\alpha)\times\mathrm{Pa}(\beta)$ **rovnako ako logistické rozdelenie, nemá explicitnú formu vyjadrenia DF a funkcie hustoty**

Súčinové rovnomerno-Paretove rozdelenie U×Pa(β), je špeciálnym prípadom rozdelenia $\mathrm{Po}(\alpha)\times\mathrm{Pa}(\beta)$ **pre** $\alpha = 1$

Kvantilová funkcia mocninového (Power) a Paretovho (Pareto) rozdelenia



Funkcia hustoty mocninovho-Paretovho rozdelenia (Po x Pa)



6. Pravidlo o reciprocite

Kvantilová funkcia pravdepodobnosti p pre prevrátenú hodnotu $1/x$ náhodnej premennej je prevrátenou hodnotou kvantilovej funkcie v $\mathbf{(1-p)}$**.**

Ak $\boldsymbol{y_p}$ je $\boldsymbol{p}$-kvantil prevrátenej hodnoty $1/x_p$, potom:

$$\boldsymbol{Q(p) = 1/x_p}$$

$$\boldsymbol{x_p = Q(1-p)}$$

$$\boldsymbol{y_p = 1/Q(1-p),} \qquad \textbf{kde} \quad \boldsymbol{0 \le p \le 1}$$

Pravidlo o reciprocite je jednou z aplikácií pravidla *Q-transformácie*.

Paretovo rozdelenie ako mocninové rozdelenie premennej 1/*X*

Využitím pravidla o reciprocite Paretovo rozdelenie možno definovať ako mocninové (power) rozdelenie prevrátenej hodnoty premennej.

- **mocninové (power) rozdelenie má QF tvaru :**

$$Q(p) = p^{\beta}, \text{ kde } \beta > 0$$

- **podľa pravidla možno získať rozdelenie prevrátenej hodnoty NP:**

$$Q_{1/x}(p) = 1/x_p$$

$$Q_{1/x}(p) = 1/Q(1 - p)$$

- **po dosadení:** $Q_{1/x}(p) = 1/(1 - p)^{\beta}$

čo je kvantilová funkcia Paretovho rozdelenia $\mathrm{Pa}(\beta)$

kde $\beta > 0,\ 0 \leq p < 1$

7. Pravidlo Q-transformácie

Pravidlo Q-transformácie umožňuje používať transformáciu kvantilovej funkcie namiesto rôznych transformácií premennej, má preto rozsiahle použitie.

Podľa neho:

- ak transformujúca funkcia $z = T(x)$ je neklesajúcou funkciou x, potom $T(Q(p))$ je kvantilovou funkciou:

$$Q_{T(X)}(p) = T(Q_X(p))$$

- ak $T(x)$ je nerastúcou funkciou, potom $T(Q(1-p))$ je kvantilovou funkciou:

$$Q_{T(X)}(p) = T(Q_X(1-p))$$

Transformácia kvantilovej funkcie exponenciálneho rozdelenia na Weibullov tvar

- **tvar transformácie:**

$$T(x) = x^{\beta}, \qquad \text{kde } \beta > 0,\ 0 \leq p \leq 1$$

- **dosadením do základného tvaru exponenciálneho rozdelenia (Exp):**

$$S(p) = -\ln(1-p),\ 0 \leq p < 1$$

- **dostaneme kvantilovú funkciu Weibullovho rozdelenia v základnom tvare :**

$$T(S(p)) = [-\ln(1-p)]^{\beta}, \text{ kde } \beta > 0,\ 0 \leq p < 1$$

- **všeobecný tvar Weibullovho rozdelenia:**

$$Q(p) = \lambda + \eta\,[-\ln(1-p)]^{\beta}$$

8. U - transformačné pravidlo

pravidlo dovoľuje akúkoľvek premennú vyjadriť ako Q(*u*), kde *U* je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením

$$Q(Q_U(p)) = x$$

pre rovnomerné rozdelenie platí:

$$Q_U(p) = p \,,$$

pretože pri rovnomernom rozdelení a $0 \leq p \leq 1$ platí:

$$p = u$$

premenná X, kde $x = Q(u)$, má kvantilové rozdelenie $Q(p)$

Uvedená transformácia je zhodou okolností aj prípadom

p-transformácie.

Symetrické logistické rozdelenie

- **normovaný tvar** kvantilovej funkcie :

$$S(p) = \ln (p/(1 - p))/(2 \ln 3), \text{ kde } 0 < p < 1$$

- **základný tvar** kvantilovej funkcie :

$$S(p)= \ln (p/(1 - p)), 0 < p < 1$$

- **všeobecný tvar** kvantilovej funkcie:

$$Q(p) = \lambda + \eta \ln(p/(1 - p)), 0 < p < 1$$

9. *p* - transformačné pravidlo

Podľa p-transformačného pravidla funkcia

$$Q(H(p))$$

je kvantilovou funkciou s tým istým oborom funkčných hodnôt ako $Q(p)$ ak:

- $H(p)$ je neklesajúcou **normovanou** funkciou p
- $0 \leq p \leq 1$
- platí $H(0) = 0$ a $H(1) = 1$

Mocninová (power) transformácia *p*

Príkladom môže byť mocninová (power) transformácia p, t.j. p^{α}, pre $\alpha > 0$, pri Weibullovom rozdelení :

- **základný tvar kvantilovej funkcie Weibullovho rozdelenia**:

$$S(p) = [-\ln(1-p)]^{\beta}, \text{ kde } \beta > 0,\ 0 \le p < 1$$

- **tvar zovšeobecneného mocninového Weibullovho rozdelenia:**

$$S(p) = [-\ln(1-p^{\alpha})]^{\beta}, \text{ kde } \alpha, \beta > 0,\ 0 \le p < 1$$

Základné kvantilové tvary známych pravdepodobnostných rozdelení

Distribution	F(x)	S(p)	Dist. range
Exponential	$1-e^{-x}$	$-\ln(1-p)$	$(0,\infty)$
Uniform	x	p	$(0,1)$
Power	$x^{\frac{1}{\alpha}}$	p^{α}	$(0,1),\ \beta>0$
Pareto	$1-\frac{1}{(1+x)^{\beta}}$	$\frac{1}{(1-p)^{\beta}}$	$(0,\infty),\ \beta>0$
Weibull	$1-e^{-x^{\frac{1}{\beta}}}$	$[-\ln(1-p)]^{\beta}$	$(0,\infty),\ \beta>0$
Extreme value	$e^{-e^{-x}}$	$-\ln(-\ln p)$	$(-\infty,+\infty)$
Logistic	$\frac{1}{1+e^{-x}}$	$\ln\frac{p}{1-p}$	

Možno použiť rôzny tvar váh pre dva konce rozdelenia:

Ako funkcia *p*

$$(1-p) \quad \text{a} \quad p$$

$$\left[1-p^2(3-2p)\right] \quad \text{a} \quad p^2(3-2p)$$

$$\left[1-p^3\left(10-15p+6p^2\right)\right] \quad \text{a} \quad p^3\left(10-15p+6p^2\right)$$

$$1-\omega(p) \quad \text{a} \quad \omega(p)$$

Ako parametre modelu

$$(1-\omega) \quad \text{a} \quad \omega$$

$$\frac{(1+\omega)}{2} \quad \text{a} \quad \frac{(1-\omega)}{2}$$

$$\omega_1(1-p) \quad \text{a} \quad \omega_2 p$$

Semilineárny štvorparametrický Weibull-Paretov kvantilový tvar

(skladanie použitím pravidiel modifikácie kvantilových funkcií)

$$S_{EXP}(p) = -\ln(1-p)$$

$\downarrow$

pravidlo o Q-transformácii

$$T_x\left(S_{EXP}(p)\right) = x^{\beta}$$

$\downarrow$

$$S_{WEIB}(p) = \left[-\ln(1-p)\right]^{\beta}$$

$\downarrow$

$$S_{MOC}(p) = p^{\gamma}$$

$\downarrow$

pravidlo o reciprocite

$$S_{1/x}(p) = \frac{1}{(1-p)}$$

$\downarrow$

$$S_{PAR}(p) = \frac{1}{(1-p)^{\gamma}}$$

$\downarrow$

pravidlo o súčte dvoch kvantilových funkcií

$\downarrow$

Weibulov tvar

Paretov tvar

$$Q(p) = \lambda + \eta\left\{(1-p)\left[-\ln(1-p)\right]^{\beta} + p\left[\frac{1}{(1-p)^{\gamma}}\right]\right\}, 0 < p < 1, \beta > 0, \gamma > 0$$

Pravdepodobnostné modelovanie inverznými distribučnými funkciami: Modifikačné pravidlá pre kvantilové funkcie

Spracovanie štvrtej z cyklu prezentácií o kvantilovom modelovaní.

Podrobnejšie možno nájsť v monografii:

Sipková, Ľ; Sodomová, E.: Modelovanie kvantilovými funkciami, Vydavateľstvo EKONÓM, Bratislava, 2007; 175 s.

ISBN 978-80-225-2346-2

Ľubica SIPKOVÁ

máj 2009